

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS
INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS - IPH
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM RECURSOS HÍDRICOS E SANEAMENTO

**MODELO MATEMÁTICO BIDIMENSIONAL DE TRANSPORTE DE MASSA
EM ELEMENTOS FINITOS COM ÊNFASE EM ESTUÁRIOS**

por

EDITH BEATRIZ CAMAÑO SCHETTINI

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, RS, Outubro de 1991

**Modelo matemático bidimensional de transporte de massa em
elementos finitos com ênfase em estuários**

Trabalho apresentado como parte dos requisitos
para obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA

Autor: Edith Beatriz Camaño Schettini

Orientador: Prof. Luiz Emilio Sá Brito de Almeida

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Luiz Emilio Sá Brito de Almeida, pela orientação recebida,
- À Prof. Nara Rosauo de quem recebi um inmenso apoio,
- A CAPES e PROPESP/UFRGS pelo suporte financeiro,
- Ao CPD/UFRGS pelo apoio recebido durante a execução dos modelos,
- À Sra. Lygia O. Campo, secretária do Curso de Pós-graduação do IPH
- A meus colegas e amigos e todos aqueles que com suas discussões e sua confiança, ajudaram na realização do presente trabalho

SUMÁRIO

RESUMO

ABSTRACT

1. INTRODUÇÃO	1
2. BASES TEÓRICAS	4
2.1 Introdução	4
2.2 Causas de mistura em estuários	6
2.2.1 Mistura causada por vento	6
2.2.2 Mistura causada por maré	6
2.2.3 Mistura devida à descarga de água doce	8
2.3 Difusão e dispersão	8
2.3.1 Difusão vertical	9
2.3.2 Difusão transversal	10
2.3.3 Dispersão longitudinal	12
2.4 Modelação matemática de corpos de água	20
2.4.1 Equações fundamentais	22
2.4.2 Modelo tridimensional, 3-D	25
2.4.3 Modelos bidimensionais, 2-D	27
2.4.3.1 Modelo 2-D integrado na vertical	27
2.4.3.2 Modelo 2-D integrado na horizontal	33
2.4.4 Modelo unidimensional, 1-D	36
2.5 Escolha do modelo	36
3. METODOLOGIA	38
3.1 O modelo matemático	38
3.2 Discretização espacial em elementos finitos	39
3.3 Discretização temporal em diferenças finitas	45
3.4 Condições iniciais e de contorno	46
3.5 Resolução do sistema de equações	47
3.5.1 Escolha do Δt	48
3.5.2 Problemas mais comuns na computação	49

4. APLICAÇÕES E RESULTADOS	52
4.1 Introdução	52
4.2 Aplicações e resultados dos testes teóricos	52
4.2.1 Teste teórico para o modelo hidrodinâmico	52
4.2.2 Teste teórico para o modelo de transporte de massa	55
4.3 Aplicações do modelo ao estuário da Laguna dos Patos	61
4.3.1 Dados de entrada gerais	63
4.3.2 Cruzeiro MS XII - 3 e 4 de Outubro de 1984	67
4.3.3 Cruzeiro MS XV - 4 e 5 de dezembro de 1984	70
5. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	81
5.1 Conclusões	81
5.2 Recomendações	84
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86

RESUMO

O estudo dos fenômenos de transporte de substâncias em corpos de águas rasas, em particular em estuários, tem tido uma importância crescente nos últimos anos, devido ao aumento do uso deste recurso e ao crescente grau de poluição dos mesmos.

O objetivo do presente trabalho é apresentar o desenvolvimento e aplicação de um modelo matemático de transporte de massa bidimensional integrado na vertical. O método numérico utilizado é o de elementos finitos com o critério de Galerkin, para a integração espacial, e o de diferenças finitas para a integração temporal. Este modelo tem como dados de entrada, além da geometria do corpo de água, os campos de velocidades e níveis obtidos a partir de um modelo hidrodinâmico bidimensional, horizontal, desenvolvido anteriormente.

Os resultados de vários testes teóricos são apresentados, os quais serviram para a verificação e definição dos intervalos de validade dos parâmetros envolvidos para ambos os modelos. A análise é realizada em função dos números de Courant (para o modelo hidrodinâmico) e Péclet (para o modelo de transporte de massa).

Especial atenção é dada à correta escolha do tensor de difusão, o qual deve levar em conta os efeitos do escoamento oscilatório e residual, bem como outros tipos de irregularidades da morfologia (sacos, canais e várzeas).

Duas aplicações ao estuário da laguna dos Patos são apresentadas, e os resultados são comparados com dados observados. Um bom ajuste do modelo hidrodinâmico (levando em conta velocidades residuais e gradientes de níveis entre a laguna e o mar) é necessário para um bom ajuste do modelo de transporte de massa. Deve-se salientar, também, que a obtenção das condições iniciais para este último é um fator de vital importância, devido a que o sistema apresenta uma memória longa em relação aos tempos de simulação, normalmente de um dia.

O modelo desenvolvido apresenta-se como sendo amplamente satisfatório na simulação de problemas de transporte de massa para estuários bem misturados ou parcialmente estratificados.

ABSTRACT

The study of transport phenomena in shallow water, mainly in estuaries, has been growing in importance during the last years. The reason is the increasing use of these resources and the consequent increase in pollution.

This work presents the development and applications of a two-dimensional vertically integrated mass transport mathematical model. The finite element method is used with Galerkin criterion for the spacial integration, and the finite differences method for the time integration. The depths and velocity fields for every time step are supplied by a bidimensional hydrodynamical model previously developed.

The results of several tests are presented. These tests were used for establishing and/or verifying the applicability range of the parameters used in both models. The analyses was carried on for different Courant (for the hydrodynamical model) and Péclet (for the mass transport model) numbers.

The choice of the diffusion tensor was carefully analysed, as it has to take account both oscillating and residual flows, as well as morfological irregularities (pockets, channels and small depth areas).

Two applications, both for Patos lagoon, are presented, and their results compared with observed data. The comparison shows that, for a good agreement between observed and calculated concentration, good results from the hydrodynamical model are essential. The model must especially include the effect of residual velocities and knowledge of the lagoon-sea level gradient is also needed. It is to be noted that the initial condition for the transport model are very important, since the simulated system has a long memory, especially when compared with the one-day simulation time.

The mass transport model showed to be satisfactory for the simulation of well mixed or, at least, partially stratified estuaries.

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

As zonas costeiras, e os estuários em particular, têm sido através dos tempos, as zonas preferidas pelo homem para seu assentamento.

Em contraposição ao meio terrestre, relativamente pobre em água, e ao meio marinho, relativamente pobre em nutrientes, os estuários aparecem como locais privilegiados para o desenvolvimento da flora e da fauna.

Isto pode ser explicado pela própria definição de estuário devida a Pritchard (1967). O autor define estuário, como sendo um corpo de água costeiro semi-fechado onde há uma alternância de água salgada e doce, com importantes processos de mistura. É esta alternância, somada a sua geomorfologia e clima, que permite a existência da grande variedade de espécies animais e vegetais.

Para a atividade humana eles apresentam um interesse considerável, constituindo, seja um abrigo natural, seja uma via de saída ao oceano ou acesso ao interior do continente. As profundidades maiores nele encontradas facilitam a navegação e a localização de grandes portos.

Atualmente, rios e estuários são usados como coletores de esgotos domésticos e industriais que, embora não sejam considerados totalmente nefastos após sofrerem algum tratamento, deterioram a qualidade da água e a vida nele existente. Na última década têm-se intensificado os estudos destes ecossistemas e a luta pela sua sobrevivência. No mundo científico, oceanólogos, biólogos e engenheiros, entre outros profissionais, estão trabalhando na sua melhor compreensão e preservação. Tem sido uma ajuda importante o fato da humanidade começar a tomar consciência da necessidade de manter a vida no mundo, como uma necessidade da própria subsistência.

Um problema comum dentro da engenharia consiste em determinar a capacidade do estuário em transportar descargas contaminantes e substâncias nele diluídas para, a partir daqui, indicar a utilização ou não de tratamentos para estas águas servidas. Outro problema comum (e que será tratado neste trabalho) é a determinação da penetração de água salgada sob determinadas condições hidráulicas e meteorológicas. Este problema é importante, por exemplo, na localização de tomadas de água para consumos diversos.

O transporte de salinidade, e de qualquer outro constituinte, é realizado através de uma série de mecanismos conhecidos como mistura, que dependem de vários fatores, tais como: vento, correntes e morfologia. Estes mecanismos podem ser divididos em dois grupos: os que produzem o transporte advectivo e os que produzem o transporte difusivo.

O transporte advectivo é realizado pelo campo de escoamento, que é condicionado principalmente por fatores astronômicos (maré), meteorológicos (vento), sazonais (descarga de água doce) e por efeitos secundários, como a aceleração de Coriolis.

O transporte difusivo que abrange a difusão molecular e turbulenta, é originado fundamentalmente pela turbulência do escoamento dado que a difusão molecular é muito menos significativa.

O presente trabalho tem como objetivo a elaboração, verificação e aplicação de um modelo matemático bidimensional horizontal de transporte de massa. Os campos de velocidades e níveis são obtidos de um modelo hidrodinâmico já existente [Rosauró, 1986]. São apresentados vários testes teóricos, visando definir os intervalos de validade dos parâmetros envolvidos. São apresentadas duas aplicações ao estuário da Laguna dos Patos - Rio Grande do Sul (Fig. 1.1).

O constituinte a modelar é a concentração salina para diversas condições de maré, vento e descarga de água doce da bacia de drenagem contribuinte.

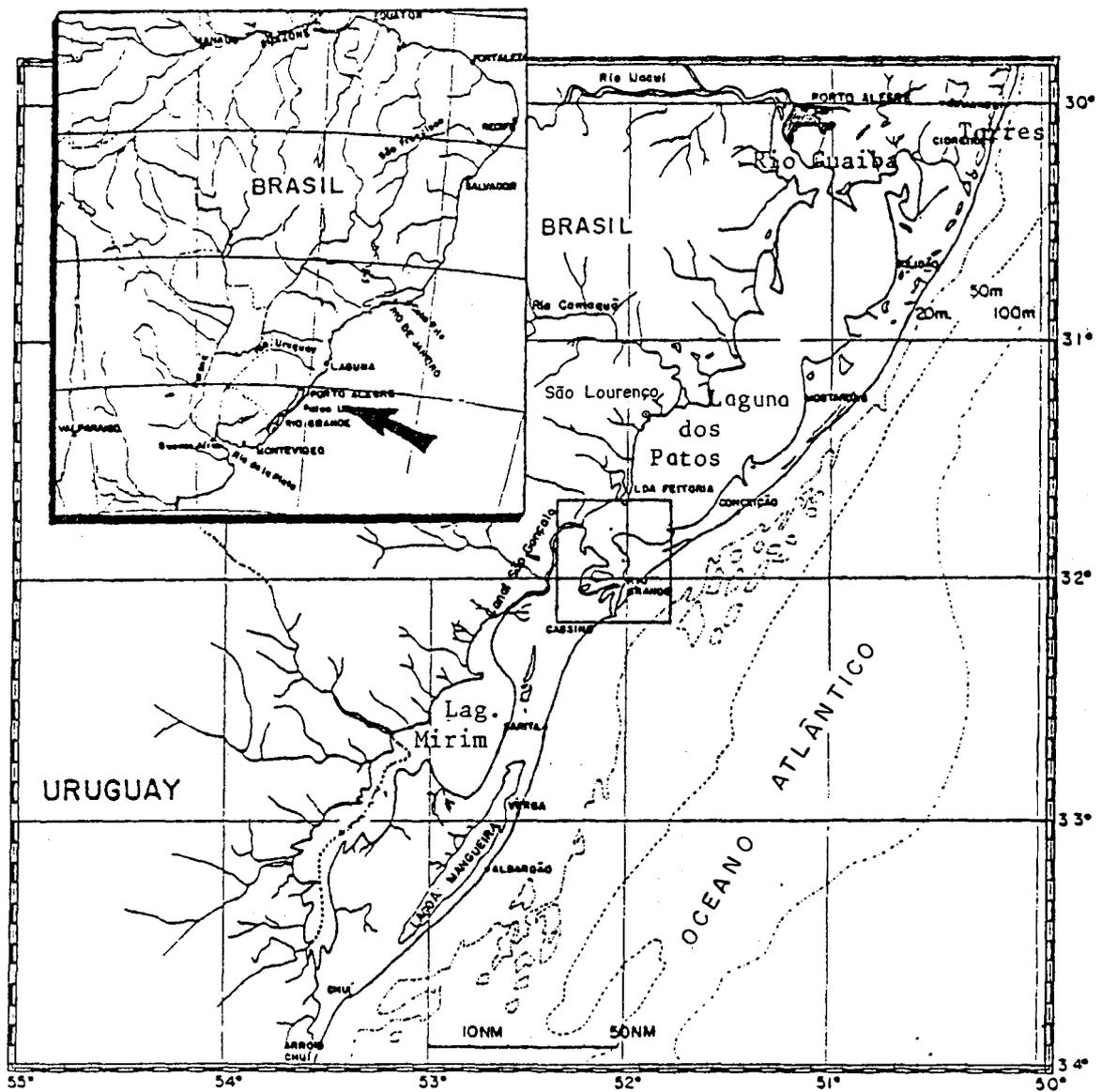


Fig 1.1 - Estuário da laguna dos Patos [Kantin, 1983]

O método de resolução numérica escolhido foi o dos elementos finitos, por apresentar uma grande versatilidade na representação de regiões com geometrias complexas, a possibilidade de poder variar o tamanho dos elementos que compõem a malha e facilidade na incorporação das condições de contorno do problema.

CAPÍTULO 2 - BASES TEÓRICAS

2.1 - Introdução

Para assegurar que o uso dos estuários pelo homem não repercutirá negativamente, é preciso compreender e prever os efeitos que esta prática pode acarretar. Da mesma forma que os trabalhos de engenharia não devem transtornar o equilíbrio natural do estuário, é importante saber dimensionar e localizar ditas obras para não serem prejudicadas pelo movimento natural do estuário.

A previsão destes efeitos requer um conhecimento da circulação e mistura nos estuários, causadas pelo efeito conjunto da maré, das condições meteorológicas, das descargas fluviais e da morfologia local. Os vários aspectos deste escoamento produzem três categorias "hidrodinâmicas" de estuários [Fischer et alii, 1979] (Fig. 2.1):

- a) estuários perfeitamente estratificados (Fig. 2.1a),
- b) estuários parcialmente estratificados, nos quais existe um gradiente de concentração vertical (Fig. 2.1b), e
- c) estuários bem misturados (Fig. 2.1c).

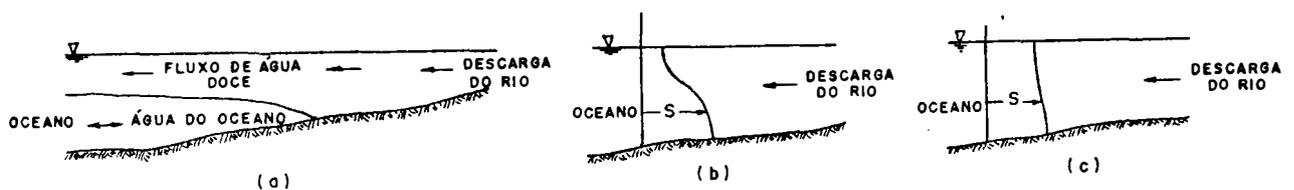


Fig. 2.1 - Distribuição de salinidade para as diferentes categorias de estuários

A mistura em estuários resulta da combinação da difusão turbulenta, de pequena escala, e do efeito do gradiente de velocidade na vertical, de escala maior. A soma destes dois mecanismos se denomina dispersão (Fig. 2.2). A consequência da difusão turbulenta é a transferência de massa através das linhas de corrente. Ocorre também difusão turbulenta na direção do escoamento, mas comparada ao efeito do gradiente de velocidades sua importância é menos significativa.

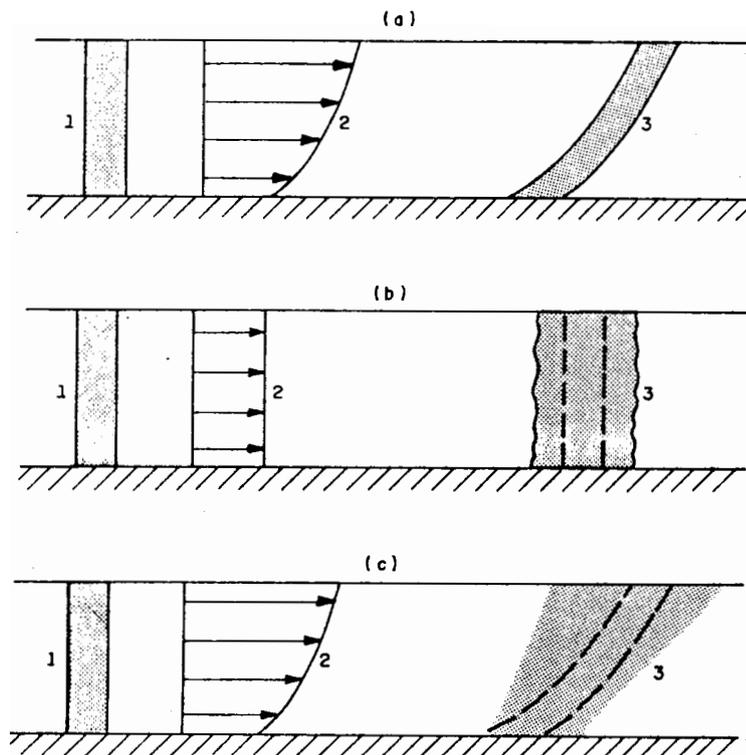


Fig 2.2 - Componentes da dispersão: 1 - distribuição inicial do traçador; 2 - perfil de velocidades; 3 - distribuição do traçador em um tempo posterior. a) Advecção diferencial sem difusão. b) Difusão sem advecção diferencial. c) Advecção e difusão combinadas [Cunge et alii, 1980].

Os processos difusivos e os advectivos podem ser identificados em um correntograma, a partir da decomposição da velocidade instantânea em flutuações de períodos menores (alta frequência), devidas à turbulência, e em flutuações de períodos maiores (baixa frequência), que conteriam os efeitos advectivos. Do primeiro se tem o denominado

transporte difusivo e do segundo o transporte advectivo ou convectivo.

2.2 - Causas de mistura em estuários

2.2.1 - Mistura causada por vento

O efeito do vento na mistura depende fundamentalmente da corrente induzida pela tensão de cisalhamento do vento na superfície da água, a qual, junto à tensão gerada no fundo pela rugosidade, produzem um fluxo cisalhante na coluna de fluido que causa mistura turbulenta e, por conseguinte, uma mudança no perfil vertical da massa específica [Smith et alii, 1979] (Fig 2.3)

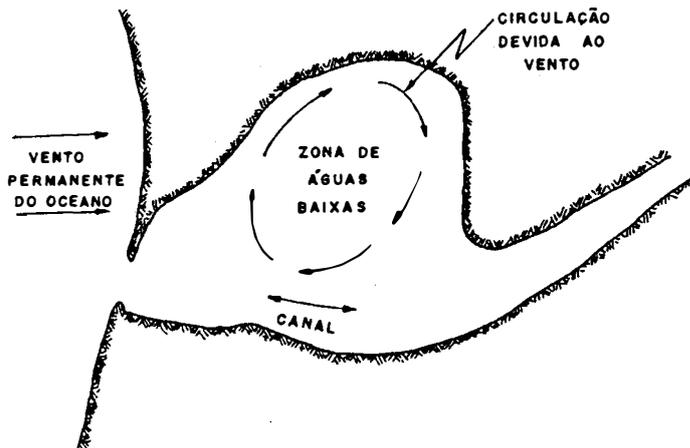


Fig. 2.3 - Efeito do vento na circulação

2.2.2 - Mistura causada por maré

A maré gera escoamentos cisalhantes mediante diversos mecanismos. O primeiro a citar é o próprio fluxo de maré e sua interação com o fundo, gerando turbulência. O segundo importante é a interação da onda de maré com a batimetria. Levando em conta a ação em grande escala da maré sobre a mistura, teremos três efeitos importantes [Fischer et alii, 1979]: a) o efeito cisalhante, b) o campo de velocidades residuais e, c) a maré obstruída.

O caso a) é o mais óbvio já que é um fluxo de tipo fluvial mas com alternância periódica no sentido das correntes. Desta forma, os estudos sobre mistura em rios dão uma boa primeira aproximação das ordens de grandeza dos parâmetros da dispersão. O caso b) representa uma característica importante do escoamento devido à maré e é obtida, em um ponto, pela integração sobre um ciclo de maré da velocidade. As causas fundamentais da existência desta circulação são o efeito de Coriolis, principalmente em grandes estuários, e a interação entre o fluxo de maré e a batimetria do estuário. Alguns estudos têm mostrado que as correntes principais durante a maré enchente e a maré vazante percorrem caminhos diferentes em um estuário. Isto é ilustrado na fig. 2.4, para o estuário Mersey, Inglaterra [Fischer et alii, 1979].

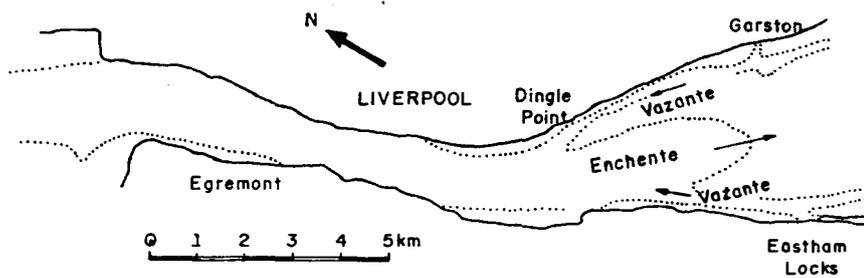


Fig. 2.4 - Padrão de circulação de maré do rio Mersey [Fischer et alii, 1979]

Por último, o caso c) representa aqueles casos de armazenamento de "volumes de maré" em sacos e canais. Este mecanismo é devido ao balanço entre a inércia da massa de água, a força de pressão devida à declividade da superfície livre ("a forma da maré") e à resistência do fundo (Fig. 2.5).

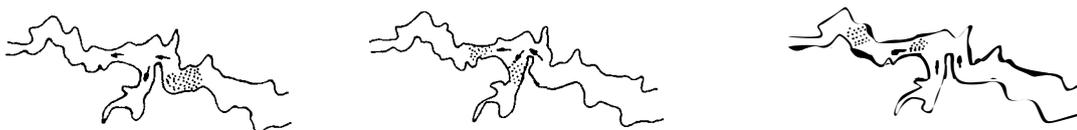


Fig. 2.5 - Efeito da maré obstruída [Fischer et alii, 1979]

2.2.3 - Mistura devida à descarga de água doce

A descarga do rio produz um gradiente da superfície livre, que deve ser balanceado pelo gradiente de densidade entre a água doce e a água salgada e pelas forças de resistência interna e de contorno. O gradiente da superfície livre produz uma força que é constante em toda a profundidade, no entanto, o gradiente de água salgada produz uma força que vai incrementando com a profundidade. Assim os padrões de circulação estuarina mais comuns mostram um escoamento de água doce superficial em direção a jusante, e um escoamento de água salgada no fundo, para montante [Smith et alii, 1979]. Existem também variações transversais que devem ser levadas em conta, mas que são pouco conhecidas. No caso de um estuário bem misturado, os gradientes de densidade serão horizontais, produzindo correntes de densidade.

Estes processos físicos em corpos de água são os que causam o transporte e mistura de substâncias que nos interessam modelar. Todos estes mecanismos têm um caráter tridimensional. Porém, pelas dificuldades, ou quase impossibilidade, de se trabalhar com modelos tri-dimensionais, são feitas simplificações para o uso de modelos de duas ou, ainda, de uma dimensão. Este processo acarreta o surgimento de novas variáveis para representar a dimensão que foi suprimida mediante a aplicação de médias espaciais. Foi demonstrado que para um mesmo estuário, dois modelos, um bidimensional e outro unidimensional, para a previsão de concentrações máximas de poluentes, deram resultados muito diferentes entre eles [Farraday et alii, 1975].

2.3 - Difusão e Dispersão

Uma das principais dificuldades encontradas na modelação se refere à representação da mistura turbulenta, tanto para a quantidade de movimento como para o transporte de massa. Como foi dito anteriormente, o caráter tri-dimensional dos processos de mistura pode ser traduzido em três mecanismos, representados pelos respectivos coeficientes: difusão vertical (ao longo da profundidade), difusão

transversal (perpendicular à direção do fluxo) e dispersão longitudinal (na direção do escoamento). Discutiremos brevemente cada um destes coeficientes.

2.3.1 - Difusão vertical

A mistura vertical é devida à turbulência, principalmente à gerada pelas tensões de corte junto ao fundo. Para o caso ideal de um canal reto, de largura infinita, profundidade constante e uniforme, o coeficiente de mistura vertical, ε_v , toma a forma:

$$\varepsilon_v = 0.067 h U_* \quad (2.1)$$

sendo h a profundidade do ponto e U_* a velocidade de corte ou cisalhamento, dada por $U_* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$, onde τ_0 é a tensão de corte no fundo e ρ a massa específica do fluido [Fischer et alii, 1979].

O valor da constante surge de considerar que a constante de Von Karman toma o valor 0.4, no perfil de velocidades logarítmico. O problema aqui é que U_* varia de aproximadamente zero, para as menores velocidades, a um valor máximo para as mais altas velocidades. Assim, é usual assumir um valor médio para U_* , em função da velocidade média na seção. Bowden (1967) sugere para a profundidade média:

$$\varepsilon_v = 0.0025 h U_d \quad (2.2)$$

para condições de densidade constante, onde U_d é a velocidade média da corrente.

Se a coluna de água está estratificada em forma estável, duas fórmulas são usadas mais frequentemente. A primeira devida a Munk e Anderson [Rodi, 1984]:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_0 (1 + 3.33 R_i)^{-3/2} \quad (2.3)$$

onde ε_0 é o valor de ε_v para estabilidade neutral dado pela equação

(2.2), e R_i é o número de Richardson, dado por:

$$R_i = \frac{\xi \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2} \quad (2.4)$$

sendo ρ a massa específica, U a velocidade longitudinal e z a coordenada vertical.

A segunda fórmula é de Pritchard para o caso de não existirem ondas superficiais:

$$\varepsilon_v = 8.59 \times 10^{-3} U_t \left[\frac{z^2 (d-z)^2}{d^3} \right] (1 + 0.276 R_i)^{-2} \quad (2.5)$$

sendo U_t a velocidade residual média da maré e d é a profundidade.

Estas fórmulas apresentam valores muito diferentes nos estuários onde foram utilizadas, podendo-se concluir que as propriedades do fluxo turbulento na presença de gradientes de densidade estáveis, são ainda pouco conhecidas, sendo necessário um maior aprofundamento no tema.

2.3.2 - Difusão transversal

Como no caso anterior, não há um caminho teórico para estimar o coeficiente de difusão transversal, devido ao escasso conhecimento que se tem das distribuições de velocidades e tensões de corte. Uma alternativa é estudar estes coeficientes experimentalmente, mas as experiências realizadas não são conclusivas [Eiger, 1988].

Uma boa aproximação para estuários pode ser feita a partir de estudos realizados em rios. Para o caso de um canal reto de seção retangular, o coeficiente de difusão transversal, ε_t , é [Fischer et alii, 1979]:

$$\varepsilon_t = 0.15 h U_* \quad (2.6)$$

Em geral, valores maiores são induzidos pelas irregularidades da batimetria e curvatura dos canais naturais. No caso de estuários, também se faz necessário levar em conta os mecanismos devidos à maré obstruída, à circulação residual e às correntes induzidas pelo vento, que têm uma componente transversal que produzirá mistura. Quando se define o coeficiente de difusão transversal em um ponto, está-se referindo ao coeficiente que resulta da combinação de todos estes mecanismos.

Como em um estuário é bastante comum encontrar fluxo e contra-fluxo, a difusão transversal poderia ser maior que a difusão turbulenta, não sendo por tanto de extranhar a grande variedade de valores medidos destes coeficientes. Em alguns casos mais complexos, não é possível definir um coeficiente de difusão turbulenta transversal (dado pela lei de Fick). Como os modelos numéricos tendem a representar escalas médias da corrente, é comum incluir no coeficiente de mistura transversal as flutuações de velocidade, cuja escala é menor que o tamanho da malha usada. Neste caso o coeficiente ε_t dependerá da variação vertical da componente transversal da velocidade.

Algumas experiências para medir este coeficiente (com durações de 4 a 5 horas) tem dado valores que variam de 0.42 a 1.61, para a constante da equação (2.6). No trabalho de Sumer e Fischer (1977), se sugere que a estratificação afeta mais a mistura transversal que a vertical, mas não há confirmação com medições em protótipo.

Eiger (1988) apresenta vários valores para a relação ε_t/hU_* , para canais largos, em função da relação profundidade/largura, bastante menores que os medidos em estuários. Se o coeficiente ε_t para estuários fosse estimado a partir dos obtidos em canais de laboratório ou formulações teóricas, poder-se-iam cometer erros importantes nos cálculos dos campos de concentrações.

Elder (1959) determinou que no caso de considerar turbulência isotrópica, a expressão do coeficiente de difusão transversal é:

$$\varepsilon_t = 0.068 U_* h \quad (2.7)$$

Mas no caso de considerar turbulência anisotrópica, o valor da constante na equação (2.7) é triplicado, obtendo-se:

$$\varepsilon_t = 0.23 U_* h \quad (2.8)$$

A comparação das equações (2.7) e (2.8) conduz a um erro na estimativa de ε_t da ordem de 300%, quando a turbulência é considerada isotrópica.

2.3.3 - Dispersão longitudinal

Os primeiros trabalhos sobre o coeficiente de dispersão longitudinal, K , foram apresentados por Taylor nos anos 1953 e 1954, para o caso de um escoamento em um conduto circular e por Elder em 1959 para canais de laboratório. Elder (1959) indicou que o processo de dispersão é controlado pela combinação do transporte advectivo (longitudinal) e a difusão lateral das partículas de fluido produzida por mistura turbulenta ou difusão molecular. O autor obteve analiticamente, para um canal suficientemente largo onde o perfil de velocidades logarítmico é função só da coordenada vertical, que o coeficiente de dispersão longitudinal é:

$$K = 6.1 U_* h \quad (2.9)$$

A constante da equação (2.9) leva em conta duas parcelas: uma correspondente à advecção, com um coeficiente de 5.86, e a outra devida à turbulência anisotrópica com um coeficiente de 0.23 (Eq. 2.8). O clássico valor de 5.93 encontrado na literatura na fórmula de Elder, é obtido pela soma da constante da equação (2.7) e do coeficiente 5.86 (da parte advectiva). Os valores experimentais

obtidos por Elder ajustam-se para uma constante de 6.3 na equação (2.9), com baixos números de Reynolds e tempos de dispersão pequenos, impostos pelas instalações usadas. Os valores teóricos subestimam os valores reais devido, fundamentalmente, às hipóteses de trabalho adotadas.

Eiger (1988) apresenta uma vasta análise das fórmulas empíricas, onde a constante da expressão (2.9) varia em função das hipóteses assumidas por cada autor.

Thackston e Krenkel (1967) obtiveram a seguinte relação para canais com paredes suaves e três tipos de fundo:

$$\frac{K}{hU_*} = 11.9 \quad (2.10)$$

Como o valor da constante é duas vezes superior à de Elder, os autores concluíram que seus resultados estariam afetados por efeitos tridimensionais. Introduzindo o coeficiente de rugosidade f , a expressão (2.10) fica:

$$\frac{K}{hU_*} = 7.25 \left(\frac{8}{f} \right)^{1/8} \quad (2.11)$$

McQuivey e Keefer (1974) utilizando um procedimento semelhante ao anterior e considerando o efeito da declividade do canal S_0 , obtiveram:

$$\frac{K}{hU_*} = \frac{0.058}{S_0} \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (2.12)$$

Aqui o coeficiente f tem um peso maior que na fórmula anterior.

Fischer (1975) apresentou uma expressão que relaciona o coeficiente f e a relação largura/profundidade (b/h), para canais naturais:

$$\frac{K}{hU_*} = 0.011 \frac{8}{f} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \quad (2.13)$$

Aqui a dependência de f é muito mais forte que nos casos anteriores. Se o canal é de laboratório, a relação anterior fica:

$$\frac{K}{hU_*} = 0.046 \frac{8}{f} \left(\frac{b}{h} \right)^2 \quad (2.14)$$

Com esta constante, K se incrementa em, aproximadamente, quatro vezes.

Singh, Ranga Raju e Garde (1987) a partir de uma compilação de valores de K/hU_* obtidos por vários autores, incluídos os enumerados anteriormente, concluíram que esta varia de 4 a 1000.

As formulações empíricas apresentadas foram obtidas usando canais naturais, com exceção daquela dada por Thackston e Krenkel (equação 2.10).

Eiger (1988), a partir de um enfoque diferente, determinou o coeficiente de dispersão longitudinal, usando um modelo de turbulência tridimensional do tipo $k-\varepsilon$ (energia cinética da turbulência - dissipação turbulenta). A relação obtida pelo autor foi:

$$\frac{K}{hU_*} = \frac{S_{ct}}{c^3} J \quad (2.15)$$

onde $S_{ct} = \frac{\nu_t}{\varepsilon_t}$ é o número de Schmidt turbulento dado pela relação entre a viscosidade turbulenta e a difusão turbulenta, J é o coeficiente de dispersão longitudinal adimensional e c uma constante. Para valores típicos de canais de laboratório largos, o autor obteve:

$$\frac{K}{hU_*} = 18.5 \quad (2.16)$$

valor três vezes superior ao de Elder.

Na figura 2.6 é apresentada a relação entre o coeficiente de dispersão longitudinal adimensional J e a relação b/h, obtida pelo autor, onde J é dado por:

$$J = \left(\frac{\nu}{\xi S_o h} \right)^2 \frac{\varepsilon}{h^4} K \tag{2.17}$$

onde ν é a viscosidade molecular e ε é a taxa de dissipação de energia cinética da turbulência. No gráfico k_s é o tamanho da rugosidade de fundo.

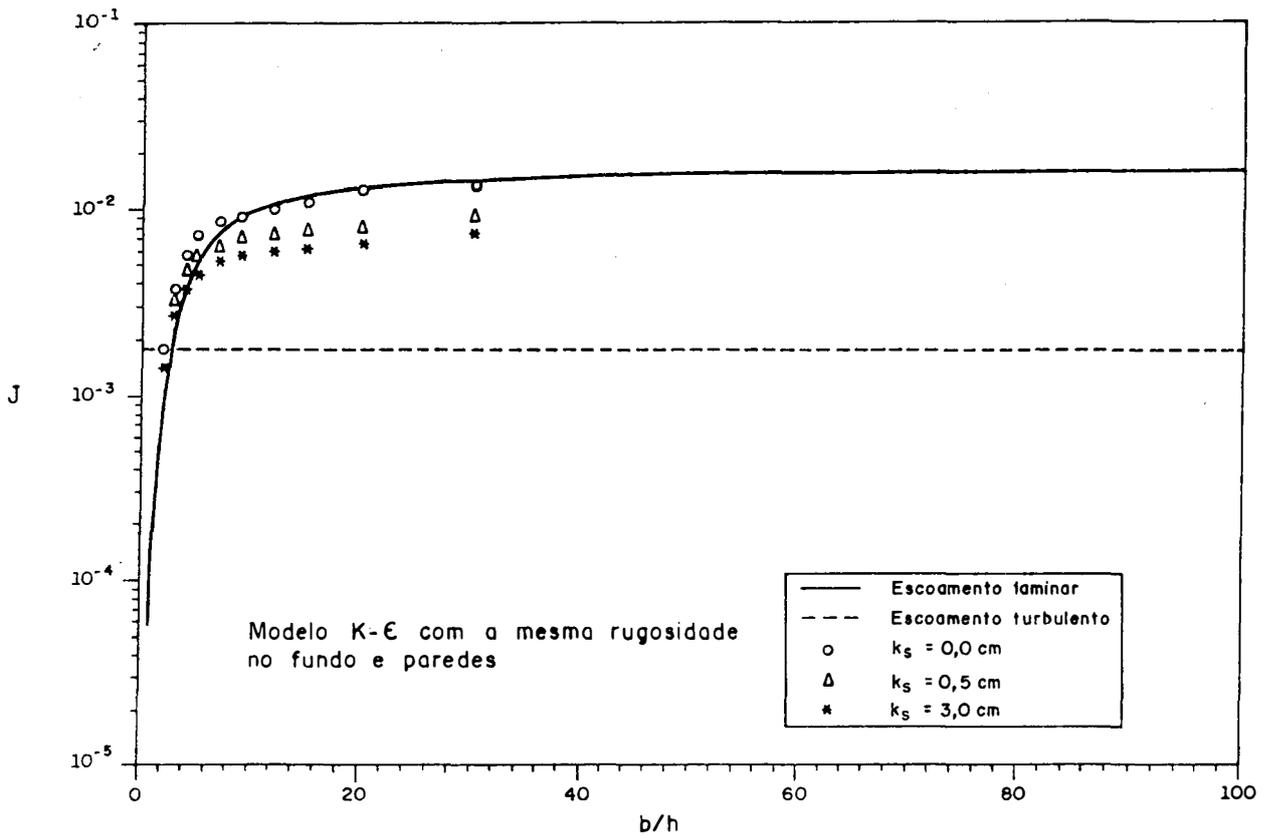


Fig. 2.6 - Relação entre a dispersão longitudinal adimensional e b/h [Eiger, 1988]

O autor chegou às seguintes conclusões:

- o efeito das correntes secundárias sobre o coeficiente de dispersão não é muito significativo,
- a forma do perfil de velocidades longitudinal afeta a dispersão longitudinal mais que a circulação horizontal,
- o coeficiente K é rapidamente incrementado para valores baixos da relação b/h , e lentamente para valores altos de b/h ,
- a rugosidade dos contornos também afeta o coeficiente K . Quando a rugosidade é uniforme nas paredes e fundo do canal, os coeficientes são menores que para o caso de paredes mais rugosas que o fundo. Neste último caso, o aumento é devido ao maior cisalhamento perto da parede.
- existe uma grande diferença entre os estudos teóricos e numéricos realizados e as fórmulas empíricas.
o coeficiente, obtido numericamente, tende a um valor assintótico, fato que não é refletido nas fórmulas empíricas.

Estes estudos de canais são importantes para estuários, já que fornecem uma primeira aproximação dos valores dos coeficientes de difusão. Todos estes estudos são para o caso de não existir inversão do fluxo.

Fischer et alii (1979) mostram um estudo que considera o caso de fluxo oscilatório de período T . O estudo indica que é necessário um tempo $T_c = b^2/\varepsilon_m$ (ε_m é o coeficiente de difusão molecular e b a largura do canal), para que o perfil de concentração seja completamente adaptado ao novo perfil de velocidades, após um tempo $T/2$. Existem aqui dois casos limites: o primeiro, onde T é muito maior que T_c e o segundo, quando T é muito menor que T_c .

Para o primeiro caso ($T \gg T_c$), o perfil de concentrações terá tempo suficiente para se adaptar ao novo perfil de velocidades. O coeficiente de dispersão é o mesmo que para o caso de um fluxo unidirecional, exceto em um pequeno lapso de tempo (muito menor que T), durante o qual o escoamento se inverte.

No caso $T \ll T_c$ o perfil de concentrações não chega a se adaptar ao novo perfil de velocidades. Pode-se esperar que as oscilações da concentração ao redor da média (C') sejam nulas, e então o coeficiente de dispersão tende ao coeficiente de difusão turbulenta. Neste caso não há dispersão devido ao perfil de velocidade. Para melhor visualizá-lo, consideremos a figura 2.7, com uma fonte linear instantânea. Durante o tempo que o fluxo está em uma direção, a fonte o segue, mas quando o fluxo retorna, a concentração retorna a sua posição original. Isto acontece quando não há mistura transversal antes do escoamento se reverter.

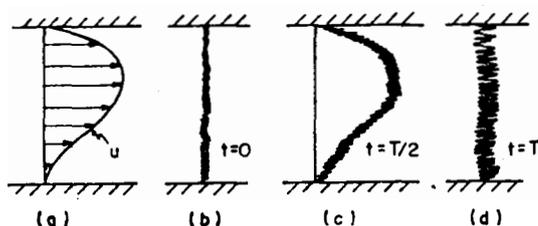


Fig 2.7 - O efeito cisalhante em um fluxo oscilatório para $T \ll T_c$.
 (a) Distribuição hipotética da velocidade U , (b) fonte linear introduzida em $t=0$, (c) distribuição da concentração para $t=T/2$, (d) distribuição para $t=T$ [Fischer et alii, 1979].

Se a velocidade apresenta também uma componente permanente, como no caso dos estuários onde a velocidade residual não é nula, então aparecerão dois coeficientes de dispersão longitudinal. Um deles será afetado pelo fluxo oscilatório e o outro pelo perfil permanente. O coeficiente de dispersão resultante estará dado pela soma dos dois.

No caso de um estuário, poder-se-ia aplicar a teoria de dispersão devida a fluxo cisalhante para rios. Desta forma, utilizando a teoria do fluxo oscilatório vista anteriormente, é possível supor que exista uma relação entre os coeficientes de dispersão, do tipo:

$$K = K_0 f(T') \quad (2.18)$$

onde $f(T')$ é plotada na figura 2.8, obtida por Fischer et alii (1979)

para o caso unidimensional, $T'=T/T_c$ é a escala adimensional de tempo para mistura transversal, K_0 é o coeficiente de dispersão se $T \gg T_c$ e T é o período da maré.

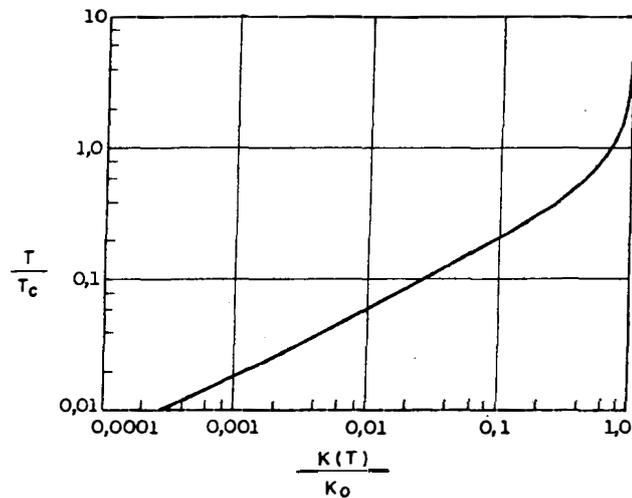


Fig. 2.8 - Dependência de K com o período de oscilação

Se a seção transversal é larga e pouco profunda e os efeitos da densidade estão ausentes, podemos fazer uso da expressão de K_0 para rios, deduzida por Fischer et alii (1979):

$$K_0 = I \overline{u'^2} T_c \tag{2.19}$$

na qual I é um coeficiente aproximadamente igual a 0.1 e u' é a flutuação turbulenta da velocidade na direção do escoamento. Combinando este resultado à equação (2.18), obtemos uma expressão para a previsão do coeficiente de dispersão longitudinal em um estuário para um escoamento cisalhante:

$$K = 0.1 \overline{u'^2} T \left[\frac{1}{T'} f(T') \right] \tag{2.20}$$

A função $1/T' f(T')$ é plotada na figura 2.9

Se por exemplo, temos uma maré com período $T=25$ hs em um canal retangular de 300 m de largura, uma velocidade média de 0.3 m/s, e

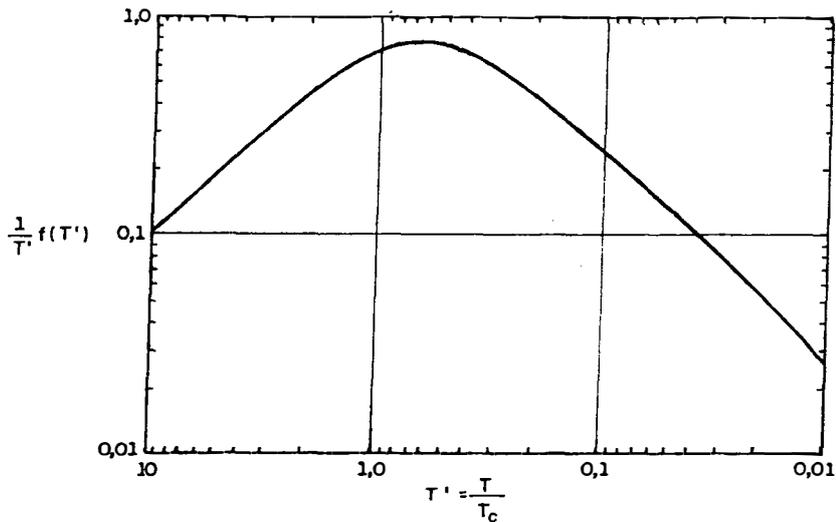


Fig. 2.9 - Função $1/T' \cdot f(T')$ usada na equação (2.20)

assumindo que $u'^2 = 0.2\bar{U}^2$, o valor máximo para o coeficiente de dispersão será de aproximadamente $135 \text{ m}^2/\text{s}$.

A expressão (2.20) apresenta as seguintes limitações: a) o canal deve ser relativamente uniforme ao longo de uma distância várias vezes maior que a largura, b) a relação b/h deve ser grande, e c) a água deve ser de densidade constante. As equações usadas para derivar a relação (2.20) supõem um perfil de velocidade linear, mas estudos teóricos têm demonstrado que se existe inversão de fluxo na seção transversal, somente o coeficiente de proporcionalidade se altera. Desta forma, a equação (2.20), junto à figura 2.9, fornecem uma primeira estimativa de K , se o mecanismo de dispersão é governado por um escoamento cisalhante e oscilatório.

Um aspecto importante da equação (2.20) e das figuras (2.8) e (2.9), que deve ser levado em conta, é que estas fornecem valores do coeficiente de dispersão longitudinal menores em escoamentos com maré que em escoamentos permanentes similares. Os máximos valores de K ocorrem quando o período da maré é semelhante ao tempo de mistura transversal ($T \cong T_c$). Observações em campo corroboram estes resultados.

No item 2.2.2, foi visto o caso de maré obstruída por sacos e canais que convergem ao estuário. Nesses locais deverá ser considerado um coeficiente de dispersão que leve em conta a morfologia local, trazendo como consequência um incremento importante deste coeficiente. Fischer et alii (1979) apresentam uma fórmula deduzida por Okubo, para o caso de alterações das margens distribuídas uniformemente ao longo do canal principal.

Dentro do mesmo item, foi mencionada a mistura causada pela descarga de água doce. Em um estuário estratificado verticalmente, é de se esperar que o coeficiente K seja uma função da variação da massa específica na vertical. Fischer et alii (1979) apresentam uma fórmula para K, para um canal triangular de profundidade h e largura b:

$$K = 1.9 \times 10^{-5} \left(\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \frac{h^5 b^2}{E_o^2 \varepsilon_t} \quad (2.21)$$

sendo x a direção do escoamento principal e E_o o coeficiente de mistura vertical para quantidade de movimento.

Alguns valores observados dos coeficientes de difusão e dispersão são reportados na literatura. Na tabela 2.1 são reproduzidos valores medidos de dispersão longitudinal em estuários e rios [Fischer et alii, 1979]. Outros autores mostram valores de K para estuários, mas como no caso de rios, estes valores variam amplamente.

2.4 - Modelação matemática de corpos de água

Os fenômenos físicos naturais, tais como a circulação em corpos de água, são descritos matematicamente por um conjunto de equações complexas que, junto com as condições iniciais e de contorno, formam o modelo matemático. Este modelo, longe de ser perfeito na sua representação, normalmente não possui solução analítica, salvo em casos muito simplificados. Faz-se necessário, então, usar um método numérico para resolvê-lo. Diversos métodos são apresentados na

ESTUÁRIO	K (m ² /s)	FONTE
Hudson	160	Thatcher and Harleman (1972)
Rotterdam	280	
Waterway		
Potomac	55	
Delaware	500-1500	Glennie and Selleck (1969)
San Francisco	200	
Bay		Cox and Macola (1967)
San Francisco	200	
Bay		Stommel (1953)
Severn	10-100	
Potomac	20-100	Helling and O'Connell (1966)
Delaware	100	Paulson (1969)
Mersey	160-360	Bowden (1963)
Rio Quayas, Equador	760	
Severn (summer)	54-122	Bowden (1963)
Severn (winter)	124-535	Bowden (1963)
Thames (low river flow)	53-84	Bowden (1963)
Thames (high river flow)	338	Bowden (1963)

Tabela 2.1 - Alguns valores de K medidos em estuários
[Fischer et alii, 1979]

literatura, sendo os mais comuns os métodos de elementos finitos (MEF) e de diferenças finitas (MDF).

Dado que os escoamentos que serão tratados são eminentemente turbulentos, desde um ponto de vista da engenharia, é conveniente fazer uso da simplificação devida a Osborne Reynolds, ou seja, a decomposição de uma variável ψ qualquer em uma parte "média" ou de grande escala Ψ , e uma "flutuação", de pequena escala, ψ' . Matematicamente se expressa por:

$$\psi = \Psi + \psi' \quad (2.22)$$

Reynolds definiu a parte média por:

$$\Psi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \psi \, dt \quad (2.23)$$

já que a média das flutuações instantâneas é nula. Mas quando se trata de grandezas temporais, a média definida como anteriormente, carece de sentido. Em consequência, a decomposição de Reynolds é inadequada para aqueles escoamentos que não são estatisticamente estacionários. Devido a isto, é usado um método de tipo relaxação, com um período T , suficientemente pequeno se comparado com a escala do fluxo médio e maior se comparado com a escala temporal turbulenta [Rodi, 1984]. A expressão da média fica:

$$\Psi = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \psi(t) \, dt \quad (2.24)$$

Comprová-se então que $\overline{\psi'} \equiv 0$, $\overline{\psi'\Psi} = 0$, e $\overline{\psi'\psi'}$ não é necessariamente nulo.

Rosman (1989) apresenta o método da média temporal relaxada, onde analisando os espectros do escoamento, termos do tipo $\overline{\psi'\Psi}$ não são nulos. Esta consideração aumenta a complexidade do problema, como assim também, as dificuldades computacionais associadas. O referido autor apresenta a resolução deste tipo de problemas via técnicas de filtragem utilizando o método dos elementos finitos.

2.4.1 Equações fundamentais

As equações de Navier-Stokes, junto a uma equação de transporte de massa e uma equação de estado, são as mais convenientes para o tratamento matemático de fluxo e transporte de substâncias em corpos de água.

Os modelos matemáticos completos tridimensionais, ou 3-D, são pouco usados na prática, devido à dificuldade de obtenção das condições de contorno e aos excessivos tempos computacionais envolvidos na sua resolução. Uma aproximação destes modelos são os denominados pseudo 3-D, compostos por várias camadas de modelos bidimensionais 2-D, relacionados convenientemente. Também estes são pouco utilizados devido às dificuldades de definir a interação entre camadas e de obter-se as condições de contorno apropriadas.

A modelação mais usual é a 2-D, tanto no plano horizontal como no vertical. Se o problema a resolver envolve um corpo de água bem misturado ou parcialmente estratificado, pode-se utilizar um modelo 2-D na horizontal para um corpo de geometria qualquer. Mas se o corpo de água apresenta uma estratificação vertical importante, será necessário um modelo 2-D de tipo vertical, sendo esta utilização possível se a geometria for regular.

As equações do modelo completo 3-D, referenciadas a um sistema cartesiano ortogonal (x, y, z), onde x e y são os eixos horizontais e z é o vertical (positivo para cima), estão dadas por:

- Equação de continuidade (Conservação de massa):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.25)$$

onde ρ é a massa específica, $\mathbf{V} = (u, v, w)$ o vetor velocidade, ∇ é o operador nabla e t o tempo. Considerando que o escoamento é incompressível, a equação (2.25) fica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.26)$$

- Equação dinâmica ou de movimento (Conservação da quantidade de movimento)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (2.27)$$

onde \mathbf{F} é o somatório de forças aplicadas, composto pelas forças de pressão \mathbf{F}_p , gravidade \mathbf{F}_g , atrito \mathbf{F}_a , e de Coriolis \mathbf{F}_c . As expressões destas forças são:

$$\mathbf{F}_p = - \frac{1}{\rho} \nabla P = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{F}_g = - \mathbf{g} = (0, 0, -g) \quad (2.27b)$$

$$\mathbf{F}_a = (F_{ax}, F_{ay}, F_{az}) \quad (2.27c)$$

$$\mathbf{F}_c = (fv, -fu, 0) \quad (2.27d)$$

nas quais:

$$P = p_0 + \rho g (\eta - z) \quad (2.28)$$

onde η é a cota da superfície livre (fig. 2.10), h é a cota do fundo, p_0 é a pressão atmosférica local, $f = 2\omega \sin \phi$, onde ω é a velocidade angular da Terra e ϕ a latitude local (negativa para o hemisfério Sul). A componente vertical da força de Coriolis é considerada nula

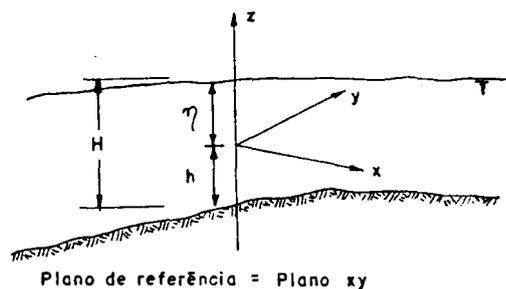


Fig. 2.10 - Sistema de referência

por ser muito menor que a força de gravidade. Na força de atrito estão consideradas as forças de origem viscosa. Não são consideradas outros tipos de forças.

- Equação de Transporte de Massa (equação de advecção - difusão) [Holly, 1975]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (Vc) = \nabla \cdot (\epsilon_m \nabla c) + S + kc \quad (2.29)$$

onde c é a concentração da substância transportada pelo escoamento, ϵ_m é a difusão molecular, e S são os termos de ganhos ou perdas de substância. Se a substância é não conservativa, deve ser somado o termo de decaimento, onde k é o coeficiente de decaimento, função do tipo de substância.

- Equação de estado

Se considerarmos que no termo de pressão da equação de movimento pode ser incluído o gradiente de densidade, faz-se necessário uma equação de estado que relacione a concentração da substância com a massa específica do fluido e a temperatura: $\rho = \rho(c,T)$, onde T é a temperatura do meio fluido. Exemplos claros de problemas deste tipo são a salinidade e os sedimentos. Para a salinidade é comum uma expressão da forma:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha c)(1 + \beta T) \quad (2.30)$$

onde ρ_0 é a massa específica padrão da água, geralmente igual a 1000 kg/m³ e α e β constantes. Como a dependência da massa específica com a temperatura é muito débil, é usual desprezar este termo e ficar com:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha c) \quad (2.31)$$

2.4.2 - Modelo tridimensional, 3-D

Introduzindo agora a notação de valores médios,

$$V = v + v' \quad (2.22a)$$

$$P = \bar{P} + p' \quad (2.22b)$$

$$c = \bar{c} + c' \quad (2.22c)$$

as equações completas do modelo 3-D ficam da forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2 \bar{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{P} + \mathbf{g} + \nabla \cdot (\underline{\underline{N}} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\bar{c}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}_m \cdot \nabla \bar{c}) - \nabla \cdot (\mathbf{v}'c') + S + kc \quad (2.34)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 (1 + \alpha \bar{c}) \quad (2.35)$$

Na equação de continuidade, equação (2.32), o termo $\nabla \cdot (\bar{\rho}'\mathbf{v}')$ foi desprezado, já que é de uma ordem de grandeza muito menor que $\nabla \cdot (\bar{\rho}\mathbf{v})$, geralmente $\bar{\rho}'\mathbf{v}' \cong 10^{-4} \bar{\rho}\mathbf{v}$. Também nela, se fez uso da aproximação de Boussinesq [Salomon, 1980], que indica que as derivadas de massa específica são desprezíveis, exceto quando estão multiplicadas pela aceleração da gravidade.

Na equação (2.33) o termo difusivo foi obtido da seguinte forma:

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'} = \nabla \cdot (\underline{\underline{N}} \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (2.36)$$

onde $\underline{\underline{N}}$ é o tensor de viscosidade turbulenta.

O termo $\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}'c'}$ na equação (2.34) é aproximado por analogia com a lei de Fick [Rodi, 1984] e a difusão molecular é absorvida na difusão turbulenta:

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}_m \cdot \nabla \bar{c} - \overline{\mathbf{v}'c'}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla \bar{c}) \quad (2.37)$$

na qual $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$ é o tensor de difusão. $\underline{\varepsilon}$ não é uma propriedade do fluido pois depende do estado da turbulência [Tennekes e Lumley, 1979]. ε_{ij} indica que pode existir transporte de massa na direção i devido a um gradiente de concentração na direção j , e vice-versa.

2.4.3 - Modelos bidimensionais, 2-D

Existem basicamente dois tipos de modelos bi-dimensionais: um integrado na vertical e outro na horizontal. Descrever-se-á brevemente cada um deles, e se desenvolverá a expressão da equação de transporte integrada na vertical.

2.4.3.1 - Modelo 2-D integrado na vertical

Estes modelos são bem conhecidos e tem sido tratados amplamente na literatura especializada (Leendertse, 1970; Salomon, 1980; Holly et alii, 1982; Rosauro, 1986; Borche Casalás, 1985; Rosman, 1989).

A integração na vertical é feita da seguinte forma: se φ é uma variável qualquer, seu valor médio na vertical, Φ , está dado por:

$$\Phi = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \varphi \, dz \quad (2.38a)$$

com h e η definidas como no ponto anterior e $H=h+\eta$ é a profundidade total. As flutuações ao redor desta média estão dada por:

$$\varphi' = \varphi - \Phi \quad (2.38b)$$

Para obter as equações (2.32)-(2.35) em função dos valores médios na vertical, é necessário integrá-las na vertical. Definindo as velocidades horizontais médias por:

$$U = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} u \, dz \quad (2.39a)$$

$$V = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} v \, dz \quad (2.39b)$$

as equações de continuidade e movimento ficam:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(HU)}{\partial x} + \frac{\partial(HV)}{\partial y} = 0 \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{H} (\tau_{xs} - \tau_{xf}) - \frac{N}{\rho} \nabla^2 U = 0 \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{H} (\tau_{ys} - \tau_{yf}) - \frac{N}{\rho} \nabla^2 V = 0 \quad (2.40c)$$

onde

$$\tau_{xf} = g U (U^2 + V^2)^{1/2} / C_h \quad (2.41a)$$

$$\tau_{yf} = g V (U^2 + V^2)^{1/2} / C_h \quad (2.41b)$$

são as tensões de cisalhamento no fundo e C_h é o coeficiente de Chézy. As tensões de cisalhamento superficiais, τ_{xs} e τ_{ys} , podem ser expressas por:

$$\tau_{xs} = C_D \rho_a W_x W \quad (2.42a)$$

$$\tau_{ys} = C_D \rho_a W_y W \quad (2.42b)$$

onde ρ_a é a massa específica do ar, $W = (W_x, W_y)$ a velocidade do vento e C_D é um coeficiente de ajuste da ordem de 10^{-3} [Salomon, 1980].

A equação de transporte de massa a integrar na vertical é obtida a partir das equações (2.34) e (2.37):

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{vc}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{e}} \cdot \nabla \bar{c}) + S + k\bar{c} \quad (2.43)$$

A integração na vertical da concentração $\bar{c}(x,y,z,t)$, eliminando as sobrebarras para simplificar a notação, fornece o valor médio $C(x,y,t)$:

$$C = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} c \, dz \quad (2.44)$$

considerando:

$$v(x,y,z,t) = V_m(x,y,t) + v'(x,y,z,t) \quad (2.45a)$$

$$e \quad c(x,y,z,t) = C(x,y,t) + c'(x,y,z,t) \quad (2.45b)$$

onde agora v' e c' representam as flutuações ao redor da média na vertical.

Utilizando o teorema de Leibnitz [Wylie, 1975], a integração na vertical do primeiro termo da equação (2.43), fica:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial c}{\partial t} \, dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} c \, dz - c(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} + c(-h) \frac{\partial(-h)}{\partial t} \quad (2.46)$$

A última derivada de (2.46) é nula, já que o fundo é considerado fixo. Utilizando a expressão (2.44), a equação (2.46) toma a forma:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial c}{\partial t} \, dz = \frac{\partial CH}{\partial t} - c(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.47)$$

O produto \bar{vc} do termo convectivo deve ser avaliado na profundidade, o que dá:

$$\overline{vc} = \overline{(V_m + v')(C + c')} = V_m C + \overline{v'c'} \quad (2.48)$$

onde $V_m = (U, V)$ e a sobre-barra indica média na vertical. Os termos que contém um valor médio e uma flutuação se anulam; simbolicamente:

$$\int_{-h}^{\eta} c' dz = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-h}^{\eta} v' dz = 0 \quad (2.49)$$

Assim o termo convectivo integrado na profundidade e escrito por extenso, resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial vc}{\partial y} + \frac{\partial wc}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial CUH}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{u'c'}}{\partial x} + \frac{\partial CVH}{\partial y} + \frac{\partial H \overline{v'c'}}{\partial y} + \\ &+ [-uc|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + uc|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial x} - vc|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + vc|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial y} + \\ &+ (wc|_{\eta} - wc|_{-h})] \end{aligned} \quad (2.50)$$

A componente vertical da velocidade está dada por $w(z) = dz/dt$ e para a superfície ($z = \eta$) e o fundo ($z = -h$), têm-se as expressões:

$$w(\eta) = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v|_{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.51a)$$

$$w(-h) = u|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial x} + v|_{-h} \frac{\partial(-h)}{\partial y} \quad (2.51b)$$

que são usadas para eliminar os termos do colchete de (2.50). Desta forma, a integração do termo convectivo fica reduzida a:

$$\int_{-h}^{\eta} \left(\frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial vc}{\partial y} + \frac{\partial wc}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial HUC}{\partial x} + \frac{\partial H \overline{u'c'}}{\partial x} + \frac{\partial HVC}{\partial y} + \frac{\partial H \overline{v'c'}}{\partial y} \quad (2.52)$$

O termo difusivo é integrado utilizando, também, a regra de Leibnitz:

$$\int_{-h}^{\eta} \nabla(\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c) dz = \nabla \int_{-h}^{\eta} (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c) dz - (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c)|_{\eta} \cdot \nabla \eta + (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c)|_{-h} \cdot \nabla(-h) \quad (2.53)$$

onde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

A integral do lado direito pode ser expressa pelo valor médio do transporte difusivo. Assim, aplicando uma relação equivalente a (2.44), têm-se:

$$\nabla \int_{-h}^{\eta} (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c) dz = \nabla(H \overline{\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c}) \quad (2.54)$$

Os produtos entre o transporte difusivo na superfície e fundo com os gradientes de $z=\eta$ e $z=-h$, são nulos, já que o transporte deve ser paralelo aos contornos e os vetores $\nabla\eta$ e ∇h são normais a estes. Matematicamente:

$$(\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c)|_{\eta} \cdot \nabla \eta = (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c)|_{-h} \cdot \nabla(-h) \equiv 0 \quad (2.55)$$

Finalmente, os termos de fonte e decaimento, são integrados, fornecendo:

$$\int_{-h}^{\eta} (S+kc) dz = \overline{SH} + kHC \quad (2.56)$$

sendo \overline{S} o valor médio da fonte ao longo da profundidade, e k permanece inalterado.

A expressão final da integração na vertical está dada por (2.47), (2.52), (2.54) e (2.56):

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial HUC}{\partial x} + \frac{\partial HVC}{\partial y} = \nabla(H \overline{\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla c}) - \frac{\partial H \overline{u'c'}}{\partial x} - \frac{\partial H \overline{v'c'}}{\partial y} + \overline{SH} + kHC \quad (2.57)$$

Os três primeiros termos do lado direito de (2.57) podem ser agrupados em um só, como o produto de um tensor difusão e o gradiente de concentração média na vertical, seguindo um raciocínio análogo ao do item 2.4.2. Assim, eliminando as sobretarras de (2.57), fica-se com:

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial HUC}{\partial x} + \frac{\partial HVC}{\partial y} = \nabla \cdot (H \underline{\underline{K}} \nabla C) + SH + kHC \quad (2.58)$$

onde todas as quantidades e operadores são bi-dimensionais, S resulta da integração na vertical do termo de fonte, e $\underline{\underline{K}}$ é o tensor de difusão horizontal, dado por:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.59a)$$

que está relacionado com K e ε_t por:

$$K_{xx} = K \cos^2 \alpha + \varepsilon_t \sin^2 \alpha \quad (2.59b)$$

$$K_{yy} = K \sin^2 \alpha + \varepsilon_t \cos^2 \alpha \quad (2.59c)$$

$$K_{xy} = K_{yx} = (K - \varepsilon_t) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.59d)$$

sendo α o ângulo que forma a velocidade com o semieixo positivo das x [Holly et alii, 1982].

A equação de estado (2.35), fica da forma:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 (1 + \alpha C) \quad (2.60)$$

onde agora $\hat{\rho}$ e $\hat{\rho}_0$ são os valores médios da massa específica na vertical.

O sistema para modelar o transporte de substâncias em corpos de água rasos, está constituído pelas equações (2.40) e (2.58), supondo que ρ ou C tenha sido eliminado das mesmas mediante o uso da equação (2.60). Este sistema de quatro equações diferenciais parciais com

quatro incógnitas: η , U , V e C , não é resolvido simultaneamente, costumando-se desacoplá-lo. A ligação entre o escoamento e o transporte de massa está dada pelo termo $\nabla\rho$. Embora este termo não seja completamente desprezível, sua magnitude frente ao $\nabla\eta$ é menor. Desprezando este termo, como em geral ocorre, fica-se com um sistema de três equações diferenciais, com três incógnitas η , U e V , que após resolvido, fornecem os valores de entrada ao modelo de transporte de massa.

Como condições iniciais devem ser especificados valores de η , U , V e C para todo o domínio de integração no tempo inicial t_0 .

Nos contornos abertos deverá ser informado o desnível $\eta(t)$ e/ou a velocidade $U(t)$ e $V(t)$, para o modelo hidrodinâmico. Nos contornos fechados dever-se-á respeitar a condição de não existência de fluxo normal ao contorno.

Para o modelo de advecção - difusão, dois tipos de condições de contorno são possíveis: o valor prescrito (condição de contorno tipo Dirichlet), onde é conhecida a variação da concentração com o tempo, e a condição de fluxo normal, (condição de contorno tipo Neumann), também variável no tempo. Nos contornos fechados ter-se-á condição de fluxo nulo.

2.4.3.2 - Modelo 2-D integrado na horizontal

Este modelo é menos conhecido que o anterior, mas aparece com certa frequência na literatura especializada. Sua utilização é restrita a estuários fortemente estratificados com canal suficientemente regular.

As equações (2.32) a (2.35) são integradas na largura do canal, obtendo-se um sistema de equações similar ao do caso anterior, mas onde as variáveis são representativas na largura da seção transversal.

Considerando que y é a coordenada da seção transversal, as médias são obtidas por:

$$U = \frac{1}{b(x,z)} \int_{b_1(x,z)}^{b_2(x,z)} u \, dy \quad (2.61a)$$

$$W = \frac{1}{b(x,z)} \int_{b_1(x,z)}^{b_2(x,z)} w \, dy \quad (2.62b)$$

$$C = \frac{1}{b(x,z)} \int_{b_1(x,z)}^{b_2(x,z)} c \, dy \quad (2.63c)$$

onde U , W e C são os valores médios de u , v e c na horizontal, e b , b_1 , b_2 são definidos na figura 2.11.

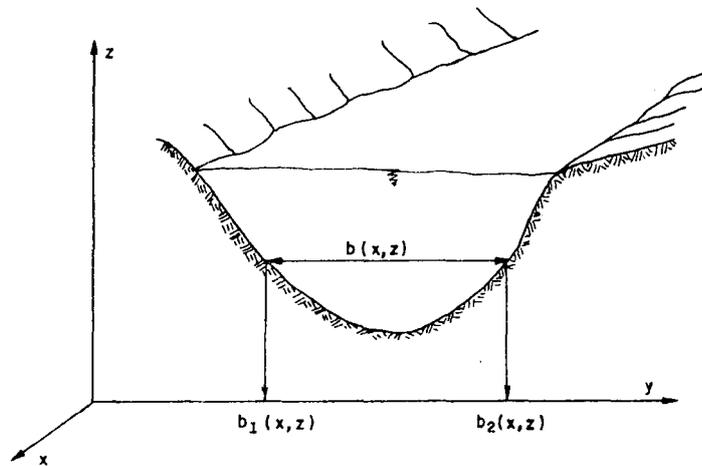


Fig. 2.11 - Sistema de referência para os modelos integrados na horizontal

Usando o teorema de Leibnitz e assumindo que $b/R \ll 1$, onde R é o raio de curvatura do canal na horizontal, obtém-se de (2.32) a (2.35) as seguintes expressões [Smith et alii, 1979; Salomon, 1980]:

a) Equação da continuidade:

$$\frac{\partial bU}{\partial x} + \frac{\partial bW}{\partial z} = 0 \quad (2.62)$$

b) Equação de movimento horizontal:

$$\frac{\partial bU}{\partial t} + \frac{\partial (bU^2)}{\partial x} + \frac{\partial (bUW)}{\partial z} + bg \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{(H-z)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left(bE_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \tau_b \left(\frac{1}{G_2} - \frac{1}{G_1} \right) \quad (2.63)$$

onde τ_b é definido como no modelo anterior, E_z é o coeficiente de viscosidade vertical integrado na largura de seção transversal, G_1 e G_2 são as declividades laterais da seção transversal e o termo representa a contribuição dos lados do canal às tensões médias na largura.

c) Equação de transporte de massa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial (bUC)}{\partial x} + \frac{\partial (WC)}{\partial z} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} \left(bK_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (2.64)$$

d) Equação de estado

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha C) \quad (2.65)$$

A hipótese de pressão hidrostática não é apropriada para este problema, devendo-se substituí-la pela integração da equação da continuidade na vertical [Salomon, 1980]:

$$b \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(b \int_{-h}^{\eta} U \, dz \right) = 0 \quad (2.66)$$

O sistema a resolver fica formado por estas equações com U , W , η e C como incógnitas. Como condições iniciais devem ser especificados

valores de η , U , W e C para todo o domínio de integração no tempo inicial t_0 .

Nos contornos abertos deverá ser informado o desnível $\eta(t)$ e/ou a velocidade $U(t)$ e $W(t)$, para o modelo hidrodinâmico. Nos contornos fechados dever-se-á respeitar a condição de não existência de fluxo normal ao contorno.

Para o modelo de advecção - difusão, novamente dois tipos de condições de contorno são possíveis: o valor prescrito (condição de contorno tipo Dirichlet), onde é conhecida a variação da concentração com o tempo na vertical, e a condição de fluxo normal (condição de contorno tipo Neumann). Nos contornos fechados ter-se-á a condição de fluxo nulo.

2.4.4 - Modelo Unidimensional 1-D

A análise 1-D pode ser realizada a partir da equação média na seção transversal do estuário:

$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial UAC}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K A \frac{\partial C}{\partial x} \right) + SA + kAC \quad (2.67)$$

onde A é a área transversal, U é a velocidade média na seção e K é o coeficiente de dispersão longitudinal. As características hidrodinâmicas são obtidas de um modelo 1-D [Tucci, 1986].

Para o uso deste modelo é necessário que o estuário seja bem misturado e sua geometria regular, sem apresentar acidentes geográficos como sacos.

2.5 - Escolha do modelo

O modelo escolhido para o presente trabalho é o bidimensional integrado na vertical, dado pelas equações (2.40) e (2.58). Várias são

as razões para a escolha deste modelo:

- o transporte de massa a modelar interessa mais na horizontal quando se trata de, por exemplo, localização de tomadas de água para consumo e estudos de flora e fauna,
- as irregularidades na geometria (sacos e afluência de rios) são bem representadas principalmente quando o estuário tem zonas de profundidades variadas é inclusive mais de um canal, como o caso do estuário da laguna dos Patos,
- não se dispunha de dados adequados para entrada de um modelo integrado na horizontal, nem ainda, de um modelo hidrodinâmico que fornecesse ditos dados,
- no caso do estuário de laguna dos Patos, a zona onde se produz a cunha salina é relativamente pequena em relação à área total, e o estuário passa grande parte de tempo como bem misturado ou parcialmente estratificado [Hartmann, 1989],
- dispunha-se de um modelo hidrodinâmico 2-D horizontal, o qual poderia ser usado para alimentar o modelo de dispersão.

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA

3.1 - O modelo matemático

O modelo matemático escolhido que descreve o comportamento do escoamento para corpos de água rasos, foi o 2-D integrado na vertical e definido pelas equações (2.40) e (2.58):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0 \quad (2.40a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{H} (\tau_{xs} - \tau_{xf}) - N \nabla^2 U = 0 \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + g \frac{H}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{H} (\tau_{ys} - \tau_{yf}) - N \nabla^2 V = 0 \quad (2.40c)$$

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial HUC}{\partial x} + \frac{\partial HVC}{\partial y} = \nabla \cdot (HK \nabla C) + SH + kHC \quad (2.58)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha C) \quad (2.60)$$

Se a variação do constituinte a modelar não modifica o escoamento, já que seu gradiente não é significativo na equação de movimento, é possível tratar o modelo como se fossem dois separados: por um lado o hidrodinâmico e pelo outro o de transporte de massa.

Vários métodos são propostos na literatura para resolver numericamente as equações (2.40) e (2.58). Entre os mais utilizados estão o Método de Elementos Finitos e o Método de Diferenças Finitas, ou uma combinação de ambos. Também é comum encontrar combinações destes métodos com outros: um exemplo disto é a combinação do método

das características com o de elementos finitos ou diferenças finitas, geralmente usado na abordagem euleriana-lagrangiana.

3.2 - Discretização espacial em elementos finitos

No presente trabalho foi escolhido como método numérico o de elementos finitos com o método de ponderação de Galerkin [Rao, 1982]. Este método é amplamente difundido na literatura especializada em problemas de advecção-difusão. A continuidade das funções entre elementos é do tipo C^0 , onde é considerada continuidade da função e não de suas derivadas nas fronteiras dos elementos.

A discretização espacial é feita utilizando-se elementos triangulares quadráticos isoparamétricos. Esta discretização permite considerar todas as variáveis, incluídas as coordenadas (x,y), variando em forma quadrática em cada elemento, o que torna possível a utilização de lados curvos. Assim o número de elementos necessários para representar o domínio, com uma boa interpretação dos contornos, é menor do que no caso linear. Como consequência, uma variável φ qualquer em um elemento (e) genérico, pode ser representada por:

$$\varphi_{(e)} = [N] \{ \varphi \} = \sum_{i=1}^{nn} N_i \varphi_i \quad (3.1)$$

sendo [N] o vetor linha das funções forma N_i , e N_i é a função forma para o nó i [Rao, 1982], onde se reflete a ordem de aproximação; $\{ \varphi \}$ é o vetor coluna composto pelos valores da função φ no nó i, φ_i ; nn é o número de nós do elemento, que para o triângulo quadrático é igual a 6.

O método postula que o resíduo resultante da aproximação (3.1) deve ser nulo sobre todos os elementos. Este resíduo é ponderado com um peso; para o método de Galerkin, este peso é a própria função forma. Outras formas de peso podem ser encontradas em Rao (1982) e Huebner (1975).

A seguir será desenvolvida a expressão do resíduo para a equação de advecção-difusão (eq. 2.58). Para o modelo hidrodinâmico a análise é a mesma e pode ser encontrada em Rosauro (1982, 1986).

Todas as variáveis que intervêm no problema serão aproximadas por funções forma quadráticas. Aplicando a equação da continuidade (equação 2.40a) aos termos convectivos da equação 2.58, obtém-se a expressão:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{H} \nabla \cdot (H K \nabla C) + S + kC \quad (3.2)$$

O resíduo $R^{(e)}$ para o elemento (e) está expresso por:

$$R^{(e)} = \int_{A(e)} [N]^T \left\{ H \frac{\partial C}{\partial t} + H V \nabla C - \nabla (H K \nabla C) - SH - kHC \right\} dA \quad (3.3)$$

O vetor $[N]^T$ (trasposto de $[N]$) é a função de peso do método de Galerkin. Dividiremos o resíduo $R^{(e)}$ em quatro termos, tratando-os separadamente:

$$I = \int_{A(e)} [N]^T H \frac{\partial C}{\partial t} dA \quad (3.4)$$

$$II = \int_{A(e)} [N]^T (H V \nabla C) dA \quad (3.5)$$

$$III = \int_{A(e)} [N]^T \nabla (H K \nabla C) dA \quad (3.6)$$

$$IV = \int_{A(e)} [N]^T (HS + kHC) dA \quad (3.7)$$

a) Termo I : a aproximação do termo $\frac{\partial C}{\partial t} = C_t$ será da forma:

$$H \frac{\partial C}{\partial t} = [N] \langle H \rangle [N] \langle C_t \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{nn} N_i H_i \right\rangle \left\langle \sum_{i=1}^{nn} N_i C_{t_i} \right\rangle$$

onde C_{t_i} é a derivada de C com relação ao tempo no nó i . A expressão (3.4) fica da forma:

$$I = \left\langle \int_{A(e)} H [N]^T [N] dA \right\rangle \langle C_t \rangle \quad (3.8)$$

onde $\langle C_t \rangle$ sai da integral porque está constituída por valores constantes com relação a x e y .

b) Termo II: neste caso como $HV \nabla C = HU \frac{\partial C}{\partial x} + HV \frac{\partial C}{\partial y}$, e U e V são aproximadas por:

$$U = [N] \langle U \rangle = \sum_{i=1}^{nn} N_i U_i$$

$$V = [N] \langle V \rangle = \sum_{i=1}^{nn} N_i V_i$$

as derivadas de C com relação a x e y ficam:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \langle [N] \langle C \rangle \rangle = \frac{\partial [N]}{\partial x} \langle C \rangle = \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial N_i}{\partial x} C_i$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \langle [N] \langle C \rangle \rangle = \frac{\partial [N]}{\partial y} \langle C \rangle = \sum_{i=1}^{nn} \frac{\partial N_i}{\partial y} C_i$$

e o termo II toma a forma:

$$II = \left\langle \int_{A(e)} H [N]^T \left\langle U \frac{\partial [N]}{\partial x} + V \frac{\partial [N]}{\partial y} \right\rangle dA \right\rangle \langle C \rangle \quad (3.9)$$

c) Termo III: devido a ter assumido continuidade C^0 entre elementos,

faz-se necessário diminuir a ordem da derivada de C neste termo. A expressão cartesiana do integrando de III, é:

$$[N]^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HK_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(HK_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(HK_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right\} \quad (3.10)$$

Só se desenvolverá a redução da ordem para o termo que contem K_{xx} já que o resto é semelhante. Reescrevendo a derivada da forma:

$$[N]^T \frac{\partial}{\partial x} \left(HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) - HK_{xx} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \quad (3.11)$$

é introduzindo na integral, obtém-se:

$$\int_{A(e)} \frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) dA - \int_{A(e)} HK_{xx} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} dA \quad (3.12)$$

Aplicando o teorema de Green para duas funções φ e ψ sobre uma área A de contorno Γ [Wylie, 1975], tem-se a relação entre integrais de superfície e de linha dada por:

$$\int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} \psi dy \quad (3.13a)$$

$$\int_A \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = - \int_{\Gamma} \varphi dx \quad (3.13b)$$

Introduzindo (3.13a) e (3.13b) em (3.12), esta última fica com a ordem reduzida:

$$\int_{\Gamma(e)} [N]^T HK_{xx} \frac{\partial C}{\partial x} dy - \int_{A(e)} HK_{xx} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} dA \quad (3.14)$$

Repetindo o processo para os outros três termos de (3.10) tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{A(e)} [N]^T \frac{\partial}{\partial y} \left(HK_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} \right) dA &= - \int_{\Gamma(e)} [N]^T HK_{xy} \frac{\partial C}{\partial x} dx - \\
&\quad - \int_{A(e)} HK_{xy} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} dA \\
\int_{A(e)} [N]^T \frac{\partial}{\partial x} \left(HK_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dA &= \int_{\Gamma(e)} [N]^T HK_{yx} \frac{\partial C}{\partial y} dy - \\
&\quad - \int_{A(e)} HK_{yx} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} dA \\
\int_{A(e)} [N]^T \frac{\partial}{\partial y} \left(HK_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} \right) dA &= - \int_{\Gamma(e)} [N]^T HK_{yy} \frac{\partial C}{\partial y} dy - \\
&\quad - \int_{A(e)} HK_{yy} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} dA
\end{aligned}$$

Considerando que o vector normal à curva Γ está dado por $\mathbf{n}=(n_x, n_y)$ e que está relacionado com o diferencial de arco $dl = (dx, dy)$ por:

$$dl = (-n_y, n_x) dl$$

as quatro últimas integrais de linha podem ser escritas por:

$$\int_{\Gamma(e)} H [N]^T (K \nabla C) \mathbf{n} dl \quad (3.14)$$

chamada de matriz de inter-elementos. Assume-se que esta matriz seja nula entre elementos, mas não nos contornos onde existe fluxo de massa. Esta última é usada para incorporar as condições de contorno de fluxo (condição de contorno de Neumann). Se não há fluxo através do contorno, esta condição é satisfeita automaticamente (condição de contorno natural).

A outra parcela desta integração por partes fica inalterada. Colocando $C=[N]\langle C \rangle$ obtem-se finalmente, que o termo III tem por expressão:

$$\begin{aligned}
 \text{III} = & \left(- \int_{A(e)} H \langle K_{xx} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + K_{xy} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + K_{yx} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial y} + K_{yy} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dx dy \langle C \rangle + \\
 & + \int_{\Gamma(e)} H [N]^T \langle [K \nabla C] n \rangle dl \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

d) Termo IV: este último termo pode ser expresso por:

$$\text{IV} = \int_{A(e)} HS [N]^T dx dy + \left(\int_{A(e)} Hk [N]^T [N] dx dy \right) \langle C \rangle \quad (3.16)$$

Somando (3.8), (3.9), (3.15) e (3.16) obtem-se a expressão completa do resíduo para um elemento (e), que expressa em forma matricial fica:

$$R^{(e)} = [a]_{(e)} \langle C_t \rangle_{(e)} + [b]_{(e)} \langle C \rangle_{(e)} + \langle f \rangle_{(e)} = 0 \quad (3.17)$$

onde as matrizes [a] e [b] e o vetor {f} estão dados por:

$$[a]_{(e)} = \int_{A(e)} [N]^T [N] dx dy$$

$$\begin{aligned}
 [b]_{(e)} = & \int_{A(e)} H \left([N]^T \left(U \frac{\partial [N]}{\partial x} + V \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) - \left(K_{xx} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + K_{xy} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial x} + K_{yx} \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial y} + K_{yy} \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \left. + k [N]^T [N] \right) dx dy
 \end{aligned}$$

$$\langle f \rangle_{(e)} = \int_{A(e)} HS [N]^T dx dy$$

O resíduo aqui obtido é para um único elemento genérico do domínio. Para estendê-lo a toda a região de estudo, é suficiente somar todos os resíduos de cada elemento, fazendo o resíduo total nulo:

$$R = \sum_{(e)} R^{(e)} = 0$$

Isto gera um sistema obtido da soma da eq. (3.17) sobre todos os elementos do domínio, da forma:

$$[A] \{C_t\} + [B] \{C\} + \{F\} = 0 \quad (3.18)$$

onde $[A]$ está relacionado com $[a]_{(e)}$, por:

$$[A] = \sum_{(e)} [a]_{(e)}$$

analogamente se procede com os outros elementos da equação (3.18)

3.3 - Discretização temporal em diferenças finitas

A equação (3.18) é uma equação diferencial ordinária, onde a variação temporal de C será aproximada através do método das diferenças finitas. Considerando φ uma variável genérica que depende do tempo, sua aproximação é feita mediante:

$$\varphi \cong \theta \varphi(t+\Delta t) + (1-\theta) \varphi(t)$$

onde θ é um fator de peso que varia entre 0 e 1. A derivada temporal estará dada por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi' \cong \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$$

onde $\varphi(t)$ e $\varphi(t+\Delta t)$ são os valores da função φ nos tempos t e $t+\Delta t$, e Δt é o intervalo de tempo.

Considerando estas aproximações em (3.18) e, rearranjando, fica definido o seguinte sistema:

$$[K] \{C(t+\Delta t)\} = [M] \{C(t)\} + \{F\} \quad (3.19)$$

onde as matrizes K , M e F estão dadas por:

$$[K] = [A] + \theta \Delta t [B] \quad (3.20a)$$

$$[M] = [A] - (1-\theta) \Delta t [B] \quad (3.20b)$$

$$\{f\} = - \Delta t [\theta f_1(t+\Delta t) + (1-\theta) f_1(t)] \quad (3.20c)$$

A consideração de que a integração temporal é realizada pela aproximação de um esquema em diferenças finitas, traz consigo o problema da escolha de valor de θ . Este valor caracteriza o esquema a usar, sendo os mais utilizados:

- $\theta = 0$ \Rightarrow esquema explícito (condicionalmente estável)
- $\theta = 0.5$ \Rightarrow Crank - Nicholson (incondicionalmente estável)
- $\theta = 0.67$ \Rightarrow Galerkin (incondicionalmente estável)
- $\theta = 1$ \Rightarrow "Fully implicit" (incondicionalmente estável)

No capítulo IV serão discutidos os valores de θ mais convenientes para o problema em consideração.

3.4 - Condições iniciais e de contorno

Como condições iniciais são informados os valores de C em cada nó da malha:

$$C(x,y,t=0) = C_0(x,y) \quad (3.21)$$

As condições de contorno para o caso de concentrações são duas: a

condição tipo Dirichlet sobre uma porção Γ_1 do contorno, e a condição de Neumann, sobre outra porção Γ_2 (onde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$). Matematicamente podem ser expressas por:

$$- \text{Condição de Dirichlet : } C = \bar{C}(x,y,t) \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.22a)$$

$$- \text{Condição de Neumann : } K \frac{\partial C}{\partial n} - q = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.22b)$$

onde $\partial C / \partial n$ é a derivada direcional de C na direção normal exterior a Γ_2 ; q é uma função fluxo no contorno conhecida, e \bar{C} é o valor que toma C na fronteira Γ_1 . Se o constituinte a modelar fosse temperatura, seria necessário acrescentar a condição de contorno de convecção.

O termo S indica as fontes e sumidouros pontuais da substância a modelar. Um exemplo de fonte pontual é o caso de descarga produzida por um emissário sub-fluvial de esgotos domésticos ou industriais [Borche et alii, 1991].

O termo k é o termo de decaimento de substância não conservativa. Se, por exemplo, está-se trabalhando com bactérias coliformes (um dos indicadores mais importantes de contaminação biológica em corpos de água), o coeficiente k toma a forma [USEPA, 1985]:

$$k = - \frac{\ln 0.1}{T_{90}}$$

onde T_{90} é o tempo necessário para que a concentração de coliformes se reduza a 10%.

3.5 - Resolução do sistema de equações

O sistema (3.19) é um sistema onde a matriz dos coeficientes [K] é uma matriz de tipo banda. O número de diagonais dependerá da relação entre os nós do domínio. Isto traz como consequência que a numeração dos nós repercutirá diretamente na "dispersão" dos elementos na matriz

[K].

A solução do sistema (3.19) é obtida pelo método de dupla varredura, baseada no método de Gauss tradicional. O algoritmo usado tem a vantagem de trabalhar apenas com o número de diagonais diferentes de zero. Isto significa poupar tempo e diminuir erros numéricos na computação de cada Δt .

3.5.1 - Escolha do Δt

Este é, talvez, o ponto nevrálgico dos modelos numéricos, muitas vezes resolvido pela intuição do modelista. Existem várias fórmulas para o cálculo do Δt em problemas unidimensionais explícitos. A mais comum assume que, se o número de Courant, C_r , é igual à unidade, a relação do Δt com o Δx (tamanho da malha) e a velocidade é:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{U} \quad (3.23)$$

Em um modelo bidimensional, estudos realizados por Benqué et alii (1982), para um modelo numérico do tipo de direções alternadas (ADI) propõem que o C_r seja calculado pela expressão:

$$C_r = \Delta t \sqrt{gh} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \quad (3.24)$$

onde h é a profundidade média do fluxo, Δx e Δy o tamanho da malha nas respectivas direções e h , Δx e Δy devem ser considerados localmente. Benqué et alii (1982), afirmam que campos de escoamento com C_r maiores que 5-10, não conseguem ser bem simulados pelos modelos tipo ADI. A solução pode ser um pouco melhorada através do uso de um processo iterativo, permitindo que o C_r seja maior. Os autores apresentam um método de três passos para a resolução da parte hidrodinâmica: advecção, difusão e propagação da onda, usando o método das características para o primeiro e diferenças finitas para os dois

restantes (Método euleriano-lagrangeano). Isto lhes permite trabalhar com números de C_r da ordem de 100, obtendo excelentes resultados. O fato de usar o método das características implica na utilização de algum algoritmo de interpolação que normalmente consome maiores tempos de computação se comparados com os esquemas tradicionais de resolução (eulerianos).

O modelo hidrodinâmico (eqs. 2.40) resolvido por elementos finitos usando o método de Galerkin, permite trabalhar com valores de C_r altos. Um exemplo disto é apresentado em Almeida et alii (1989), para a Laguna dos Patos, onde o C_r usado foi de 35, considerando $\Delta x \cong 1000$ m, $h \cong 5$ m e $\Delta t = 1$ hr. Isto mostra que o modelo de elementos finitos proposto para a resolução é robusto, já que permite valores de Δt altos, diminuindo assim, os custos de computação.

Para o modelo de advecção-difusão, a literatura recomenda como critério para a escolha do Δt em um modelo 1-D [Roache, 1972]:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2 K} \quad (3.25)$$

onde K é o coeficiente de dispersão longitudinal visto no Capítulo 2. Para os valores clássicos de K , este Δt dá várias vezes maior que o do modelo hidrodinâmico. Por exemplo, para a Laguna dos Patos um valor de K aceitável será $\cong 20$ m²/s, o que dá $\Delta t \leq 7$ hs., muito superior ao obtido no parágrafo anterior.

3.5.2. - Problemas mais comuns na computação

Na equação de advecção-difusão, quando o termo advectivo é importante, tem-se como consequência, não só uma matriz global não simétrica, mas também a aparição de oscilações, que podem levar a resultados fisicamente absurdos. Para conhecer a natureza desta equação, far-se-á a seguir a análise apresentada por Neumann (1981). O número de Peclet, dado por:

$$P_e = \frac{V L}{K} \quad (3.26)$$

onde V é a velocidade e L um comprimento característico, representa a relação entre o processo advectivo e o difusivo. Para a análise far-se-á uso da equação de transporte 1-D adimensionalizada apropriadamente para um constituinte inerte:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - P_e \frac{\partial C}{\partial t} \quad (3.27)$$

L é um comprimento associado à coordenada x , que normalmente é escolhido como o tamanho da malha, Δx . Quando o processo é dominado pela difusão, o P_e é pequeno e a equação (3.27) torna-se de caráter parabólico. Em caso contrário, quando o P_e é grande, predominando assim o processo advectivo, a equação toma caráter hiperbólico.

Em casos reais, pode acontecer que em certas regiões do escoamento o processo seja mais difusivo e em outras mais advectivo, tornando desta maneira, o processo mais complexo de ser analisado. Quando o P_e é grande, aparecem oscilações numéricas nos métodos eulerianos baseados em diferenças centradas ou em elementos finitos tipo Galerkin. Para que estas oscilações não apareçam, pode-se provar, a partir de um esquema de diferenças finitas clássico aplicado à uma equação 1-D, que a condição suficiente é que o número de P_e seja < 2 .

No caso desta condição ($P_e < 2$), não ser satisfeita, alguns autores tem recomendado o uso de uma difusão artificial [Heinrich et alii, 1982]. Este artifício faz com que desapareçam as oscilações, mas produz um grande amortecimento na solução. Outros autores, como Heinrich et alii (1977), tem proposto o uso de um método de elementos finitos "upwind". Consiste basicamente em considerar funções forma não-simétricas mas contínuas. Em trabalhos posteriores [Neumann, 1981] tem-se demonstrado que este esquema é equivalente a considerar uma difusão artificial.

Outro método usado é o método de Petrov-Galerkin, que consiste em considerar a função peso do resíduo diferente da função forma. Esta segunda função pode ser variada em função do problema a resolver, chegando inclusive a escolher funções descontínuas. Este caso é normalmente usado quando existem frentes abruptas a ser modeladas [Heinrich, 1983].

Um outro método usado é o euleriano-lagrangiano, que consiste em considerar que os processos advectivos e difusivos acontecem separadamente. Desta forma, é primeiro calculada a advecção através do método das características, e depois, utilizando este resultado como condição inicial, é calculada a difusão [Neumann 1981, Holly et alii, 1982, Vinzon, 1991]. Para o caso de P_e altos, estes métodos fornecem excelentes resultados. Este método requer também o uso de interpoladores para resolver a parte advectiva.

Uma forma de diminuir o número de P_e sem mudar o método numérico, é diminuir o tamanho da malha em uso. Esta solução traz consigo o aumento do sistema de equações a resolver, tornando, em certos casos, quase impossível a sua solução se não há disponibilidade computacional adequada. É importante notar que esta solução também pode aumentar os erros numéricos na resolução, devido ao maior volume de cálculo.

CAPÍTULO 4 - APLICAÇÕES E RESULTADOS

4.1 - Introdução

As aplicações realizadas no presente trabalho foram divididas em duas partes principais. A primeira refere-se às aplicações a exemplos teóricos (alguns com solução analítica exata), tanto para o modelo hidrodinâmico (equações 2.40) quanto para o modelo de transporte de massa (equação 2.58).

A segunda parte consiste na apresentação dos exemplos de simulação de casos reais, realizados no estuário da laguna dos Patos.

4.2 - Aplicações e resultados dos testes teóricos

4.2.1 - Teste teórico para o modelo hidrodinâmico

A fim de avaliar alguns dos parâmetros numéricos, como por exemplo Δt e Δx , e o comportamento do modelo frente a fortes gradientes de profundidade, foi desenvolvido o exemplo apresentado por Benqué et alii (1982). Este caso foi escolhido pela semelhança com um estuário real, o qual tem uma ampla zona de baixa profundidade, e um canal de navegação, cuja profundidade pode ser muitas vezes superior à da zona adjacente. Isto traz como consequência a presença de fortes gradientes de profundidade, com os quais o modelo deverá lidar.

O exemplo citado pelos autores, consiste de uma bacia retangular com três de seus contornos fechados e um aberto, com um canal em forma de S. A bacia tem 7200 m de comprimento por 3600 m de largura, à qual foi superposta uma malha de 13x25 pontos, com $\Delta x = \Delta y = 300$ m. A profundidade média da bacia é de 6 m, e a do canal é 13 m. Uma variação de nível senoidal é colocada no contorno aberto, com uma amplitude de 3 m e período de 12 hs.

Os resultados que apresentam os autores correspondem a números de Courant (equação 3.24), $C_r = 16$ e 95 , os que indicam para $h=13$ m, $\Delta t=5$ e 30 min, respectivamente. A figura 4.1 apresenta o campo de velocidades obtidos para estes dois C_r , para o método das direções alternadas clássico (Fig. 4.1a e b), e para o modelo por eles desenvolvido com $C_r=95$ (Fig. 4.1c).

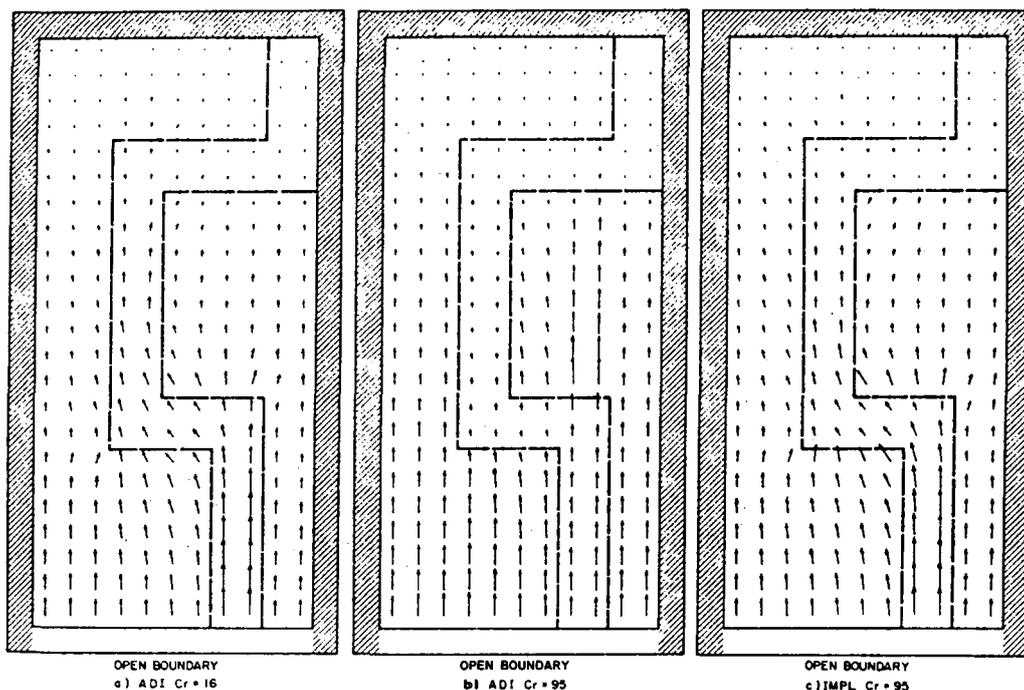


Fig. 4.1 - Campo de velocidades para $C_r=16$ e 95 [Benqué et alii, 1982]

Na implementação deste exemplo para o presente trabalho foi alterada a amplitude da onda de entrada, a qual se escolheu como sendo de 0.3 m. Isto foi necessário devido a que no momento em que a onda refletida atinge o contorno aberto produz-se uma instabilidade na região de entrada que afetava a solução, tornando os resultados incoerentes.

Foi realizado um teste para $C_r=95$ ($\Delta t=30$ min), cujos resultados são apresentados na figura 4.2, para os casos de fluxo enchente e vazante. Nas figuras 4.3 é mostrado um detalhe dos campos de velocidades obtidos neste trabalho e no original. A concordância entre

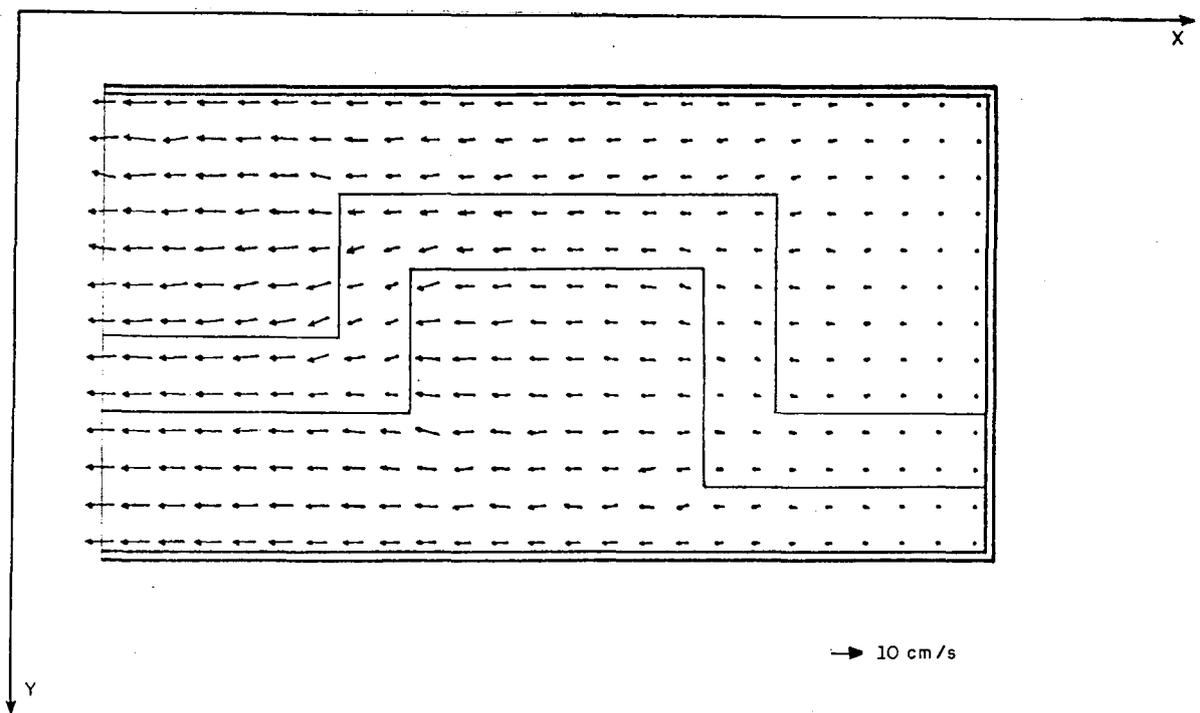
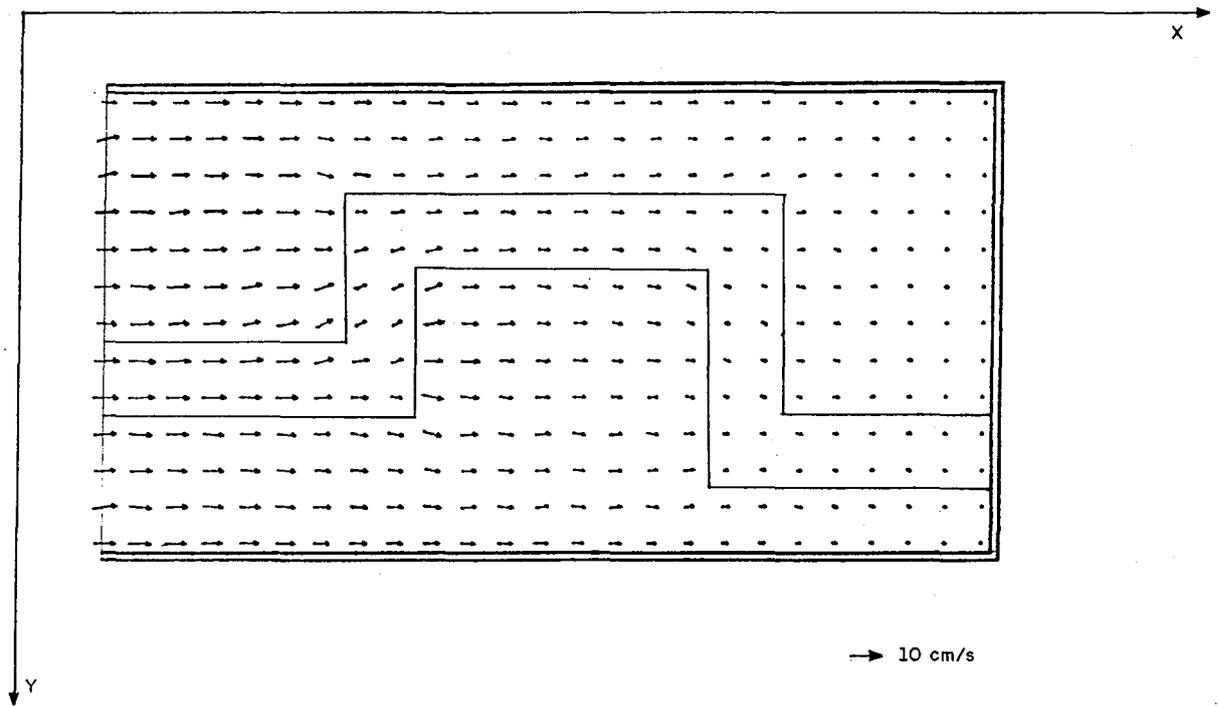


Fig. 4.2 - Campo de velocidades calculado para $C_r=95$; a) fluxo enchente, b) fluxo vazante

a batimetria e o campo de velocidade indica que o modelo hidrodinâmico "percebe" a presença do canal e portanto pode lidar satisfatoriamente com gradientes de profundidades importantes.

O objetivo deste exemplo foi provar, não só o desempenho do modelo nestas situações, como também a possibilidade de usar valores de Δt relativamente grandes, para poder diminuir o número de passos de tempo e, conseqüentemente o tempo total de computação.

Outros resultados sobre este modelo podem ser encontrados em Rosauo (1986) e Almeida et alii (1990).

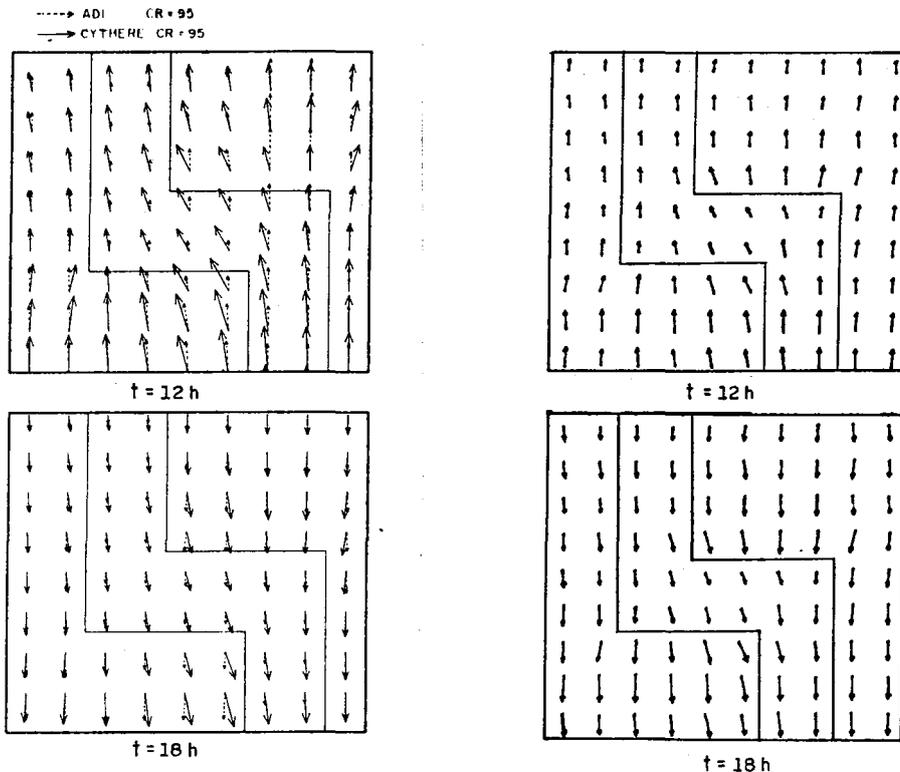


Fig. 4.3 - Comparação dos campos de velocidades calculados com os resultados de Benqué et alii, 1982

4.2.2 - Teste teórico para o modelo de transporte de massa

O objetivo destes testes foi avaliar o comportamento do modelo matemático de transporte de massa frente a diferentes situações simplificadas, que possuem soluções analíticas exatas. Apesar de se

tratarem de casos teóricos, os mesmos apresentam semelhanças quanto aos parâmetros numéricos dos casos reais.

Os testes teóricos foram divididos em unidimensionais e bidimensionais. Os primeiros resolvem a equação:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

com condição inicial e condições de contorno:

$$\begin{aligned} C(x, t=0) &= 0 \\ C(x=0, t) &= C_0 \\ C(x=L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

A solução analítica de (4.1) e (4.2) foi obtida por Ogata et alii (1961), e tem por expressão:

$$C = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x-Ut}{\sqrt{4Kt}} \right) + \exp\left(\frac{xU}{K}\right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x+Ut}{\sqrt{4Kt}} \right) \right] \quad (4.3)$$

sendo $\operatorname{erfc}(a)=1-\operatorname{erf}(a)$, e $\operatorname{erf}(a)$ a função erro (Abramovitz et alii, 1965).

A malha utilizada nos testes foi de 5x31 pontos (60 elementos e 155 nós). Na tabela 4.1 são apresentados os parâmetros de cada caso e o tempo usado (t) para a plotagem, e nas figuras 4.4 a 4.7, os gráficos correspondentes, em todos os casos para $C_0=1$.

Caso	U (m/s)	K (m ² /s)	Δx (m)	Δt (s)	t (s)	P _e
1	0.05	0.02	0.5	6.4	32	1.25
2	0.5	0.02	0.5	1.0	10	12.5
3	5	0.02	0.5	0.1	1	125
4	0.05	0.01	0.05	0.5	10	0.25

Tabela 4.1 - Valores dos parâmetros para os testes unidimensionais

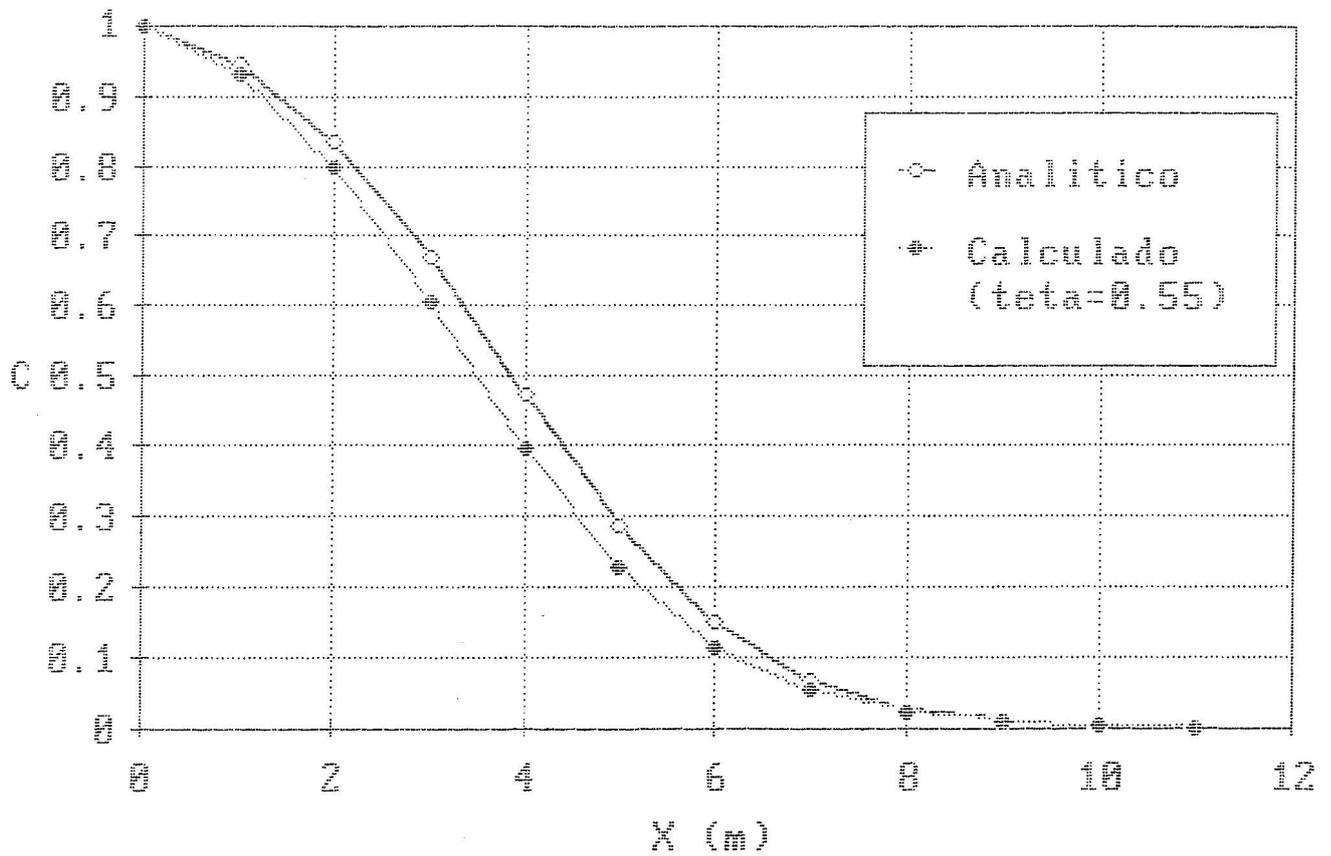


Fig. 4.4 - Teste teórico unidimensional - Caso 1 ($P_e=1.25$)

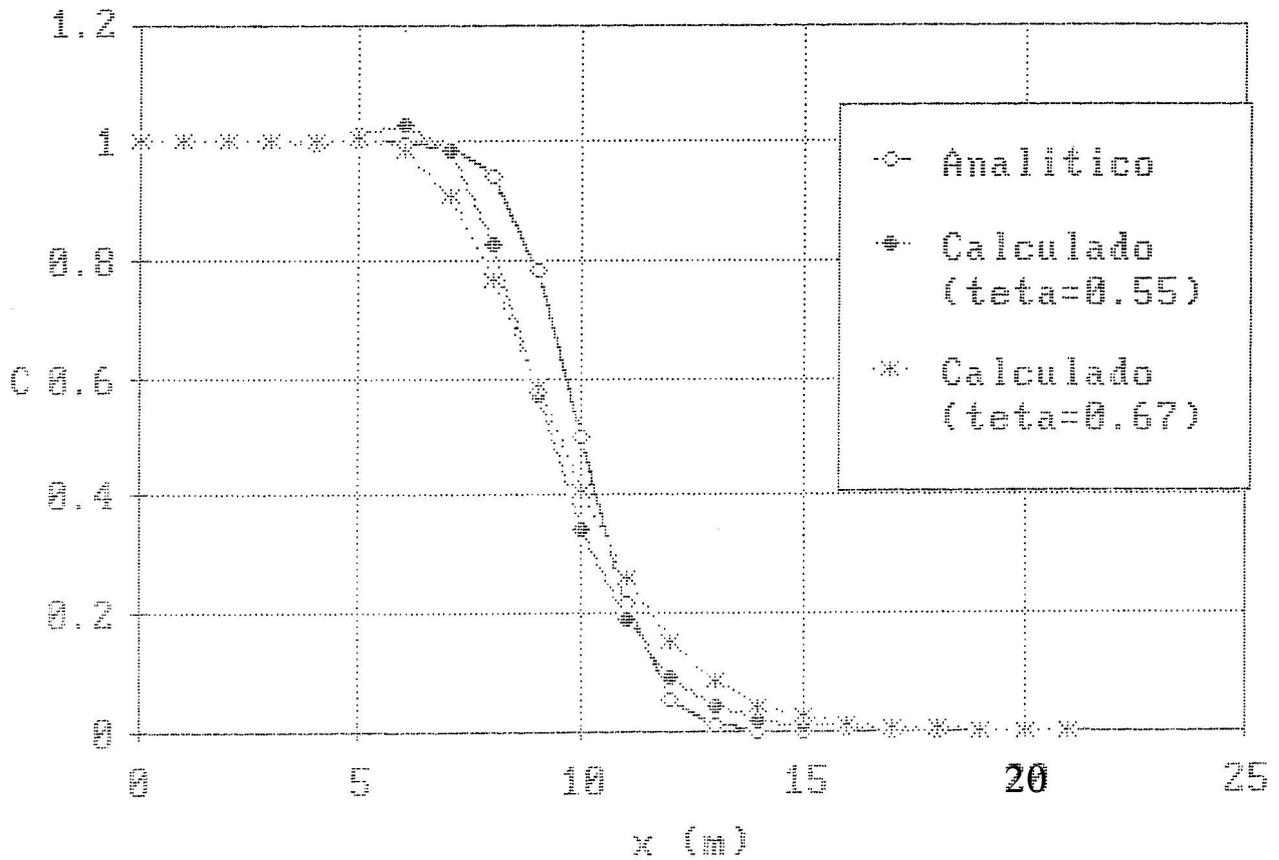


Fig. 4.5 - Teste teórico unidimensional - Caso 2 ($P_e=12.5$)

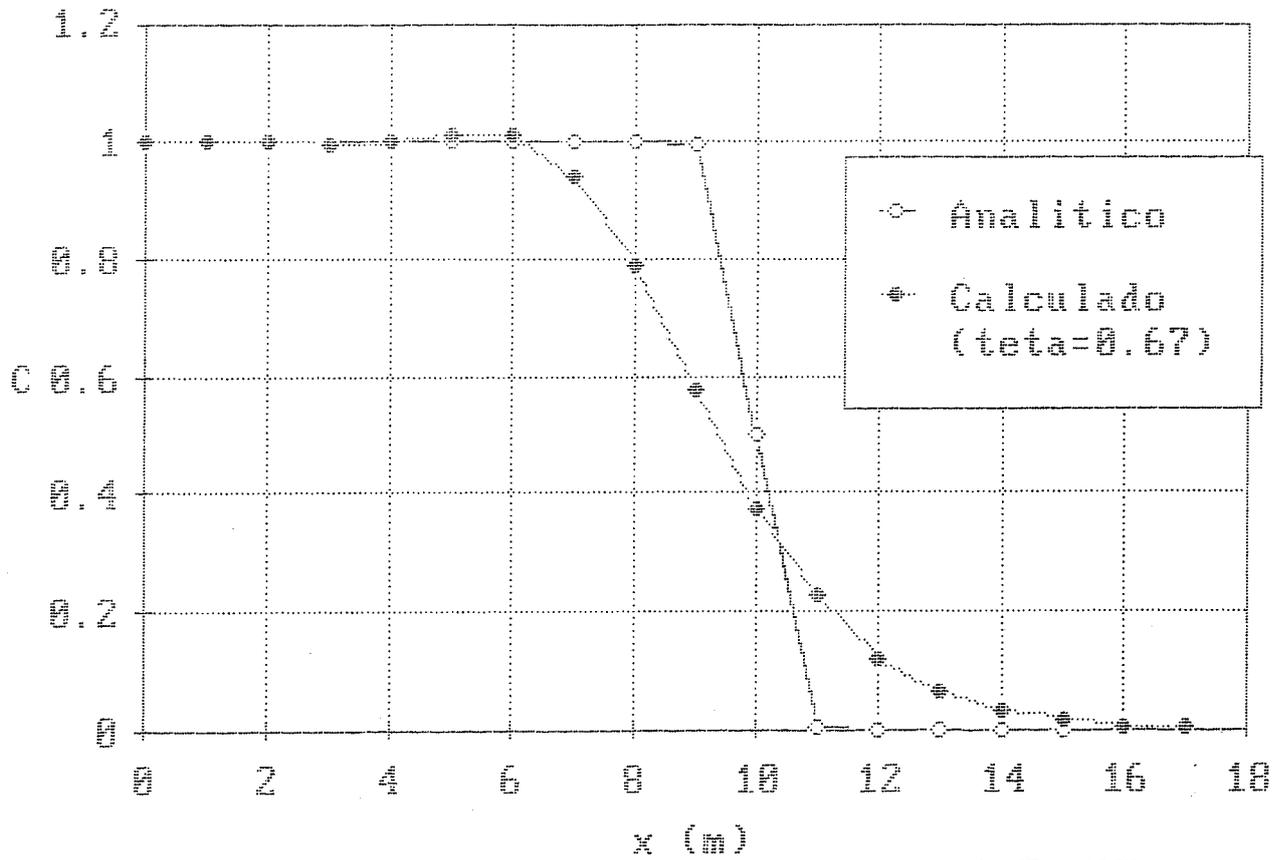


Fig. 4.6 - Teste teórico unidimensional - Caso 3 ($P_e=125$)

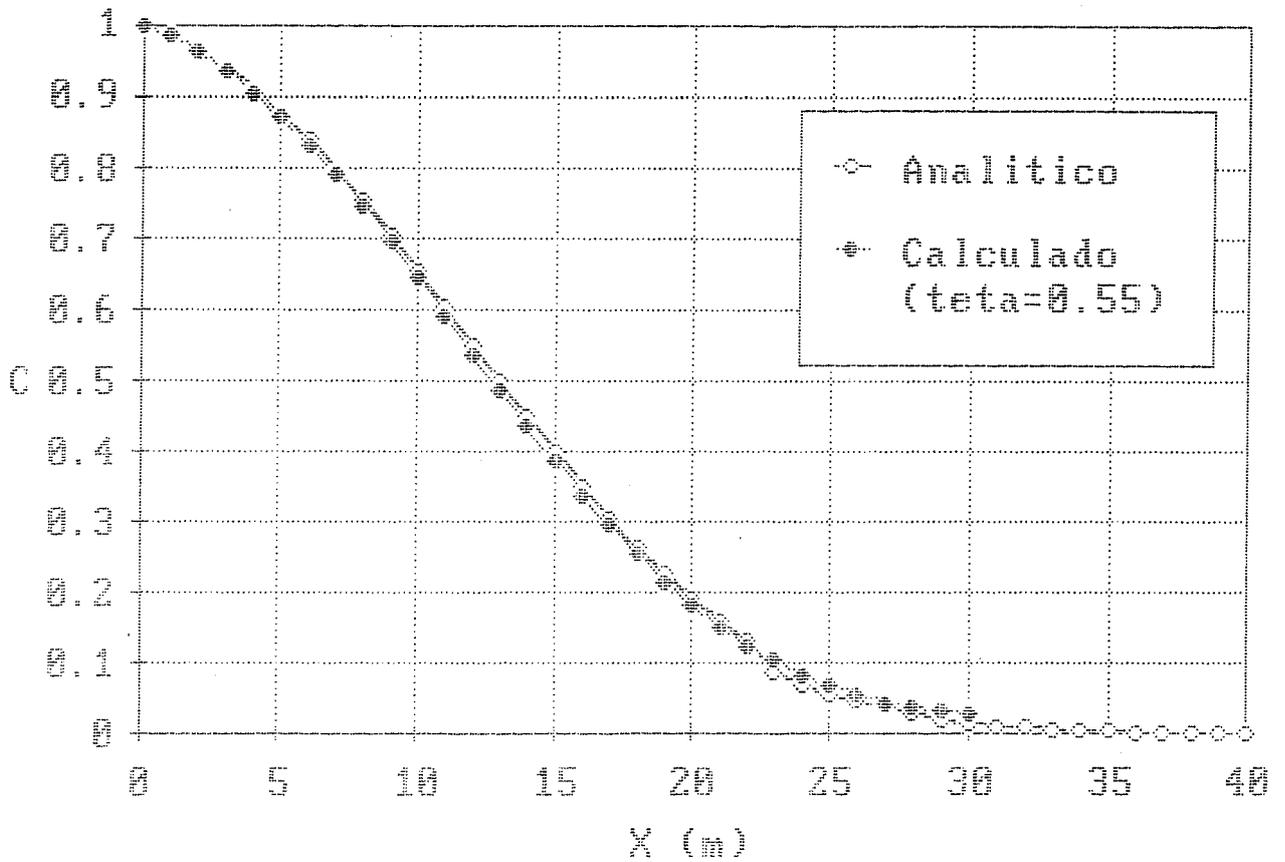


Fig. 4.7 - Teste teórico unidimensional - Caso 4 ($P_e=0.25$)

Da análise dos resultados se observa que com o aumento do número de P_e , o modelo apresenta mais dificuldade em conseguir um melhor ajuste da frente (a velocidade numérica da onda é menor que sua velocidade analítica), aparecendo inclusive algumas oscilações, principalmente para valores de $\theta=0.55$ (Fig. 4.5 e 4.6). Estas oscilações podem ser controladas aumentando o valor de θ , tornando o esquema mais implícito, porém, a custa de um maior amortecimento da onda.

Para o caso 2 (Fig. 4.5) o valor de $\theta=0.67$ pode ser considerado mais satisfatório que o de $\theta=0.55$, basicamente por apresentar uma solução livre de oscilações. O caso 3 (Fig. 4.6) é apresentado para mostrar o comportamento do modelo para valores de P_e altos, observando-se nele um amortecimento importante da frente para $\theta=0.67$.

Considerando que para o estuário da laguna dos Patos, a concentração varia de forma suave e o número de Peclet previsto é da ordem de 1, esta análise unidimensional indicaria que um valor apropriado para θ estaria no intervalo 0.55-0.67.

O teste bidimensional de transporte de massa resolve a equação

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (4.5)$$

onde K_x e K_y são os coeficientes de difusão nas direções x e y respectivamente. A solução analítica da equação (4.5) para velocidade U constante e uma injeção instantânea de massa de concentração C_0 e volume V_0 , é dada por [Holly, 1975]:

$$C = \frac{C_0 V_0}{4Ht \sqrt{K_x K_y}} \exp \left[-\frac{(x-Ut)^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t} \right] \quad (4.6)$$

Os valores usados para este teste foram $C_0 V_0 = 100000 \text{ m}^3$, $H=1 \text{ m}$, $K_x=K_y=10 \text{ m}^2/\text{s}$, $\Delta x=50 \text{ m}$, $\Delta y=100 \text{ m}$ e $U=0.2 \text{ m/s}$

A malha usada foi de 31x13 pontos (180 elementos e 403 nós). Com base nestes valores o cálculo de Δt , indicado pela equação (3.25), foi de 100. A condição inicial foi calculada a partir da equação (4.6) para $t=400$. O valor de θ usado foi 0.67.

A figura 4.8 apresenta os perfis de concentração sobre o eixo x , na linha central ($y=0$), para diferentes tempos tomados a partir do tempo inicial fixado. Apesar da rápida queda do pico da onda de concentrações teórica, o modelo simula satisfatoriamente este fato,

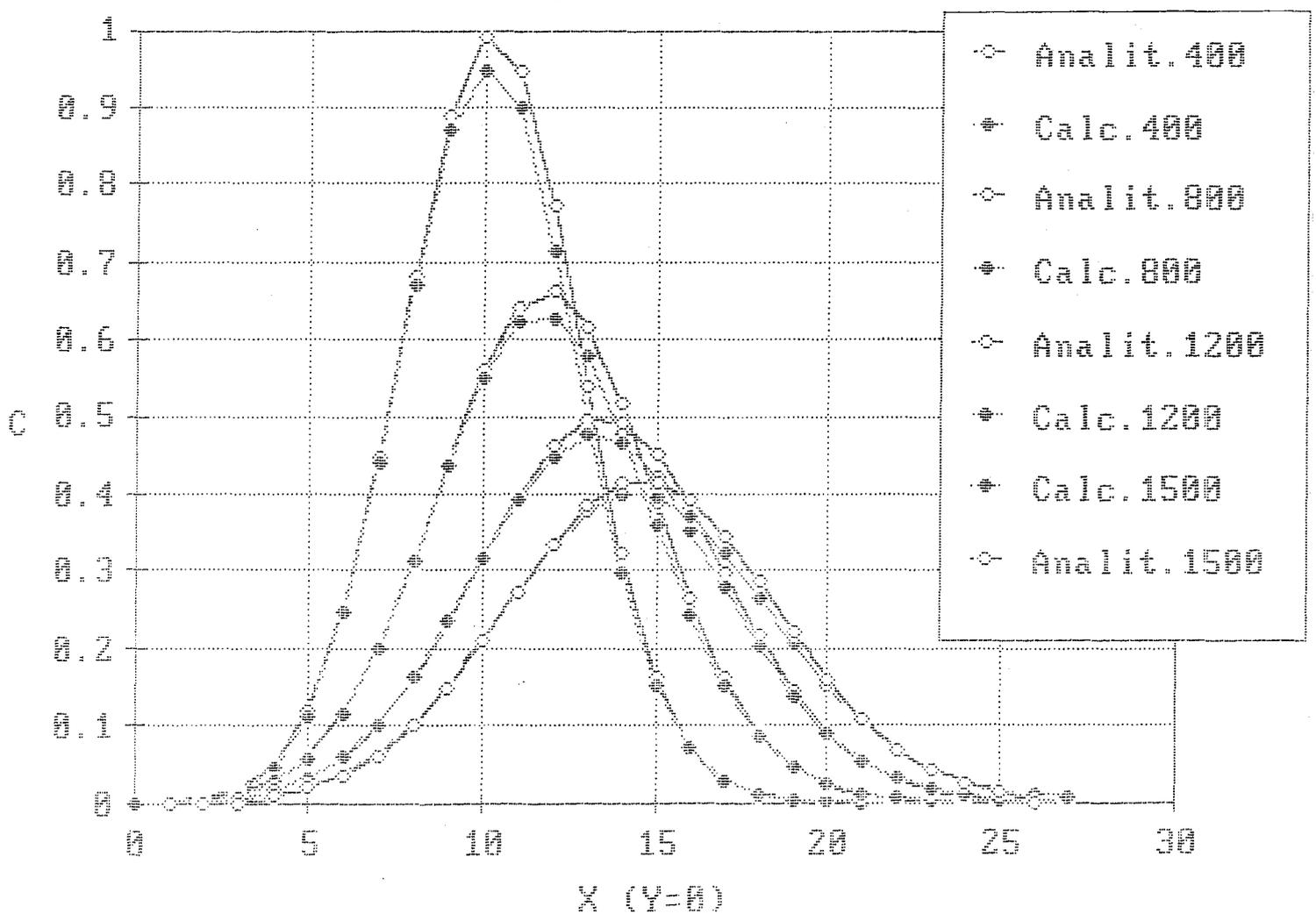


Fig. 4.8 - Teste teórico bidimensional para diferentes tempos

acompanhando-a perfeitamente. Observa-se também na figura que, para os quatro tempos graficados, a conservação da massa é verificada. A solução numérica mantém a simetria com respeito aos eixos x e y da mesma forma que a solução analítica.

4.3 - Aplicações do modelo ao estuário da laguna dos Patos.

As regiões estuarinas estão limitadas às zonas onde há influência do oceano, caracterizando-se por apresentar fluxo e contra-fluxo e variações no conteúdo da concentração salina.

Da superfície total da laguna dos Patos (mais de 10000 km²), 10% correspondem ao estuário, localizado na sua parte Sul (Fig. 1.1). A região em estudo se estende desde a cidade de São Lourenço até uns 20 km mar adentro. Estes limites foram escolhidos para garantir a independência das condições de contorno, tanto no modelo hidrodinâmico, quanto no de transporte de massa.

A escolha do contorno em mar aberto merece uma observação especial. Devido à não existência de dados de concentração na saída do estuário, foi necessário acrescentar ao domínio do estuário, uma zona de mar aberto. O afastamento da costa foi fixada em 20 km, porque é a distância mínima a partir da qual se pode considerar que a concentração salina do oceano é constante e não sofre influência da descarga de água doce. Um outro motivo para a escolha desta distância, é a modelação da pluma provocada pela descarga de água doce ao mar [Hartmann, 1989].

Os dados utilizados neste trabalho foram obtidos do Relatório Final apresentado à Comissão Interministerial para os Recursos do Mar (CIRM), realizado pelo Departamento de Geociências da Fundação Universidade de Rio Grande (FURG), correspondente aos cruzeiros realizados durante 1984 e 1985 [Paim et alii, 1986].

São numerosos os dados disponíveis deste estuário e da zona

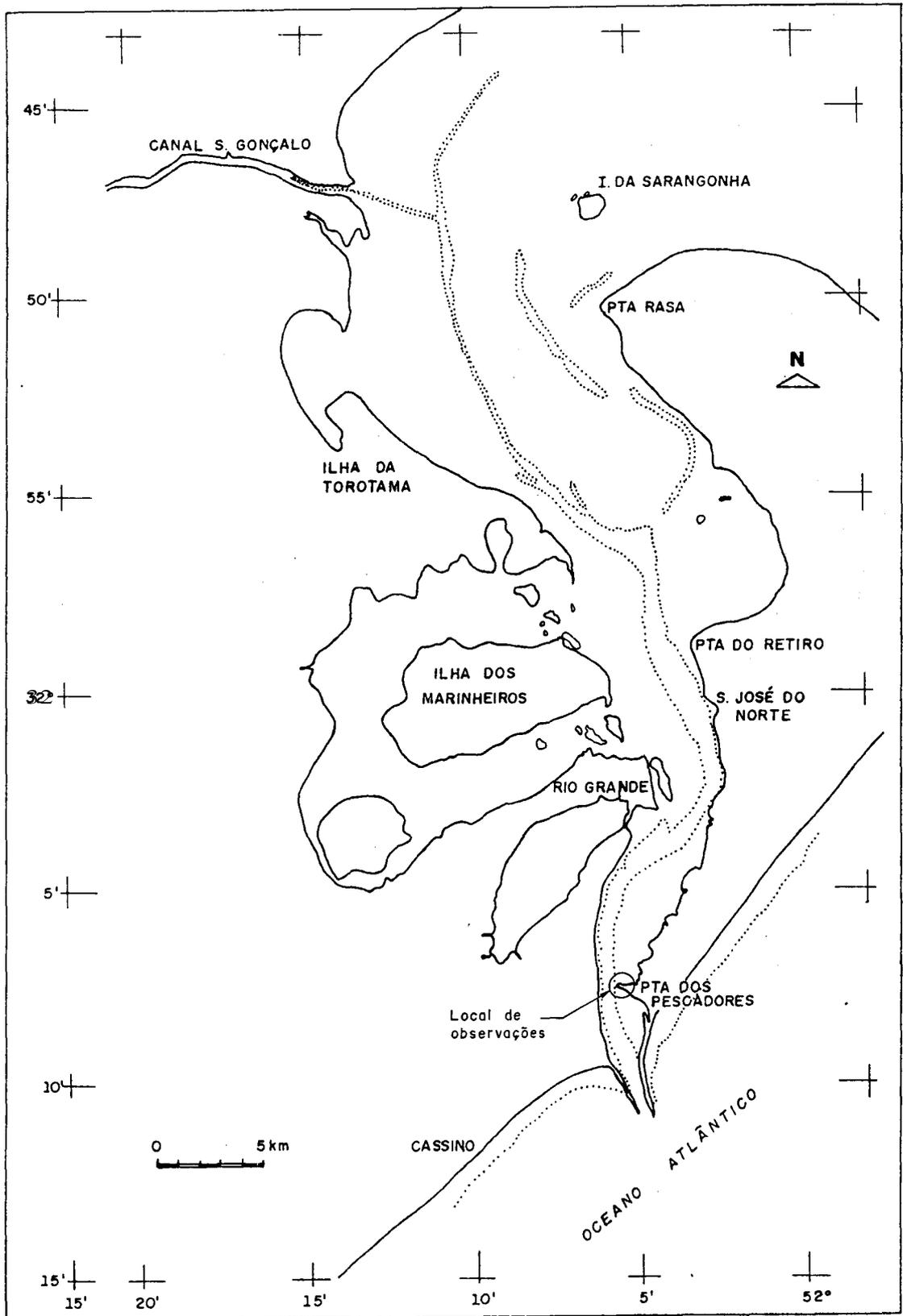


Fig. 4.9 - Estuário da laguna dos Patos

costeira próxima, sobretudo geológicos, físico-químicos e biológicos (Kantin, 1983; Hartmann, 1989). A grande maioria destas campanhas não foi realizada de forma sistemática, com exceção dos estudos feitos pela FURG.

Estas informações têm uma periodicidade aproximadamente mensal durante os anos 1982 a 1985, verificando-se nos anos posteriores uma diminuição desta frequência. As campanhas consistiram em cruzeiros realizados durante mais ou menos 24 horas, e em geral, a tomada de dados se fazia ao longo dos canais do estuário. Também foram realizados alguns fundeios, principalmente durante 1984, na Ponta dos Pescadores (Fig. 4.9).

Foram coletados dados de velocidade e direção da corrente e do vento, concentração salina, turbidez e de material em suspensão. Nos casos dos fundeios os levantamentos foram realizados a cada hora.

Como a tomada de amostras não foi feita com a finalidade de alimentar um modelo matemático, estes dados devem ser cuidadosamente escolhidos e processados para tal fim. Desta forma, do conjunto dos fundeios disponíveis, só dois puderam ser aproveitados. Estes apresentavam níveis, velocidades e concentrações salinas com registros contínuos ao longo de períodos da ordem de um dia. Alguns fundeios apresentavam uma cunha salina muito pronunciada, uma concentração constante durante todo o fundeio, ou ainda os dados da correntologia estavam incompletos.

Os dois fundeios escolhidos para testar os modelos hidrodinâmico e de transporte de massa foram:

- a) Cruzeiro MS XII - 3-4/10/84
- b) Cruzeiro MS XV - 4-5/12-84

4.3.1 - Dados de entrada gerais

A malha de elementos finitos triangulares que foi construída para

o estuário da laguna dos Patos, tem 254 elementos e 613 nós (Fig. 4.10). O menor tamanho do elemento está limitado pela largura do canal de acesso, que na parte mais estreita é de 700 m, dando um Δx mínimo de 350 m (considerando elementos quadráticos). Em função dos valores característicos do coeficiente de dispersão longitudinal, este valor de Δx também assegura que o número de P_e seja da ordem um.

Esta configuração da malha faz com que o sistema a resolver no modelo de transporte de massa fosse de 584 equações e no modelo hidrodinâmico 1650 equações.

As profundidades foram levantadas da carta da Marinha do Brasil nro. 2140, com escala 1:271600, e da carta nro. 2101 com escala 1:25000. Esta segunda permitiu obter com maior detalhe as profundidades dos canais do estuário.

A escolha das condições iniciais do modelo de transporte de massa é muito importante, devido a que os tempos de simulação são geralmente curtos (menos de 24 horas) e o sistema não chega a perder a "memória", afetando assim os resultados obtidos. Em outras palavras, para os tempos de simulação aqui usados as soluções se mantêm sob influência das condições iniciais. O desconhecimento das mesmas fez com que fossem escolhidas em forma arbitrária, seguindo como indicação os perfis longitudinais medidos nos cruzeiros [Paim et alii, 1986]. Estes últimos só forneceram uma ideia da situação, já que não é conhecido o tempo no qual foram realizados em relação ao tempo do fundeio.

As condições iniciais para o modelo hidrodinâmico foram velocidades nulas e nível constante e igual ao nível médio do mar. Neste caso o período de influência das condições iniciais é menor, normalmente em torno de 5 horas.

As condições de contorno de concentração foram sempre constantes no tempo; no mar o valor escolhido foi de $C=30$ g/l [Kantin, 1983] e no contorno a montante $C=0$ g/l.

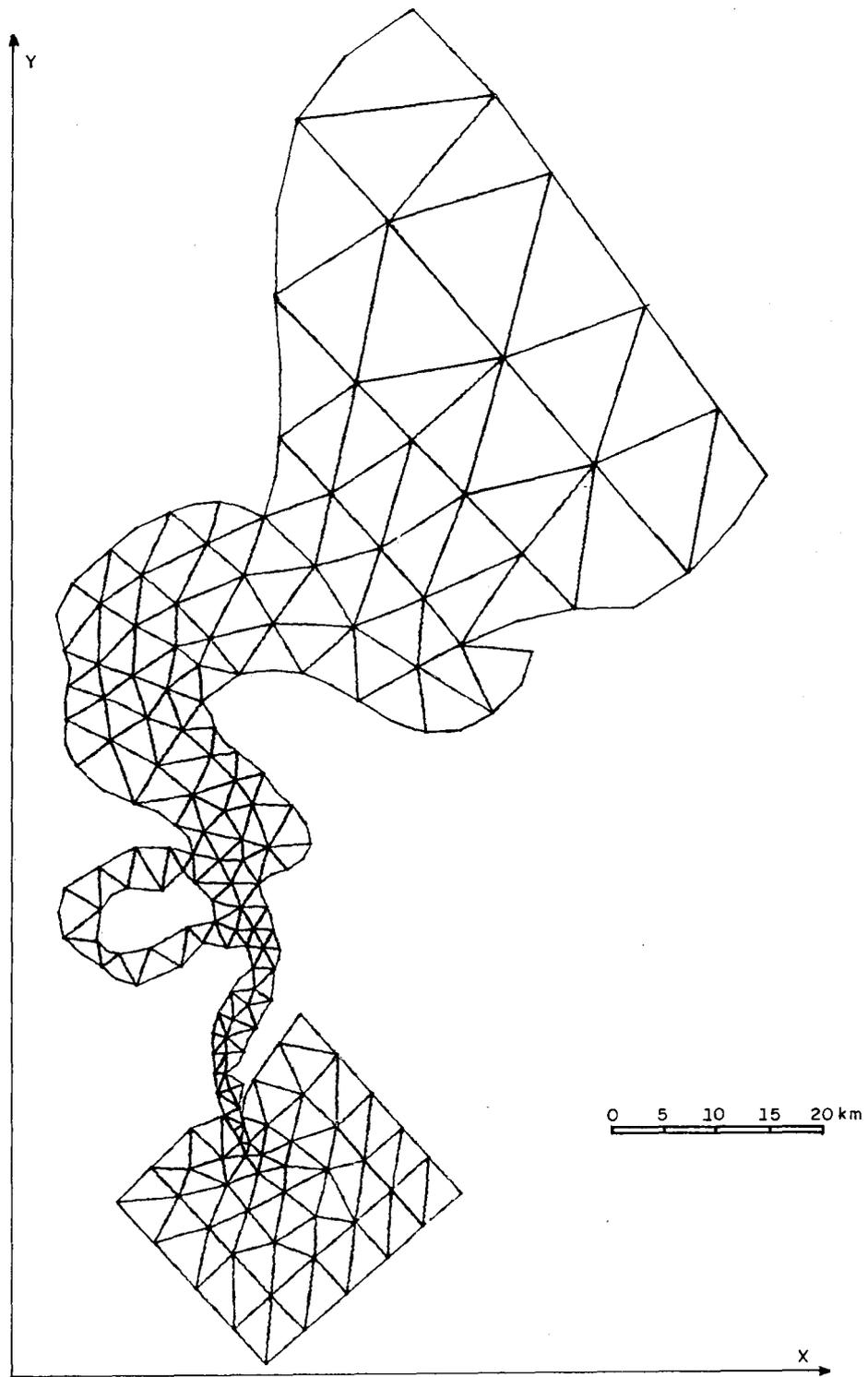


Fig. 4.10 - Malha de elementos finitos usada

No modelo hidrodinâmico as condições de contorno foram fixadas da seguinte forma: no contorno a montante foram prescritos níveis constantes. No contorno aberto foi realizado o seguinte teste: a partir do cálculo da maré astronômica (composição de harmônicos), foi relacionado este nível com o obtido na Ponta dos Pescadores (Fig. 4.9). A variação entre os mesmos foi de poucos centímetros. Desta forma, a condição de contorno no mar aberto usada nas simulações, foi construída corrigindo os valores observados de níveis na Ponta dos Pescadores com a diferença obtida da relação anterior.

O problema mais sério apresentou-se neste ponto. Na zona da cidade de Rio Grande existe um linígrafo e dois marégrafos, um destes últimos aparentemente instalado para as campanhas da FURG. Os níveis de referência dos mesmos não se encontram referenciados a algum ponto fixo, nem relacionados entre se ou com as cartas da Marinha.

O cálculo da maré astronômica referenciado anteriormente foi realizado a partir de uma série senoidal, onde em cada termo intervêm a amplitude (a_i), período (T_i) e fase (φ_i) do harmônico. A soma é realizada sobre o número (N) de harmônicos considerados:

$$\eta = \sum_{i=1}^N a_i \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{t}{T_i} - \varphi_i \right) \quad (4.7)$$

Para a zona de Rio Grande os nove principais harmônicos são [S.H.O.M., 1982] são apresentados na tabela 4.2.

Harmônico	Q_1	O_1	K_1	N_2	M_2	S_2	MN_4	M_4	MS_4
a_i (mm)	31	108	47	44	34	34	25	46	13
T_i (horas)	24	26	24	13	12	12	6	6	6
φ_i (graus)	40	72	134	193	228	26	63	109	179

Tabela 4.2 - Principais harmônicos de Rio Grande [S.H.O.M., 1982]

O valor do intervalo de tempo de cálculo foi de 15 min para o

modelo hidrodinâmico ($C_f=44$ na equação 3.24), devido a que valores de C_f maiores apresentavam pequenas oscilações. Para o modelo de dispersão o Δt foi de 30 min, calculado a partir da equação 3.25, para valores típicos do coeficiente de dispersão.

O cálculo do coeficiente de dispersão longitudinal foi realizado a partir da teoria exposta no ponto 2.3.3 para fluxo oscilatório. Considerando que na zona de Rio Grande a maré é diurna, que um valor representativo da velocidade média é $V_m=0.5$ m/s e que a intensidade da turbulência pode ser assumida como igual a $0.2V_m^2$, obtém-se que o coeficiente de dispersão longitudinal é de 30 m²/s aproximadamente, tomando $\varepsilon_t=1$ m²/s. As componentes do tensor de difusão são calculadas como foi indicado no capítulo 2, equações (2.59). O valor de K foi tomado constante, devido a que nas zonas onde poderia ser menor, existem outros fenômenos de mistura envolvidos (maré obstruída e velocidade residual) que não são possíveis de serem calculados.

O número Péclét (equação 3.26) apresenta-se mais desfavorável para a zona do canal de acesso, dando valores em torno de 10, o qual indicaria que podem existir pequenas oscilações. Nas simulações realizadas estas oscilações não atingiram 1% do valor calculado.

Outros parâmetros que só intervêm no modelo hidrodinâmico são o coeficiente de Chezy (equação 2.41), calculado a partir de um coeficiente de Manning de 0.03 e o coeficiente de arraste C_D (equação 2.42) tomado igual a 3.2×10^{-3} .

4.3.2 - Cruzeiro MS XII - 3 e 4 de outubro de 1984

Este fundeio teve uma duração de 17 horas, iniciando às 16 horas do dia 3 e finalizando às 9 horas do dia 4. Durante o fundeio foram coletados dados horários de velocidades na superfície, meia profundidade e fundo, intensidade e direção do vento (tabela 4.3) e salinidade na superfície, meia profundidade e fundo. Os dados de níveis foram obtidos de um marégrafo localizado na Ponta dos

Pescadores (Fig. 4.9), que como se infere do item anterior, só fornecem as variações dos mesmos. Os dados de ventos incluídos na simulação foram considerados constantes em todo o domínio.

Tempo (hs)	16	20	24	4	8
Velocidade (km/h)	21	10	10	10.5	10
Direção	N	SW	SW	S	S

Tabela 4.3 - Velocidade e direção do vento - Cruzeiro MS XII

A figura 4.11 mostra os níveis medidos e calculados na Ponta dos Pescadores, observando-se um excelente ajuste. Deve ser salientado novamente que está-se supondo que o nível médio do mar coincide com o nível médio dos dados e o gradiente de níveis entre a Laguna e o mar não é considerada por ser desconhecida.

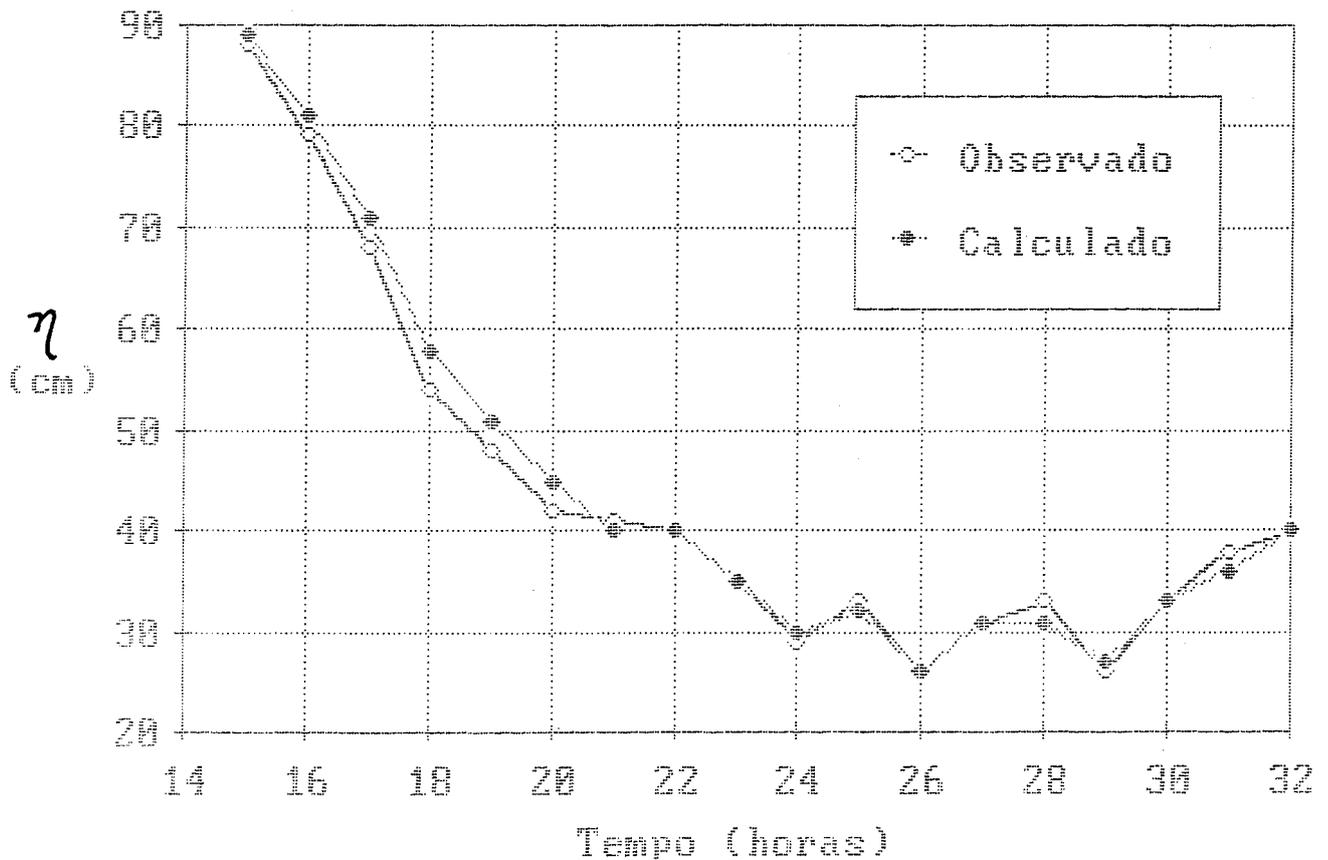


Fig. 4.11 - Níveis observados e calculados - Cruzeiro MS XII

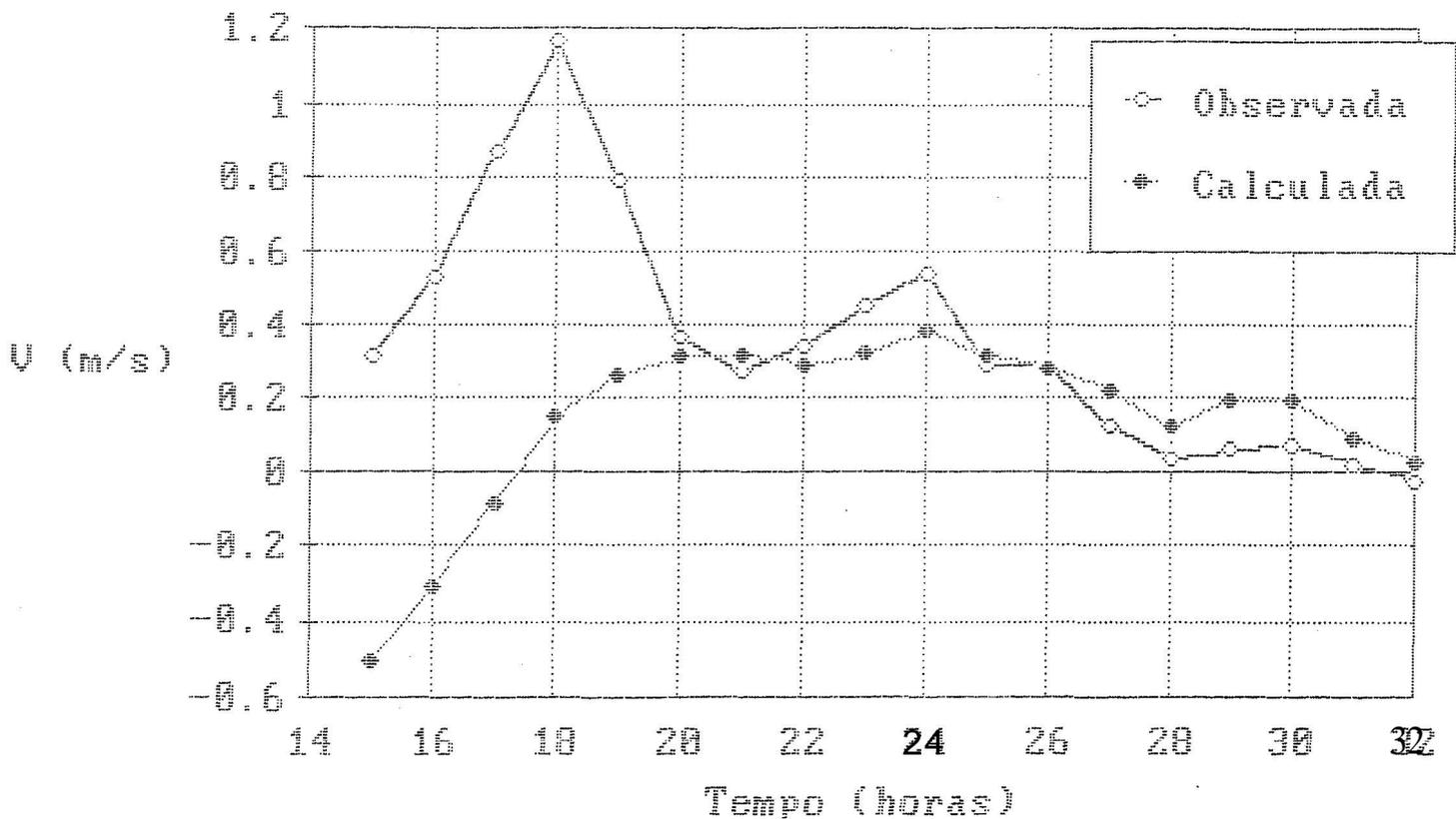


Fig. 4.12 - Velocidades observadas e calculadas - Cruzeiro MS XII

A figura 4.12 mostra a comparação de velocidades, onde as velocidades positivas indicam maré vazante. As fortes velocidades registradas ao início do fundeio e não encontradas pelo modelo, são devidas provavelmente aos grandes desníveis entre a laguna e o oceano ocorridos nos dias anteriores. Após a saída destes volumes de água doce (aproximadamente $t=20$ horas), as velocidades observadas e calculadas se ajustam bem, tendendo a diminuir com o aumento de nível (após $t=29$ horas) e a se inverter.

A semelhança dos valores das velocidades medidas e calculadas após os primeiros intervalos de tempo ($t=20$ horas) estariam indicando que não há defasagem entre as médias dos níveis medidos e calculados e que o gradiente entre a laguna e o mar só é importante nas primeiras horas de simulação. Para este caso aparentemente há uma superposição dos planos de referência dos níveis.

Para compensar o gradiente de nível, aparece um gradiente de

salinidade, representado por uma estratificação que entra ao estuário, como foi explicado no ponto 2.2.3. Isto é refletido no cálculo da salinidade média na seção (Fig. 4.13), que aparece com uma tendência completamente diferente à calculada. Só no fim do fundeio começou a aparecer um tendência à mistura na vertical. Este resultado era de se esperar, já que o modelo não simula efeitos de estratificação vertical.

4.3.3. - Cruzeiro MS XV - 4 e 5 de dezembro de 1984

O cruzeiro MS XV começou às 10 horas do dia 4 e finalizou às 10 horas do dia seguinte. Durante o fundeio foram coletados os mesmos dados que no anterior. Os dados de velocidade e direção do vento são apresentados na tabela 4.4. Deve-se notar porém, que na realidade

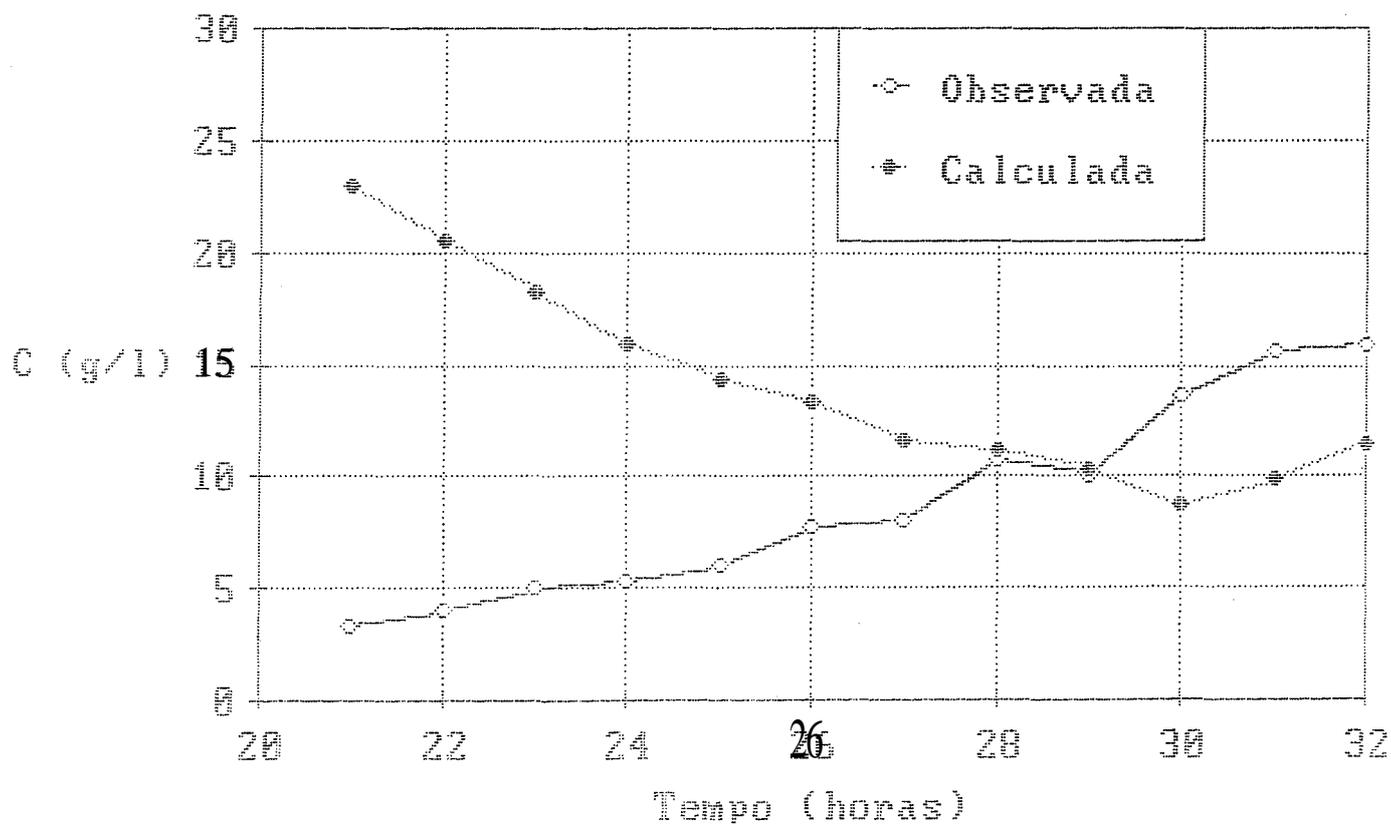


Fig. 4.13 - Salinidade observada e calculada - Cruzeiro MS XII

estes dados foram alterados durante a simulação, devido ao grande desnível que o vento induzia. O modelo gerava no contorno de mar aberto, fortes velocidades para satisfazer continuidade.

Tempo (hs)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Veloc. (km/h)	27	22	18	18	27	27	27	27	27	23	25	23	13
Direção	SW	SW	SW	N	E	SW	SW	SW	SW	W	W	W	SW

Tempo (hs)	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocidade (km/h)	25	23	30	29	29	27	21	21	10	10	12	16
Direção	SW											

Tabela 4.4 - Velocidade e direção do vento - Cruzeiro MS XV

A figura 4.14 mostra a comparação entre os níveis observados e calculados na Ponta dos Pescadores. Estes níveis apresentam uma pequena amplitude e contínuas variações ao redor do nível médio.

A figura 4.15 apresenta as velocidades observadas e calculadas. No gráfico se observa que as curvas seguem as mesmas tendências, mas diferem em um valor aparentemente constante. Isto foi verificado subtraindo da série de velocidades observadas, seu próprio valor médio e superpondo este resultado à série de valores calculados (Fig. 4.16).

Isto estaria indicando a existência de uma diferença na referência dos níveis observados em relação à referência da batimetria. Neste caso também é importante a influência do gradiente de níveis entre a Laguna e o mar, já que as velocidades medidas são maiores que as calculadas. Este gradiente estaria indicando uma saída contínua para o mar de volumes de água provenientes da laguna. O desconhecimento do gradiente de níveis entre a laguna e o mar, e da relação entre os valores de referência dos níveis, indicam que resultaria difícil corrigir os resultados para obter um ajuste mais favorável.

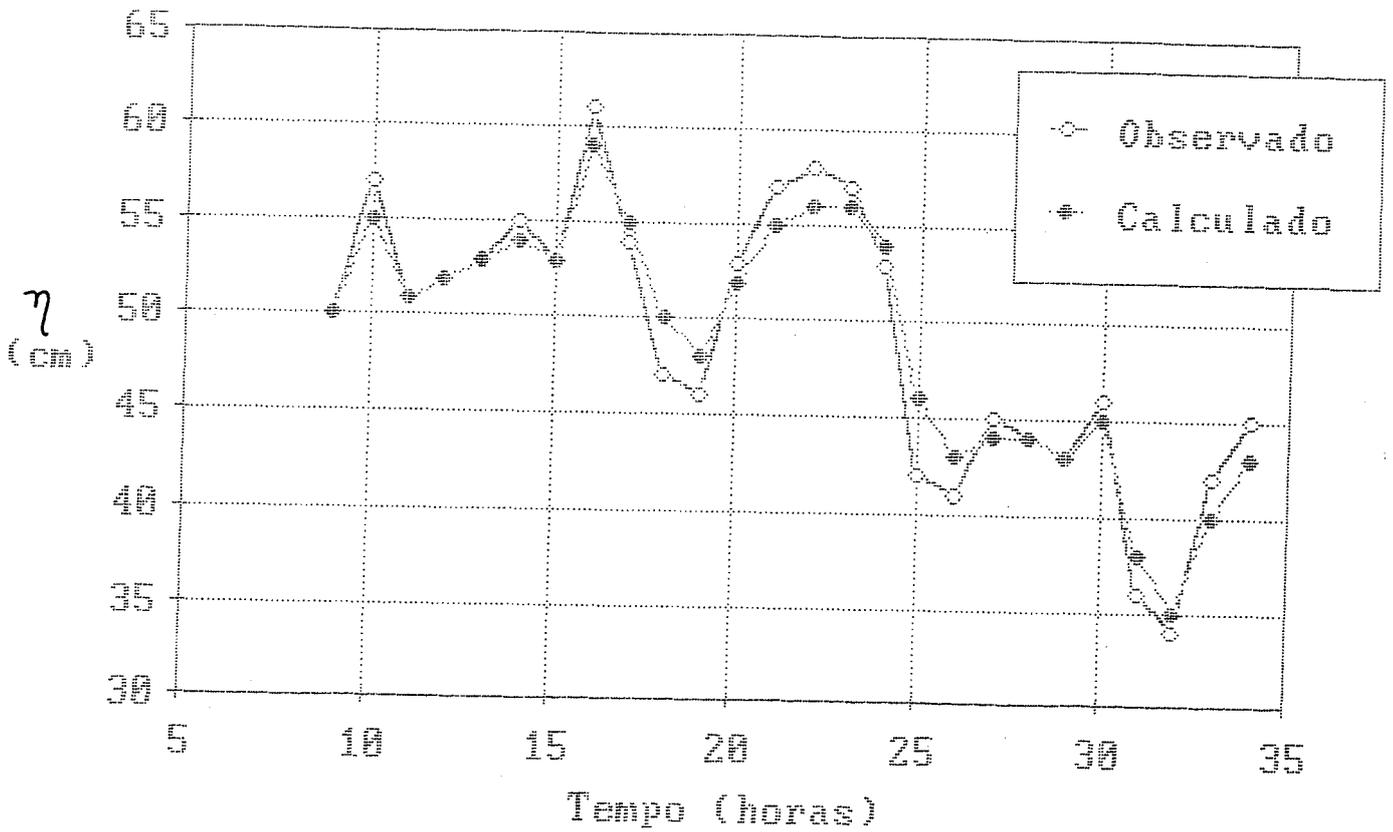


Fig. 4.14 - Níveis observados e calculados - Cruzeiro MS XV

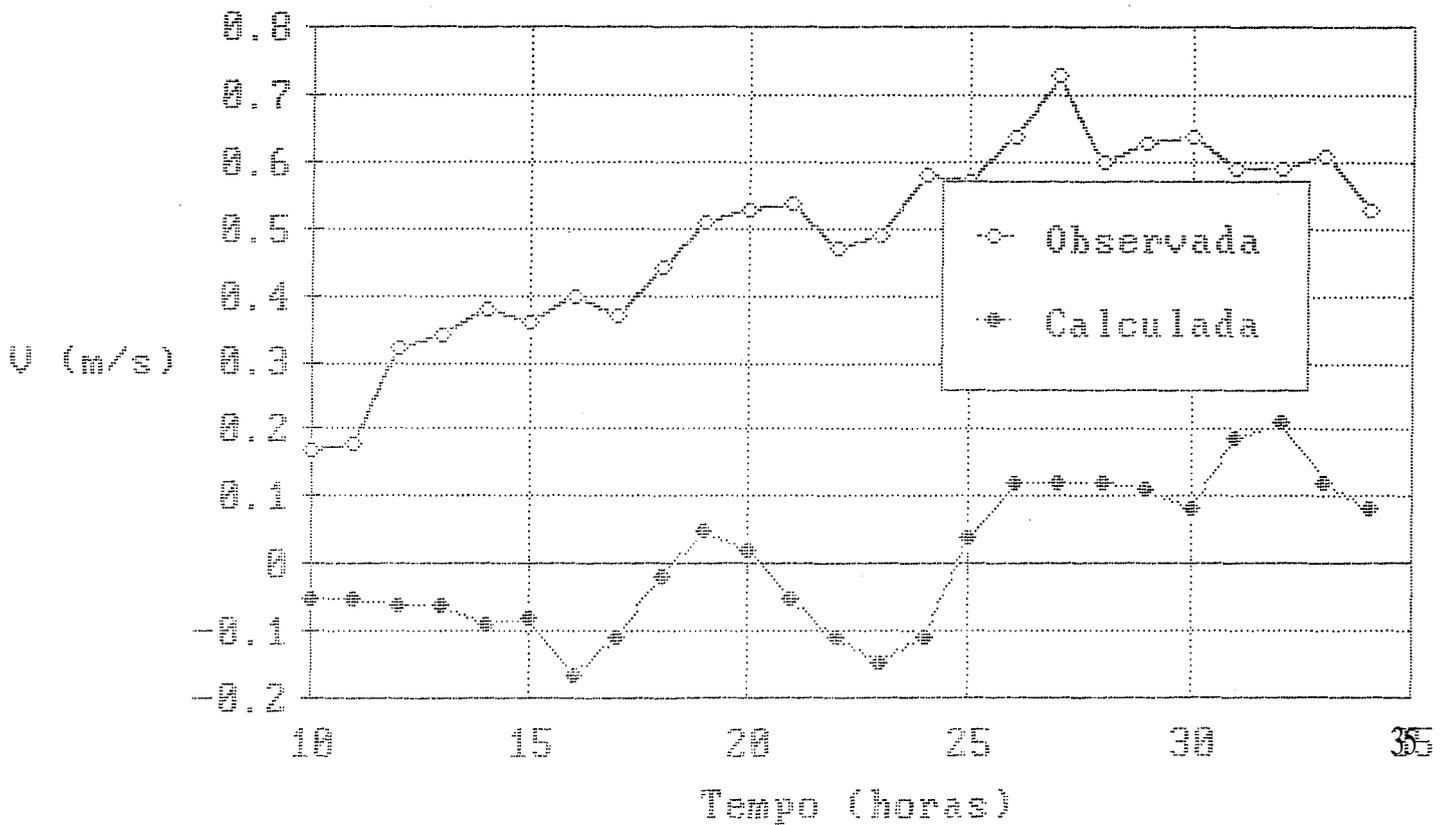


Fig. 4.15 - Velocidades observados e calculadas - Cruzeiro MS XV

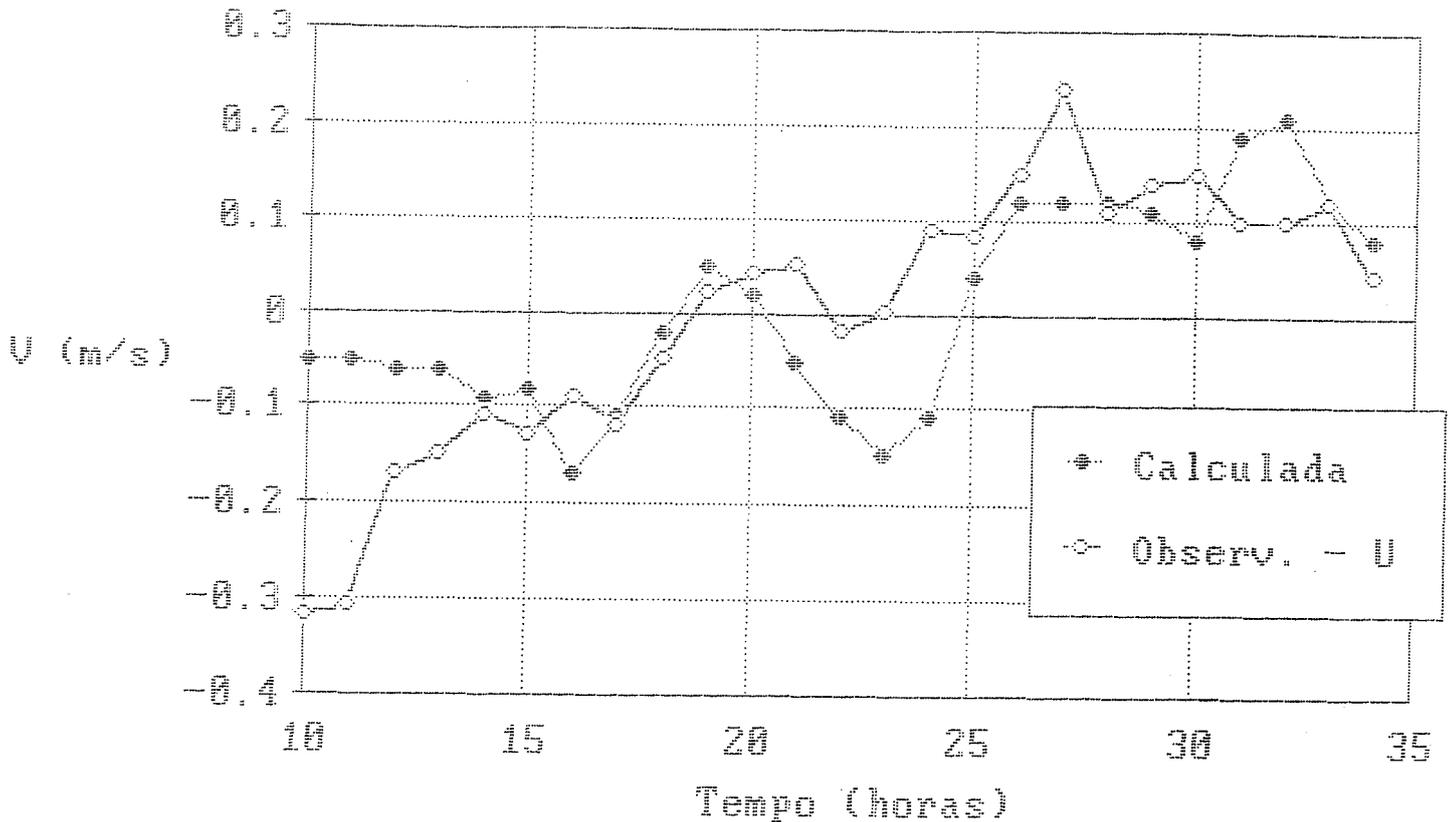


Fig. 4.16 - Velocidades observadas (corrigidas) e calculadas -
Cruzeiro MS XV

Nas figuras 4.17a e 4.17b são apresentados os campos de velocidade calculados para este cruzeiro. A primeira corresponde às velocidades de enchente ($t=17$ hs) e a segunda às velocidades de vazante ($t=27$ hs). Observa-se nas figuras que as velocidades maiores de enchente e vazante encontram-se nos canais do estuário, respeitando corretamente a morfologia dos mesmos. Porém, quando o escoamento é vazante, se produzem pequenas oscilações da velocidade na saída ao mar. Estas oscilações possivelmente sejam devidas ao efeito de expansão brusca na desembocadura e pôde-se verificar que não aumentavam com o tempo.

A simulação da salinidade para este cruzeiro é apresentada na Fig. 4.18, onde o ajuste é considerado satisfatório.

No cálculo da salinidade para a modelação deste cruzeiro, foi de vital importância a escolha das condições iniciais. Os dados de concentrações e velocidades observadas indicaram que houve uma entrada

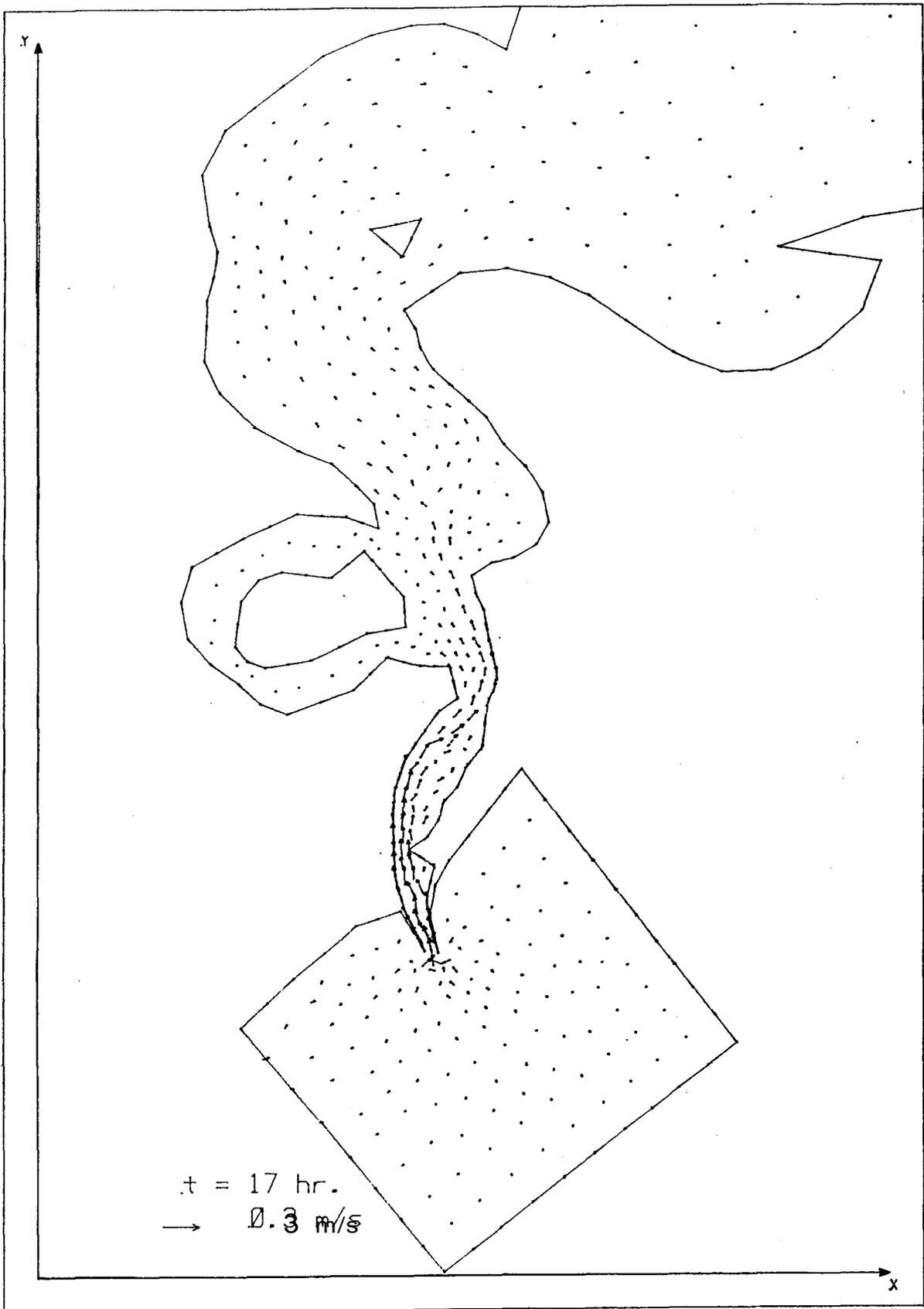


Fig. 4.17a - Campo de velocidades enchente simuladas - Cruzeiro MS XV

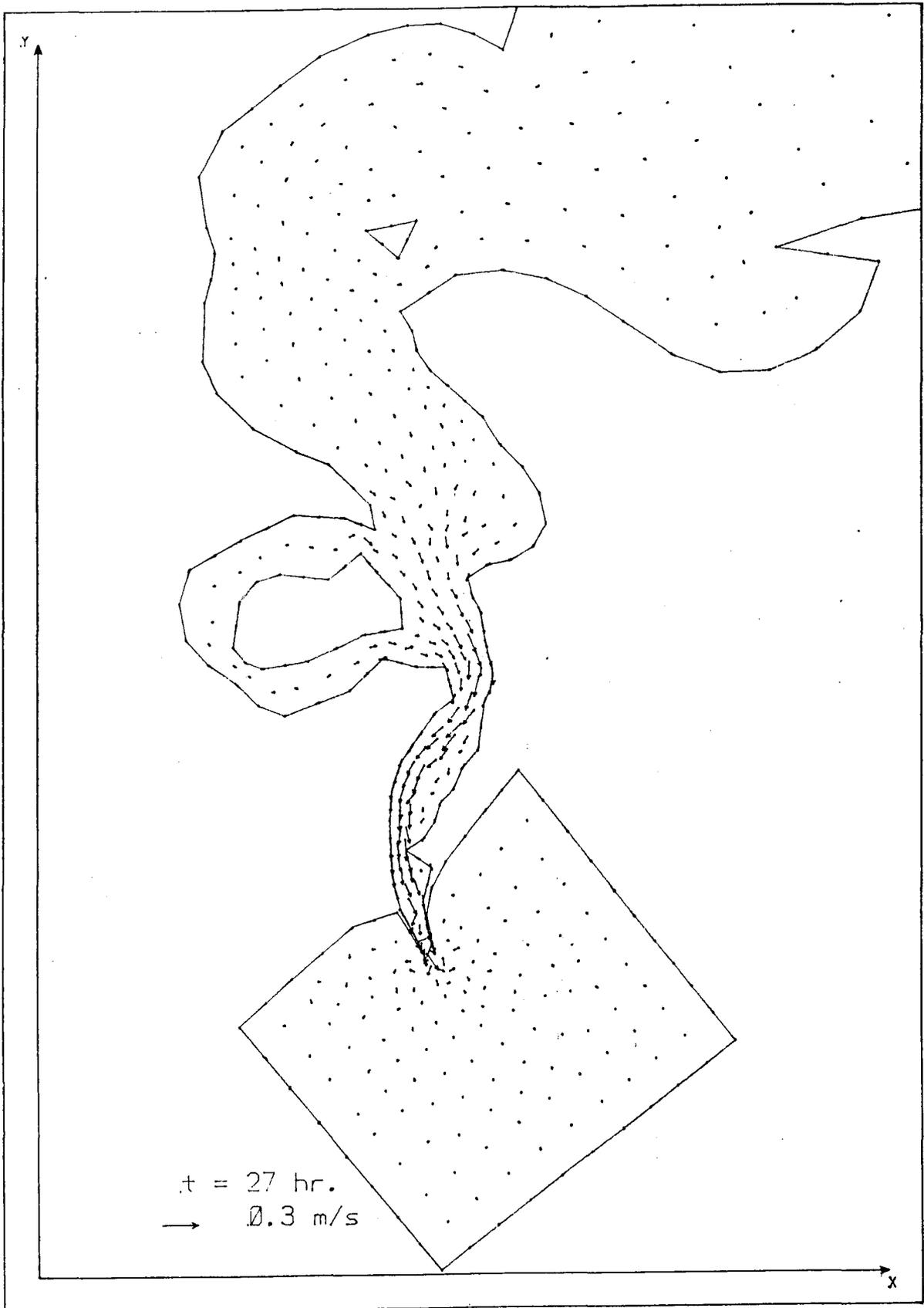


Fig. 4.17b - Campo de velocidades vazante simuladas - Cruzeiro MS XV

grande de água salgada ao estuário, provocando uma mistura cujo resultado indicaria um estuário parcialmente estratificado. Deve-se salientar também, que as condições meteorológicas reinantes durante este cruzeiro contribuíram para aumentar a mistura (tabela 4.4). Os valores de concentração observados variam de 30 g/l no fundo a 16 g/l na superfície, e na horizontal a concentração média observada variou de 26 a 16 g/l ao longo do tempo do fundeio.

A figura mostra também que, como no caso das velocidades, as tendências dos valores medidos e calculados são semelhantes. Este resultado é considerado satisfatório, sendo difícil de ser melhorado, já que as velocidades calculadas diferem das medidas, como foi visto anteriormente.

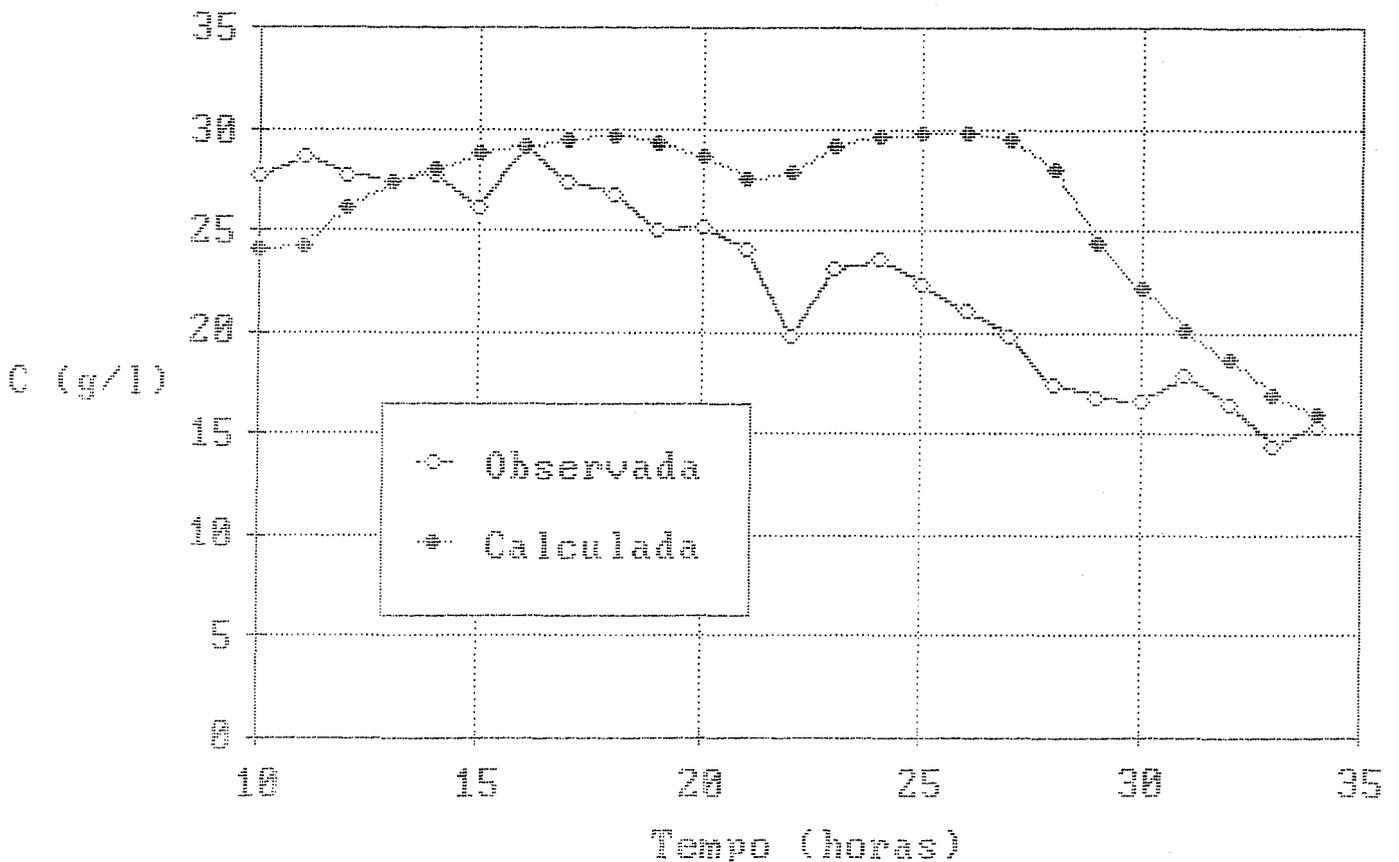


Fig. 4.18 - Salinidade observada e calculada - Cruzeiro MS XV

Um outro problema é a determinação do valor do coeficiente de dispersão longitudinal. Como o campo de velocidades observadas apresenta uma velocidade residual (Fig. 4.15), ao coeficiente calculado para o fluxo oscilatório deverá ser somado um coeficiente devido a este escoamento unidirecional (Capítulo 2, item 2.3.3).

Por último, nas figuras 4.19, 4.20 e 4.21 são apresentadas as curvas de isoconcentração calculadas para o cruzeiro MS XV, para os tempos 20, 24 e 30 horas. Esta sequência mostra o efeito das velocidades de enchente nos dois primeiros gráficos e da vazante no terceiro. Observa-se que a curvatura das isolinhas acompanham os canais onde as velocidades são maiores, principalmente a zona entre a Ponta do Retiro e a Ponta Rasa (Fig. 4.20).

Na vazante, na zona do mar próxima aos molhes aparece o efeito da descarga de água doce com concentrações menores que a suposta para o mar.

Estas figuras podem ser de grande utilidade para fins de projeto de instalações de tomadas de água, na tentativa de evitar o custo associado ao tratamento da sua qualidade, e para estudos de flora e fauna. Um exemplo disto é a operação da comporta localizada no canal São Gonçalo (Fig. 4.9). Este canal une as lagoas Mirim e dos Patos, sendo a primeira muito utilizada para irrigação de arrozais. Quando o nível na lagoa dos Patos é maior que na lagoa Mirim, e a água nessa zona do canal apresenta teor salino, a comporta é fechada impedindo a entrada desta água salgada à lagoa Mirim. O modelo desenvolvido permitiria uma primeira estimativa de operação da comporta do referido canal.

Este modelo apresenta a limitação de não ser apropriado para a simulação de corpos de água perfeitamente estratificados. Esta limitação deve ser levada em conta, já que os resultados obtidos podem não concordar com a realidade física. No caso de corpos de água bem ou parcialmente misturados, o modelo pode ser mais explorado dependendo da qualidade dos dados de entrada disponíveis.

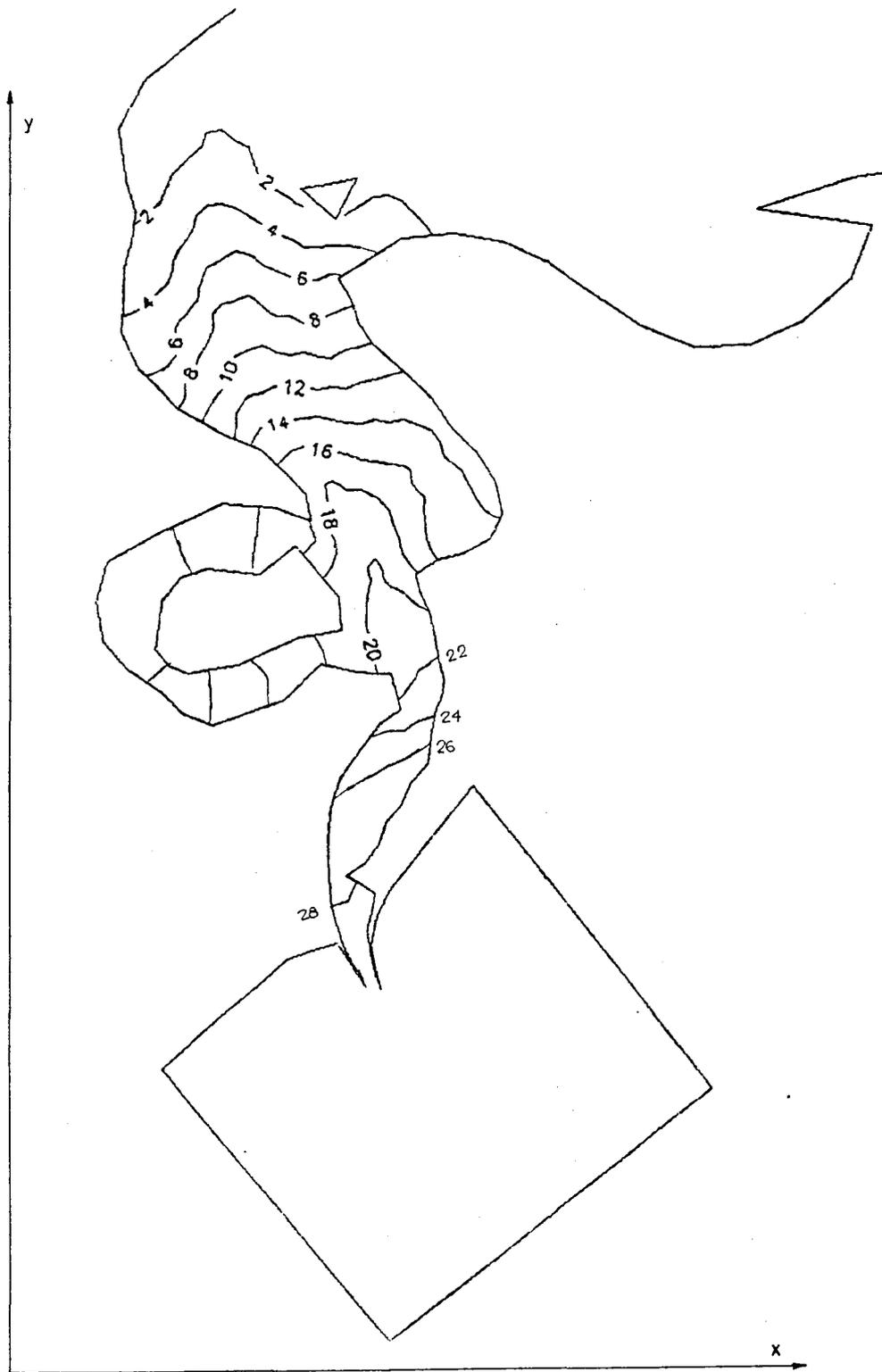


Fig. 4.19 - Linhas de isoconcentração - Cruzeiro MS XV - $t=20$ hs

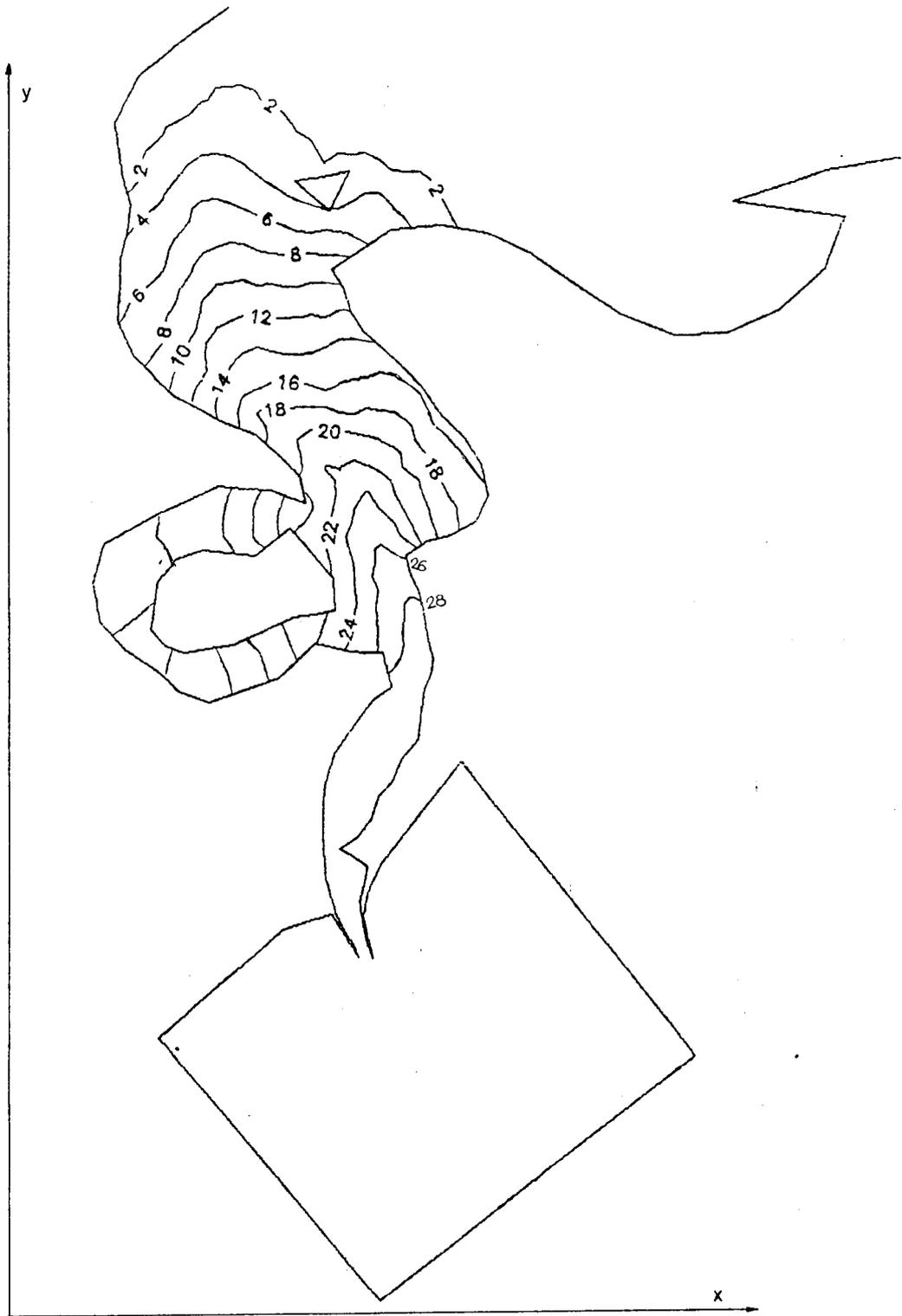


Fig. 4.20 - Linhas de isoconcentração - Cruzeiro MS XV - t=24 hs

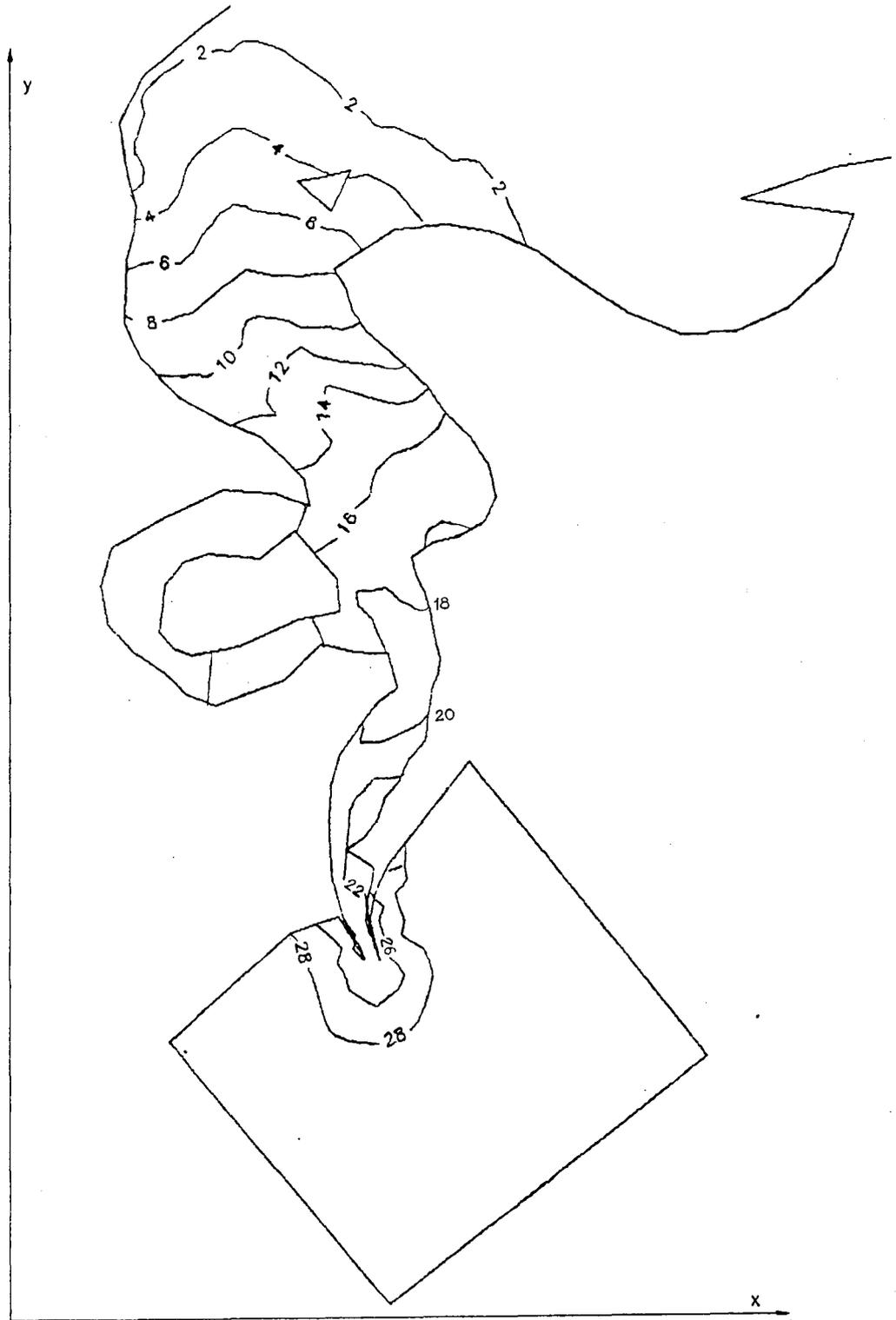


Fig. 4.21 - Linhas de isoconcentração - Cruzeiro MS XV - $t=30$ hs

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

No presente trabalho foi desenvolvido e testado um modelo matemático de transporte de massa, integrado na vertical o qual foi alimentado com os resultados obtidos de um modelo hidrodinâmico previamente desenvolvido.

5.1 - Conclusões

- Foi realizada uma revisão sobre as causas e consequências dos distintos mecanismos de mistura em corpos de água, particularmente em estuários, os coeficientes que os representam, e as fórmulas para o cálculo dos mesmos.
- É apresentado o cálculo do coeficiente de dispersão longitudinal para um escoamento oscilatório, que é o mais apropriado para o caso de estuários. A falta de medições deste parâmetro, em pontos característicos, faz com que o mesmo se transforme em um coeficiente de ajuste.
- São apresentados os modelos matemáticos para a modelação da hidrodinâmica de corpos de água e da dispersão de substâncias, dando-se especial atenção aos modelos 2-D integrados na vertical (equações 2.40 e 2.58), já que foram os usados ao longo do trabalho.
- A escolha deste tipo de modelo baseou-se no interesse de modelar a variação das concentrações na horizontal, na facilidade deste modelo em representar as zonas com geometrias irregulares, e no fato do estuário passar grande parte do tempo como bem misturado ou parcialmente estratificado [Hartmann, 1989].
- No desenvolvimento do modelo de dispersão foi realizada a discretização espacial usando-se o método dos elementos finitos com o critério de Galerkin para elementos quadráticos isoparamétricos. Sua apresentação em detalhe pode ser analisada no item 3.2.. Para a discretização temporal foi usado o método de diferenças finitas com o esquema de Galerkin ($\theta=0.67$). Este mesmo procedimento já havia sido

adotado no modelo hidrodinâmico.

- As condições iniciais para o modelo hidrodinâmico foram velocidade nula e nível constante, e as condições de contorno, níveis nos contornos abertos e fluxo nulo nos contornos fechados. A falta de conhecimento das condições iniciais para o caso da laguna dos Patos, fez com que nas simulações não possam ser incorporados fenômenos como velocidades residuais (muito comuns em estuários) e diferenças de níveis entre a laguna e o mar. Desta forma, os resultados numéricos só conseguem simular as tendências dos valores medidos, não sendo possível sua comparação em valores absolutos.

- Para o modelo de transporte de massa, as condições iniciais são de vital importância, devido a que o modelo aparentemente tem uma memória longa, sendo necessário um tempo de simulação também maior, para que as mesmas deixem de influenciar os resultados. A falta de dados para as condições iniciais, fez com que as mesmas fossem fixadas de forma arbitrária.

- As condições de contorno foram tomadas nos dois contornos abertos, iguais a um valor prescrito (30 g/l no mar e 0 g/l em São Lourenço). Isto foi possível devido à prolongação realizada no domínio do estuário sobre o mar, até uma distância que permita considerar salinidade constante.

- O valor de Δt no modelo hidrodinâmico foi de 15 min ($C_r=48$) e no de transporte de massa foi de 30 min.

- Foram realizados diversos testes teóricos para os dois modelos. Para o hidrodinâmico, o esquema em elementos finitos tem um comportamento satisfatório para C_r altos, como foi mostrado no teste da bacia com canal (Fig. 4.3). Para o modelo de transporte de massa, dois testes teóricos com soluções analíticas, indicam que o modelo tem comportamento satisfatório para valores de P_e da ordem de 1 (Fig. 4.4 e 4.7). Para P_e da ordem de 10, podem aparecer algumas oscilações, mas são relativamente pequenas. O valor de θ mais indicado neste caso é 0.67 (Fig. 4.5). No teste bidimensional, o valor do P_e na direção do escoamento é da ordem de 1, e à medida que a onda vai-se amortecendo, o ajuste melhora (Fig. 4.8). As aplicações a casos reais que são apresentadas neste trabalho, contemplam números de P_e da ordem de 1, pelo que o uso deste modelo é apropriado.

- O modelo foi utilizado para o constituinte salinidade. Porém o mesmo está diretamente preparado para tratar outras substâncias como DBO, OD e coliformes, dos quais praticamente não existem dados aproveitáveis.
- Dos numerosos dados de campo disponíveis, só uma pequena parte deles pôde ser aproveitada, e mesmo assim apresentam alguns problemas, como curtos períodos de medição, e que impedem inferir dados importantes em relação ao estado anterior dos níveis e concentrações.
- Duas aplicações foram realizadas ao estuário da laguna dos Patos, comparando os resultados obtidos com os dados observados na Ponta dos Pescadores.
- Para o primeiro cruzeiro (3 e 4/10/84), os dados de níveis (Fig. 4.11) e velocidades (Fig. 4.12) tem um excelente ajuste. Porém nos primeiros intervalos de tempo, a diferença entre os valores observados e calculados de velocidade, indica a ocorrência de um desnível importante entre a laguna e o oceano, do qual não se tinha informação. Após da saída desses volumes de água, o ajuste torna-se muito bom. A Fig. 4.13 apresenta as salinidades observadas e calculadas, e como consequência da necessidade de equilibrar o gradiente de níveis (descarga de água doce), aparece uma cunha salina, a qual o modelo não está preparado para simular. No fim do fundeio, aparece uma tendência a mistura vertical, indicado pela comparação das duas curvas, a partir de $t=28$ horas.
- No segundo cruzeiro, o ajuste dos níveis calculados aos observados apresenta-se muito satisfatório, apesar das variações em torno ao nível médio (Fig. 4.14). A figura 4.15 mostra os dados de velocidades observadas e calculadas, onde se observa que seguem as mesmas tendências e que existe uma velocidade residual vazante. Dita velocidade residual estaria indicando que a declividade da linha de água é no sentido laguna-oceano. O conhecimento do gradiente de níveis entre a laguna e o mar poderia ser incorporado no modelo, se fossem conhecidos os níveis de referência de linígrafos, marégrafos e cartas da Marinha nessa região. A escolha das condições iniciais de concentração salina é de vital importância, devido a que as mesmas influenciam os cálculos durante tempos maiores que os aqui simulados. O resultado da simulação da salinidade mostra que os dados observados e calculados têm a mesma tendência, reflexo das tendências da

velocidade. Para este caso o coeficiente de dispersão longitudinal foi calculado como a soma do devido ao escoamento oscilatório e o devido à velocidade residual.

- Os programas encontram-se implementados no computador Burroughs A10 do Centro de Processamento de Dados (CPD) da UFRGS, computador que não é orientado para cálculo científico. O programa do modelo de advecção-difusão também encontra-se implementado em um AT-386.

5.2 - Recomendações

- Na aplicação deste tipo de modelo, para que eles forneçam valores confiáveis das diferentes variáveis, faz-se necessário um levantamento cuidadoso dos dados para a entrada ao mesmo. Séries temporais de níveis, velocidade, vento e concentração em diferentes pontos do estuário, a serem definidos convenientemente, e conhecimento do estado anterior da laguna e o mar, são indispensáveis.

- Medidas do coeficiente de dispersão longitudinal in situ, para diferentes condições hidráulicas e meteorológicas, deveriam ser providenciadas para um melhor ajuste dos resultados.

- Em caso que se deseje estudar mais a fundo o processo de intrusão salina em cunha, seria de interesse desenvolver um modelo hidrodinâmico e de transporte de massa integrado na horizontal. Porém, este modelo deve estar restrito a zona do canal de acesso ao porto de Rio Grande. O modelo aqui apresentado poderia fornecer os dados de entrada para o modelo vertical.

- A implementação de um modelo de cálculo de velocidades residuais (integração no ciclo da maré) e níveis para obter efeitos de longo prazo sobre o sistema, seria necessário se não houver dados de campo apropriados.

- A otimização dos dois modelos, para sua implementação em um computador de pequeno porte, com a finalidade de trabalhar com o pacote completo, mesmo em problemas de sistemas que requeiram um grande volume de memória, como é o caso do estuário da laguna dos Patos.

- O cálculo de transporte de outras substâncias, como DBO, OD e

bacterias coliformes, pode ser realizado a partir do modelo de dispersão desenvolvido, com a incorporação dos dados correspondentes.

CAPÍTULO 6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Abramovitz M., Stegun I.A., 1965. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications Inc. New York.
2. Almeida L.E.S.B. de, Borche Casallas A., Rosauro N.M.L., Schettini, E.B.C., 1989, Relatório do Projeto Lagoa dos Patos - Parte I, Área Física. IPH/UFRGS, 63 p.
3. Benqué J.P., Cunge J.A., Feuillet J., Haughel A., Holly F.M., 1982, New Method for Tidal Current Computation. Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE, Vol 108, No. WW3, pp 396-417.
4. Borche Casallas A., 1985, Modelo Matemático de Correntologia de Estuário do Rio Guaíba, Publicação de Recursos Hídricos, Instituto de Pesquisas Hidráulicas, UFRGS, Porto Alegre, 68 p.
5. Borche Casallas A., Schettini E.B.C., Silvestrini J.H., 1991, Implementação e aplicações de um modelo matemático de transporte de massa para corpos de água bidimensionais, IX Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos/ABRH, Rio de Janeiro.
6. Cunge J.A., Holly Jr F.M., Verwey A., 1980, Practical aspects of computational river hydraulics, Pitman Ed., 420 p.
7. Eiger S., 1988, Some aspects of diffusion and dispersion in rectangular open channel, PhD thesis, University of California, Berkeley, 200 p.
8. Elder J.W., 1959, The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, Journal of Fluids Mechanics, 5 (1959), pp 544-560.
9. Farraday R.V., O'Connor B.A., Smith I.M., 1975, A two-dimensional

finite element model for partially mixed estuaries, Proceedings XVI Congress of the International Association for Hydraulic Research, São Paulo, Vol 3, pp 267-274.

10. Fischer H.B., List E.J., Koh R.C.Y., Imberger J., Brooks N.H., 1979, Mixing in inland and coastal waters, Academic Press, 483 p.

11. Hartmann C., 1989, Distribuição do material em suspensão e circulação das águas na desembocadura da laguna dos Patos, Relatório Fase III, Departamento de Geociências, FURG, 134 p.

12. Heinrich J.C., Huyakorn P.S., Zienkiewicz O.C., Mitchell A.R., 1982, An "upwind" finite element scheme for two-dimensional convective transport equation, Int. Journal for Num. Meth. in Eng., Vol 11, pp 131-143.

13. Heinrich J.C., Envia E., 1982, Finite element technics in transport phenomena, Int. Conf. on finite element in water resources, pp 14.27-14-40.

14. Heinrich J.C., Yu C.C., 1986, On the solution of time-dependent convection-diffusion equation by the finite element method, em Mecánica Computacional, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Vol 3, pp 23-32.

15. Holly Jr. F.M., 1975, Two-dimensional mass dispersion in rivers, Hydrology Papers Colorado State University, Fort Collins, Colorado, No. 78, 67 p.

16. Holly Jr. F.M., Preissmann A., 1977, Accurate calculation of transport in two dimensions, Journal of Hyd. Div., ASCE, Vol 103, pp 1259-1277.

17. Holly Jr F.M., Usseglio-Polatera J.M., 1982, Dispersion simulation in two dimensional tidal flow, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol 110, No. 7.

18. Huebner K.H., 1975, The finite element method for Engineers, John Wiley & Sons Ed.
19. Kantin F., 1983, Hydrologie et qualite des eaux de la region sud de la lagune dos Patos (Bresil) et de la plateforme continentale adjacente, Thèse de Doctorat d'État ès Sciences, Université de Bordeaux I, 185 pp.
20. Leendertse J.J., 1970, A water quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas, Vol I e II, The Rand Corporation, 124 pp.
21. Mc Quivey R.S., Keefer T., 1974, Simple method for predicting dispersion in streams, Journal of Environmental Eng. Div., Proc. ASCE, Vol 100, pp 997-1011.
22. Neuman S.P., 1981, A eulerian-lagragian numerical esqueme for the dispersion-convection equation using conjugate space-time grids, Journal of Comp. Phys., Vol 41, pp 270-294
23. Ogata A., Banks R., 1961, A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media, U.S. Geological Survey, Prof. Paper 411-A, pp 1-7
24. Paim P.S.G., Möller Jr. O.O., 1986, Material em suspensão e dissolvido no estuário da lagoa dos Patos - Fase III, Relatório Final, FURG, Rio Grande, 133 pp.
25. Rao S.S., 1982, The finite element method in engineering, Pergamon Press, Oxford, 625 pp
26. Roache P, 1972, Computational fluid dynamics, Hermosa Publishers, 434 pp
27. Rodi W., 1984, Turbulence models and their applications in

hydraulics, IAHR, 104 pp

28. **Rosauro N.M.L.**, 1982, Finite element application to the study of seiches and circulation in the Jacui delta, Guaiba river and Patos lagoon, Transfer Report, University of Southampton, 227 pp

29. **Rosauro N.M.L.**, 1986, Simulação de seiches induzidas por vento e pressão atmosférica utilizando-se um modelo em elementos finitos, Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Recursos Hídricos - ABRH, Vol 4, Nro 2, pp 91-131.

30. **Rosman P.C.**, 1989, Modelo de circulação em corpos de água rasos, em "Métodos numéricos em recursos hídricos", ABRH, 380 pp

31. **Salomon J.C.**, 1980, Étude de l'estuaire de la Seine. Modelisation numérique de phénomènes physiques, Laboratoire d'Océanographie physique, Université de Bretagne Occidentale.

32. **Singh U.P., Ranga Raju K.G., Garde R.J.**, 1987, Longitudinal dispersion coefficient in open channels, in Proc. of Technical Session C2, Topics in Fluvial Hydraulics, XXII IAHR Congress, Lausanne, pp 251-257.

33. **Service hydrographique et océanographique de la Marine (S.H.O.M.)**, 1982, Table des marées des grands ports du monde, 186 pp.

34. **Smith T.J., Dyer K.R.**, 1979, Mathematical modelling of circulation and mixing in estuaries, em "Mathematical modelling of turbulent diffusion in the environment", pp 301-341.

35. **Sumer S.M., Fischer H.B.**, 1977, Transverse mixing in partially stratified flows, Journal of Hyd. Div., ASCE, Vol 103, pp 587-600

36. **Tennekes H, Lumley J.L.**, 1980, A first course in turbulence, The MIT press, 300 pp

37. Thackston E.L., Krenkel P.A., 1967, Longitudinal mixing in natural streams, Journal of Sanit. Eng. Div., ASCE, Vol 93, pp 67-90
38. Tucci C.E.M., 1986, Modelos matemáticos em hidrologia e hidráulica, Revista Brasileira de Engenharia, ABRH, Vol II e III
39. U.S. Environmental Protection Agency, 1985, Rates, constantes and kinetic formulations in surface water quality modelling, 455 pp
40. Vinzon S.B., 1991, Modelação de transporte de substâncias passivas em corpos de água rasos, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, 116 pp
41. Wylie G.R., 1975, Advanced engineering mathematics, Mc Graw-Hill, 937 pp