

MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS À DRENAGEM SUBSUPERFICIAL  
DE SOLOS AGRÍCOLAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL — UFRGS

INSTITUTO DE PESQUISAS HIDRÁULICAS — IPH

MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS À DRENAGEM SUBSUPERFICIAL  
DE SOLOS AGRÍCOLAS

*JOSÉ ANTONIO SALDANHA LOUZADA*

Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, RS, agosto de 1985

*Trabalho realizado sob a orientação dos Professores NELSON OSWALDO LUNA CAICEDO e FLÁVIO ANTONIO CAUDURO, e apresentado ao Instituto de Pesquisas Hidráulicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS como requisito parcial para a obtenção do título de "Mestre em Engenharia Civil".*

## RESUMO

O comportamento de um sistema de drenagem subsuperficial, instalado em perfil característico de nossa várzea, foi simulado através de dois modelos matemáticos: o modelo analítico linear de Kraijenhoff e um modelo numérico não-linear.

O primeiro combina a solução de Glover com a teoria dos sistemas lineares invariantes no tempo.

O segundo converte a equação diferencial num sistema de equações lineares, substituindo as derivadas por equações de diferenças finitas. O esquema utilizado foi o de Crank-Nicholson, e o sistema de equações resolvido pelo algoritmo de Gauss.

Os modelos foram analisados quanto aos resultados, custos, vinculação ao computador e possibilidade de utilização pela comunidade técnico-científica em geral. A análise destes aspectos mostrou que o modelo não-linear constitui uma ferramenta computacional de baixíssimo custo, adequado à geometria de nossa várzea e que pode ser aplicado no dimensionamento de sistemas de drenagem subsuperficial a serem implantados nestas áreas.

## ABSTRACT

The behavior of a subsurface drainage system, installed in a characteristic profile of our flood plain, was simulated using two mathematical models: Kraijenhoff's analytical linear model and a non-linear numerical model.

The first one combines Glover's solution with the theory of time-invariant linear systems.

The second one converts the differential equation into a system of linear equations, replacing the derivatives by finite difference equations. Crank-Nicholson's scheme was used, and the system of equation solved by the Gauss algorithm.

The models were analyzed as to results, costs, computer aspects and possible uses by the technical and scientific community in general. The analysis of these aspects showed that the non-linear model is a very low-cost computational tool, appropriate to the geometry of our flood plains and can be applied in establishing the size of subsurface drainage systems to be installed in these areas.

## SUMÁRIO

RESUMO .....	iv
ABSTRACT .....	v
LISTA DE FIGURAS .....	viii
LISTA DE TABELAS .....	x
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xi
1 - INTRODUÇÃO .....	1
1.1 - Conceito e necessidade da drenagem subsuperficial .....	2
1.2 - Objetivos da drenagem subsuperficial .....	3
1.2.1 - Desenvolvimento das culturas e profundidade do lençol freático .....	3
1.2.2 - Controle do risco de salinização .....	4
1.2.3 - Manejo do solo e profundidade do lençol freático .....	7
2 - OBJETIVOS DO TRABALHO .....	9
3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	12
3.1 - Equações fundamentais do escoamento em meio poroso saturado .....	13
3.1.1 - Lei experimental de Darcy .....	13
3.1.2 - Equações diferenciais para aquíferos freáticos .....	20
3.2 - A constante de proporcionalidade K .....	29
3.3 - Espessura da região de fluxo .....	36
3.4 - Espaço poroso drenável .....	41
3.5 - Soluções da equação de Boussinesq .....	47

4 - METODOLOGIA .....	53
4.1 - Localização e características da área experi- mental .....	54
4.2 - Monitoramento e coleta de dados .....	55
4.3 - Modelos matemáticos utilizados na simulação ..	58
4.3.1 - Modelo linear .....	58
4.3.2 - Modelo não-linear .....	65
4.4 - Aplicação dos modelos matemáticos .....	75
4.4.1 - Solução das equações de Kraijenhoff .....	75
4.4.2 - Solução numérica da equação não-linear .....	77
4.4.3 - Estimativa dos parâmetros de entrada das so- luções computacionais .....	83
5 - RESULTADOS .....	92
5.1 - Introdução .....	93
5.2 - Análise e comentários .....	96
6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....	119
7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	128
8 - ANEXOS .....	135
8.1 - Anexo A - Observações de campo .....	136
8.2 - Anexo B - Programas em Algol e diagramas de flu xo .....	150
8.2.1 - Descrição do programa "Kraijenhoff" .....	151
8.2.2 - Descrição do programa "Crank-Nicholson" .....	156

## LISTA DE FIGURAS

3.1	- Esquema experimental de Darcy .....	14
3.2	- Relação entre $V$ e $V_p$ .....	16
3.3	- Gradiente hidráulico limite aparente ( $i_o$ ) .....	19
3.4	- Fluxo em aquífero freático segundo Dupuit .....	20
3.5	- Posições do lençol freático .....	23
3.6	- Esquema para derivação da equação de Boussinesq..	24
3.7	- Escoamento vertical em perfil estratificado .....	33
3.8	- Escoamento horizontal em perfil estratificado ...	34
3.9	- Modelo de Hooghoudt .....	37
3.10	- Relação $q$ x $D_o$ .....	40
3.11	- Perfis de umidade com lençol freático profundo ..	43
3.12	- Perfis de umidade com lençol freático superficial	43
4.1	- Área experimental de Cachoeirinha .....	57
4.2	- Geometria da equação de Glover .....	60
4.3	- Discretização do plano formada pelas variáveis <u>in</u> dependentes (tempo e espaço) .....	66
4.4	- Representação geométrica das aproximações para a derivada primeira em $y$ .....	68
4.5	- Esquema para determinação da descarga .....	74
4.6	- Geometria do perfil da área experimental .....	83

4.7	-	Transformação da precipitação em recarga .....	86
4.8	-	Malha numérica .....	88
5.1	-	Valores de carga hidráulica observados e calculados. Evento 1 .....	105
5.2	-	Valores de descarga observados e calculados. Evento 1 .....	106
5.3	-	Valores de carga hidráulica observados e calculados. Evento 2 .....	109
5.4	-	Valores de descarga observados e calculados. Evento 2 .....	110
5.5	-	Valores de carga hidráulica observados e calculados. Evento 3 .....	113
5.6	-	Valores de descarga observados e calculados. Evento 3 .....	114
5.7	-	Valores de carga hidráulica observados e calculados. Evento 4 .....	117
5.8	-	Valores de descarga observados e calculados. Evento 4 .....	118
A 1	-	Posições do lençol freático observadas - Evento 1	137
A 2	-	Posições do lençol freático observadas - Evento 2	138
A 3	-	Posições do lençol freático observadas - Evento 3	139
A 4	-	Posições do lençol freático observadas - Evento 4	140
A 5	-	Precipitações registradas - Evento 1 .....	141
A 6	-	Precipitações registradas - Evento 2 .....	142
A 7	-	Precipitações registradas - Eventos 3 e 4 .....	143
B 1	-	Diagrama de fluxo do programa "Kraijenhoff" .....	155
B 2	-	Diagrama de fluxo do programa "Crank-Nicholson" ..	160

## LISTA DE TABELAS

A 1	- Carga hidráulica observada - Evento 1 .....	144
A 2	- Carga hidráulica observada - Evento 2 .....	145
A 3	- Carga hidráulica observada - Evento 3 .....	146
A 4	- Carga hidráulica observada - Evento 4 .....	147
A 5	- Descarga específica observada - Eventos 1,2,3 e 4 .	148
A 6	- Locação e nivelamento dos piezômetros .....	149

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLO	DESCRIÇÃO	DIMENSÃO	UNIDADES ADOTADAS
K	Condutividade hidráulica saturada	L/T	m/dia, mm/dia
D	Espessura média da região de fluxo .....	L	m
h	Carga hidráulica .....	L	-
x	Espaço .....	L	-
t	Tempo .....	T	-
$\mu$	Espaço poroso drenável .....	Adimensional	-
$h(x,t)$	Carga hidráulica no ponto x no tempo t .....	L	-
$R_i$	Recarga instantânea .....	L	-
j	Coefficiente de armazenamento ....	T	dia
L	Espaçamento entre os drenos .....	L	m
$h(L/2,t)$	Carga hidráulica no ponto médio entre os drenos no tempo t .....	L	mm
$h_m(t)$	Carga hidráulica no ponto médio entre os drenos no tempo t .....	L	mm
$q(t)$	Descarga específica no tempo t...	L/T	mm/dia
r	Raio dos drenos .....	L	m
$D_o$	Espessura da região de fluxo abaixo do nível dos drenos .....	L	m

SÍMBOLO	DESCRIÇÃO	DIMENSÃO	UNIDADES ADOTADAS
R	Intensidade da recarga .....	L/T	mm/dia
T	Tempo de duração da recarga .....	T	dia
d	Espessura equivalente .....	L	m, mm
$\Delta x$	Distância entre dois pontos consecutivos da malha numérica .....	L	mm
$\Delta t$	Intervalo de tempo .....	T	dia
i	Índice que posiciona a variável no espaço .....	Adimensional	-
n	Índice que posiciona a variável no tempo .....	Adimensional	-

OBSERVAÇÃO: Os símbolos que não constam desta relação estão definidos à medida em que aparecem no texto. Estão definidas as unidades adotadas tão somente das variáveis e dos parâmetros diretamente envolvidos na computação dos valores de descarga e carga hidráulica.

No caso dos parâmetros K e d adotou-se, respectivamente m/dia e m para determinação do coeficiente de armazenamento, e mm/dia e mm na solução das equações de diferenças finitas.

---

1 - INTRODUÇÃO

---

## 1.1 - CONCEITO E NECESSIDADE DA DRENAGEM SUBSUPERFICIAL

A drenagem subsuperficial de terras agrícolas pode ser definida como sendo o processo de remoção do excesso de água do perfil do solo, de modo a torná-lo viável à exploração agrícola pelo homem.

A necessidade da drenagem artificial num solo irrigado pode ser avaliada considerando-se o balanço de água existente. Segundo Martinez (1981), a equação que define este balanço é a seguinte:

$$P^* + I^* + S_p = ET + D_r + \Delta W + \mu \Delta h \quad (1.1)$$

sendo:

$P^*$  = parcela da água de precipitação que infiltra no solo

$I^*$  = parcela da água de irrigação que infiltra no solo

$S_p$  = filtrações laterais ou profundas

$ET$  = evapotranspiração

$D_r$  = drenagem natural do solo

$\Delta W$  = variação da umidade do solo na zona não saturada

$\mu\Delta h$  = quantidade de água correspondente à elevação ou rebaixamento do lençol freático.

Quando as condições naturais de drenagem não são suficientes para que o balanço de água seja favorável deve-se artificialmente melhorar as condições existentes, de forma a viabilizar uma agricultura permanente e econômica.

## 1.2 - OBJETIVOS DA DRENAGEM SUBSUPERFICIAL

### 1.2.1 - DESENVOLVIMENTO DAS CULTURAS E PROFUNDIDADE DO LENÇOL FREÁTICO

Embora a profundidade do lençol freático não tenha efeito direto no crescimento vegetal, ela influi indiretamente porque determina as condições de umidade do perfil, influenciando portanto no suprimento de água à planta, nas condições de aeração e nas propriedades térmicas do solo.

Williamson e Kriz (1970), realizando experiências sob condições de um lençol freático quase estacionário, indicam que em solos arenosos a profundidade mínima do lençol freático deve girar ao redor de 60 a 90 cm e em solos argilosos de 100 a 150 cm.

Menos informações se dispõe da relação entre a posição de um lençol freático flutuante e o rendimento das culturas. Em geral parece que posições elevadas do lençol freático durante um curto espaço de tempo não produzem danos permanentes.

Sieben (1964) expressou a influência da posição de um lençol freático flutuante sobre a produção das culturas mediante um índice ( $SEW_{30}$ ).

Este índice é o resultado da soma das excedências diárias, em centímetros, da posição do lençol freático em relação a uma profundidade de 30 cm.

Segundo Sieben (1964), valores de  $SEW_{30}$  maiores que 500 cm dão lugar a uma redução da produtividade. Deve-se salientar que a transferência deste tipo de experiência deve ser bastante criteriosa, já que a relação entre a posição do lençol freático e a produção das culturas é uma função do clima, do solo, da qualidade da água de irrigação e da água subterrânea bem como da fase de desenvolvimento da própria cultura (Martinez, 1981).

### 1.2.2 - CONTROLE DO RISCO DE SALINIZAÇÃO

As fontes mais comuns dos sais do solo são as águas superficiais e subterrâneas, cuja concentração depende do teor de sais no solo com o qual as águas estiverem em contato.

Os solos salinos ocorrem nas regiões áridas e semi-áridas, onde não se verifica uma lixiviação natural eficiente do perfil do solo. Outro fator é a elevada evaporação que tende a concentrar os sais na superfície. A drenagem deficiente do solo é outra causa importante do mesmo problema, devido à baixa condutividade hidráulica do solo, à presença de um lençol freático elevado ou ainda devido à existência de camadas de impedimento no perfil. Segundo Martinez (1981) a equação que define o balanço de sais na zona das raízes é a seguinte:

$$P^* C_p + I^* C_i + G C_g = RC_r + \Delta Z \quad (1.2)$$

sendo:

$P^*$  = parcela da água de precipitação que infiltra no solo

$I^*$  = parcela da água de irrigação que infiltra no solo

$G$  = ascensão capilar

$C_p$  = concentração salina da água de precipitação

$C_i$  = concentração salina da água de irrigação

$C_g$  = concentração salina da água que ascende por capilaridade

$R$  = percolação profunda

$C_r$  = concentração salina da água de percolação

$\Delta Z$  = variação do conteúdo de sais na zona das raízes.

Desprezando-se a concentração salina da água de precipitação ( $C_p=0$ ) e assumindo-se que o aquífero não é alimentado

por filtrações laterais ou profundas, com o que a concentração salina da água que ascende por capilaridade é igual a concentração salina da água de percolação ( $C_g = C_r$ ), pode-se reescrever a equação (1.2) da forma que segue:

$$I \cdot C_i = (R-G) C_r + \Delta Z \quad (1.3)$$

Fazendo-se:

$$R - G = R^* \quad (1.4)$$

sendo:

$$R^* = \text{percolação profunda líquida}$$

tem-se:

$$I \cdot C_i = R^* C_r + \Delta Z \quad (1.5)$$

Para que o balanço de sais obedeça uma condição de equilíbrio temos, pela equação (1.5), que deve existir uma percolação profunda líquida ( $R^*$ ) que lave os sais aportados, bem como um sistema de drenagem subsuperficial para que a água salina de percolação seja evacuada.

### 1.2.3 - MANEJO DO SOLO E PROFUNDIDADE DO LENÇOL FREÁTICO

A posição do lençol freático em relação à superfície do solo influi decisivamente na possibilidade do trânsito das máquinas agrícolas, na capacidade do solo suportar a presença do gado e na viabilidade da preparação da terra para a semeadura.

A existência de um lençol freático próximo à superfície pode dar lugar a que o conteúdo de umidade da camada superior do solo seja superior ao tolerável para a realização destas tarefas.

Martinez (1981) indica que estas operações requerem, em geral, um conteúdo de umidade inferior ao correspondente à capacidade de campo.

Baseado em dados apresentados por Wind e Buitendijk (1979), Oosterban (1980) sugere que o intervalo crítico de profundidade do lençol freático, para que as condições para o trânsito de máquinas sejam boas, oscile entre 100 e 150 cm.

No que se refere à possibilidade de suportar a presença do gado, Berryman (1975) indica que um solo bem drenado pode prolongar consideravelmente o número de dias de pastoreio com respeito ao mesmo solo com drenagem deficiente.

Fansey e Schwab (1965) observaram que num solo argiloso a diminuição da umidade da camada superior em 4 ou 5% possibilita anteceder, em um número considerável de dias, o pre-

paro do solo para semeadura.

Como se vê, um sistema de drenagem subsuperficial alcançará seus objetivos se oferecer uma posição ótima do lençol freático, ou ainda se controlar suas oscilações de tal forma que seu tempo de permanência junto à zona radicular seja inferior àquele a partir do qual as culturas seriam prejudicadas. O estabelecimento deste nível ótimo depende das relações existentes entre a posição deste lençol com a produção das culturas, o controle do risco de salinização e o manejo do solo. Estas relações, por sua vez, dependem do clima, condições dos solos, qualidade da água de irrigação e da água subterrânea, necessidades das culturas e do manejo da água. Da interação destes fatores depende fundamentalmente o sucesso da agricultura.

---

2 - OBJETIVOS DO TRABALHO

---

Os diversos aspectos que devem ser considerados quando do projeto de um sistema de drenagem subsuperficial podem ser sintetizados em três etapas distintas:

- a) Estabelecimento dos critérios agronômicos visando ao pleno desenvolvimento das culturas.
- b) Determinação dos parâmetros do solo que intervêm nas equações de drenagem.
- c) Dimensionamento do sistema buscando o cumprimento dos critérios previamente estabelecidos.

A primeira etapa deve ser baseada em experiências já existentes, que relacionem profundidade do lençol freático com produção das culturas.

A segunda etapa é desenvolvida através da utilização de métodos de campo e/ou laboratório.

A última etapa consiste na incorporação dos parâmetros das etapas anteriores numa metodologia adequada à geometria do perfil a ser drenado.

A várzea arrozeira do Rio Grande do Sul apresenta, em

geral, uma camada impermeável a pouca profundidade, o que implica o assentamento dos drenos diretamente sobre esta camada ou muito próximos a ela.

Utilizando dados coletados num sistema de drenagem instalado em perfil com essa característica, pretende-se avaliar o desempenho de dois modelos matemáticos distintos na simulação das variáveis carga hidráulica e descarga.

Paralelamente os modelos serão analisados em seus aspectos gerais: custos envolvidos, vinculação ao computador e possibilidade de aplicação prática.

O confronto destes itens permitirá a indicação da metodologia mais adequada para o dimensionamento de sistemas de drenagem subsuperficial a serem implantados em nossa várzea arrozeira.

---

3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

### 3.1 - EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO ESCOAMENTO EM MEIO POROSO SATURADO

#### 3.1.1 - LEI EXPERIMENTAL DE DARCY

Darcy (1856) investigou o fluxo da água em filtros verticais de areia conectados com as fontes da cidade de Dijon, França.

A partir destas experiências, Darcy constatou que a descarga é diretamente proporcional à área da seção transversal ao escoamento, diretamente proporcional à diferença de carga hidráulica entre dois pontos considerados e inversamente proporcional à distância entre estes mesmos dois pontos.

Combinando estas conclusões tem-se:

$$Q = KA \frac{h_1 - h_2}{L(1-2)} \quad (3.1)$$

sendo:

Q = descarga

A = área da seção transversal ao escoamento

$h_1$  = somatório das cargas de pressão e posição (carga hidráulica no ponto 1)

$h_2$  = somatório das cargas de pressão e posição (carga hidráulica no ponto 2)

$L_{(1-2)}$  = distância entre os pontos 1 e 2

$K$  = constante de proporcionalidade

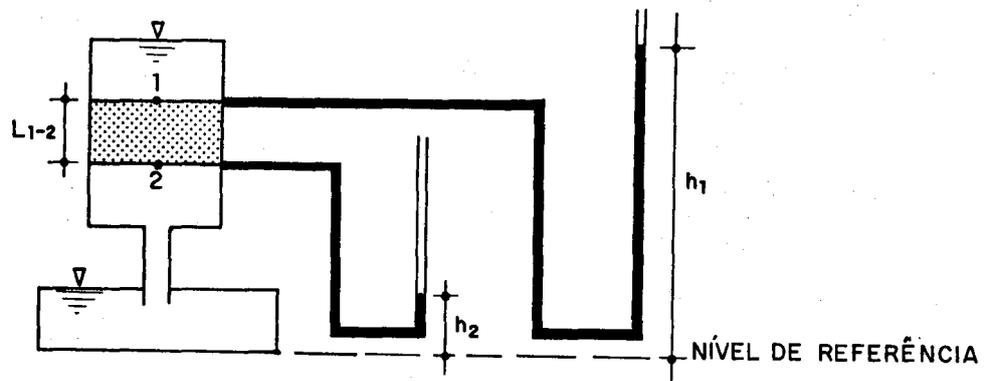


Fig. 3.1 - Esquema Experimental de Darcy

O quociente entre a diferença de carga hidráulica entre dois pontos e a distância entre eles é denominado gradiente hidráulico. Em termos de descarga específica a Lei de Darcy tem a seguinte forma:

$$V = - Ki \quad (3.2)$$

sendo:

$V$  = descarga específica ou velocidade de Darcy

$i$  = gradiente hidráulico.

O sinal negativo introduzido na equação (3.2) é um indicativo de que o escoamento se dá dos pontos de maior para os de menor carga hidráulica.

A velocidade de Darcy admite que toda a área da seção transversal é disponível ao escoamento. Isto na realidade não ocorre, já que desta área total deve-se descontar a área ocupada pela fração sólida. Surge, então, o conceito de velocidade de percolação.

Através da equação de continuidade pode-se relacionar estas duas velocidades.

$$Q = A.V = A_v \cdot V_p \quad (3.3)$$

onde:

$A_v$  = área dos vazios

$V_p$  = velocidade de percolação.

Da equação (3.3) tem-se:

$$V_p = \frac{A.V}{A_v} = \frac{A.V.L}{A_v \cdot L} = \frac{V.V_T}{V_v} \quad (3.4)$$

sendo:

$V_T$  = volume total

$V_v$  = volume de vazios

Sendo a porosidade igual a relação entre o volume de vazios e o volume total, tem-se:

$$V_p = \frac{V}{n} \quad (3.5)$$

sendo:

$n$  = porosidade

Como uma partícula de água que escoar através de um meio poroso segue um percurso tortuoso com velocidade variável, a velocidade de percolação é uma velocidade fictícia de uma suposta partícula de água que se move em linha reta com velocidade constante (Whitman, 1976).

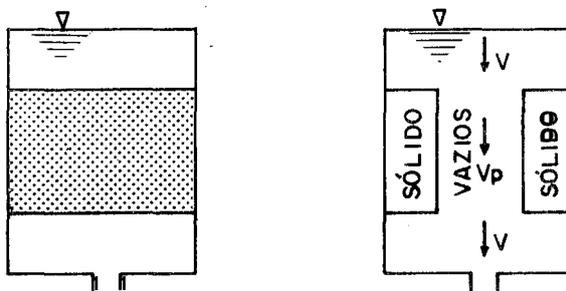


Fig. 3.2 - Relação entre  $V$  e  $V_p$

A generalização da lei experimental de Darcy consiste em admiti-la como válida em qualquer ponto e em todas as direções.

Considerando uma situação tridimensional e sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  as direções principais, tem-se:

$$\vec{V} = -\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \vec{i} + K_y \frac{\partial h}{\partial y} \vec{j} + K_z \frac{\partial h}{\partial z} \vec{k}\right) \quad (3.6)$$

onde  $\vec{V}$  é o vetor descarga específica com componentes nas direções consideradas.

Sendo o meio isotrópico, tem-se:

$$\vec{V} = -K \nabla h \quad (3.7)$$

sendo  $\nabla$  o operador gradiente e definido como segue:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (3.8)$$

Quando  $K$  é constante, a lei de Darcy pode ainda ser expressa da seguinte forma:

$$\vec{V} = -\nabla \phi \quad (3.9)$$

sendo:

$$\phi = Kh \quad (3.10)$$

O produto  $Kh$  é denominado velocidade potencial. Quando  $K$  não é constante a equação (3.9) implica em admitir-se que o escoamento é provocado pelas variações espaciais de  $K$ , e portanto não é válida (McWhorter, 1977).

À medida que a descarga específica aumenta, a relação linear proposta pela lei de Darcy entre esta mesma descarga específica e o gradiente hidráulico pode não ser válida. Em vista disso, muitos pesquisadores preocuparam-se em estabelecer um intervalo de validade para a lei de Darcy.

Em analogia com o escoamento em condutos o parâmetro utilizado foi o número de Reynolds, que é um adimensional que expressa a relação entre as forças de inércia e de viscosidade.

$$R_e = \frac{Vd}{\nu} \quad (3.11)$$

sendo:

$R_e$  = número de Reynolds

$V$  = descarga específica

$\nu$  = viscosidade cinemática do fluido

$d$  = dimensão de comprimento representativa dos canais de escoamento

Em geral  $d$  é admitido como o diâmetro médio das partículas (Bear, 1975).

Collins (1961) sugere  $d = \frac{(K)^{1/2}}{n}$ , sendo  $K$  a constan

te de proporcionalidade e  $n$  a porosidade.

Ward (1964) sugere  $d = (K)^{1/2}$ .

De uma forma geral os pesquisadores admitem a existência de um número de Reynolds limite, entre 1 e 10, além do qual a relação entre a descarga específica e o gradiente hidráulico deixa progressivamente a forma linear.

Existiria, ainda, uma restrição à validade da Lei de Darcy em solos argilosos, quando o gradiente hidráulico é baixo. Introduziu-se o conceito de "gradiente hidráulico limite aparente", abaixo do qual o escoamento é nulo ou ao menos menor do que o previsto pela lei de Darcy (Hillel, 1970).

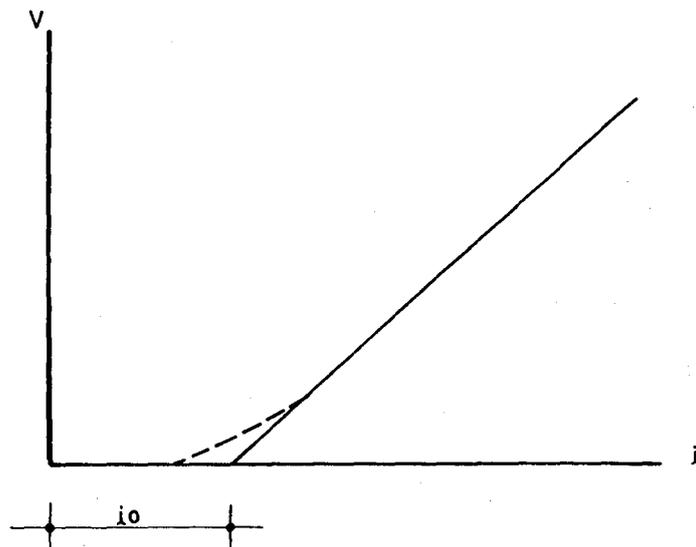


Fig. 3.3 - Gradiente Hidráulico Limite Aparente ( $i_0$ )

### 3.1.2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA AQUÍFEROS FREÁTICOS

A obtenção de soluções analíticas das equações diferenciais que governam o escoamento em meios porosos só é possível se a geometria do problema permitir um perfeito conhecimento da região de fluxo e de suas condições de contorno.

No caso de aquíferos não confinados a posição do lençol freático é, a priori, desconhecida, com o que o problema do ponto de vista matemático torna-se excessivamente complexo.

Com o objetivo de contornar esta situação Dupuit (1863) introduziu hipóteses simplificadoras que conduzem a um tratamento menos rigoroso, todavia com resultados plenamente satisfatórios.

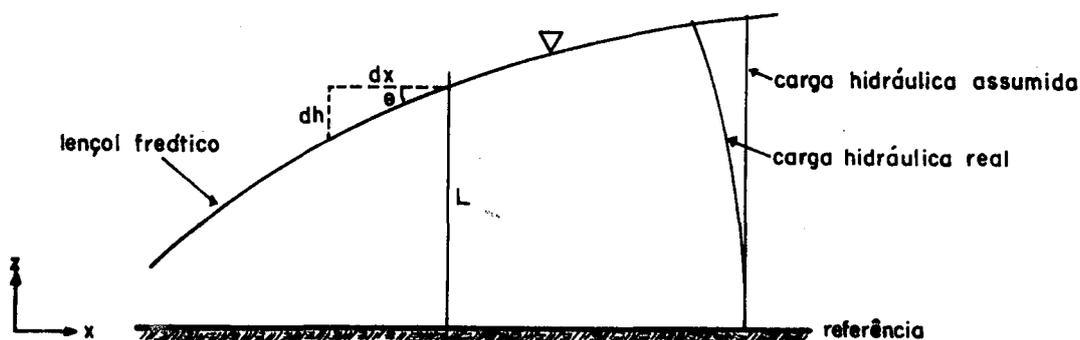


Fig. 3.4 - Fluxo em Aquífero Freático segundo Dupuit

A descarga por unidade de comprimento em qualquer seção transversal é dada por:

$$Q = \int_0^L q_x(x,z) dz \quad (3.12)$$

Se a declividade do lençol freático for suficientemente pequena, a descarga junto ao lençol freático não difere significativamente da descarga junto ao limite inferior.

Esta hipótese permite que a equação (3.12) seja reescrita da seguinte forma:

$$Q = q_x(x) \cdot L \quad (3.13)$$

Por Darcy tem-se:

$$Q = -K \frac{dh}{dx} \cdot L \quad (3.14)$$

Por definição, o lençol freático é o lugar geométrico dos pontos de carga de pressão nula.

Com isso  $h = L$ .

Reescrevendo a equação (3.14), obtém-se:

$$Q = -Kh \frac{dh}{dx} \quad (3.15)$$

Na equação (3.15)  $h$  representa simultaneamente a espessura da região de fluxo e a carga hidráulica junto ao lençol freático. A derivada da carga hidráulica em relação ao espaço é a tangente do ângulo ( $\theta$ ) que o lençol freático forma com a horizontal.

A equação (3.15) implica em admitir-se um fluxo essencialmente horizontal e uma distribuição hidrostática da pressão em qualquer seção transversal. Em outras palavras, a carga hidráulica é constante em qualquer vertical.

A simplificação de Dupuit é tanto mais válida quanto menor for a declividade do lençol freático, com o que mais próximos serão o seno e a tangente do ângulo formado com a horizontal.

Mais explicitamente,  $(dh/dx)^2 \ll 1$  é a condição que deve ser satisfeita (Bear, 1975).

Paralelamente a simplificação de Dupuit assume o lençol freático como limite da região de fluxo, com o que o escoamento da zona não saturada não é considerado.

No caso de canais abertos, Dupuit admite que a superfície livre da água no canal é coincidente com o lençol freático.

Muskat (1946) mostrou que a superfície livre da água em canais abertos não é coincidente com o lençol freático.

Ao longo da parede do canal deve haver uma superfície

de filtração, caso contrário a velocidade do ponto de intersecção do lençol freático com esta parede seria infinita.

Muskat (1946) salienta que esta situação praticamente não altera a computação dos valores de descarga.

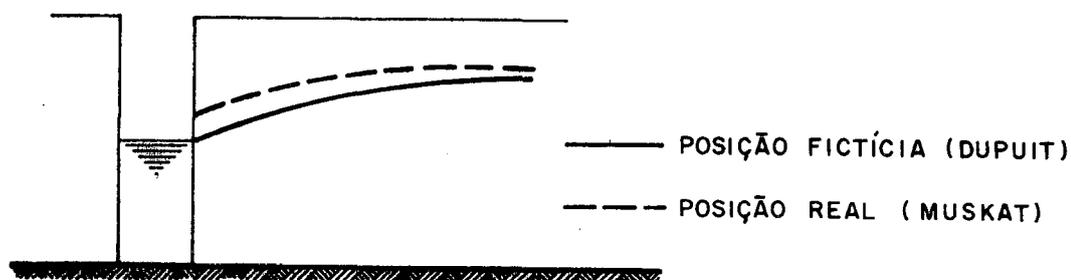


Fig. 3.5 - Posições do Lençol Freático

Admitindo como válidas todas essas simplificações inerentes às hipóteses de Dupuit, Boussinesq (1903,1904) baseado na lei de Darcy e na equação de continuidade derivou a equação diferencial parcial que governa o escoamento transitório em aquíferos não confinados.

O volume de controle utilizado na derivação é apresentado na figura (3.6).

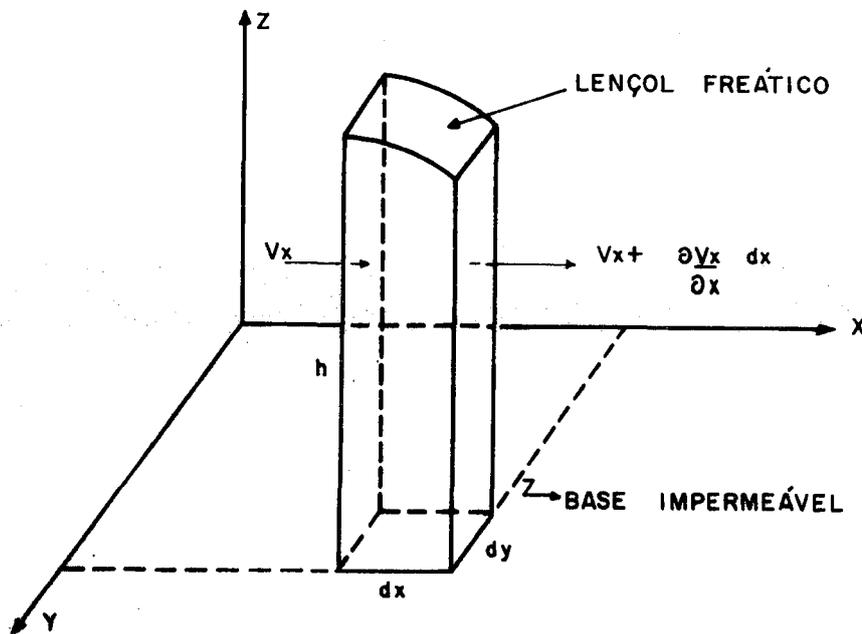


Fig. 3.6 - Esquema para Derivação da Equação de Boussinesq

Admitindo-se o fluido como incompressível, o seguinte balanço de volume é utilizado para derivação da equação de Boussinesq:

O fluxo de entrada, na direção  $x$  ( $Q_x$ ), no volume de controle é dado por:

$$Q_x = h \, dy \, V_x = h \, dy \, K_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.16)$$

O fluxo de saída, na mesma direção, é dado por:

$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \quad (3.17)$$

A diferença entre os fluxos de saída e entrada corresponde à variação do armazenamento ( $S$ ) no volume de controle.

$$Q_{x+dx} - Q_x = \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx = - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.18)$$

O sinal negativo introduzido no lado direito da equação (3.18) faz com que o fluxo líquido seja positivo quando a função  $S = S(t)$  é decrescente.

Utilizando a equação de Darcy, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -K_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dy = - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.19)$$

A variação do armazenamento em aquíferos freáticos manifesta-se através de uma elevação ou de um abaixamento da superfície livre da água.

O volume total existente entre duas posições do lençol freático infinitamente próximas é dado por:

$$dV = dx dy dh \quad (3.20)$$

O volume drenado quando o lençol freático passa da primeira para a segunda posição é dado por:

$$dS = \mu dV = \mu dx dy dh \quad (3.21)$$

sendo:

$\mu$  = espaço poroso drenável

Utilizando a notação de derivada parcial e substituindo a equação (3.21) na (3.19), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.22)$$

Admitindo-se condições de homogeneidade  $\left( \frac{\partial K_x}{\partial x} = 0 \right)$  e isotropia  $(K_x = K_y = K_z = K)$ , tem-se:

$$K \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.23)$$

Desenvolvendo a derivada e desprezando o termo da 2a. ordem, obtém-se:

$$Kh \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.24)$$

A equação (3.24) é a equação não-linear de Boussinesq para fluxo unidimensional em aquíferos freáticos, homogêneos e isotrópicos.

Na presença de recarga (R), tem-se:

$$Kh \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + R = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.25)$$

sendo:

$R$  = fluxo vertical específico admitido como positivo sob condições de acréscimo, com distribuição uniforme no espaço.

Assumindo que  $\mu$  não é uma função de  $h$ , a equação de Boussinesq é não-linear devido à presença da variável  $h$  multiplicando a derivada.

A seguir é apresentada uma forma de linearizá-la proposta por Glover.

No caso dos drenos não se apoiarem diretamente sobre a camada impermeável a equação (3.25) pode ser reescrita da forma que segue:

$$K (D_0 + h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} - R \quad (3.26)$$

sendo:

$D_0$  = espessura constante da região de fluxo abaixo do nível dos drenos.

Negligenciando o fluxo acima do nível dos drenos, tem-se:

$$K D_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} - R \quad (3.27)$$

O fluxo acima do nível dos drenos pode ser considerado fazendo-se:

$$K (D_0 + \bar{h}) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} - R \quad (3.28)$$

sendo:

$\bar{h}$  = espessura média da região de fluxo acima do nível dos drenos.

$$\text{Se } D_0 + \bar{h} = D \quad (3.29)$$

A equação (3.28) transforma-se para:

$$KD \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} - R \quad (3.30)$$

sendo:

$D$  = espessura média da região do fluxo, considerando as regiões abaixo e acima do nível dos drenos.

As equações (3.27) e (3.30) são formas lineares da equação de Boussinesq.

Este processo de linearização é satisfatório quando  $D_0 \gg h$  ou quando  $h$  for grande comparado com suas próprias variações.

Werner (1957) apresentou outra forma linear da equação de Boussinesq.

Fazendo  $Y = h^2$  e derivando em relação a  $x$  e  $t$ , tem-se:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 2h \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.32)$$

Desprezando o termo da 2a. ordem na equação (3.31) e comparando com a equação (3.25), tem-se:

$$Kh \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2hR = \mu \frac{\partial Y}{\partial t} \quad (3.33)$$

Admitindo-se uma espessura média definida pela equação (3.29), resulta:

$$KD \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2DR = \mu \frac{\partial Y}{\partial t} \quad (3.34)$$

A equação (3.34) é linear, e sua aplicação é satisfatória quando as mesmas condições citadas no caso das equações (3.27) e (3.30) são verificadas.

### 3.2 - A CONSTANTE DE PROPORCIONALIDADE K

Observando-se a lei de Darcy, pode-se definir a constante K como sendo a velocidade média aparente do escoamento quando o gradiente hidráulico é unitário (Whitman, 1976). Foi denominada condutividade hidráulica (Soil Science Society of

America, 1952) e é uma função tanto do meio poroso como do fluido.

O escoamento através dos poros do solo pode ser comparado com o escoamento laminar através de pequenos condutos circulares de raio constante. Esta última situação foi estudada por Hagen (1839) e Poiseuille (1846), que expressaram a descarga através destes pequenos condutos da seguinte forma:

$$Q = \frac{\pi R^4 \rho g}{8n} \frac{\Delta h}{L} \quad (3.35)$$

sendo:

Q = descarga

R = raio do conduto

$\rho$  = massa específica do fluido

g = aceleração da gravidade

n = viscosidade dinâmica do fluido

$\Delta h$  = perda de carga entre as extremidades do conduto

L = comprimento do conduto

Sendo a área (A) da seção transversal do conduto igual a  $\frac{\pi d^2}{4}$ , onde d é o diâmetro do conduto, pode-se reescrever a equação de Hagen-Poiseuille da seguinte forma:

$$\frac{Q}{A} = v = \frac{d^2}{32} \frac{\rho g}{n} i \quad (3.36)$$

sendo:

$$i = \frac{\Delta h}{L}$$

Comparando a equação (3.36) com a equação de Darcy resulta:

$$K = \frac{d^2}{32} \frac{\rho g}{n} \quad (3.37)$$

Introduzindo uma constante adimensional, função unicamente das propriedades físicas do solo, pode-se reescrever a equação (3.37) da seguinte forma:

$$K = cd^2 \frac{\rho g}{n} \quad (3.38)$$

sendo:

$d$  = parâmetro característico do tamanho médio das partículas do solo

$c$  = constante adimensional; função da porosidade, forma das partículas, etc.

Fazendo-se  $cd^2 = k'$  e  $\frac{\rho g}{n} = f$ , tem-se:

$$K = k' \cdot f \quad (3.39)$$

sendo:

$k'$  = permeabilidade intrínseca (Soil Science Society of America, 1952)

$f$  = fluidez.

A fluidez varia com a composição do líquido e com a temperatura, já que a densidade e principalmente a viscosidade dinâmica são funções desta.

A permeabilidade intrínseca é uma propriedade exclusiva do solo e da geometria de seus poros, desde que o líquido ao escoar não altere sua estrutura.

É afetada, fundamentalmente, pelo tamanho das partículas, índice de vazios, composição, estrutura e pelo grau de saturação (Hillel, 1970).

Em muitos casos as interações entre o solo e a água são tais que impossibilitam o desdobramento da condutividade hidráulica em propriedades separadas e exclusivas, quer do solo quer da água (Hillel, 1970).

O perfil de um solo raramente é homogêneo, senão que formado por diferentes horizontes.

Em vista disso é interessante definir-se um único valor de condutividade hidráulica, representativo de todo o perfil.

Quando o escoamento é perpendicular à estratificação, tem-se:

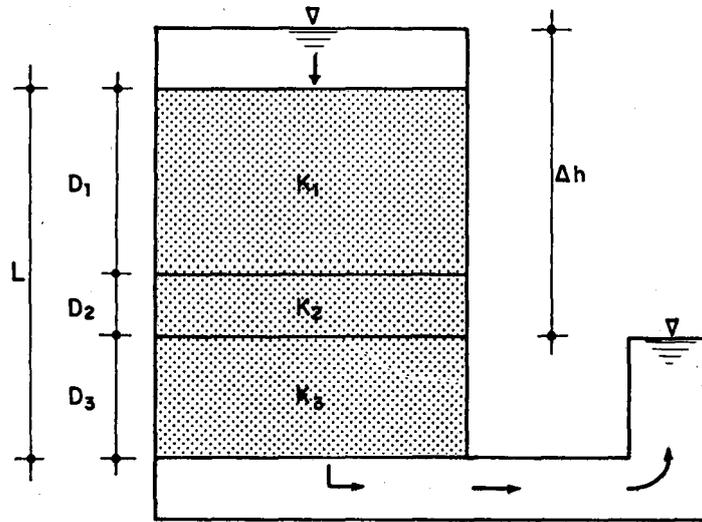


Fig. 3.7 - Escoamento Vertical em Perfil Estratificado

A descarga específica ( $V$ ) é a mesma em cada camada e a perda de carga total é dada pelo somatório das perdas em cada camada.

$$V = K_i \frac{\Delta h_i}{D_i} \quad (3.40)$$

Da equação (3.40) tem-se:

$$\Delta h_i = \frac{VD_i}{K_i} \quad (3.41)$$

$$\Delta h = \sum_{i=1}^n \Delta h_i = V \sum_{i=1}^n \left( \frac{D_i}{K_i} \right) \quad (3.42)$$

Considerando-se um único valor da condutividade hidráulica, a descarga específica é dada por:

$$V = \bar{K} \frac{\Delta h}{L} \quad (3.43)$$

Substituindo-se a equação (3.42) na equação (3.43), e explicitando-se  $\bar{K}$ , tem-se:

$$\bar{K} = \frac{L}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{D_i}{K_i} \right)} \quad (3.44)$$

Sendo  $\bar{K}$  a condutividade hidráulica global, perpendicular à estratificação.

A relação  $D/K$  expressa a resistência oferecida pela camada ao escoamento vertical.

Quando o escoamento é paralelo à estratificação, tem-se:

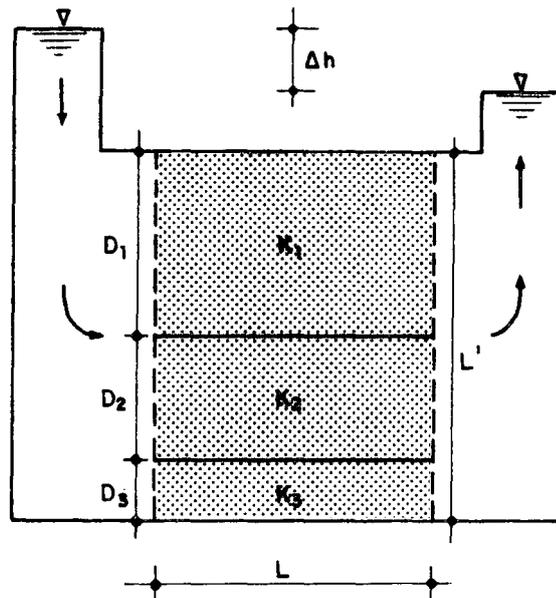


Fig. 3.8 - Escoamento Horizontal em Perfil Estratificado

Sendo o gradiente hidráulico o mesmo em cada camada, o fluxo por unidade de comprimento é dado por:

$$q_i = K_i D_i \frac{\Delta h}{L} \quad (3.45)$$

O fluxo total será:

$$q = \sum_{i=1}^n (K_i D_i) \frac{\Delta h}{L} \quad (3.46)$$

Considerando-se um único valor de condutividade hidráulica, o fluxo por unidade de comprimento é dado por:

$$q = \bar{K} \sum_{i=1}^n D_i \frac{\Delta h}{L} \quad (3.47)$$

Igualando-se as equações (3.46) e (3.47) e explicitando  $\bar{K}$ , tem-se:

$$\bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^n (K_i D_i)}{\sum_{i=1}^n D_i} \quad (3.48)$$

Sendo  $\bar{K}$  a condutividade hidráulica global, paralela à estratificação.

O parâmetro KD é denominado transmissividade da camada ao escoamento horizontal.

## 3.3 - ESPESSURA DA REGIÃO DE FLUXO

Os processos de linearização utilizados por Glover e Werner requerem a determinação de uma espessura média da região de fluxo, quando o escoamento acima do nível dos drenos é considerado.

Dumm (1954), sugere que este parâmetro seja expresso da seguinte forma:

$$D = D_0 + \frac{h_0}{2} \quad (3.49)$$

sendo:

$h_0$  = carga hidráulica no ponto médio entre os drenos para  $t=0$ .

Beers (1969) sugere a utilização da equação (3.29) e define  $\bar{h}$  da seguinte forma:

$$\bar{h} = \frac{1}{2} \frac{h_0 + h_t}{2} \quad (3.50)$$

sendo:

$h_0$  = carga hidráulica no ponto médio entre os drenos para  $t=0$

$h_t$  = carga hidráulica no ponto médio entre os drenos para  $t=t$ .

Substituindo a equação (3.50) na equação (3.29), tem-se:

$$D = D_0 + \frac{h_0 + h_t}{4} \quad (3.51)$$

As equações obtidas a partir das suposições de Dupuit não consideram a restrição ao escoamento devido à convergência das linhas de fluxo na vizinhança dos drenos, no caso destes não apoiarem-se diretamente sobre a camada impermeável. Hooghoudt (1940) introduziu o conceito de espessura equivalente, a partir do qual transformou a combinação dos escoamentos horizontal e radial num escoamento horizontal equivalente.

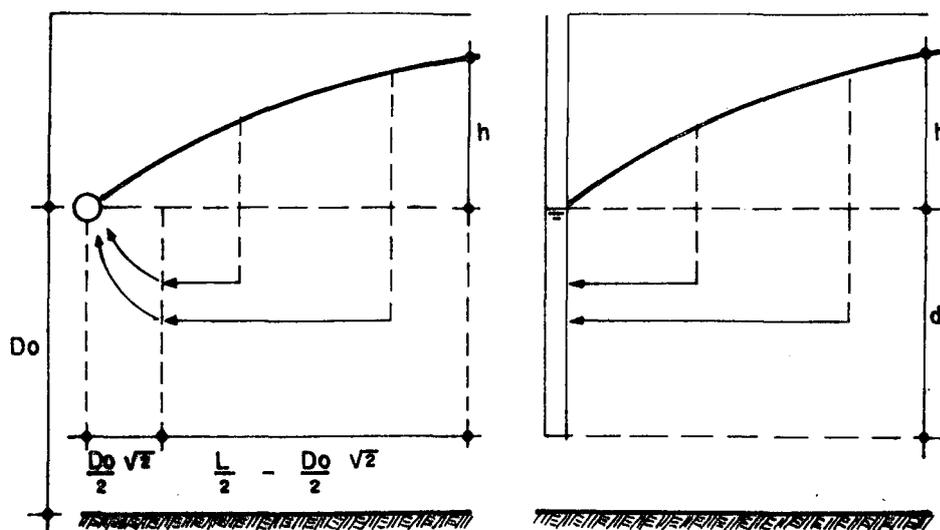


Fig. 3.9 - Modelo de Hooghoudt

Hooghoudt admitiu que o fluxo radial dá-se a partir de uma distância  $\frac{D_0}{2} \sqrt{2}$  dos drenos. O fluxo horizontal ocorre, conseqüentemente, numa distância  $L - D_0 \sqrt{2}$ .

Hooghoudt definiu o fluxo abaixo do nível dos drenos, em condições de regime permanente, pelas seguintes equações:

$$q = \frac{Kh}{LF_H} \quad (3.52)$$

$$q = \frac{8Khd}{L^2} \quad (3.53)$$

Igualando-se as equações (3.52) e (3.53), tem-se:

$$d = \frac{L}{8F_H} \quad (3.54)$$

sendo:

$d$  = espessura equivalente

$L$  = espaçamento dos drenos

$$F_H = \frac{(L - D_o \sqrt{2})^2}{8D_o L} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{D_o}{r\sqrt{2}} + f(D_o, L) \quad (3.55)$$

sendo:

$D_o$  = espessura da região de fluxo abaixo do nível dos drenos

$r$  = raio dos drenos

$f(D_o, L)$  = função de  $D_o$  e  $L$ ; este termo invariavelmente é pequeno comparado com os demais, podendo ser ignorado (Labye, 1960).

A espessura equivalente ( $d$ ) é, evidentemente, menor que a espessura real ( $D_o$ ). Esta diferença expressa a restrição ao escoamento devido ao fluxo radial (Martinez, 1981).

A correção proposta por Hooghoudt é derivada a partir de equações de regime permanente, sendo, todavia, plenamente justificada sua utilização em equações de escoamento transitório (Kraijenhoff, 1958).

Moody (1966) apresentou as seguintes equações para avaliar a espessura equivalente:

$$\frac{D_o}{d} = 1 + \frac{D_o}{L} \left( \frac{8}{\pi} \ln \frac{D_o}{r} - a \right); \quad 0 < D_o/L \leq 0,3 \quad (3.56)$$

sendo:

$$a = 3.55 - 1.60 \frac{D_o}{L} + 2 \left( \frac{D_o}{L} \right)^2 \quad (3.57)$$

Para  $\frac{D_o}{L} > 0.30$ , Moody sugere

$$\frac{L}{d} = 8 (\ln (L/r) - 1.15)/\pi \quad (3.58)$$

Schilfgaard (1974) ressalta a importância de que a computação da espessura da região de fluxo seja feita utilizando o valor da espessura equivalente ( $d$ ) no lugar da espessura real ( $D_o$ ).

As hipóteses de Dupuit implicam em admitir-se que a

camada impermeável unicamente limita a região de fluxo, sem influenciar nas condições do escoamento.

Esta situação conduz a valores de descarga infinitamente grandes quando a camada impermeável encontra-se numa posição infinitamente profunda.

Esta contradição fez com que surgisse o conceito de profundidade crítica da camada impermeável.

Este parâmetro é definido como a profundidade da camada impermeável, referida ao nível de drenagem, a partir da qual o escoamento aos drenos não é mais afetado (Hooghoudt, 1940). Isherwood (1959) simulou o rebaixamento do lençol freático utilizando um modelo matemático, e concluiu que a profundidade crítica ( $D_{oc}$ ) é da ordem de  $1/8$  do espaçamento entre os drenos.

Hooghoudt (1940), estudando o escoamento a drenos em condições de regime permanente, sugeriu  $D_{oc} = 1/4 L$ .

Kirkham (1966), utilizando um modelo físico, concluiu que  $D_{oc} = 1/5 L$ .

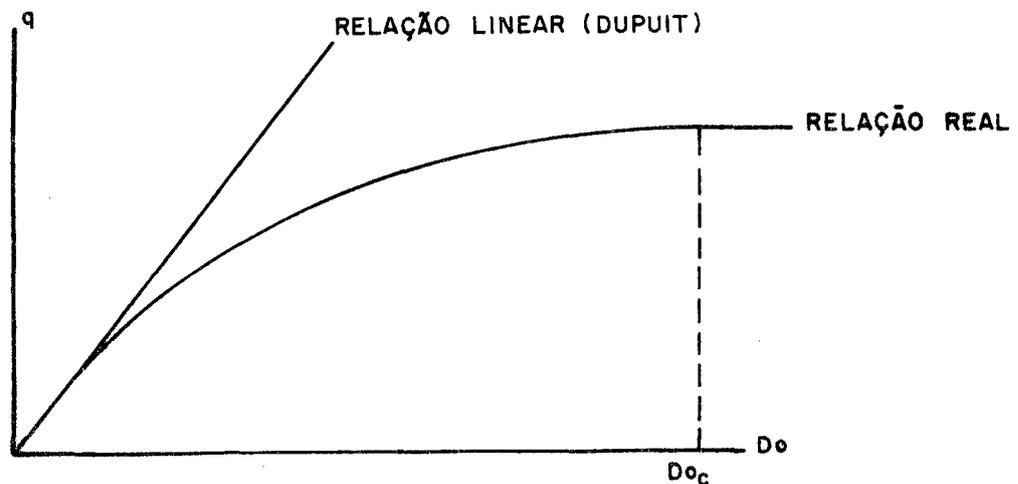


Fig. 3.10 - Relação  $q \times D_o$

A figura (3.10) foi apresentada por Kirkham (1966), e mostra claramente que a relação linear entre a descarga e a espessura da região de fluxo abaixo do nível dos drenos, proposta por Dupuit, é progressivamente abandonada, até que a partir de um determinado valor ( $D_{oc}$ ) a descarga não é mais afetada por incrementos na espessura do aquífero.

#### 3.4 - ESPAÇO POROSO DRENÁVEL

O espaço poroso drenável corresponde à lâmina drenada, por unidade de área, de um volume unitário de solo, por unidade de rebaixamento do lençol freático (Bear, 1975).

Considerando-se duas posições sucessivas de um lençol freático descendente e os respectivos perfis de umidade (figura 3.11), o volume drenado, por unidade de área, é dado por:

$$V_d = \int_0^Z \phi S_1(z) dz - \int_0^Z \phi S_2(z) dz \quad (3.59)$$

sendo:

$Z$  = profundidade

$V_d$  = volume drenado

$\phi$  = porosidade

$S$  = saturação

No caso de solos homogêneos e isotrópicos as curvas representativas da distribuição de umidade no perfil são idênticas em forma.

Se, em adição, as posições do lençol freático forem suficientemente profundas (profundidade muitas vezes superior à espessura da franja capilar) as duas curvas convergem superiormente para o valor de capacidade de campo ( $\theta_{c.c.}$ ).

Nestas condições a área entre as duas curvas (volume drenado) é igual à área do retângulo  $dh(\theta_s - \theta_{c.c.})$ .

Pela definição de espaço poroso drenável, tem-se:

$$\mu = \frac{V_d}{dh} = \frac{dh(\theta_s - \theta_{c.c.})}{dh} = \theta_s - \theta_{c.c.} \quad (3.60)$$

sendo:

$\mu$  = espaço poroso drenável

$dh$  = rebaixamento do lençol freático

$V_d$  = volume drenado

$\theta_s$  = umidade correspondente à saturação

$\theta_{c.c.}$  = umidade correspondente à capacidade de campo

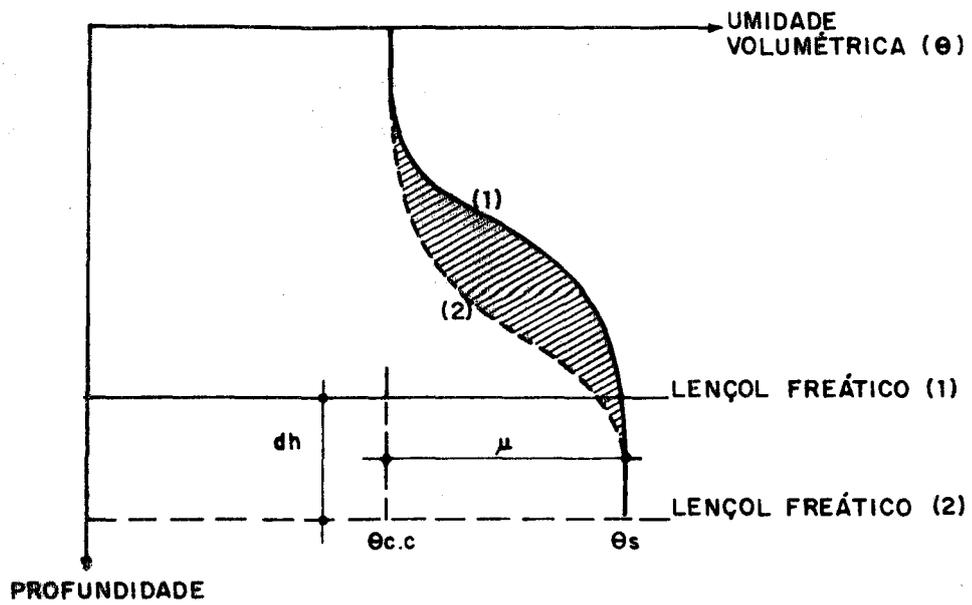


Fig. 3.11 - Perfis de Umidade com Lençol Freático Profundo

A figura (3.12) ilustra o caso de um lençol freático su perficial.

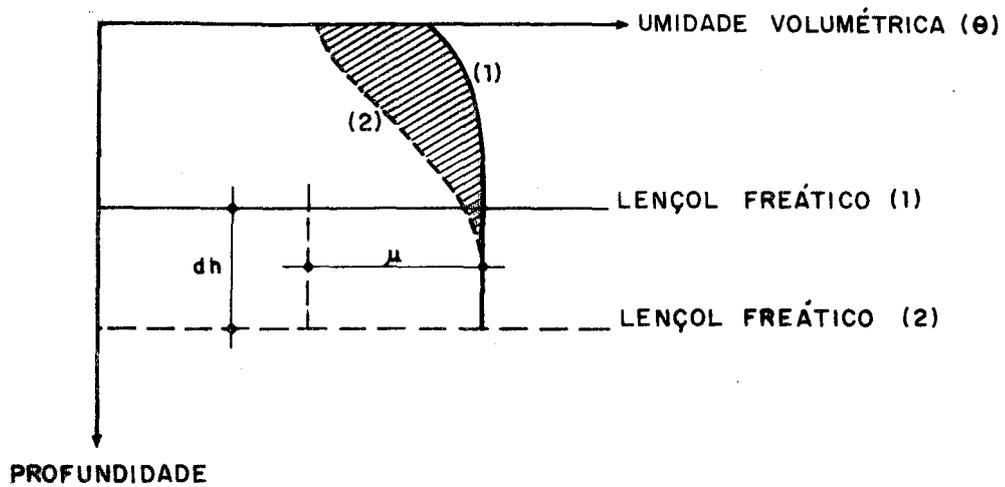


Fig. 3.12 - Perfis de Umidade com Lençol Freático Superficial

Nesta situação há uma restrição na formação de uma zona de capacidade de campo, e o espaço poroso drenável é inferior à diferença  $(\theta_s - \theta_{c.c.})$ .

Santos Junior e Youngs (1969) relacionam alguns fatores que contribuem para que  $\mu < (\theta_s - \theta_{c.c.})$ .

Entre outros citam a presença de ar abaixo e imediatamente acima do lençol freático, perfis estratificados e flutuações rápidas do lençol freático. Esta última situação deve-se ao fato de que a drenagem do reservatório de armazenamento não é instantânea, com o que a condição de equilíbrio só é alcançada após um determinado tempo.

Corey (1977) afirma que a utilização de um valor constante de  $\mu$  é insatisfatório especialmente nos casos em que o lençol freático encontra-se próximo à superfície do solo, e salienta que a utilização de um valor correto exige que o armazenamento da zona não saturada seja considerado.

Brooks e Corey (1966) definiram o espaço poroso drenável pela seguinte relação:

$$\mu = \frac{dV_d}{dD} \quad (3.61)$$

sendo:

$\mu$  = espaço poroso drenável

$V_d$  = volume drenado

$D$  = profundidade do lençol freático em relação à su-

perfície do solo.

Sendo  $S_r$  um valor residual de saturação, e admitindo que a umidade correspondente a  $S < S_r$  contribui muito pouco para o fluxo, Brooks e Corey (1966) definiram valores efetivos de saturação e porosidade.

$$S_e = \frac{S - S_r}{1 - S_r} \quad (3.62)$$

$$\phi_e = (1 - S_r) \phi \quad (3.63)$$

sendo:

$S_e$  = saturação efetiva

$\phi_e$  = porosidade efetiva

Considerando ainda a existência de ar abaixo do lençol freático, com o que a saturação não é total, as equações (3.62) e (3.63) são reescritas da seguinte forma:

$$S_e = \frac{S - S_r}{S_m - S_r} \quad (3.64)$$

$$\phi_e = (S_m - S_r) \phi \quad (3.65)$$

sendo:

$S_m$  = máxima saturação em condições de campo

Brooks e Corey (1966) estabeleceram empiricamente uma

relação entre a saturação efetiva e a pressão capilar.

$$S_e = (P_d/P_c)^\lambda \quad (3.66)$$

sendo:

$\lambda$  = índice representativo da distribuição do tamanho dos poros

$P_c$  = pressão capilar

$P_d$  = valor particular de  $P_c$  a partir do qual ocorre efetivamente dessaturação

A equação (3.66) é válida para  $S > S_r$  e  $P_c > P_d$ .

Em termos de altura de carga a equação (3.66) é dada por:

$$S_e = (h_d/h_c)^\lambda \quad (3.67)$$

sendo:

$h_d$  = altura de carga correspondente a  $P_d$

$h_c$  = altura de carga correspondente a  $P_c$

O volume drenado correspondente a um rebaixamento do lençol freático é dado por:

$$V_d = \phi_e \int_0^D (1 - S_e) dh \quad (3.68)$$

Introduzindo o valor de  $S_e$  dado pela equação (3.67),

tem-se:

$$V_d = \phi_e \int_0^D (1 - (h_d/h_c)^\lambda) dh \quad (3.69)$$

Relacionando as equações (3.69) e (3.61), tem-se:

$$\mu = \phi_e (1 - (h_d/D)^\lambda) \quad (3.70)$$

Pela equação (3.70), quando  $D \leq h_d$ , tem-se  $\mu = 0$ .

O valor de  $D$  para o qual  $(h_d/D)^\lambda \ll 1$  depende de  $\lambda$ . No caso de solos arenosos ( $\lambda \sim 5$ ),  $\phi_e$  é uma boa aproximação de  $\mu$  quando  $D \geq 2 h_d$ .

Para valores baixos de  $\lambda$ ,  $\phi_e$  só será uma boa aproximação de  $\mu$  quando  $D \gg 2 h_d$ .

Estas conclusões reafirmam a dependência de  $\mu$  da posição do lençol freático em relação à superfície do solo.

### 3.5 - SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BOUSSINESQ

Os problemas de escoamento transitório em meio poroso saturado envolvem a solução de uma equação diferencial parcial sujeita a determinadas condições iniciais e de contorno, condições estas que caracterizam a particularidade de cada situação. Paralelamente à geometria da região de fluxo deve-se conhecer os coeficientes de transporte e armazenamento envolvidos.

A princípio, existem três métodos que permitem simu-

lar o comportamento de um sistema a determinados estímulos de entrada.

- a) métodos analíticos
- b) métodos numéricos
- c) modelos físicos e analógicos

Os métodos analíticos são superiores a qualquer outro, e devem ser usados sempre que possível.

No caso de aquíferos com contornos irregulares, sistemas com comportamento não-linear ou ainda sistemas cujos parâmetros variam no espaço, a obtenção de soluções analíticas é extremamente complexa se não impossível.

Como consequência os métodos analíticos têm aplicação restrita, e na maioria dos casos práticos a utilização dos mesmos é inviável.

Os modelos físicos procuram reproduzir o comportamento de um determinado sistema utilizando a teoria da semelhança. Os modelos analógicos utilizam equações que governam diferentes fenômenos para modelar uma situação mais complexa. Com o desenvolvimento da tecnologia do computador os modelos físicos e analógicos foram praticamente abandonados, e os métodos numéricos tornaram-se uma valiosa ferramenta na solução dos problemas de água subterrânea.

Através da discretização das variáveis os métodos nu

méricos permitem a simulação de situações extremamente complexas encontradas na prática.

A seguir são apresentadas soluções lineares e não-lineares da equação de Boussinesq, nas quais as condições iniciais e de contorno assumidas caracterizam os sistemas de drenagem subsuperficial.

Utilizando a versão linearizada da equação de Boussinesq, Glover e Dumm (1954) apresentaram uma solução para o caso de recarga instantânea e drenos apoiados diretamente sobre a camada impermeável. A condição inicial assumida foi de um lençol freático horizontal. Para o caso dos drenos não se apoiarem diretamente sobre a camada impermeável, Dumm (1954) sugere que a espessura da região de fluxo abaixo do nível dos drenos seja substituída pela espessura equivalente de Hooghoudt.

Após a instalação dos drenos a condição inicial assumida por Glover e Dumm não se verifica. Através de observações em sistemas instalados, Tapp, Moody e Dumm (1964) concluíram que a forma do lençol freático é aproximadamente igual a de uma parábola do quarto grau. A partir desta nova condição inicial os autores apresentaram sua solução também para o caso de recarga instantânea e drenos apoiados sobre a camada impermeável. Caso esta última condição não ocorra a utilização do modelo de Hooghoudt é igualmente recomendada.

Segundo Maasland (1961) a solução proposta por Glo-

ver, ao assumir que o sistema reinicia a cada conjunto de recargas considerado, não está de acordo com a teoria matemática dos sistemas lineares.

A partir desta consideração Maasland apresentou soluções para os casos de recarga intermitente com duração finita e recarga intermitente aplicada instantaneamente, que consideram o efeito de recargas antecedentes. Em ambos os casos o intervalo entre recargas e a intensidade das mesmas são constantes.

McWhorter (1977) estendeu o trabalho de Maasland para o caso de recargas instantâneas.

As equações desenvolvidas por McWhorter permitem a utilização de recargas de intensidade variável, aplicadas em intervalos de tempo não necessariamente constantes.

Tanto as equações de Massland como as de McWhorter baseiam-se no conceito de equilíbrio dinâmico, e como tal têm aplicação restrita aos casos em que a distribuição da recarga é uma função periódica.

Kraijenhoff (1958, 1962), utilizando a solução de Glover e a equação de convolução para sistemas lineares invariantes no tempo derivou equações para o caso de recargas intermitentes com duração finita.

Jager (1965) utilizou o modelo de Kraijenhoff para simulação da descarga e oscilações do lençol freático em áreas

planas com drenos subsuperficiais instalados, obtendo resultados de excelente qualidade (Kraijenhoff, 1979).

Werner (1957), utilizando o método das transformadas de Laplace, apresentou uma série de soluções da equação linear envolvendo diferentes condições de contorno. Os estudos de Werner contemplam os casos de níveis desiguais nos drenos e aquíferos com declividade de fundo.

Boussinesq (1904) apresentou uma solução analítica da equação não-linear com drenos apoiados diretamente sobre a camada impermeável. A condição inicial assumida foi de um lençol freático com forma elíptica, sendo a recarga aplicada instantaneamente.

Schilfgaarde (1963), admitindo como condição inicial um lençol freático igualmente elíptico, apresentou uma solução não-linear para o caso dos drenos não se apoiarem diretamente sobre a camada impermeável.

Para que as condições de contorno fossem satisfeitas, Schilfgaarde assumiu o processo de rebaixamento do lençol freático como uma seqüência de pequenos incrementos, com o que a posição do lençol freático no início de um determinado intervalo de tempo será igual a posição final do intervalo de tempo imediatamente anterior. O autor ressalta a importância de que o fluxo radial na vizinhança dos drenos seja considerado, e para isso sugere a utilização do conceito de espessura equivalente proposto por Hooghoudt.

Brooks (1961), considerando a mesma situação estudada por Shilfgaarde com um lençol freático inicialmente paralelo ao fundo do aquífero, resolveu o problema por aproximações sucessivas utilizando um parâmetro de perturbação. Sua solução é apresentada na forma de uma família de curvas onde o rebaixamento do lençol freático, função do tempo, é obtido a partir das características do sistema.

Moody (1966) utilizou um esquema numérico de diferenças finitas e como condição inicial um lençol freático de forma parabólica. O resultado é apresentado por três famílias de curvas que relacionam o tempo com os valores de carga hidráulica, descarga e volume drenado. A correção devida ao fluxo radial é feita através de equações propostas pelo próprio autor.



#### 4.1 - LOCALIZAÇÃO E CARACTERÍSTICAS DA ÁREA EXPERIMENTAL

A área escolhida para a realização do trabalho apresenta um perfil típico das várzeas arrozeiras do Rio Grande do Sul, tendo como característica principal a presença de lençol freático elevado decorrente da má drenagem interna do solo.

O solo é um Planossolo de textura média pertencente à Unidade de Solo Vacacaí, cuja área estimada corresponde a 48% da área total de várzeas do Estado (Beltrame et alii, 1981).

A vegetação predominante nesta Unidade é a de campo, muitas vezes modificada pois a maioria destes solos são cultivados intensamente com arroz (Brasil, 1973).

De acordo com o Sistema Internacional de Köppen a área de estudo enquadra-se dentro da classe Cfa, clima temperado úmido sem estiagem.

Localiza-se na Estação Experimental do Instituto Rio Grandense do Arroz (IRGA), município de Cachoeirinha.

Os estudos de drenagem nesta área experimental foram iniciados por Cauduro, Beltrame e Freitas (1977), através da

implantação de um sistema subsuperficial constituído de valas abertas, espaçadas de 6,0 metros, e de drenos fechados com brita espaçados de 4,5 metros. Em 1979 o Setor de Irrigação e Drenagem do IPH desativou o sistema implantado em 1977, introduzindo tubos plásticos espaçados de 18,0 metros e 30,0 metros, condições até hoje existentes.

Estes tubos são de PVC, corrugados, perfurados, não envelopados e têm diâmetro de 5 cm.

A profundidade média de assentamento dos drenos em relação à superfície do solo é de 58 cm, apresentam declividade num único sentido, estão dispostos paralelamente entre si, e descarregam num coletor simplesmente escavado que margeia a área drenada. Este, por sua vez, descarrega num curso d'água natural, através do qual o volume drenado é escoado para fora do campo experimental.

Uma visão geral da área e do sistema instalado é apresentada na figura 4.1.

#### 4.2 - MONITORAMENTO E COLETA DE DADOS

A parcela monitorada foi localizada numa parte central do campo experimental, procurando-se com isso evitar que os efeitos de contorno mascarassem as observações feitas.

Através da instalação de quinze piezômetros, tubos de

PVC rígido, com diâmetro de 1", dispostos simetricamente em relação ao dreno D<sub>5</sub>, foram feitas as observações das diferentes posições do lençol freático.

Foram determinadas as cotas junto à superfície do solo e do topo de cada piezômetro, possibilitando corrigir as leituras que posicionavam o lençol freático em relação à superfície do solo.

Estes valores foram transformados em carga hidráulica, tomando-se como plano de referência o nível de drenagem.

Paralelamente às leituras dos piezômetros foram determinados os valores de descarga na saída do dreno D<sub>5</sub>. Para isso utilizou-se um processo volumétrico.

Um croqui destas instalações é apresentado na figura 4.1. As precipitações ocorridas durante o período de observações foram registradas pela Estação Meteorológica do Instituto Rio Grandense do Arroz, localizada junto ao campo experimental.

Utilizando tradagem manual constatou-se a existência de uma camada com condutividade hidráulica muitas vezes inferior à condutividade do solo superficial.

Para fins de engenharia de drenagem esta camada foi admitida como impermeável, constituindo-se, portanto, no limite inferior do aquífero.

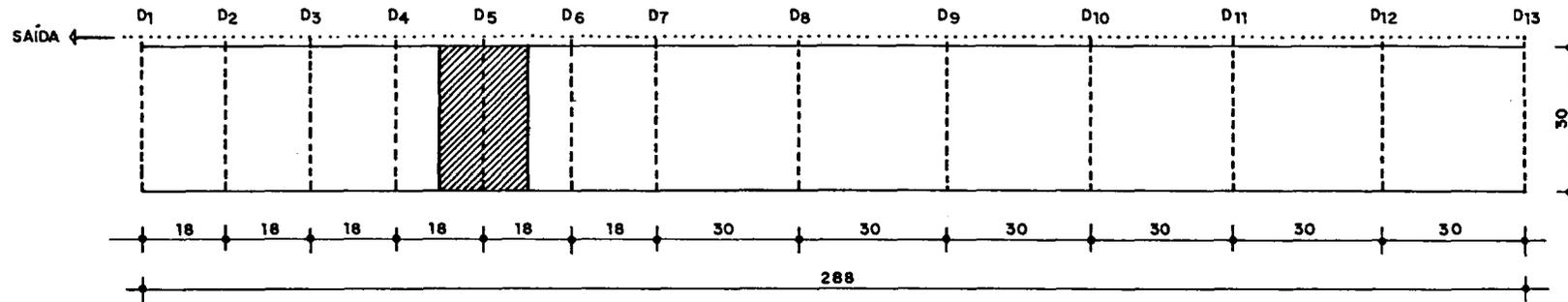
A profundidade média desta camada em relação à super-

PLANTA BAIXA DA ÁREA DRENADA

ESCALA = 1:1.500 UNIDADE = METRO

LEGENDA

- - - DRENOS SUBSUPERFICIAIS
- ..... DRENO COLETOR
- ▨ ÁREA MONITORADA



PLANTA BAIXA DA ÁREA MONITORADA

ESCALAS: HORIZONTAL = 1:150 VERTICAL = 1:1.500 UNIDADE = METRO

LEGENDA

- PIEZÔMETROS
- q PUNTO DE MEDIÇÃO DE DESCARGA

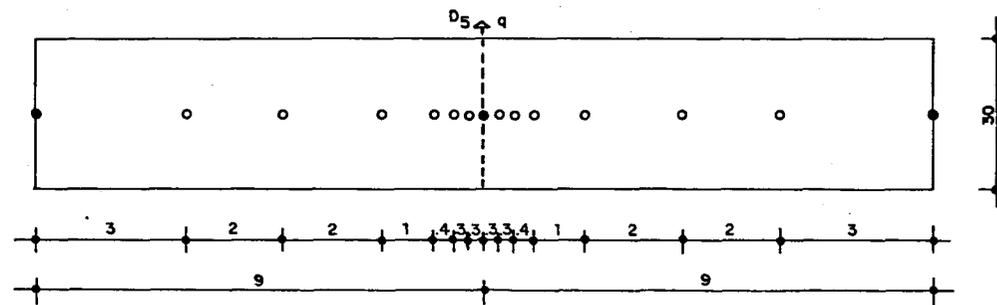


FIG. 4.1 - ÁREA EXPERIMENTAL DE CACHOEIRINHA

fície do solo é de 83 cm.

Todas as observações feitas encontram-se tabuladas e graficadas no Anexo A.

#### 4.3 - MODELOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS NA SIMULAÇÃO

##### 4.3.1 - MODELO LINEAR

Baseado na lei de Darcy, nas hipóteses de Dupuit e na equação de continuidade, Boussinesq (1903, 1904) derivou a equação diferencial que governa o escoamento transitório em aquíferos homogêneos não confinados.

Para o caso de escoamento unidimensional, e admitindo-se a espessura da região de fluxo como constante, a equação de Boussinesq é linear e tem a forma seguinte:

$$KD \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.1)$$

sendo:

K = condutividade hidráulica saturada

D = espessura média da região de fluxo

h = carga hidráulica

$\mu$  = espaço poroso drenável

x = espaço

t = tempo

Em analogia com o fluxo unidimensional de calor, Glover (Dumm, 1954) apresentou a seguinte solução analítica para a equação (4.1):

$$h(x,t) = \frac{4}{\pi} \frac{R_i}{\mu} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (\exp - n^2 t/j) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (4.2)$$

sendo:

$h(x,t)$  = distribuição da carga hidráulica no tempo e no espaço

$R_i$  = recarga instantânea

$\mu$  = espaço poroso drenável

$t$  = tempo

$x$  = espaço

$L$  = espaçamento entre os drenos

$K$  = condutividade hidráulica saturada

$D$  = espessura média da região de fluxo

$j$  = coeficiente de armazenamento

$$j = \frac{\mu L^2}{\pi^2 KD} \quad (4.3)$$

A equação (4.2) é sujeita às seguintes condições iniciais e de contorno:

$$h = \frac{R_i}{\mu} \quad \text{para } t = 0 \quad \text{e} \quad 0 < x < L \quad (4.4)$$

$$h = 0 \quad \text{para } x = 0, \quad x = L \quad \text{e} \quad t \geq 0$$

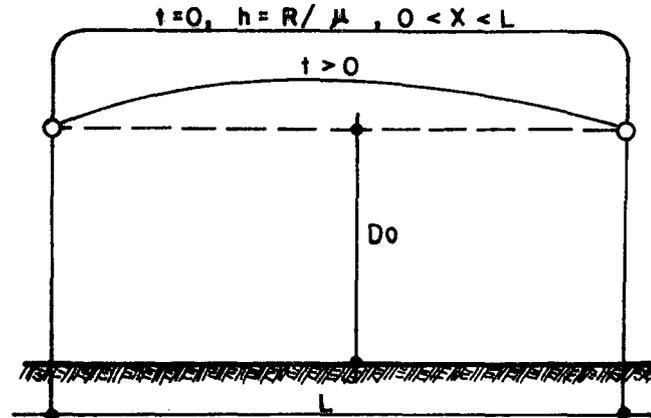


Fig. 4.2 - Geometria da Equação de Glover

Para  $x = \frac{L}{2}$  a derivada da equação (4.2) em relação a  $x$  é nula, o que caracteriza, neste caso, um ponto de máximo da função.

Assim sendo, para fins de projeto, este é o ponto de maior interesse.

Fazendo-se  $x = \frac{L}{2}$  na equação (4.2), tem-se:

$$h(L/2,t) = h_m(t) = \frac{4}{\pi} \frac{R_i}{\mu} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \exp - n^2 t/j \quad (4.5)$$

A descarga  $q(t)$ , por unidade de área superficial, é obtida através da lei de Darcy:

$$q(t) = - \frac{2KD}{L} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{4}{\pi} \frac{R_i}{\mu} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (\exp - n^2 t/j) \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=L} = - \frac{4}{L} \frac{R_i}{\mu} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \exp - n^2 t/j \quad (4.8)$$

Introduzindo a equação (4.8) na equação (4.6), tem-se:

$$q(t) = \frac{8KD}{L^2} \frac{R_i}{\mu} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \exp - n^2 t/j \quad (4.9)$$

As equações (4.5) e (4.9) permitem que os valores de carga hidráulica no ponto médio entre os drenos e descarga sejam computados em qualquer tempo, após a aplicação de uma recarga instantânea.

No caso mais geral de recargas intermitentes, tendo em vista a linearidade da equação (4.1), a resposta é obtida por superposição.

As equações derivadas por Glover assumem que a entrada no sistema tenha uma duração infinitesimal, originando uma ascensão instantânea do lençol freático.

Quando esta entrada for unitária a resposta do sistema é denominada função núcleo.

Segundo a teoria dos sistemas lineares a resposta do sistema a uma entrada contínua é obtida pela convolução desta entrada com a função núcleo. No caso de sistemas invariantes no

tempo a operação de convolução é representada pela equação que segue:

$$hm(t), q(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \mu(0, t-\tau) R(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

onde  $\mu(0, t)$  é a função núcleo,  $R$  a recarga (entrada no sistema) e  $\tau$  a variável de integração na escala do tempo.

Sendo  $R_i=1$  as equações de Glover representam as funções núcleo das variáveis de saída, carga hidráulica no ponto médio entre os drenos e descarga respectivamente.

As equações que representam o processo de convolução das respectivas funções núcleo com uma entrada discreta ( $R$ ) foram derivadas por Kraijenhoff (1958), e são apresentadas a seguir:

$$hm(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{4}{\pi\mu} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} (\exp - n^2 (t-\tau)/j) R d\tau \quad (4.11)$$

$$hm(t) = \frac{4R}{\pi\mu} j \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - \exp - n^2 t/j) \quad (4.12)$$

$$q(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{8KD}{L^2\mu} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (\exp - n^2 (t-\tau)/j) R d\tau \quad (4.13)$$

$$q(t) = \frac{8}{\pi^2} R \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \exp - n^2 t/j) \quad (4.14)$$

As equações (4.12) e (4.14) são aplicáveis somente para  $t \leq T$ , sendo  $T$  o tempo de duração da recarga. Quando o tempo de interesse for maior que este tempo  $T$ , as equações transformam-se para:

$$hm(t), q(t) = \begin{cases} \tau=t \\ \tau=0 \end{cases} - \begin{cases} \tau=t \\ \tau=T \end{cases}, t > T \quad (4.15)$$

$$hm(t) = \frac{4}{\pi} \frac{R}{\mu} j \left[ \sum_{n=1, -3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - \exp - n^2 t/j) - \sum_{n=1, -3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - \exp - n^2 (t-T)/j) \right] \quad (4.16)$$

$$q(t) = \frac{8}{\pi^2} R \left[ \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \exp - n^2 t/j) - \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \exp - n^2 (t-T)/j) \right] \quad (4.17)$$

As equações (4.16) e (4.17) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$hm(t) = \frac{4}{\pi} \frac{R}{\mu} j \left[ \sum_{n=1, -3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (\exp(n^2 T/j) - 1) \exp - n^2 t/j \right] \quad (4.18)$$

$$q(t) = \frac{8}{\pi^2} R \left[ \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\exp(n^2 T/j) - 1) \exp - n^2 t/j \right] \quad (4.19)$$

As equações (4.18) e (4.19) permitem que os valores de carga hidráulica no ponto médio entre os drenos e descarga sejam computados em qualquer tempo, a partir do início da ocorrência de uma recarga de duração  $T$ .

Analogamente às equações de Glover, a resposta do sistema a um conjunto de recargas é obtida por superposição.

Segundo Kraijenhoff (1958), sempre que o segundo termo das séries for inferior a 1% do primeiro, todos os termos, exceto o primeiro, podem ser desprezados.

Esta situação verifica-se para  $t > T + 0,44 j$ , e o estágio é dito de recessão.

Neste estágio, as equações se reduzem para:

$$hm(t) = \frac{4}{\pi} \frac{R}{\mu} j \left[ (\exp(T/j) - 1) \exp - t/j \right] \quad (4.20)$$

$$q(t) = \frac{8}{\pi^2} R \left[ (\exp(T/j) - 1) \exp - t/j \right] \quad (4.21)$$

Introduzindo-se dois valores de  $t$  ( $t_1$  e  $t_2 > T + 0,44 j$ ), tem-se:

$$\frac{hm(t_2)}{hm(t_1)} = \exp - (t_2 - t_1)/j \quad (4.22)$$

$$\frac{q(t_2)}{q(t_1)} = \exp - (t_2 - t_1)/j \quad (4.23)$$

Combinando-se as equações (4.20) e (4.21) e introduzindo-se o valor de  $j$ , a expressão da descarga toma a forma que segue:

$$q(t) = \frac{2\pi KD}{L^2} \cdot hm(t) \quad (4.24)$$

No estágio de recessão a relação entre a carga hidráulica no ponto médio e a descarga é linear.

As equações (4.22) e (4.23) permitem a propagação das variáveis no tempo a partir de um valor conhecido.

#### 4.3.2 - MODELO NÃO-LINEAR

A linearização da equação de Boussinesq através do estabelecimento de uma espessura média para a região de fluxo só é viável se a geometria do perfil a ser drenado favorecer este procedimento, mais especificamente se a espessura da região de fluxo abaixo do nível dos drenos for muito superior à espessura da região de fluxo acima do nível dos drenos. Nossa várzea arroseira tem como característica a presença de uma camada impermeável pouco profunda, o que prejudica o processo de linearização e implica na utilização da equação de Boussinesq em sua forma não-linear.

A obtenção de soluções analíticas desta equação na

presença de recarga é extremamente complexa, o que faz com que se recorra a métodos numéricos.

A seguir é apresentado o esquema numérico de diferenças finitas, que fundamentalmente consiste na discretização das variáveis envolvidas e na substituição das derivadas por equações de diferenças finitas. Com isso a equação diferencial é convertida num sistema de equações lineares, que resolvido fornece os valores da variável dependente em pontos do espaço nos tempos de interesse.

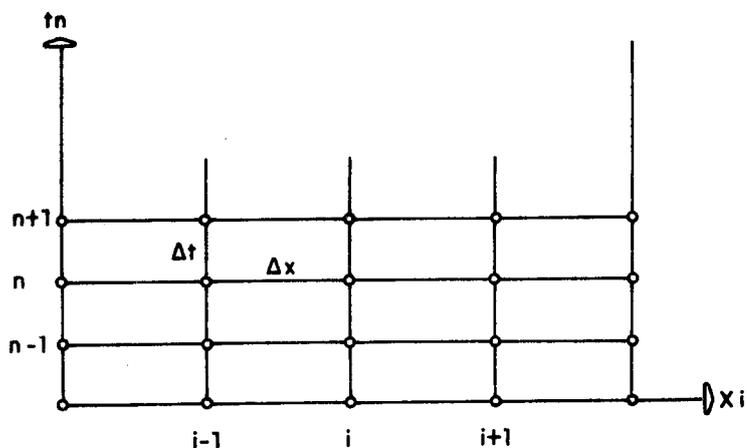


Fig. 4.3 - Discretização do Plano formado pelas Variáveis Independentes (tempo e espaço)

Sendo  $u$  e  $y$  variáveis genéricas, a função  $u=u(y)$  pode ser expandida por séries de Taylor da forma seguinte:

$$u(y + \Delta y) = u(y) + \left. \frac{du}{dy} \right|_y \Delta y + \left. \frac{d^2u}{dy^2} \right|_y \frac{(\Delta y)^2}{2!} + \left. \frac{d^3u}{dy^3} \right|_y \frac{(\Delta y)^3}{3!} + \dots \quad (4.25)$$

ou ainda;

$$u(y - \Delta y) = u(y) - \left. \frac{du}{dy} \right|_y \Delta y + \left. \frac{d^2u}{dy^2} \right|_y \frac{(\Delta y)^2}{2!} - \left. \frac{d^3u}{dy^3} \right|_y \frac{(\Delta y)^3}{3!} + \dots \quad (4.26)$$

Explicitando a derivada primeira na equação (4.25) e truncando a série no termo  $(d^2u/dy^2)_y (\Delta y/2!)$ , obtém-se uma aproximação de primeira ordem para a derivada primeira.

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_y = \frac{u(y + \Delta y) - u(y)}{(\Delta y)} - o(\Delta y) \quad (4.27)$$

O termo  $o(\Delta y)$  representa os termos truncados, e indica que o primeiro destes termos é de primeira ordem em relação a  $\Delta y$ .

A analogia pode ser melhorada subtraindo a equação (4.26) da equação (4.25), e explicitando a derivada primeira.

Neste caso a aproximação é de segunda ordem.

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_y = \frac{u(y + \Delta y) - u(y - \Delta y)}{2(\Delta y)} - o(\Delta y)^2 \quad (4.28)$$

De maneira análoga  $o(\Delta y)^2$  representa os termos truncados, e indica que o primeiro destes termos é de segunda ordem

em relação a  $\Delta y$ . Somando as equações (4.25) e (4.26) obtém-se uma aproximação de segunda ordem para a derivada segunda.

$$\left. \frac{d^2 u}{dy^2} \right|_y = \frac{u(y+\Delta y) - 2u(y) + u(y-\Delta y)}{(\Delta y)^2} - O(\Delta y)^2 \quad (4.29)$$

Outra aproximação de primeira ordem para a derivada primeira pode ser obtida através da equação (4.26).

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_y = \frac{u(y) - u(y-\Delta y)}{(\Delta y)} + O(\Delta y) \quad (4.30)$$

As aproximações representadas pelas equações (4.27), (4.28) e (4.30) são ditas progressiva, central e regressiva, respectivamente.

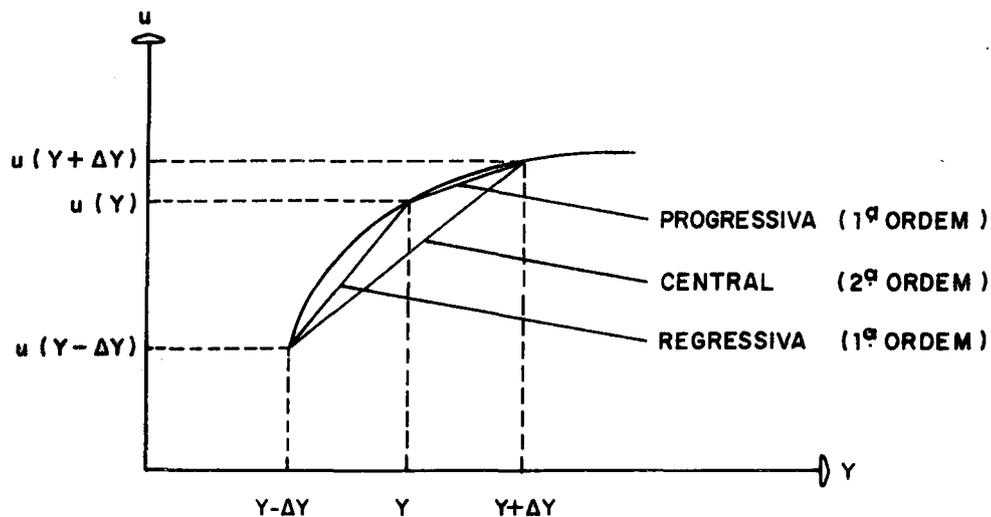


Fig. 4.4 - Representação Geométrica das Aproximações para a Derivada Primeira em  $y$ .

A equação diferencial parcial de Boussinesq é do tipo parabólica, apresentando uma derivada de segunda ordem em relação ao espaço e uma derivada de primeira ordem em relação ao tempo.

O esquema numérico é explícito quando as derivadas são centradas no tempo  $t$ , com a derivada temporal de primeira ordem sendo aproximada por um esquema progressivo.

A solução é implícita quando as derivadas são centradas no tempo  $t + \Delta t$ , com a derivada temporal de primeira ordem sendo aproximada por um esquema regressivo.

Em ambos os casos o erro de truncamento é de segunda ordem na aproximação da derivada segunda e de primeira ordem na aproximação da derivada primeira.

O erro associado com cada uma das aproximações depende da forma da curva do ponto  $(y, u(y))$ , todavia em geral a derivada é melhor aproximada por uma analogia de segunda ordem (Rosenberg, 1975).

Assim sendo é desejável utilizar um esquema que aproxime a derivada primeira com um erro de truncamento de segunda ordem. No caso de centrar a derivada no tempo  $t$ , o esquema central de segunda ordem é dado pela equação que segue:

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_t = \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2(\Delta t)} - O(\Delta t)^2 \quad (4.31)$$

Caso a derivada seja centrada em  $t + \Delta t$ , temos:

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t+\Delta t} = \frac{u(t+2\Delta t) - u(t)}{2(\Delta t)} - O(\Delta t)^2 \quad (4.32)$$

A necessidade de utilizar valores nos tempos  $(t-\Delta t)$  ou  $(t+2\Delta t)$  gera a instabilidade dos esquemas representados pelas equações (4.31) e (4.32).

Para contornar esta dificuldade, Crank e Nicholson apresentaram um esquema onde as derivadas são centradas no tempo  $t+1/2\Delta t$ .

Neste caso, tem-se:

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{t+1/2\Delta t} = \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{(\Delta t)} - O(\Delta t)^2 \quad (4.33)$$

A equação (4.33) representa uma aproximação de segunda ordem estável para a derivada primeira em relação ao tempo.

No caso da derivada de segunda ordem em relação ao espaço o esquema numérico de Crank-Nicholson assume uma ponderação entre os esquemas explícito e implícito, resultando a equação que segue:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x,t+1/2\Delta t} &= \frac{1}{2} \frac{u(x+\Delta x;t) - 2u(x;t) + u(x-\Delta x;t)}{(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{u(x+\Delta x;t+\Delta t) - 2u(x;t+\Delta t) + u(x-\Delta x;t+\Delta t)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

A equação (4.34) mostra que o esquema de Crank-Nicholson trata-se de uma aplicação sucessiva dos dois esquemas convencionais.

A utilização deste esquema para solução da equação não linear de Boussinesq consiste em substituir as derivadas de segunda ordem em relação ao espaço e primeira ordem em relação ao tempo pelas respectivas aproximações.

No caso dos drenos não se apoiarem diretamente sobre a camada impermeável a equação diferencial parcial não-linear de Boussinesq na presença de recarga é apresentada a seguir:

$$K(d+h) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + R = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.35)$$

onde  $d$  é a espessura equivalente.

Reordenando, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{K(d+h)} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial t} - R \right) \quad (4.36)$$

Pelo esquema de Crank-Nicholson as derivadas são aproximadas pelas equações que seguem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Big|_{i,n+1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{i, n+1/2} = \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{(\Delta t)} \quad (4.38)$$

Substituindo as equações (4.37) e (4.38) em (4.36) ob-  
têm-se:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) = \frac{1}{k(d+h_i^{n+1/2})} \left( \mu \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{(\Delta t)} - R \right) \quad (4.39)$$

Reordenando, obtêm-se:

$$\begin{aligned} h_{i+1}^{n+1} - \left( 2 + \frac{2u}{K(d+h_i^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)} \right) h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1} &= \\ &= - h_{i+1}^n + \left( 2 - \frac{2u}{K(d+h_i^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)} \right) h_i^n - \\ &- h_{i-1}^n - \frac{2(\Delta x)^2 R}{K(d+h_i^{n+1/2})} \end{aligned} \quad (4.40)$$

sendo:

$h$  = carga hidráulica

$\mu$  = espaço poroso drenável

$K$  = condutividade hidráulica saturada

$d$  = espessura equivalente

$\Delta x$  = distância entre dois pontos consecutivos

$\Delta t$  = intervalo de tempo

R = recarga

i = índice que posiciona a variável h no espaço

n = índice que posiciona a variável h no tempo

A recarga apresenta distribuição espacial uniforme sendo constante em cada  $\Delta t$ , enquanto a porosidade drenável, a conductividade hidráulica saturada e a espessura equivalente são constantes no tempo e no espaço.

Admitindo-se que os valores da variável h são conhecidos em qualquer ponto no tempo n, a equação (4.40) representa um sistema de equações algébricas que permite a determinação de h no tempo n+1.

Como o esquema centra as derivadas no tempo n+1/2, para que o sistema seja resolvido é necessário que a variável h que aparece fora das derivadas seja avaliada neste mesmo tempo.

O seguinte processo foi adotado:

$$h_i^{n+1/2} = \frac{h_i^n + h_i^{n+1*}}{2} \quad (4.41)$$

sendo:

$h_i^n$  = valor conhecido da variável h no ponto i e no tempo n

$h_i^{n+1*}$  = valor arbitrado para a variável h no ponto i e no tempo n+1.

Para determinação da descarga a partir dos valores de carga hidráulica fez-se uma análise numérica da sensibilidade desta descarga em relação ao gradiente e à espessura da região de fluxo. A partir desta análise optou-se por estimar o gradiente utilizando os valores de carga hidráulica nos pontos  $x=L/2$  e  $x=L$ , admitindo-o como constante no espaço.

A contribuição do fluxo acima do nível dos drenos à espessura total foi considerado igual à quarta parte da soma dos valores de carga hidráulica nestes mesmos dois pontos.

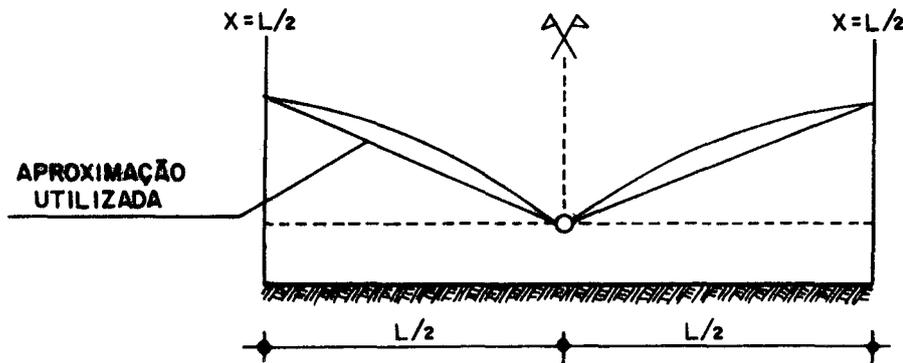


Fig. 4.5 - Esquema para determinação da Descarga

Utilizando a equação de Darcy, a descarga média por unidade de comprimento no tempo  $t$  é então dada por:

$$q(t) = 2K (d + (h^t(x=L/2) + h^t(x=L)) / 4) \cdot (h^t(x=L/2) - h^t(x=L)) / L \quad (4.42)$$

Como  $h(x=L)=0$  em qualquer tempo (condição de contorno assumida), a descarga por unidade de área superficial é dada por:

$$q(t) = 4K (d + h^t(x=L/2)/4) \cdot h^t(x=L/2)/L^2 \quad (4.43)$$

#### 4.4 - APLICAÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS

##### 4.4.1 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE KRAIJENHOFF

O processo de simulação através do modelo linear das variáveis carga hidráulica no ponto médio entre os drenos e a descarga será feito utilizando as equações (4.18) e (4.19) anteriormente derivadas.

$$h_m(t) = \frac{4}{\pi} \frac{R}{\mu} j \left[ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (\exp(n^2 T/j) - 1) \exp(-n^2 t/j) \right]$$

$$q(t) = \frac{8}{\pi^2} R \left[ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\exp(n^2 T/j) - 1) \exp(-n^2 t/j) \right]$$

Inicialmente serão determinadas as funções núcleo discretizadas correspondentes a cada variável.

Nesta etapa a entrada no sistema será uma recarga isolada com intensidade  $1/T$ , sendo  $T$  a duração da recarga. Esta determinação consiste basicamente em realizar a convolução da

entrada de intensidade  $1/T$  e duração supostamente infinita, iniciando em  $t=0$ , com as respectivas funções núcleo, e subtrair destes resultados convoluções similares com a recarga  $i$  iniciando em  $t=T$ . Na etapa seguinte será feita a convolução discreta dos operadores anteriormente determinados com as recargas que compõem cada evento.

Como saída serão obtidas as ordenadas das respectivas funções resposta no final de cada intervalo de tempo. Esta operação engloba os conceitos fundamentais da teoria dos sistemas lineares invariantes no tempo, ou seja, independência das respostas parciais, proporcionalidade entre ordenadas e superposição em tempos correspondentes.

Estas propriedades são sintetizadas pela equação que segue:

$$Q_K = \sum_{I=1}^K (R_I \times U_{K-I+1}) \quad (4.44)$$

sendo:

$Q_K$  = ordenada da função resposta no final do intervalo de tempo  $K$

$R_I$  = recarga no intervalo de tempo  $I$

$U_{K-I+1}$  = ordenada da função núcleo discreta no final do intervalo de tempo  $K-I+1$ .

Esta forma de computação é essencialmente a mesma representada na forma contínua pela equação (4.10).

## 4.4.2 - SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR

O processo de simulação da variação da carga hidráulica no tempo e no espaço será feito através da solução do sistema de equações algébricas, resultante da aplicação da equação (4.40) aos pontos internos da malha numérica.

Esta equação é a seguir representada.

$$h_{i+1}^{n+1} - \left(2 + \frac{2\mu}{K(d+h_i^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)}\right) h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1} = -h_{i+1}^n +$$

$$+ \left(2 - \frac{2\mu}{K(d+h_i^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)}\right) h_i^n - h_{i-1}^n - \frac{2(\Delta x)^2 R}{K(d+h_i^{n+1/2})}$$

Para que este sistema seja compatível e determinado é necessário que sejam conhecidos os valores da variável em qualquer ponto no tempo  $n=0$  (condições iniciais), os valores da variável em qualquer tempo nos extremos do domínio (condições de contorno) e os valores da variável no tempo  $n+1/2$  em cada ponto interno da malha.

As condições iniciais e de contorno são assumidas, e o valor de  $h_i^{n+1/2}$  é estimado pela equação (4.41), representada a seguir.

$$h_i^{n+1/2} = \frac{h_i^n + h_i^{n+1*}}{2}$$

Conhecidos estes valores e aplicando a equação (4.40) aos pontos internos da malha numérica resulta um sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é do tipo tri-diagonal, sendo unitários os elementos das diagonais superior e inferior.

A dimensão dessa matriz é definida pelo número de pontos internos da malha.

Em notação matricial o sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$[A] [h] = [T] \quad (4.45)$$

onde  $[A]$  é a matriz dos coeficientes anteriormente citada,  $[h]$  a matriz das variáveis e  $[T]$  a matriz formada pelos termos independentes.

Considerando uma malha com  $m+2$  pontos, sendo  $m$  internos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{33} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & a_{jj} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{mm} & 0 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} h_1^{n+1} \\ h_2^{n+1} \\ h_3^{n+1} \\ \vdots \\ h_j^{n+1} \\ \vdots \\ h_m^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_j \\ \vdots \\ T_m \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -\left(2 + \frac{2 \mu}{K(d+h_1^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)}\right) \\
 &\vdots \\
 a_{mm} &= -\left(2 + \frac{2 \mu}{K(d+h_m^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)}\right)
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

e:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -h_2^n + \left(2 - \frac{2 \mu}{K(d+h_1^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)}\right) h_1^n - h_0^n - h_0^{n+1} - \frac{2 (\Delta x)^2 R}{K(d+h_1^{n+1/2})} \\
 &\vdots \\
 T_j &= -h_{j+1}^n + \left(2 - \frac{2 \mu}{K(d+h_j^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)}\right) h_j^n - h_{j-1}^n - \frac{2 (\Delta x)^2 R}{K(d+h_j^{n+1/2})} \\
 &\vdots \\
 T_m &= -h_{m+1}^n + \left(2 - \frac{2 \mu}{K(d+h_m^{n+1/2})} \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)}\right) h_m^n - h_{m-1}^n - h_{m+1}^{n+1} - \frac{2 (\Delta x)^2 R}{K(d+h_m^{n+1/2})}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Os elementos  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{jj}, \dots, a_{mm}$  constituem a diagonal principal, e são determinados segundo a equação (4.47). Os elementos que constituem as diagonais adjacentes à diagonal principal,  $a_{12}, a_{23}, a_{34}, \dots, a_{j,j+1}, a_{m,m-1}, \dots, a_{j,j-1}, \dots, a_{32}$  e  $a_{21}$ , são unitários e os restantes nulos. É importante salientar que este formato independe da dimensão da matriz.

Os termos independentes,  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_j, \dots, T_m$ ,

são calculados pela equação (4.48).

Quando a equação é escrita para os pontos vizinhos aos contornos a determinação dos termos independentes é feita utilizando valores da variável no tempo  $n+1$ .

No caso do ponto 1 usa-se o valor de  $h_0^{n+1}$  e no caso do ponto  $m$  o valor de  $h_{m+1}^{n+1}$ .

Esta situação não implica, todavia, em dificuldades na computação dos valores de  $T_1$  e  $T_m$ , já que sendo  $h_0$  e  $h_{m+1}$  pontos extremos seus valores são conhecidos em qualquer tempo.

Para a solução propriamente dita do sistema optou-se pelo esquema de eliminação de Gauss, que consiste em tornar unitários os elementos da diagonal principal e zerar todos os elementos abaixo desta mesma diagonal.

Esta condição é obtida através de um conjunto de operações elementares, resultando um sistema de equações equivalente ao primeiro e com a forma que segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \dots 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & a_{j,j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} h_1^{n+1} \\ h_2^{n+1} \\ h_3^{n+1} \\ \vdots \\ h_j^{n+1} \\ \vdots \\ h_{mm}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_1 \\ T'_2 \\ T'_3 \\ \vdots \\ T'_j \\ \vdots \\ T'_m \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Desenvolvendo, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 h_1^{n+1} + a_{12} h_2^{n+1} &= T'_1 \\
 h_2^{n+1} + a_{23} h_3^{n+1} &= T'_2 \\
 h_3^{n+1} + a_{34} h_4^{n+1} &= T'_3 \\
 &\vdots \\
 h_j^{n+1} + a_{j,j+1} h_{j+1}^{n+1} &= T'_j \\
 &\vdots \\
 h_m^{n+1} &= T'_m
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Após a aplicação do algoritmo de Gauss o valor da variável no ponto  $m$  é obtido automaticamente, sendo igual ao termo independente correspondente.

A partir deste valor, e utilizando um esquema de simples substituição, obtêm-se o valor da variável no ponto  $m-1$ .

$$h_{m-1}^{n+1} + a_{m-1,m} h_m^{n+1} = T'_{m-1} \tag{4.51}$$

$$\text{Como } h_m^{n+1} = T'_m ;$$

$$h_{m-1}^{n+1} = T'_{m-1} - a_{m-1,m} (T'_m) \tag{4.52}$$

Este processo é então repetido até que todos os valo-

res da variável no tempo  $n+1$  sejam determinados.

Os valores calculados serão então confrontados com os valores anteriormente arbitrados quando da estimativa da variável no tempo  $n+1/2$ , e um critério de tolerância indicará se os mesmos serão aceitos ou não.

O critério adotado é o seguinte:

$$\frac{|h_i^{n+1} - h_i^{n+1*}|}{h_i^{n+1}} \cdot 100 \leq \epsilon ; \quad 1 \leq i \leq m \quad (4.53)$$

onde  $\epsilon$  é o erro percentual admitido e  $m$  o número de pontos internos da malha.

Os valores calculados serão aceitos se o critério for verificado simultaneamente para todos os pontos.

Em caso afirmativo passarão a ser a condição inicial do intervalo de tempo subsequente, caso contrário serão os valores arbitrados da próxima iteração.

Em qualquer um dos dois casos os valores dos termos independentes e da diagonal principal da matriz dos coeficientes devem ser recalculados, fato este que caracteriza a condição de não linearidade.

A partir dos valores calculados de carga hidráulica no ponto médio entre os drenos serão determinadas as descargas específicas correspondentes.

Para isso será utilizada a equação (4.43), a seguir reapresentada:

$$q^{n+1} = 4 K (d + h_{i=L/2}^{n+1}/4) h_{i=L/2}^{n+1} / L^2$$

onde  $h_{i=L/2}^{n+1}$  é a carga hidráulica no ponto médio entre os drenos no tempo  $n+1$ .

#### 4.4.3 - ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS DE ENTRADA DAS SOLUÇÕES COMPUTACIONAIS

Para que estes parâmetros sejam estimados é necessário que se conheça a geometria do perfil drenado.

Esta geometria é definida a seguir pela figura (4.6).

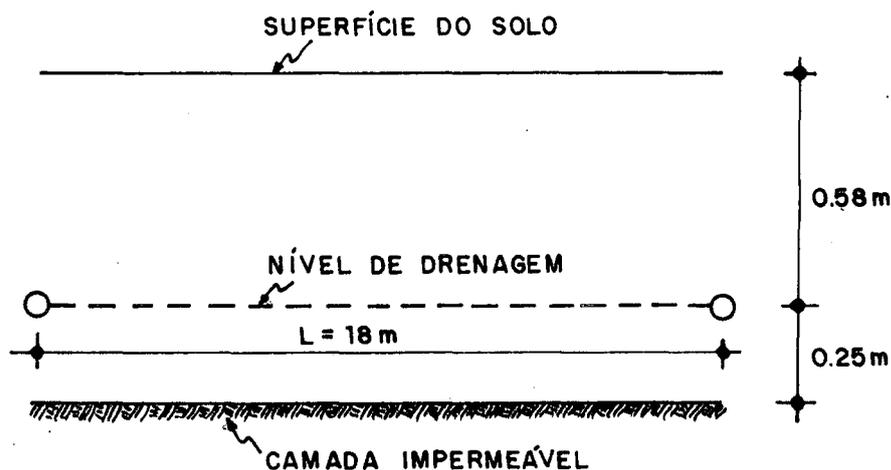


Fig. 4.6 - Geometria do Perfil da Área Experimental

Escalas: Vertical 1:20  
Horizontal 1:200

Os parâmetros comuns às duas soluções são os valores de recarga, a porosidade drenável, a condutividade hidráulica saturada e a espessura equivalente.

Para correção da espessura da região de fluxo abaixo do nível dos drenos foi utilizado o modelo proposto por Hooghoudt.

Sendo o espaçamento entre os drenos 18.00 m, a espessura real 0.25 m e o raio dos drenos 0.025 m, resulta para a espessura equivalente 0.243 m.

Os valores de condutividade hidráulica saturada e porosidade drenável adotados foram determinados por Gabetto (1983, não publicado).

Estes ensaios foram conduzidos na área experimental de Cachoeirinha, tendo os valores de  $K$  e  $\mu$  sido obtidos a partir de observações do comportamento do sistema de drenagem superficial ali instalado.

Optou-se por estes resultados devido ao grande volume de solo envolvido nas determinações, o que, teoricamente, conduz a resultados mais confiáveis do que os fornecidos pelos ensaios pontuais.

Os valores apresentados por Gabetto e utilizados neste trabalho são:  $K=1.00$  m/dia e  $\mu=0.05$ .

Para estimar a recarga a partir das precipitações registradas foram feitas as seguintes suposições.

- a) Tendo em vista a topografia local admitiu-se que o escoamento superficial é nulo, com o que os volumes precipitado e infiltrado são iguais.
- b) Só há percolação para a zona saturada após suprido o déficit de umidade da zona não saturada.
- c) O armazenamento da zona não saturada, no período imediatamente anterior ao início das precipitações, corresponde a um déficit nulo, com o que os volumes infiltrado e percolado são iguais.

Para a distribuição temporal deste volume percolado de ve-se considerar que os efeitos da infiltração retardada e do escoamento através da zona não saturada originam um hietograma abatido em relação ao hietograma de precipitações.

Para cumprir esta condição o volume precipitado foi redistribuído de maneira uniforme em intervalos de tempo iguais a 1 dia, obtendo-se assim os hietogramas de recarga correspondentes a cada evento.

A fixação do intervalo de tempo em 1 dia foi feita através de uma análise numérica de sensibilidade da recarga em função de diferentes intervalos de tempo.

Os hietogramas resultantes estão apresentados juntamente com as curvas simuladas e observadas correspondentes a cada evento registrado.

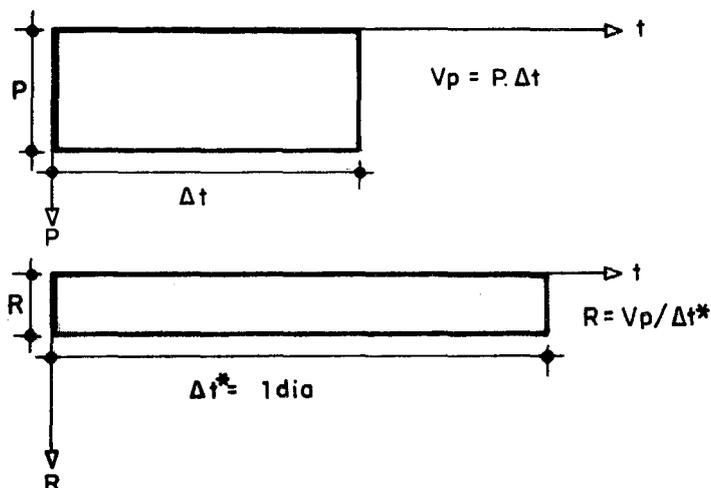


Fig. 4.7 - Transformação da Precipitação em Recarga

No caso da solução linear a condutividade hidráulica saturada e a espessura equivalente não são parâmetros específicos de entrada, sendo todavia utilizados na determinação do coeficiente de armazenamento.

Este parâmetro que incorpora as propriedades físico-hídricas do sistema e indiretamente indica sua intensidade de drenagem é dado pela equação (4.3), rerepresentada a seguir:

$$j = \frac{\mu L^2}{\pi^2 KD}$$

Para determinação de  $j$  é necessário que seja estimada a espessura média da região de fluxo ( $D$ ).

Utilizando a equação (3.51),

$$D = D_o + \frac{h_o + h_t}{4}$$

e substituindo a espessura real ( $D_o$ ) pela espessura equivalente ( $d$ ), tem-se:

$$D = d + \frac{h_o + h_t}{4} \quad (4.54)$$

Admitindo que o lençol freático no ponto médio varie de um valor residual ( $h_o = 0.02$  m) à superfície do solo ( $h_t = 0.58$  m) e sendo  $d = 0.243$  m, tem-se:

$$D = 0.243 + \frac{0.02 + 0.58}{4} ;$$

$$D = 0.393 \text{ m.}$$

Introduzindo os valores de  $\mu$ ,  $L$ ,  $K$  e  $D$  na equação para determinação de  $j$ , tem-se:

$$j = \frac{0.05 \cdot (18.00)^2}{\pi^2 \cdot 1.00 \cdot 0.393} ;$$

$$j = 4.18 \text{ dias}$$

Os demais parâmetros de entrada da solução linear são: o tempo de duração da recarga, o limite do número de ordenadas das funções núcleo e resposta e o número de recargas com duração  $T$  que compõem cada evento.

Este número de recargas é uma consequência natural das precipitações registradas e do processo de transformação destas precipitações em recarga.

O intervalo de tempo  $T$  durante o qual a recarga é admitida com intensidade constante é igual a 1 dia e o número de ordenadas que interessam ser conhecidas foi estabelecido em função do período de observações.

No caso da solução não-linear, além dos parâmetros comuns já citados, os parâmetros específicos são: o número de pontos que compõem a malha, o número de intervalos de tempo em que há interesse em conhecer-se os valores da variável, a distância entre os pontos da malha, o intervalo de tempo adotado, o erro admitido no processo iterativo, as condições iniciais e de contorno e os valores da variável no final do primeiro intervalo de tempo, parâmetro este que possibilita dar início ao processo iterativo.

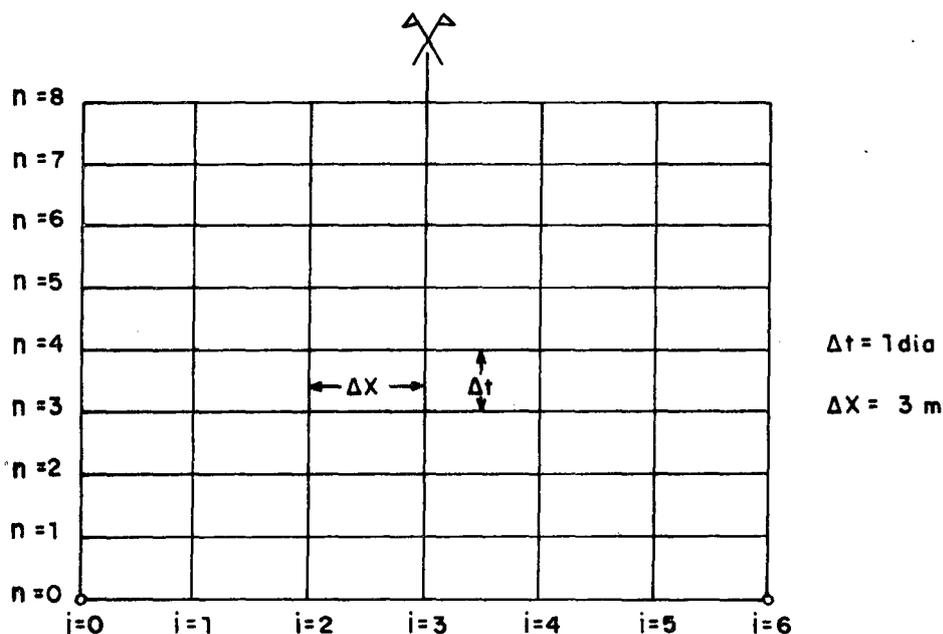


Fig. 4.8 - Malha Numérica

A estabilidade das soluções numéricas de equações diferenciais não-lineares é extremamente difícil de ser analisada por métodos analíticos.

Como esta estabilidade é uma função de  $\Delta x$  e  $\Delta t$ , estes parâmetros foram determinados por tentativas.

Mantendo os demais parâmetros constantes, o programa foi rodado para  $\Delta x = 1.5$  m,  $\Delta x = 3$  m,  $\Delta t = 0.125$  dia,  $\Delta t = 0.250$  dia e  $\Delta t = 1$  dia.

As seis combinações possíveis apresentaram resultados sem qualquer diferença significativa, tendo-se então optado por  $\Delta x = 3$  m e  $\Delta t = 1$  dia, pois estes valores conduzem a um menor custo de processamento.

O número de pontos que compõem a malha é uma consequência direta de  $\Delta x$  e do espaçamento dos drenos.

O número de intervalos de tempo até o qual há interesse em determinar os valores da variável foi estabelecido, tal qual a limitação do número de ordenadas no caso da solução linear, de forma a abranger o período de observações.

Para a estimativa das condições iniciais e de contorno fez-se o plano de referência coincidente com o nível de drenagem.

Os valores da variável nos contornos do domínio foram admitidos como invariantes no tempo e iguais a zero;

$$h_{i=0}^t = h_{i=6}^t = 0.$$

Nos períodos que antecederam os eventos 2, 3 e 4, o lençol freático posicionava-se praticamente ao nível dos drenos. Em vista disso, admitiu-se como condição inicial os seguintes valores residuais de carga hidráulica para os pontos internos da malha:

$$\begin{array}{ll} t=0 & t=0 \\ h_{i=1} = 1 \text{ mm}, & h_{i=4} = 2 \text{ mm}, \quad e \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} t=0 & t=0 \\ h_{i=2} = 2 \text{ mm}, & h_{i=5} = 1 \text{ mm}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t=0 \\ h_{i=3} = 3 \text{ mm}, \end{array}$$

No caso do evento 1 a posição do lençol freático foi registrada aproximadamente 28 horas antes do início da precipitação. Considerando o rebaixamento neste período, estimou-se a seguinte condição inicial para este evento:

$$\begin{array}{ll} t=0 & t=0 \\ h_{i=1} = 10 \text{ mm}, & h_{i=4} = 20 \text{ mm}, \quad e \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} t=0 & t=0 \\ h_{i=2} = 20 \text{ mm}, & h_{i=5} = 10 \text{ mm}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t=0 \\ h_{i=3} = 50 \text{ mm}, \end{array}$$

O esquema numérico utilizado para solução da equação não-linear é convergente, com o que os valores arbitrados para a variável  $h$  no final do primeiro intervalo de tempo influem unicamente no número de iterações realizadas até a ob-

tenção dos valores corretos.

Assim sendo, optou-se por  $h_i^{n+1*} = h_i^n$ .

Os valores calculados serão admitidos como corretos quando a equação que segue for satisfeita para  $\epsilon=1$ .

$$\frac{|h_i^{n+1} - h_i^{n+1*}|}{h_i^{n+1}} \cdot 100 \leq \epsilon$$

---

5 - RESULTADOS

---

## 5.1 - INTRODUÇÃO

As funções simuladas pelos modelos matemáticos, descarga contra o tempo e carga hidráulica no ponto médio contra o tempo, encontram-se graficadas juntamente com as respectivas curvas observadas nas figuras 5.1 à 5.8.

Cada evento é acompanhado do respectivo histograma de recarga.

Os valores das variáveis foram calculados no final de cada intervalo de 1 dia, ao longo de um período de oito dias contados a partir do início da recarga.

Este período foi estabelecido de forma a abranger as observações feitas em cada evento isoladamente.

Sempre que as observações não contemplaram os picos das funções, estes trechos das curvas foram traçados à sentimento.

Para isso admitiu-se que o sistema produz curvas naturalmente suaves.

Os valores observados encontram-se nas tabelas A1 à A5.

Nas tabelas que apresentam os valores de carga hidráulica constam a hora e a data das observações e a distância de cada piezômetro ao dreno.

O plano de referência assumido é coincidente com o nível de drenagem.

Como condição antecedente entenda-se a última observação feita antes do início da precipitação.

No caso dos eventos 2, 3 e 4 a condição antecedente indica um lençol freático horizontal e ao nível dos drenos. Esta situação evidentemente não é real, e os valores nulos devem ser encarados como indicadores de ordem de grandeza.

A tabela A5 apresenta os valores de descarga específica, registrados paralelamente às determinações do perfil da linha d'água.

As condições antecedentes indicadas devem ser encaradas da mesma forma.

Como para fins de projeto o ponto médio entre os drenos é o ponto de maior interesse, o confronto entre os valores de carga hidráulica calculados e observados restringiu-se a este ponto do espaço.

As leituras nos piezômetros localizados a 9 m do dreno onde foram feitas as medições de descarga não confirmaram as condições teóricas de simetria. Esta situação é atribuída a não homogeneidade das condições de campo, e para plotagem dos

valores observados no ponto médio optou-se pela média de cada par de observações feitas nestes dois piezômetros.

Os valores calculados pelos dois modelos encontram-se impressos nas listagens de computador.

No caso do modelo não-linear são apresentados os valores de carga hidráulica em cada ponto definido pela malha numérica ( $i=0,1\dots6$ ), no final de cada um dos oito intervalos de tempo considerados. Para  $i=0$  e  $i=6$  os valores nulos caracterizam as condições de contorno impostas para todo o processo.

Na primeira coluna estão os valores de descarga específica, calculados utilizando os valores de carga hidráulica no ponto  $i=3$ .

Apesar de restringir o interesse ao ponto médio entre os drenos, o esquema numérico implica que para a determinação da carga hidráulica no ponto  $i=3$  é necessário, neste caso, determiná-la nos pontos  $i=5$  e  $i=4$ .

Os valores em  $i=1$  e  $i=2$  ratificam a correta aplicação do modelo, já que tendo em vista a teórica homogeneidade do meio e as condições de contorno adotadas os pontos equidistantes do dreno devem ter o mesmo valor de carga hidráulica.

Em todos os eventos e em qualquer tempo obteve-se  $i_1=i_5$  e  $i_2=i_4$ .

No caso do modelo linear são apresentadas as ordenadas

das funções núcleo e resposta das variáveis carga hidráulica no ponto médio e descarga no final dos oito intervalos de tempo considerados.

Nas listagens do computador a primeira e a terceira colunas representam as funções núcleo, a segunda e a quarta as funções resposta.

## 5.2 - ANÁLISE E COMENTÁRIOS

Os custos envolvidos para aplicação dos modelos podem ser divididos em duas parcelas: custos para determinação dos parâmetros e custos computacionais.

Como os parâmetros de campo exigidos pelos dois modelos são os mesmos, esta parcela não influi na diferença entre os custos totais que acompanham a aplicação de cada modelo.

A contabilização dos custos computacionais é feita considerando o tempo de processamento, tempo de entrada e saída de dados, número de páginas emitidas no relatório e número de cartões lidos. O custo para aplicação do modelo linear foi de Cr\$ 3 480 e para aplicação do modelo não-linear Cr\$ 3 978.

Estes valores correspondem, aproximadamente, a 1/10 do valor da ORTN de maio/85.

A metodologia adotada no trabalho para solução numérica da equação diferencial faz com que o modelo não-linear fi-

que vinculado ao computador. Esta aparente desvantagem, em termos de custos e possibilidade de aplicação em projetos correntes, desaparece tendo em vista que a parcela do custo total devida à utilização do computador é insignificante.

Isto faz com que o confronto entre os modelos concentre-se nos resultados propriamente ditos. A análise destes resultados é feita a seguir.

Na plotagem dos valores simulados pelo modelo linear, correspondentes ao evento 1, as condições registradas antes do início da precipitação não foram consideradas.

Estes valores foram propagados no tempo utilizando as equações de recessão, e os resultados obtidos foram suficientemente baixos para que pudessem ser desprezados sem prejuízo aos resultados finais.

No caso dos eventos 1 e 2 o lençol freático subiu até a superfície do solo, originando a formação de uma lâmina.

A baixa qualidade da simulação dos picos de carga hidráulica no ponto médio, nestes eventos, deve-se a este extravasamento do lençol freático. Esta justificativa é ratificada pela boa simulação dos picos desta variável nos eventos 3 e 4.

Estas situações foram verificadas pelos dois modelos.

A defasagem temporal entre os picos calculados e observados que se verifica no evento 3 caracteriza um erro na estimativa da recarga.

Na análise da variável descarga o confronto das funções calculadas pelo modelo linear e observadas mostra as funções calculadas com gradientes bem mais significativos que as observadas, principalmente durante a ocorrência da recarga e no dia imediatamente posterior.

Durante os períodos de recessão, os gradientes são naturalmente mais amenos, mantendo-se os gradientes das funções calculadas mais acentuados.

A análise de sensibilidade do parâmetro "j" em relação à variável descarga mostra que quanto menor o seu valor mais rapidamente o sistema busca uma condição de regime permanente, e mais acentuada é a intensidade de drenagem após cessada a recarga.

Esta situação indica que os valores excessivamente altos de descarga durante a ocorrência da recarga são uma consequência da subestimação do parâmetro "j", que é atribuída a um erro para mais na estimativa da transmissividade.

Isto é confirmado nos períodos de recessão, onde os valores calculados decrescem muito mais rapidamente e as curvas mostram uma clara tendência em cruzarem-se.

A simulação da descarga pelo modelo não-linear mostrou-se plenamente satisfatória.

Os picos das funções foram, em geral, bem reproduzidos, observando-se uma superestimação dos valores de descarga ao longo dos períodos de recessão.

As diferenças entre os valores absolutos calculados e observados são praticamente desprezíveis em termos de engenharia de drenagem, e os gradientes das funções são semelhantes tanto nos períodos de ascensão como recessão.

A simulação dos picos de descarga dos eventos 1 e 2 foi feita utilizando os respectivos valores simulados de carga hidráulica no ponto médio entre os drenos.

Como estes valores são irreais, já que superam a própria espessura do perfil do solo, as descargas correspondentes deveriam superar os valores observados.

No entanto isto não ocorreu, e a simulação dos picos de descarga dos eventos 1 e 2 foi de excelente qualidade.

Como seria incoerente, neste caso, admitir-se que a transmissividade tenha sido subestimada, os resultados obtidos são atribuídos a uma subestimação do gradiente hidráulico nos períodos de ascensão.

Paralelamente os picos de descarga dos eventos 3 e 4, que foram calculados utilizando valores corretos de carga hidráulica, foram subestimados.

Estes resultados ratificam um erro na estimativa do gradiente hidráulico durante os períodos de ocorrência de recarga.

Nos períodos de recessão as descargas simuladas superaram os valores observados, permitindo que se conclua que nes-

tes estágios os gradientes foram superestimados.

É importante salientar que os prejuízos à simulação, decorrentes destes erros, foram muito pouco significativos. Na análise da variável carga hidráulica no ponto médio, a observação das curvas calculadas pelo modelo linear mostra uma boa simulação dos picos dos eventos 3 e 4, e valores excessivamente altos na simulação dos eventos 1 e 2.

Os resultados para os eventos 1 e 2 já foram comentados anteriormente, e devem-se à saída do lençol freático para a superfície do solo.

Para que se analise a boa simulação dos picos dos eventos 3 e 4, deve-se considerar a sensibilidade do parâmetro "j" com relação à variável carga hidráulica.

No caso da descarga, a condição de equilíbrio ( $t \rightarrow \infty$ ) é dada pela equação que segue:

$$q = R \quad (5.1)$$

Pela equação (5.1) temos que "j" influi unicamente no tempo necessário para que o sistema se aproxime de sua condição de equilíbrio, e não em seu valor absoluto.

No caso da carga hidráulica no ponto médio a condição de equilíbrio é dada pela equação que segue:

$$h_m = \frac{\pi^2}{8} \frac{R}{\mu} j \quad (5.2)$$

Pela equação (5.2) temos que o valor de  $hm$  quando  $t \rightarrow \infty$  é uma função de "j".

Isto faz com que, durante os períodos de ascensão, quanto menor o valor de "j" menores sejam os valores de carga hidráulica.

Como o valor de "j" utilizado na simulação foi subestimado, esta relação entre o parâmetro e a variável de certa forma explica a boa simulação da carga hidráulica durante os períodos de ascensão nos eventos 3 e 4.

Após cessada a recarga o menor valor de "j" conduz a um rebaixamento mais rápido do lençol freático.

Com isso os gradientes das funções calculadas deveriam ser mais acentuados do que os verificados nas curvas observadas.

Confrontando as curvas temos que o modelo linear subestimou o rebaixamento do lençol freático, os gradientes das curvas são bastante semelhantes e não verifica-se uma tendência de reversão desta situação.

A simulação da carga hidráulica no ponto médio através do modelo não-linear foi, tal qual a simulação da descarga, de excelente qualidade.

Exceção aos picos dos eventos 1 e 2, o confronto das curvas observadas e calculadas mostra um ótimo ajuste ao longo dos períodos de ascensão e nos quatro ou cinco primeiros

dias após cessada a recarga.

Observa-se uma tendência em subestimar o rebaixamento do lençol freático a partir do sexto dia, quando a carga hidráulica é pouco significativa.

PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO = 1)  
 \*\*\*\*\*

1. NRO. DE PONTOS	LI =	7																	
2. NRO. DE INTERV. DE TEMPO	LN =	8																	
3. DIST. ENTRE PONTOS(MM)	DX =	3000																	
4. INTERVALO DE TEMPO(DIA)	DT =	1.000																	
5. POROSIDADE	MU =	0.050																	
6. CONDUTIV. HIDRAULICA(MM/DIA)	K =	1000																	
7. ERRO ADMISSIVEL(%)	E =	1.000																	
8. ESPESSURA EQUIVALENTE(MM)	D =	243																	
9. PRIMEIRA ITERACAO(MM)	VI(I)	0	10	20	50	20	10	0											
10. CONDICUES INICIAIS(MM)	VN(I)	0	10	20	50	20	10	0											
11. VALORES DE RECARGA(MM/DIA)	R(N)	49.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

N.	DESCARGA (MM/DIA)	**** I= 0	C A R G A I= 1	H I D R A U L I C A (MM) I= 2	I= 3	I= 4	**** I= 5	I= 6
1.	5.42	0.00	681.97	888.23	925.19	888.23	681.97	0.00
2.	3.11	0.00	280.23	536.28	629.72	536.28	280.23	0.00
3.	1.67	0.00	218.50	348.43	394.72	348.43	218.50	0.00
4.	1.13	0.00	152.71	255.90	290.04	255.90	152.71	0.00
5.	0.82	0.00	115.98	193.87	221.53	193.87	115.98	0.00
6.	0.61	0.00	90.32	152.03	173.47	152.03	90.32	0.00
7.	0.48	0.00	71.97	121.54	139.01	121.54	71.97	0.00
8.	0.38	0.00	58.23	98.70	112.99	98.70	58.23	0.00

PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO= 1)  
 \*\*\*\*\*

1. TEMPO DE RECARGA(DIA) TR = 1.000  
 2. ARMAZENAMENTO(DIA) J = 4.180  
 3. POROSIDADE MU = 0.050  
 4. LIMITE DE ORDENADAS LI = 8  
 5. NRO. DE RECARGAS LR = 1  
 6. VALORES DE RECARGA(MM/DIA) R(K) 49.20

	CHUO DESCARGA (MM/DIA)	HID.RESULTANTE DE DESCARGA (MM/DIA)	CHUO CARGA HIDRAULICA (MM)	HID.RESULTANTE DE CARGA HIDRAULICA (MM)
1.	0.332945	16.380911	19.802930	974.304165
2.	0.145095	7.138681	17.426552	857.386362
3.	0.107955	5.311406	13.988580	688.238125
4.	0.084265	4.145849	11.043763	543.353131
5.	0.065252	3.259622	8.697646	427.924202
6.	0.052146	2.565595	6.847476	336.895816
7.	0.041950	2.019659	5.390590	265.217022
8.	0.032316	1.589930	4.243641	208.787156

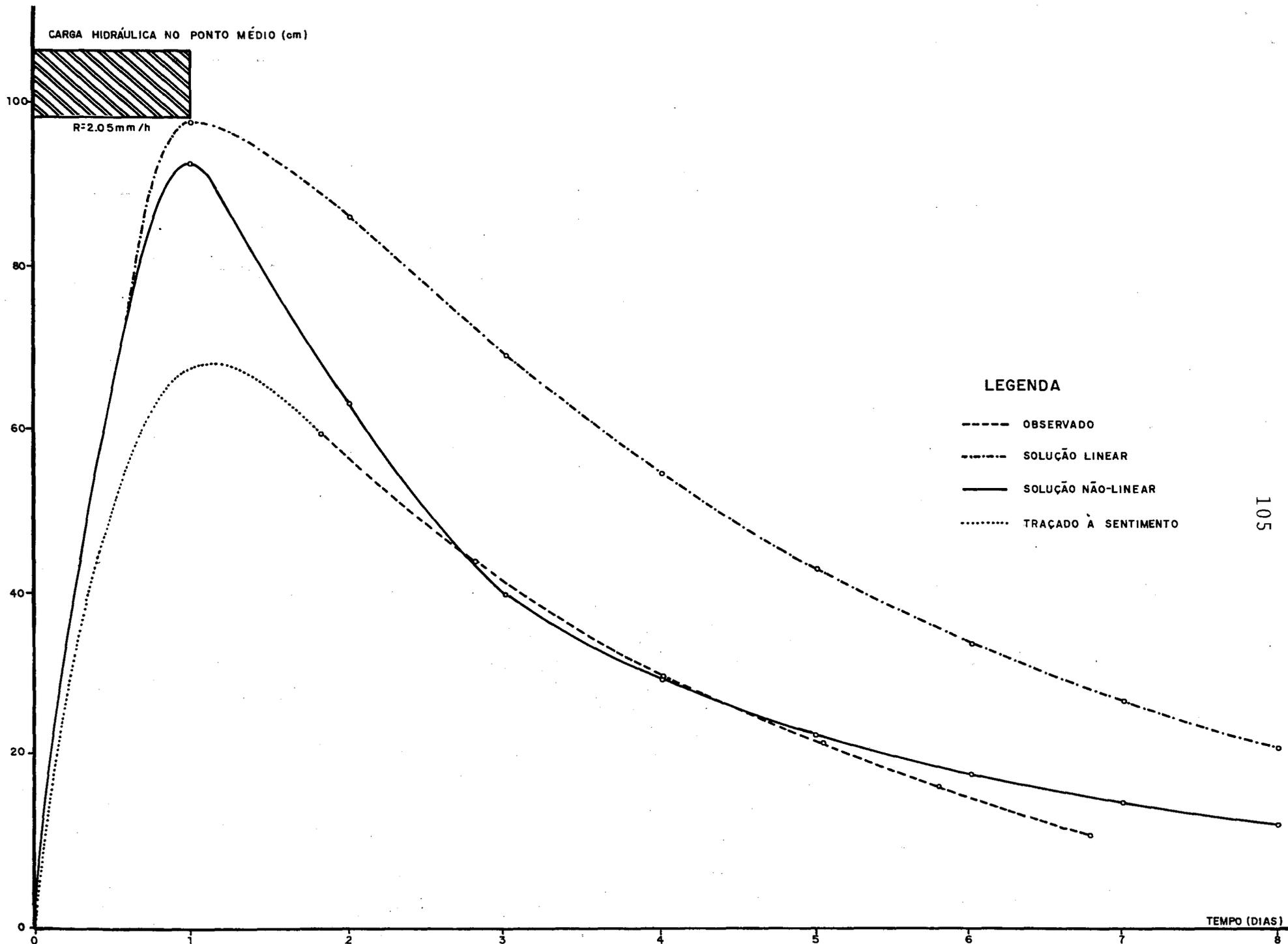


FIG. 5.1 - VALORES DE CARGA HIDRÁULICA OBSERVADOS E CALCULADOS - EVENTO 1

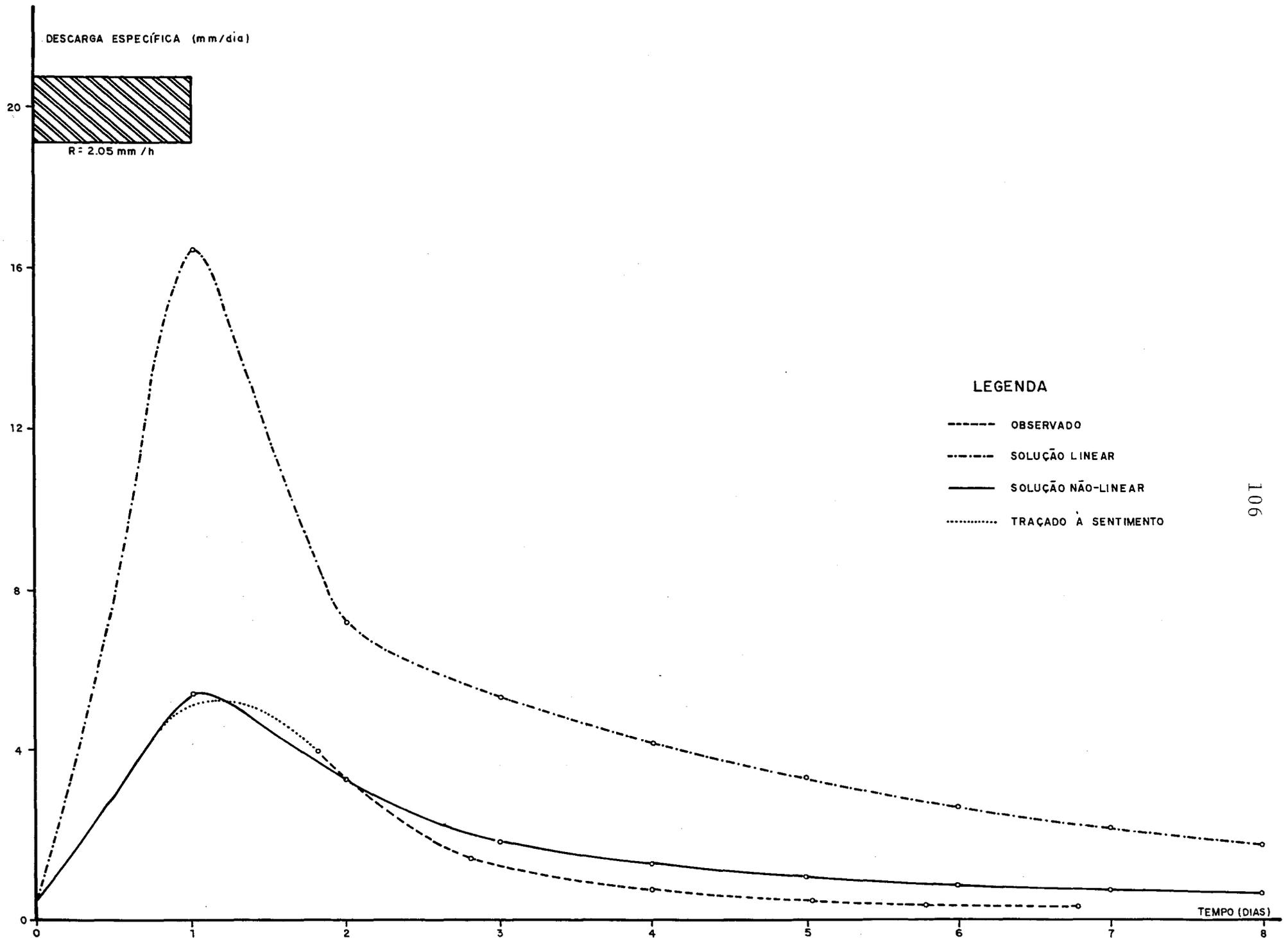


FIG. 5.2 - VALORES DE DESCARGA OBSERVADOS E CALCULADOS - EVENTO 1

PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO = 2)

\*\*\*\*\*

1. NRO. DE PONTOS	LI =	7								
2. NRO. DE INTERV. DE TEMPO	LN =	8								
3. DIST. ENTRE PONTOS(MM)	DX =	3000								
4. INTERVALO DE TEMPO(DIA)	DT =	1.000								
5. POROSIDADE	MU =	0.050								
6. CONDUATIV. HIDRAULICA(MM/DIA)	K =	1000								
7. ERRO ADMISSIVEL(%)	E =	1.000								
8. ESPESSURA EQUIVALENTE(MM)	D =	243								
9. PRIMEIRA ITERACAO(MM)	VI(I)	0	1	2	3	2	1	0		
10. CONDICIOES INICIAIS(MM)	VN(I)	0	1	2	3	2	1	0		
11. VALORES DE RECARGA(MM/DIA)	R(N)	19.40	13.70	25.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+									
N.	DESCARGA	***** C A R G A H I D R A U L I C A (MM) *****							
I	(MM/DIA)	I= 0	I= 1	I= 2	I= 3	I= 4	I= 5	I= 6	
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+									
1.	1.57	0.00	292.85	363.22	376.89	363.22	292.85	0.00	
2.	2.60	0.00	331.31	502.86	552.08	502.86	331.31	0.00	
3.	4.44	0.00	503.83	736.77	807.59	736.77	503.83	0.00	
4.	2.46	0.00	265.64	464.73	530.62	464.73	265.64	0.00	
5.	1.48	0.00	193.46	316.08	360.92	316.08	193.46	0.00	
6.	1.02	0.00	140.34	234.91	266.42	234.91	140.34	0.00	
7.	0.75	0.00	107.43	179.91	205.56	179.91	107.43	0.00	
8.	0.57	0.00	84.28	142.01	162.13	142.01	84.28	0.00	

PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO= 2)

\*\*\*\*\*

1. TEMPO DE RECARGA(DIA)	TR =	1.000		
2. ARMAZENAMENTO(DIA)	J =	4.180		
3. POROSIDADE	MU =	0.050		
4. LIMITE DE ORDENADAS	LI =	8		
5. NRO. DE RECARGAS	LR =	3		
6. VALORES DE RECARGA(MM/DIA)	R(K)	19.40	13.70	25.05

	QHU3 DESCARGA (MM/DIA)	HID.RESULTANTE DE DESCARGA (MM/DIA)	QHU3 CARGA HIDRAULICA (MM)	HID.RESULTANTE DE CARGA HIDRAULICA (MM)
1.	0.332945	6.459140	19.802930	384.176846
2.	0.145095	7.376197	17.426552	609.375254
3.	0.107955	12.422419	13.983580	1006.185612
4.	0.094265	6.748368	11.043763	842.427671
5.	0.066252	5.144014	8.697646	670.447814
6.	0.052145	4.030140	6.847476	528.845047
7.	0.041050	3.170398	5.390590	416.263906
8.	0.032316	2.495572	4.243641	327.706996

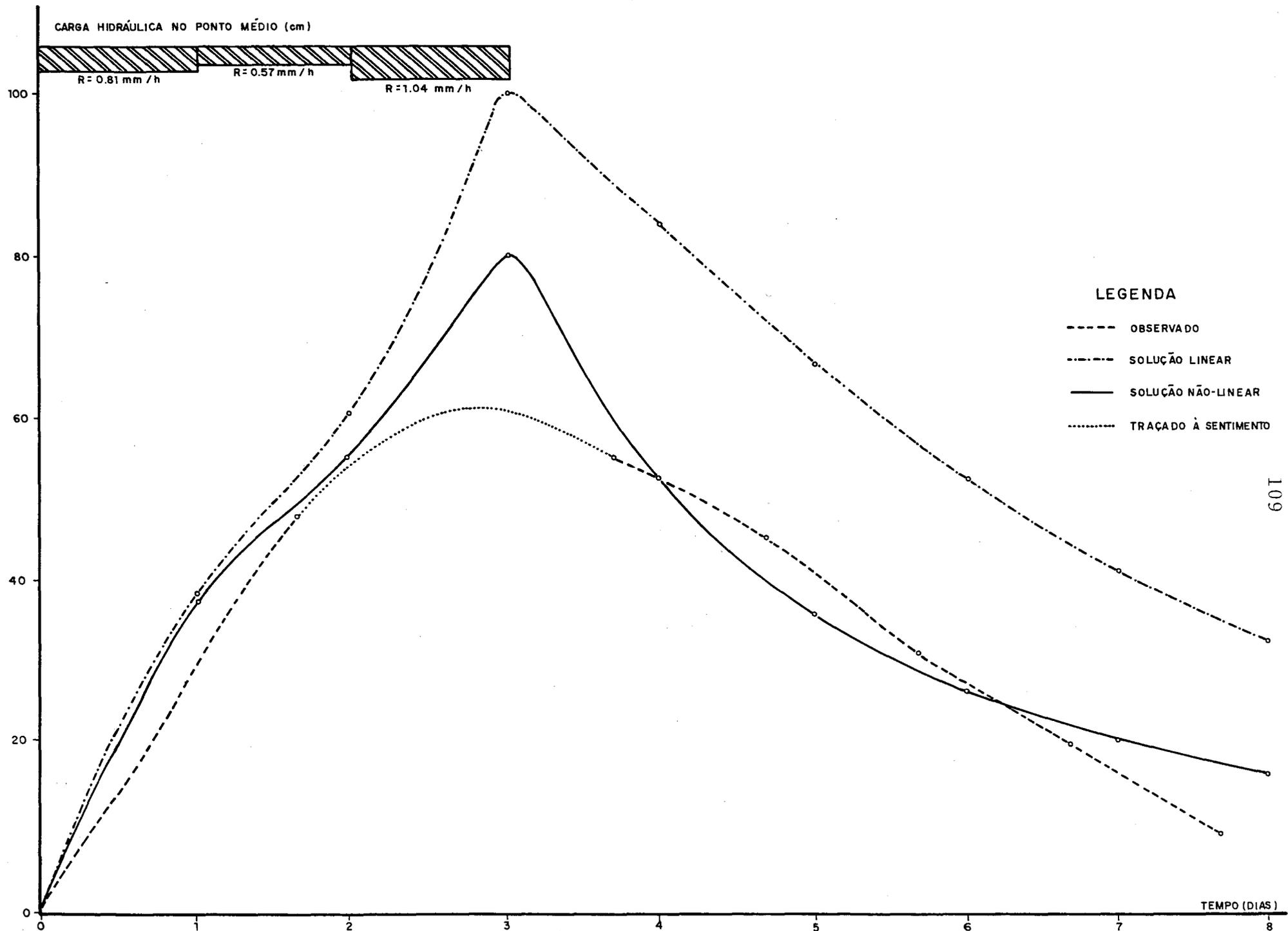


FIG. 5.3 - VALORES DE CARGA HIDRÁULICA OBSERVADOS E CALCULADOS - EVENTO 2

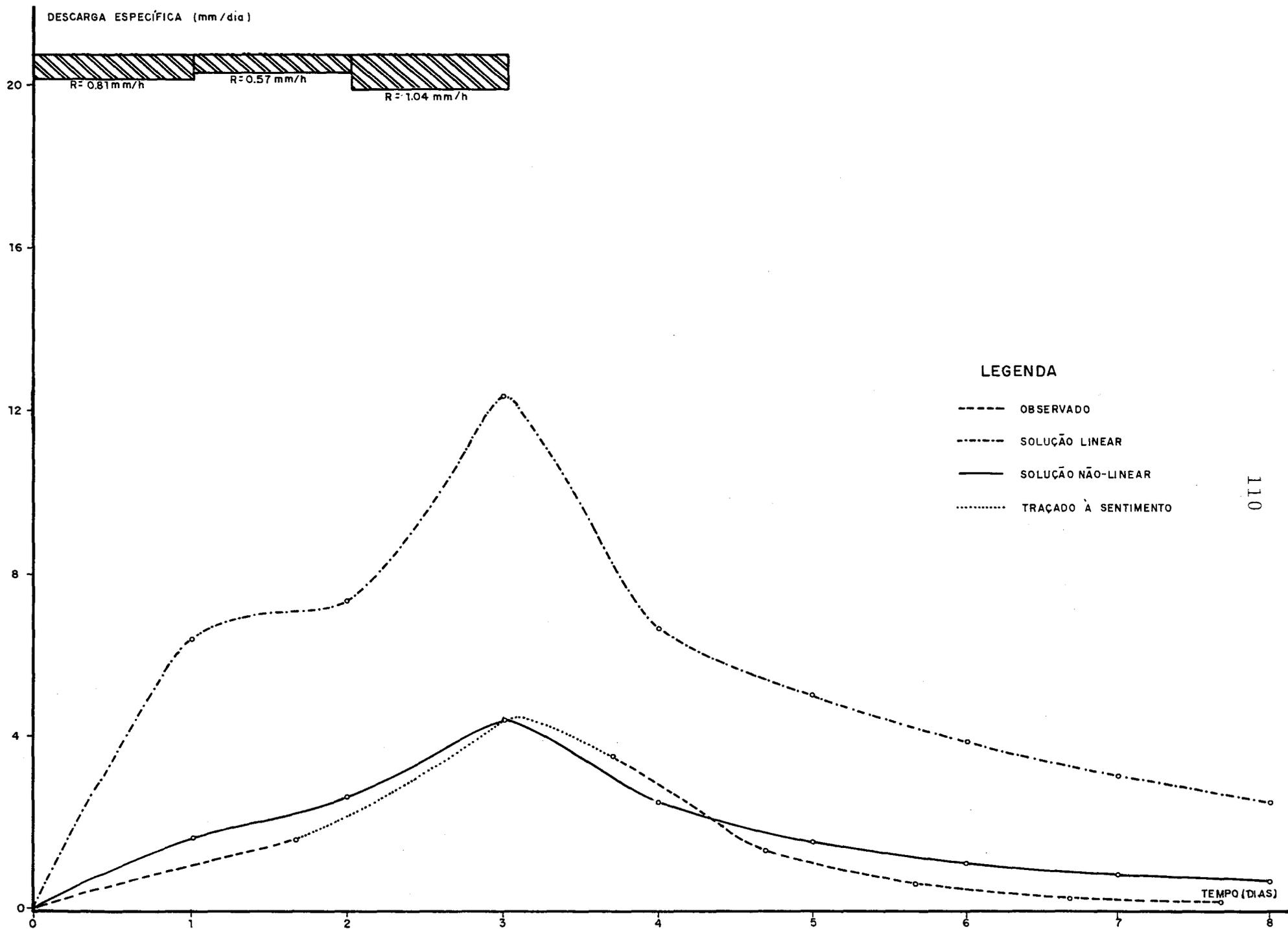


FIG. 5.4 - VALORES DE DESCARGA OBSERVADOS E CALCULADOS - EVENTO 2

PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO = 3)

\*\*\*\*\*

1. NRO. DE PONTOS	LI =	7								
2. NRO. DE INTERV. DE TEMPO	LN =	8								
3. DIST. ENTRE PONTOS(MM)	DX =	3000								
4. INTERVALO DE TEMPO(DIA)	DT =	1.000								
5. POROSIDADE	MU =	0.050								
6. CONDUCTIV. HIDRAULICA(MM/DIA)	K =	1000								
7. ERRO ADMISSIVEL(%)	E =	1.000								
8. ESPESSURA EQUIVALENTE(MM)	D =	243								
9. PRIMEIRA ITERACAO(MM)	VI(I)	0	1	2	3	2	1	0		
10. CONDICOGES INICIAIS(MM)	VN(I)	0	1	2	3	2	1	0		
11. VALORES DE RECARGA(MM/DIA)	R(M)	25.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

N.	DESCARGA (MM/DIA)	***** I=0	C A R G A I=1	H I D R A U L I C A (MM) I=2	I=3	I=4	***** I=5	I=6
1.	2.16	0.00	369.49	462.72	481.50	462.72	369.49	0.00
2.	1.60	0.00	187.34	336.49	383.19	336.49	187.34	0.00
3.	1.07	0.00	146.43	241.26	277.48	241.26	146.43	0.00
4.	0.77	0.00	110.60	185.99	211.08	185.99	110.60	0.00
5.	0.59	0.00	86.74	145.83	166.83	145.83	86.74	0.00
6.	0.46	0.00	69.25	117.09	133.86	117.09	69.25	0.00
7.	0.36	0.00	56.18	95.26	109.10	95.26	56.18	0.00
8.	0.29	0.00	46.09	78.39	89.85	78.39	46.09	0.00

PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO= 3)

\*\*\*\*\*

1. TEMPO DE RECARGA(DIA)	TR =	1.000
2. ARMAZENAMENTO(DIA)	J =	4.180
3. POROSIDADE	MU =	0.050
4. LIMITE DE ORDENADAS	LI =	3
5. NRO. DE RECARGAS	LR =	1
6. VALORES DE RECARGA(MM/DIA)	R(K)	25.00

	QHU3 DESCARGA (MM/DIA)	HID. RESULTANTE DE DESCARGA (MM/DIA)	QHU3 CARGA HIDRAULICA (MM)	HID. RESULTANTE DE CARGA HIDRAULICA (MM)
1.	0.332945	8.323634	19.802930	495.073255
2.	0.145095	3.627379	17.426552	435.663802
3.	0.107955	2.698885	13.988580	349.714495
4.	0.084265	2.106630	11.043763	276.094071
5.	0.068252	1.656312	8.697646	217.441160
6.	0.052148	1.303656	6.847476	171.186898
7.	0.041050	1.026249	5.390590	134.764747
8.	0.032316	0.807891	4.243641	106.091035

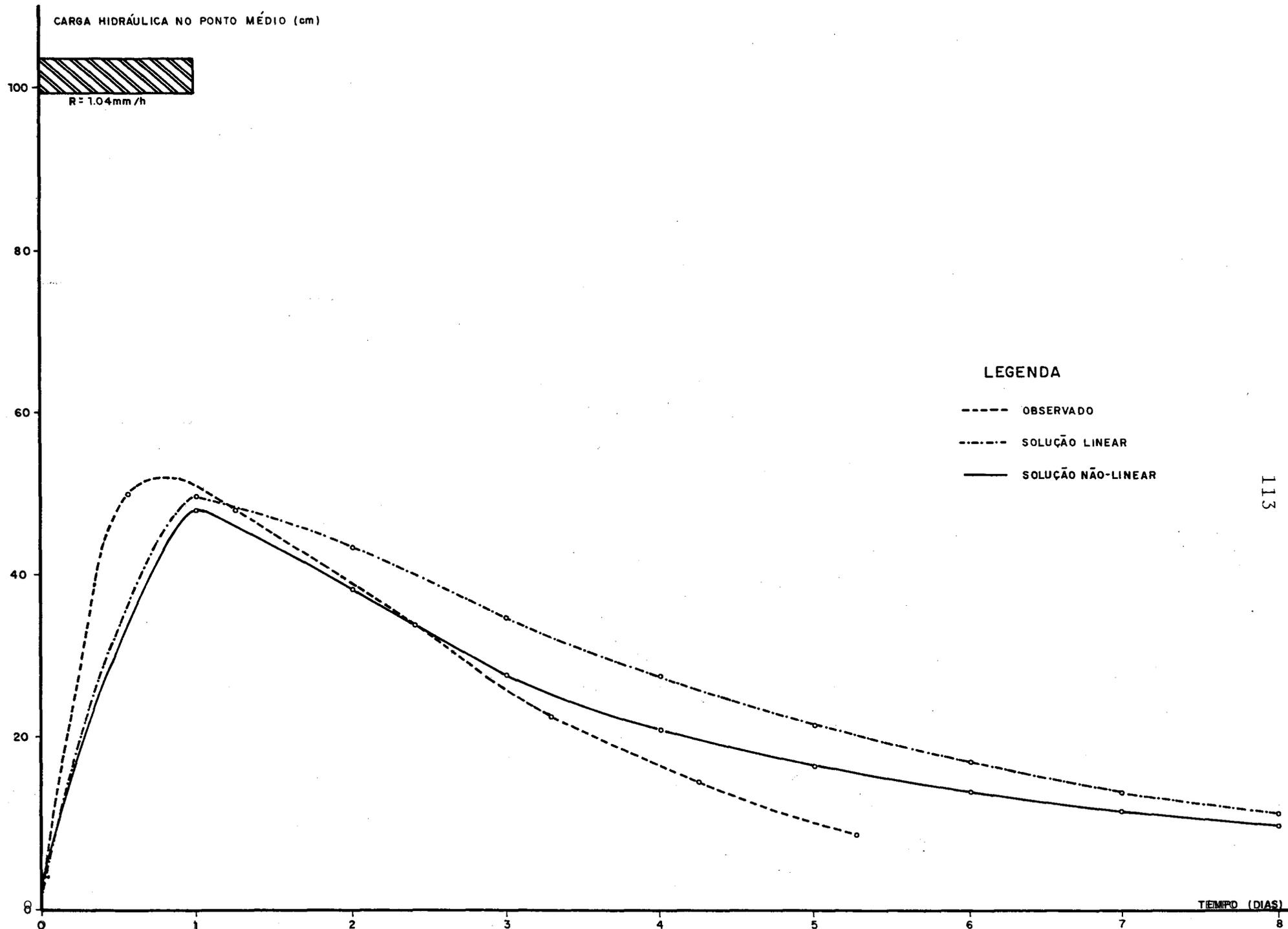


FIG. 5.5 - VALORES DE CARGA HIDRÁULICA OBSERVADOS E CALCULADOS - EVENTO 3

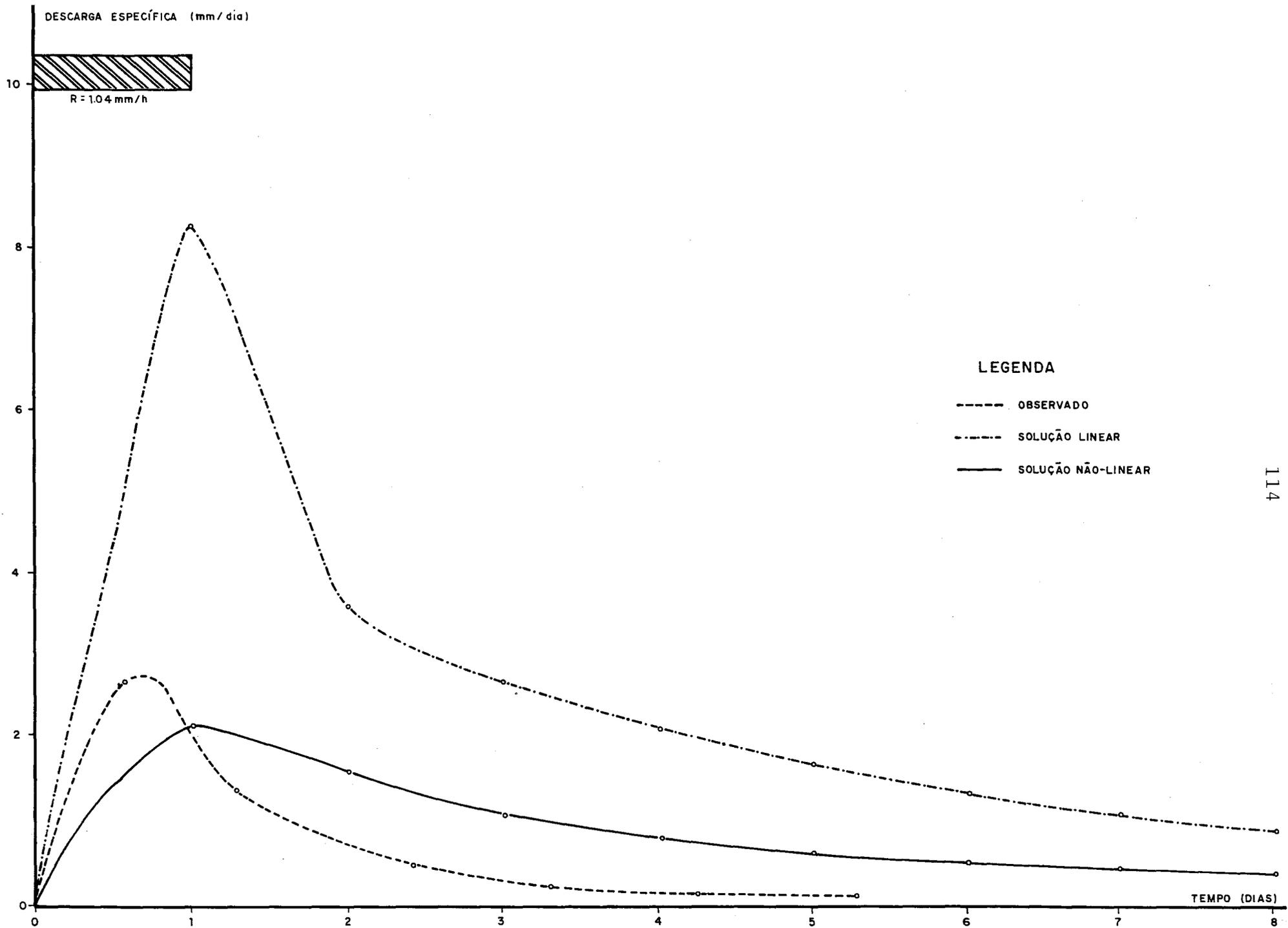


FIG. 5.6 - VALORES DE DESCARGA OBSERVADOS E CALCULADOS - EVENTO 3

PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO = 4)  
 \*\*\*\*\*

1. NRO. DE PONTOS	LI =	7																	
2. NRO. DE INTERV. DE TEMPO	LN =	8																	
3. DIST. ENTRE PONTOS(MM)	DX =	3000																	
4. INTERVALO DE TEMPO(DIA)	DT =	1.000																	
5. POROSIDADE	MU =	0.050																	
6. CONDUATIV. HIDRAULICA(MM/DIA)	K =	1000																	
7. ERRO ADMISSIVEL(%)	E =	1.000																	
8. ESPESSURA EQUIVALENTE(MM)	D =	243																	
9. PRIMEIRA ITERACAO(MM)	V(I)	0	1	2	3	2	1	0											
10. CONDICIOES INICIAIS(MM)	VN(I)	0	1	2	3	2	1	0											
11. VALORES DE RECARGA(MM/DIA)	R(N)	33.00	0.00	0.00	0.00	4.00	0.00	0.00											

N.	DESCARGA (MM/DIA)	***** I= 0	C A R G A I= 1	H I D R A U L I C A (MM) I= 2	I= 3	I= 4	***** I= 5	I= 6
1.	3.10	0.00	474.83	601.54	628.40	601.54	474.83	0.00
2.	2.11	0.00	223.26	412.06	473.20	412.06	223.26	0.00
3.	1.31	0.00	174.42	283.84	325.82	283.84	174.42	0.00
4.	0.91	0.00	127.97	214.90	243.29	214.90	127.97	0.00
5.	1.00	0.00	157.08	238.60	262.91	238.60	157.08	0.00
6.	0.76	0.00	109.88	184.48	203.91	184.48	109.88	0.00
7.	0.58	0.00	86.09	144.68	165.58	144.68	86.09	0.00
8.	0.45	0.00	68.75	116.27	132.91	116.27	68.75	0.00

PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO= 4 )  
 \*\*\*\*\*

1. TEMPO DE RECARGA(DIA)	TR =	1.000					
2. ARMAZENAMENTO(DIA)	J =	4.180					
3. POROSIDADE	MU =	0.050					
4. LIMITE DE ORDENADAS	LI =	8					
5. NRO. DE RECARGAS	LR =	5					
6. VALORES DE RECARGA(MM/DIA)	R(K)	33.00	0.00	0.00	0.00	4.00	

	CHUB DESCARGA (MM/DIA)	HID.RESULTANTE DE DESCARGA (MM/DIA)	CHUB CARGA HIDRAULICA (MM)	HID.RESULTANTE DE CARGA HIDRAULICA (MM)
1.	0.332945	10.987197	19.802930	653.496696
2.	0.145093	4.788140	17.426552	575.076219
3.	0.107953	3.562528	13.988580	461.623133
4.	0.084265	2.780752	11.043763	364.444173
5.	0.066252	3.518113	8.697646	366.234051
6.	0.052146	2.301207	6.847476	295.672914
7.	0.041050	1.786471	5.390590	233.843785
8.	0.032316	1.403477	4.243541	184.215217

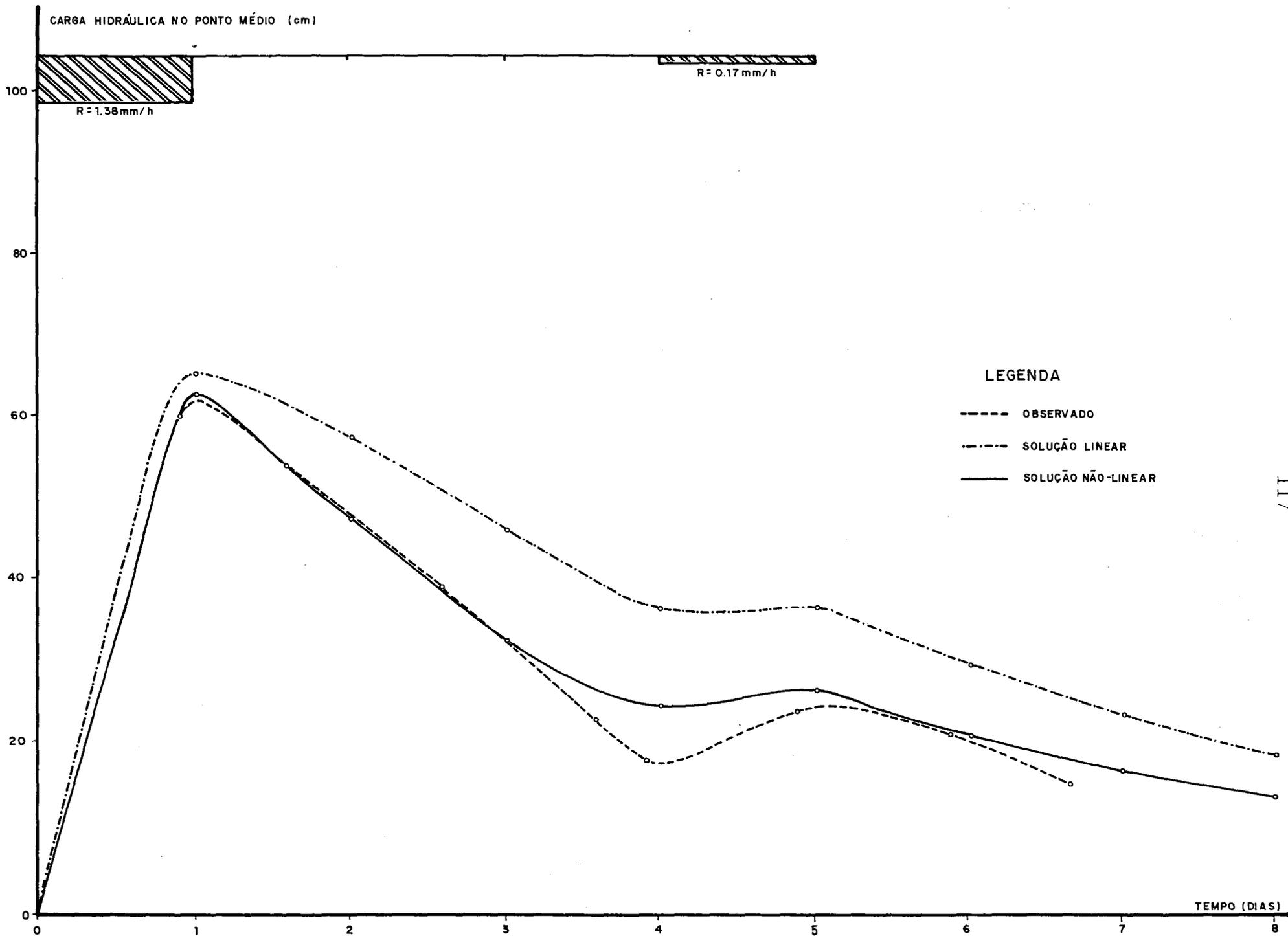


FIG. 5.7 - VALORES DE CARGA HIDRÁULICA OBSERVADOS E CALCULADOS - EVENTO 4

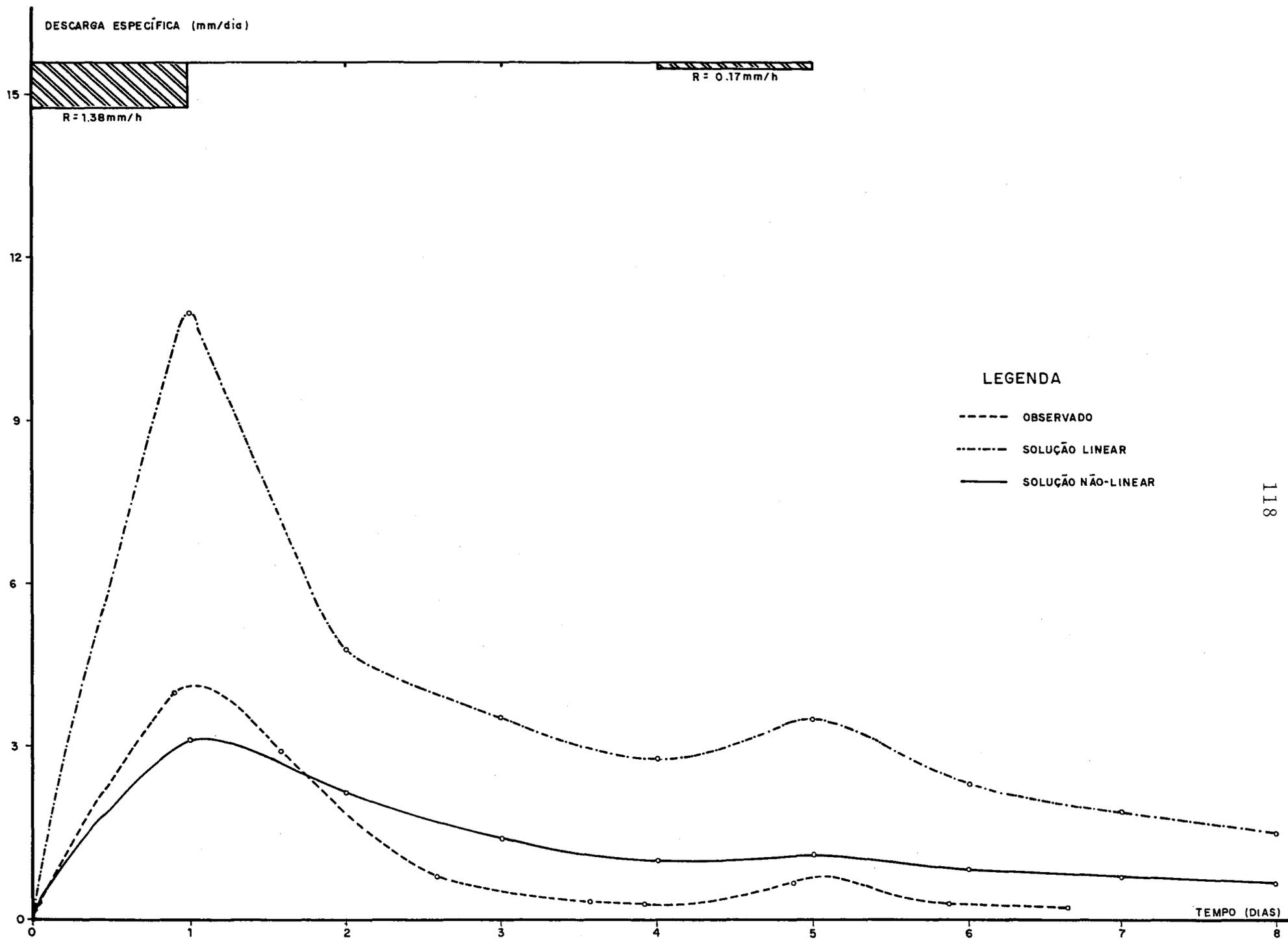


FIG. 5.8 - VALORES DE DESCARGA OBSERVADOS E CALCULADOS - EVENTO 4

---

6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

---

A fim de que se pudesse concluir pela metodologia mais adequada para aplicação no dimensionamento de sistemas de drenagem subsuperficial nas condições da várzea arroeira do Rio Grande do Sul, os modelos matemáticos utilizados neste trabalho foram analisados quanto aos seguintes aspectos: qualidade da simulação, custos, vinculação ao computador e possibilidade de aplicação prática.

A análise dos custos mostrou que quanto a este aspecto os modelos estão nivelados.

O processo iterativo utilizado na solução numérica faz com que o modelo não-linear esteja ligado ao computador, enquanto o modelo linear pode ser aplicado utilizando tabelas disponíveis na literatura.

Tendo em vista o baixo custo computacional a possibilidade de solução manual das equações de Kraijenhoff não altera a análise de custos, e igualmente não limita a aplicação do modelo não-linear.

Com isso o elemento decisivo para que fosse avaliado o comportamento dos modelos foi a qualidade da simulação, onde o modelo não-linear mostrou-se superior ao modelo linear.

A análise dos resultados mostra que a simulação perde em qualidade nos ramos de recessão, onde observa-se uma tendência em subestimar o rebaixamento do lençol freático.

Esta situação é atribuída ao fato dos modelos assumirem o lençol freático como limite superior da região de fluxo, e conseqüentemente desprezarem a capacidade da zona não saturada em transmitir água aos drenos.

Esta conclusão é bastante razoável, na medida em que nos períodos de recessão cresce a relação entre as transmissividades das zonas não saturada e saturada e conseqüentemente menos válida é a equação de Boussinesq.

Outra possibilidade de justificar a subestimação do rebaixamento do lençol freático pelos modelos seria admitir-se que a recarga tenha sido superestimada, já que o balanço de volume realizado para transformação da precipitação em recarga desprezou a evapotranspiração.

Todavia esta simplificação foi favorecida em muito pelas condições meteorológicas verificadas ao longo do período de observações, com o que desprezar o fluxo não saturado foi uma fonte de erro mais significativa do que desprezar a evapotranspiração.

O fato de assumir um valor constante de porosidade drenável não originou erros apreciáveis, o que é atribuído ao fato deste parâmetro ter sido estimado a partir de observações diretas sobre o comportamento do sistema. Isto permitiu a uti

lização de um valor bastante consistente e representativo de todo o perfil.

Em termos de engenharia de drenagem a simulação através do modelo não-linear pode ser considerada de excelente qualidade, permitindo que se conclua que a metodologia não-linear é adequada à geometria de nossa várzea e constitui uma ferramenta computacional de baixíssimo custo que pode ser aplicada no dimensionamento de sistemas de drenagem subsuperficial a serem implantados nestas áreas.

A superioridade do modelo não-linear sobre o linear é uma decorrência da não-linearidade do processo, caracterizada neste caso pela variação significativa da espessura da zona saturada ao longo do tempo.

Enquanto o modelo linear assume uma transmissividade constante o modelo não-linear reavalia a espessura da região de fluxo em cada intervalo de tempo, o que o torna mais fiel às condições físicas do sistema e conseqüentemente mais correto.

Sua aplicação no dimensionamento de sistemas deve ser feita através de um processo de tentativa e erro, onde o valor do espaçamento entre os drenos deve ser arbitrado sucessivamente até que o sistema cumpra os critérios de projeto previamente estabelecidos.

Os valores de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  podem ser dependentes de  $K$ ,  $\mu$  e até mesmo do espaçamento entre os drenos. Com isso a discreti

zação das variáveis independentes deve ser encarada como uma particularidade de cada sistema.

A seguir são apresentadas algumas sugestões para a continuidade deste estudo.

Para que o modelo ganhe em consistência física é importante que o mesmo contemple o maior número possível de fenômenos envolvidos no processo.

A evapotranspiração, que não foi considerada neste trabalho, pode tornar-se uma variável importante durante o período de desenvolvimento das culturas.

Esta variável pode ser introduzida na equação que define o balanço de volume da forma que segue:

$$R^* = R - ET \quad (6.1)$$

onde  $R^*$  é a recarga líquida,  $R$  a recarga e  $ET$  a evapotranspiração.

Tanto o armazenamento como o fluxo da zona não saturada podem influir decisivamente no rebaixamento do lençol freático, com o que sugere-se o desenvolvimento de modelos que contemplem a capacidade de transmitir água desta zona do perfil e a dependência da porosidade drenável em relação à posição do lençol freático. As equações de McWhorter e Duke (1976), apresentadas a seguir, permitem que se avalie a importância do armazenamento e do fluxo da zona não saturada.

$$I_s = \left( \frac{D - h_o}{h_c} \right)^{-\lambda}$$

$$I_f = \frac{h_e}{d+h_o}$$
(6.2)

sendo:

$I_s$  = índice que avalia a importância do armazenamento da zona não saturada.

$I_f$  = índice que avalia a importância do fluxo da zona não saturada.

$D$  = profundidade de instalação dos drenos.

$h_o$  = carga hidráulica no ponto médio para  $t=0$ , em condições de recarga instantânea.

$h_c$  = espessura da franja capilar.

$\lambda$  = índice de distribuição do tamanho dos poros.

$d$  = espessura equivalente.

$h_e$  = espessura fictícia que quando multiplicada pela condutividade hidráulica saturada corresponde à transmissividade da coluna de solo limitada pela superfície do solo e pelo lençol freático.

Segundo McWhorter e Duke (1976), sempre que  $I_s$  e  $I_f \ll 1$  o armazenamento e o fluxo da zona não saturada podem ser desprezados.

Outro acréscimo importante seria a introdução de um algoritmo de infiltração, possibilitando a transformação da precipitação em recarga de uma forma mais real.

Por outro lado deve-se salientar que um tratamento mais rigoroso conduz inevitavelmente a um custo mais elevado para a aplicação do modelo.

Crescem os custos computacionais devido ao maior tempo de processamento, e crescem os custos extra computacionais já que o modelo passa a exigir um maior número de parâmetros de campo. Com isso, é importante que se avalie a relação existente entre o acréscimo na qualidade da simulação e o crescimento paralelo dos custos, de forma que o grau de sofisticação do modelo empregado seja compatível com o conjunto de situações que caracterizam cada projeto.

As sugestões que seguem envolvem especificamente a solução numérica da equação não-linear.

A equação utilizada para estimar a variável no tempo  $n+1/2$  é rerepresentada a seguir:

$$h_i^{n+1/2} = \frac{h_i^n + h_i^{n+1}}{2}$$

Uma forma para que se faça esta estimativa eliminando o processo iterativo é apresentada a seguir:

Por séries de Taylor temos:

$$h_i^{n+1/2} = h_i^n + \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{i,n} \left( \frac{\Delta t}{2} \right) + O(\Delta t)^2 \quad (6.3)$$

Da equação não-linear de Boussinesq, temos:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{i,n} = A h_i^n \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Big|_{i,n}, \text{ sendo } A = \frac{K}{\mu} \quad (6.4)$$

A analogia para a derivada segunda em relação ao espaço é dada pela equação que segue:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Big|_{i,n} = \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (6.5)$$

Substituindo a equação (6.5) na equação (6.4), e o resultado na (6.3), temos:

$$h_i^{n+1/2} = h_i^n + A h_i^n \left( \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (6.6)$$

Através da equação (6.6) o valor de  $h_i^{n+1/2}$  é determinado explicitamente, o que eventualmente poderá desvincular a solução numérica do computador.

Convém salientar que a equação (6.6) representa um esquema progressivo no tempo, o que poderá gerar a instabilidade da solução.

Outra sugestão consiste em aplicar o esquema de Crank

-Nicholson centrando as derivadas no tempo  $n+1/4$ .

O mesmo processo utilizado no trabalho para estimar  $h_i^{n+1/2}$  pode ser utilizado para a estimativa de  $h_i^{n+1/4}$ .

$$h_i^{n+1/4} = \frac{h_i^n + h_i^{n+1/2*}}{2} \quad (6.7)$$

onde  $h_i^{n+1/2*}$  é arbitrado.

Na primeira iteração  $h_i^{n+1/2*} = h_i^n$ , com o que  $h_i^{n+1/4} = h_i^n$ .

Finalmente sugere-se a solução da equação não-linear sem que seja desprezado o termo de 2a. ordem.

A equação seria:

$$K \frac{\partial}{\partial x} \left[ (d+h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (6.8)$$

A importância do termo  $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$  cresce na vizinhança dos drenos, onde os gradientes são mais acentuados. Uma melhor simulação da carga hidráulica junto aos drenos poderá oferecer outra alternativa para avaliação da descarga.

---

7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- 01 - BEAR, Jacob. 1975. Dynamics of fluids in porous media. New York, American Elsevier. 764p.
- 02 - BEERS, W.F.J. van. 1976. Computing drain spacing. Wageningen, ILRI. 47p.
- 03 - ————. 1969. Some nomographs for the calculation of drain spacing. Wageningen, ILRI. 48p. (Bulletin, 8).
- 04 - BELTRAME, Lawson; TAYLOR, John C.; CAUDURO, Flávio A.; RAMOS, Paulo; DORFMAN, Raul. 1981. Identificação, classificação e caracterização dos solos formadores da área de estudo (várzeas arroseiras); resumo. In: BORDAS, M., coord. Uso e conservação dos recursos hídricos do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, IPH/UFRGS. v. 4, cap. 6.
- 05 - BERRYMAN. 1975. apud MARTINEZ BELTRÁN Julian. 1981. Drenaje de tierras en zonas regables. Porto Alegre, IPH/UFRGS. p.1-14.
- 06 - BRASIL. Ministério da Agricultura. Departamento Nacional de Pesquisa Agropecuária. Divisão de Pesquisa Pedológica. 1973. Levantamento de reconhecimento dos solos do Estado RS. Recife. 431p. (Boletim Técnico, 30).
- 07 - BROOKS, R.H. 1961. Unsteady flow of ground water into drain tile. Journal of the Irrigation and Drainage Division, New York, 87(IR2):27-37, June.

- 08 - BROOKS, R.H. & COREY. 1966. apud COREY, Arthur T. 1977. Mechanics of heterogeneous fluids in porous media. Fort Collins, Water Resources Publication. p.47.
- 09 - COLLINS. 1961. apud BEAR, Jacob. 1975. Dynamics of fluids in porous media. New York, American Elsevier. p.125.
- 10 - COREY, Arthur T. 1977. Mechanics of heterogeneous fluids in porous media. Fort Collins, Water Resources Publication. 259p.
- 11 - DIELEMAN, P.J. & RIDDER, N.A. 1979. Elementary groundwater hydraulics. In: RIDDERS, N.A. et alii. Drainage principles and applications. 2.ed. Wageningen, ILRI. v.1, chap. 6, p.153-99.
- 12 - DUMM, Lee. 1954. Drain-spacing formula; new formula for determining depth and spacing of subsurface drains in irrigated lands. Agricultural Engineering, St Joseph, 35(10):726-30, Oct.
- 13 - ———. 1964. apud SCHILFGAARDE, Jan van, ed. 1974. Drainage for agriculture. Madison, American Society of Agronomy. p.251.
- 14 - EDELMAN. 1947. apud LEUR, D.A. Kraijenhoff van de. 1979. Rainfall-runoff relations and computational models. In: RIDDER, N.A. et alii. Drainage principles and applications. 2.ed. Wageningen, ILRI. v.2, chap. 15, p.311.
- 15 - FANSEY & SCHWAB. 1965. apud MARTINEZ BELTRÁN, Julian. 1981. Drenaje de tierras en zonas regables. Porto Alegre, IPH/UFRGS. p.1.14.
- 16 - FREITAS, Pedro Luiz de. 1977. Ensaio de drenagem em planossolos do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS/IPH.

- 123p. Tese (Mestrado). UFRGS.
- 17 - GLOVER, Robert E. 1974. Transient ground water hydraulics. Fort Collins, Colorado State University. 413p.
- 18 - HILLEL, Daniel. 1970. Solo e água; fenômenos e princípios físicos. Porto Alegre, Departamento de solos/ UFRGS.
- 19 - HOOGHOUTD. 1940. apud RIDDER, N.A. et alii. 1979. Drainage principles and applications. 2.ed. Wageningen, ILRI. v.2, chap. 8, p.6.
- 20 - ISHERWOOD, J.D. 1959. Water table in tile-drained land. Journal of Geophysical Research, 64(7):795-804, July.
- 21 - JAGER. 1965. apud LEUR, D.A. Kraijenhoff van de. 1979. Rainfall-runoff relations and computational models. In: RIDDER, N.A. et alii. Drainage principles and applications. 2.ed. Wageningen, ILRI. v.2, chap. 15, p. 314.
- 22 - KIRKHAM, Don. 1966. Depth of barrier and water table fall in a tile drainage model. Soil Science Society of America, 30:292-8.
- 23 - LABYE. 1960. apud RIDDER, N.A. et alii. 1979. Drainage principles and applications. 2.ed. Wageningen, ILRI. v.2, chap. 8, p.7.
- 24 - LEUR, D.A. Kraijenhoff van de. 1979. Rainfall-runoff relations and computational models. In: RIDDER, N.A. et alii. Drainage principles and applications. 2.ed. Wageningen, ILRI. v.2, chap. 15, p.245-320.
- 25 - ———. 1958. A study of non-steady groundwater flow

- with special reference to a reservoir-coefficient. De Ingenieur, Gravenhage, 19:87-94, Mai.
- 26 - LEUR, D.A. Kraijenhoff van de. 1962. A study of non-steady groundwater flow II; computation methods for flow to drains. De Ingenieur, Gravenhage, 23:285-92, Nov.
- 27 - MAASLAND, Marinus. 1961. Water table fluctuations induced by irrigation. Journal of the Irrigation and Drainage Division, New York, 87(IR2):38-59, June.
- 28 - MARTINEZ BELTRÁN, Julian. 1981. Drenaje de tierras en zonas regables. Porto Alegre, IPH/UFRGS. Iv. (várias paginações).
- 29 - McWHORTER, David B. 1977. Drain spacing based on dynamic equilibrium. Journal of the Irrigation and Drainage Division, New York, (IR2):259-71, June.
- 30 - ———. & DUKE, Harold R. 1976. Transient drainage with non-linearity and capillarity. Journal of the Irrigation and Drainage Division, New York, (IR2):193-204, June.
- 31 - MOODY, William T. 1966. Nonlinear differential equation of drain spacing. Journal of the Irrigation and Drainage Division, New York, 92(IR2):1-9, June.
- 32 - ———. 1964. apud SCHILFGAARDE, Jan van. ed. 1974. Drainage for agriculture. Madison, American Society of Agronomy. p.251.
- 33 - MUSKAT, 1946. apud SCHILFGAARDE, Jan van. ed. 1974. Drainage for agriculture. Madison, American Society for Agronomy. p.247.
- 34 - OOSTERBAN. 1980. apud MARTINEZ BELTRÁN, Julian. 1981.

- Drenaje de tierras en zonas regables. Porto Alegre, IPH/UFRGS. p.1-13.
- 35 - ROSENBERG, Dale V. von. 1975. Methods for the numerical solution of partial differential equations. New York, American Elsevier. 128p.
- 36 - SANTOS JÚNIOR, A.G. dos. & YOUNGS, E.G. 1969. A study of the specific yield in land-drainage situations. Journal of Hidrology, Amsterdam, 8:59-81.
- 37 - SCHILFGAARDE, Jan van., ed. 1974. Drainage for agriculture. Madison, American Society of Agronomy. 700p. (Agronomy, 17).
- 38 - ———. 1965. Transient design of drainage systems. Journal of the Irrigation and Drainage Division, New York, 91(IR3):9-22, Sept.
- 39 - ———. 1963. Design of tile drainage for falling water tables. Journal of the Irrigation and Drainage Division, New York, (IR2):1-11, June.
- 40 - SIEBEN. 1964. apud MARTINEZ BELTRÁN, Julian. 1981. Drenaje de tierras en zonas regables. Porto Alegre, IPH/UFRGS. p.1.7.
- 41 - TAPP. 1964. apud SCHILFGAARDE, Jan van., ed. 1974. Drainage for agriculture. Madison, American Society of Agronomy. p.251.
- 42 - WARD. 1964. apud BEAR, Jacob. 1975. Dynamics of fluids in porous media. New York, American Elsevier, p.125.
- 43 - WERNER, P. Wilh. 1957. Some problems in non-artesian ground-water flow. Transactions American Geophysical Union, Washington, 38(4):511-8, Aug.

- 44 - WESSELING, J. 1979. Subsurface flow into drains. In: RIDDER, N.A. et alii. Drainage principles and applications. 2.ed. Wageningen, ILRI. v.2, chap. 8, p.1-56.
- 45 - WHITMAN, Robert V. & LAMBE, T. William. 1976. Mecanica de suelos. México, Limusa. 582p.
- 46 - WILLIAMSOM & KRIZ. 1970. apud MARTINEZ BELTRÁN, Julian. 1981. Drenaje de tierras en zonas regables. Porto Alegre, IPH/UFRGS. p.1.6.
- 47 - WIND & BUITENDIJK. 1979. apud MARTINEZ BELTRÁN, Julian. 1981. Drenaje de tierras en zonas regables. Porto Alegre, IPH/UFRGS. p.1.13.
- 48 - ZEEUW & HELLINGA. 1958. apud LEUR, D.A. Kraijenhoff van de. 1979. Rainfall-runoff relations and computational models. In: RIDDER, N.A. et alii. Drainage principles and applications. 2.ed. Wageningen, ILRI. v.2, chap. 15, p.315.



## 8.1 - ANEXO A - Observações de Campo

---

ESCALA VERTICAL 1:7,5  
 HORIZONTAL 1:75  
 UNIDADE = METRO

LEGENDA

- SUPERFÍCIE DO SOLO
- - - POSIÇÕES DO LENÇOL FREÁTICO
- ||||| CAMADA IMPERMEÁVEL
- ..... CONDIÇÃO ANTECEDENTE
- P PIEZÔMETROS
- Tn (n=0,1,2,...) ORDEM CRONOLÓGICA DAS OBSERVAÇÕES
- O DRENO

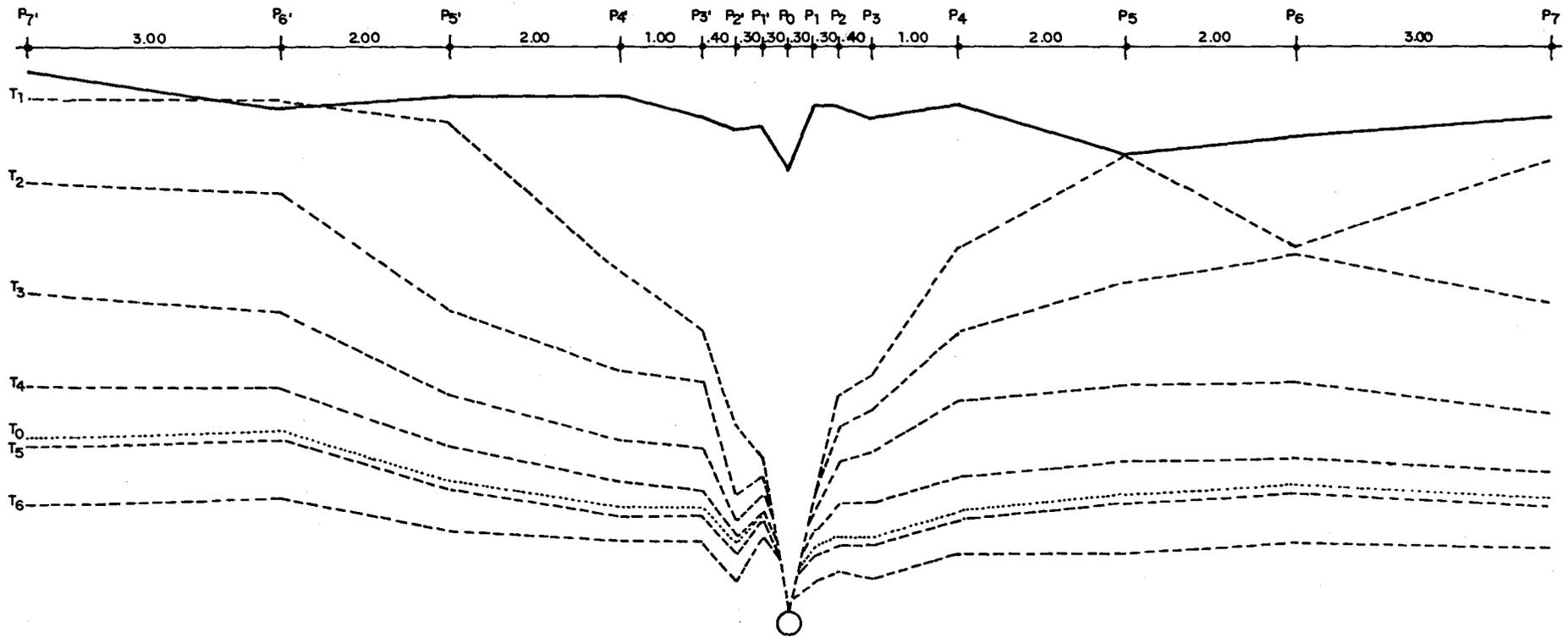


FIG. A1 - POSIÇÕES DO LENÇOL FREÁTICO OBSERVADAS - EVENTO 1

ESCALA: VERTICAL 1: 7,5  
 HORIZONTAL 1: 75

UNIDADE = METRO

LEGENDA

- SUPERFÍCIE DO SOLO
- - - POSIÇÕES DO LENÇOL FREÁTICO
- ||||| CAMADA IMPERMEÁVEL
- ..... CONDIÇÃO ANTECEDENTE
- P PIEZÔMETROS
- T<sub>n</sub> (n=0,1,2...) ORDEM CRONOLÓGICA DAS OBSERVAÇÕES
- O DRENO

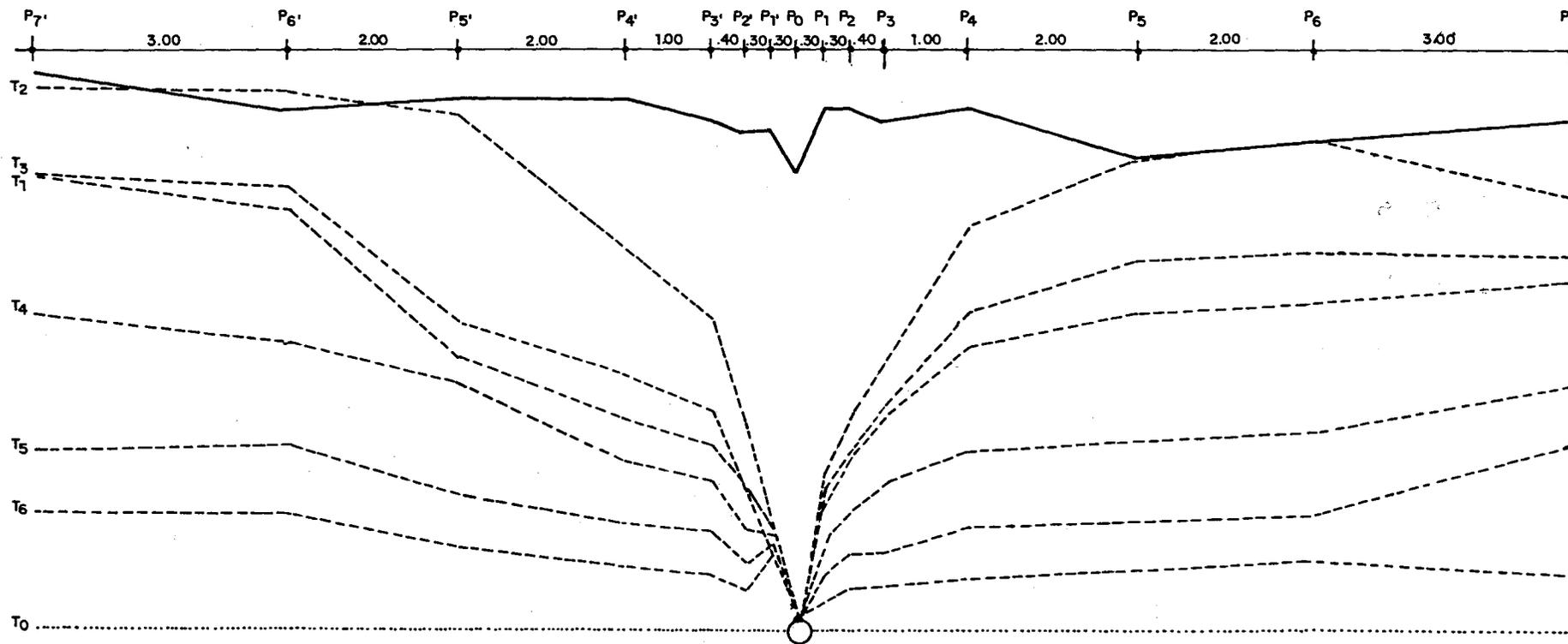


FIG. A2 - POSIÇÕES DO LENÇOL FREÁTICO OBSERVADAS - EVENTO 2

ESCALA VERTICAL 1:7,5  
 HORIZONTAL 1:75  
 UNIDADE = METRO

LEGENDA

- SUPERFÍCIE DO SOLO
- - - POSIÇÕES DO LENÇOL FREÁTICO
- ||||| CAMADA IMPERMEÁVEL
- ..... CONDIÇÃO ANTECEDENTE
- P PIEZÔMETROS
- T<sub>n</sub> (n=0,1,2...) ORDEM CRONOLÓGICA DAS OBSERVAÇÕES
- O DRENO

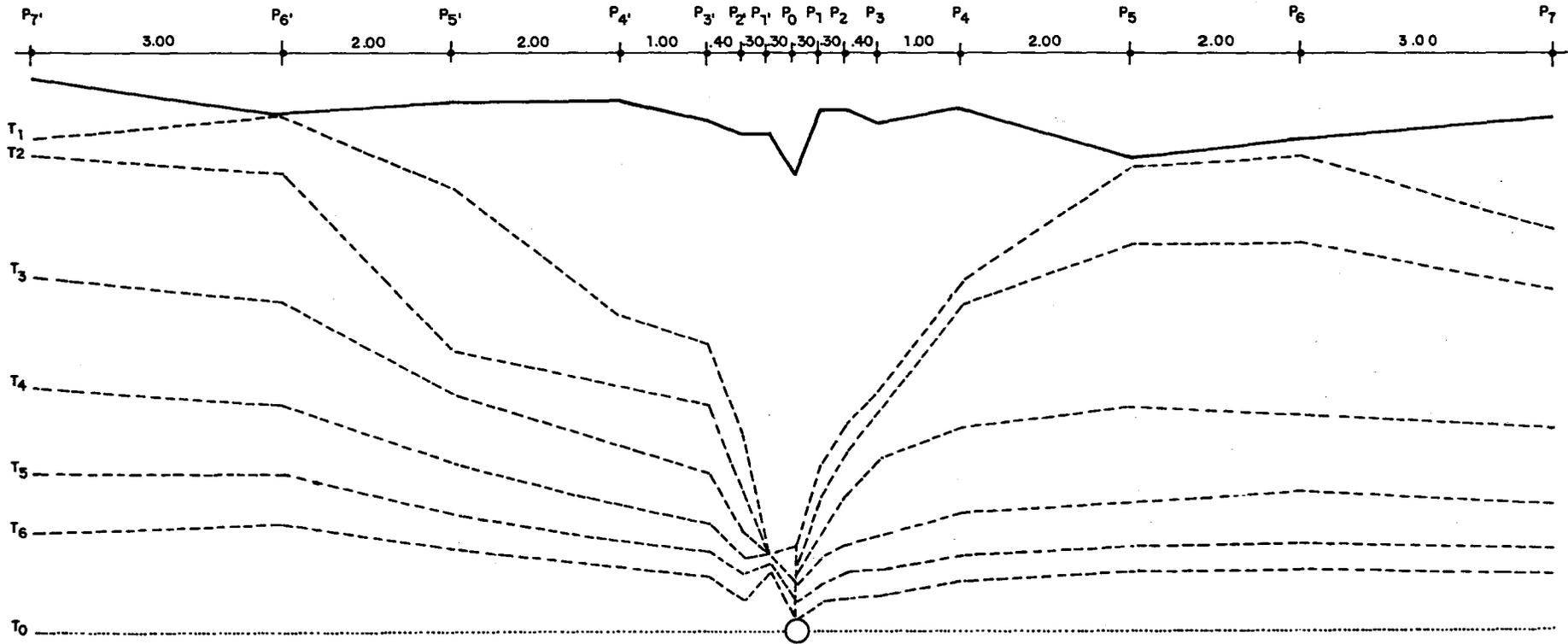


FIG. A3 - POSIÇÕES DO LENÇOL FREÁTICO OBSERVADAS - EVENTO 3

ESCALA VERTICAL 1: 7,5  
 HORIZONTAL 1: 75  
 UNIDADE = METRO

LEGENDA

- SUPERFÍCIE DO SOLO
- - - POSIÇÕES DO LENÇOL FREÁTICO
- ||||| CAMADA IMPERMEÁVEL
- ..... CONDIÇÃO ANTECEDENTE
- P PIEZÔMETROS
- Tn (n=0,1,2...) ORDEM CRONOLÓGICA DAS OBSERVAÇÕES
- O DRENO

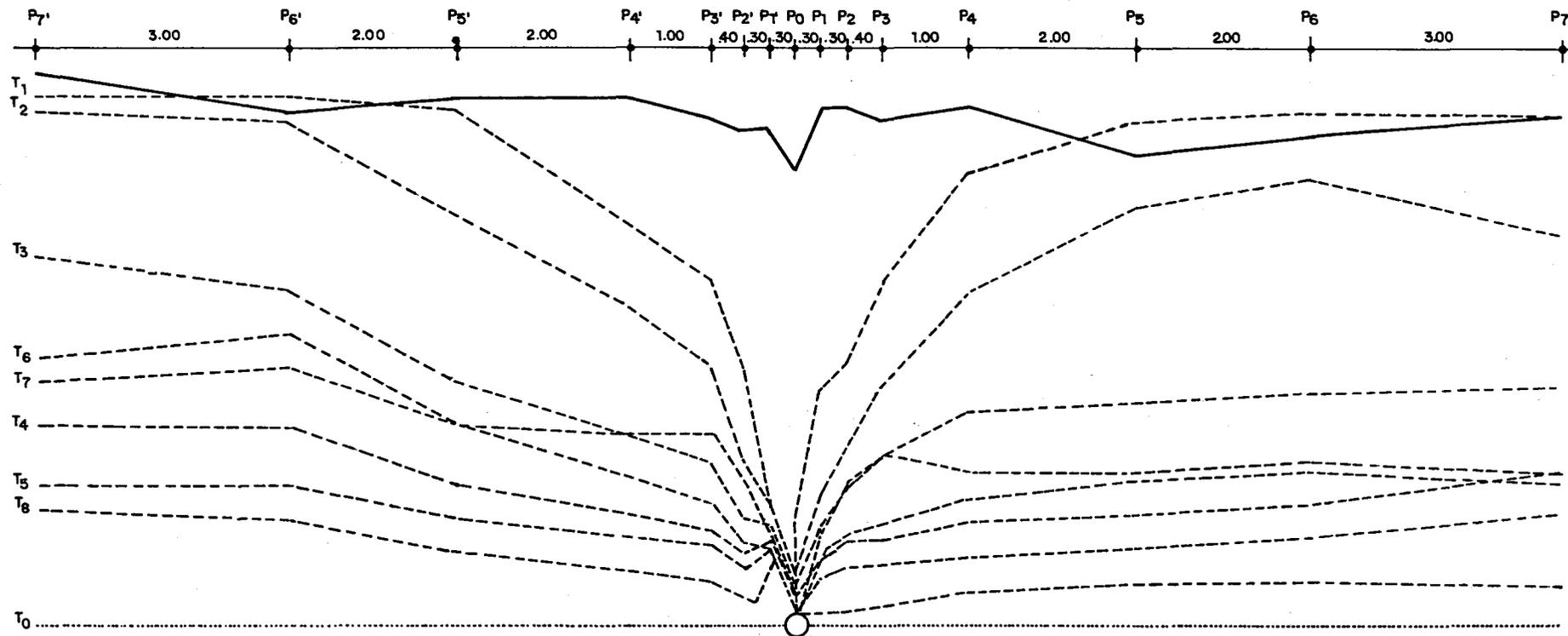


FIG. A4 - POSIÇÕES DO LENÇOL FREÁTICO OBSERVADAS - EVENTO 4

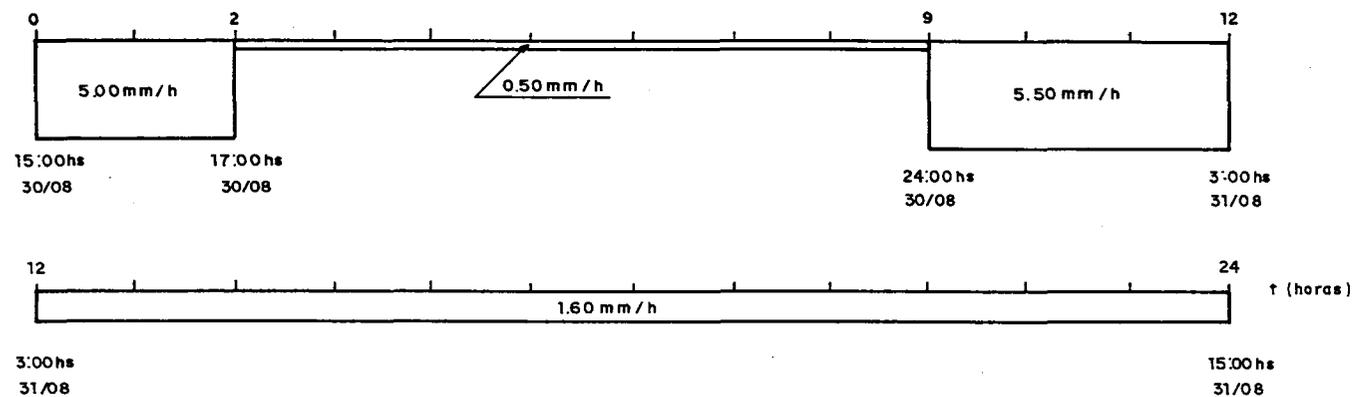


FIG. A5 - PRECIPITAÇÕES REGISTRADAS - EVENTO 1

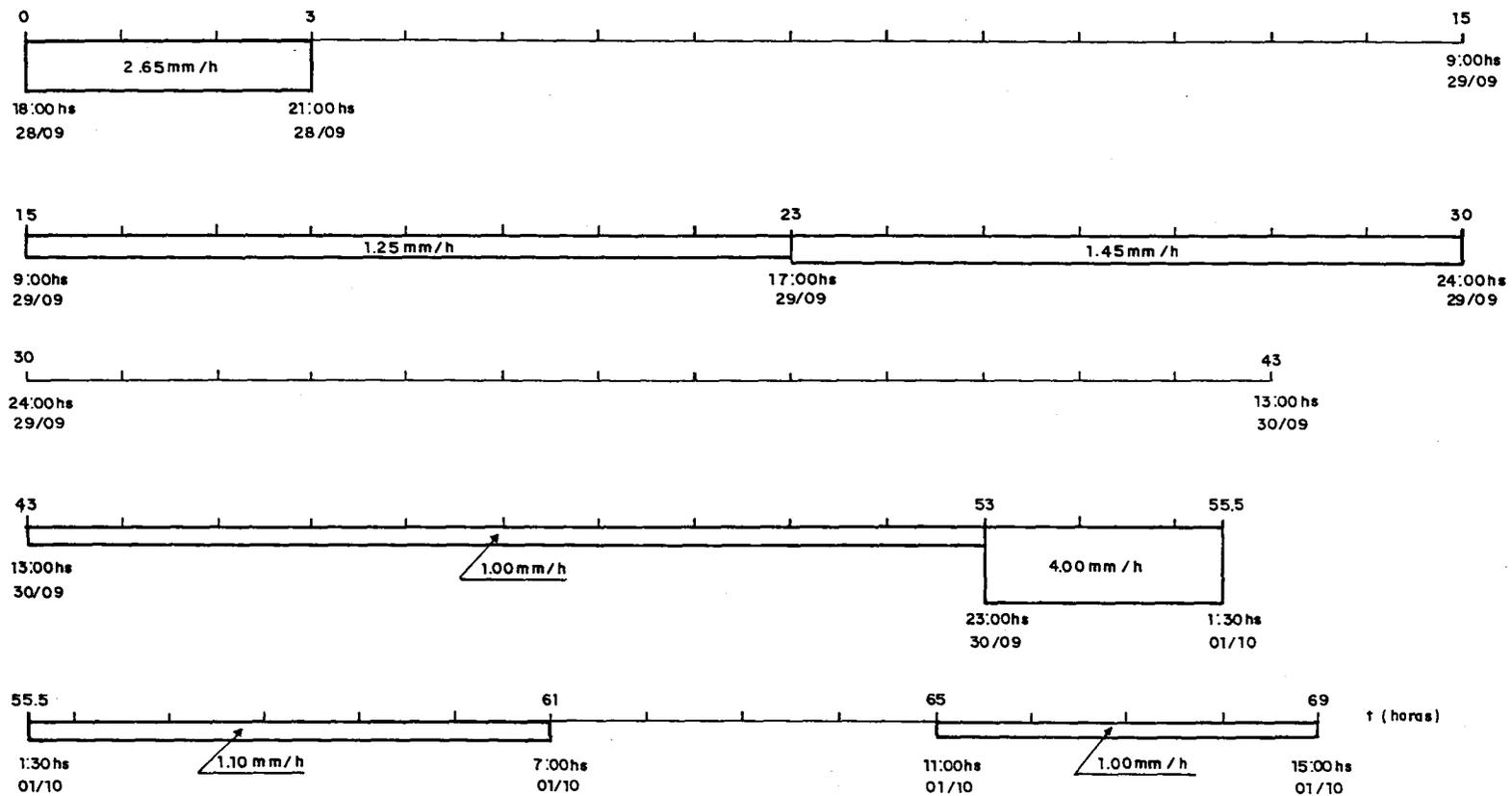


FIG. A6 - PRECIPITAÇÕES REGISTRADAS - EVENTO 2

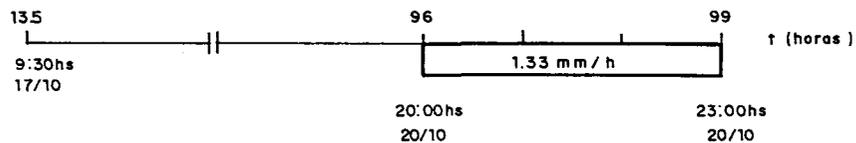
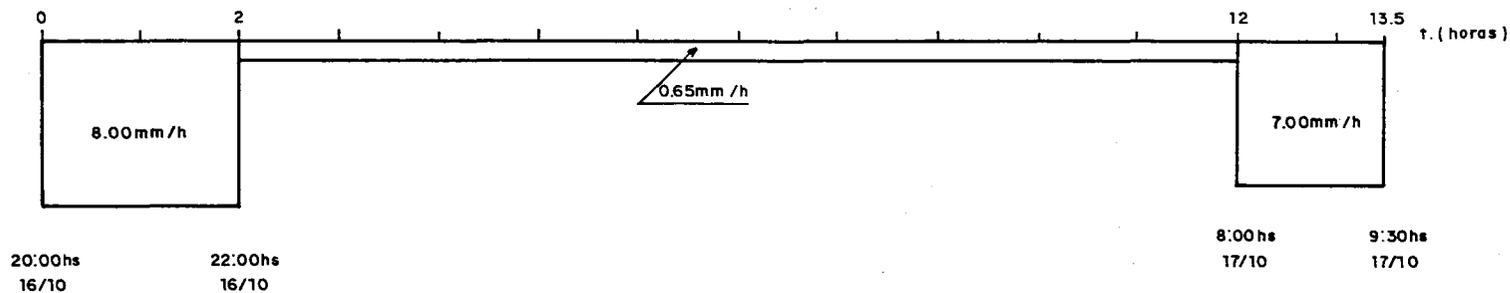


FIG. A7 - PRECIPITAÇÕES REGISTRADAS - EVENTOS 3e4

TABELA A1 - CARGA HIDRÁULICA OBSERVADA - EVENTO 1

D	9.0	6.0	4.0	2.0	1.0	0.6	0.3	0	0.3	0.6	1.0	2.0	4.0	6.0	9.0	HORA DATA
h*	20,4	21,1	15,4	12,1	12,1	7,5	11,8	0	5,3	6,6	6,8	9,6	11,7	12,9	15,3	10:30 29-08
h	60,4	60,1	57,4	40,1	33,1	21,5	17,8	0	14,3	25,6	27,8	42,6	53,7	42,9	57,3	10:30 01-09
h	50,4	49,1	35,4	28,1	27,1	13,5	15,8	0	13,3	21,6	23,8	32,6	38,7	41,9	36,3	10:30 02-09
h	36,4	35,1	25,4	20,1	19,1	10,5	13,8	0	11,3	17,6	18,8	24,6	26,7	26,9	22,3	15:00 03-09
h	26,4	26,1	19,4	15,1	14,1	8,5	11,8	0	9,3	12,6	12,8	15,6	17,7	17,9	16,3	16:00 04-09
h	19,4	20,1	14,4	11,1	11,1	6,5	10,8	0	6,3	7,6	7,8	10,6	12,7	13,9	12,3	10:00 05-09
h	12,4	13,1	9,4	8,1	8,1	3,5	8,8	0	3,3	4,6	3,6	6,6	6,7	7,9	7,3	10:00 06-09

D = DISTÂNCIA DO PIEZÔMETRO AO DRENO (m)

h = CARGA HIDRÁULICA (cm)

\* = CONDIÇÃO ANTECEDENTE À PRECIPITAÇÃO

**TABELA A2 - CARGA HIDRÁULICA OBSERVADA - EVENTO 2**

D	9.0	6.0	4.0	2.0	1.0	0.6	0.3	0	0.3	0.6	1.0	2.0	4.0	6.0	9.0	HORA DATA
h*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— —
h	53,4	50,1	34,4	28,1	24,1	15,5	10,8	0	13,3	18,6	23,8	31,6	35,7	36,9	42,3	10:00 30-09
h	61,4	61,1	58,4	43,1	35,1	22,5	10,8	0	17,3	23,6	29,8	45,6	53,7	55,9	49,3	11:00 02-10
h	49,4	48,1	30,4	23,1	20,1	15,5	7,8	0	15,3	19,6	24,8	35,6	41,7	42,9	41,3	10:30 03-10
h	35,4	32,1	22,4	18,1	16,1	15,5	4,8	0	9,3	12,6	15,8	19,6	20,7	21,9	27,3	10:30 04-10
h	19,4	20,1	14,4	11,1	10,1	11,5	3,8	0	5,3	7,6	7,8	10,6	11,7	11,9	20,3	10:30 05-10
h	12,4	12,1	8,4	6,1	5,1	8,5	2,8	0	2,3	3,6	3,8	4,6	5,7	6,9	5,3	10:30 06-10

D = DISTÂNCIA DO PIEZÔMETRO AO DRENO (m)

h = CARGA HIDRÁULICA (cm)

\* = CONDIÇÃO ANTECEDENTE À PRECIPITAÇÃO

**TABELA A3 - CARGA HIDRÁULICA OBSERVADA - EVENTO 3**

D	9.0	6.0	4.0	2.0	1.0	0.6	0.3	0	0.3	0.6	1.0	2.0	4.0	6.0	9.0	HORA DATA
h*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— —
h	55,4	59,1	50,4	35,1	32,1	21,5	7,8	0	18,3	22,6	26,8	39,6	52,7	53,9	44,3	17:30 09-10
h	54,4	52,1	36,4	27,1	25,1	14,5	7,8	0	14,3	19,6	24,8	36,6	43,7	43,9	41,3	10:30 10-10
h	45,4	37,1	26,4	20,1	17,1	10,5	7,8	0	10,3	14,6	18,8	22,6	24,7	23,9	22,3	14:00 11-10
h	31,4	25,1	18,4	13,1	11,1	7,5	7,8	0	7,3	8,6	9,8	12,6	13,7	14,9	13,3	11:00 12-10
h	20,4	17,1	12,4	9,1	8,1	5,5	6,8	0	4,3	5,6	5,8	7,6	8,7	8,9	8,3	10:00 13-10
h	10,4	11,1	8,4	6,1	5,1	2,5	5,8	0	2,3	2,6	2,8	4,6	5,7	5,9	5,3	10:30 14-10

D = DISTÂNCIA DO PIEZÔMETRO AO DRENO (m)

h = CARGA HIDRÁULICA (cm)

\* = CONDIÇÃO ANTECEDENTE À PRECIPITAÇÃO

**TABELA A4 - CARGA HIDRÁULICA OBSERVADA - EVENTO 4**

D	9.0	6.0	4.0	2.0	1.0	0.6	0.3	0	0.3	0.6	1.0	2.0	4.0	6.0	9.0	HORA DATA
h*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	— —
h	61,4	61,1	59,4	46,1	39,1	28,5	13,8	0	26,3	29,6	38,8	51,6	57,7	58,9	58,3	17:30 17-10
h	59,4	58,1	46,4	36,1	29,1	18,5	12,8	0	14,3	19,6	26,8	37,6	47,7	50,9	48,3	10:00 18-10
h	47,4	38,1	27,4	21,1	18,1	11,5	10,8	0	10,3	14,6	18,8	23,6	24,7	25,9	30,3	10:00 19-10
h	25,4	22,1	15,4	12,1	10,1	7,5	8,8	0	6,3	8,6	8,8	10,6	11,7	12,9	19,3	10:00 20-10
h	20,4	15,1	11,4	9,1	8,1	5,5	7,8	0	4,3	5,6	5,8	6,6	7,7	8,9	14,3	18:00 20-10
h	30,4	33,1	22,4	21,1	21,1	15,5	8,8	0	10,3	15,6	18,8	16,6	16,7	17,9	16,3	17:00 21-10
h	27,4	29,1	22,4	16,1	13,1	8,5	7,8	0	7,3	9,6	10,8	13,6	15,7	16,9	14,3	17:00 22-10
h	18,4	11,1	7,4	5,1	4,1	1,5	6,8	0	0,3	0,6	0,8	2,6	3,7	3,9	10,0	11:30 23-10

D = DISTÂNCIA DO PIEZÔMETRO AO DRENO (m)

h = CARGA HIDRÁULICA (cm)

\* = CONDIÇÃO ANTECEDENTE À PRECIPITAÇÃO

**TABELA A5 DESCARGA ESPECÍFICA OBSERVADA (mm/dia)**

<b>DESCARGA</b>	0.115*	3.920	1.240	0.440	0.210	0.085	0.025			<b>EVENTO 1</b>
<b>HORA</b> <b>DATA</b>	10:30 29-08	10:30 01-09	10:30 02-09	15:00 03-09	16:00 04-09	10:00 05-09	10:00 06-09			
<b>DESCARGA</b>	0*	1.530	3.600	1.305	0.490	0.120	0.030			<b>EVENTO 2</b>
<b>HORA</b> <b>DATA</b>	— —	10:00 30-09	11:00 02-10	10:30 03-10	10:30 04-10	10:30 05-10	10:30 06-10			
<b>DESCARGA</b>	0*	2.700	1.370	0.465	0.185	0.065	0.015			<b>EVENTO 3</b>
<b>HORA</b> <b>DATA</b>	— —	17:30 09-10	10:30 10-10	14:00 11-10	11:00 12-10	10:00 13-10	10:30 14-10			
<b>DESCARGA</b>	0*	4.000	2.930	0.600	0.160	0.120	0.480	0.140	0.015	<b>EVENTO 4</b>
<b>HORA</b> <b>DATA</b>	— —	17:30 17-10	10:00 18-10	10:00 19-10	10:00 20-10	18:00 20-10	17:00 21-10	17:00 22-10	11:30 23-10	

\* CONDIÇÃO ANTECEDENTE À PRECIPITAÇÃO

TABELA A 6 LOCAÇÃO E NIVELAMENTO DOS PIEZÔMETROS

P	COTA DO TOPO (m)	COTA DA SUPERFÍCIE DO SOLO (m)	DISTÂNCIA AO DRENO (m)
P7	10.310	9.781	9.000
P6	10.303	9.781	6.000
P5	10.295	9.767	4.000
P4	10.283	9.782	2.000
P3	10.324	9.723	1.000
P2	10.316	9.746	0.600
P1	10.260	9.771	0.300
P0	10.407	9.705	0.000
P1'	10.265	9.756	0.300
P2'	10.282	9.754	0.600
P3'	10.288	9.769	1.000
P4'	10.318	9.792	2.000
P5'	10.321	9.791	4.000
P6'	10.328	9.776	6.000
P7'	10.311	9.821	9.000

P : PIEZÔMETRO

COTA DO R.N. : 10.000

## 8.2 - ANEXO B - Programas em Algol e Diagramas de Fluxo

---

### 8.2.1 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA "KRAIJENHOFF"

Os parâmetros de entrada e as respectivas notações utilizadas na codificação do programa são:

Tempo de duração da recarga (TR), coeficiente de armazenamento (J), espaço poroso drenável (MU), limite de ordenadas das funções núcleo e resposta (LI), número de recargas que compõem o evento (LR) e os valores destas recargas (R).

Estes valores de R são armazenados num vetor R(K) com LR espaços (intervalos constantes de 1 dia), sendo K o índice que posiciona cada recarga neste vetor.

Na primeira etapa do programa um ciclo externo controla o tempo e um ciclo interno realiza os somatórios correspondentes às equações (4.18) e (4.19), rerepresentadas a seguir:

$$hm(t) = \frac{4}{\pi} \frac{R}{\mu} j \left[ \sum_{n=1, -3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (\exp(n^2 T/j) - 1) \exp -n^2 t/j \right]$$

$$q(t) = \frac{8}{\pi^2} R \left[ \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\exp(n^2 T/j) - 1) \exp -n^2 t/j \right]$$

O número de parcelas de cada somatório é estabelecido pelo parâmetro que limita a variação da variável  $N(LS)$ , sendo  $LS$  uma função do tempo.

A função auxiliar (AUX) alterna o sinal de cada parcela do somatório da equação que estabelece a variação da carga hidráulica com o tempo.

Esgotado o ciclo interno ( $N=LS$ ), os somatórios  $S_1$  e  $S_2$  são multiplicados pelas constantes  $P_1$  e  $P_2$  anteriormente calculadas.

O ciclo externo é incrementado de  $TR$  e o processo é repetido até  $T=LI$ .

Para cada valor de  $T$  os produtos  $S_1 \times P_1$  e  $S_2 \times P_2$  correspondem às ordenadas das funções núcleo discretizadas correspondentes à cada variável.

As ordenadas destes operadores são armazenadas nos vetores  $S(1,K)$  e  $S(2,K)$ , sendo  $K=LI$ .

O índice  $K$  igualmente posiciona cada ordenada nos respectivos vetores.

A segunda etapa do programa também é constituída por dois ciclos, um externo e outro interno.

O ciclo externo, tal qual a primeira parte do programa, controla o tempo enquanto o ciclo interno determina as respostas parciais e as superpõe.

Cada vez que o ciclo interno é varrido ( $I=LR$ ), o programa determina as ordenadas das funções resposta discretizadas ( $S_1$  e  $S_2$ ) no final do intervalo de tempo correspondente ao índice  $K$  do ciclo externo.

No passo seguinte são impressos os valores de  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S(1,K)$  e  $S(2,K)$ .

O ciclo externo é incrementado de um intervalo de tempo e o processo é repetido até  $K=LI$ .

K R A I J E N H O F F O N D I S K  
 = = = = =

BEGIN

ARRAY RQ1:38A; DOUBLE ARRAY SQ1:2,1:64A; DOUBLE EX1,EX2,S1,S2,P1,P2;  
 REAL TR,J,MU,T,N,NN; INTEGER I,K,L,LI,LS,LR,AUX; LABEL L1,FIM;  
 FILE LI(KIND=READER),IM(KIND=PRINTER);

```

P1:=8./ARCCOS(-1)**2;
L1:READ(LI,<3F6.3,2I3.9F6.2/12F6.2/12F6.2/5F6.2>),TR,J,MU,LI,
LR,FOR K:=1 STEP 1 UNTIL LR DO RQKA)SFIMA;
P2:=4./ARCCOS(-1)*J/MU;
WRITE(IM,</"PARAMETROS DE ENTRADA: (EVENTO= )"/21("*/")//"/ 1."/
" TEMPO DE RECARGA(DIA) TR ="/F8.3/" 2. ARMAZENAMENTO(DIA) "/
" J ="/F8.3/" 3. POROSIDADE MU ="/F8.3"
/" 4. LIMITE DE ORDENADAS LI ="/I8/" 5. NRO. DE RECARGAS "/
" LR ="/I8/" 6. VALORES DE RECARGA(MM/DIA) R(K)"/
13F7.2/X39,13F7.2/X39,12F7.2/1111
>,TR,J,MU,LI,LR,FOR K:=1 STEP 1 UNTIL LR DO RQKA);

WRITE(IM,</X12,"ØHUØ",X15,"HID.RESULTANTE",X20,"ØHUØ CARGA",X10,
"HID.RESULTANTE DE"/X10,"DESCARGA",X13,"DE DESCARGA",X23,
"HIDRAULICA",
X10,"CARGA HIDRAULICA"/X10,"(MM/DIA)",X16,"(MM/DIA)",X26,"(MM)",
X19,"(MM)"/>);

K:=0;
FOR T:=TR STEP TR UNTIL LI DO
BEGIN
S1:=S2:=0; AUX:=-1;
IF T<=4.000 THEN LS:=21 ELSE LS:=11 ;
FOR N:=1 STEP 2 UNTIL LS DO
BEGIN
NN:=N*N; EX1:=EXP(NN*TR/J)-1; EX2:=EXP(-NN*T/J);
S1:=S1+1/NN*EX1*EX2; NN:=-1*AUX*NN*N; S2:=S2+1/NN*EX1*EX2;

AUX:=-1*AUX;
END;
S1:=S1*P1; S2:=S2*P2; K:=K+1; SQ1,KÄ:=S1; SQ2,KÄ:=S2;
END;
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL LI DO
BEGIN
S1:=S2:=0;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL LR DO
IF L:=K-I+1 = 0
THEN I:=LR
ELSE BEGIN S1:=S1+RQIA*SQ1,LA; S2:=S2+RQIA*SQ2,LA; END;
WRITE(IM,<F3.0,F15.6,F24.6,F33.6,F25.6>,K,SQ1,KÄ,S1,SQ2,KÄ,S2);
END;
WRITE(IM<SKIP 1Ä);
GO TO L1;
FIM:
END.

```

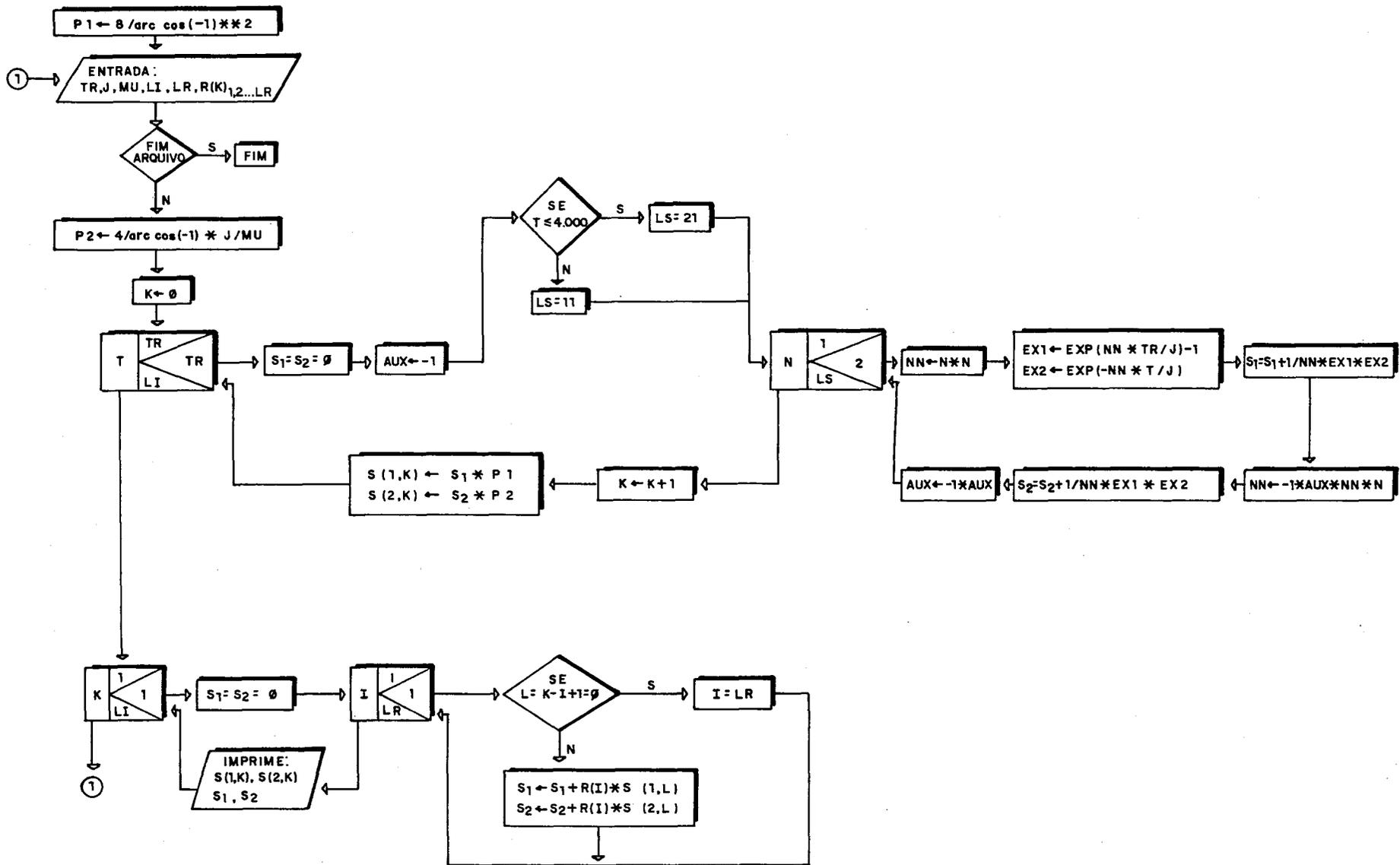


FIG. B1 - DIAGRAMA DE FLUXO DO PROGRAMA KRAIJENHOFF

### 8.2.2 - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA "CRANK-NICHOLSON"

Os parâmetros de entrada e as respectivas notações utilizadas na codificação do programa são:

Número de pontos da malha (LI), número de intervalos de tempo (LN), distância entre os pontos da malha (DX), intervalo de tempo (DT), espaço poroso drenável (MU), condutividade hidráulica saturada (K), erro admitido no processo iterativo (E), espessura equivalente (D), os valores da variável em todos os pontos da malha no tempo zero (VN(I)), estimativa dos valores da variável em todos os pontos da malha no final do primeiro intervalo de tempo (VI(I)) e os valores de recarga em cada intervalo de tempo (R(N)).

Os três últimos parâmetros citados são armazenados em vetores com LI, LI e LN espaços respectivamente.

No primeiro passo o parâmetro LI passa a receber o valor declarado menos dois, com o que os vetores VN(I) e VI(I) recebem valores da posição zero à posição LI + 1. O programa é constituído basicamente por um ciclo externo para controle do tempo e por vários ciclos internos que realizam as operações

envolvidas na solução do sistema de equações resultante.

No primeiro ciclo interno são calculados os valores da diagonal principal da matriz dos coeficientes e os termos independentes. O ciclo abrange as posições (1) à (LI) dos vetores  $VI(I)$  e  $VN(I)$ , definindo assim a dimensão da matriz e fixando as condições de contorno (posições (0) e (LI+1)) para todo o processo.

Na etapa seguinte um comando isolado e outro ciclo posicionam os elementos unitários das diagonais adjacentes à diagonal principal. Os demais elementos são automaticamente admitidos como nulos.

O próximo passo consiste na aplicação do algoritmo de eliminação de Gauss ao sistema de equações anteriormente determinado.

O vetor  $VT(I)$  que continha os termos independentes recebe agora os valores calculados a partir da posição LI-1, já que após a aplicação do algoritmo o termo independente na posição LI é o próprio valor da variável.

A seguir é feito o teste para aceitação ou não dos valores calculados, e a transferência destes valores para o vetor  $VI(I)$ .

Se os valores não forem aceitos o programa volta para realizar uma nova iteração, recalculando a diagonal principal da matriz dos coeficientes e os termos independentes a partir dos novos elementos do vetor  $VI(I)$ . As iterações sucedem-se

até que o teste seja positivo, quando então é pedida a impressão dos valores calculados e da descarga, sendo esta determinada utilizando o valor da variável na posição  $(LI+1)/2$ .

Os valores calculados são transferidos para o vetor  $VN(I)$ , com o que passam a ser a condição inicial do intervalo de tempo seguinte.

O ciclo externo é incrementado de um intervalo de tempo e o processo é repetido até que este ciclo se esgote.

C R A N K / N I C H O L S O N O N D I S K  
 = = = = =

BEGIN

INTEGER LI, LN; REAL DX, DT, MU, K, E, D, X, Y;  
 FILE LT(KIND=READER), IM(KIND=PRINTER);

READ(LT, /, LI, LN, DX, DT, MU, K, E, D); LI:=\*-2; X:=2\*MU\*DX\*\*2;

BEGIN

INTEGER N, I, J; LABEL L1, L2, FIM;

ARRAY MG1:LI, 1:LI, VI, VNQ:LI+1, RQ:LN-1, VTQ1:LI;  
 L2:READ(LT, /, VI, VNQ, RQ) & FIMA;

BEGIN

WRITE(IM, SKIP 1A); WRITE(IM, </// "PARAMETROS DE ENTRADA: (EVEN",  
 "TO = )"/21("\*/")///" 1. NRO. DE PONTOS LI = ", I8/  
 " 2. NRO. DE INTERV. DE TEMPO LN = ", I8/" 3. DIST. ENTRE ", "PON",  
 "TOS(MM) DX = ", I8/" 4. INTERVALO DE TEMPO(DIA) DT = ",  
 F8.3/" 5. POROSIDADE MU = ", F8.3/" 6. CONDUTIV. H",  
 "IDRAULICA(MM/DIA) K = ", I8/" 7. ERRO ADMISSIVEL(%) E = "  
 F8.3/" 8. ESPESSURA EQUIVALENTE(MM) D = ", I8/" 9. PRIMEIRA ITE",  
 "RACAO(MM) VI(I)", \*I7/" 10. CONDICoes INICIAIS(MM) VN",  
 "(I)", \*I7/" 11. VALORES DE RECARGA(MM/DIA) R(N)", 13F7.2/6(X39,  
 13F7.2/))>, LI+2, LN, DX, DT, MU, K, E, D, LI+2, VI, VNQ, RQ & A);  
 WRITE(IM, <///" + " 8(" + " )/" + " 1 " + " N.1 DES",  
 "CARGA I \*\*\*\*\* C A R G A H I D R A U L I C A ( M M ) \*\*\*\*\* / " + " 1",  
 " ( M M / D I A ) I " + " ( I = " + I2, X5) / " + " + " 8(" + " + " ) /  
 >, LI+2, FOR I:=0 STEP 1 UNTIL LI+1 DO I);

FOR N:=0 STEP 1 UNTIL LN-1 DO

BEGIN

L1: FOR I:=1 STEP 1 UNTIL LI DO

BEGIN

Y:=X/(K\*(D+(VNQIA+VIQIA)/2)\*DI);  
 MG1, IA:=-1\*(2+Y);

VTQIA:=(2-Y)\*VNQIA-(VNQI+1A+VNQI-1A+Y\*RQNA/MU\*DT);

END;

MG1, 2A:=MG1I, LI-1A:=1;

FOR I:=2 STEP 1 UNTIL LI-1 DO MG1, I-1A:=MG1, I+1A:=1;

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL LI DO

BEGIN

VIQIA:=\*/Y:=MG1, IA;

FOR J:=I STEP 1 UNTIL LI DO MG1, JA:=\*/Y;

IF I<LI

THEN BEGIN

FOR J:=1 STEP 1 UNTIL LI DO MG1+1, JA:=\*-MG1, JA;

VTQI+1A:=\*-VTQIA;

END;

FOR I:=LI-1 STEP -1 UNTIL 1 DO VTQIA:=\*-VTQI+1A\*MG1, I+1A;

J:=0;

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL LI DO

BEGIN

J:=IF ABS(VTQIA-VIQIA)/VTQIA\*100<=E THEN J ELSE 1;

VIQIA:=VTQIA;

END;

IF J=1 THEN GO TO L1;

WRITE(IM, <I2, " ", F9.2, X6, "0.00", \*F9.2, X5, "0.00"

>, N+1, 4\*K\*(D+VTQ(LI+1)/2A/4)\*VTQ(LI+1)/2A/((LI+1)\*DX)\*\*2, LI, VTQ\*A);

FOR I:=1 STEP 1 UNTIL LI DO VNQIA:=VTQIA;

END;

END;

GO TO L2;

FIM;

END;

END.

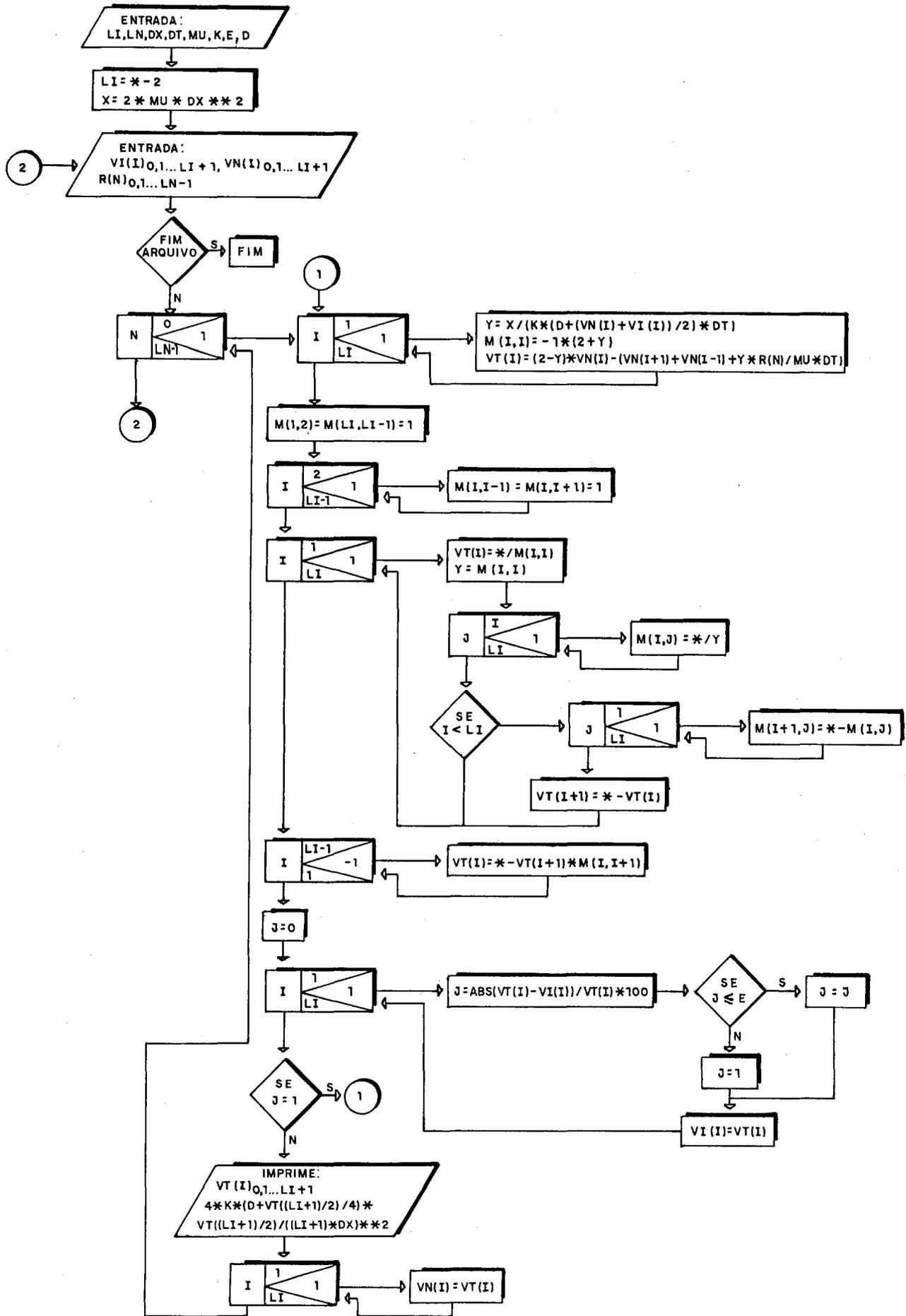


FIG. B2 - DIAGRAMA DE FLUXO DO PROGRAMA CRANK-NICHOLSON