

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Subálgebras coideais à direita de álgebras
quânticas pequenas**

Dissertação de Mestrado

Priscila Nunes dos Santos

Porto Alegre, 12 de Abril de 2019.

Dissertação submetida por Priscila Nunes dos Santos ¹, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:

Prof^ª. Dra. Bárbara Seelig Pogorelsky

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)

Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS)

Prof^ª. Dra. Daiane Silva de Freitas (FURG)

¹Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Agradeço à minha família por todo o incentivo e compreensão nos momentos de ausência. Aos meus pais, Irene e Paulo, por todo o amor que sempre recebi e por serem exemplos de determinação. Ao meu noivo Antonio, por todo o amor e por sempre me encorajar a seguir em frente, mesmo que isso signifique algum tempo de ausência e alguns quilômetros de distância. Obrigada por acreditarem em mim.

Às minhas queridas amigas Ceres e Weinny por estarem ao meu lado e pela disponibilidade sempre que preciso de um ombro amigo. Agradeço também à Letícia pelo suporte e por me ajudar a cuidar de mim.

Aos amigos e professores do IFRS - Campus Bento Gonçalves que acreditaram e deram suporte para que o início desta etapa fosse possível. Agradeço aos professores/amigos Diego Lieban, Fernanda Zorzi e Patrícia Guidolin por todo o incentivo.

Agradeço à professora Bárbara por ter aceitado ser minha orientadora durante o mestrado e por ter tornado esse trajeto mais leve. Sou grata por toda a disponibilidade, comprometimento e ensinamentos.

Aos amigos e colegas da pós por tornarem meus dias de mestrado mais divertidos e também proveitosos de alguma forma. Além disso, agradeço pela ajuda e partilha de conhecimento ao longo das disciplinas. Sou grata, especialmente, à Vanusa que se tornou uma grande amiga e com quem pude contar sempre que precisei.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, pelos ensinamentos e suporte. Também, à CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço aos professores que aceitaram participar da banca. Em especial, ao professor Alveri, pelos ensinamentos e conselhos, durante o mestrado, e pelo apoio e incentivo para o doutorado.

Resumo

Neste trabalho, calculamos o reticulado de subálgebras coideais à direita dos grupos quânticos multiparâmetro $U_q^+(\mathfrak{g})$, onde \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie simples de tipo A_2 e B_2 , no caso em que o parâmetro principal de quantização q não é raiz da unidade. O método utilizado aqui é semelhante ao que é utilizado para o caso G_2 em [12].

Abstract

In this work we calculate the lattice of right coideal subalgebras of the multiparameter quantum groups $U_q^+(\mathfrak{g})$, where \mathfrak{g} is a simple Lie algebra of type A_2 and B_2 , while the main parameter of quantization q is not a root of 1. The method used here is similar to the one used for the case G_2 in [12].

Índice

Introdução	1
1 Álgebra de Hopf	3
1.1 Álgebra e Coálgebra	3
1.2 Biálgebra e Álgebra de Hopf	8
1.3 Álgebras de Lie	16
2 Geradores PBW	20
2.1 Superletras e superletras duras	20
2.2 Álgebra de Hopf de Caracteres	26
2.3 Geradores PBW	28
3 Reticulado de Coideais de $U_q^+(A_2)$	31
3.1 A álgebra $U_q^+(A_2)$	31
3.2 Superletras duras em $U_q^+(A_2)$	33
3.3 Tabela de derivadas de $U_q^+(A_2)$	34
3.4 Geradores PBW de $U_q^+(A_2)$	35
3.5 Reticulado de coideais de $U_q^+(A_2)$	36
4 Reticulado de Coideais de $U_q^+(B_2)$	39

4.1	A álgebra $U_q^+(B_2)$	39
4.2	Superletras duras em $U_q^+(B_2)$	40
4.3	Tabela de derivadas de $U_q^+(B_2)$	43
4.4	Geradores PBW de $U_q^+(B_2)$	46
4.5	Reticulado de coideais de $U_q^+(B_2)$	49
Referências Bibliográficas		53

Introdução

Quando estudamos álgebras de Hopf, é natural considerarmos subálgebras de Hopf como objetos importantes. No entanto, observa-se que, ao invés de subálgebras de Hopf, as subálgebras coideais unilaterais desempenham um papel importante nesta teoria. De fato, elas são os objetos de Galois no teorema de correspondência de Galois para ações em uma álgebra livre.

V. K. Kharchenko e A.V. Lara Sagahón [9] classificaram completamente as subálgebras coideais à direita que contêm o coradical $k[G]$ para o grupo quântico $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$, usando a construção de base *PBW* (*Poincaré - Birkhoff - Witt*) criada em [8]. Como consequência, foi possível determinar que a álgebra de Borel quântica $U_q^+(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, possui $(n+1)!$ diferentes subálgebras coideais à direita contendo o coradical. Além disso, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ é uma álgebra de Lie simples de tipo B_n , então $U_q^+(\mathfrak{g})$ possui $2^n \cdot n!$ subálgebras coideais à direita que incluem o coradical [10].

Neste trabalho, calculamos o reticulado de subálgebras coideais à direita dos grupos quânticos multiparâmetro $U_q^+(\mathfrak{g})$, nos casos em que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie simples do tipo A_2 e do tipo B_2 . Estas subálgebras coideais à direita foram determinadas em [9] e [10], no entanto o método utilizado nos referidos artigos é diferente do aplicado nesta dissertação. Aqui, utilizamos o método semelhante ao que é utilizado para o caso G_2 em [12], o qual se mostra mais simples do que os anteriores, porém menos geral.

No primeiro capítulo, baseado principalmente em [1], [3] e [11], apresentamos definições básicas de (co)álgebra, biálgebra, álgebra de Hopf e álgebra de Lie, além de importantes propriedades e resultados acerca destes conceitos.

No segundo capítulo, introduzimos definições e resultados envolvendo superletras, superletras duras, álgebra de Hopf de caracteres e geradores *PBW*. Tais noções têm fundamental importância para alcançarmos o objetivo deste trabalho. É nesta parte da dissertação que descrevemos o procedimento para verificar se uma determinada base é a ideal para que possamos realizar os cálculos como os de derivadas e, posteriormente, determinar as subálgebras coideais à direita que contenham $k[G]$, a álgebra de grupo obtida do grupo de elementos group-like de $U_q^+(\mathfrak{g})$.

Muitos dos resultados apresentados no segundo capítulo são provados em artigos escritos por V. K. Kharchenko. Além disso, temos também o Teorema de Shirshov [13], o qual afirma que toda palavra *standard* u possui um único alinhamento de colchetes tal que a palavra não associativa obtida $[u]$ é *standard*. Em outras palavras, este resultado nos garante que uma palavra *standard* define uma única superletra, que pode ser obtida de forma que também é descrita no segundo capítulo.

O terceiro e o quarto capítulos são dedicados ao processo de determinar o reticulado de subálgebras coideais à direita das álgebras de Hopf de caracteres $U_q^+(A_2)$ e $U_q^+(B_2)$, respectivamente. Para chegarmos ao reticulado de subálgebras coideais à direita que contenham o coradical, é necessário utilizar uma determinada base *PBW* e suas derivadas. Nestes capítulos, apresentamos tal base para as respectivas álgebras e calculamos suas derivadas a fim de determinarmos os geradores *PBW* das subálgebras coideais à direita desejadas e exibimos o reticulado de coideais.

Capítulo 1

Álgebra de Hopf

Neste primeiro capítulo, introduzimos alguns conceitos e resultados importantes sobre (co)álgebras e biálgebras. Tais definições e resultados são necessários para definir uma álgebra de Hopf e álgebra de Lie. O conteúdo deste capítulo é amplamente conhecido e pode ser encontrado com maiores detalhes em [1], [3] e [11].

1.1 Álgebra e Coálgebra

Ao longo de todo este trabalho, k denota um corpo. Além disso, se V e W são k -espaços vetoriais, denotamos o produto tensorial de V e W sobre k , $V \otimes_k W$, simplesmente por $V \otimes W$.

Definição 1.1.1. *Uma k -álgebra (ou simplesmente uma álgebra) é uma tripla (A, m, u) , onde A é um k -espaço vetorial, $m : A \otimes A \rightarrow A$ e $u : k \rightarrow A$ são morfismos de k -espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes id_A} & A \otimes A \\ \downarrow id_A \otimes m & & \downarrow m \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & A \otimes A & & \\ & u \otimes id_A \nearrow & \downarrow m & \nwarrow id_A \otimes u & \\ k \otimes A & & A & & A \otimes k \\ & \searrow \simeq & & \swarrow \simeq & \end{array}$$

Denotamos $m(a \otimes b) := ab$, para quaisquer elementos a, b de A , e $u(1_k) = 1_A$. As aplicações m e u são chamadas de multiplicação e unidade da álgebra, respectivamente.

O primeiro diagrama da definição fornece, por um lado,

$$m \circ (id_A \otimes m)(a \otimes b \otimes c) = m(a \otimes m(b \otimes c)) = m(a \otimes (bc)) = a(bc)$$

e, por outro lado,

$$m \circ (m \otimes id_A)(a \otimes b \otimes c) = m(m(a \otimes b) \otimes c) = m((ab) \otimes c) = (ab)c.$$

Ou seja, a comutatividade do primeiro diagrama representa a associatividade da multiplicação.

Além disso, pelo segundo diagrama, 1_A é a unidade em A , ou seja, satisfaz $1_A a = a = a 1_A$, para todo a pertencente a A . De fato, pelo lado esquerdo do diagrama, temos

$$(m \circ (u \otimes id_A))(1_k \otimes a) = a, \text{ isto é, } m(u(1_k) \otimes a) = m(1_A \otimes a) = 1_A a = a.$$

De forma análoga, o lado direito garante que $a = a 1_A$.

Exemplo 1.1.2. *Seja G um grupo multiplicativo. O conjunto kG é o k -espaço vetorial com base G ,*

$$kG = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in k, g_i \in G, n = 1, 2, \dots \right\}$$

Um elemento g em G pode ser escrito em kG como $g = 1_k g$. Assim, definimos a multiplicação em kG pela aplicação $m(g \otimes h) = gh$, para quaisquer g, h pertencentes a G e a unidade é definida por $u(1_k) = e$, onde e é a unidade em G , e estendemos linearmente. Então, (kG, m, u) é uma álgebra, chamada álgebra de grupo.

Observação 1.1.3. *Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) duas álgebras. O produto tensorial $A \otimes B$ é uma álgebra com multiplicação*

$$m_{A \otimes B}((a \otimes b) \otimes (c \otimes d)) := ac \otimes bd,$$

onde a, b pertencem a A e c, d são elementos de B , e unidade dada por

$$u_{A \otimes B}(1_k) := u_A(1_k) \otimes u_B(1_k) = 1_A \otimes 1_B.$$

Definição 1.1.4. Considere V e W k -espaços vetoriais. Então a aplicação k -linear $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$, dada por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$, é chamada aplicação twist.

Definição 1.1.5. Dizemos que uma álgebra A , com multiplicação m e unidade u , é comutativa se $m \circ \tau = m$ em $A \otimes A$.

A definição acima significa que $ab = ba$, para todos a, b em A .

Note que a álgebra de grupo kG é comutativa se, e somente se, G é um grupo abeliano.

Definição 1.1.6. Sejam A e B duas álgebras com multiplicações m_A e m_B e com unidades u_A e u_B , respectivamente. Dizemos que a aplicação $f : A \rightarrow B$ é um morfismo de álgebras se os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ \downarrow m_A & & \downarrow m_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{u_A} & A \\ & \searrow u_B & \downarrow f \\ & & B \end{array}$$

Desta forma, $f : A \rightarrow B$ é um morfismo de álgebras se $f(ab) = f(a)f(b)$, para todos a, b em A , e $f(1_A) = 1_B$.

A definição de uma álgebra via diagramas nos permite definir uma coálgebra, dualizando estes diagramas.

Definição 1.1.7. Uma k -coálgebra é uma tripla (C, Δ, ε) , onde C é um k -espaço vetorial, $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon : C \rightarrow k$ são morfismos de k -espaços vetoriais tais

que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes id_C \\
 C \otimes C & \xrightarrow{id_C \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & \swarrow \cong & & \searrow \cong & \\
 k \otimes C & & C & & C \otimes k \\
 \varepsilon \otimes id_C \swarrow & & \Delta \downarrow & & \searrow id_C \otimes \varepsilon \\
 C & & C \otimes C & &
 \end{array}$$

Se o corpo k está fixado, dizemos apenas que C é uma coálgebra. Os morfismos Δ e ε são chamados de comultiplicação e counidade da coálgebra C , respectivamente.

Notação 1.1.8. (Notação de Sweedler) A imagem de um elemento c de C por Δ é

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^n c_{i_1} \otimes c_{i_2},$$

onde c_{i_1}, c_{i_2} são elementos de C . Tal imagem é denotada por

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$$

ou, simplesmente, por

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Essa notação é conhecida como notação de Sweedler ou notação sigma.

Usando a notação de Sweedler para os diagramas da definição de coálgebra, temos que, para todo c pertencente a C :

$$\begin{aligned}
 ((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(c) &= ((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) \\
 (\Delta \otimes id_C)(c_1 \otimes c_2) &= (id_C \otimes \Delta)(c_1 \otimes c_2) \\
 \Delta(c_1) \otimes id_C(c_2) &= id_C(c_1) \otimes \Delta(c_2) \\
 c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 &= c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}.
 \end{aligned}$$

Como $c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}$, usamos $c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$ para denotar ambos os lados da igualdade. Nesse caso, dizemos que C é coassociativa.

Além disso, pelo lado direito do segundo diagrama, temos

$$\begin{aligned}(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta(c) &= c \otimes 1_k \\(id_C \otimes \varepsilon)(c_1 \otimes c_2) &= c \otimes 1_k \\c_1 \otimes \varepsilon(c_2) &= c \otimes 1_k,\end{aligned}$$

para todo c em C .

Como $\varepsilon(c_2)$ está em k , obtemos $(c_1\varepsilon(c_2) - c) \otimes 1_k = 0$. Logo, $c_1\varepsilon(c_2) - c = 0$, pois usando a independência linear de $\{1_k\}$ sobre o corpo, $1_k \neq 0$. Ou seja, $c_1\varepsilon(c_2) = c$.

Analogamente, pelo outro lado do diagrama, concluímos que $\varepsilon(c_1)c_2 = c$.

Exemplo 1.1.9. kG é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε definidas por $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1_k$, para todo g em G .

Observação 1.1.10. Se $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ são duas coálgebras, então o produto tensorial $C \otimes D$ é uma coálgebra com comultiplicação dada por

$$\Delta_{C \otimes D}(c \otimes d) := (id_C \otimes \tau \otimes id_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D)(c \otimes d) = c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2$$

e counidade dada por

$$\varepsilon_{C \otimes D}(c \otimes d) := \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d),$$

para quaisquer c em C e d em D .

Utilizando a Definição 1.1.4, podemos introduzir o conceito de coálgebra cocomutativa.

Definição 1.1.11. Uma coálgebra C , com comultiplicação Δ e counidade ε , é cocomutativa se $\tau \circ \Delta = \Delta$.

Em geral, kG é um exemplo de coálgebra cocomutativa, visto que $\Delta(g) = g \otimes g$ e $(\tau \circ \Delta)(g) = \tau(g \otimes g) = g \otimes g$.

Definição 1.1.12. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Um k -subespaço vetorial D de C é uma subcoálgebra de C se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

Definição 1.1.13. *Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e I um k -subespaço vetorial de C . Então:*

- (i) *I é um coideal à esquerda se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$, e um coideal à direita se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$.*
- (ii) *I é um coideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.*

Note que se I é um coideal, em geral, I não é coideal à esquerda ou à direita. Além disso, se I é coideal à direita e à esquerda, então I é uma subcoálgebra.

No caso de álgebras, vimos o que é um morfismo entre álgebras. Vejamos a definição análoga para o caso de coálgebras.

Definição 1.1.14. *Sejam C e D coálgebras com comultiplicações Δ_C e Δ_D e counidades ε_C e ε_D , respectivamente. Dizemos que $g : C \rightarrow D$ é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{g} & D \\
 \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\
 C \otimes C & \xrightarrow{g \otimes g} & D \otimes D
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{g} & D \\
 \varepsilon_C \searrow & & \downarrow \varepsilon_D \\
 & & k
 \end{array}$$

Para todo elemento c de C , a comutatividade do primeiro diagrama pode ser escrita como $\Delta_D(g(c)) = ((g \otimes g) \circ \Delta_C)(c)$, o que significa que $g(c)_1 \otimes g(c)_2 = g(c_1) \otimes g(c_2)$. Além disso, a comutatividade do segundo diagrama é equivalente a $\varepsilon_D(g(c)) = \varepsilon_C(c)$.

1.2 Biálgebra e Álgebra de Hopf

Quando um k -espaço vetorial possui tanto a estrutura de álgebra quanto a estrutura de coálgebra e estas estruturas são compatíveis, obtemos uma biálgebra.

Definição 1.2.1. Um k -espaço vetorial B é dito uma biálgebra se existirem aplicações k -lineares $m : B \otimes B \rightarrow B$, $u : k \rightarrow B$, $\Delta : B \rightarrow B \otimes B$ e $\varepsilon : B \rightarrow k$ tais que (B, m, u) é uma álgebra, (B, Δ, ε) é uma coálgebra e vale uma das condições abaixo, que são equivalentes:

(i) Δ e ε são morfismos de álgebras;

(ii) m e u são morfismos de coálgebras.

Na notação de Sweedler, as condições em que Δ e ε são morfismos de álgebras são dadas por:

$$\Delta(hg) = h_1g_1 \otimes h_2g_2 = \Delta(h)\Delta(g), \quad \varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g),$$

$$\Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B \quad e \quad \varepsilon(1_B) = 1_k.$$

Exemplo 1.2.2. Seja G um grupo e kG a álgebra de grupo. Já vimos que kG tem estrutura de coálgebra dada por:

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad e \quad \varepsilon(g) = 1_k.$$

Note que Δ e ε são morfismos de álgebras, pois

$$\Delta(hg) = hg \otimes hg = (h \otimes h)(g \otimes g) = \Delta(h)\Delta(g)$$

e

$$\varepsilon(hg) = 1_k = \varepsilon(h)\varepsilon(g).$$

Logo, kG é uma biálgebra.

Definição 1.2.3. Um subespaço $I \subseteq B$ é um bi-ideal se I for um ideal e um coideal.

Como nos casos anteriores (de álgebra e de coálgebra), é natural que se defina o que seria um morfismo entre biálgebras.

Definição 1.2.4. *Sejam H e L biálgebras. Uma aplicação k -linear $f : H \rightarrow L$ é um morfismo de biálgebras se é, simultaneamente, um morfismo de álgebras e um morfismo de coálgebras.*

Definição 1.2.5. *Sejam C uma coálgebra e c um elemento de C . Então:*

(i) *c é chamado elemento group-like se $\varepsilon(c) = 1$ e $\Delta(c) = c \otimes c$. O conjunto dos elementos group-like de C é denotado por $G(C)$.*

(ii) *Para g, h em $G(C)$, c é dito (g, h) -primitivo se $\Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 0$. O conjunto de todos os elementos (g, h) -primitivos de C é denotado por $P_{g,h}(C)$. Se $C = B$ é uma biálgebra e $g = h = 1$, os elementos de $P(B) := P_{1,1}(B)$ são ditos primitivos.*

Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, u) uma álgebra. Definimos no conjunto $\text{Hom}_k(C, A)$ uma estrutura de álgebra na qual a unidade é dada por $u \circ \varepsilon$ e a multiplicação é dada pelo *produto convolução*, denotado por $*$, e definido por:

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta,$$

para quaisquer f, g pertencentes a $\text{Hom}_k(C, A)$.

Na notação de Sweedler:

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2), \tag{1.1}$$

para todos f, g em $\text{Hom}_k(C, A)$ e c pertencente a C .

A unidade da álgebra $\text{Hom}_k(C, A)$ é $u \circ \varepsilon$ pertencente a $\text{Hom}_k(C, A)$. De fato, para todo elemento c de C , temos

$$(f * (u \circ \varepsilon))(c) = f(c_1)(u \circ \varepsilon)(c_2) = f(c_1)u(1_k)\varepsilon(c_2) = f(c_1\varepsilon(c_2)) = f(c).$$

Concluimos, então, que $f * (u \circ \varepsilon) = f$. De forma análoga, $(u \circ \varepsilon) * f = f$.

Agora, seja H uma biálgebra. Então H possui tanto a estrutura de álgebra quanto a estrutura de coálgebra. Portanto, pelo que vimos, $\text{Hom}_k(H, H)$ é uma álgebra com produto convolução.

Definição 1.2.6. *Seja H uma biálgebra. Uma aplicação k -linear $S : H \longrightarrow H$ é chamada de antípoda de H se S é o inverso da identidade id_H , com respeito ao produto convolução em $Hom_k(H, H)$.*

Definição 1.2.7. *Uma biálgebra H que admita uma antípoda é chamada de álgebra de Hopf.*

Em uma álgebra de Hopf, a antípoda é única. O fato de que $S : H \longrightarrow H$ é antípoda equivale a $S * id_H = id_H * S = u \circ \varepsilon$. Usando a notação de Sweedler, temos que

$$S(h_1)h_2 = h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H, \quad (1.2)$$

para todo h pertencente a H .

Exemplo 1.2.8. *Já vimos que a álgebra de grupo kG é uma biálgebra no Exemplo 1.2.2. Definindo a aplicação $S : kG \longrightarrow kG$ por $S(g) = g^{-1}$, para todo elemento g de G , e estendendo linearmente, temos que S é uma antípoda para kG , pois:*

$$S(g_1)g_2 = S(g)g = g^{-1}g = 1_{kG} = \varepsilon(g)1_{kG}.$$

e, de maneira similar, $g_1S(g_2) = \varepsilon(g)1_{kG}$.

No entanto, no exemplo anterior, se G for um monoide (isto é, for associativo e possuir um elemento neutro), então kG é biálgebra, mas não é necessariamente uma álgebra de Hopf.

Proposição 1.2.9. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S . Então:*

- (i) $S(hg) = S(g)S(h)$;
- (ii) $S(1_H) = 1_H$;
- (iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$;
- (iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$,

para quaisquer g, h em H .

As propriedades (i) e (ii) nos dizem que S é um *antimorfismo de álgebras* e as propriedades (iii) e (iv) significam que S é um *antimorfismo de coálgebras*.

Demonstração.

(i) Sejam $H \otimes H$ com estrutura de coálgebra dada por $\Delta_{H \otimes H}$ e $\varepsilon_{H \otimes H}$, e H com a estrutura de álgebra dada por m e u . Então faz sentido considerar a álgebra $\text{Hom}_k(H \otimes H, H)$, com a multiplicação dada pelo produto convolução (1.1). A unidade dessa álgebra é dada por $u \circ \varepsilon_{H \otimes H} : H \otimes H \rightarrow H$.

Sejam $F, G, m : H \otimes H \rightarrow H$ definidos por:

$$F(h \otimes g) = S(g)S(h), \quad G(h \otimes g) = S(hg) \quad e \quad m(h \otimes g) = hg,$$

para quaisquer h, g em H . Vamos mostrar que F é inverso à direita de m e G é inverso à esquerda, com respeito ao produto convolução. Daí, seguirá que m é invertível e, portanto, $F = G$.

De fato, para quaisquer h, g pertencentes a H , temos

$$\begin{aligned} (m * F)(h \otimes g) &= m((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) \\ &= m(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) \\ &= h_1 g_1 S(g_2)S(h_2) \\ &= h_1 \varepsilon(g) 1_H S(h_2) \\ &= h_1 S(h_2) \varepsilon(g) 1_H \\ &= \varepsilon(h) \varepsilon(g) 1_H \\ &= \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) 1_H \\ &= u(\varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) 1_k) \\ &= u \circ \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g). \end{aligned}$$

Logo, como $u \circ \varepsilon$ é a identidade na álgebra $\text{Hom}_k(H \otimes H, H)$, cuja multiplicação é o produto convolução, segue que F é inverso à direita de m .

Agora, vejamos que G é inverso à esquerda de m , com respeito ao produto convolução. Para quaisquer h, g pertencentes a H , temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
(G * m)(h \otimes g) &= G((h \otimes g)_1)m((h \otimes g)_2) \\
&= G(h_1 \otimes g_1)m(h_2 \otimes g_2) \\
&= S(h_1 g_1)h_2 g_2 \\
&= S((hg)_1)(hg)_2 \\
&= \varepsilon(hg)1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)u(1_k) \\
&= u(\varepsilon(h)\varepsilon(g)1_k) \\
&= u \circ \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $F = G$, isto é, $S(g)S(h) = S(hg)$.

(ii) Vimos que, para qualquer h em H , $S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H$ e que $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $\varepsilon(1_H) = 1_k$. Em particular, quando tomamos $h = 1_H$, temos $S(1_H)1_H = \varepsilon(1_H)1_H = 1_k 1_H = 1_H$. Logo, $S(1_H) = 1_H$.

(iii) Consideremos a álgebra $Hom_k(H, H \otimes H)$, cuja multiplicação dada pelo produto convolução e unidade $u_{H \otimes H} \circ \varepsilon : H \rightarrow H \otimes H$, e as aplicações $F, G : H \rightarrow H \otimes H$, definidos por:

$$F(h) = \Delta(S(h)) \quad e \quad G(h) = S(h_2) \otimes S(h_1),$$

para todo h pertencente a H .

Vamos mostrar que Δ é inverso à esquerda de F e inverso à direita de G , em relação ao produto convolução.

Seja h um elemento de H . Então temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
(\Delta * F)(h) &= \Delta(h_1)F(h_2) \\
&= \Delta(h_1)\Delta(S(h_2)) \\
&= \Delta(h_1S(h_2)) \\
&= \Delta(\varepsilon(h)1_H) \\
&= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H) \\
&= \varepsilon(h)u_{H \otimes H}(1_k) \\
&= u_{H \otimes H}(\varepsilon(h)1_k) \\
&= u_{H \otimes H} \circ \varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Logo, Δ é um inverso à esquerda de F .

Além disso, para todo h em H , temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
(G * \Delta)(h) &= G(h_1)\Delta(h_2) \\
&= (S((h_1)_2) \otimes S((h_1)_1))((h_2)_1 \otimes (h_2)_2) \\
&= (S(h_2) \otimes S(h_1))(h_3 \otimes h_4) \\
&= S(h_2)h_3 \otimes S(h_1)h_4 \\
&= S((h_2)_1)(h_2)_2 \otimes S(h_1)h_3 \\
&= \varepsilon(h_2)1_H \otimes S(h_1)h_3 \\
&= 1_H \otimes S(h_1)\varepsilon(h_2)h_3 \\
&= 1_H \otimes S(h_1)\varepsilon((h_2)_1)(h_2)_2 \\
&= 1_H \otimes S(h_1)h_2 \\
&= 1_H \otimes \varepsilon(h)1_H \\
&= u_{H \otimes H} \circ \varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Dessa forma, Δ é um inverso à direita de G .

Logo, Δ invertível e $\Delta^{-1} = F = G$. Portanto, o resultado segue.

(iv) Aplicando ε em $h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$, obtemos:

$$\varepsilon(h_1S(h_2)) = \varepsilon(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h)\varepsilon(1_H) = \varepsilon(h).$$

Considerando o fato de S e ε serem lineares, temos

$$\varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2)) = \varepsilon(S(\varepsilon(h_1)h_2)) = \varepsilon(S(h)),$$

ou seja, $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$. □

Definição 1.2.10. *Um subespaço $I \subseteq H$ é dito um ideal de Hopf se I for um bi-ideal e $S(I) \subseteq I$.*

Definição 1.2.11. *Sejam H e L duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_L , respectivamente. Dizemos que $f : H \rightarrow L$ é um morfismo de álgebras de Hopf se for um morfismo de biálgebras que preserva antípodas.*

A próxima proposição nos diz que todo morfismo de biálgebras preserva antípodas. Portanto, podemos desconsiderar essa condição na definição anterior.

Proposição 1.2.12. *Sejam H e L duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_L . Se $f : H \rightarrow L$ é um morfismo de biálgebras, então $S_L \circ f = f \circ S_H$.*

Demonstração. Consideremos a álgebra $\text{Hom}_k(H, L)$, com a multiplicação dada pelo produto convolução e a unidade dada por $u_L \circ \varepsilon_H$, e os elementos $f \circ S_H$ e $S_L \circ f$ dessa álgebra. Vamos mostrar que f é um elemento invertível com relação ao produto convolução. De fato, para todo h em H , temos

$$\begin{aligned} ((S_L \circ f) * f)(h) &= (S_L \circ f)(h_1)f(h_2) = S_L(f(h)_1)f(h)_2 \\ &= \varepsilon_L(f(h))1_L = (\varepsilon_L \circ f)(h)1_L \\ &= \varepsilon_H(h)1_L = \varepsilon_H(h)u_L(1_k) \\ &= u_L(\varepsilon_H(h)1_k) = u_L(\varepsilon_H(h)). \end{aligned}$$

Logo, $S_L \circ f$ é inverso à esquerda de f . Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 (f * (f \circ S_H))(h) &= f(h_1)(f \circ S_H)(h_2) = f(h_1 S_H(h_2)) \\
 &= f(\varepsilon_H(h)1_H) = \varepsilon_H(h)f(1_H) \\
 &= \varepsilon_H(h)1_L = \varepsilon(h)u_L(1_k) \\
 &= u_L(\varepsilon_H(h)1_k) = u_L(\varepsilon_H(h)).
 \end{aligned}$$

Logo, $f \circ S_H$ é inverso à direita de f com relação ao produto convolução.

Com isso, concluímos que f é invertível e, portanto, $S_L \circ f = f \circ S_H$. \square

1.3 Álgebras de Lie

As álgebras de Lie surgem como espaços vetoriais de transformações lineares munidos de uma nova operação, que, em geral, não é comutativa e nem associativa, $[,]$. Podemos descrever de forma abstrata esse tipo de sistema em alguns axiomas.

Definição 1.3.1. Dizemos que k -espaço vetorial L , com uma operação

$$\begin{aligned}
 [,] : L \times L &\longrightarrow L \\
 (x, y) &\longmapsto [x, y]
 \end{aligned}$$

chamada colchete (ou comutador) de x e y , é uma k -álgebra de Lie (ou simplesmente uma álgebra de Lie) se os seguintes axiomas são satisfeitos:

- (i) a operação colchete é bilinear;
- (ii) $[x, x] = 0$, para todo x em L ;
- (iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, onde x , y e z são elementos de L .

O axioma (iii) é chamado *identidade de Jacobi*. Note que, se aplicarmos (i) e (ii) em $[x + y, x + y]$, temos, por um lado, $[x + y, x + y] = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 [x + y, x + y] &= [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \\
 &= 0 + [x, y] + [y, x] + 0 \\
 &= [x, y] + [y, x].
 \end{aligned}$$

Logo, $[x, y] + [y, x] = 0$, o que implica a anticomutatividade: $[x, y] = -[y, x]$. Reciprocamente, se a característica do corpo for diferente de 2, a anticomutatividade implicará o axioma (ii).

Exemplo 1.3.2. *Seja A uma álgebra associativa qualquer com multiplicação m . Podemos construir uma álgebra de Lie $L(A)$, a qual coincide com A como espaço vetorial, definindo o colchete da seguinte forma:*

$$[x, y] = m(x \otimes y) - m(y \otimes x) = xy - yx,$$

para quaisquer x, y pertencentes a A .

Vejamos que esta operação colchete satisfaz os axiomas da Definição 1.3.1:

Sejam x, y, z elementos de A e a um escalar qualquer. Então:

(i) *Bilinearidade:*

$$\begin{aligned} [a(x+y), z] &= a(x+y)z - za(x+y) \\ &= axz + ayz - zax - zay \\ &= axz - zax + ayz - zay \\ &= a(xz - zx + yz - zy) \\ &= a([x, z] + [y, z]); \end{aligned}$$

(ii) $[x, x] = xx - xx = 0$;

(iii) *Identidade de Jacobi:*

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= x[y, z] - [y, z]x \\ &= x(yz - zy) - (yz - zy)x \\ &= xyz - xzy - yzx + zyx; \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} [y, [z, x]] &= y[z, x] - [z, x]y \\ &= y(zx - xz) - (zx - xz)y \\ &= yzx - yxz - zxy + xzy; \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
[z, [x, y]] &= z[x, y] - [x, y]z \\
&= z(xy - yx) - (xy - yx)z \\
&= zxy - zyx - xyz + yxz.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Somando (1.3), (1.4) e (1.5), temos $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Logo, toda álgebra associativa pode ser considerada como uma álgebra de Lie.

Exemplo 1.3.3. O espaço vetorial \mathbb{R}^3 com o colchete definido pelo produto vetorial usual é uma álgebra de Lie.

Definição 1.3.4. Seja L uma álgebra de Lie, com colchete $[\ , \]$. A álgebra envolvente da álgebra de Lie L é a álgebra $U(L) = T(L)/I$, onde $T(L)$ é a álgebra tensorial do espaço vetorial L e I é o ideal de $T(L)$ gerado pelos elementos da forma $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x$, com x e y pertencentes a L .

Por [1, Proposition 4.2.13], sabemos que, para mostrar que $U(L)$ é uma álgebra de Hopf, basta mostrar que I é um ideal de Hopf da álgebra de Hopf $T(L)$. Desde que Δ e ε sejam morfismos de álgebras e S seja um antimorfismo de álgebras, é suficiente mostrar que:

- (1) $\Delta([x, y] - x \otimes y + y \otimes x)$ pertence a $I \otimes T(L) + T(L) \otimes I$;
- (2) $\varepsilon([x, y] - x \otimes y + y \otimes x) = 0$;
- (3) $S([x, y] - x \otimes y + y \otimes x)$ pertence a I .

De fato, para quaisquer x, y em L , temos:

$$\Delta([x, y] - x \otimes y + y \otimes x) = ([x, y] - x \otimes y + y \otimes x) \otimes 1 + 1 \otimes ([x, y] - x \otimes y + y \otimes x).$$

Portanto, $\Delta([x, y] - x \otimes y + y \otimes x)$ pertence a $I \otimes T(L) + T(L) \otimes I$. Além disso,

$$\varepsilon([x, y] - x \otimes y + y \otimes x) = 0$$

e

$$S([x, y] - x \otimes y + y \otimes x) = -([x, y] - x \otimes y + y \otimes x)$$

pertence a I . Assim, concluímos que I é um ideal de Hopf de $T(L)$ e, consequentemente, $U(L)$ tem uma estrutura de álgebra de Hopf, conforme [1, Section 4.3].

O teorema a seguir, conhecido por Teorema PBW, foi provado, em diferentes épocas, por Poincaré, Birkhoff e Witt e tem fundamental importância no estudo de $U(L)$. Este teorema nos permite conhecer os elementos da álgebra envolvente de uma álgebra de Lie.

Teorema 1.3.5. (Teorema PBW [3, Section 17.3, Corollary C]) *Sejam L uma álgebra de Lie e $B = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ uma base bem ordenada de L . Então, conjunto de todos os monômios*

$$u_1^{n_1} u_2^{n_2} \dots u_k^{n_k},$$

onde os expoentes são inteiros positivos, juntamente com a unidade 1, formam uma base para a álgebra envolvente $U(L)$.

Capítulo 2

Geradores PBW

Neste capítulo, apresentamos algumas definições, resultados e exemplos que serão de grande importância para chegarmos ao resultado principal deste trabalho.

2.1 Superletras e superletras duras

Seja $H = G\langle X \rangle$ uma álgebra, onde $X = \{x_i | i \in I\}$ é um conjunto de indeterminadas e G é um grupo.

Definição 2.1.1. *Seja X um conjunto parcialmente ordenado. Um subconjunto $Y \subseteq X$ é dito um subconjunto dirigido se todo par de elementos em Y possui uma cota superior que pertence a Y . Dizemos que X é completamente ordenado se todo subconjunto dirigido Y possui um supremo.*

Definição 2.1.2. *A constituição de uma palavra u em $G \cup X$ é uma família quase nula de inteiros não negativos $\{m_x | x \in X\}$ tais que u possui m_x ocorrências de x .*

Exemplo 2.1.3. *Sejam $X = \{x_1, x_2\}$ e $u = x_2x_1x_2$. Então $m_{x_1} = 1$, pois x_1 ocorre uma vez em u e $m_{x_2} = 2$, pois u tem duas ocorrências de x_2 . Logo, a constituição da palavra u é $\{1, 2\}$.*

Fixemos uma ordem completa aleatória, $>$, no conjunto X . Isto é, se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, assumimos $x_1 > x_2 > \dots > x_n$.

Seja Γ^+ o monoide livre aditivo (comutativo) gerado por X . Então, Γ^+ é completamente ordenado com respeito à seguinte ordem:

$$m_1x_{i_1} + m_2x_{i_2} + \dots + m_kx_{i_k} > m'_1x_{i_1} + m'_2x_{i_2} + \dots + m'_kx_{i_k} \quad (2.1)$$

se o primeiro número não nulo da esquerda para a direita em

$$(m_1 - m'_1, m_2 - m'_2, \dots, m_k - m'_k)$$

é positivo, onde $x_{i_1} > x_{i_2} > \dots > x_{i_k}$ em X .

Considere, por exemplo, $X = \{x_1, x_2\}$ e as palavras $u = x_1x_2x_1$ e $v = x_1x_2x_2$. Sejam $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ as ocorrências de cada letra em u e $m'_1 = 1$, $m'_2 = 2$ o número de ocorrências, em v , de x_1 e x_2 . Como $(m_1 - m'_1, m_2 - m'_2) = (1, -1)$, temos que $2x_1 + x_2 > x_1 + 2x_2$.

Definição 2.1.4. *Seja u uma palavra em $G \cup X$. Então, o grau associado a u é dado por $D(u) = \sum_{x \in X} m_x x \in \Gamma^+$, onde $\{m_x | x \in X\}$ é a constituição de u . Se $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ pertencente a $G\langle X \rangle$, com $0 \neq \alpha_i$ em k , definimos*

$$D(f) = \max\{D(u_i) | 1 \leq i \leq n\}. \quad (2.2)$$

Exemplo 2.1.5. *Considere $X = \{x_1, x_2\}$ e $u = x_1x_2^2x_1 = x_1x_2x_2x_1$. Assim, $m_{x_1} = 2$, $m_{x_2} = 2$ e o grau da palavra u é $D(u) = 2x_1 + 2x_2$.*

No conjunto de todas as palavras em X , fixamos a ordem lexicográfica com prioridade da esquerda para a direita, onde o início próprio de uma palavra é considerado maior do que a palavra inteira.

Definição 2.1.6. *Uma palavra não vazia u é dita uma palavra standard (ou palavra de Lyndon, ou palavra de Lyndon-Shirshov) se, para toda decomposição $u = vw$ com v e w não vazias, $vw > wv$.*

Exemplo 2.1.7. *Seja $u = x_1^2 x_2$ uma palavra em X . Consideremos as decomposições possíveis para u :*

1. $u = vw$, onde $v = x_1^2$ e $w = x_2$;
2. $u = vw$, onde $v = x_1$ e $w = x_1 x_2$.

Perceba que, em ambas as decomposições, temos $vw > wv$. De fato, pela ordem lexicográfica fixada, $x_1^2 x_2 > x_2 x_1^2$ e $x_1^2 x_2 > x_1 x_2 x_1$. Portanto, u é um exemplo de palavra standard.

Definição 2.1.8. *Uma palavra não associativa é uma palavra onde colchetes $[,]$ são arranjados de alguma forma, definindo como aplicar a multiplicação.*

Se $[u]$ denota uma palavra não associativa, então denotamos por u a palavra associativa obtida removendo os colchetes de $[u]$.

Considere, por exemplo, a palavra não associativa $[u] = [x_1, [x_1, x_2]]$. Omitindo os colchetes de $[u]$, obtemos a palavra associativa $u = x_1^2 x_2$.

Note que cada palavra não associativa gera uma única palavra associativa. Porém, a recíproca não vale. De uma palavra associativa u , podemos obter mais de uma palavra não associativa arranjando os colchetes de diferentes formas.

Exemplo 2.1.9. *No exemplo anterior, removendo os colchetes de $[u] = [x_1, [x_1, x_2]]$, obtemos apenas $u = x_1^2 x_2$. No entanto, na palavra associativa $u = x_1^2 x_2$, podemos arranjar os colchetes de duas formas: $[u]_1 = [[x_1, x_1], x_2]$ e $[u]_2 = [x_1, [x_1, x_2]]$.*

Definição 2.1.10. *O conjunto de palavras standard não associativas, denotado por SL , é o maior conjunto que contém todas as variáveis x_i e satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $[u] = [[v], [w]] \in SL$, então $[v], [w] \in SL$ e $v > w$ são standard;*
2. *Se $[u] = [[v_1, v_2], [w]] \in SL$, então $v_2 \leq w$.*

Teorema 2.1.11. (Teorema de Shirshov, [13, Lemma 2]) *Toda palavra standard u possui um único alinhamento de colchetes tal que a palavra não associativa obtida $[u]$ é standard.*

O alinhamento de colchetes ao qual se refere o Teorema de Shirshov pode ser obtido se escolhermos os fatores v e w da decomposição não associativa $[u] = [[v], [w]]$ de maneira que v, w sejam palavras standard tais que $u = vw$ e v tenha o comprimento minimal. No Exemplo 2.1.9, vimos que $u = x_1^2 x_2$ gera $[u]_1 = [[x_1, x_1], x_2]$ e $[u]_2 = [x_1, [x_1, x_2]]$. Contudo, $[u]_1 = [[x_1, x_1], x_2]$ não é uma palavra não associativa standard, pois $v = x_1^2$ e $w = x_2$ e v não é palavra associativa standard.

Definição 2.1.12. *Seja G um grupo. Uma função $\mathcal{X} : G \rightarrow k \setminus \{0\}$ é dita caracter de G se \mathcal{X} é um morfismo de grupos.*

Definição 2.1.13. *Dizemos que x é uma variável quântica se um elemento group-like g e um caracter \mathcal{X} , denotados por g_x e \mathcal{X}^x , estão associados a x .*

Seja u uma palavra formada por variáveis quânticas em $X = \{x_i | i \in I\}$. Para cada palavra u em X denotamos por g_u o elemento de G obtido de u substituindo cada x_i por g_i . Da mesma forma, denotamos por \mathcal{X}^u o caracter obtido de u substituindo cada x_i por \mathcal{X}^i .

Definição 2.1.14. *Uma superletra é um polinômio que é uma palavra standard não associativa, onde os colchetes são definidos por*

$$[u, v] = uv - \mathcal{X}^u(g_v)vu, \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{X}^u(g_v)$ será denotado por p_{uv} .

Uma palavra em superletras é chamada de *superpalavra*. Quando multiplicada à esquerda por um elemento group-like, dizemos que é uma G -*superpalavra*.

Exemplo 2.1.15. *Tomemos as superletras $[u] = [x_1, x_2]$ e $[v] = [[x_1, x_2], x_2]$. Então os produtos $[v][u][v] = [[x_1, x_2], x_2][x_1, x_2][[x_1, x_2], x_2]$ e $[u][v] = [x_1, x_2][[x_1, x_2], x_2]$*

são exemplos de superpalavras. Além disso, se g é um elemento group-like de H , então $g[x_1, x_2][[x_1, x_2], x_2]$ e $g[[x_1, x_2], x_2][x_1, x_2][[x_1, x_2], x_2]$ são G -superpalavras.

Definimos o produto entre duas palavras u, v de X como a justaposição de u e v , ou seja, $u \cdot v = uv$. A fórmula dada em (2.3) define um skew-comutador bilinear nas combinações lineares de palavras de mesmo grau. Estes colchetes se relacionam com o produto da seguinte forma:

$$[u \cdot v, w] = p_{vw}[u, w] \cdot v + u \cdot [v, w], \quad (2.4)$$

$$[u, v \cdot w] = [u, v] \cdot w + p_{uv}v \cdot [u, w]. \quad (2.5)$$

Exemplo 2.1.16. *Sejam $X = \{x_i | i \in I\}$ um conjunto de variáveis quânticas e $u = x_1, v = x_2, z = u \cdot v = x_1x_2$ palavras em X . Então, por (2.3), (2.4) e (2.5), temos:*

$$\begin{aligned} [u, v] &= [x_1, x_2] = x_1x_2 - p_{12}x_2x_1 \\ [z, v] &= [x_1x_2, x_2] = p_{22}[x_1, x_2]x_2 + x_1[x_2, x_2] \\ &= p_{22}(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_2 + x_1(x_2^2 - p_{22}x_2^2) \\ &= p_{22}x_1x_2^2 - p_{22}p_{12}x_2x_1x_2 + x_1x_2^2 - p_{22}x_1x_2^2 \\ &= x_1x_2^2 - p_{12}p_{22}x_2x_1x_2 \\ [u, z] &= [x_1, x_1x_2] = [x_1, x_1]x_2 + p_{11}x_1[x_1, x_2] \\ &= (x_1^2 - p_{11}x_1^2)x_2 + p_{11}x_1(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) \\ &= x_1^2x_2 - p_{11}x_1^2x_2 + p_{11}x_1^2x_2 - p_{11}p_{12}x_1x_2x_1 \\ &= x_1^2x_2 - p_{11}p_{12}x_1x_2x_1 \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.1.11, cada palavra standard u define uma única superletra, a qual denotamos por $[u]$. A ordem nas superletras é definida de forma natural, ou seja, $[u] > [v] \iff u > v$.

Definição 2.1.17. *Uma superletra $[u]$ é dita dura em H se o seu valor em H não é uma combinação linear de valores de superpalavras do mesmo grau (2.2) em superletras menores do que $[u]$.*

Quando a superletra $[u]$ não é dura em H , dizemos que a mesma é *suave em H* . Geralmente, não é simples classificar uma superletra em dura ou suave. Para tanto, podemos utilizar resultados conhecidos que serão apresentados em seguida.

Proposição 2.1.18. [6, Corollary 2] *Uma superletra $[u]$ é dura em H se, e somente se, o valor em H da palavra standard u não é uma combinação linear de valores de palavras menores com o mesmo grau (2.2).*

Exemplo 2.1.19. *Seja H uma álgebra de Hopf onde $[x_1, [x_1, x_2]] = 0$ e $x_1 > x_2$. Desenvolvendo os colchetes, obtemos o seguinte:*

$$\begin{aligned}
0 = [x_1, [x_1, x_2]] &= x_1[x_1, x_2] - p_{11}p_{12}[x_1, x_2]x_1 \\
&= x_1(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) - p_{11}p_{12}(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_1 \\
&= x_1^2x_2 - p_{12}x_1x_2x_1 - p_{11}p_{12}x_1x_2x_1 + p_{11}p_{12}p_{12}x_2x_1^2 \\
&= x_1^2x_2 - p_{12}(1 + p_{11})x_1x_2x_1 + p_{12}^2p_{11}x_2x_1^2.
\end{aligned}$$

Agora, podemos verificar que a superletra $[x_1, [[x_1, x_2], x_2]]$ é suave em H . Note que

$$x_1^2x_2^2 = (x_1^2x_2)x_2 = (p_{12}(1 + p_{11})x_1x_2x_1 + p_{12}^2p_{11}x_2x_1^2)x_2 = \alpha x_1x_2x_1x_2 + \beta x_2x_1^2x_2$$

é uma combinação linear de palavras menores com o mesmo grau. Logo, pela proposição anterior, $[x_1, [[x_1, x_2], x_2]]$ é suave em H .

Proposição 2.1.20. [7, Lemma 4.8] *Seja B um conjunto de superletras contendo x_1, \dots, x_n . Se cada par $[u], [v]$ em B , com $u > v$, satisfaz uma das seguintes condições:*

- (1) $[[u], [v]]$ não é uma palavra standard não associativa;
- (2) a superletra $[[u], [v]]$ não é dura em H ;
- (3) $[[u], [v]] \in B$,

então o conjunto B inclui todas as superletras duras em H .

2.2 Álgebra de Hopf de Caracteres

Sejam H uma álgebra de Hopf e G o conjunto de todos os elementos group-like de H . Mostraremos, a seguir, que G é um grupo.

De fato, 1_H está em G , pois $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$ e $\varepsilon(1_H) = 1$. Além disso, se g, h pertencem a G , então $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh$ e $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h) = 1$. Portanto, gh pertence a G . Finalmente, dado g pertencente a G , temos $g^{-1} = S(g)$ pertencente a G . De fato, pela Proposição 1.2.9, $\Delta(S(g)) = S(g) \otimes S(g)$, $\varepsilon(S(g)) = \varepsilon(g) = 1$ e, pela definição de S (1.2), temos $S(g)g = gS(g) = \varepsilon(g)1_H = 1_H$.

O espaço gerado por G em H é uma álgebra de grupo de G . Isto significa que elementos group-like distintos são linearmente independentes em H . Para g pertencente a G , tomemos o conjunto

$$L_g = \{h \in H \mid \Delta(h) = h \otimes 1 + g \otimes h\}.$$

Os elementos deste conjunto são chamados g -primitivos, ou *skew-primitivos* caso g não seja especificado.

Definição 2.2.1. Dizemos que um elemento h de H é um elemento caracter, ou um semi-invariante, se existe um caracter $\mathcal{X} : G \rightarrow k \setminus \{0\}$ tal que, para todo g em G ,

$$g^{-1}hg = \mathcal{X}(g)h.$$

Se h é um elemento semi-invariante não nulo, então o caracter é unicamente determinado pela fórmula dada na Definição 2.2.1.

Definição 2.2.2. Uma álgebra de Hopf H é chamada de álgebra de Hopf de caracteres se o grupo G de todos os elementos group-like é comutativo e H é gerada sobre $k[G]$ por elementos skew-primitivos semi-invariantes.

Proposição 2.2.3. [5] Considere a skew-álgebra de grupo $G\langle X \rangle$, onde G é o grupo dos elementos group-like e $X = \{x_i \mid i \in I\}$ é um conjunto de elementos semi-

invariantes. Esta álgebra possui estrutura natural de álgebra de Hopf de caracteres dada por:

$$\begin{aligned}\Delta(x_i) &= x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i, & \Delta(g) &= g \otimes g, \\ \varepsilon(x_i) &= 0, & \varepsilon(g) &= 1, \\ S(x_i) &= -g_i^{-1}x_i, & S(g) &= g^{-1},\end{aligned}$$

onde i pertence a I e g, g_i são pertencentes a G .

Demonstração. Para mostrar que $G\langle X \rangle$ é uma álgebra de Hopf com a estrutura dada, precisamos que Δ e ε satisfaçam os diagramas de coassociatividade e counidade (Definição 1.1.7), que S satisfaça a definição de antípoda (1.2) e que Δ e ε sejam morfismos de álgebras. Vejamos que tudo isso é satisfeito começando pela definição de coálgebra:

$$\begin{aligned}((\Delta \otimes id) \circ \Delta)(x_i) &= (\Delta \otimes id)(x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i) \\ &= \Delta(x_i) \otimes 1 + \Delta(g_i) \otimes x_i \\ &= (x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i) \otimes 1 + g_i \otimes g_i \otimes x_i \\ &= x_i \otimes 1 \otimes 1 + g_i \otimes x_i \otimes 1 + g_i \otimes g_i \otimes x_i\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}((id \otimes \Delta) \circ \Delta)(x_i) &= (id \otimes \Delta)(x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i) \\ &= x_i \otimes \Delta(1) + g_i \otimes \Delta(x_i) \\ &= x_i \otimes 1 \otimes 1 + g_i \otimes (x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i) \\ &= x_i \otimes 1 \otimes 1 + g_i \otimes x_i \otimes 1 + g_i \otimes g_i \otimes x_i.\end{aligned}$$

Logo, vale a coassociatividade de Δ . Vejamos, agora que ε é counidade de $G\langle X \rangle$.

De fato, temos

$$\begin{aligned}((id \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(x_i) &= (id \otimes \varepsilon)(x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i) \\ &= x_i \otimes \varepsilon(1) + g_i \otimes \varepsilon(x_i) \\ &= x_i \otimes 1 + g_i \otimes 0 \\ &= x_i \otimes 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
((\varepsilon \otimes id) \circ \Delta)(x_i) &= (\varepsilon \otimes id)(x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i) \\
&= \varepsilon(x_i) \otimes 1 + \varepsilon(g_i) \otimes x_i \\
&= 0 \otimes 1 + 1 \otimes x_i \\
&= 1 \otimes x_i.
\end{aligned}$$

Logo, ε satisfaz o diagrama da counidade.

Agora, temos

$$\begin{aligned}
S(x_{i_1})x_{i_2} &= m((S \otimes id) \circ \Delta(x_i)) \\
&= m((S \otimes id)(x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i)) \\
&= m(S(x_i) \otimes 1 + S(g_i) \otimes x_i) \\
&= S(x_i)1 + S(g_i)x_i \\
&= -g_i^{-1}x_i + g_i^{-1}x_i \\
&= 0 \\
&= \varepsilon(x_i)1.
\end{aligned}$$

Além disso, como $\Delta(gx_i) = gx_i \otimes g + gg_i \otimes gx_i = \Delta(g)\Delta(x_i)$ e $\varepsilon(gx_i) = 0 = \varepsilon(g)\varepsilon(x_i)$, a condição de Δ e ε serem morfismos de álgebras também é satisfeita.

□

2.3 Geradores PBW

A partir desta seção, H denotará uma álgebra de Hopf de caracteres.

Definição 2.3.1. *Sejam S uma k -álgebra e A uma subálgebra com base fixada $\{a_j | j \in J\}$. Um conjunto totalmente ordenado $W \subseteq S$ é dito um conjunto de geradores de Poincaré-Birkhoff-Witt de S sobre A (ou geradores PBW de S sobre A) se existe uma função $h : W \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, chamada de função altura, tal que o conjunto de todos os produtos*

$$a_j w_1^{n_1} w_2^{n_2} \dots w_k^{n_k},$$

onde $j \in J$, $w_1 < w_2 < \dots < w_k$, $n_i < h(w_i)$, $1 \leq i \leq k$ é uma base de S .

O valor $h(w)$ é dito altura de w em W .

Quando $A = k$, então chamamos W simplesmente de conjunto de geradores PBW de S .

Definição 2.3.2. *Seja $[u]$ uma superletra dura em H . A altura $h = h([u])$ é o menor número em \mathbb{Z}^+ tal que*

- i. p_{uu} é uma raiz t -ésima primitiva de 1 e $h = t$ ou $h = tl^r$, onde l é a característica do corpo k , no caso de característica positiva;*
- ii. o valor de $[u]^h$ em H é uma combinação linear de superpalavras de mesmo grau em superletras menores que $[u]$ e G -superpalavras de menor grau.*

Se o número ao qual se refere a definição anterior não existir, dizemos que a altura de $[u]$ é infinita.

Teorema 2.3.3. [6, Theorem 2] *Seja H uma álgebra de Hopf de caracteres. Então, os valores de todas as superletras duras em H com a função altura dada acima formam um conjunto de geradores PBW para H sobre $k[G]$.*

Teorema 2.3.4. [8, Theorem 1.1] *Toda subálgebra coideal à direita U que contém todos os elementos group-like de H tem uma base PBW sobre $k[G]$, denotada B_U , a qual pode ser estendida a uma base PBW de H sobre $k[G]$, denotada B_{H_U} .*

Podemos obter a base PBW de U sobre $k[G]$ a partir da base PBW de H dada no Teorema 2.3.3 da seguinte maneira:

Suponhamos que para uma dada superletra dura $[u]$ em H , existe um elemento c em U dado por

$$c_u = [u]^s + \sum \alpha_i W_i + \sum \beta_i V_i, \quad (2.6)$$

onde W_i são superpalavras da base iniciando por superletras menores que $[u]$, $D(W_i) = sD(u)$, e V_j são G -superpalavras com $D(V_j) < sD(u)$.

Dizemos que uma álgebra $H \subseteq G\langle X \rangle$ é homogênea se H for graduada, ou seja, $H = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$ e $H_{\gamma_1} H_{\gamma_2} \subseteq H_{\gamma_1 + \gamma_2}$. Nesse sentido, se U for uma subálgebra homogênea, podemos assumir $\beta_j = 0$, para todo j . Fixamos um dos elementos dados por (2.6) com s minimal e denotamos por c_u .

Proposição 2.3.5. [8, Lemma 4.3] *Na representação (2.6) de um elemento c_u , temos $s = 1$, ou p_{uu} é uma raiz t -ésima primitiva da unidade e $s = t$, ou $s = t(\text{chark})^r$ (no caso de característica positiva).*

Proposição 2.3.6. [8, Lemma 4.4] *Seja U uma subálgebra coideal à direita de H . Um elemento c em H pertence a U se, e somente se, todos os geradores PBW de c na base B_{H_U} pertencem a B_U .*

Em particular, o conjunto B_U de todos os elementos c_u escolhidos com a função altura definida na Proposição 2.3.5 é um conjunto de geradores PBW para U sobre $k[G]$.

Para desenvolvermos os cálculos necessários para encontrar as subálgebras coideais à direita, o que será feito no próximo capítulo, precisamos levar em consideração as derivadas em uma subálgebra.

Observação 2.3.7. *A subálgebra A gerada por x_1, \dots, x_n sobre k contida em $U_q^+(\mathfrak{g})$, onde \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie, admite um cálculo diferencial definido por*

$$\partial_i(x_j) = \delta_i^j, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u)v + p(u, x_i)u\partial_i(v),$$

para $x_i \in X$.

Definição 2.3.8. *Seja S uma subálgebra de $A = k\langle X \rangle$. Dizemos que S é uma subálgebra diferencial se, para todo s em S e todo x_i em X , $\partial_i(s)$ é pertencente a S .*

Sabemos, por [9, Lemma 2.10], que há uma correspondência entre as álgebras coideais à direita homogêneas contendo $k[G]$ de uma álgebra de Hopf de caracteres H e as subálgebras diferenciais de $A = k\langle X \rangle$, fato que será usado nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Reticulado de Coideais de $U_q^+(A_2)$

Neste capítulo, vamos explicitar um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(A_2)$. Além disso, encontraremos todas as subálgebras coideais à direita que contêm $k[G]$, obtendo seu reticulado de coideais. O método utilizado para alcançarmos nosso objetivo é o mesmo utilizado em [12] para o caso de uma álgebra de Lie de tipo G_2 .

3.1 A álgebra $U_q^+(A_2)$

Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto de variáveis, $C = \|\|a_{ij}\|\|$ uma matriz de Cartan generalizada simetrizável pela matriz $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, ou seja, $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$, e \mathfrak{g} uma álgebra de Lie relacionada a C (ver [4]). Os parâmetros de quantização $p_{ij} = p(x_i, x_j) = \mathcal{X}^i(g_j)$ são relacionados por

$$p_{ii} = q^{d_i}, \quad p_{ij}p_{ji} = q^{d_i a_{ij}}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.1)$$

A *quantização multiparâmetro* $U_q^+(\mathfrak{g})$ da subálgebra de Borel \mathfrak{g}^+ é uma álgebra de Hopf de caracteres definida pelas seguintes relações com o skew-comutador (2.3):

$$[[\dots [[x_i, x_j], x_j], \dots], x_j] = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \quad (3.2)$$

onde x_j ocorre $1 - a_{ji}$ vezes. Os lados esquerdos de cada uma das relações definidas

acima são elementos skew-primitivos em $G\langle X \rangle$ (ver [5, Theorem 6.1]). Portanto, o ideal gerado por estes elementos é um ideal de Hopf.

Além disso, se q pertencente a k não é raiz da unidade e a matriz de Cartan $C = \|\|a_{ij}\|\|$ é de tipo finito, então por [9, Lemma 3.1 e Corollary 3.2], $U_q^+(\mathfrak{g})$ é uma álgebra homogênea e toda subálgebra U de $U_q^+(\mathfrak{g})$ contendo o grupo dos elementos group-like é também homogênea.

Para este trabalho, consideramos A_2 a álgebra de Lie definida pela matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A seguir, passamos a descrever $U_q^+(A_2)$ a partir das relações dadas em (3.1) e (3.2), entre os parâmetros de quantização p_{ij} e entre as variáveis quânticas x_1, x_2 . Como $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$, da matriz de Cartan de A_2 , temos que $-d_1 = -d_2$, então podemos supor que $d_1 = d_2 = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} p_{11} &= q^{d_1} &= q, \\ p_{22} &= q^{d_2} &= q, \\ p_{12}p_{21} &= q^{d_1 a_{12}} &= q^{-1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para as relações (3.2), observe que $1 - a_{12} = 2$ e $1 - a_{21} = 2$. Daí, segue que

$$[x_1, [x_1, x_2]] = 0, \quad [[x_1, x_2], x_2] = 0. \tag{3.4}$$

Agora, estamos interessados em encontrar as subálgebras coideais à direita de $U_q^+(A_2)$. É o que faremos nas próximas seções.

3.2 Superletras duras em $U_q^+(A_2)$

Proposição 3.2.1. *Todas as superletras duras em $U_q^+(A_2)$ estão contidas na lista abaixo:*

$$\begin{aligned} [A] &= x_1, \\ [B] &= [x_1, x_2], \\ [C] &= x_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Demonstração. Para provar que todas as superletras duras em $U_q^+(A_2)$ estão contidas nessa lista, é preciso provar que este conjunto satisfaz as condições da Proposição 2.1.20. Ou seja, para todo par $([X], [Y])$ da lista, tal que $X > Y$, a palavra não associativa $[[X], [Y]]$ pertence a este conjunto, ou não é uma palavra standard não associativa, ou define uma superletra suave em $U_q^+(A_2)$.

Temos 3 possíveis casos de palavras $[[X], [Y]]$ em que $X > Y$ neste conjunto. São eles: $[[A], [B]]$, $[[A], [C]]$ e $[[B], [C]]$. Analisemos cada uma das possibilidades. $[[A], [C]] = [B]$ pertence ao conjunto, $[[A], [B]] = [x_1, [x_1, x_2]] = 0$ (por (3.4)), então

$$\begin{aligned} x_1[x_1, x_2] - p_{11}p_{12}[x_1, x_2]x_1 &= 0 \\ x_1(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) - p_{11}p_{12}(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_1 &= 0 \\ x_1^2x_2 - p_{12}x_1x_2x_1 - p_{11}p_{12}x_1x_2x_1 + p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2 &= 0 \\ x_1^2x_2 &= (1 + p_{11})p_{12}x_1x_2x_1 - p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2. \end{aligned}$$

Ou seja, a palavra associativa obtida omitindo os colchetes é uma combinação linear de palavras menores em $U_q^+(A_2)$. Portanto, segundo a Proposição 2.1.18, a palavra não associativa é suave.

Por fim, pela relação (3.4), $[[B], [C]] = [[x_1, x_2], x_2] = 0$ então

$$\begin{aligned} [x_1, x_2]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[x_1, x_2] &= 0 \\ (x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_2 - p_{12}p_{22}x_2(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) &= 0 \\ x_1x_2^2 - p_{12}x_2x_1x_2 - p_{12}p_{22}x_2x_1x_2 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1 &= 0 \\ x_1x_2^2 &= p_{12}(1 + p_{22})x_2x_1x_2 - p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1. \end{aligned}$$

Como no caso anterior, a palavra associativa obtida omitindo os colchetes é uma combinação linear de palavras menores e, portanto, a palavra não associativa não é dura em $U_q^+(A_2)$ (Proposição 2.1.18). Logo, pela Proposição 2.1.20, o resultado segue. \square

3.3 Tabela de derivadas de $U_q^+(A_2)$

Considerando a Observação 2.3.7, sabemos que a subálgebra $A = k\langle x_1, x_2 \rangle$ de $U_q^+(A_2)$ admite um cálculo diferencial definido por

$$\partial_i(x_j) = \delta_i^j, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u)v + p_{ux_i}u\partial_i(v), \quad (3.6)$$

onde $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$, para $i, j = 1, 2$.

Como já é de nosso conhecimento, há uma correspondência entre as subálgebras coideais homogêneas que contêm $k[G]$ e as subálgebras diferenciais de $A = k\langle x_1, x_2 \rangle$. Assim, se conhecermos as subálgebras diferenciais, saberemos descrever as subálgebras coideais à direita homogêneas de $U_q^+(A_2)$ (e também de $U_q^+(B_2)$) que contêm $k[G]$.

Utilizando as fórmulas dadas em (3.6), podemos demonstrar a próxima proposição.

Proposição 3.3.1. *As derivadas dos elementos da Lista 3.5 estão dadas na tabela abaixo:*

	∂_1	∂_2
$[A]$	1	0
$[B]$	$(1 - q^{-1})x_2$	0
$[C]$	0	1

Tabela 3.1: Tabela de Derivadas (caso $U_q^+(A_2)$)

Demonstração. Para mostrar este resultado, vamos calcular as derivadas dos elementos da Lista 3.5. Considerando as fórmulas dadas em (3.6), temos

$$\begin{aligned}\partial_1([A]) &= \partial_1(x_1) = 1 & e & \quad \partial_2([A]) = \partial_2(x_1) = 0, \\ \partial_1([C]) &= \partial_1(x_2) = 0 & e & \quad \partial_2([C]) = \partial_2(x_2) = 1.\end{aligned}$$

Para $[B] = [x_1, x_2] = x_1x_2 - p_{12}x_2x_1$, calculamos $\partial_1([B])$ e $\partial_2([B])$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\partial_1([B]) &= \partial_1(x_1x_2) - p_{12}\partial_1(x_2x_1) \\ &= (\partial_1(x_1)x_2 + p_{11}x_1\partial_1(x_2)) - p_{12}(\partial_1(x_2)x_1 + p_{21}x_2\partial_1(x_1)) \\ &= (1x_2 + p_{11}x_1 \cdot 0) - p_{12}(0x_1 + p_{21}x_2 \cdot 1) \\ &= x_2 - p_{12}p_{21}x_2 \\ &= (1 - p_{12}p_{21})x_2 \\ &= (1 - q^{-1})x_2,\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da relação (3.3), e

$$\begin{aligned}\partial_2([B]) &= \partial_2(x_1x_2) - p_{12}\partial_2(x_2x_1) \\ &= (\partial_2(x_1)x_2 + p_{12}x_1\partial_2(x_2)) - p_{12}(\partial_2(x_2)x_1 + p_{22}x_2\partial_2(x_1)) \\ &= (0x_2 + p_{12}x_1 \cdot 1) - p_{12}(1x_1 + p_{22}x_2 \cdot 0) \\ &= p_{12}x_1 - p_{12}x_1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

3.4 Geradores PBW de $U_q^+(A_2)$

Proposição 3.4.1. *Seja U uma subálgebra coideal à direita de $U_q^+(A_2)$ contendo $k[G]$. Então os possíveis geradores PBW de U estão listados abaixo:*

$$\begin{aligned}x_1, \\ [B] \quad \text{ou} \quad [x_2, x_1], \\ x_2.\end{aligned}$$

Além disso, um coideal possui, no máximo, um gerador da segunda linha.

Demonstração. Para este caso, usando (2.6), são três possibilidades: $c_1 = x_1$, $c_2 = [B] + \alpha x_2 x_1$ e $c_3 = x_2$.

Inicialmente, vamos calcular todas as possibilidades para α . Digamos que c_2 é um gerador de U . Como $U_A = U \cap A$ é uma subálgebra diferencial, segue que os seguintes elementos estão em U :

$$\begin{aligned}\partial_2([B] + \alpha x_2 x_1) &= \partial_2([B]) + \alpha \partial_2(x_2 x_1) \\ &= 0 + \alpha x_1 = \alpha x_1,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\partial_1([B] + \alpha x_2 x_1) &= \partial_1([B]) + \alpha \partial_1(x_2 x_1) \\ &= (1 - q^{-1})x_2 + \alpha p_{21} x_2 \\ &= (1 - q^{-1} + \alpha p_{21})x_2.\end{aligned}$$

Se $\alpha \neq 0$ e $(1 - q^{-1} + \alpha p_{21}) \neq 0$, então x_1 e x_2 pertencem a U e isso significa que $U = U_q^+(A_2)$. Logo, devemos supor que $\alpha = 0$ ou $(1 - q^{-1} + \alpha p_{21}) = 0$.

Assumindo que $\alpha = 0$, concluímos que $c_2 = [B]$ é um gerador para U . No segundo caso, assumimos que $1 - q^{-1} + \alpha p_{21} = 0$, ou seja, $\alpha = \frac{q^{-1}-1}{p_{21}}$ e podemos escrever $c_2 = [B] + \alpha x_2 x_1$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}c_2 &= x_1 x_2 - p_{12} x_2 x_1 + \frac{(q^{-1}-1)}{p_{21}} x_2 x_1 \\ &= \frac{p_{21} x_1 x_2 - p_{12} p_{21} x_2 x_1 + q^{-1} x_2 x_1 - x_2 x_1}{p_{21}} \\ &= -p_{21}^{-1} (x_2 x_1 - p_{21} x_1 x_2) \\ &= -p_{21}^{-1} [x_2, x_1],\end{aligned}$$

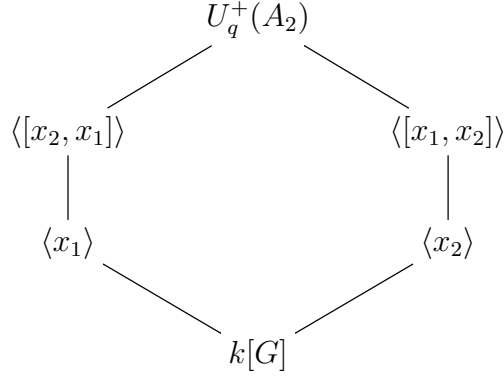
onde a penúltima e a última linhas seguem das relações (3.3) e (2.3), respectivamente. Então o resultado segue. \square

3.5 Reticulado de coideais de $U_q^+(A_2)$

A seguir, vamos apresentar o reticulado de coideais de $U_q^+(A_2)$ e provar, com base nos resultados anteriores, que nele estão representadas todas as subálgebras

coideais à direita que contêm $k[G]$.

Teorema 3.5.1. *Se q não é raiz da unidade, então o reticulado de subálgebras coideais à direita contendo $k[G]$ de $U_q^+(A_2)$ é dado pela figura abaixo:*



Demonstração. Seja U uma subálgebra coideal à direita de $U_q^+(A_2)$ que contém $k[G]$. Considerando a Seção 3.1, sabemos que U é homogênea. Então, pela Proposição 3.4.1, os possíveis geradores PBW para U são

$$\begin{aligned}
 & x_1, \\
 & [B] \quad \text{ou} \quad [x_2, x_1], \\
 & x_2.
 \end{aligned}$$

Note que, no reticulado exibido acima, $\langle [u] \rangle$ denota a menor subálgebra coideal à direita contendo $[u]$ e $k[G]$.

A subálgebra coideal à direita gerada por x_2 possui $\{x_2\}$ como conjunto de geradores PBW. Da mesma forma, a subálgebra coideal à direita gerada por x_1 possui como gerador PBW $\{x_1\}$.

Se $[B]$ pertence a U , então x_2 está em U , pois

$$\partial_1([B]) = (1 - q^{-1})x_2.$$

Logo, o conjunto de geradores PBW de $\langle [x_1, x_2] \rangle$ é dado por $\{x_2, [x_1, x_2]\}$.

Observe que se incluirmos x_1 em $\{x_2\}$ ou em $\{x_2, [x_1, x_2]\}$ como conjunto de geradores PBW da subálgebra coideal à direita U , temos $U = U_q^+(A_2)$, visto que x_2 é pertencente a cada um deles.

Por fim, se $[x_2, x_1]$ está em U , então x_1 também pertence a U , pois

$$\begin{aligned}
\partial_2([x_2, x_1]) &= \partial_2(x_2x_1) - p_{21}\partial_2(x_1x_2) \\
&= \partial_2(x_2)x_1 + p_{22}x_2\partial_2(x_1) - p_{21}(\partial_2(x_1)x_2 + p_{12}x_1\partial_2(x_2)) \\
&= 1x_1 + p_{22}x_20 - p_{21}(0x_2 + p_{12}x_11) \\
&= x_1 - p_{21}p_{12}x_1 \\
&= (1 - q^{-1})x_1,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (3.3). E, portanto, $\langle [x_2, x_1] \rangle$ possui como geradores PBW os elementos do conjunto $\{x_1, [x_2, x_1]\}$.

Observemos, novamente, que se incluirmos x_2 em $\{x_1\}$ ou em $\{x_1, [x_2, x_1]\}$ como conjuntos de geradores PBW da subálgebra U , obtemos $U = U_q^+(A_2)$, pois x_1 pertence a cada um deles.

Como uma subálgebra coideal à direita não possui mais de um gerador da mesma linha da lista de possíveis geradores, segue que estas são todas as subálgebras coideais à direita de $U_q^+(A_2)$ que contêm $k[G]$. Assim, obtemos o reticulado dado pelo teorema. □

Capítulo 4

Reticulado de Coideais de $U_q^+(B_2)$

Neste capítulo, vamos explicitar um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(B_2)$. Além disso, encontraremos todas as subálgebras coideais à direita que contêm $k[G]$, obtendo o reticulados de coideais, como no caso do capítulo anterior.

4.1 A álgebra $U_q^+(B_2)$

De maneira semelhante ao que foi feito no Capítulo 3, consideramos B_2 a álgebra de Lie definida pela seguinte matriz de Cartan:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para descrevermos $U_q^+(B_2)$, também é preciso encontrar as relações entre os parâmetros de quantização p_{ij} e entre as variáveis quânticas x_1, x_2 . De $d_1 a_{12} = d_2 a_{21}$, temos que $-d_1 = -2d_2$. Isso nos permite supor que $d_1 = 2, d_2 = 1$ e, portanto,

$$\begin{aligned} p_{11} &= q^{d_1} &= q^2, \\ p_{22} &= q^{d_2} &= q, \\ p_{12}p_{21} &= q^{d_1 a_{12}} &= q^{-2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Assim, temos $1 - a_{12} = 2$ e $1 - a_{21} = 3$. Logo,

$$[x_1, [x_1, x_2]] = 0, \quad [[[x_1, x_2], x_2], x_2] = 0, \quad (4.2)$$

pois, pela relação definida em (3.2), x_j aparece $1 - a_{ij}$ vezes.

Agora, faremos o mesmo processo utilizado no caso de $U_q^+(A_2)$ para obtermos o reticulado de subálgebras coideais à direita de $U_q^+(B_2)$. Para tanto, consideremos as relações dadas em (4.1) e (4.2), válidas nesta álgebra.

4.2 Superletras duras em $U_q^+(B_2)$

Proposição 4.2.1. *Todas as superletras duras em $U_q^+(B_2)$ estão contidas na seguinte lista:*

$$\begin{aligned} [A] &= x_1, \\ [B] &= [x_1, x_2], \\ [C] &= [[x_1, x_2], x_2], \\ [D] &= x_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Demonstração. Para demonstrar essa proposição, precisamos tomar cada palavra não associativa $[[X], [Y]]$ tal que $X > Y$ deste conjunto e avaliar se satisfaz uma das condições da Proposição 2.1.20. São seis possibilidades:

$$\begin{aligned} [[A], [B]] &= [x_1, [x_1, x_2]] \\ [[A], [C]] &= [x_1, [[x_1, x_2], x_2]] \\ [[A], [D]] &= [x_1, x_2] \\ [[B], [C]] &= [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]] \\ [[B], [D]] &= [[x_1, x_2], x_2] \\ [[C], [D]] &= [[[x_1, x_2], x_2], x_2] \end{aligned}$$

Como $[[A], [D]] = [x_1, x_2] = [B]$ e $[[B], [D]] = [[x_1, x_2], x_2] = [C]$ pertencem à Lista 4.3, segue que essas duas possibilidades cumprem a terceira condição da Proposição 2.1.20.

Vejamos, agora, as demais possibilidades. Na primeira delas, por um lado, $[[A], [B]] = [x_1, [x_1, x_2]] = 0$ (4.2). Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[[A], [B]] &= [x_1, [x_1, x_2]] = x_1[x_1, x_2] - p_{11}p_{12}[x_1, x_2]x_1 \\
&= x_1(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) - p_{11}p_{12}(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_1 \\
&= x_1^2x_2 - p_{12}x_1x_2x_1 - p_{11}p_{12}x_1x_2x_1 + p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2 \\
&= x_1^2x_2 - (1 + p_{11})p_{12}x_1x_2x_1 + p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2.
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$x_1^2x_2 = (1 + p_{11})p_{12}x_1x_2x_1 - p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2, \quad (4.4)$$

o que nos dá que $[[A], [B]]$ satisfaz a condição de ser suave em $U_q^+(B_2)$, pois a palavra obtida quando omitimos os colchetes nesse caso é combinação linear de palavras menores com o mesmo grau.

Para $[[A], [C]] = [x_1, [[x_1, x_2], x_2]]$, a palavra associativa obtida ao retirar os colchetes é $x_1^2x_2^2$ e, tomando (4.4), isso nos dá o seguinte:

$$\begin{aligned}
x_1^2x_2^2 &= x_1^2x_2x_2 \\
&= ((1 + p_{11})p_{12}x_1x_2x_1 - p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2)x_2 \\
&= (1 + p_{11})p_{12}x_1x_2x_1x_2 - p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2x_2,
\end{aligned}$$

o que significa que o valor de $[[A], [C]]$ em $U_q^+(B_2)$ é uma combinação linear de palavras menores de mesmo grau. Ou seja, $[[A], [C]]$ também cumpre a segunda condição da Proposição 2.1.20.

No caso de $[[B], [C]] = [[x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2]]$, a palavra obtida omitindo os colchetes é $x_1x_2x_1x_2^2$. Então, se considerarmos (4.4), temos

$$\begin{aligned}
x_1^2x_2^3 &= x_1^2x_2x_2^2 \\
&= ((1 + p_{11})p_{12}x_1x_2x_1 - p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2)x_2^2 \\
&= (1 + p_{11})p_{12}x_1x_2x_1x_2^2 - p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2x_2^2.
\end{aligned} \quad (4.5)$$

Agora, afirmamos que $x_1x_2x_1x_2^2$ é combinação linear de palavras menores e de mesmo grau e, portanto, não é dura em $U_q^+(B_2)$. De fato, da relação apresentada em (4.2) temos que

$$\begin{aligned}
0 &= [[[x_1, x_2], x_2], x_2] = [[x_1, x_2], x_2]x_2 - p_{12}p_{22}^2x_2[[x_1, x_2], x_2] \\
&= ([x_1, x_2]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[x_1, x_2])x_2 - p_{12}p_{22}^2x_2([x_1, x_2]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[x_1, x_2]) \\
&= [x_1, x_2]x_2^2 - p_{12}p_{22}x_2[x_1, x_2]x_2 - p_{12}p_{22}^2(x_2[x_1, x_2]x_2 - p_{12}p_{22}x_2^2[x_1, x_2]) \\
&= (x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_2^2 - p_{12}p_{22}x_2(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_2 \\
&\quad - p_{12}p_{22}(x_2(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_2 - p_{12}p_{22}x_2^2(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)) \\
&= x_1x_2^3 - p_{12}x_2x_1x_2^2 - p_{12}p_{22}x_2x_1x_2^2 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1x_2 \\
&\quad - p_{12}p_{22}(x_2x_1x_2^2 - p_{12}x_2^2x_1x_2 - p_{12}p_{22}x_2^2x_1x_2 + p_{12}^2p_{22}x_2^3x_1) \\
&= x_1x_2^3 - p_{12}x_2x_1x_2^2 - p_{12}p_{22}x_2x_1x_2^2 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1x_2 \\
&\quad - p_{12}p_{22}^2x_2x_1x_2^2 + p_{12}^2p_{22}^2x_2^2x_1x_2 + p_{12}^2p_{22}^3x_2^2x_1x_2 - p_{12}^3p_{22}^3x_2^3x_1 \\
&= x_1x_2^3 - (1 + p_{22} + p_{22}^2)p_{12}x_2x_1x_2^2 + (p_{12} - p_{22} + p_{12}p_{22}^2)p_{12}p_{22}x_2^2x_1x_2 \\
&\quad - p_{12}^3p_{22}^3x_2^3x_1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$x_1x_2^3 = (1 + p_{22} + p_{22}^2)p_{12}x_2x_1x_2^2 - (p_{12} - p_{22} + p_{12}p_{22}^2)p_{12}p_{22}x_2^2x_1x_2 + p_{12}^3p_{22}^3x_2^3x_1. \quad (4.6)$$

Como $x_1^2x_2^3 = x_1x_1x_2^3$, utilizando (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}
x_1^2x_2^3 &= x_1x_1x_2^3 \\
&= x_1((1 + p_{22} + p_{22}^2)p_{12}x_2x_1x_2^2 - (p_{12} - p_{22} + p_{12}p_{22}^2)p_{12}p_{22}x_2^2x_1x_2 + p_{12}^3p_{22}^3x_2^3x_1) \\
&= (1 + p_{22} + p_{22}^2)p_{12}x_1x_2x_1x_2^2 - (p_{12} - p_{22} + p_{12}p_{22}^2)p_{12}p_{22}x_1x_2^2x_1x_2 + p_{12}^3p_{22}^3x_1x_2^3x_1.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo a expressão acima em (4.5), temos

$$\begin{aligned}
(1 + p_{22} + p_{22}^2)p_{12}x_1x_2x_1x_2^2 - (p_{12} - p_{22} + p_{12}p_{22}^2)p_{12}p_{22}x_1x_2^2x_1x_2 + p_{12}^3p_{22}^3x_1x_2^3x_1 \\
= (1 + p_{11})p_{12}x_1x_2x_1x_2^2 - p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2x_2^2,
\end{aligned}$$

o que nos dá o seguinte:

$$\begin{aligned}
((1 + p_{22} + p_{22}^2) - (1 + p_{11}))p_{12}x_1x_2x_1x_2^2 - (p_{12} - p_{22} + p_{12}p_{22}^2)p_{12}p_{22}x_1x_2^2x_1x_2 \\
+ p_{12}^3p_{22}^3x_1x_2^3x_1 + p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2x_2^2 = 0.
\end{aligned}$$

Então

$$x_1x_2x_1x_2^2 = \frac{(p_{12} - p_{22} + p_{12}p_{22}^2)p_{12}p_{22}x_1x_2^2x_1x_2 - p_{12}^3p_{22}^3x_1x_2^3x_1 - p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2x_2^2}{((1 + p_{22} + p_{22}^2) - (1 + p_{11}))p_{12}}.$$

Desta maneira, podemos perceber que a superletra $[[B], [C]]$ não é dura em $U_q^+(B_2)$ e satisfaz a segunda condição da Proposição 2.1.20.

Para o último caso, $[[C], [D]] = [[[x_1, x_2], x_2], x_2]$, vimos em (4.2) que essa igualdade é zero. Além disso, em (4.6), vimos que a palavra associativa obtida removendo os colchetes é combinação linear de palavras menores e de mesmo grau. Portanto, este caso também satisfaz a condição de ser suave em $U_q^+(B_2)$. Logo, a demonstração do teorema está concluída. \square

4.3 Tabela de derivadas de $U_q^+(B_2)$

Pela Observação 2.3.7, a subálgebra $A = k\langle x_1, x_2 \rangle$ de $U_q^+(B_2)$ admite um cálculo diferencial definido por:

$$\partial_i(x_j) = \delta_i^j, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u)v + p_{ux_i}u\partial_i(v), \quad (4.7)$$

onde $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$, para $i, j = 1, 2$.

Além disso, vamos buscar conhecer as subálgebras diferenciais para descrevermos as subálgebras coideais à direita homogêneas de $U_q^+(B_2)$ que contêm $k[G]$.

Proposição 4.3.1. *As derivadas dos elementos da Lista 4.3 estão dadas na tabela abaixo:*

	∂_1	∂_2
[A]	1	0
[B]	$(1 - q^{-2})x_2$	0
[C]	$(1 - q^{-1})(1 - q^{-2})x_2^2$	0
[D]	0	1

Tabela 4.1: Tabela de Derivadas (caso $U_q^+(B_2)$)

Demonstração. Utilizando a fórmula (4.7) e as relações dadas (4.1) e (4.2), podemos calcular as derivadas de cada um dos elementos da Lista 4.3. Façamos isso a seguir, começando por $[A]$ e $[D]$:

$$\begin{aligned}\partial_1([A]) &= \partial_1(x_1) = 1 & e & \quad \partial_2([A]) = \partial_2(x_1) = 0, \\ \partial_1([D]) &= \partial_1(x_2) = 0 & e & \quad \partial_2([D]) = \partial_2(x_2) = 1.\end{aligned}$$

Para $[B] = [x_1, x_2]$, calculamos as derivadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\partial_1([B]) &= \partial_1(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) \\ &= \partial_1(x_1x_2) - p_{12}\partial_1(x_2x_1) \\ &= (\partial_1(x_1)x_2 + p_{11}x_1\partial_1(x_2)) - p_{12}(\partial_1(x_2)x_1 + p_{21}x_2\partial_1(x_1)) \\ &= (1x_2 + p_{11}x_10) - p_{12}(0x_1 + p_{21}x_21) \\ &= x_2 - p_{12}p_{21}x_2 \\ &= (1 - p_{12}p_{21})x_2 = (1 - q^{-2})x_2,\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (4.1), e

$$\begin{aligned}\partial_2([B]) &= \partial_2(x_1x_2) - p_{12}\partial_2(x_2x_1) \\ &= (\partial_2(x_1)x_2 + p_{12}x_1\partial_2(x_2)) - p_{12}(\partial_2(x_2)x_1 + p_{21}x_2\partial_2(x_1)) \\ &= (0x_2 + p_{12}x_11) - p_{12}(1x_1 + p_{21}x_20) \\ &= p_{12}x_1 - p_{12}x_1 = 0.\end{aligned}$$

Antes de analisarmos o caso de $[C] = [[x_1, x_2], x_2]$, façamos alguns cálculos de derivadas que nos auxiliarão nessa tarefa.

$$\begin{aligned}\partial_1(x_1x_2^2) &= \partial_1(x_1)x_2^2 + p_{11}x_1\partial_1(x_2^2) \\ &= 1x_2^2 + 0 = x_2^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_1(x_2x_1x_2) &= \partial_1(x_2)x_1x_2 + p_{21}x_2\partial_1(x_1x_2) \\ &= 0 + p_{21}x_2(\partial_1(x_1)x_2 + p_{11}x_1\partial_1(x_2)) \\ &= p_{21}x_2^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_1(x_2^2x_1) &= \partial_1(x_2)x_2x_1 + p_{21}x_2\partial_1(x_2x_1) \\ &= 0 + p_{21}x_2(\partial_1(x_2)x_1 + p_{21}x_2\partial_1(x_1)) \\ &= p_{21}^2x_2^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2(x_1x_2^2) &= \partial_2(x_1)x_2^2 + p_{12}x_1\partial_2(x_2^2) \\
&= 0 + p_{12}x_1(\partial_2(x_2)x_2 + p_{22}x_2\partial_2(x_2)) \\
&= (1 + p_{22})p_{12}x_1x_2, \\
\partial_2(x_2x_1x_2) &= \partial_2(x_2)x_1x_2 + p_{22}x_2\partial_2(x_1x_2) \\
&= x_1x_2 + p_{22}x_2(\partial_2(x_1)x_2 + p_{12}x_1\partial_2(x_2)) \\
&= x_1x_2 + p_{22}p_{12}x_2x_1, \\
\partial_2(x_2^2x_1) &= \partial_2(x_2)x_2x_1 + p_{22}x_2\partial_2(x_2x_1) \\
&= x_2x_1 + p_{22}x_2(\partial_2(x_2)x_1 + p_{22}x_2\partial_2(x_1)) \\
&= x_2x_1 + p_{22}x_2x_1 \\
&= (1 + p_{22})x_2x_1.
\end{aligned}$$

Com isso, podemos calcular as derivadas de $[C] = [[x_1, x_2], x_2]$.

$$\begin{aligned}
\partial_1([C]) &= \partial_1(x_1x_2^2 - (1 + p_{22})p_{12}x_2x_1x_2 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1) \\
&= \partial_1(x_1x_2^2) - (1 + p_{22})p_{12}\partial_1(x_2x_1x_2) + p_{12}^2p_{22}\partial_1(x_2^2x_1) \\
&= x_2^2 - (1 + p_{22})p_{12}(p_{21}x_2^2) + p_{12}^2p_{22}(p_{21}^2x_2^2) \\
&= x_2^2 - (1 + p_{22})p_{12}p_{21}x_2^2 + p_{12}^2p_{22}p_{21}^2x_2^2 \\
&= x_2^2 - p_{12}p_{21}x_2^2 - p_{12}p_{21}p_{22}x_2^2 + p_{12}^2p_{21}^2p_{22}x_2^2 \\
&= x_2^2 - q^{-2}x_2^2 - q^{-2}qx_2^2 + (q^{-2})^2qx_2^2 \\
&= x_2^2 - q^{-2}x_2^2 - q^{-1}x_2^2 + q^{-3}x_2^2 \\
&= (1 - q^{-1} - q^{-2} + q^{-3})x_2^2 \\
&= (1 - q^{-1})(1 - q^{-2})x_2^2.
\end{aligned}$$

e, por fim, temos

$$\begin{aligned}
\partial_2([C]) &= \partial_2(x_1x_2^2 - (1 + p_{22})p_{12}x_2x_1x_2 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1) \\
&= \partial_2(x_1x_2^2) - (1 + p_{22})p_{12}\partial_2(x_2x_1x_2) + p_{12}^2p_{22}\partial_2(x_2^2x_1) \\
&= (1 + p_{22})p_{12}x_1x_2 - (1 + p_{22})p_{12}(x_1x_2 + p_{22}p_{12}x_2x_1) + p_{12}^2p_{22}(1 + p_{22})x_2x_1 \\
&= (1 + p_{22})p_{12}x_1x_2 - (1 + p_{22})p_{12}x_1x_2 \\
&\quad - (1 + p_{22})p_{12}^2p_{22}x_2x_1 + p_{12}^2p_{22}(1 + p_{22})x_2x_1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

4.4 Geradores PBW de de $U_q^+(B_2)$

Vamos, agora, encontrar os possíveis geradores *PBW* para as subálgebras coideais à direita de $U_q^+(B_2)$. Lembrando que estas subálgebras são diferenciais, justifica-se o fato de utilizarmos as derivadas dos possíveis geradores para encontrar os α'_i s de (2.6). Temos, portanto, o seguinte resultado:

Proposição 4.4.1. *Seja U uma subálgebra coideal à direita de $U_q^+(B_2)$ contendo $k[G]$. Então os geradores PBW de U pertencem à lista a seguir:*

$$\begin{aligned} & x_1, \\ & [B] \quad \text{ou} \quad [x_2, x_1], \\ & [C] \quad \text{ou} \quad [x_2, [x_2, x_1]], \\ & x_2. \end{aligned}$$

Além disso, cada subálgebra coideal à direita possui, no máximo, um gerador de cada linha da lista acima.

Demonstração. Para demonstrar esta proposição, iremos usar (2.6) para encontrar os possíveis geradores e calcular as derivadas de cada c_i a fim de determinar os α'_i s da fórmula. Neste caso, temos os seguintes possíveis geradores *PBW*:

$$\begin{aligned} c_1 &= [A] = x_1, \\ c_2 &= [D] = x_2, \\ c_3 &= [B] + \alpha x_2 x_1, \\ c_4 &= [C] + \alpha_1 x_2^2 x_1 + \alpha_2 x_2 [B]. \end{aligned}$$

Suponhamos que c_3 seja um gerador de U . Então, as seguintes derivadas pertencem a U :

$$\begin{aligned} \partial_1(c_3) &= \partial_1([B]) + \partial_1(\alpha x_2 x_1) \\ &= \partial_1([B]) + \alpha \partial_1(x_2 x_1) \\ &= (1 - q^{-2})x_2 + \alpha p_{21} x_2 \\ &= (1 - q^{-2} + \alpha p_{21})x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2(c_3) &= \partial_2([B]) + \partial_2(\alpha x_2 x_1) \\
&= \partial_2([B]) + \alpha \partial_2(x_2 x_1) \\
&= 0 + \alpha x_1 = \alpha x_1.
\end{aligned}$$

Daí, segue que se $\alpha \neq 0$ e $1 - q^{-2} + \alpha p_{21} \neq 0$, então x_1, x_2 pertencem a U e, nesse caso, $U = U_q^+(B_2)$. Logo, podemos supor que $\alpha = 0$ ou $1 - q^{-2} + \alpha p_{21} = 0$. Se $\alpha = 0$, temos que x_2 pertence a U e $c_3 = [B]$.

Agora, se $1 - q^{-2} + \alpha p_{21} = 0$, então $\alpha = \frac{q^{-2}-1}{p_{21}}$. Isso nos diz que x_1 está em U e que

$$\begin{aligned}
c_3 &= [B] + \frac{q^{-2}-1}{p_{21}} x_2 x_1 \\
&= x_1 x_2 - p_{12} x_2 x_1 + \frac{q^{-2}-1}{p_{21}} x_2 x_1 \\
&= \frac{p_{21} x_1 x_2 - p_{12} p_{21} x_2 x_1 + q^{-2} x_2 x_1 - x_2 x_1}{p_{21}} \\
&= \frac{p_{21} x_1 x_2 - q^{-2} x_2 x_1 + q^{-2} x_2 x_1 - x_2 x_1}{p_{21}} \\
&= -\frac{1}{p_{21}} (x_2 x_1 - p_{21} x_1 x_2) \\
&= -p_{21}^{-1} [x_2, x_1].
\end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que c_4 é um gerador de U . Então U contém os seguintes elementos:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \partial_2(c_4) &= \partial_2([C]) + \partial_2(\alpha_1 x_2^2 x_1) + \partial_2(\alpha_2 [B]) \\
&= \partial_2([C]) + \alpha_1 \partial_2(x_2^2 x_1) + \alpha_2 \partial_2(x_2 [B]) \\
&= 0 + \alpha_1 (1 + p_{22}) x_2 x_1 + \alpha_2 (\partial_2(x_2) [B] + p_{22} x_2 \partial_2([B])) \\
&= \alpha_1 (1 + p_{22}) x_2 x_1 + \alpha_2 [B] + \alpha_2 p_{22} x_2 0 \\
&= \alpha_1 (1 + q) x_2 x_1 + \alpha_2 [B].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \partial_2^2(c_4) &= \partial_2(\partial_2(c_4)) = \alpha_1 (1 + q) \partial_2(x_2 x_1) + \alpha_2 \partial_2([B]) \\
&= \alpha_1 (1 + q) x_1 + \alpha_2 0 = \alpha_1 (1 + q) x_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad \partial_1(c_4) &= \partial_1([C]) + \alpha_1 \partial_1(x_2^2 x_1) + \alpha_2 \partial_1(x_2 [B]) \\
&= (1 - q^{-1})(1 - q^{-2}) x_2^2 + \alpha_1 p_{21}^2 x_2^2 + \alpha_2 (\partial_1(x_2) [B] + p_{21} x_2 \partial_1([B])) \\
&= (1 - q^{-1})(1 - q^{-2}) x_2^2 + \alpha_1 p_{21}^2 x_2^2 + \alpha_2 0 [B] + \alpha_2 p_{21} x_2 (1 - q^{-2}) x_2 \\
&= (1 - q^{-1})(1 - q^{-2}) x_2^2 + \alpha_1 p_{21}^2 x_2^2 + \alpha_2 p_{21} (1 - q^{-2}) x_2^2 \\
&= ((1 - q^{-1})(1 - q^{-2}) + \alpha_1 p_{21}^2 + \alpha_2 p_{21} (1 - q^{-2})) x_2^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad \partial_1 \partial_2(c_4) &= \partial_1(\partial_2(c_4)) = \alpha_1(1+q)\partial_1(x_2x_1) + \alpha_2\partial_1([B]) \\
&= \alpha_1(1+q)p_{21}x_2 + \alpha_2(1-q^{-2})x_2 \\
&= (\alpha_1(1+q)p_{21} + \alpha_2(1-q^{-2}))x_2.
\end{aligned}$$

Note, se x_2 está em U , então o elemento $\partial_2^2(c_4)$ nos diz que $\alpha_1 = 0$. Além disso, se $\alpha_2 = 0$, então $c_4 = [C]$ é um gerador. Mais ainda, se $\alpha_2 \neq 0$, temos $\partial_2(c_4) = \partial_2([C] + \alpha_2x_2[B]) = \alpha_2[B]$ também pertence a U . Mas $[B]$, x_2 pertencerem a U implica que $[D]$ pertence a U e, portanto, pode ser considerado um gerador.

Suponhamos, agora, que x_1 pertence a U , então por (3) e (4), temos o seguinte:

$$\begin{cases} (1-q^{-1})(1-q^{-2}) + \alpha_1p_{21}^2 + \alpha_2p_{21}(1-q^{-2}) = 0 \\ \alpha_1(1+q)p_{21} + \alpha_2(1-q^{-2}) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de duas equações e duas incógnitas, da primeira equação obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{-(1-q^{-1})(1-q^{-2}) - \alpha_1p_{21}^2}{p_{21}(1-q^{-2})} \\
&= \frac{q^{-1}-1}{p_{21}} - \frac{\alpha_1p_{21}}{1-q^{-2}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) na segunda equação do sistema, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_1(1+q)p_{21} + \left(\frac{q^{-1}-1}{p_{21}} - \frac{\alpha_1p_{21}}{1-q^{-2}}\right)(1-q^{-2}) &= 0 \\
\alpha_1(1+q)p_{21} - \alpha_1p_{21} + \frac{(q^{-1}-1)(1-q^{-2})}{p_{21}} &= 0 \\
\alpha_1p_{21}((1+q)-1) &= -\frac{(q^{-1}-1)(1-q^{-2})}{p_{21}} \\
\alpha_1qp_{21} &= \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}{p_{21}} \\
\alpha_1 &= \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}{qp_{21}^2}.
\end{aligned}$$

Então, por (4.8),

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{q^{-1}-1}{p_{21}} - \alpha_1 \frac{p_{21}}{1-q^{-2}} \\
&= \frac{q^{-1}-1}{p_{21}} - \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}{qp_{21}^2} \frac{p_{21}}{1-q^{-2}} \\
&= \frac{q^{-1}-1}{p_{21}} - \frac{(1-q^{-1})}{qp_{21}} \\
&= \frac{(q^{-1}-1)q - (1-q^{-1})}{qp_{21}} \\
&= \frac{-(1-q^{-1})(1+q)}{qp_{21}} \\
&= -\frac{(1+q-q^{-1}-1)}{qp_{21}} \\
&= -\frac{q(1-q^{-2})}{qp_{21}} \\
&= -\frac{1-q^{-2}}{p_{21}}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que o gerador é dado por

$$\begin{aligned} c_4 &= [C] + \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}{qp_{21}^2} x_2^2 x_1 - \frac{(1-q^{-2})}{p_{21}} x_2 [B] \\ &= q^{-1} p_{21}^{-2} [x_2, [x_2, x_1]]. \end{aligned}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} [x_2, [x_2, x_1]] &= x_2 [x_2, x_1] - p_{22} p_{21} [x_2, x_1] x_2 \\ &= x_2 (x_2 x_1 - p_{21} x_1 x_2) - p_{22} p_{21} (x_2 x_1 - p_{21} x_1 x_2) x_2 \\ &= x_2^2 x_1 - p_{21} x_2 x_1 x_2 - p_{22} p_{21} x_2 x_1 x_2 + p_{22} p_{21}^2 x_1 x_2^2 \\ &= x_2^2 x_1 - p_{21} (1 + p_{22}) x_2 x_1 x_2 + p_{22} p_{21}^2 x_1 x_2^2 \\ &= x_2^2 x_1 - p_{21} (1 + q) x_2 x_1 x_2 + qp_{21}^2 x_1 x_2^2. \end{aligned}$$

Além disso, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} c_4 &= [C] + \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}{qp_{21}^2} x_2^2 x_1 - \frac{(1-q^{-2})}{p_{21}} x_2 [B] \\ &= x_1 x_2^2 - p_{12} (1 + q) x_2 x_1 x_2 + p_{12}^2 x_2^2 x_1 + \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}{qp_{21}^2} x_2^2 x_1 \\ &\quad - \frac{(1-q^{-2})}{p_{21}} x_2 x_1 x_2 + p_{12} \frac{(1-q^{-2})}{p_{21}} x_2^2 x_1 \\ &= x_1 x_2^2 - (p_{12} (1 + q) + \frac{(1-q^{-2})}{p_{21}}) x_2 x_1 x_2 + (qp_{12}^2 + \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}{qp_{21}^2} + p_{12} \frac{(1-q^{-2})}{p_{21}}) x_2^2 x_1 \\ &= x_1 x_2^2 - \left(\frac{p_{12} p_{21} (1+q) + 1 - q^{-2}}{p_{21}} \right) x_2 x_1 x_2 + \left(\frac{p_{12}^2 p_{21} q^2 + (1-q^{-1})(1-q^{-2}) + qp_{12} p_{21} (1-q^{-2})}{qp_{21}^2} \right) x_2^2 x_1 \\ &= x_1 x_2^2 - \left(\frac{q^{-2} (1+q) + 1 - q^{-2}}{p_{21}} \right) x_2 x_1 x_2 + \left(\frac{q^{-4} q^2 + (1-q^{-1})(1-q^{-2}) + qq^{-2} (1-q^{-2})}{qp_{21}^2} \right) x_2^2 x_1 \\ &= x_1 x_2^2 - \left(\frac{q^{-2} + q^{-1} + 1 - q^{-2}}{p_{21}} \right) x_2 x_1 x_2 + \left(\frac{q^{-2} + 1 - q^{-2} - q^{-1} + q^{-3} + q^{-1} - q^{-3}}{qp_{21}^2} \right) x_2^2 x_1 \\ &= x_1 x_2^2 - \left(\frac{1+q^{-1}}{p_{21}} \right) x_2 x_1 x_2 + \frac{1}{qp_{21}^2} x_2^2 x_1 \\ &= \frac{qp_{21}^2 x_1 x_2^2 - qp_{21} (1-q^{-1}) x_2 x_1 x_2 + x_2^2 x_1}{qp_{21}^2} \\ &= \frac{qp_{21}^2 x_1 x_2^2 - p_{21} (1+q) x_2 x_1 x_2 + x_2^2 x_1}{qp_{21}^2} \\ &= q^{-1} p_{21}^{-2} [x_2, [x_2, x_1]]. \end{aligned}$$

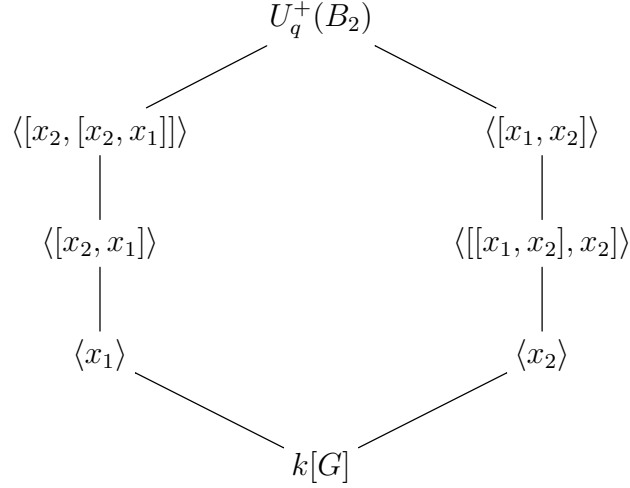
Com isso, esgotamos todas as possibilidades para os geradores de U , obtendo exatamente aqueles listados pela proposição. \square

4.5 Reticulado de coideais de $U_q^+(B_2)$

Agora, vamos apresentar o reticulado de coideais de $U_q^+(B_2)$ e provar, utilizando os resultados demonstrados anteriormente, que nele estão representadas todas as

subálgebras coideais à direita de $U_q^+(B_2)$ contendo $k[G]$.

Teorema 4.5.1. *Se q não é raiz da unidade, então o reticulado de subálgebras coideais à direita contendo $k[G]$ de $U_q^+(B_2)$ é dado pela figura a seguir:*



Demonstração. Seja U uma subálgebra coideal à direita de $U_q^+(B_2)$ contendo $k[G]$. Então, pelo que já vimos, sabemos que U é homogênea. Além disso, pela Proposição 4.4.1, sabemos também que os possíveis geradores *PBW* para U são

- x_1 ,
- $[B]$ ou $[x_2, x_1]$,
- $[C]$ ou $[x_2, [x_2, x_1]]$,
- x_2 .

Como no caso já estudado, lembramos que $\langle [u] \rangle$ representa a menor subálgebra coideal à direita que contém $[u]$ e $k[G]$.

As subálgebras coideais à direita $\langle x_1 \rangle$ e $\langle x_2 \rangle$ possuem como geradores *PBW* os conjuntos $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$, respectivamente.

Se $[C]$ pertence a U , então x_2 também é pertencente a U , pois conforme a Proposição 4.7,

$$\partial_1([C]) = (1 - q^{-1})(1 - q^{-2})x_2^2.$$

Portanto, o conjunto de geradores *PBW* de $\langle [C] \rangle$ é $\{x_2, [C]\}$.

Suponhamos, agora, que $[B]$ pertence a U . Neste caso, x_2 e $[C]$ também pertencem, pois

$$\partial_1([B]) = (1 - q^{-2})x_2 \quad \text{e} \quad [C] = [[B], x_2].$$

Logo, $\langle [B] \rangle$ possui $\{x_2, [B], [C]\}$ como conjunto de geradores *PBW*.

Note que se incluirmos x_1 em qualquer um destes coideais, teremos $U = U_q^+(B_2)$, pois x_2 já é pertencente a cada um deles.

Se $[x_2, x_1]$ está em U , então x_1 pertence a U , pois

$$\begin{aligned} \partial_2([x_2, x_1]) &= \partial_2(x_2x_1) - p_{21}\partial_2(x_1x_2) \\ &= \partial_2(x_2)x_1 + p_{22}x_2\partial_2(x_1) - p_{21}(\partial_2(x_1)x_2 + p_{12}x_1\partial_2(x_2)) \\ &= x_1 - p_{21}p_{12}x_1 \\ &= (1 - q^{-2})x_1. \end{aligned}$$

Assim, $\langle [x_2, x_1] \rangle$ possui como geradores *PBW* o conjunto $\{x_1, [x_2, x_1]\}$.

Por fim, suponhamos que $[x_2, [x_2, x_1]]$ pertence a U . Então x_1 e $[x_2, x_1]$ também estão em U , pois

$$\begin{aligned} \partial_2([x_2, [x_2, x_1]]) &= \partial_2(x_2[x_2, x_1]) - p_{22}p_{21}\partial_2([x_2, x_1]x_2) \\ &= \partial_2(x_2)[x_2, x_1] + p_{22}x_2\partial_2([x_2, x_1]) \\ &\quad - p_{22}p_{21}(\partial_2([x_2, x_1])x_2 + p_{22}p_{12}[x_2, x_1]\partial_2(x_2)) \\ &= [x_2, x_1] + p_{22}x_2(1 - q^{-2})x_1 \\ &\quad - p_{22}p_{21}((1 - q^{-2})x_1x_2 + p_{22}p_{12}[x_2, x_1]) \\ &= (1 - p_{22}^2p_{21}p_{12})[x_2, x_1] + p_{22}(1 - q^{-2})x_2x_1 - p_{22}p_{21}(1 - q^{-2})x_1x_2 \\ &= (1 - q^2q^{-2})[x_2, x_1] + q(1 - q^{-2})(x_2x_1 - p_{21}x_1x_2) \\ &= q(1 - q^{-2})[x_2, x_1]. \end{aligned}$$

Logo, $[x_2, x_1]$ pertence a U e isso implica que x_1 também pertence. Desta forma, o conjunto de geradores *PBW* de $\langle [x_2, [x_2, x_1]] \rangle$ é $\{x_1, [x_2, x_1], [x_2, [x_2, x_1]]\}$.

Note, novamente, que se incluirmos x_2 a qualquer das subálgebras coideais à direita que contenha x_1 , teremos $U = U_q^+(B_2)$.

Pelo fato de uma subálgebra coideal à direita não possuir mais de um gerador da mesma linha da lista de possíveis geradores PBW , concluímos que estas são todas as subálgebras coideais à direita de $U_q^+(B_2)$ que contém $k[G]$. Obtemos, portanto, o reticulado dado pelo teorema e o mesmo está provado. \square

Referências Bibliográficas

- [1] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu e Ş. Raianu, *Hopf Algebras: An Introduction*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 235, Marcel Dekker, 2001.
- [2] I. Heckenberger and S. Kolb, *Homogeneous right coideal subalgebras of quantized enveloping algebras*, Bulletin of the London Mathematical Society 44(4), 2011.
- [3] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1972.
- [4] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1990.
- [5] V.K. Kharchenko, *An algebra of skew primitive elements*, Algebra and Logic, 37, N2(1998), 101-126.
- [6] V. K. Kharchenko, *A quantum analog of the Poincare-Birkhoff-Witt Theorem*, Algebra and Logic, 38, N4(1999), 259-276.
- [7] V. K. Kharchenko, *A combinatorial approach to the quantifications of Lie algebras*, Pacific Journal of Mathematics, 203, N1(2002), 191-233.
- [8] V. K. Kharchenko, *PBW-bases of coideal subalgebras and freeness Theorem*, TAMS, v. 360, w10(2008), 5121-5143.

- [9] V. K. Kharchenko and A. V. Lara Sagahón, *Right coideal subalgebras in $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$* , Journal of Algebra, 319(2008), 2571–2625.
- [10] V. K. Kharchenko, *Right coideal subalgebras in $U_q^+(\mathfrak{so}_{2n+1})$* , Journal of the European Mathematical Society 13(6)(2009), 1675-1733.
- [11] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 82, Providence, 1993.
- [12] B. Pogorelsky, *Right coideal subalgebras of the quantum Borel algebra of type G_2* , Journal of Algebra, 322(2009), 2335-2354.
- [13] A. I. Shirshov, *On free Lie rings*, Mat. Sb.. 45(87(2)) (1958), 113-122.