UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

LUCIANE FÜHR

UM OLHAR PARA A INTRODUÇÃO À ESCRITA SIMBÓLICA NO ENSINO À LUZ DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Porto Alegre
2019

LUCIANE FÜHR

UM OLHAR PARA A INTRODUÇÃO À ESCRITA SIMBÓLICA NO ENSINO À LUZ DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª Drª Luisa Rodriguez Doering,

Porto Alegre
2019

LUCIANE FÜHR

UM OLHAR PARA A INTRODUÇÃO À ESCRITA SIMBÓLICA NO ENSINO À LUZ DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Banca Examinadora

Profa. Dra. Andreia Dalcin - UFRGS

Profa. Dra. Carmen Vieira Mathias - UFSM

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo - UFRGS

Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering - Orientadora

AGRADECIMENTOS

Após dois anos de dedicação para a realização desta pesquisa é impossível deixar de citar as pessoas mais importantes que me ajudaram a trilhar este caminho.

Aos meus pais, Plinio (*in memoriam*) e Julieta que desde sempre dedicaram suas vidas para que eu tivesse oportunidade de estudar e não mediram esforços para me auxiliar.

À minha companheira Jenifer, que desde o primeiro dia em que li sobre a abertura das inscrições para o mestrado me incentivou a me candidatar e esteve ao meu lado, compreendendo os momentos de ausência para a elaboração deste texto.

À minha orientadora, Profa. Dra. Luisa Rodriguez Doering, pelas incontáveis horas de leitura, reflexão, discussão e análise. Obrigada pelos aprendizados e pela paciência.

Às professoras doutoras Andreia Dalcin, Carmen Mathias e Elisabete Zardo Búrigo, pelas valiosas contribuições ao longo do trabalho a fim de aperfeiçoá-lo sempre mais.

Aos professores que passaram pela minha vida, os quais contribuem e contribuíram para a minha trajetória docente.

Aos alunos que já tiveram e terão aulas comigo, pois sem eles este estudo não teria sentido.

RESUMO

A presente pesquisa possui a seguinte pergunta norteadora: atividades inspiradas na história da matemática, no que diz respeito ao processo de construção da simbologia matemática, podem favorecer o aprendizado da escrita simbólica da matemática escolar na perspectiva de Duval? A partir de um estudo teórico acerca do desenvolvimento da simbologia algébrica, com referencial em Estrada et al. (2000), Garbi (1997), Baumgart (1992), Brandemberg (2009), Domingues (2000), Van der Waerden (1985) e Roque (2012), juntamente com reflexões acerca da utilização da história da matemática em sala de aula, embasadas por Miguel e Miorim (2011), Miguel (1993 e 2009) e Mendes (2006), desenvolvemos uma proposta de atividades que foi aplicada em uma turma de nono ano do ensino fundamental. A análise dos resultados foi feita a partir da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2003, 2012 e 2013). A partir do estudo realizado, observamos que a elaboração de uma simbologia própria por parte dos alunos, discussão e socialização dos resultados, indicou favorecer o processo de conversão da escrita em língua materna para a escrita simbólica. A análise de exemplos da evolução da escrita simbólica ao longo da história oportunizou aos alunos a sensibilização acerca da padronização dos símbolos matemáticos e sua leitura e interpretação. A partir da pesquisa realizada, percebemos que o conhecimento de história da matemática pode auxiliar o professor em sua prática docente, enriquecendo o conhecimento e auxiliando no planejamento das aulas.

ABSTRACT

This work has the following guiding question: activities inspired by the history of mathematics, with regard to the process of constructing mathematical symbology, can favor the learning of the symbolic writing of school mathematics from Duval's perspective? From a theoretical study about the development of algebraic symbology, with reference in Estrada et al. (2000), Garbi (1997), Baumgart (1992), Brandemberg (2009), Domingues (2000), Van der Waerden (1985) and Roque (2012), along with reflections on the use of the history of mathematics in the classroom, based on Miguel and Miorim (2011), Miguel (1993 and 2009) and Mendes (2006), we propose some activities that were applied in a ninth grade class. The analysis of the results was based on Duval's theory of registers of semiotic representation (2003, 2012 and 2013). From the study carried out, we observed that the students' elaboration of their own symbology, discussion and socialization of their results, favored the process of converting writing in the mother language to symbolic writing. The analysis of examples of the evolution of symbolic writing throughout history has provided students with awareness of the standardization of mathematical symbols and their reading and interpretation. From this research, we realized that the knowledge of the history of mathematics can help the teacher in his teaching practice, complementing the knowledge and assisting in the planning of classes.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Respostas de aluno à primeira atividade 54
Figura 2 – Parte das respostas de aluno à primeira atividade 55
Figura 3 – Compilação de respostas à questão d) 56
Figura 4 – Parte inicial da atividade de aluno 58
Figura 5 – Exemplos de quadros elaborados pelos alunos 58
Figura 6 – Expressões finais de três alunos 59
Figura 7 – Resposta de grupo para a questão (iv) 60
Figura 8 – Apresentação do item v) 60
Figura 9 – Respostas de alunos à questão a) 64
Figura 10 – Respostas de alunos à questão b) 64
Figura 11 – Respostas de aluna às questões d) e e) 65
Figura 12 – Resposta de aluna à questão h) 66
Figura 13 – Dois exemplos de respostas à questão i) 66
Figura 14 – Quadro individual de aluno 68
Figura 15 – Quadro e expressão individual de aluno 68
Figura 16 – Quadro elaborado por aluno 69
Figura 17 – Expressões finais de dois grupos 70
Figura 18 – Exemplo de tabela de aluna 74
Figura 19 – Parte da tabela de um aluno 74
Figura 20 – Parte da tabela de uma aluna 75
Figura 21 – Exemplos de respostas de aluna 79
Figura 22 – Exemplos de respostas à primeira atividade 79
Figura 23 – Exemplos de problemas adaptados do exercício 80
Figura 24 – Exemplos de problemas elaborados pelos alunos 80
Figura 25 – Exemplos de problemas, resoluções e pareceres elaborados pelos alunos 81

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Trabalhos analisados na revisão bibliográfica 14
Quadro 2 – Símbolos na notação de Diofanto 42
Quadro 3 – Exemplos de abreviações encontrados na álgebra hindu 42
Quadro 4 – Informações sobre símbolos matemáticos 45
Quadro 5 – Comparação entre escritas simbólicas 47
Quadro 6 - Atividade introdutória 51
Quadro 7 – Exercício 2 71
Quadro 8 – Tabela elaborada no quadro 72
Quadro 9 – Números referentes à sexta atividade 78

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

2 REVISÃO DE LITERATURA 13

3 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA SALA DE AULA 18

3.1 A HISTÓRIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA 19

3.2 OBSTÁCULOS À UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO CONTEXTO ESCOLAR 24

4 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 28

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 33

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO E DOS SUJEITOS DA PESQUISA 34

6 SIMBOLOGIA ALGÉBRICA NA HISTÓRIA 37

6.1 FASES DA ÁLGEBRA 40

7 POSSIBILIDADES PARA A INTRODUÇÃO À ESCRITA SIMBÓLICA NO ENSINO FUNDAMENTAL INSPIRADAS NA HISTÓRIA 49

7.1 PROPOSTA DE ATIVIDADES, RELATO DA IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS 51

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS 83

REFERÊNCIAS 87

1 INTRODUÇÃO[1]

Inicialmente a curiosidade e o desejo de difundir a utilização da história da matemática nas salas de aula motivou a submissão do meu projeto de pesquisa para o mestrado. Entretanto, a ideia estava muito abrangente: em dois anos de curso, com o cumprimento de todas as atividades necessárias para a conclusão do mestrado, seria necessário dar conta de escrever um texto que contivesse o desenvolvimento histórico de conteúdos que poderiam ser trabalhados na escola básica e sugestões de atividades envolvendo a história da matemática para todos eles.

Com o início de leituras mais específicas, percebi que a tarefa não seria assim tão simples. E mais, seria possível inserir a história da matemática de forma positiva para o ensino de todos os conteúdos?

O interesse pessoal pela história sempre indicou que a mesma era interessante e fonte de novos conhecimentos. Apesar dessa opinião, com o passar do primeiro semestre do mestrado e a necessidade de apresentar um projeto mais conciso, percebi a importância de delimitar um assunto específico da matemática. Em decisão conjunta com minha orientadora, professora doutora Luisa Rodriguez Doering, optei pela álgebra.

Atualmente sou professora de matemática dos anos finais do ensino fundamental na rede municipal de educação do município de São Leopoldo, Rio Grande do Sul. No ensino médio tive formação técnica no Curso Normal, com habilitação para docência nos anos iniciais do ensino fundamental e cursei licenciatura em matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Tive uma breve experiência como professora substituta no Instituto Federal Sul Rio-Grandense durante três meses. Em maio de 2017 assumi como regente da disciplina de matemática na escola em que trabalho atualmente.

Apesar da pouca experiência como professora, os estágios e práticas docentes ao longo da minha formação me permitiram observar diversas situações no ambiente escolar e, especificamente em algumas salas de aula. A dificuldade demonstrada por muitos alunos quando é introduzida a álgebra na aula de matemática é uma questão que chamou minha atenção e me instigou. O uso da escrita simbólica se mostrou por diversas vezes difícil e desestimulante ao estudo da matemática por parte dos estudantes.

Refiro-me à escrita simbólica como os símbolos utilizados para traduzir situações em que há valores variáveis ou desconhecidos. Na matemática, normalmente os símbolos mais utilizados são letras, como x, y.

[1] Ressalto que a introdução foi escrita em primeira pessoa do singular tendo em vista o caráter pessoal do texto. Os demais capítulos serão escritos em primeira pessoa do plural.

Com a delimitação do assunto, pensei em desenvolver uma proposta envolvendo a história da matemática e a escrita simbólica a partir do estudo da história da simbologia algébrica, tema que será desenvolvido ao longo do trabalho.

A partir das atividades desenvolvidas, objetivei oportunizar aos estudantes momentos para descrever e sintetizar situações matematicamente, de forma a compreender a utilização de símbolos e o que eles representam.

A história da matemática se manteve como tema de interesse, porém passei a considerá-la como fonte de informações e inspiração para o planejamento de atividades para o ensino da matemática. O problema de pesquisa se tornou mais específico e a leitura de textos de história da matemática e outros estudos com essa temática, como artigos, teses e dissertações, me fez perceber que a simbologia algébrica hoje utilizada pode ter surgido a partir da necessidade da resolução de equações a partir de problemas determinados. Além disso, se desenvolveu justamente para facilitar essa resolução e torná-la mais sintética. O que ocorre, porém, é uma dificuldade de compreensão dessa escrita abreviada e genérica por parte dos estudantes, como elucidado nos estudos de Gil (2008) e Gonçalves (2014).

Essa dificuldade de compreensão da escrita pode estar ligada ao não entendimento do que os símbolos representam e como podem ser manipulados. Portanto, defini para análise dos dados coletados após a implementação da proposta a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, que valoriza o processo de compreensão dos objetos matemáticos a partir das diferentes formas de representá-los e da possibilidade de transitar pelas diferentes representações, como será mais bem explorado ao longo da dissertação.

Sendo assim, formulei a questão norteadora da pesquisa: atividades inspiradas na história da matemática, no que diz respeito ao processo de construção da simbologia matemática, podem favorecer o aprendizado da escrita simbólica da matemática escolar na perspectiva de Duval?

Visando possíveis respostas a esse questionamento, elaborei e apliquei uma proposta pedagógica apoiada pelo estudo da história do desenvolvimento da simbologia algébrica, analisando suas potencialidades para o ensino e aprendizagem da escrita simbólica a partir dos dados coletados.

São também objetivos da pesquisa: conhecer a história do desenvolvimento da simbologia algébrica; reconhecer e utilizar a história da matemática como fonte para o ensino e aprendizagem de matemática; reconhecer e compreender a utilização de símbolos como facilitadora para o estudo da álgebra; refletir sobre a prática implementada e suas contribuições para o ensino de matemática, especificamente da introdução à escrita simbólica; analisar à luz da teoria dos registros de representação semiótica os dados obtidos na prática.

O trabalho está dividido em oito partes. Após a introdução, inicio, no capítulo dois, expondo a revisão de literatura realizada. Selecionei cinco trabalhos desenvolvidos nos últimos cinco anos que apresentaram aproximações com meu estudo e apresento algumas considerações acerca dos mesmos.

No capítulo três discorro sobre a utilização da história da matemática em sala de aula. Com embasamento nas obras de Miguel e Miorim (2011), Miguel (1993 e 2009) e Mendes (2006), exponho as vantagens e empecilhos que nesta perspectiva, a história da matemática pode apresentar em relação ao ensino e à aprendizagem de matemática.

No quarto capítulo apresento um apanhado acerca da teoria dos registros de representação semiótica, com base em Duval (2003, 2012 e 2013). Para o autor, a maior dificuldade dos estudantes na compreensão de conteúdos da disciplina de matemática consiste em não conseguir transitar entre os registros de representação de um mesmo objeto.

No capítulo cinco relato a metodologia utilizada para o desenvolvimento do presente estudo, destacando o cunho qualitativo da pesquisa e o público para o qual a proposta será aplicada. Ressalto que a proposta é decorrente de um estudo bibliográfico acerca da evolução da simbologia algébrica na história da matemática.

No capítulo subsequente, apresento uma síntese do percurso histórico do desenvolvimento da simbologia algébrica, segundo obras de Estrada et al. (2000), Garbi (1997), Baumgart (1992), Brandemberg (2009), Domingues (2000), Van der Waerden (1985) e Roque (2012).

No capítulo sete apresento a proposta elaborada a partir da reflexão que o estudo da história da simbologia algébrica despertou, o relato e os resultados da aplicação das atividades.

Ao final, apresento algumas considerações acerca da pesquisa realizada, tendo em vista o estudo teórico, o planejamento e implementação das atividades.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Em consulta ao banco de teses e dissertações da CAPES em 24 de fevereiro de 2018, apareceram relacionados ao termo história da matemática 968.218 trabalhos, sendo que em uma breve verificação observamos que muitos trabalhos acerca da história da educação matemática apareceram na busca e esses não eram foco para essa pesquisa.

Com o intuito de reduzir a quantidade de estudos elencados e focar na utilização da história da matemática para o ensino, fizemos uma busca com a expressão "história da matemática", utilizando as aspas. Então apareceram 518 trabalhos. Para reduzir um pouco mais os resultados, limitamos a busca aos anos de 2013 a 2016. A opção 2017 não apareceu no filtro do site. Dessa forma, foram enumerados 258 trabalhos.

Verificamos que nos últimos cinco anos muitas pesquisas foram desenvolvidas tendo como foco a história da matemática como recurso didático. As pesquisas de Castro (2016), Carvalho (2013), Amorim (2014), Rodrigues (2016), Pereira (2013), dentre outras, direcionaram seu olhar para a história da matemática na formação de professores e como recurso didático para o ensino de matemática. Pesquisas como Ribeiro (2015), Dias (2014), Brasil (2015), Chiarotti (2016), Gouvea (2013), Moraes (2014) focaram seus trabalhos na utilização da história da matemática para o ensino de conteúdos matemáticos específicos, como números inteiros, multiplicação, aritmética, combinatória, probabilidade e logaritmos.

Encontramos muitos trabalhos relacionados à história e métodos de resolução de equações polinomiais de graus 2, 3 e 4, e trabalhos que investigam o ensino introdutório de álgebra, porém sem olhar para a história, os quais se distanciam de nosso estudo, por isso não nos detivemos em uma análise mais aprofundada dos mesmos.

A busca no RCAAP - Repositórios Científicos de Acesso Aberto de Portugal com o termo história da matemática e o refinamento para trabalhos de pós-graduação (mestrado e doutoramento) nos últimos cinco anos resultou em 430 trabalhos, enquanto as buscas por linguagem algébrica, linguagem simbólica, escrita matemática e linguagem matemática resultaram, respectivamente, em 29, 104, 188 e 272 trabalhos nos últimos cinco anos. Muitos trabalhos relacionados ao ensino de álgebra têm como foco analisar as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem de expressões algébricas e resolução de equações, sendo assim, como se distanciam da proposta deste estudo, não foram considerados.

Como pretendemos abordar a história da matemática como fonte para elaboração de atividades, especificamente no ensino da álgebra, com olhar para a simbologia algébrica, elencamos no quadro 1 os trabalhos que, dentre todos os destacados nas buscas apresentam, em nossa opinião, relação com história da matemática, ensino de álgebra no ensino fundamental e com a simbologia algébrica.

Quadro 1 - Trabalhos analisados na revisão bibliográfica

Autor	Título	Tipo	Programa de Pós Graduação	Ano
Denise Benino Dourado Ribeiro	**O uso da história das equações nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na educação básica**	Dissertação	Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo	2015
Aldeni Rosa da Silva	**"Por que usamos símbolos em matemática?"**	Dissertação	Profissional em Matemática da Universidade Federal Fluminense	2013
Tiago Bissi	**Álgebra e história da matemática: análise de uma proposta de ensino a partir da matemática do Antigo Egito**	Dissertação	Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo	2016
Marcelo Miranda Serrão	**Problemas matemáticos da antiguidade como estratégia para o ensino de matemática na educação básica**	Dissertação	Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica	2014
Lea Paz da Silva Feliciano	**A linguagem e a etimologia dos termos utilizados na matemática: uma construção histórica**	Tese	Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo	2013

Fonte: autora

Após a busca acima relatada, utilizamos as expressões “escrita matemática”, “linguagem algébrica”, “linguagem simbólica” e “linguagem matemática”, as quais resultaram em 10, 17, 32 e 92 trabalhos, respectivamente, nos últimos cinco anos, entretanto, nenhum sugeriu a utilização da história da matemática e o ensino de álgebra.

Os trabalhos apresentados no quadro 1, portanto, foram selecionados por terem temática relacionada à história da matemática no ensino de matemática e no ensino específico de álgebra ou por serem estudos que valorizam a simbologia utilizada na matemática.

Ribeiro (2015) aborda a história da matemática em sala de aula e sua contribuição para o ensino e a aprendizagem de matemática. A autora aplicou uma prática destinada a professores atuantes na rede pública de ensino do estado de São Paulo. Ela partiu do estudo de equações algébricas, a fim de apresentar as fases da álgebra e refletir sobre a utilização de procedimentos e problemas históricos em sala de aula.

Ao longo do texto, a autora defende o uso da história da matemática em sala de aula e a ideia de que a álgebra merece um cuidado ao ser ensinada e recebe papel de destaque nos livros, entretanto há dificuldade em relação a compreensão de conceitos e procedimentos. Apresenta como proposta a formação de conceitos algébricos a partir de métodos e problemas históricos, considerando a resolução de equações de primeiro e segundo graus.

A autora discorre sobre as contribuições da história da matemática como ferramenta de ensino e sobre a história das fases da álgebra e das equações de primeiro e segundo graus. Por fim relata a experiência desenvolvida. Ao final, com a experiência desenvolvida, a pesquisadora conclui, em resposta ao seu questionamento, que a história é adequada para abordar métodos de resolução de equações.

Na nossa pesquisa utilizamos a história da matemática como fonte para elaboração de atividades para o ensino de matemática. Como em Ribeiro (2015), a álgebra é o conteúdo selecionado como foco do estudo, entretanto, não aprofundamos a resolução de equações, mas a compreensão da simbologia algébrica e sua importância histórica para o desenvolvimento da álgebra.

Silva (2013) desenvolve sua dissertação em torno da utilização de símbolos na matemática. O autor relata que, nos registros de diversas civilizações, sempre há utilização de simbologia desenvolvida por cada uma. Embora o foco principal do trabalho seja a simbologia e seu surgimento pelas vantagens que apresenta, como síntese e clareza, o que se relaciona com nossa pesquisa, Silva (2013) apresenta o surgimento dos símbolos usados na aritmética e na trigonometria. Nesse sentido, não é estudado o desenvolvimento histórico da simbologia algébrica.

Bissi (2016) analisou como a história da matemática pode contribuir para o ensino e aprendizagem da álgebra escolar, com ênfase na matemática do Antigo Egito, a partir de uma experiência com turmas de nono ano do ensino fundamental.

Em relação ao trabalho do autor, concordamos com a utilização da história da matemática em sala de aula e em seu potencial para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos. Ele destaca os conteúdos de equações e funções, enquanto neste estudo, pretendemos refletir sobre possíveis atividades que apresentem e valorizem a evolução da simbologia algébrica conforme ocorreu na história da matemática.

Serrão (2014) consta em nossa relação, pois apresenta problemas históricos clássicos encontrados em três fontes históricas: Papiro de Rhind, Aritmética de Diofanto e Liber Abaci de Fibonacci. A seleção das obras foi feita com a demarcação de três períodos históricos e busca de problemas clássicos e suas formalizações possíveis com o intuito de comparar elementos utilizados nessas situações e possíveis repetições dos problemas em diferentes épocas. Os problemas foram selecionados de bibliografias específicas das obras históricas em língua estrangeira.

A história da matemática figura como ferramenta para o professor relacionar a matemática atual com a matemática do passado e como meio para exploração de assuntos e superação de dificuldades em sala de aula. Embora não foque seu trabalho neste assunto, o autor ainda cita a utilização de problemas históricos como possibilidade para valorização da simbologia algébrica como facilitadora da expressão do pensamento matemático.

Nossa reflexão sobre as possibilidades de levar à sala de aula as fases históricas da álgebra engloba a opção de utilizar problemas extraídos de fontes históricas e sugerir sua abordagem nas aulas, contribuindo para ampliar o material que insere a história da matemática no planejamento das aulas disponível aos professores.

Aproximamo-nos do trabalho de Feliciano (2013) em relação à importância que damos à compreensão da linguagem e simbologia utilizadas na matemática. Se não compreendemos o que está escrito, dificilmente seremos capazes de compreender o conteúdo ensinado. A autora olha para a história, porém, debruça-se sobre a linguagem e a etimologia dos termos matemáticos e elabora uma relação com cento e vinte termos para auxiliar o professor em sua prática.

Nosso trabalho difere da pesquisa citada, tendo em vista que objetivamos, como já relatado, levar para a sala de aula a reflexão acerca da importância e necessidade da simbologia utilizada na matemática.

Em oito de janeiro de 2019 realizamos a busca pela expressão "representação semiótica", tendo em vista a teoria que fundamenta a análise dos dados da pesquisa. Foram encontrados 315 resultados no banco de teses e dissertações da CAPES. Considerando as pesquisas realizadas a partir de 2013, constam 172 trabalhos.

Os estudos apresentados na busca versam sobre geometria, funções, sistemas lineares de equações, inequações, números racionais, combinatória e utilização de aportes tecnológicos no ensino de matemática. Optamos por não destacar pesquisas encontradas nesta busca, pois, embora a álgebra apareça como conteúdo em diversos trabalhos, nenhum destacou a introdução à escrita simbólica, tampouco houve registro de trabalho que apresentasse ainda relação com a história da matemática.

3 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Muitas vezes em nossa prática docente, a importância da matemática é ofuscada pela supervalorização das fórmulas e procedimentos mecânicos e o interesse é substituído pelo medo do fracasso que se reflete nas avaliações. A supremacia dos procedimentos e regras prontas distancia os alunos do ato de refletir sobre os problemas, chegar a novas conclusões e construir o conhecimento matemático.

Como Stewart (2014, p. 6) afirma

> A matemática não surgiu completamente formada. Ela cresceu a partir de esforços acumulados de muitas pessoas, de muitas culturas, que falavam muitos idiomas. Ideias matemáticas que ainda são usadas atualmente remontam a mais de 4 mil anos.

Ao longo do tempo a matemática se desenvolveu partindo de questões práticas, de buscas para solucionar problemas. Acreditamos que no ensino a história da matemática pode ser uma aliada para estimular a reflexão e análise das situações propostas nas aulas.

Por meio da história da matemática os estudantes podem compreender o que motivou o surgimento dos conteúdos, as aplicações práticas que hoje em dia nem percebemos, mas que, se não fosse a matemática, seriam muito mais complicadas, senão impossíveis de realizar, pois

> (...) Uma vez feita uma descoberta matemática, ela se torna acessível para que qualquer um possa usá-la, e assim adquire vida própria. Boas ideias matemáticas raramente saem de moda, embora sua implantação possa mudar dramaticamente. Métodos de resolver equações, descobertos pelos antigos babilônios, ainda estão em uso atualmente. Nós não empregamos a notação deles, mas o vínculo histórico é inegável.
>
> De fato, a maior parte da matemática ensinada nas escolas tem pelo menos duzentos anos de idade. O advento dos currículos de matemática "moderna" na década de 1960 fez o tema entrar no século XIX. Mas, contrariando as aparências, a matemática não permaneceu parada. Hoje, cria-se mais matemática nova a cada semana do que os babilônios conseguiram em 2 mil anos. (STEWART, 2014, p. 6).

Mesmo hoje a matemática continua se desenvolvendo e novos ramos surgem para solucionar novos problemas com os quais a humanidade se depara em diversas áreas de conhecimento.

> A sociedade de hoje não poderia funcionar sem a matemática. Virtualmente tudo que agora consideramos como algo absolutamente normal – da televisão aos telefones celulares, de gigantescos jatos de passageiros a sistemas de navegação por satélite em automóveis, de horários de trens a exames médicos por imagem –, tem como base ideias e métodos matemáticos. Às vezes a matemática tem milhares de anos; outras, foi descoberta na semana passada. A maioria de nós nunca se dá conta de que ela está presente, trabalhando nos bastidores para possibilitar esses milagres da tecnologia moderna. (STEWART, 2014, p. 6).

Diante do acima citado, destacamos a possibilidade de apresentar a matemática como uma construção histórica que está em constante desenvolvimento, afinal o ser humano está sempre se desafiando e buscando novas formas de entender a natureza, facilitar a vida com a tecnologia, explorar o espaço. Tudo isso alavanca os estudos de matemática atuais que, quem sabe, no futuro farão parte dos conteúdos desenvolvidos nas escolas.

Acreditamos ser importante incentivar o estudo de diferentes culturas e o respeito pelas mesmas e por suas contribuições, o que pode servir como forma de relacionar a matemática com outras disciplinas constantes no currículo escolar. A história da matemática pode auxiliar nessa perspectiva, como fonte de informações e meio para incentivar a reflexão e avaliação de possibilidades por parte dos alunos, contribuindo para o fazer pedagógico do educador, refletindo positivamente na aprendizagem.

Roxo (1937) faz uma compilação de ideias de diversos matemáticos em relação ao ensino de matemática e ressalta a importância das aplicações e relações entre os ramos da matemática entre si, reforçando a unificação da aritmética, álgebra e geometria, e com outras disciplinas. Dessa forma há como valorizar o que o aluno já conhece e incentivá-lo a fazer relações e desenvolver-se intelectualmente.

O autor instiga à reflexão com as perguntas: o que ensinar? A quem se ensina? Para que se ensina? Como ensinar? Esses questionamentos são colocados para o professor refletir acerca de seu trabalho e destacar a importância de haver valores e objetivos da disciplina de matemática. Como relatado ao longo da obra, a finalidade educacional varia de acordo com a cultura de cada época, por isso os questionamentos são importantes e devem permear a prática.

Roxo (1937, p. 104) ainda afirma que, dentre outros, um dos valores da matemática é que “a história da matemática é a história da raça humana”. O autor aponta em sua obra a história como uma possibilidade para modificar a prática em sala de aula.

Muitas vezes pode haver incertezas e insegurança por parte dos professores em como inserir a história no contexto da matemática escolar, o que pode ocorrer devido à falta de orientação sobre o assunto. Esperamos que nossa pesquisa possa incentivar a discussão acerca da história da matemática na sala de aula e possibilite a reflexão por parte dos educadores em busca de alternativas para ampliar as informações e potencialidades do referido tema.

3.1 A HISTÓRIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Em Miguel (1993, p. 8), uma frase chamou-nos atenção: “Toda pedagogia é necessariamente histórica e toda história é necessariamente pedagógica”. Essa afirmação nos levou a refletir sobre o tema escolhido para essa dissertação. Sendo o curso mestrado acadêmico em **ensino** de matemática e a profissão docente, o olhar pedagógico necessariamente acompanha o olhar científico dado à disciplina. Esse olhar está carregado de história. A influência dos anos escolares enquanto aluno, a história de vida, a formação acadêmica, tudo faz parte da prática docente em sala de aula. Olhando para a história podemos analisar e refletir sobre os fatos, aprendendo com erros e acertos. Ao mesmo tempo, enquanto estamos atuando no ambiente escolar, assim como a cada momento, construímos a história.

Diante da divagação acima exposta, agrada-nos escolher tratar de história para o ensino de matemática, pois sendo toda história pedagógica, a história da matemática tem muito a nos ensinar e contribuir para o ensino, da mesma forma que a matemática é um saber historicamente construído.

Miguel (1993) ainda faz uma comparação afirmando que a história é um oceano de peixes e os peixes são os fatos. Aqueles que encontramos dependem do acesso que temos à área explorada, de qual região delimitamos. Assim como há partes escuras e ainda não conhecidas dos oceanos, a história a que temos acesso é pequena se comparada às diversas sociedades que existem e já existiram, assim como os registros da matemática utilizada por cada uma nos chega conforme são descobertos e mais, conforme esses registros existam. Esse campo de conhecimento é um mundo ainda pouco explorado e o que pretendemos é pegar um pequeno peixinho da história da matemática e fazê-lo nadar por novos mares, num constante ir e vir entre a sua origem e as novas águas do ensino da matemática escolar.

Miguel e Miorim (2011) apontam que a história da matemática pode ser uma aliada para atingir objetivos pedagógicos com os estudantes, levando-os a perceber, dentre outras possibilidades,

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 53).

A matemática se desenvolve à medida que a humanidade se modifica. Pensamos que a disciplina organizada e compartimentada da forma como é estudada na escola não oportuniza que isso seja percebido por parte dos estudantes. A fragmentação dos conteúdos impede a visão de um contexto maior em que a matemática se fez necessária em situações cotidianas do ser humano e dá a impressão de que tudo o que há de matemática já foi descoberto.

Ao apresentar em sala de aula diferentes contextos e culturas que contribuíram para o desenvolvimento da matemática, possibilitamos aos alunos refletir sobre a visão única que se tem dos métodos e procedimentos constantes em livros didáticos e analisar e comparar outras possibilidades de se resolver determinados problemas, verificando qual é melhor no seu ponto de vista.

Oportunizamos ao estudante desenvolver um olhar analítico, possibilitando a detecção de conhecimentos que já tem e analisar como os mesmos podem se relacionar com o conhecimento aprendido na escola. Pode haver dessa forma uma valorização da sua própria identidade, a partir da descoberta de diferentes grupos que fizeram e fazem matemática.

As diferenças culturais são importantes na história da matemática, pois as diferentes necessidades dos povos e as diferentes soluções encontradas por eles mostram que não há uma receita para o pensamento matemático, ele se desenvolve e aperfeiçoa conforme os problemas surgem diante das pessoas e são necessárias soluções.

Em relação à utilização da história da matemática na sala de aula, Miguel e Miorim (2011) e Mendes et. al. (2006) ressaltam a necessidade de um olhar reflexivo por parte do professor, evitando a reprodução de propostas prontas sem refletir sobre as mesmas. O conhecimento das propostas e práticas já realizadas é importante, sendo necessária a análise das mesmas e adequação à turma, ao contexto escolar em que se trabalha e aos objetivos que se pretende alcançar na aula.

Os autores ainda defendem que a utilização da história da matemática está condicionada à concepção adotada em relação à aprendizagem e à natureza do conhecimento. Dessa forma, cada educador tem uma experiência diferente, que constitui visões diferentes acerca do conhecimento matemático e da aprendizagem da disciplina, o que gera diversas perspectivas quanto à presença da história da matemática em sala de aula e no planejamento do trabalho docente.

Mendes et. al. (2006) apontam que não há um consenso sobre o que é um bom ensino de matemática, entretanto, a definição que cada um tem sobre isso está ligada à sua concepção de matemática. Os autores lembram que a ordem lógica não corresponde necessariamente à ordem histórica e a ordem didática não respeita necessariamente às outras duas, por isso não se espera que os conteúdos sejam trabalhados conforme a ordem histórica, pois nem sempre os conceitos envolvidos ficarão claros. Em nosso ponto de vista, é importante que os professores conheçam a história da matemática e possam avaliar a possibilidade de incluí-la em sua metodologia de ensino. Segundo os autores:

> (...) o professor deveria saber como as coisas aconteceram, para:
>
> - compreender melhor as dificuldades do homem genérico, da humanidade, na elaboração das idéias matemáticas e, através delas, as de seus próprios alunos;

- entender melhor a dedução das idéias, dos motivos e das variações da sinfonia matemática;
- utilizar este saber como um organizador da sua própria pedagogia. (MENDES et.al., 2006, p.16)

Pensamos que, como expõem Mendes et. al. (2006), é importante utilizar a história da matemática em sala de aula como investigação, incentivando o protagonismo dos estudantes, e, dessa forma, ser uma ferramenta para o desenvolvimento da cognição. A matemática tem sido construída sobre ideias anteriores e ao dedicarem-se a um problema original ou dados históricos, os estudantes podem criar, seguindo os passos de investigação, reflexão, discussão e registro. Ao comparar a matemática de outros povos com a já conhecida, amplia-se o conhecimento, valorizam-se os conhecimentos das diferentes culturas e há possibilidade de criar novos métodos e conceitos.

Mendes et. al. (2006, p. 80) afirmam que "toda a história é escrita do ponto de vista que o presente julga ser importante para a sociedade atual". As diferentes maneiras de ver e explicar o mundo levam a diferentes formas de considerar fatos dignos de memória na história.

É importante que os estudantes percebam que a matemática estudada na sala de aula faz parte de uma visão histórica da disciplina. Além disso, cada indivíduo é um historiador, pois diariamente relacionamos nossas ações à reflexão de fatos do passado. A matemática, como já destacado, é construída com base em ideias anteriores, portanto acreditamos que conhecer a história permite ter uma visão mais ampla de como os conteúdos se desenvolveram e os motivos de alguns e não outros serem estudados em cada ano escolar e algumas técnicas ou métodos serem usados hoje em dia em detrimento de outros, levando a valorização das técnicas atuais.

Aproximando-se dos tópicos acima destacados, Miguel et. al (2009) apresentam a perspectiva de utilização da história da matemática com base nos aspectos culturais e sociais da realidade conhecida pelos alunos. Constrói-se em sala de aula uma visão sobre o conhecimento matemático que os alunos apresentam e pode-se associá-lo ao conhecimento sistematizado, buscando relações com a construção desse conhecimento matemático que pode parecer tão distante do cotidiano.

Os estudos de Miguel (1993) e Miguel e Miorim (2011) apresentam perspectivas teóricas dentro da investigação no campo da história na educação matemática. Algumas dessas perspectivas veem a história da matemática como fonte para o conhecimento das dificuldades que foram enfrentadas para a aceitação de novos conceitos e o longo tempo que se passou até que muitas questões fossem compreendidas. Assim, o professor pode perceber as possíveis dificuldades que podem surgir nas aulas, direcionando suas questões para evitá-las ou mesmo amenizá-las, compreendendo que se tantos matemáticos importantes tiveram dificuldades na compreensão e resolução de problemas que se apresentaram o mesmo pode ocorrer com seus alunos.

Pensamos que também é possível que os alunos vejam que os obstáculos para a aprendizagem são naturais e podem ser superados. O professor pode então direcionar sua ação para a valorização dos acertos e o olhar atencioso para os erros, refletindo sobre eles, sem que os mesmos sejam mais importantes que a busca do aluno e a construção do seu próprio olhar sobre o conhecimento matemático, a partir da mediação e apoio do educador.

De acordo com Mendes et. al. (2006, p. 90) consideramos que professores e estudantes podem "buscar na história a superação dos obstáculos cognitivos surgidos no desenvolvimento da matemática escolar." Os autores não excluem a possibilidade da história da matemática como recreativa e lúdica, mas defendem que deve ser incorporada com uma visão **"*investigatória* e construtiva do conhecimento escolar**", pois reflete muitas vezes o cotidiano de sociedades e fomenta a imaginação que auxilia e, por vezes, falta nas atividades.

Mendes et. al. (2006) e Miguel e Miorim (2011) alertam que a história possibilita a formalização dos conceitos matemáticos ligados ao desenvolvimento cognitivo do estudante, entretanto devem ser contextualizados historicamente, para que não haja estranhamento por parte dos alunos, dificultando o processo de ensino e aprendizagem. Ao utilizar um problema histórico é necessário fazer discussão e análise dos fatos, considerando as sociedades, interesses, cultura da época em que o mesmo foi proposto e pode-se refletir sobre a sua influência na matemática que hoje estudamos.

Com a história da matemática utilizada de forma investigativa, o professor passa a ser um orientador das atividades. Pode-se partir de problemas históricos, refletir e ver a história como unificadora dos aspectos cotidiano, escolar e científico da matemática. Como já destacado, isso exige que o professor tenha cautela, estudo, responsabilidade e planejamento.

Complementando o que já citamos anteriormente acerca das perspectivas da história da matemática no ensino apresentadas por Miguel (1993), complementadas por Miguel e Miorim (2011), destacamos que nas obras aparecem os olhares para a história da matemática como:

- guia metodológico, isto é, seguir o caminho da humanidade na construção do conhecimento – método de ensino e aprendizagem;

- instrumento de consciência epistemológica, deixando de lado o rigor para retomá-lo quando o aprendiz estiver mais consciente dos conceitos e perceber a necessidade dos padrões estabelecidos – função psicológica com objetivo epistemológico;
- instrumento na formalização de conceitos, sendo a formalização a capacidade de traçar caminhos para se chegar a um fim;
- explicação dos porquês questionados pelos estudantes;
- argumento para a abordagem intuitiva, opondo-se à dedutiva. A criatividade aparece primeiro, depois a esquematização lógica;
- instrumento para verificar a diversidade teórica das matemáticas, o caráter empírico, mostrando que o conhecimento resulta da síntese dialética entre o sujeito, a sociedade e o objeto material;
- instrumento de resgate da identidade cultural – romper bloqueio cultural, permitir a reinvenção do passado pelo aluno.

Acreditamos serem válidas todas as possibilidades acima relatadas, sendo que mais de uma perspectiva pode aparecer em um mesmo planejamento envolvendo história da matemática. Pretendemos destacar a utilização da história como integrante do planejamento das aulas, não apenas constando como tópicos, e sim que seja base para o planejamento do professor, com a reflexão do mesmo acerca de como o conteúdo se constituiu ao longo do tempo. Para isso, o professor precisa comungar de nossa visão sobre a história com relevância epistemológica, ou seja, acreditar que a história da matemática é fonte de conhecimento e pode ser usada para compreensão de conteúdos da disciplina.

3.2 OBSTÁCULOS À UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO CONTEXTO ESCOLAR

Anteriormente foram apresentados aspectos incentivando a utilização da história da matemática nas aulas, porém podem surgir dificuldades quando buscamos transpor a teoria para a prática e as mesmas não devem ser ignoradas, mas analisadas e superadas quando possível. Miguel et. al (2009, p. 10) cita alguns desses empecilhos:

> 1) o despreparo dos professores que não tiveram tanto em sua formação inicial quanto na continuada, oportunidades de estudo da história da Matemática e de análise das possibilidades de inserção desta história em suas práticas pedagógicas;
> 2) a falta de tempo de professores da Escola Básica para elaborar, testar e avaliar atividades pedagógicas que utilizem a história da matemática para a construção de conceitos matemáticos;
> 3) a ineficácia dos dados históricos inseridos em livros didáticos que, em sua maioria, restringem-se a citações de datas e nomes, sem qualquer indicação para o professor

de como a história poderia ser utilizada na construção de conceitos matemáticos por parte de seus alunos;

4) a grande quantidade de dados históricos incorretos existentes tanto em livros didáticos quanto em paradidáticos que usam a história como mero instrumento ilustrativo, e
5) a quase inexistência de material bibliográfico com sugestões de atividades que possam ser utilizadas pelos professores em sala de aula. Esta última dificuldade decorre do fato de que nem todo texto sobre a história da Matemática tem potencialidades pedagógicas para o ensino de matemática na Escola Básica. Segundo MIGUEL (1993, p. 109) "para poderem ser pedagogicamente úteis, é necessário que histórias da Matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático."

Nos cursos de formação de professores a história da matemática pode ser pouco explorada em relação às possibilidades para sua utilização em sala de aula, sendo assim, os professores podem encontrar dificuldades em inseri-la em seus planejamentos. Além disso, a carga horária de trabalho dos professores da educação básica é pequena para planejamento e dificilmente permite que seja possível um estudo prévio, profundo da história para reflexão e elaboração de atividades.

Como anteriormente citado, a reprodução de atividades criadas por terceiros, mesmo que profissionais com experiência em sala de aula, exige um olhar analítico e adaptação das atividades à realidade escolar em que o professor pretende trabalhar. Dessa forma, mesmo com sugestões prontas, o tempo necessário para preparação e análise não é suficiente. Juntamente à falta de tempo para estudo e reflexão por parte dos educadores, os livros didáticos muitas vezes apresentam informações soltas, sem possibilidade de ligação com o ensino dos conteúdos matemáticos e, em alguns casos essas informações possuem algum equívoco.

Mendes et. al. (2006) destacam que um pouco de conhecimento sobre história da matemática deveria ser indispensável a qualquer matemático e professor de todos os níveis de ensino, pois a mesma permite uma visão humana da matemática, transformando a disciplina em conhecimentos buscados por seres humanos, que se frustraram e se alegraram com suas descobertas.

Mendes (2014) reforça a importância que deve ser dada à formação de professores em relação à visão crítica a ser desenvolvida com os alunos, tendo a história da matemática como ferramenta para auxiliar nesse trabalho. O autor afirma que

> Educar não é fechar o portão da escola e fingir um mundo não existente: sem guerras; sem exploração dos países de primeiro mundo sobre os de terceiro mundo; sem violência urbana; ou sem exploração de classes. A escola não pode se limitar a conhecimentos cognitivos; urge ser um local capaz de despertar no educando a consciência crítica, para entender suas posições sociais e políticas, as dos seus colegas, de grupos sociais aos quais pertença, e da sociedade como um todo. Sem isso o discente não atinge a cidadania plena. (MENDES, 2014, p. 21)

Acerca dos materiais produzidos, conforme apontam Miguel et.al. (2009), faltam textos de história da matemática com olhar pedagógico e que apresentam possibilidades de inserção desta tendência no ensino de conteúdos matemáticos. Além disso, o autor relata que também há escassez de obras históricas originais traduzidas para a nossa língua, o que restringe enormemente o acesso a esses materiais e, consequentemente, impede a análise dos mesmos e reflexões acerca das possibilidades de sua utilização no ensino de matemática.

Ademais, como destaca Miguel (1993), para ser usada pedagogicamente, a história da matemática precisa ser escrita sob o olhar do educador matemático, de forma a, segundo o autor, priorizar determinados temas e métodos e ressaltar a reconstituição dos contextos epistemológico, sociocultural e político, não tanto os resultados matemáticos, de forma a mostrar a relação da matemática com a sociedade.

Uma alternativa para inserir a história nas aulas de matemática pode ser apresentar problemas históricos que deram origem a conteúdos e soluções hoje conhecidas. Miguel e Miorim (2011, p. 51) apontam o cuidado que devemos ter ao levar para a sala de aula tais problemas:

> Ainda que problemas dessa ou de outra natureza possam, de fato, levar a um envolvimento do estudante com a Matemática, isso não deveria ser visto como um poder automático e intrínseco do próprio problema, mas da maneira como tais problemas participam do projeto pedagógico do professor e da maneira como os estudantes se relacionam com eles. De certa maneira, portanto, os mesmos comentários críticos que fizemos aos defensores da participação da história como forma de motivação, aplicam-se àqueles que tentam estabelecer uma vinculação determinista entre problemas históricos e motivação, uma vez que o aspecto motivador de um problema não reside no fato de ser ele “histórico” nem de ser um “problema”, mas no maior ou menor grau de desafio que oferece ao estudante, no modo como esse desafio é por ele percebido, no tipo de relações que se estabelecem entre o problema histórico e os valores, interesses e vivência do estudante, etc.

Diante desse alerta para a utilização de problemas históricos, reforça-se a necessidade de reflexão acerca da prática pedagógica apoiada na utilização da história da matemática. Mesmo que um problema possa parecer interessante para o professor, a turma em que o mesmo será apresentado pode não compreendê-lo e não conseguir situar-se no contexto em que ele surgiu, o que pode não desafiar os alunos a resolvê-lo e dificultar associações com os conhecimentos. Caso o aluno não veja sentido ou não se interesse pela atividade proposta, a história da matemática pode ser monótona e cansativa, causando efeito contrário ao pretendido pelo professor.

A beleza da matemática é discutível, tendo em vista que o próprio conceito de beleza depende da visão que cada pessoa tem. O que é belo para um nem sempre é visto da mesma forma por outro. Certamente não é necessário um grande esforço para convencer os apreciadores e admiradores da matemática de que a mesma é bela.

Miguel (1993) considera que a utilização da história da matemática para aumentar ou despertar a motivação para a aprendizagem da disciplina é problemático. Ainda, atribuir à história da matemática um poder mágico para despertar o interesse no seu estudo esbarra no fato de que, se assim fosse, a própria disciplina de história seria automotivadora. A motivação é algo individual e depende de muitos fatores além da metodologia utilizada em sala de aula. A história da matemática pode ser motivadora para alguns estudantes, entretanto é ingênuo e exagerado afirmar que o é para todos.

De acordo com o relatado anteriormente, percebemos que alguns autores consideram que a história pode contribuir positivamente para o ensino de matemática, apresentando a disciplina de forma mais aberta e humana, mostrando erros cometidos ao longo do tempo e a participação de diferentes povos e culturas na construção do saber hoje apresentado de forma sistematizada. Além disso, a história da matemática mostra que o conhecimento matemático se desenvolveu a partir de situações muitas vezes relacionadas a outras áreas do saber, isto é, de forma contextualizada e interdisciplinar.

Como Miguel e Miorim (2011) apontam, a história da matemática articulada com as variáveis que interferem no ensino e aprendizagem e adaptada para fins pedagógicos, contribui para a problematização e a transformação da educação escolar e da cultura matemática promovida na escola, por meio da análise e reflexão profunda acerca da proposta pedagógica elaborada.

Acreditamos que a história da matemática é uma ferramenta possível para auxiliar a prática do professor e contribuir para a aprendizagem da matemática. Não é a única ferramenta e talvez não seja a melhor ou mais adequada em determinadas situações, mas se inserida em uma proposta elaborada a partir de pesquisas e preparação do professor, adaptada à turma em que se pretende aplicar, pode auxiliar na formação de estudantes reflexivos e com uma efetiva aprendizagem matemática, associada mais à compreensão de conceitos e processos e menos à memorização e reprodução de algoritmos mecânicos.

4 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Duval (2003, 2012, 2013) afirma que a principal dificuldade dos alunos em matemática consiste no fato de que somente temos acesso aos objetos matemáticos a partir de suas representações semióticas.

> As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL, 2012, p. 269)

De acordo com Flores (2006), semiótico refere-se ao que é produzido a partir de regras, convenções, códigos. E, segundo a autora, signo é um objeto que representa outro objeto, representa algo para alguém.

A teoria dos registros de representação semiótica, segundo Duval (2013), iniciou a partir da percepção da importância que as variadas formas de linguagem têm nas atividades matemáticas, decorrente do contato com alunos e professores.

Nas salas de aula o autor verificou dificuldades relacionadas às passagens entre língua materna e todas as formulações simbólicas, concluindo que os empecilhos à compreensão na aprendizagem estão mais relacionados à variedade de representações semióticas utilizadas e o uso confuso que é feito delas do que aos conceitos matemáticos em si.

Como os objetos matemáticos (números e funções, por exemplo) não são acessados perceptivelmente por meio de observações ou instrumentos, para termos acesso a eles precisamos de uma atividade de produção semiótica.

Os diferentes tipos de representação semiótica que utilizamos em matemática são designados por Duval (2003) como *registro*. Segundo o autor, existem quatro tipos diferentes de registros:

- **Registros multifuncionais** – esses registros não possuem tratamento por meio de algoritmos. Podem ter dois tipos de representação: **discursiva**: língua natural, associações verbais. As formas de raciocínio consistem em argumentação a partir de observações e deduções válidas a partir de teoremas; **não discursiva**: figuras geométricas. Nesse caso a construção ocorre com auxílio de instrumentos.
- **Registros monofuncionais** – o tratamento é principalmente por meio de algoritmos. Podem ter dois tipos de representação: **discursiva**: sistemas de escrita (numérica, algébrica, simbólica), cálculo; **não discursiva**: gráficos cartesianos, mudança de sistema de coordenadas.

De acordo com Duval (2003), uma abordagem de ensino baseada nos conceitos não é suficiente para despertar a atividade cognitiva requerida em matemática. Para o autor, a importância das representações semióticas e a grande variedade de representações semióticas utilizada em matemática (como os sistemas de numeração, figuras geométricas, escrita algébrica, representação gráfica, língua natural) estão diretamente ligadas à atividade cognitiva em matemática.

A importância citada, para Duval (2003), é primordial, pois "é suficiente observar a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático" (DUVAL, 2003, p. 13). O autor destaca ainda que as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado e reforça que os objetos matemáticos não são perceptíveis diretamente. O acesso aos números, por exemplo, depende de um sistema de representação para designá-los.

Duval (2003) relata dois tipos de transformação de representações semióticas que se deve levar em conta ao analisar a atividade matemática sob a perspectiva do ensino e da aprendizagem: tratamento e conversão.

> - Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
> - As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p. 16).

O autor segue o texto destacando que, do ponto de vista matemático, a conversão não tem papel intrínseco nos processos de justificação ou prova, que se baseiam no tratamento efetuado em um determinado registro. A conversão está presente na escolha conveniente do registro para que os tratamentos se tornem mais eficientes ou econômicos, por exemplo.

Duval (2012) utiliza os termos *semiose* e *noesis*. A primeira é a apreensão ou produção de uma representação semiótica. A segunda é a apreensão conceitual de um objeto. De acordo com o autor, não há *noesis* sem *semiose*. Sendo assim, para a compreensão é essencial na atividade matemática poder mobilizar diferentes registros de representação semiótica.

Para Duval (2003), no ensino de matemática a conversão é considerada uma atividade lateral, que antecederia a atividade matemática em si. Porém, afirma o autor que a conversão é, do ponto de vista cognitivo, fundamental para a compreensão em matemática. A conversão possibilita a *semiose*, que é essencial para a *noesis*.

Outro ponto destacado por Duval (2003) é que normalmente no ensino um sentido de conversão é privilegiado, considerando-se erroneamente que o treinamento em um sentido implica no treinamento da conversão no sentido inverso. “Passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto.” (DUVAL, 2003, p. 22).

O autor destaca que o sucesso dos alunos ocorre nos monorregistros, isto é, no tratamento dado por meio de algoritmos, sem mudança de registro. Os fracassos ou bloqueios dos alunos aumentam quando é necessária uma mudança de registro ou a mobilização de diferentes tipos de registros ao mesmo tempo, o que resulta, segundo Duval (2003) em limitação da compreensão e da aprendizagem.

Segundo Duval (2013), a atividade matemática é vista sob o ponto de vista do ensino e do que o professor deve fazer enquanto deveria ser sob a perspectiva dos alunos e, portanto, da aprendizagem. O foco das sequências de atividades geralmente é a aplicação ou aquisição de conceitos dos conteúdos matemáticos. Na prática, portanto, fica em segundo plano a capacidade de reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações semióticas e substituir uma representação por outra mais conveniente, o que é importante para a resolução de qualquer problema.

Para o autor, é importante que os objetos não sejam confundidos com sua representação, por isso é necessário recorrer a diferentes registros. Segundo Duval (2012), toda representação é parcial em relação ao que ela representa. A articulação entre diferentes registros permite a complementaridade e a economia de tratamento, ao poder transitar de uma forma de representação para outra mais útil em determinada situação. Essa capacidade de articulação caracterizaria, de acordo com o autor, a compreensão em matemática.

A teoria dos registros de representação semiótica, conforme afirma Duval (2013), deve considerar a face oculta da atividade matemática, isto é, “todas as transformações de representações semióticas cujo funcionamento cognitivo é ao mesmo tempo específico da matemática e independente dos conceitos matemáticos mobilizados” (DUVAL, 2013, p. 22).

O autor ainda destaca que não é possível aspirar ao mesmo tempo objetivos de aquisição de conceitos referentes a um determinado conteúdo e objetivos de conscientização relacionados à originalidade da atividade matemática, independentemente do conceito ou procedimento considerados. Ou seja, “a atenção não pode se concentrar simultaneamente sobre a abordagem matemática e sobre o funcionamento cognitivo subjacente a essa abordagem” (DUVAL, 2013, p. 22).

Em nossa pesquisa optamos pela introdução à escrita simbólica por considerarmos uma importante forma de representação presente em matemática nos diferentes níveis de ensino, introduzida normalmente no início dos anos finais do ensino fundamental.

As atividades pensadas a partir do estudo histórico da matemática objetivam a conscientização dos estudantes em relação aos objetos representados pelos símbolos, oportunizando a compreensão da escrita simbólica e a conversão da escrita em língua materna para essa representação. Sendo assim, nosso estudo está voltado para o funcionamento cognitivo relacionado à compreensão da representação simbólica que acompanhará os estudantes nos demais anos de escolarização.

Em nossa proposta, destacamos a conversão de um registro multifuncional discursivo para um registro monofuncional discursivo, a partir de atividades que promovam a conversão de um problema escrito em língua materna para a escrita simbólica. Essa conversão antecede a resolução do problema por meio de algoritmos para o tratamento da expressão simbólica que o representa.

Para exemplificar, vamos pensar na seguinte situação escrita em língua portuguesa: *o dobro de um número é 12. Que número é esse?* Essa questão é relativamente simples e pode ser rapidamente respondida por algumas pessoas ao pensarem que 2 multiplicado por 6 é igual a 12 e, portanto, a resposta é o número 6, sem haver necessidade de utilizar um registro diferente para encontrar o resultado. Porém, quando a situação descrita é um pouco mais complexa, como: *o dobro de um número mais sua terça parte é igual a esse número somado com quatro. Que número é esse?*

No caso do segundo problema, há novamente um valor desconhecido para encontrar, porém o raciocínio não é tão simples. Para auxiliar na resolução podemos tentar representá-lo por meio de uma escrita simbólica (nesse caso algébrica) e organizá-lo em uma equação que o represente. Após, é necessário apenas manipular os símbolos por meio do algoritmo conhecido para resolver a equação e encontrar o valor desconhecido.

Podemos representar o número que pretendemos encontrar como x. O dobro é indicado por $2x$, a terça parte por $\frac{x}{3}$ e uma forma simbólica de representar o problema é $2x + \frac{x}{3} = x + 4$. Por meio de manipulações algébricas, encontramos que $x = 3$.

No exemplo acima, resolver o problema proposto implica a coordenação de dois registros: língua materna (registro multifuncional discursivo) e escrita simbólica (registro monofuncional discursivo). A utilização da escrita simbólica pode facilitar a resolução do problema, convertendo-o em uma equação a ser resolvida. O processo de conversão dos registros antecede o tratamento dos símbolos para a resolução da equação.

Como anteriormente citado, normalmente é priorizado na sala de aula o tratamento dentro de um mesmo registro, o que em nosso exemplo seria a resolução da equação, o que deixa em segundo plano a conversão de um registro de um mesmo objeto em outro que o representa. Em nossa pesquisa, priorizamos a conversão dos registros que antecede a resolução por meio da manipulação com utilização de algoritmos.

Duval (2003) aponta que as dificuldades em matemática são encontradas em todos os níveis de escolarização. A questão que se coloca como central e própria da aprendizagem da matemática é "como um aluno pode aprender a reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações que podem ser feitas em diferentes registros de representação?" (DUVAL, 2003, p. 23).

Segundo o autor, a atividade matemática deve ser estudada em sua especificidade, ou seja, no fato de que o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por suas representações semióticas e a aprendizagem ocorre quando o aluno é capaz de, por si mesmo, mobilizar e converter representações durante a resolução de um problema.

Acreditamos, em consonância com o que diz Duval (2013), que a importância do ensino de matemática está em desenvolver intelectualmente a autonomia de cada indivíduo, não apenas priorizar a aquisição de conhecimentos básicos pré-determinados. Segundo o autor: "para entender como trabalhamos em matemática para resolver problemas e até mesmo para saber como utilizar um conhecimento matemático para resolver problemas reais, é preciso primeiro tomar consciência das transformações de representações semióticas, por meio de mudanças de registros e pelos tratamentos específicos de cada registro" (DUVAL, 2013, p. 27). É importante que os estudantes compreendam os objetos matemáticos em sua totalidade, sendo capazes de transitar entre as suas representações possíveis e optar pela mais útil para a resolução de cada situação apresentada.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa, que quanto à abordagem pode ser classificada como qualitativa, tem em vista a motivação em contribuir para um ensino de matemática focado no processo de ensino e aprendizagem, com compreensão da simbologia algébrica.

De acordo com Bogdan e Biklen (1991), na pesquisa qualitativa os dados obtidos são predominantemente descritivos e a preocupação se dá com o processo, não com o produto final. Os autores também apontam como características da investigação qualitativa a análise indutiva dos dados e a fonte dos mesmos como o ambiente natural. O contexto em que os dados são coletados influencia o comportamento dos sujeitos, portanto, a partir da observação, o investigador descreve os dados para que nenhum detalhe se perca e constrói um quadro com as informações, verificando as questões mais importantes e considerando a visão dos sujeitos.

Goldenberg (1997) destaca que na investigação qualitativa, os métodos de pesquisa devem priorizar os pontos de vista dos indivíduos em relação ao mundo que os cerca, isto é, compreender os significados que os mesmos põem em prática para construir esse mundo. Além disso, a autora destaca que a pesquisa qualitativa consegue comparar diferentes momentos, situações, comportamentos e depende da biografia do pesquisador, das opções teóricas, do contexto mais amplo e das imprevisíveis situações que ocorrem ao longo da pesquisa, em concordância com Bicudo (2004), que descreve como qualitativo algo subjetivo, passível de expor sensações e opiniões, utilizando como dado a descrição daquele que percebe e para quem o mundo faz sentido.

Garnica (2004) apresenta as características da pesquisa qualitativa em seu ponto de vista:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas. (GARNICA, 2004, p. 86)

Após a leitura de fontes de informações históricas, elaboramos uma proposta de atividades que foi aplicada em uma turma de 9º ano do ensino fundamental. O nosso olhar é voltado para o processo de resolução das atividades realizado pelos estudantes, bem como em suas atitudes e impressões diante do que foi proposto.

A aplicação da proposta ocorreu entre outubro e novembro de 2018, durante seis aulas. A coleta de dados para análise se deu por meio de gravações audiovisuais das aulas, fotografias, registros de campo, isto é, anotações relevantes durante a aplicação das atividades e registros dos alunos.

Araújo e Borba (2004) destacam a importância dada por diversos autores em relação ao uso de diferentes procedimentos para obtenção dos dados, com o intuito de aumentar a credibilidade da pesquisa.

Bogdan e Biklen (1991) descrevem as notas de campo como um diário pessoal que pode auxiliar o investigador a perceber como os dados afetaram o plano da investigação. Elas são compostas das partes descritiva e reflexiva. Em relação à primeira é importante que sejam feitos registros com riqueza de detalhes, de diálogos, acontecimentos particulares, descrição do espaço físico e das atividades. A segunda parte engloba reflexões sobre a análise, método, pontos de vista, expectativas do observador e pontos de clarificação que possam surgir durante a observação.

Em nosso caso, a investigação foi realizada na turma em que a pesquisadora é professora, sendo importante o registro das notas de campo, inclusive para analisar, como citado acima, a influência dos dados na pesquisa e pesquisadora.

As gravações audiovisuais facilitam a análise dos dados ao possibilitar a revisitação da sala de aula durante o desenvolvimento das atividades e verificação de sentimentos expressados pelos estudantes e não registrados pelos mesmos ou que passaram despercebidos pela pesquisadora no momento em que ocorreram.

Com a análise dos dados pretendemos refletir acerca de respostas à pergunta: atividades inspiradas na história da matemática, no que diz respeito ao processo de construção da simbologia matemática, podem favorecer o aprendizado da escrita simbólica da matemática escolar na perspectiva de Duval?

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA INSTITUIÇÃO E DOS SUJEITOS DA PESQUISA

A aplicação da proposta elaborada a partir do estudo histórico ocorreu na turma de 9º ano do ensino fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental (EMEF) Francisco Cândido Xavier, em São Leopoldo, Rio Grande do Sul. Este grupo foi escolhido pois é uma das turmas em que a pesquisadora atua como professora e pela verificação da dificuldade que os estudantes têm ao lidar com símbolos nas aulas de matemática.

Conforme o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola, com vigência de 2016 a 2019, o documento começou a ser pensado antes mesmo de a escola ser inaugurada em 28 de junho de 2012. A proposta do projeto da escola tentou se aproximar dos anseios da comunidade, que demonstrava, a partir da verificação em outras escolas do bairro, altos índices de reprovação, não aprendizagem e não permanência na escola e começou a ser implementada em 2012, sendo construída aos poucos, enfrentando os desafios como escassez de recursos materiais e humanos. A realidade enfrentada diariamente é composta por vulnerabilidade social, distorção de idade e ano de escolarização, poucos investimentos e alta rotatividade docente e discente.

A construção da instituição ocorreu em meio a discussões para ampliação da rede municipal de ensino de São Leopoldo e iniciativa de professoras supervisoras da Secretaria de Educação interessadas em entender e modificar a separação entre teoria e prática nas escolas, rompendo com a visão de educação como privilégio. A filosofia da escola é "acolher, cuidar e educar", com a missão de garantir acesso, permanência e aprendizagem para todos, com educação integral em tempo integral, centrada na prática da educação em direitos humanos, integralidade do sujeito, vivência cidadã, ampliação da visão de mundo e conhecimento.

A EMEF Francisco Cândido Xavier localiza-se na zona nordeste da cidade de São Leopoldo, bairro Santos Dumont. A construção está relacionada ao Loteamento Habitacional Padre Orestes, a partir de um termo de compromisso firmado entre Ministério das Cidades, Prefeitura Municipal de São Leopoldo e Trensurb, devido à ampliação da linha do trem até a cidade de Novo Hamburgo. O termo estabelecia a garantia de direitos da comunidade, dentre eles o direito à educação.

A comunidade foi retirada do local em que vivia e realocada no loteamento construído pela Trensurb, tendo em vista que o terreno antes ocupado pelas moradias foi destinado à extensão da linha do trem.

As atividades da escola iniciaram com duas classes de aceleração de aprendizagem e correção do fluxo escolar, de nível de alfabetização e consolidação da alfabetização formadas por alunos de outra escola municipal do bairro. Os estudantes dessas turmas ainda hoje caracterizam o perfil da escola e da comunidade local, a qual tem como marca a exclusão social e o não acesso às políticas públicas em suas diferentes áreas. As agressões físicas e verbais são constantes, o que a escola trabalha para mudar, incentivando o diálogo e a tolerância.

Em pesquisa realizada pela escola e organizações sociais da região, foi apontada a necessidade de constituição de espaços de lazer e recreação. A preocupação com a segurança e não permanência das pessoas na comunidade foram citados como desafios a serem enfrentados, pois a infrequência dos estudantes era alta, o que vem mudando nos últimos meses.

O apoio da equipe diretiva é muito importante para que o cotidiano se torne menos pesado. Na maioria dos casos, as dificuldades de aprendizagem demonstradas pelos alunos ocorrem devido à necessidade de interromper as aulas para mediar conflitos ou dificuldade que os estudantes têm em acompanhar a sequência das atividades devido à ausência às aulas. A avaliação da escola tem como pilares: postura de aluno, transformação como ser humano e conhecimento, sendo a prioridade na ordem apresentada.

Muitos dos estudantes que estão nos anos finais do ensino fundamental ingressaram na escola em 2012, outros foram transferidos de outras instituições, tendo sido convidados a se retirar das mesmas ou sendo transferidos devido à mudança de casa de suas famílias, o que gera durante o ano inteiro muitas entradas e saídas de estudantes nas turmas. Os sextos anos de 2018 são as primeiras turmas a terem educação em turno integral desde que começaram os estudos na Chico, como carinhosamente é chamada a escola.

A turma escolhida para a aplicação da proposta era composta por 18 alunos no primeiro dia: 11 meninas e 7 meninos e, ao final das atividades, era composta de 20 estudantes: 12 meninas e 8 meninos. O ano letivo foi iniciado com 21 estudantes. Todos eles estudaram em outras escolas e ingressaram em diferentes anos na escola. Duas alunas iniciaram os estudos na instituição este ano.

Apenas em 2017 a escola teve a nomeação de uma professora de matemática (anteriormente havia contratação temporária ou extensão de carga-horária para atender a instituição).

Observamos que os estudantes tiveram experiências diversas em relação ao ensino nas escolas que frequentaram anteriormente e estudaram conteúdos diferentes. A turma em geral apresenta dificuldade em ler e compreender situações e resolvê-las matematicamente. Em particular, um aluno apresenta dificuldade de leitura e compreensão de textos.

Optamos por trabalhar com o 9º ano pela necessidade identificada de refletirem sobre a simbologia algébrica e revisar ou apresentar o conteúdo que pode não ter sido estudado anteriormente. A proposta e os resultados analisados serão detalhados no capítulo sete.

6 SIMBOLOGIA ALGÉBRICA NA HISTÓRIA

Historicamente não encontramos o desenvolvimento da escrita algébrica separado das equações. Baseando-nos nas obras estudadas, percebemos que a simbologia utilizada para traduzir problemas em equações com o intuito de resolvê-las se desenvolveu juntamente com o estudo dos métodos para resolução.

Neste texto, porém, nos restringiremos a citar trechos da história relacionados à simbologia algébrica e seu desenvolvimento ao longo do tempo, de acordo com a necessidade de facilitar e sistematizar a linguagem utilizada.

Inevitavelmente citaremos fatos acerca da resolução de equações, limitando-nos praticamente às de primeiro grau, pois a intenção é perceber a importância que a linguagem algébrica tem hoje, acompanhando sua evolução até tornar-se da forma como é apresentada hoje aos estudantes e compreendida universalmente.

Informações mais completas acerca da história das equações algébricas podem ser encontradas em Domingues (2000) e Garbi (1997). Acerca da História da Álgebra sugerimos a visão matemática de van der Waerden (1985) e Roque (2012) para uma visão mais atual e crítica acerca da história da matemática.

Conforme afirma Garbi (1997), do século XVIII a.C. ao século XVIII d.C, o objetivo da álgebra era o estudo e métodos de resolução de equações. Com a busca desses métodos, gradualmente foi se constituindo e aperfeiçoando a linguagem algébrica caracterizada pelo simbolismo.

O autor faz referência ao papiro de Rhind ou papiro de Ahmes: documento egípcio, de aproximadamente 1650 a.C., que contém 85 problemas de aritmética e geometria com solução ensinados pelo escriba Ahmes. Este longo papiro é um dos mais antigos documentos que chegaram até os dias atuais. Hoje em dia encontra-se no Museu Britânico de Londres e foi encontrado no final do século XIX pelo inglês Rhind. No documento aparecem problemas que contêm equações do primeiro grau, porém não da forma como hoje as conhecemos, tampouco com a resolução que atualmente utilizamos.

Segundo relata Garbi (1997), os gregos da Grécia Antiga ocuparam-se bastante com o estudo da geometria. Muitos dos resultados que obtinham eram inspirados a partir de problemas práticos, como divisões de terras.

O autor segue destacando que a civilização grega foi notável, seja pelas suas obras ou pela sua filosofia. O pensamento lógico para resolução de problemas e o levantamento de ideias sem qualquer compromisso com a aplicação imediata estavam presentes, representando o pensamento puramente matemático.

Segundo Garbi (1997), Euclides, matemático grego que viveu nos anos 300 a.C., compilou o conhecimento de geometria até então conhecido em 13 livros, compondo sua obra Elementos. O matemático organizou o trabalho de forma rigorosa para o padrão da época, partindo de poucas definições e verdades aceitas sem provas, o que chamamos de axiomas.

O autor afirma que mesmo que o conhecimento geométrico fosse a maior dedicação dos gregos, Euclides demonstrou resultados da teoria dos números e utilizou conceitos fundamentais na resolução de equações. Conforme o autor, nos Elementos alguns axiomas são apresentados, como:

> a) Entidades iguais a uma terceira são iguais entre si.
> b) Se a iguais somam-se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais.
> c) A parte é menor que o todo. (GARBI, 1997, p. 19)

Garbi (1997) ainda identifica outra verdade que não foi enunciada por Euclides, mas que se baseia no axioma b) acima: “iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais.” (GARBI, 1997, p. 19). Essa é, segundo o autor conclui, a chave para resolvermos equações de primeiro grau.

Roque (2012) chama atenção para o fato de as traduções de documentos antigos sugerirem implicitamente a natureza algébrica dos problemas babilônios. A autora relata que traduções diferentes desses problemas, realizadas posteriormente, motivam uma interpretação geométrica.

Sobre os Elementos, Roque (2012) também considera inadequado considerar que havia uma álgebra presente na obra, ao menos no sentido que hoje conhecemos. Isso porque, segundo a autora, a associação com equações exige a utilização de algum tipo de símbolo, o que não ocorria na matemática antiga. As quantidades desconhecidas representavam comprimentos, larguras e áreas.

Segundo Garbi (1997), após a queda da civilização grega houve a ascendência do domínio árabe. O califa Al-Mamun, que reinou de 813 a 833 e criou uma escola científica com muitos manuscritos antigos traduzidos para o árabe, pediu ao matemático Abu-Abdullah Muhammed Ibn-Musa Al-Khwarizmi uma obra sobre equações.

De Al-Khwarizmi herdamos a palavra algarismo e álgebra. A primeira origina-se do nome do matemático e a segunda deriva da palavra árabe Al-jabr, que significa algo como restauração (GARBI, 1997; ROQUE, 2012), entretanto matematicamente pode ser entendida como transposição, neste caso dos termos da equação (DOMINGUES, 2000). Al-Kwarizmi empregava a palavra para designar operações como a que fazemos quando temos uma equação como $x - a = b$ e obtemos $x = b + a$, tornando completa a incógnita.

Van der Waerden (1985) indica que a palavra *jabr* tem frequentemente o significado de adicionar aos dois lados da equação termos iguais para eliminar termos negativos e, menos usualmente, significa multiplicar os lados da equação por um mesmo número para eliminar as frações. O autor ainda relata que na primeira parte do seu trabalho Al-Khwarizmi apresenta a solução de seis formas de equações lineares e quadráticas reduzidas: $ax^2 = bx, ax^2 = b, ax = b, ax^2 + bx = c, ax^2 + c = bx$ e $ax^2 = bx + c$, nas quais a, b e c são valores positivos.

Al-Khwarizmi procurou simplificar a simbologia que utilizava para escrever, a fim de facilitar a compreensão de seus leitores, entretanto ignorou resultados já alcançados, não sendo um trabalho tão bom e completo, conforme assinalam Baumgart (1992) e Van der Waerden (1985). Ele passou a utilizar o sistema decimal de numeração da Índia, que usamos até hoje, com algarismos de zero a nove tendo seu valor determinado pela posição ocupada no número.

Roque (2012) confirma o desenvolvimento científico árabe ao afirmar que Bagdá era um dos maiores centros científicos do mundo entre os séculos VIII e XII, sendo que seus matemáticos tinham conhecimento de obras matemáticas gregas e orientais. A autora relata que, a partir do século IX, os árabes passaram a produzir obras originais e inovadoras, tendo a álgebra – incluindo classificação e resolução de equações – como ponto forte, e Al-Khwarizmi como matemático mais ilustre.

Conforme Garbi (1997), em 1202 Leonardo Fibonacci, nascido em Pisa, na Itália, publicou *Liber Abaci*. Nesta obra, o filho de comerciante que passou a estudar matemática apresentou à Europa os algarismos hindu-arábicos. Em suas viagens conheceu vários sistemas aritméticos e convenceu-se de que o sistema que apresentou em sua obra era o melhor de todos.

Baumgart (1992) assinala que a álgebra se desenvolveu na Europa com o desenvolvimento da imprensa, o que acelerou a padronização de símbolos com a melhor comunicação, o desenvolvimento da economia e a retomada do comércio, favorecendo viagens que permitiam intercâmbio de bens e de ideias, bem como a facilidade de manipulação numérica com a utilização dos algarismos hindu-arábicos.

6.1 FASES DA ÁLGEBRA

Atualmente a classificação em fases é contestada por serem considerados novos fatos e documentos descobertos e surgirem novos olhares sobre a história conhecida, como podemos verificar em Roque (2012). Mesmo assim, optamos por descrevê-la, pois acreditamos ser uma forma didática de acompanhar as mudanças que ocorreram com a escrita simbólica ao longo da história. Como já feito anteriormente, apontaremos ao longo do texto questões da história atualmente revistas e questionadas, apresentando ao leitor diferentes pontos de vista com base nas obras estudadas.

A fase retórica, de cerca de 1700 a.C. a 250 d.C (BRANDEMBERG, 2009), é caracterizada pelo uso da linguagem comum para descrever, argumentar e resolver determinados problemas, sem abreviaturas e símbolos específicos. Deste período constam principalmente problemas retirados dos papiros egípcios, como o papiro de Rhind em que a incógnita é chamada *aha*, e tabletes babilônicos, que se relacionavam ao cotidiano dos povos.

Baumgart (1992) apresenta um problema e sua resolução, retirados de um tablete babilônico de cerca de 1700 a.C., que exemplifica a fase retórica. O mesmo diz o seguinte: "[1] Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura." (BAUMGART, 1992, p. 4). Os passos da resolução em nossa língua são os seguintes:

> [2] [Dado] 32 soma;
> 252 área.
> [3] [Resposta] 18 comprimento, 14 largura.
> [4] Segue-se este método:
> Tome metade de 32 [que é 16].
> $16 \times 16 = 256$
> $256 - 252 = 4$
> A raiz quadrada de 4 é 2.
> $16 + 2 = 18$ comprimento.
> $16 - 2 = 14$ largura.
> [5] [Prova] Multipliquei 18 comprimento por 14 largura.
> $18 \times 14 = 252$ área. (BAUMGART, 1992, p. 4-5)

Após a explanação do problema, são destacados dados e resposta e indicados os passos de resolução. Ao final, há a prova para verificar a resposta. Esse método de resolução aparece em vários problemas, conforme relata o autor. Ao verificar a resolução percebemos que as explicações são descritas com a linguagem cotidiana. Também podemos verificar que muitos conceitos matemáticos que hoje utilizamos já eram conhecidos, como largura, comprimento, área e raiz quadrada.

O trabalho de Al-Khwarizmi, como relatam Brandemberg (2009) e Van der Waerden (1985) é retórico. O primeiro autor exemplifica com o seguinte problema escrito pelo matemático, também apresentado pelo segundo: "Eu tenho que dividir dez em duas partes, e multiplicar uma dessas partes pela outra. Após isso eu multiplico uma parte por ela mesma, e o produto desta multiplicação é quatro vezes o produto de uma parte pela outra". (BRANDEMBERG, 2009, p. 13). Continua o autor:

> Ele chama uma das partes de 'coisa' (shay) e a outra de dez menos coisa. Multiplicando as duas ele obtém, 'dez coisas menos um quadrado'. Para o quadrado da coisa desconhecida ele usa a palavra 'mal', que significa algo como 'coisas adquiridas'. E finalmente, ele obtém a equação: Um quadrado que é igual a quatro coisas menos quatro quadrados. (BRANDEMBERG, 2009, p. 14)

A linguagem sincopada constitui a escrita abreviada. Quantidades e operações que se repetem frequentemente são associadas a símbolos ou palavras abreviadas. Sendo assim, a linguagem sincopada parece representar a transição da linguagem retórica para a simbólica.

Segundo Brandemberg (2009), a fase sincopada inicia com Diofanto de Alexandria, no século III e vai até o século XVI. O olhar matemático começa a se voltar para os números e começam a ser usadas abreviações a fim de simplificar a escrita da resolução de problemas. Nesta época a letra p é usada para indicar a adição.

> Através de uma palavra, *aritmo,* Diofanto resolve problemas que envolvem incógnita. A palavra escolhida por Diofanto está associada ao número, representa o próprio número, *aritmo*. Diofanto reconhece, na incógnita, o pensamento numérico. Ao solucionar problemas, desprende-se do numeral físico, porém, ao criar uma palavra que represente o desconhecido, a incógnita, faz questão de nos avisar que a incógnita, o desconhecido, representa um número. Assim como o zero, a palavra *aritmo* guarda o valor de uma quantidade desconhecida. (LANNER, 2005, p.15)

Roque (2012) destaca que

> símbolos não são somente abreviações ou notações empregadas para facilitar a prática de procedimentos de cálculo e resolução de problemas; o simbolismo algébrico é um tipo de representação que conduz a abstrações que não estavam presentes na Aritmética de Diofanto. Para caracterizar o pensamento algébrico não basta associá-lo ao uso de símbolos, e menos ainda ao uso de abreviações. (ROQUE, 2012, p. 234)

Conforme a autora, no trabalho de Diofanto, a quantidade indeterminada de unidades, para a qual ele usava um termo próprio, estava sujeito ao mesmo tratamento dado aos números, que são quantidades bem determinadas de unidades (somente racionais positivos eram utilizados), porém não há métodos de resolução descritos de forma geral.

Segundo Roque (2012), a matemática de Diofanto foi analisada a partir do ponto de vista da álgebra atual, levando a uma interpretação de seu lugar na história da álgebra como uma antecipação de técnicas, generalizações e simbolismos da prática algébrica atual. O objetivo do trabalho de Diofanto, de acordo com a autora, não era resolver efetivamente os problemas, mas indicar como se podem aplicar procedimentos para resolvê-los em etapas.

Um exemplo da notação de Diofanto apresentado por Baumgart (1992): a equação $2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$ seria escrita como $\kappa^{\Upsilon}\beta\ \varsigma\eta \pitchfork \Delta^{\Upsilon}\varepsilon\ \mathring{M}\delta\ \dot{\varepsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\ \mu\delta$ $(x^3 2\ x8 -$

$x^2 5\ 1.4 = 44)$, em que κ^{Υ} é abreviação de $K\Upsilon BO\Sigma$ (*KUBOS*, "cubo"), ς abreviação de $\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma$ (*arithmos*, "número"), ⩚ combina Λ e I em ΛΕΙΨΣΙΣ (*LEIPSIS*, "menos"), Δ^{Υ} é abreviação de ΔΥΝΑΜΙΣ (*DUNAMIS*, "potência") e $\overset{\circ}{M}$ abrevia ΜΟΝΑΔΕΣ (*MONADES*, "unidades"). $\acute{\varepsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ significa "é igual a". Também usavam para a igualdade $\iota\sigma$, de $\iota\sigma o\varsigma$ (*isos*, "igual"). Os números eram indicados pelas letras do alfabeto grego, conforme indicado no Quadro 2. O símbolo o representa a letra Koppa, em desuso atualmente.

Quadro 2 – Símbolos na notação de Diofanto

Letra grega	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	o
Número correspondente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90

Fonte: autora – construído com base nas informações de Baumgart (1992)

No exemplo acima ilustrado são usadas algumas letras maiúsculas e minúsculas. Posteriormente passaram a ser usadas apenas minúsculas. Baumgart (1992) apresenta também um exemplo da álgebra sincopada do matemático hindu Brahmagupta: a expressão $7xy + \sqrt{12} - 8 = 3x^2 + 10x$ seria escrita como $\begin{matrix} ya\ ka\ 7\ bha\ k(a)12\ ru\ \dot{8} \\ ya\ v(a)3\ ya\ 10 \end{matrix}$. A igualdade é indicada com o primeiro membro sobre o segundo. Note que o produto é indicado somente no caso de haver mais de uma variável e a adição não é indicada. O Quadro 3 apresenta alguns exemplos de abreviações encontradas na álgebra hindu.

Quadro 3 – Exemplos de abreviações encontrados na álgebra hindu

Abreviação	ya	ka	bha	$k(a)$	$\dot{8}$	ru	$v(a)$
Palavra	*yavattavat*	*kalaka*	*bhavita*	*karana*		*rupa*	*varga*
Significado	Primeira incógnita	"Negro". Indica a segunda incógnita	Produto	Irracional ou raiz	O ponto sobre o número indica número negativo	Número puro ou comum	Número ao quadrado

Fonte: autora – construído com base nas informações de Baumgart (1992)

Caso fossem necessárias mais incógnitas, usar-se-iam as abreviações de outras cores: ni, pi, pa, lo para *nilaca* (azul), *pitaca* (amarelo), *pandu* (branco) e *lohita* (vermelho), respectivamente.

Segundo Baumgart (1992), mesmo no século XIII, com a ascendência da linguagem sincopada, o matemático Fibonacci escrevia no estilo retórico. Van der Waerden (1985) afirma que em relação a Fibonacci, Luca Pacioli (1447 – 1517) tinha uma linguagem algébrica mais simples e Roque (2012) cita a sua obra *Summa Aritmetica* (1494) como exemplo de uso mais consciente da notação simbólica.

Van der Waerden (1985) relata que Pacioli usava *R* ou *R2* para raiz quadrada, *R3* para raiz cúbica e para raiz quarta *R4* ou *RR* (radix radix). A incógnita da equação (x) era escrita *co.* (*cosa*) e seu quadrado (x^2) *ce.* (*censo*), *cu.* para o cubo (x^3) e *ce.ce.* para a quarta potência (x^4) (*censo censo*). Uma segunda incógnita, Pacioli chamava "quantità". A adição e subtração eram indicadas, respectivamente, por p e *m*. Como exemplo, o autor apresenta a expressão $RV40\tilde{m}R320$, que, atualmente é escrita como $\sqrt{40-\sqrt{320}}$. A letra *V* significa que a raiz é extraída de toda a expressão.

Segundo Roque (2012), a origem da álgebra pode ser associada à introdução do simbolismo e há registros de utilização de símbolos em manipulações algébricas no Magreb (noroeste da África – século XII) e na Andaluzia (Espanha – séculos XI e XIV). Os símbolos representavam incógnitas, potências de incógnitas, operações e igualdade.

Relata a autora que o primeiro livro italiano a propor uma álgebra foi escrito por Jacopo de Firenze (1307). O conteúdo era inteiramente retórico, sem traços da influência de Fibonacci ou dos clássicos árabes. A origem provável dessa obra estaria ligada a práticas presentes na Península Ibérica e ancestrais comuns no Magreb e na Andaluzia.

Domingues (2000) ressalta que os algebristas do Renascimento, período de grande desenvolvimento intelectual e cultural que ocorreu na Europa, desenvolvido na Itália entre os séculos XIV e XVI, se defrontaram com dois empecilhos para o desenvolvimento de seus trabalhos: falta de fundamentação numérica, tendo em vista que os conjuntos numéricos não estavam determinados e números negativos, irracionais e complexos não estavam bem compreendidos, o que somente foi superado após meados do século XIX: o estudo da álgebra desenvolveu os conjuntos numéricos. Também era empecilho a falta de simbologia padronizada e adequada, sendo que essa começou a se consolidar no século XVII.

> Pensar a álgebra, a partir de Diofanto, significa que devemos pensar os conceitos algébricos conectados ao objeto número, enquanto unidade. Ao mesmo tempo, pensar a álgebra a partir de Euclides significa pensar a álgebra a partir de aspectos geométricos, a imagem, a figura. Pensar sobre a álgebra a partir do número e dos aspectos geométricos remete-nos a pensar sobre os entes, as coisas.
> Pensar a álgebra, a partir de Viète, significa pensar a álgebra a partir da propriedade do número, que contém as coisas e a numerosidade do número, o número em geral. Permite-nos pensar em espécies e não mais em entes, em coisas. As espécies contêm o número, a geometria e a numerosidade do número, as propriedades do número. A natureza do pensamento de Viète é bem diferente da natureza do pensamento de Diofanto.

> A lógica de Diofanto é numérica, enquanto que a lógica de Viète é de espécies, é o que permite que as diversas áreas do conhecimento façam da álgebra, uma ferramenta. (MOURA, 2005, p. 21)

A citação acima descreve de forma sucinta o desenvolvimento do pensamento algébrico. Conforme já destacado, inicialmente o olhar estava voltado para aspectos geométricos. Posteriormente para os números, sendo a álgebra uma aritmética generalizada. Com o desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico, a álgebra passou então a ampliar seu campo de estudo. Com isso a simbologia algébrica tornou-se ainda mais importante, pois foi necessário sintetizar a escrita com tantas espécies a serem representadas, conforme Moura (2005).

A fase simbólica da álgebra inicia-se no século XVI, com Viète (1540-1603). Ele introduziu a notação algébrica (BRANDEMBERG, 2009) ou um "simbolismo algébrico sistemático" (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 194). O trabalho de Viète permite que várias áreas utilizem a álgebra como ferramenta. O pensamento simbólico de Viète permitiu a escrita de expressões e equações. Os objetos passaram a ser as expressões algébricas e não mais problemas numéricos (BAUMGART, 1992).

De acordo com Domingues (2000), Viète apresentou em sua obra "Introdução à arte analítica" (1571) – ele chamava a álgebra de arte analítica, pois não gostava da palavra derivada do árabe – o que ele chamou de *logística speciosa*, em lugar da *logística numerosa* que, segundo Viète era o que dificultava os trabalhos antigos, pois ao invés de quantidades quaisquer usavam números ou segmentos de reta apenas. Para a *logística speciosa*, era necessária uma simbologia adequada e sistematizada.

Segundo Domingues (2000), com Viète, pela primeira vez na história, diferenciava-se variável e parâmetro, representando-os por meio de letras: vogais para a primeira e consoantes para o segundo. Relata ainda o autor, o qual escreve o nome do matemático de forma diferente à que utilizamos: "[...] Vieta já usava os símbolos + e –, com sentido atual. Nossas potências x, x^2, x^3 ele indicava por A, A *quadratum* e A *cubum*, e posteriormente por A, Aq, Ac, respectivamente." (DOMINGUES, 2000, p. 78).

Embora tenha sido um grande avanço, a álgebra de Viète não tinha uma linguagem totalmente simbólica, como acima destacado. Além disso, seus coeficientes representavam apenas números positivos. Entretanto, mesmo com limitações, a simbologia adotada por Viète permitiu a resolução de equações de forma mais analítica do que geométrica, favorecendo avanços no campo.

Conforme Baumgart (1992), com Viète o pensamento algébrico passa da busca pela solução das equações polinomiais com a manipulação das mesmas para considerar suas propriedades teóricas, com estudos sobre relações entre raízes e coeficientes e transformações para aumentar ou multiplicar as raízes por uma constante, por exemplo.

Roque (2012) destaca que com a influência de Arquimedes e Apolônio novos problemas se apresentaram à matemática, o que levou à percepção de que o simbolismo era um fator capaz de auxiliar na resolução e na generalização de métodos empregados. A autora afirma que “antes de Viète, a álgebra europeia se aplicava a problemas cuja resolução não era auxiliada pelo uso de simbolismo” (ROQUE, 2012, p. 269).

Segundo Garbi (1997), Thomas Harriot (1560-1621) adotou a ideia de Viète de usar letras, porém modificou a notação: consoantes minúsculas indicavam constantes e vogais minúsculas indicavam as incógnitas. Conforme Baumgart (1992) e Boyer (2012), para potências representava o produto, sendo b^2 representado por bb, o cubo por bbb e foi Harriot que introduziu os símbolos >, “maior que” e <, “menor que”.

René Descartes, em 1638, utiliza as primeiras letras do alfabeto para indicar quantidades conhecidas e as últimas para indicar as incógnitas (BRANDEMBERG, 2009), simbologia que se tornou universal. Van der Waerden (1985) afirma que a atual notação algébrica se deve principalmente a Descartes.

Para Garbi (1997) Leonhard Euler foi quem consolidou a simbologia algébrica moderna. O matemático suíço, nascido em 1707 publicou o trabalho Simbologia. Sua escrita juntou o que de melhor havia na época em relação à linguagem simbólica mais acessível e criou muitos símbolos utilizados até hoje.

O Quadro 4 apresenta alguns símbolos e o significado atribuído a eles ao longo de sua criação:

Quadro 4 – Informações sobre símbolos matemáticos

Símbolo	Significado	Criação
+ e –	Apareceram inicialmente para indicar ganhos e perdas em transições comerciais. Após foram usados em equações algébricas	Johann Widmann (1489), na *Mercantile Arithmetic*. Posteriormente o matemático holandês Vander Hoecke as utilizou em 1514.
$\propto$	Igual a	Possivelmente derivado das duas primeiras letras de *aequalis*. Usado até cerca do final do século XVII.
=	Igual a	Robert Recorde, em 1557 na

		obra *The Whetstone of Witte*, porém não se popularizou logo.
.	Multiplicação	Thomas Harriot (1560-1621)
×	Multiplicação	William Oughtred (1574-1660)
√	Raiz quadrada	Crhistoff Rudolff, na obra *Die Coss* (1525). O símbolo lembra um **r**, da palavra radix ("raiz")

Fonte: autora – adaptado de Domingues (2000) e Baumgart (1992)

Baumgart (1992) relata que ao longo dos tempos outras abreviações também foram usadas como: para a incógnita x, *N* de *numerus* (número, incógnita), *Pri* de *primo* (primeiro), *nº* de *numero* (número, incógnita), ρ de *res* (coisa, incógnita). O quadrado de x já foi escrito como *Se.* de *secundo* (segundo). A adição e a subtração eram indicadas por $\bar{p}$ de *piu* (mais) e $\overline{m}$ de *meno* (menos). Uma constante, por exemplo 3, muitas vezes era indicada seguida de *N* (3*N*), *numere* (3*numere)* ou ϕ (3 ϕ).

A notação exponencial nem sempre foi representada com numerais hindu-arábicos para indicar o expoente, como destaca Baumgart (1992). Atribui-se a Descartes esse uso por volta de 1637. Antes dele outros matemáticos usaram notações diferentes. Rafael Bombelli em 1572, no trabalho *L'algebra* escreveu a seguinte equação:

$$4.p.R.q.\ \llcorner 24.m.\frac{1}{20},\lrcorner\ Eguale\text{ à }\frac{1}{2}.$$

Baumgart (1992) relata que, em notação atual, escrevemos a mesma equação como $4+\sqrt{24-20x}=2x$. Dessa forma, segundo o autor, podemos aduzir que "Eguale à" significa "igual a", p e m indicam "mais" e "menos", respectivamente, *R.q.* indica "raiz quadrada" e os símbolos $\llcorner$ e $\lrcorner$ representam os parênteses que atualmente empregamos nas expressões. Não encontramos exemplos com parênteses sem o símbolo do radical, portanto nos questionamos e deixamos como reflexão se, de fato, os símbolos equivalem aos parênteses como usamos atualmente ou se apenas eram utilizados para acompanhar o símbolo do radical. Os números sobre o arco indicam os expoentes inteiros da variável. Sendo assim, por exemplo, $\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2}$ indicam, respectivamente, $2x, 2x^2, 2x^3$. O maior problema em relação à notação de Bombelli é que, como não era necessário indicar a incógnita, não era possível escrever equações com mais de uma variável.

Segundo Baumgart (1992), o médico francês Nicolas Chuquet também usava numerais sobre o coeficiente para indicar as potências da incógnita: $12^0, 12^1, 12^2$ e 12^3 indicavam o que hoje escrevemos como $12, 12x, 12x^2$ e $12x^3$. Chuquet também usou a notação $12^{1.\tilde{m}}$ para indicar $12x^{-1}$. Em 1610 Pietro Cataldi representou $x^0,\ x^2,\ x^3,\ x^4$ como $\not{0},\ \not{2},\ \not{3},\ \not{4}$. Em 1619 o matemático Jobst Bürgi usou como expoentes numerais romanos:

$$\overset{vi}{8} + \overset{v}{12} - \overset{iv}{9} + \overset{iii}{10} \text{ para indicar } 8x^6 + 12x^5 - 9x^4 + 10x^3.$$

Alguns exemplos de simbologia utilizada por diferentes matemáticos ao longo da história e do desenvolvimento da linguagem algébrica constam no Quadro 5.

Quadro 5 – Comparação entre escritas simbólicas

Matemático	Exemplo de equação algébrica em linguagem atual	Equação algébrica na linguagem da época
Nicolas Chuquet	$\sqrt{3x^4 - 24} = 8$	$R)^2.3^4.\tilde{m}.24\ est\ egale\ a\ 8$
Vander Hoecke	$4x^2 - 51x - 30 = 45$	$4Se. -51Pri. -30N\ dit\ is\ ghelijc\ 45$
Luca Pacioli	$x^2 + x = 12$	$1.ce.\tilde{p}.1.co.e\ \tilde{q}\ le\ a\ 12$
Girolamo Cardano	$x^3 = 15x + 4$	$1.cu.aequalis\ 15.rebus\ \bar{p}.4.$
Cardano	$x^3 + 6x = 20$	$cubus\ \bar{p}\ 6\ rebus\ aequalis\ 20$
Rafael Bombelli	$x^6 - 10x^3 + 16 = 0$	$\overset{6}{\smile{I}}.m.\overset{3}{\widetilde{10}}.p.16\ eguale\ a\ 0$
François Viète	$x^3 - 8x^2 + 16x = 40$	$1C - 8Q + 16N\ aequ.40$
Viète	$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$	$IQC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N\ aequatur\ 120$
Thomas Harriot	$a^3 - 3ab^2 = 2c^3$	$aaa - 3bba = 2ccc$
René Descartes	$x^3 + px + q = 0$	$x^3 + px + q \propto 0$
Wallis	$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

Fonte: autora - adaptado de Domingues (2000) e Baumgart (1992)

Percebemos que houve grandes mudanças ao longo do tempo. Elas ocorreram com o desenvolvimento dos estudos e a necessidade de apresentar os trabalhos para a comunidade científica de forma que todos compreendessem a escrita, isto é, de forma padronizada e o mais simples possível. Como consta em Baumgart (1992, p. 31), "o simbolismo é inventado conforme se faz necessário".

A transição para a álgebra simbólica pode ter sido difícil até mesmo entre os matemáticos. Foi, porém a simbologia que permitiu grande desenvolvimento da matemática a partir do século XVII. Moura (2005) defende que a compreensão da linguagem matemática ocorre quando a transição da álgebra retórica para a simbólica é compreendida.

> A síntese da escrita foi feita a partir das necessidades presentes nas diversas civilizações, nos diversos momentos, sem desconsiderar os estudos relacionados com a Teoria dos Números e com a Geometria. A síntese presente na álgebra simbólica foi construída durante séculos. (MOURA, 2005, p. 33)

Historicamente, conforme relatado neste capítulo, o desenvolvimento da álgebra ocorreu principalmente com a consolidação da escrita simbólica e hoje em dia essa simbologia permite que não só matemáticos, mas outros cientistas possam prestar atenção e refletir sobre diversas questões enquanto abreviam a escrita de seus trabalhos.

Roque (2012) relata que a padronização dos símbolos ocorreu principalmente devido à popularidade dos trabalhos de Descartes, Leibniz e Newton, a partir do final do século XVII. Segundo a autora, entre os séculos XV e XVI, a álgebra era feita com utilização de um simbolismo não unificado para as operações e as incógnitas.

Conforme relata Domingues (2000), é difícil dizer ao certo quando o simbolismo algébrico se firmou, mas, embora alguns símbolos hoje utilizados tenham sido criados no século XV, é provável que a consolidação da linguagem algébrica universal tenha ocorrido no século XVII. Segundo Estrada et.al. (2000), desde o século XVII os símbolos algébricos básicos são os mesmos de hoje.

7 POSSIBILIDADES PARA A INTRODUÇÃO À ESCRITA SIMBÓLICA NO ENSINO FUNDAMENTAL INSPIRADAS NA HISTÓRIA

Moura (2005) mostra como o conceito de variável é importante com o estudo das funções para explicar fenômenos da vida, do movimento. Destaca a autora que "a palavra, o desenho e a letra fazem parte da práxis humana. São abstrações que fazem parte da vida do homem, do movimento de seu pensamento, para marcar sua presença no universo. São os conteúdos concretos do pensamento do homem" (MOURA, 2005, p. 43). Entretanto, foram anos até a linguagem algébrica se consolidar.

> Entendemos que as aulas de matemática devem ter como objetivo convidar o estudante a humanizar-se pelo conhecimento matemático. Devem permitir que haja um encontro afetivo com o conceito; no nosso caso, com o conceito algébrico. (MOURA, 2005, p. 42)

Em concordância com o acima destacado, evidenciamos a importância que atribuímos ao ensino e aprendizagem de álgebra e buscamos com o desenvolvimento de nossa proposta de atividades aproximar o estudante da simbologia algébrica, oportunizando a percepção que é possível compreendê-la e perceber suas vantagens no estudo de matemática.

Como relata Lins (2005), a matemática simbólica causa dificuldades aos estudantes. Outras disciplinas estão diretamente relacionadas a questões que nos cercam, como geografia nas notícias, as ciências no mundo físico ao nosso redor, enquanto a matemática não tem necessidade de estar associada a este mundo físico, o que pode torná-la menos palpável aos estudantes.

O autor faz uma analogia em relação ao que a matemática e um monstro aparentam para as pessoas. Segundo ele "a partir do mundo humano que produzimos significado para o mundo das coisas" (LINS, 2005, p. 102) e se algo não é desse mundo, as regras não valem para essa coisa, por isso se torna assustadora, pois não sabemos o que podemos dizer sobre ela, ficamos paralisados.

Duval (2003) afirma, a partir de observações, que fracassos e bloqueios nos estudantes aumentam quando uma mudança de registro é requerida e que a compreensão em matemática decorre da capacidade de reconhecer e articular os diferentes registros que representam os objetos matemáticos, não acessíveis por meio de experimentações.

O autor ainda destaca que, ao observar a história da matemática, percebemos que o desenvolvimento das representações semióticas foi fundamental para a evolução do pensamento matemático.

Flores (2006) relata que a escrita simbólica deu ordem à matemática e ao pensamento matemático, tornando os objetos matemáticos não apenas objetos do pensamento, mas também objetos representados.

Acreditamos que a conversão dos registros realizada quando uma situação representada por meio da língua materna é escrita com símbolos é essencial para os estudantes compreenderem conceitos matemáticos relacionados aos conteúdos escolares. Diante disso, nossa prática enfoca a compreensão da escrita simbólica a partir da interpretação e entendimento do que os símbolos representam.

Esperamos também levar os educadores a refletirem sobre a importância que esse conteúdo tem na vida escolar e o quanto a forma como é trabalhado desde o início influencia na compreensão do estudante e na visão que o mesmo tem sobre a disciplina de matemática. O conceito de função, por exemplo, tão importante na escola e na vida cotidiana, está diretamente relacionado com a compreensão da simbologia matemática.

Alimentar o "monstro" ou fazê-lo desaparecer depende do aluno, mas a ação é influenciada pelo que ele vivencia na sala de aula. Como professores, almejamos o sucesso do aluno, buscamos que ele alcance determinados objetivos na disciplina e talvez o maior obstáculo seja "desmonstrificar" a matemática, e, no caso mais específico de nosso estudo, a iniciação ao simbolismo algébrico.

A apresentação do contexto em que a álgebra se desenvolveu e a ideia de como este campo se organizou ao longo do tempo, com a consolidação da simbologia hoje utilizada e o reconhecimento da importância que a escrita simbólica tem em sintetizar e precisar informações se tornam importantes para que o aluno possa valorizar e compreender esse conteúdo.

Tendo como base o que foi construído até o momento, apresentamos na sequência a proposta de atividades desenvolvida, seus objetivos, inspiração histórica e os resultados obtidos. Objetivamos sensibilizar os estudantes sobre a importância que a simbologia tem para a matemática e levá-los a refletir sobre o que símbolos representam. E também, a partir da teoria dos registros de representação semiótica, oportunizar atividades que contemplem a conversão entre registros monofuncionais discursivos e multifuncionais discursivos.

Conectamos nas atividades os saberes adquiridos na primeira parte de nossa pesquisa, quando destacamos a possibilidade da utilização da história da matemática como fonte para a elaboração de atividades. Igualmente, a história da matemática apresenta-se como fonte de reflexão acerca da forma como se consolidou a escrita simbólica devido à sua necessidade, facilidade de entendimento por pessoas de diferentes nacionalidades e poder de síntese.

7.1 PROPOSTA DE ATIVIDADES, RELATO DA IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

As atividades propostas foram aplicadas em seis aulas (de dois períodos cada uma) entre os dias quatro de outubro e oito de novembro do ano de 2018. As aulas ocorreram em quartas e quintas-feiras, das 8h20min às 9h40min. A sequência dessas aulas foi inicialmente interrompida em função de festividades da semana da criança, e posteriormente pela "I Semana Eu Cuido de Você, Você Cuida de Mim"[2], o que pode ter prejudicado a fluidez e continuidade da proposta.

Em nosso planejamento inspiramo-nos no estudo feito acerca do desenvolvimento histórico da escrita simbólica matemática e procuramos mobilizar conhecimentos de outras áreas, contribuindo para a possibilidade de realização de práticas interdisciplinares.

Para organização do relato, apresentaremos as atividades individualmente de acordo com a sua implementação em cada aula, descrevendo a proposta, os objetivos, a inspiração para sua elaboração, a descrição da prática e análise dos resultados obtidos.

As aulas foram expositivo-dialogadas, com as atividades sendo desenvolvidas em pequenos grupos ou realizadas individualmente. Os materiais utilizados foram quadro-verde, giz, folhas para registro dos alunos, folhas com cópias das atividades, caneta, lápis, borracha.

Aula 1: 04/10/2018

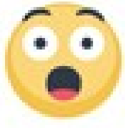
<u>Primeira atividade</u>

Objetivos: refletir sobre os símbolos que estão em nosso cotidiano, relacionando-os com o que eles representam e as mensagens que eles transmitem sem necessariamente utilizarem palavras.

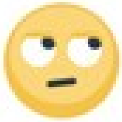
Procedimento: entregar uma folha com cópia da tabela e das questões abaixo para os estudantes responderem.

1) Observe a tabela (Quadro 6) abaixo e complete-a:

Quadro 6 – Atividade introdutória

Imagem	O que você entende ao ver a imagem
	

[2] Essa semana teve como motivação incentivar os alunos a refletir sobre a violência praticada habitualmente na escola, seja de forma física ou verbal, e também incentivar os cuidados com o próprio corpo e mente.

	
	
	
	
I, S, MS	

Fonte: autoras

a) Com base em quais informações você completou a tabela acima?

b) Em sua opinião, as pessoas utilizam muitos símbolos para se comunicarem? Por quê?

c) Em sua opinião, por que as pessoas conseguem se comunicar através de certos símbolos?

d) Indique outros três símbolos que você utiliza e seus significados.

Após todos concluírem a atividade, realizar uma discussão em conjunto com base nas respostas dos estudantes.

Inspiração histórica: esta atividade tem a função maior de introduzir uma reflexão sobre os usos e significados dos símbolos. Tendo em vista a grande influência da internet na vida dos adolescentes, especialmente da comunicação através de redes sociais e a popularização dos *emojis*, propomos um reconhecimento da utilização de símbolos como forma de comunicar, em substituição à língua materna escrita. Podemos comparar a reflexão proposta nesta atividade com o processo que ocorreu ao longo do desenvolvimento da escrita simbólica na história da matemática, reduzida para uma forma mais abreviada.

<u>Segunda atividade</u>

Objetivos: representar por meio de uma expressão a situação proposta; estimular a utilização da linguagem retórica para representar situações e fazer a transição para a linguagem simbólica; comparar e entender as expressões elaboradas pelos colegas; valorizar a forma sintética da linguagem simbólica; perceber a importância da padronização da simbologia; refletir sobre o trabalho realizado e conhecer a produção dos colegas.

Procedimento:

a) Auxiliar a professora a representar a quantidade de passagens utilizadas por ela com transporte público durante a semana.
b) Os alunos devem descrever sua rotina de consumo de líquidos e de guloseimas semanalmente, considerando café da manhã, almoço, jantar, lanches e representar de uma maneira mais resumida as rotinas descritas.
c) Em grupos de três ou quatro integrantes, comparar as expressões obtidas com as dos colegas e responder aos seguintes questionamentos: i) os símbolos utilizados por todos são os mesmos? ii) Podemos comparar símbolos diferentes se não sabemos o que significam? iii) Houve utilização de símbolos iguais para itens diferentes? iv) O que as expressões mostraram em relação ao grupo? v) o grupo deve criar uma linguagem simbólica padrão, e cada integrante deve reescrever suas expressões com a simbologia unificada.
d) Socializar as conclusões dos grupos.

Inspiração histórica: com o estudo da história do desenvolvimento da álgebra, verificamos que inicialmente a linguagem utilizada para descrever problemas e resultados era predominantemente retórica, com o uso da língua materna. Ao longo do tempo, a escrita foi abreviada e símbolos foram sendo padronizados, constituindo uma linguagem simbólica aceita e compreendida pelos pesquisadores e estudiosos de matemática. Pretendemos que os alunos tenham a experiência de perceber vantagens na escrita simbólica, construindo sua própria linguagem, e a importância de todos utilizarem os mesmos símbolos e compreenderem o seu significado no contexto, possibilitando essa reflexão posteriormente com a utilização dos símbolos já consolidados.

Descrição da prática e resultados encontrados:

Havia 18 alunos presentes nesta aula e a turma estava bastante agitada. Após obter a atenção dos alunos, a professora-pesquisadora entregou a folha com a atividade. Não houve dificuldade em compreender o enunciado da atividade. Os alunos demonstraram preocupação com a escrita, questionando com frequência a professora sobre a escolha correta dos termos, o que não é comum nas aulas de matemática. Considera-se que este fato está relacionado à importância das atividades comporem os dados para a dissertação, corroborado por frases do tipo: “tem que caprichar pra aparecer no trabalho da sora!”

A tabela foi completamente preenchida por todos os alunos. As respostas relacionadas ao que o símbolo transmite foram semelhantes e coerentes, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Respostas de aluno à primeira atividade

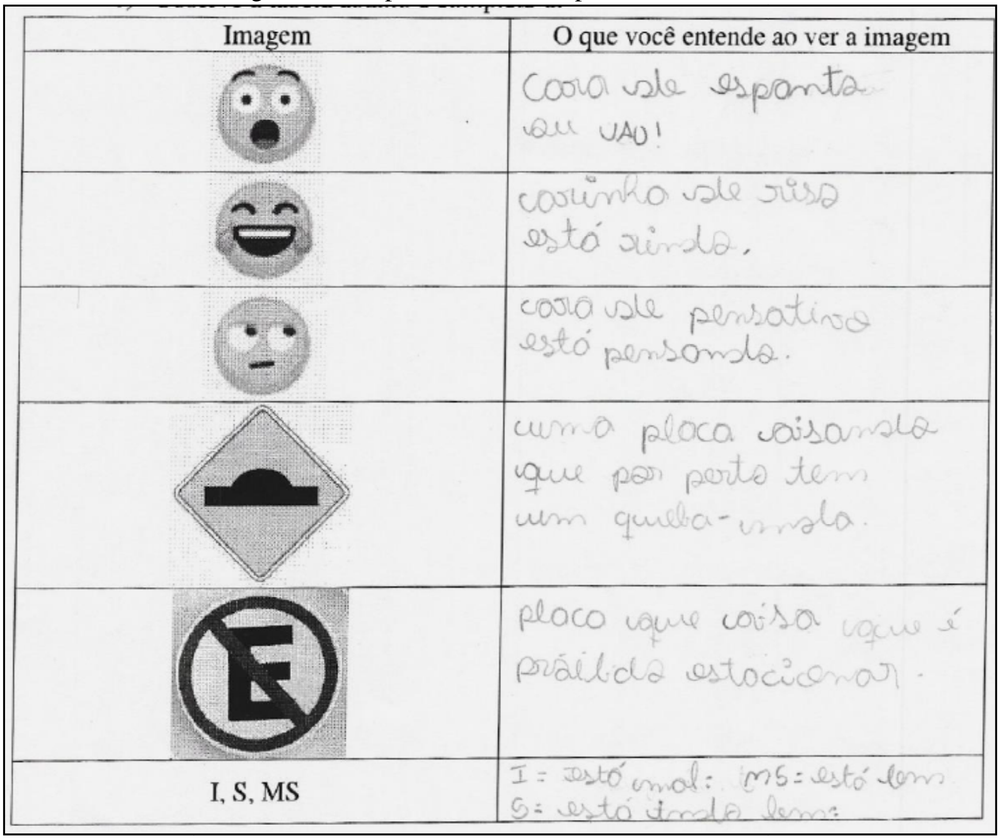


Imagem	O que você entende ao ver a imagem
	Cara de espanto ou UAU!
	carinha de riso está rindo.
	cara de pensativo está pensando.
	uma placa avisando que por perto tem um quebra-molas.
	placa que avisa que é proibido estacionar.
I, S, MS	I = está mal; MS = está bem S = está indo bem

Fonte: acervo das autoras

Apenas um aluno colocou na placa de trânsito referente à indicação de um quebra-molas o significado de “estacionar” e não identificou os símbolos I, S e MS, relacionados aos conceitos da avaliação escolar, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Parte das respostas de aluno à primeira atividade

Fonte: acervo das autoras

As perguntas subsequentes à tabela igualmente foram respondidas por todos, à exceção de um estudante que não indicou na última questão outros símbolos utilizados no seu cotidiano. Dois alunos não escreveram o significado dos símbolos indicados e dois alunos apresentaram apenas dois símbolos.

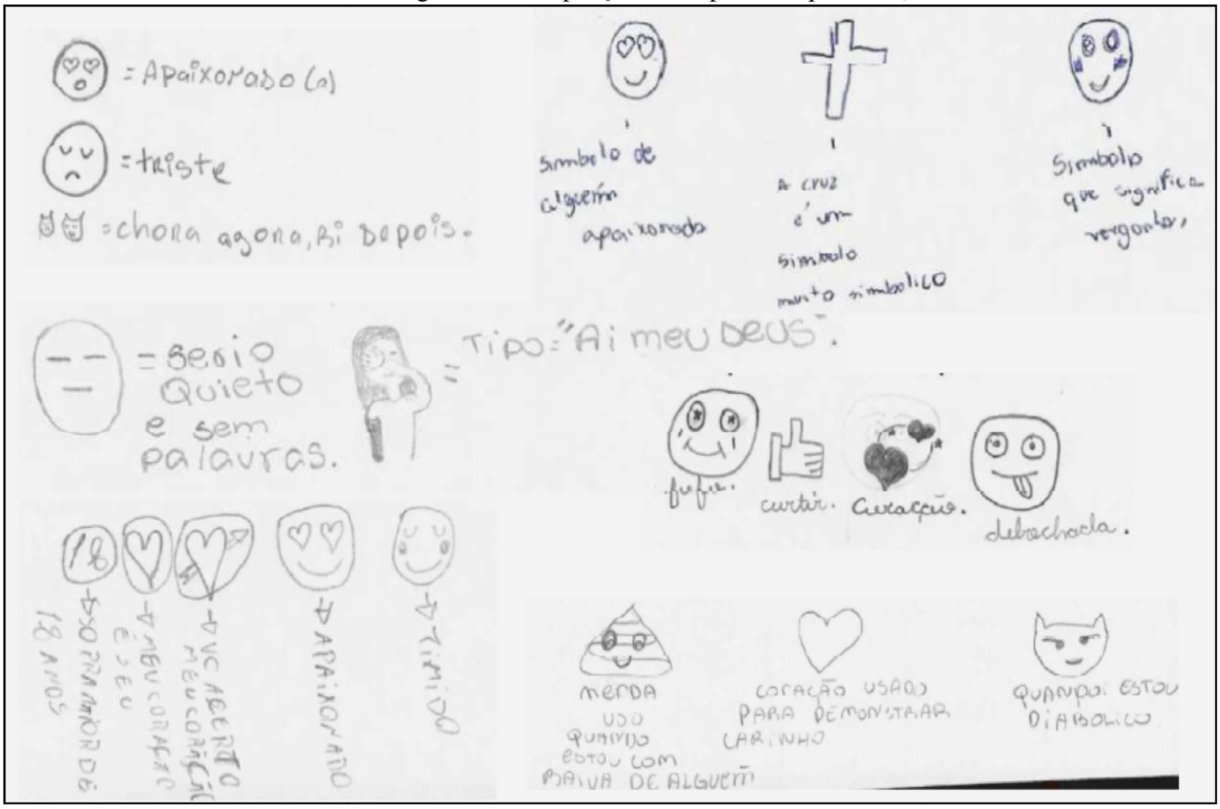
A socialização das respostas em conversa com o grande grupo indicou que os *emojis* são conhecidos e utilizados por todos os alunos, sendo inclusive os símbolos que mais apareceram na última questão.

Foi consenso dos alunos que as pessoas utilizam símbolos para comunicação. Dentre os motivos apontados pelos estudantes estão a facilidade em entender e comunicar informações, os *emojis* indicam sentimentos das pessoas e a facilidade de enviar o símbolo do que digitar toda uma frase em língua materna. Quanto às placas de trânsito, foi colocado que "elas ajudam a organizar a rua".

Durante a socialização a turma destacou a importância de conhecer os símbolos e saber o que eles significam para poder utilizá-los em uma comunicação. Isto é, as pessoas conseguem traduzir o símbolo, por isso é possível a comunicação entre elas.

A partir das respostas dos estudantes verifica-se que os símbolos mais reconhecidos por eles são os utilizados em conversas em redes sociais. A Figura 3 ilustra uma compilação de alguns dos símbolos apresentados pelos estudantes.

Figura 3 – Compilação de respostas à questão d)



Fonte: acervo das autoras

Ao término da socialização das respostas, a professora-pesquisadora destacou que na matemática, em geral, são utilizados diversos símbolos e eles têm um significado que, ou é compreendido por todas as pessoas que estudam a disciplina, ou é introduzido e acordado previamente por quem o utilizará no contexto estabelecido, independentemente da língua materna utilizada. Assim como relatado na atividade, é importante que as pessoas conheçam o que os símbolos representam e saibam interpretar o que eles comunicam.

Os símbolos utilizados nessa atividade, embora não sejam matemáticos, comunicam informações que fazem sentido para os alunos. O que indica uma utilização de registros semióticos por eles no cotidiano.

Considera-se que os objetivos propostos foram alcançados, tendo em vista que houve reflexão e mobilização de todos os alunos em relação aos símbolos apresentados e outros que são utilizados habitualmente por eles.

A segunda atividade iniciou após o término da socialização. Na primeira aula ocorreu o desenvolvimento dos dois primeiros itens da atividade, os quais são relatados no que segue.

No quadro, a professora-pesquisadora escreveu sua rotina semanal de locomoção com transporte público: na segunda-feira, ida à UFRGS; nos outros dias úteis, ida à escola. No fim de semana, não é usado o transporte público. Na segunda-feira, são utilizadas duas passagens de trensurb e duas passagens de ônibus municipais de Porto Alegre. Nos outros quatro dias, são utilizadas duas passagens de ônibus municipais de São Leopoldo.

Os alunos foram questionados sobre formas de escrever mais abreviadamente os itens indicados. Inicialmente, em conjunto com os alunos, foi organizada a seguinte lista: 2 passagens de trensurb, 2 passagens de ônibus municipais de Porto Alegre e 8 passagens de ônibus municipais de São Leopoldo. Em seguida cada tipo de passagem foi associado a um símbolo, e a expressão final para a quantidade semanal utilizada com passagens resultou em: 2T + 2MPOA + 8MSL, sendo que T indica passagem de trensurb; MPOA, passagem de ônibus municipal de Porto Alegre e MSL, passagem de ônibus municipal de São Leopoldo.

A professora questionou se essa mesma expressão poderia representar o valor total gasto com passagens. Imediatamente, os estudantes responderam que sim, sendo necessário apenas substituir as abreviações pelo valor pago em cada meio de transporte e somar para obter o valor final.

Uma aluna, ao término do exemplo, exclamou "bah, fessora, eu nunca tinha pensado nisso!" O tom de sua fala demonstrou surpresa e pode indicar que ela considera uma boa ideia essa organização. Esse é um exemplo de que essa expressão pode ter um significado para ela.

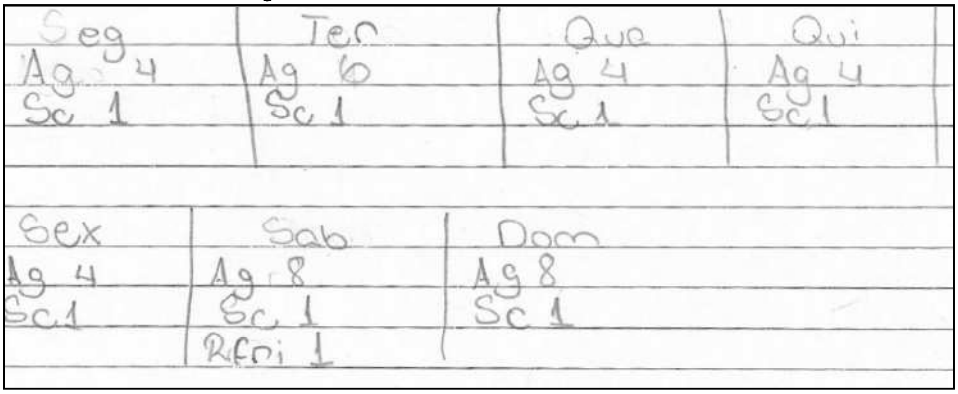
A elaboração da expressão em conjunto possibilitou o processo de conversão. A organização da atividade e a gradativa abreviação da escrita ocorreram com a compreensão da escrita em língua materna, associação das palavras aos objetos representados e posterior relação desses objetos a um novo registro. As siglas utilizadas na expressão final representam os mesmos objetos antes descritos em língua materna.

A resposta afirmativa para o questionamento relacionado à possibilidade de calcular o valor gasto a partir da expressão final demonstra que os alunos compreenderam o que os símbolos escolhidos em conjunto representam e reconheceram na expressão abreviada a representação do que anteriormente foi descrito em língua materna.

Para a realização do item b), inicialmente surgiram algumas dúvidas em relação a como elaborar o registro, pois os alunos preocupavam-se em "fazer certo". Como sugestão, remetemo-nos à atividade anterior, em que houve a separação pelos dias da semana e, em diversos momentos, foi importante salientar que não havia certo e errado.

Observou-se que alguns alunos escreveram abreviadamente desde o início, conforme ilustrado na Figura 4. Eles manifestaram-se contrários a escrever muito, o que corroboramos com exclamações como: "não vai ser texto, né, sora?!"

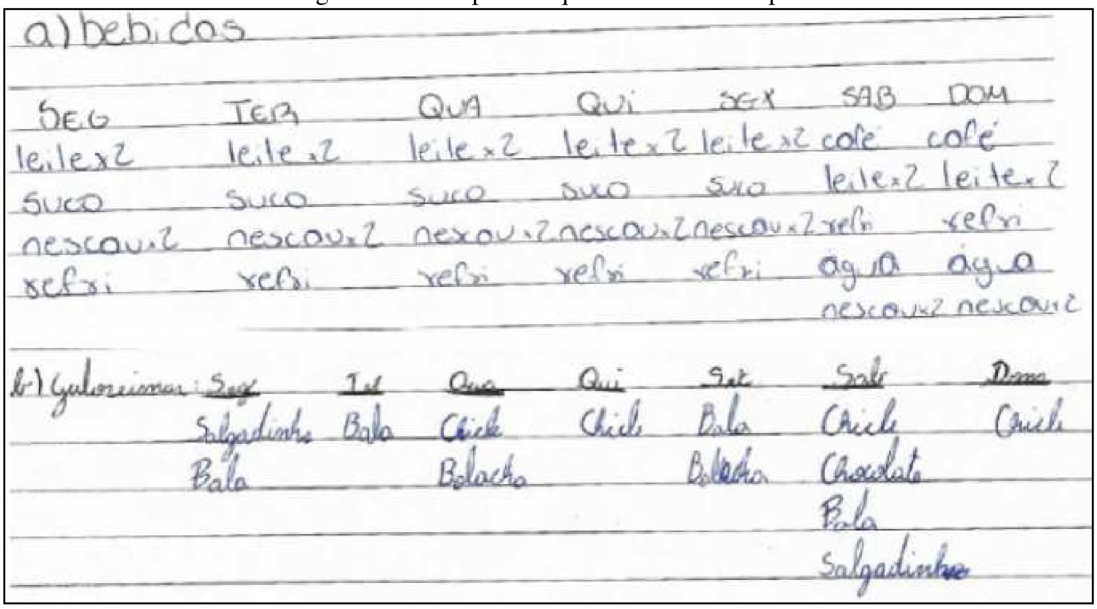
Figura 4 – Parte inicial da atividade de aluno



Fonte: acervo das autoras

Todos os alunos elaboraram um quadro com colunas indicando os dias da semana e, abaixo, uma lista com as bebidas e guloseimas ingeridas na semana. Apenas duas alunas não concluíram a atividade. A Figura 5 ilustra dois exemplos elaborados pelos alunos.

Figura 5 – Exemplos de quadros elaborados pelos alunos

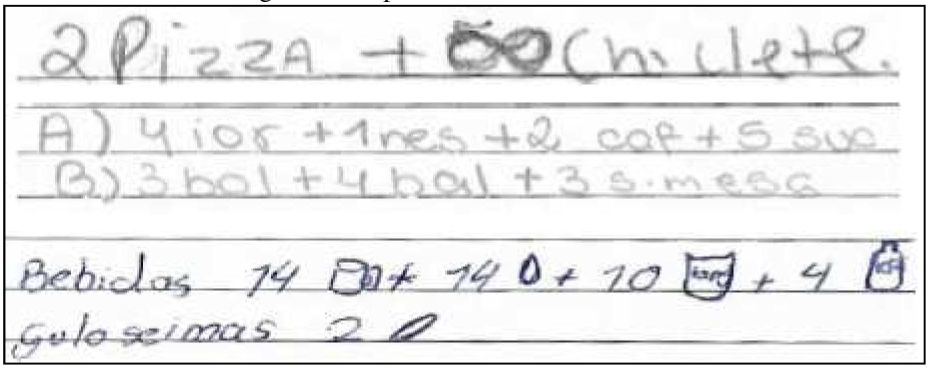


Fonte: acervo das autoras

Dez alunos obtiveram expressões utilizando a letra inicial ou o nome abreviado dos alimentos e líquidos. Dois alunos utilizaram a mesma letra para representar itens diferentes. Quatro alunos utilizaram desenhos para representar os alimentos e líquidos. Um aluno obteve uma expressão que não condiz com o registro feito anteriormente; esse aluno apresenta dificuldade de escrita e, talvez por esse motivo, em diversos momentos, olhou o trabalho dos colegas para completar o seu. Uma aluna chegou a uma expressão utilizando setas e não adições. Três alunos indicaram valores de itens junto à expressão final, o que pode ter ocorrido pelo questionamento em relação ao exemplo com o gasto semanal de passagens, mas também pode indicar a importância que a questão financeira tem para eles.

Um aluno apresentou uma expressão para as guloseimas com o símbolo do infinito antes da palavra chiclete, o que pode indicar a sua consciência em relação ao consumo excessivo do produto. A figura 6 ilustra três exemplos de expressões elaboradas pelos estudantes.

Figura 6 – Expressões finais de três alunos



Fonte: acervo das autoras

A sensibilização em relação ao consumo de refrigerante e de guloseimas iniciou durante essa atividade. Ao refletir sobre o consumo semanal, um estudante percebeu que quase não consome água, porém todos os dias ele bebe refrigerante. Consideramos essa reflexão relevante e, embora não fosse um objetivo inicial previsto, uma consequência positiva da nossa proposta foi a análise reflexiva dos alunos em relação aos seus hábitos alimentares.

Conclui-se que os objetivos propostos para os itens a) e b) foram alcançados, pois, ao final, todos os alunos conseguiram produzir uma expressão que representa o consumo semanal de líquidos. Na representação do consumo semanal de guloseimas, apenas um aluno não obteve uma expressão. Neste momento encerrou o tempo da aula, portanto as demais etapas foram realizadas na aula seguinte.

Novamente ocorreu o processo de conversão. No item anterior a organização e elaboração da expressão foram realizadas em conjunto. Com a realização da atividade individual percebe-se que houve compreensão dos alunos em relação à proposta. A elaboração das expressões individuais foi possível devido à conversão realizada pelos alunos, que partiram, em geral, da descrição em língua materna para a abreviação com símbolos dos objetos considerados, representando-os de variadas formas, como desenhos e abreviações das palavras.

Aula 2: 17/10/2018

Atividade proposta

Objetivos: apresentados na aula 1.

Procedimento: finalizar a segunda atividade da aula anterior.

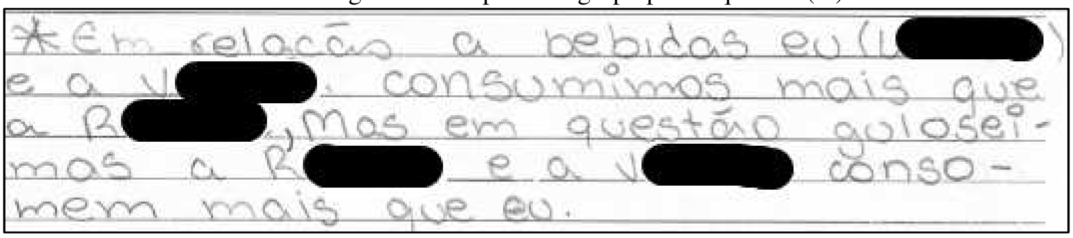
Descrição da prática e resultados encontrados:

Nesta aula estavam presentes 14 alunos e foram realizados os itens c) e d) da segunda atividade descrita anteriormente. Inicialmente, houve a retomada das atividades realizadas anteriormente e formação dos grupos para compartilhar as ideias.

Formaram-se dois trios e dois quartetos. Todos os grupos conseguiram responder às questões e trabalharam em conjunto durante os quarenta minutos despendidos para a conclusão da tarefa. Apenas um grupo estava disperso, entretanto conseguiu finalizar a tarefa.

A Figura 7 ilustra a resposta de um grupo para uma das questões. O nome das alunas foi suprimido para manter o anonimato.

Figura 7 – Resposta de grupo para a questão (iv)

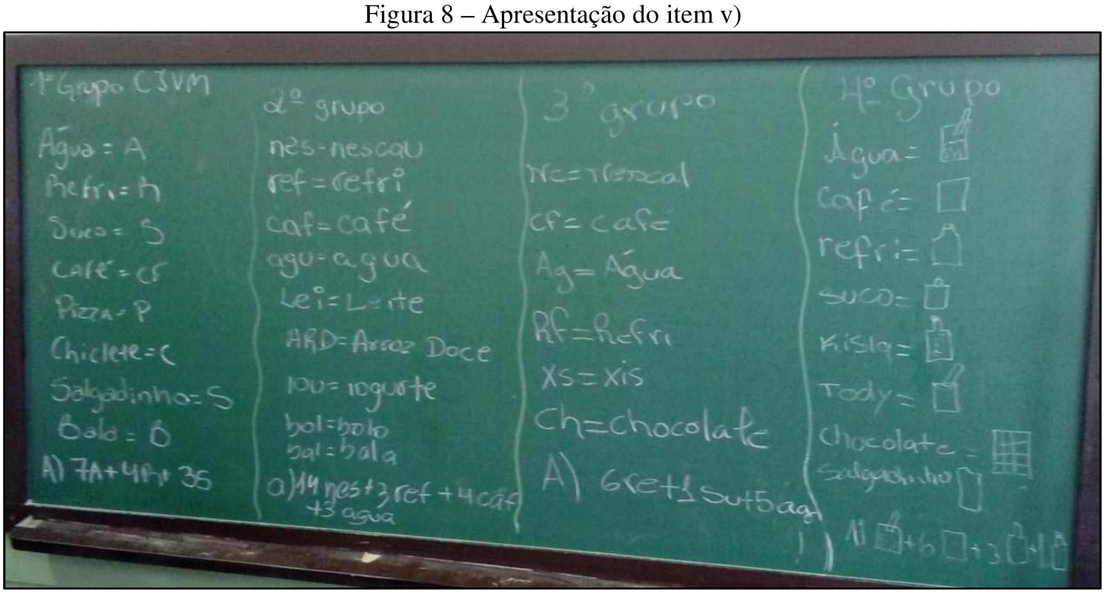


*Em relacão a bebidas eu ([redacted]) e a [redacted] consumimos mais que a [redacted], mas em questão guloseimas a [redacted] e a [redacted] consomem mais que eu.

Fonte: acervo das autoras

A Figura 8 ilustra alguns resultados dos grupos, compartilhados no quadro, ideia que surgiu durante a aula para a socialização e melhor visualização dos resultados por todos. Nas colunas, estão presentes as propostas de padronização dos símbolos utilizados por cada grupo e, ao final, uma expressão que exemplifica a sua utilização.

Figura 8 – Apresentação do item v)



Fonte: acervo das autoras

Finalizando a atividade, a discussão dos resultados ocorreu no grande grupo, com o relato sobre o que foi produzido. Alguns aspectos foram levantados, como a conclusão de que não é possível comparar símbolos diferentes sem saber o que eles representam. Durante a socialização, também foi destacada a importância da utilização de letras/símbolos diferentes para elementos diferentes e letras/símbolos padronizados para que todos possam compreender os dados e comparar as informações.

A elaboração da proposta de padronização dos grupos resultou em símbolos variados, aparecendo letras, desenhos e palavras abreviadas. Os grupos desenvolveram simbologias coerentes e reescreveram suas expressões com o padrão desenvolvido pelo próprio grupo, como exemplificado na figura 8. Também efetuaram uma análise sobre o consumo de guloseimas e bebidas, refletindo sobre o impacto financeiro e na saúde.

Os objetivos propostos, descritos na aula 1, foram atingidos, pois o trabalho em grupos possibilitou que os alunos comparassem e entendessem as expressões elaboradas pelos colegas. Com a socialização das respostas e conclusões obtidas em conversa com o grande grupo, os alunos indicaram vantagens na utilização de símbolos, uma delas sendo a forma sintética da escrita simbólica.

Nesta atividade os alunos puderam construir seus próprios registros para representar situações e objetos relacionados à sua rotina, o que gerou símbolos que faziam sentido para eles. Com a troca de ideias, houve a elaboração de uma forma de representação em comum, que fazia sentido para todos os envolvidos e da qual todos fizeram parte.

Acredita-se que o fato de eles terem passado pelo processo de construção dessas expressões, inicialmente refletindo e registrando seu consumo individualmente com a língua materna, em seguida abreviando a escrita e comparando com as expressões dos colegas, contribuiu para a reflexão e o entendimento dos símbolos envolvidos na atividade. A socialização com os colegas oportunizou a análise e discussão da utilização de diferentes símbolos, o que favorece essa análise em relação aos símbolos usualmente considerados em expressões matemáticas.

O processo de conversão novamente ocorreu em conjunto, desta vez nos pequenos grupos e sem a condução da professora-pesquisadora. Ao final, os grupos organizaram os itens utilizados por todos os integrantes e acordaram novos registros para representação desses itens, reescrevendo suas expressões individuais com a nova escrita padronizada, o que demonstra a ocorrência da conversão entre as diferentes formas de registros do mesmo objeto: inicialmente em língua materna, posteriormente na escrita simbólica individual e, em seguida, na escrita simbólica padronizada pelo grupo.

Aula 3: 18/10/2018

Atividade proposta

Objetivos: conhecer e analisar a evolução de alguns aspectos da simbologia algébrica ao longo da história; verificar as vantagens e desvantagens de alguns tipos de escrita simbólica já utilizados.

Procedimento: entregar aos alunos uma folha com cópia da tabela abaixo (Quadro 5) e questioná-los da seguinte maneira: o que está escrito em cada coluna? Comparando a segunda e a terceira colunas, qual parece mais fácil de ler? Por quê? A conversa será principalmente em torno das linhas destacadas. Os alunos devem refletir e contribuir com sua opinião sobre facilidades e dificuldades de cada simbologia.

Quadro 5 – Comparação entre escritas simbólicas

Matemático	Exemplo de equação algébrica em linguagem atual	Equação algébrica na linguagem da época
Nicolas Chuquet	$\boldsymbol{\sqrt{3x^4 - 24} = 8}$	$\boldsymbol{R)^2.3^4.\tilde{m}.24\ est\ egale\ a\ 8}$
Vander Hoecke	$4x^2 - 51x - 30 = 45$	$4Se. -51Pri. -30N\ dit\ is\ ghelijc\ 45$
Luca Pacioli	$x^2 + x = 12$	$1.ce.\tilde{p}.1.co.e\ \tilde{q}\ le\ a\ 12$
Girolamo Cardano	$x^3 = 15x + 4$	$1.cu.aequalis\ 15.rebus\ \bar{p}.4.$
Cardano	$x^3 + 6x = 20$	$cubus\ \bar{p}\ 6\ rebus\ aequalis\ 20$
Rafael Bombelli	$\boldsymbol{x^6 - 10x^3 + 16 = 0}$	$\boldsymbol{\overset{6}{\smile}.m.\overset{3}{\smile}.p.16\ eguale\ a\ 0}$
François Viète	$x^3 - 8x^2 + 16x = 40$	$1C - 8Q + 16N\ aequ.40$
Viète	$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$	$IQC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N\ aequatur\ 120$
Thomas Harriot	$\boldsymbol{a^3 - 3ab^2 = 2c^3}$	$\boldsymbol{aaa - 3bba = 2ccc}$
René Descartes	$\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}$	$\boldsymbol{x^3 + px + q \propto 0}$
Wallis	$\boldsymbol{x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0}$	$\boldsymbol{x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0}$

Fonte: autoras - Adaptado de Domingues (2000) e Baumgart (1992)

1) Após a discussão anterior, responda as questões abaixo:
   a) Utilizando a notação de Thomas Harriot, escreva a expressão $a^{15} + 5b^7 = c^{10}$.
   b) Transcreva a seguinte expressão de acordo com a representação que hoje é utilizada: $aaaaaaaa + 3dddddddddd = 2nnnn$.
   c) Por quê você acha que a notação de Thomas Harriot não se popularizou?

d) Represente a compra de uma determinada quantidade de balas no mercadinho utilizando a notação de Rafael Bombelli.
e) Considerando a mesma notação do item anterior, é possível escrever uma expressão para a compra de balas e chicletes? Por quê?
f) Que desvantagem você pode encontrar na notação de Rafael Bombelli?
g) Com base na discussão feita, relate as vantagens/desvantagens de utilizar a linguagem simbólica.
h) Por que a simbologia algébrica se desenvolveu?

Inspiração histórica: neste caso a história foi a fonte dos dados utilizados na tabela utilizada para elaborarmos as questões e nortear a análise reflexiva acerca da evolução da escrita simbólica até a forma como utilizamos hoje.

Descrição da prática e resultados encontrados:

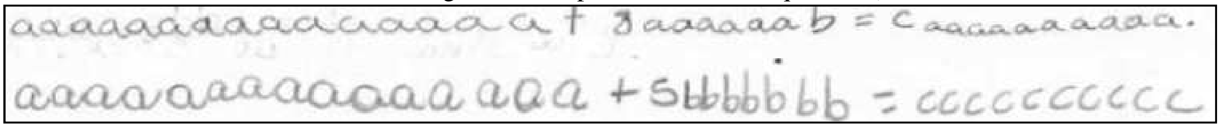
Estavam presentes 16 alunos. Quando questionados acerca de diferenças que verificaram ao olhar as informações presentes na tabela, houve manifestação de uma aluna que rapidamente indicou a utilização de palavras nas primeiras linhas. A partir dessa observação, os alunos apontaram a dificuldade de entender a escrita, tendo em vista a utilização de uma língua estrangeira.

A professora-pesquisadora colocou no quadro algumas expressões constantes na última coluna da tabela e propôs uma comparação com a forma de representação atual. Os estudantes associaram termos escritos e símbolos não mais utilizados com os símbolos usados atualmente e explicitaram que a simbologia atual facilita no entendimento da expressão, especialmente porque não há escrita em língua estrangeira e quando há conhecimento sobre o que os símbolos representam, como o símbolo “=”, por exemplo, que é conhecido e utilizado pelos alunos desde os anos iniciais.

Alguns estudantes deixaram para responder nos minutos finais, dispersaram-se do assunto e responderam muitas vezes sem refletir, copiando de colegas que já haviam concluído. Dez alunos responderam todas as questões, três deixaram duas em branco, dois deixaram uma em branco e um aluno deixou cinco questões sem resposta.

A primeira questão, que solicitava reescrever a expressão $a^{15} + 5b^7 = c^{10}$ com a notação de Harriot, foi respondida de forma coerente por oito alunos, de forma incoerente por seis estudantes e dois responderam de forma coerente em parte. Considera-se como resposta coerente quando o aluno escreve corretamente a potenciação como a multiplicação com a quantidade correta de parcelas. Coerente em parte é a resposta que apresenta a multiplicação correta em algum dos termos da equação e incoerente é a resposta que não apresenta a multiplicação com a quantidade correta de parcelas em termo algum. A Figura 9 ilustra dois exemplos de respostas dadas a essa questão. No primeiro caso, verificamos que houve confusão na escrita, pois o símbolo “a” foi indicado em todas as partes da equação, como se o expoente estivesse relacionado a esse símbolo, sendo um exemplo de resposta coerente em parte. O segundo exemplo é uma resposta coerente.

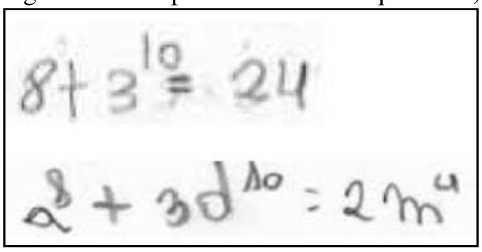
Figura 9 – Respostas de alunos à questão a)



Fonte: acervo das autoras

Na segunda questão, a qual solicitava a escrita em notação atual da expressão dada na notação de Thomas Harriot, obtivemos onze respostas coerentes, ou seja, com a indicação correta da potenciação, e cinco respostas com alguma confusão, como omissão de algum símbolo ou dúvidas acerca da diferença entre potenciação e multiplicação de número por letra. A Figura 10 ilustra duas respostas. No primeiro exemplo houve omissão dos símbolos que estavam repetidos, apenas foram indicados números. O segundo exemplo é uma resposta coerente.

Figura 10 – Respostas de alunos à questão b)



Fonte: acervo das autoras

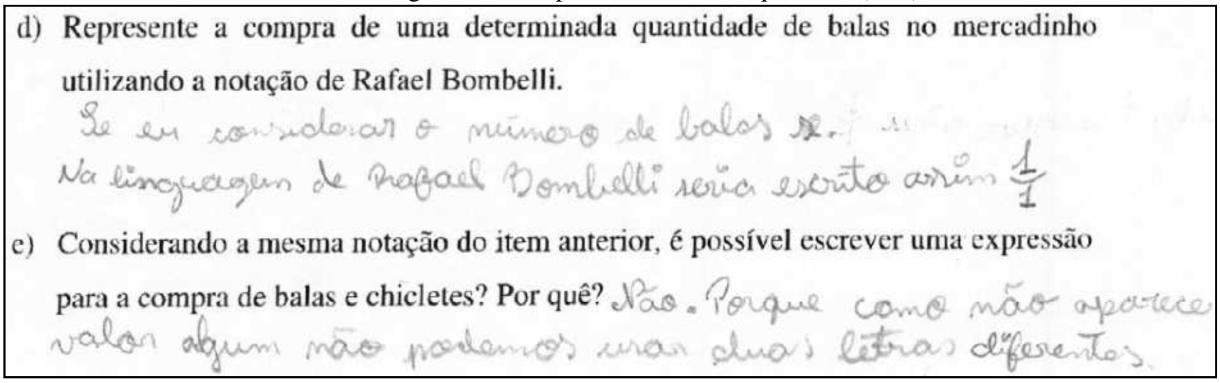
O terceiro item, que questionou o motivo de a escrita utilizada nos primeiros itens não ter se popularizado teve basicamente três respostas: um aluno escreveu: “porque teve soluções mais abreviadas”, o que se interpretou como a ideia de que outras formas de escrita simbólica foram desenvolvidas e se mostraram melhores. Oito alunos fizeram menção à grande quantidade de letras para representar determinadas expressões e/ou ao tempo gasto para escrevê-las e sete alunos responderam que é uma notação difícil de ler e entender.

Verificou-se dificuldades para responder os itens d), e) e f). A professora-pesquisadora precisou intervir e auxiliar todos os alunos presentes nessas questões. A intervenção ocorreu a partir da comparação com o que utilizamos atualmente. Por exemplo, x^6 com a notação de Bombelli seria $\frac{6}{1}$, como indicado na tabela.

A professora-pesquisadora, então, questionou os alunos: “como vocês indicariam uma quantidade qualquer de balas usando símbolos?” Posteriormente, questionou sobre uma quantidade qualquer de chicletes. Todos os alunos indicaram balas e chicletes com letras diferentes, mas somente perceberam ao serem questionados do motivo pelo qual fizeram isso.

Em seguida, foram questionados sobre a incógnita na notação que estava sendo analisada. Ao observar novamente a linha da tabela referente à questão, os alunos perceberam que não havia símbolo específico para representar o valor desconhecido, o que corroboramos com expressões como “não tem letra” ou “não aparece o valor desconhecido”. Ao constatarem que a incógnita não aparecia, os estudantes perceberam que não havia como diferenciar letras diferentes. Mesmo com essa reflexão e tendo indicado balas e chicletes com letras diferentes, quatro alunos responderam que era possível indicar a compra de objetos diferentes com a notação em estudo. A Figura 11 ilustra as respostas de uma aluna após a intervenção da professora-pesquisadora.

Figura 11 – Respostas de aluna às questões d) e e)



d) Represente a compra de uma determinada quantidade de balas no mercadinho utilizando a notação de Rafael Bombelli.

Se eu considerar o número de balas x.

Na linguagem de Rafael Bombelli seria escrito assim $\frac{1}{1}$

e) Considerando a mesma notação do item anterior, é possível escrever uma expressão para a compra de balas e chicletes? Por quê? Não. Porque como não aparece valor algum não podemos usar duas letras diferentes.

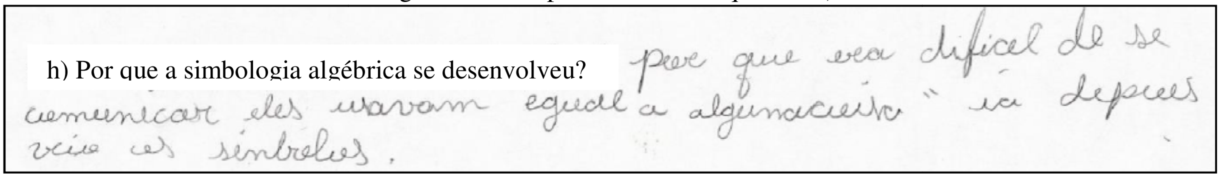
Fonte: acervo das autoras

Na questão f), nove alunos responderam que a desvantagem da notação de Rafael Bombelli é ser muito complexa para estudar. Dois alunos deixaram a questão em branco, quatro mencionaram o fato de não podermos representar objetos diferentes e um disse que “não tem letras”.

Três alunos não responderam à questão g), que solicitava o relato de vantagens e desvantagens da utilização de símbolos a partir da conversa inicial realizada. Dez relacionaram sua resposta à facilidade de “fazer as coisas” com a escrita simbólica. Dois mencionaram a dificuldade em entender a língua materna de cada matemático e um respondeu de forma incoerente com a pergunta realizada.

A questão h) foi respondida por onze alunos indicando como vantagem a escrita simbólica ser mais fácil, simples e prática. Dois mencionaram que sem a escrita simbólica escreviam muito, o que era cansativo. Um aluno respondeu de forma incoerente à pergunta e outro respondeu “não sei”. Uma aluna afirmou que era difícil de comunicar antes da escrita simbólica, como ilustrado na Figura 12. Ressaltamos que não há uma resposta simples para essa pergunta. Ela foi colocada para que os alunos pudessem refletir sobre a conversa realizada no grande grupo e relacionar as informações discutidas.

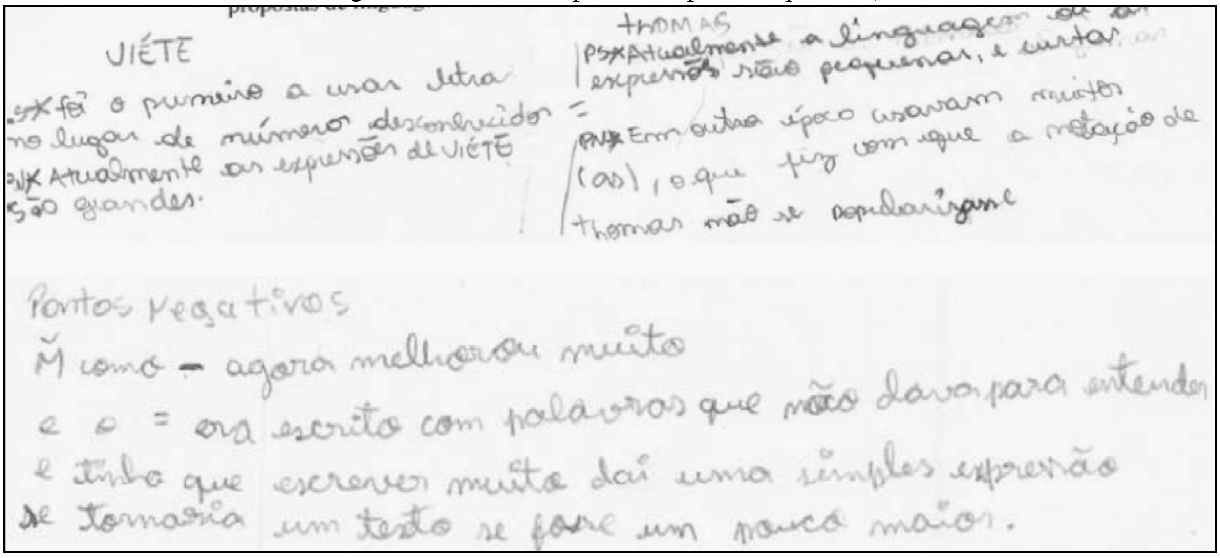
Figura 12 – Resposta de aluna à questão h)



Fonte: acervo das autoras

Seis alunos não responderam à última questão. Quatro alunos disseram que é “legal saber a evolução” e um disse que “é muito bom evoluir”. Três apresentaram respostas incoerentes. Um aluno respondeu que escreviam muito antigamente e outro fez um comparativo utilizando duas escritas da tabela. A Figura 13 ilustra dois exemplos de respostas. No primeiro exemplo, a aluna inferiu uma conclusão interessante a partir da observação da tabela, pois não foi explicitado nas aulas que Viète foi o primeiro a utilizar letras no lugar de números desconhecidos.

Figura 13 – Dois exemplos de respostas à questão i)



Fonte: acervo das autoras

Verificou-se que os alunos, de forma geral, necessitaram de incentivo da professora para refletir e relacionar informações apontadas na conversa inicial, dados constantes na tabela e os questionamentos realizados. Através da participação dos alunos na intervenção anteriormente descrita, podemos inferir que muitas vezes eles não conseguem se expressar de forma clara para sintetizar e organizar as informações em uma resposta.

As respostas às primeiras questões sugerem que a transição da escrita atual para a escrita de Thomas Harriot ocorreu sem dificuldades, pois são semelhantes. Já a transição entre a escrita de Rafael Bombelli e a atual pareceu mais difícil, pois exigiu maior análise e os alunos demonstraram problemas para compreender o objeto representado em uma situação e associá-lo à sua diferente representação em outra.

Identificou-se, portanto, uma dificuldade apontada por Duval (2003, 2012 e 2013), conforme relatado no capítulo 4: a transição de uma forma de representação de um objeto para outra. Observou-se que nesta atividade, inicialmente, alguns alunos apresentaram dificuldade em relação ao que a incógnita representa e as diferentes formas que ela foi representada nas informações da tabela. Acredita-se que ao longo do desenvolvimento da atividade essas dificuldades foram amenizadas e/ou superadas.

Aula 4: 01/11/2018

Atividade proposta

Objetivos: estimular a utilização da linguagem retórica para representar situações e fazer a transição para a linguagem simbólica; comparar e entender as expressões elaboradas pelos colegas; agrupar partes referentes ao mesmo objeto em expressões abreviadas; refletir sobre o trabalho realizado e conhecer a produção dos colegas.

Procedimento: propor aos alunos as situações abaixo.

(a) Analogamente à segunda atividade da primeira aula, os alunos devem construir uma expressão que represente o tempo gasto nas atividades de sua rotina semanal.

(b) Em grupos, devem obter uma expressão que corresponda ao tempo gasto por todos os integrantes nas tarefas consideradas.

Inspiração histórica: novamente a inspiração é o desenvolvimento da escrita simbólica ao longo da história, observado no estudo prévio realizado, iniciando a escrita predominantemente com a língua materna, posteriormente abreviando-a.

Descrição da prática e resultados encontrados:

Estavam presentes 14 alunos. Inicialmente houve a retomada da segunda atividade da aula 1, na qual os alunos construíram expressões referentes à ingestão de líquidos e guloseimas na semana. A professora relembrou a importância de definir uma linguagem padrão e que os símbolos facilitam a escrita, poupando tempo e espaço.

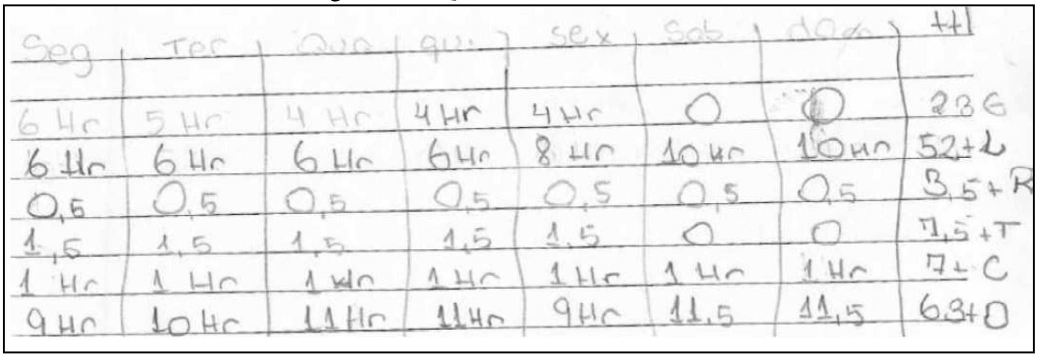
No quadro, a professora-pesquisadora anotou as atividades que os alunos foram indicando de acordo com a sua rotina. Em conjunto foi definido o símbolo que corresponderia a cada uma, para que todos utilizassem o mesmo.

Um aluno sugeriu para a atividade “estudar”, primeira relatada, o desenho de um livro, entretanto os demais não gostaram da ideia, pois não queriam desenhar. Portanto, definiu-se que a letra inicial seria a abreviação.

As atividades elencadas e seus respectivos símbolos foram: estudar (E), redes sociais (R), dormir (D), lazer (L), assistir televisão (TV), jogos online/celular (J), comer (C), tarefas de casa (T), trabalho (TB). As tarefas de casa foram lembradas quando os alunos já haviam começado a contabilizar o tempo gasto com as demais atividades. Um aluno já trabalha e perguntou se poderia incluir essa atividade. Foi considerado lazer passeios, saídas de casa para jogar futebol, encontrar amigos. Não considerou-se assistir televisão ou jogos online como lazer.

Todos os estudantes elaboraram quadros com os dias da semana e ao final contabilizaram as horas semanais ocupadas com cada atividade. Alguns escreveram a expressão, outros somente anotaram a quantidade de horas para depois juntar com as dos colegas. As figuras 14 e 15 ilustram exemplos de quadros elaborados pelos alunos.

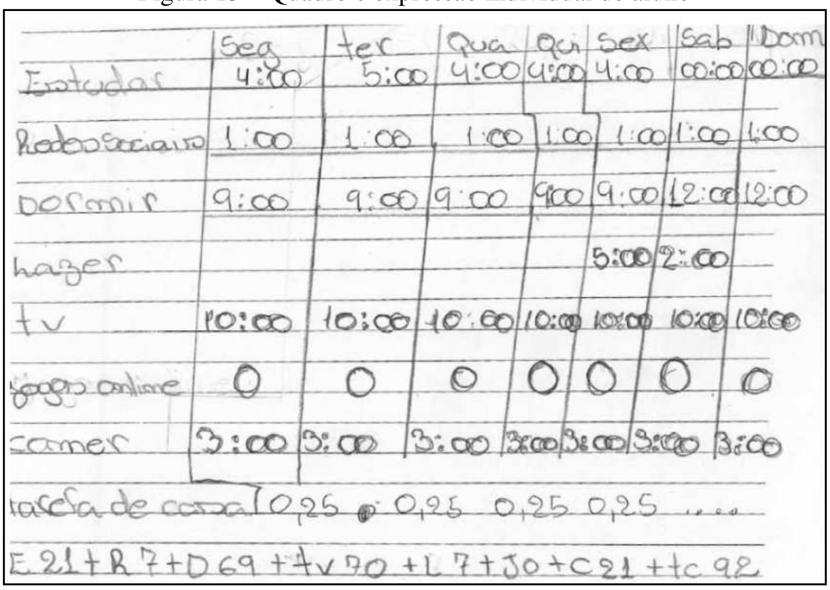
Figura 14 – Quadro individual de aluno



Seg	Ter	Qua	qui	sex	Sab	dom	++l
6 Hr	5 Hr	4 Hr	4 Hr	4 Hr	0	0	23 E
6 Hr	6 Hr	6 Hr	6 Hr	8 Hr	10 Hr	10 Hr	52+L
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3,5+R
1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	0	0	7,5+T
1 Hr	1 Hr	1 Hr	1 Hr	1 Hr	1 Hr	1 Hr	7+C
9 Hr	10 Hr	11 Hr	11 Hr	9 Hr	11,5	11,5	63+D

Fonte: acervo das autoras

Figura 15 – Quadro e expressão individual de aluno



	Seg	ter	Qua	Qui	Sex	Sab	Dom
Estudar	4:00	5:00	4:00	4:00	4:00	00:00	00:00
Redes Sociais	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00	1:00
Dormir	9:00	9:00	9:00	9:00	9:00	12:00	12:00
lazer					5:00	2:00	
tv	10:00	10:00	10:00	10:00	10:00	10:00	10:00
jogos online	0	0	0	0	0	0	0
comer	3:00	3:00	3:00	3:00	3:00	3:00	3:00

tarefa de casa 0,25 0,25 0,25 0,25 ....

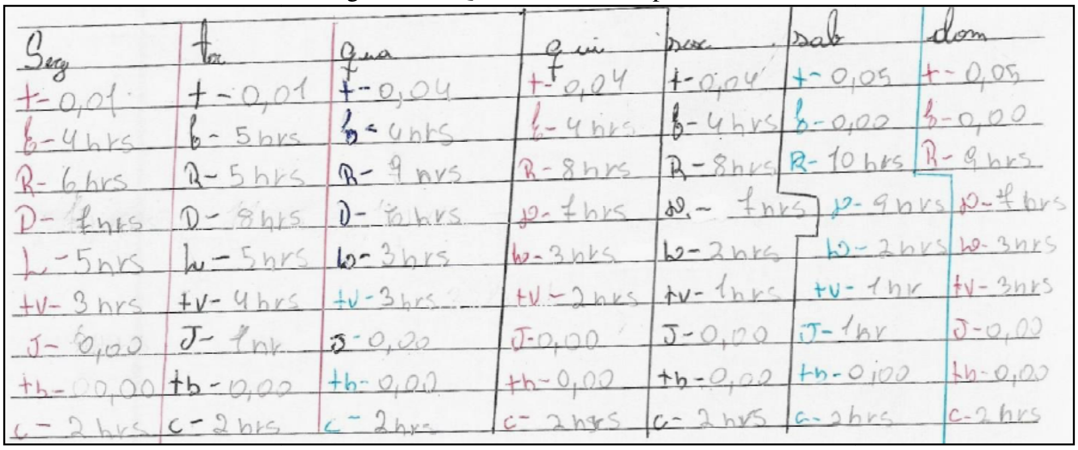
E 21 + R 7 + D 69 + tv 70 + L 7 + J 0 + C 21 + tc 92

Fonte: acervo das autoras

Durante a realização da tarefa surgiu a dúvida de como indicar atividades que duravam menos de uma hora. Assim, concluiu-se que meia hora poderia ser indicada como 0,5 e quinze minutos como 0,25. Para concluir esses valores, fez-se analogia com os valores em dinheiro. Metade de um real são R$ 0,50. Quinze minutos são metade da metade de uma hora. Em dinheiro, metade da metade de um real são R$ 0,25.

Percebeu-se ao longo da atividade que foi difícil para os alunos refletir sobre a sua rotina. Começaram a perceber que fazem atividades simultaneamente, como assistir televisão e acessar as redes sociais. Alguns alunos perceberam que o tempo de sono é muito menor do que o tempo gasto na internet e ainda se deram conta de que esse tempo é muito pequeno, o que é corroborado pela exclamação de um aluno: “bah, eu durmo quatro horas por noite!”. Esse mesmo aluno percebeu que a soma do tempo indicado por ele passou de 24 horas e ficou confuso, então a professora convidou-o a refletir acerca das atividades realizadas simultaneamente. O quadro desse aluno está reproduzido na Figura 16.

Figura 16 – Quadro elaborado por aluno



Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab	Dom
t- 0,01	t - 0,01	t- 0,04	t- 0,04	t- 0,04	t- 0,05	t- 0,05
b- 4 hrs	b- 5 hrs	b- 4 hrs	b- 4 hrs	b- 4 hrs	b- 0,00	b- 0,00
R- 6 hrs	R- 5 hrs	R- 9 hrs	R- 8 hrs	R- 8 hrs	R- 10 hrs	R- 9 hrs
D- 7 hrs	D- 8 hrs	D- 10 hrs	D- 7 hrs	D- 7 hrs	D- 9 hrs	D- 7 hrs
L- 5 hrs	L- 5 hrs	L- 3 hrs	L- 3 hrs	L- 2 hrs	L- 2 hrs	L- 3 hrs
tv- 3 hrs	tv- 4 hrs	tv- 3 hrs	tv- 2 hrs	tv- 1 hrs	tv- 1 hr	tv- 3 hrs
J- 0,00	J- 1 hr	J- 0,00	J- 0,00	J- 0,00	J- 1 hr	J- 0,00
tb- 0,00	tb- 0,00	tb- 0,00	tb- 0,00	tb- 0,00	tb- 0,00	tb- 0,00
c- 2 hrs	c- 2 hrs	c- 2 hrs	c- 2 hrs	c- 2 hrs	c- 2 hrs	c- 2 hrs

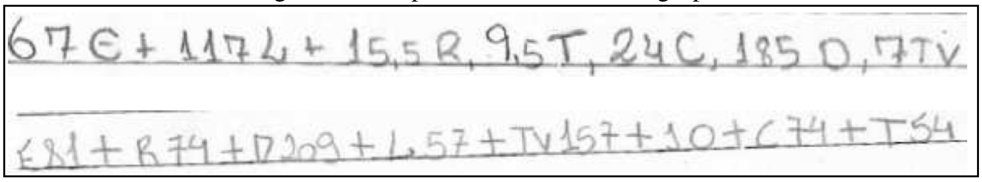
Fonte: acervo das autoras

Para a segunda parte da atividade, formaram-se três trios e um quarteto. Um aluno não estava bem no dia e preferiu não participar de grupo algum. Um dos grupos se atrasou, mas conseguiu finalizar a atividade ao mesmo tempo em que era feita a socialização.

Os alunos compararam as informações e agruparam naturalmente as atividades comuns: estudo com estudo, lazer com lazer e assim sucessivamente. Na conversa final, com a socialização dos resultados, os estudantes indicaram que era óbvio juntar a quantidade de horas de estudo com as horas de estudo dos colegas para compor a expressão final do grupo. Quando questionados porque não somaram horas de estudo com horas de lazer, por exemplo, responderam que eram coisas diferentes. A partir dessa observação, concluiu-se que em qualquer expressão somente podemos agrupar símbolos que se referem ao mesmo objeto, ou seja, símbolos iguais.

Um grupo apenas contabilizou separadamente os totais de tempo referentes a cada atividade. Os demais escreveram as expressões. A Figura 17 ilustra exemplos de expressões a que os alunos chegaram.

Figura 17 – Expressões finais de dois grupos



Fonte: acervo das autoras

Considera-se que os objetivos com a atividade foram alcançados. Todos conseguiram refletir sobre o tempo gasto com as atividades cotidianas e quais atividades ocupam mais tempo. Os alunos conseguiram elaborar em comum acordo registros para a representação de cada item elencado, bem como os utilizaram corretamente. Os grupos apresentaram as expressões finais, considerando as atividades desenvolvidas por todos os integrantes, indicando que compreenderam o que os símbolos escolhidos representavam e como poderiam manuseá-los dentro do contexto proposto.

A conversão neste caso, novamente pareceu ocorrer de forma natural. Percebe-se que quando a escrita simbólica parte de situações rotineiras para os alunos e de acordos prévios, com fixação dos símbolos utilizados por todos em comum acordo, o processo de conversão da representação em língua materna para escrita simbólica é facilitado.

Duval (2013) destaca a importância de considerar a face oculta da atividade matemática, isto é, "todas as transformações de representações semióticas cujo funcionamento cognitivo é ao mesmo tempo específico da matemática e independente dos conceitos matemáticos mobilizados" (DUVAL, 2013, p. 22). Nesta atividade, assim como nas anteriormente descritas, oportunizou-se a familiarização dos estudantes com símbolos e o que eles representam e o funcionamento cognitivo relacionado à conversão da representação dos objetos em língua materna para representação com símbolos, tendo em vista desenvolver a autonomia dos alunos e facilitar esse processo, pois ele provavelmente será necessário em situações matemáticas nos próximos anos de escolarização.

A atenção nas atividades implementadas até o momento foi voltada para desenvolver a transição de uma forma de representação de objetos para outra. Embora muitas vezes não haja a presença explícita de situações matemáticas ou pareça que as situações matemáticas não são complexas, o intuito é possibilitar a conversão, que, segundo Duval (2003), normalmente é considerada uma atividade lateral, que antecederia a atividade matemática em si, entretanto é fundamental para a compreensão em matemática.

Possibilitou-se aos alunos nesta atividade e nas anteriores, reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações semióticas. Duval (2013) relata que o foco das sequências de atividades geralmente é a aplicação ou aquisição de conceitos dos conteúdos matemáticos, ficando em segundo plano a capacidade de substituir uma representação por outra mais conveniente, o que é importante para a resolução de qualquer problema. Nesta pesquisa, priorizaram-se atividades que favoreçam o desenvolvimento dessa capacidade por parte dos alunos.

Notou-se que escrever “estudar” ou “E” é interpretado da mesma forma pelos alunos pelo fato de anteriormente ter sido combinado assim. Portanto a leitura e interpretação das expressões finais se tornam simples, o que não ocorre com frequência a partir de expressões com símbolos usualmente utilizados na disciplina de matemática, como será visto na atividade proposta na aula seguinte.

Aula 5: 07/11/2018

<u>Atividade proposta</u>

Objetivo: construir expressões que representem as situações apresentadas utilizando a escrita simbólica.

Procedimento:

1) Apresentar as seguintes situações aos estudantes:
   (a) A turma 9A1 pretende realizar uma saída de campo para a Feira do Livro em Porto Alegre. Como podemos prever o valor que será gasto apenas com as passagens?
   (b) Todos os dias os alunos da Chico passam no sr. Araújo para comprar balas e chicletes. Como podemos calcular a quantidade gasta com balas?

2) Solicitar que os alunos completem a tabela abaixo (quadro 7) com as situações apresentadas. A primeira linha deve ser completada em conjunto, como exemplo. Nas linhas em branco, ao final, os alunos devem criar situações e completar as demais colunas.

Quadro 7 – Exercício 2

Situação	**Informações necessárias**	**Operações matemáticas**	**Expressão**
Valor gasto em passagens de trem pelos alunos da escola em uma saída de campo à			

Feira do Livro de Porto Alegre.			
Valor arrecadado pela escola com a venda de bolo, enroladinho e suco no intervalo.			
Área de um retângulo.			
Perímetro de um retângulo.			
Lucro de uma empresa com a venda de um produto.			

Fonte: autoras

Inspiração histórica: novamente a inspiração foi o desenvolvimento da escrita simbólica ao longo da história. Inicialmente há uma situação proposta em língua materna e o intuito é, gradativamente abreviar a escrita e usar símbolos para representá-la. Nesta atividade, porém, as situações não partem diretamente da rotina dos estudantes e estão ligadas a conteúdos matemáticos.

Descrição da prática e resultados encontrados:

A realização da atividade teve duração de uma hora e estavam presentes 15 alunos.

A partir da situação proposta no exercício 1, item a), a resolução foi construída em conjunto. Elaborou-se uma tabela (Quadro 8) com as informações que os estudantes apontaram como necessárias para resolver o problema:

Quadro 8 – Tabela elaborada no quadro

Quantidade de alunos	Valor pago (ida e volta) em R$
1	6,60
2	13,20
3	19,80

Fonte: autoras

A professora-pesquisadora, então questionou: o que ocorre em cada linha da tabela? Qual é o processo que fazemos para calcular o valor?

Os alunos responderam que multiplicamos o valor da passagem (considerando ida e volta) pela quantidade de alunos. Com esta conclusão, passamos para o item b). Da mesma forma os alunos apontaram que é necessário multiplicar a quantidade de cada doce pelo respectivo preço.

A professora-pesquisadora então lançou as seguintes questões: o valor pago pelos doces é sempre o mesmo? Por quê? E se outra turma fosse à Feira do Livro, o valor gasto seria o mesmo? Por quê?

Os alunos concluíram que os valores mudam conforme a quantidade de doces e a quantidade de alunos. Então passamos a refletir sobre a pergunta: podemos, de alguma forma, ter uma previsão do valor gasto para qualquer quantidade? Como?

A professora-pesquisadora atentou para o fato de que em cada situação há algo que varia. Questionados, os alunos disseram que podemos representar essa quantidade que não sabemos exatamente qual é por uma letra. Escolheram a letra x para representar a quantidade de alunos. Então, com a reflexão conduzida pela professora, escreveu-se uma expressão que fornece o valor gasto com as passagens em função do número de alunos: $V = 6{,}60.x$, sendo V o valor total.

Iniciou-se a resolução do exercício 2 pela escrita da primeira linha da tabela, completando as informações necessárias e registrando a expressão final. Durante o tempo em que tentaram completar a tabela sozinhos ou em duplas, observou-se que os estudantes estavam com dificuldade de organizar as informações. Como não houve progressos individualmente, optou-se por completar todas as linhas em conjunto. Na linha referente ao lucro de uma empresa, a professora-pesquisadora precisou auxiliar no raciocínio referente ao que a palavra lucro significa.

Além das situações constantes na tabela, duas linhas estavam em branco, pois o intuito era que os estudantes elaborassem duas situações, porém percebeu-se que houve muita dificuldade para a realização da tarefa e, então acrescentou-se as seguintes situações, baseadas nos exemplos do início da aula: valor da compra de balas no mercadinho e valor da compra de balas e chicletes no mercadinho.

Doze alunos completaram a tabela. Desses, dois estudantes não colocaram os valores dos itens nas expressões. Dois alunos deixaram uma linha em branco e um aluno apenas preencheu a primeira linha. Apresenta-se na Figura 18 a tabela de uma aluna.

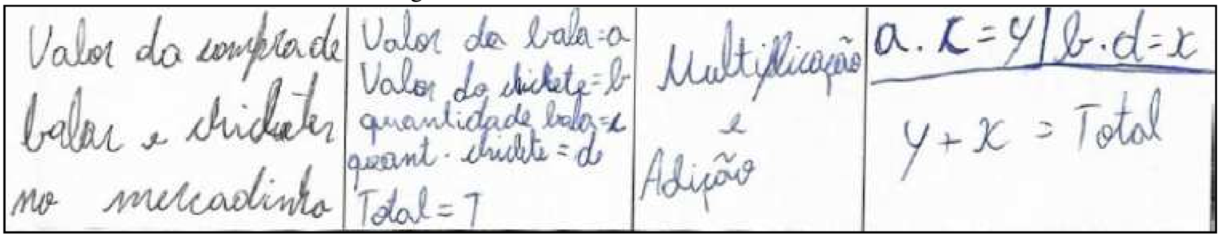
Situação
Valor gasto em passagens de trem p alunos da escola e uma saída de camp Feira do Livro de P Alegre.
Valor arrecadado p escola com a venda bolo, enroladinho suco no intervalo

A Figura 19 ilustra

ele não colocou na express

Na Figura 20 consta um exemplo de uma aluna que utilizou mais de uma expressão para representar o valor total, compondo-a com símbolos que indicavam resultados de operações. Além disso, ela considerou os valores dos produtos também genéricos, o que evidencia o entendimento do problema na forma mais genérica.

Figura 20 – Parte da tabela de uma aluna



Fonte: acervo das autoras

Considera-se que os objetivos propostos foram parcialmente atingidos, já que os alunos participaram respondendo aos questionamentos e informando corretamente os dados, necessitando do auxílio da professora para registrar suas respostas. Novamente verificou-se que um obstáculo relevante para a realização da tarefa residiu na dificuldade em organizar e registrar as informações e em relacionar o que é solicitado no exercício com o que foi discutido no grande grupo anteriormente. Por exemplo, uma das situações acrescentadas foi análoga à proposta no início da aula e alguns estudantes não perceberam que a solução estava esboçada no quadro-verde. Outro tipo de dificuldade apresentada foi na elaboração da expressão com a sua escrita simbólica, por exemplo, quando verificaram que a operação envolvida era a multiplicação, não se deram conta de que na expressão ela deve ser representada pelo símbolo comumente utilizado para representá-la, isto é, o ponto ou “x”.

Portanto, os alunos apresentaram dificuldade em transitar pelos diferentes registros que representam o mesmo objeto, e, conforme a teoria de Duval aponta, a semiose foi prejudicada. A semiose, segundo Duval (2012), é a apreensão ou produção de uma representação semiótica. Neste caso, houve a necessidade de mudança de registro a partir de situações escritas em língua materna e pré-determinadas, sem a participação dos alunos na elaboração das expressões. Conjecturamos que os alunos tiveram dificuldade de mobilizar as informações anteriormente discutidas.

> Existe como que um “enclausuramento” de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. (DUVAL, 2003, p. 21)

Aula 6: 08/11/2018

<u>Primeira atividade</u>

Objetivos: ler e interpretar situações retiradas de fontes históricas; representar as situações apresentadas em linguagem retórica através da linguagem simbólica.

Procedimento: entregar para os alunos uma folha com o exercício descrito abaixo.

1) As situações a seguir foram extraídas de documentos históricos. Indique como podem ser representadas de forma simbólica e, se possível, indique a solução:
   a) **Problema 26 do Papiro de Rhind** (extraído de Estrada et. al., 2000, p. 38): Uma quantidade e a sua quarta parte somadas perfazem 15. Qual é a quantidade?
   b) **Problema 32 do Papiro de Rhind** (extraído de Estrada et. al., 2000, p. 40): Uma quantidade, a sua terça parte, e a sua quarta parte adicionadas perfazem 2. Qual é a quantidade?
   c) **Problema solucionado por Diofanto** (extraído de Katz, 1998, p. 217): A soma de dois números resulta em 100 e sua diferença é 40. Quais são os números?
   d) **Problema encontrado em tábua babilônica** (extraído de Baumgart, 1992, p. 4): Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.
   e) **Escrito sobre o túmulo de Diofanto** (extraído de Baumgart, 1992, p. 9)**:**
      Aqui jaz Diofanto. Maravilhosa habilidade –
      Pela arte da álgebra a lápide nos diz sua idade:
      Deus lhe deu um sexto da vida como infante,
      Um duodécimo mais como jovem, de barba abundante;
      E ainda uma sétima parte antes do casamento;
      Em cinco anos nasce-lhe vigoroso rebento.
      Lástima! O filho do mestre e sábio do mundo se vai
      Morreu quando da metade da idade final do pai
      Quatro anos mais de estudos consolam-no do pesar;
      Para então, deixando a terra, também ele alívio encontrar.
   f) **Problema encontrado no livro Lilavati (escrito por Bháskara)** (extraído de Bianchini, 2015, p. 97)**:** ...o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto foi para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto, e seu amado, um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número total de pérolas no colar.

Inspiração histórica: a história foi a fonte dos problemas utilizados no exercício.

Segunda atividade

Objetivos: mobilizar os conhecimentos trabalhados nas atividades anteriores; elaborar um problema coerente e comparar a sua representação com a dos colegas; representar um problema escrito em língua materna com a escrita simbólica.

Procedimento: em duplas, os alunos devem elaborar um problema e anotá-lo em língua materna em uma folha. Em outra folha, devem indicar a forma de representá-lo com uma simbologia estudada. Em seguida, a professora troca os problemas entre as duplas e todos devem representar simbolicamente o problema dos colegas.

Após todos concluírem, a dupla que criou o problema deve comparar e corrigir a resolução da outra dupla, indicando com um parecer como foi a avaliação. Ao final, todos socializam os resultados com o grande grupo.

Inspiração histórica: novamente a inspiração é o desenvolvimento da escrita simbólica na história. Nesta atividade, porém, os alunos são responsáveis pela elaboração de um problema com a língua materna para, posteriormente, representá-lo em escrita simbólica.

Descrição da prática e resultados encontrados:

Havia 18 alunos presentes. Quando receberam a folha com os problemas históricos os alunos demonstraram desânimo por ser necessário ler todos os textos. Foi realizada uma leitura em conjunto e a professora-pesquisadora alertou que o mais importante era a transcrição da escrita em língua materna para a escrita simbólica. Não havia necessidade de resolverem a pergunta feita nos itens.

Verificou-se que os estudantes tiveram dificuldades em ler e entender algumas palavras, como “perfazem”. Também houve estranhamento em relação a termos matemáticos como “quarta parte”, “soma”. Foi necessário auxiliá-los para entenderem o que estava escrito e também para a reescrita das situações em forma simbólica. Inicialmente, os alunos estavam preocupados em encontrar os valores, resolver a questão, mesmo antes de transcrever em escrita simbólica.

Depois da intervenção da professora-pesquisadora no primeiro item, alguns alunos conseguiram relacionar as informações e reescrever partes dos itens seguintes, entretanto, outros ainda apresentaram dificuldade em transcrever o que conseguem responder quando questionados oralmente. Em avaliações ao longo do ano percebe-se que os alunos deixam várias questões sem resposta ou sem anotação alguma, mesmo quando incentivados a resolver e anotar o máximo possível do que pensam, o que se refletiu nesta atividade.

No Quadro 9 apresentam-se dados numéricos dos resultados referentes a essa atividade.

Quadro 9 – Números referentes à sexta atividade

Item	Respostas coerentes	Respostas coerentes em parte	Respostas incoerentes	Respostas em branco
a)	16	2	-	-
b)	15	3	-	-
c)	15	1	2	-
d)	18	-	-	-
e)	9	4	4	1
f)	6	9	3	-

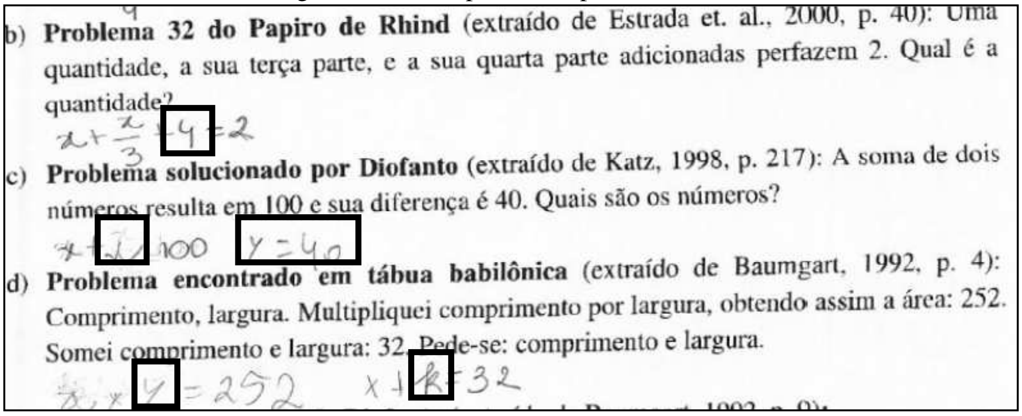
Fonte: autoras

Após as intervenções, todos os alunos conseguiram indicar os problemas em escrita simbólica. O principal erro na última questão foi a escrita de dez ao invés de seis, o que pode ter ocorrido por falta de atenção, tendo em vista que o problema indica que "seis pérolas ficaram no fio original". A resposta com apenas esse erro foi considerada coerente em parte.

Acredita-se que as nove respostas parcialmente coerentes ocorreram devido à troca de ideias e respostas entre as duplas.

A incoerência apresentada na maioria dos itens foi a ausência da incógnita nas expressões simbólicas, o que pode ter ocorrido por erros de cópia ou não compreensão do objeto matemático e do símbolo que o representa, isto é, não entendimento da representação semiótica utilizada e/ou sua conversão (da escrita em língua materna para escrita simbólica). A Figura 21 ilustra um exemplo em que a aluna colocou corretamente indicada a terça parte, entretanto colocou "4" no lugar de quarta parte. Além disso, no item c), a representação de dois números foi indicada pela mesma incógnita, enquanto a diferença não foi representada. Já na questão d), um dos símbolos foi trocado, quando deveriam ser os mesmos utilizados na primeira equação. As incoerências aparecem na figura destacadas com um retângulo.

Figura 21 – Exemplos de respostas de aluna


b) **Problema 32 do Papiro de Rhind** (extraído de Estrada et. al., 2000, p. 40): Uma quantidade, a sua terça parte, e a sua quarta parte adicionadas perfazem 2. Qual é a quantidade?

$x + \frac{x}{3} + \boxed{4} = 2$

c) **Problema solucionado por Diofanto** (extraído de Katz, 1998, p. 217): A soma de dois números resulta em 100 e sua diferença é 40. Quais são os números?

$x + \boxed{}\ 100 \quad \boxed{y = 40}$

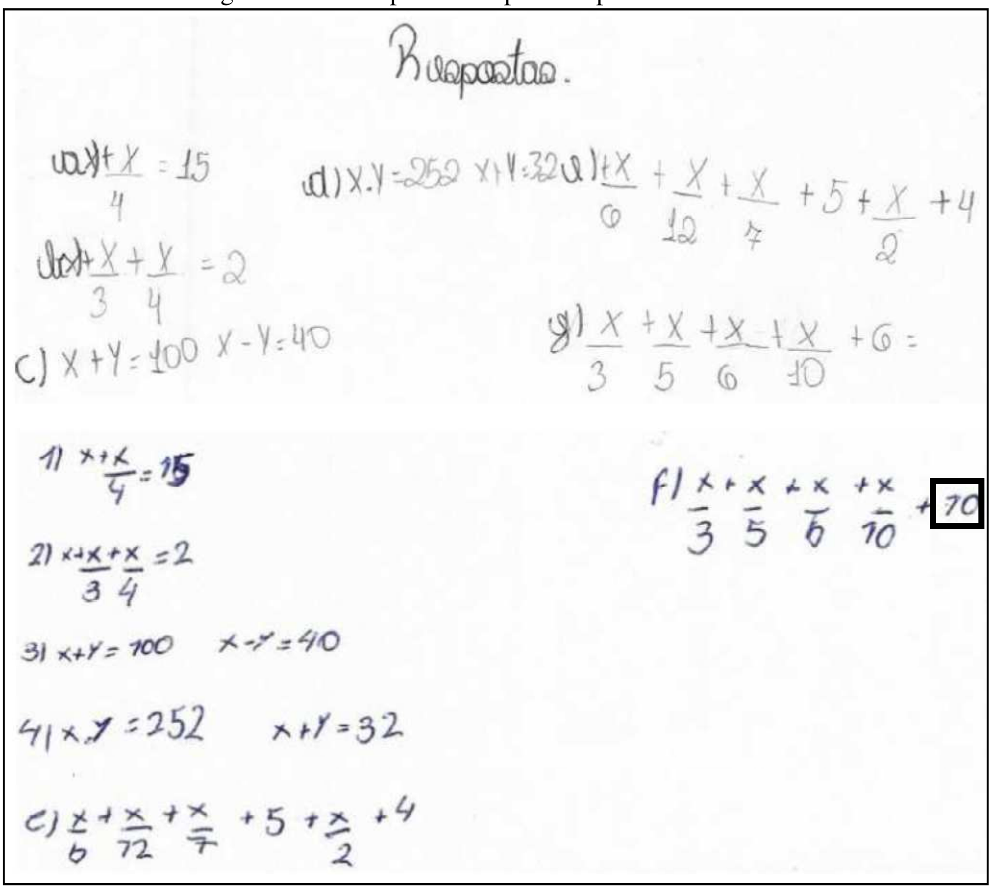
d) **Problema encontrado em tábua babilônica** (extraído de Baumgart, 1992, p. 4): Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura.

$x \cdot \boxed{y} = 252 \quad x + \boxed{k} = 32$

Fonte: acervo das autoras

A Figura 22 ilustra as soluções de dois alunos, o primeiro respondeu todos os itens coerentemente. O segundo apresentou apenas no último item a coerência parcial já descrita anteriormente, destacada na figura com um retângulo.

Figura 22 – Exemplos de respostas à primeira atividade

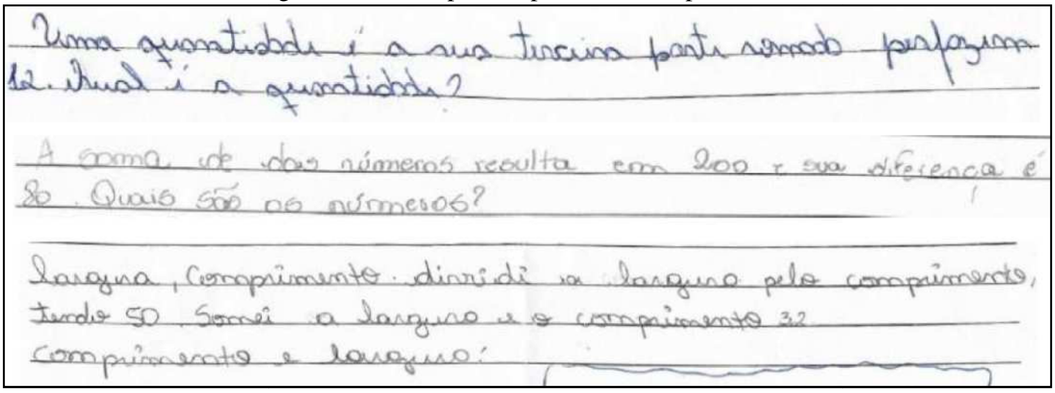


Fonte: acervo das autoras

Considera-se que os objetivos foram alcançados, apesar da dificuldade inicialmente apresentada nesta atividade. Pelas respostas elaboradas pelos estudantes, percebe-se que o processo de leitura, interpretação e conversão da situação apresentada para a escrita simbólica ocorreu com menos dificuldade e necessitou de pouca intervenção em relação à quinta aula. Portanto, considera-se que a conversão ocorreu com maior autonomia dos alunos, já que os símbolos matemáticos que representaram os objetos descritos em língua materna foram utilizados de forma coerente em comparação com a atividade proposta na aula anterior.

A primeira parte da segunda atividade solicitava que os alunos elaborassem um problema e indicassem a forma de representá-lo com escrita simbólica. Formaram-se oito grupos: dois trios e seis duplas. Na prática, seis deles apresentaram uma adaptação dos problemas trabalhados na primeira atividade da aula, exatamente o que afirma Duval (2013, p. 27): “seria ilusório pedir para aos alunos elaborarem os seus próprios problemas. Eles reproduziriam os melhores exemplos de problemas trabalhados em sala de aula”. A Figura 23 ilustra três exemplos que apresentam a adaptação feita.

Figura 23 – Exemplos de problemas adaptados do exercício

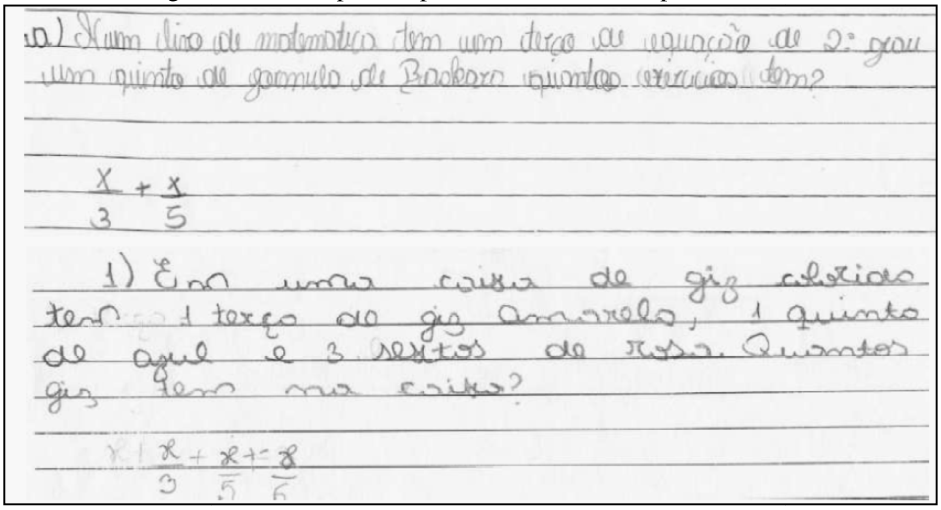


Fonte: acervo das autoras

Acredita-se que, apesar disso, o exercício foi importante, pois os alunos retornaram aos exemplos da atividade anterior e revisaram a forma que representaram as situações.

A Figura 24 ilustra os dois problemas elaborados pelos grupos que tiveram ideias diferenciadas.

Figura 24 – Exemplos de problemas elaborados pelos alunos



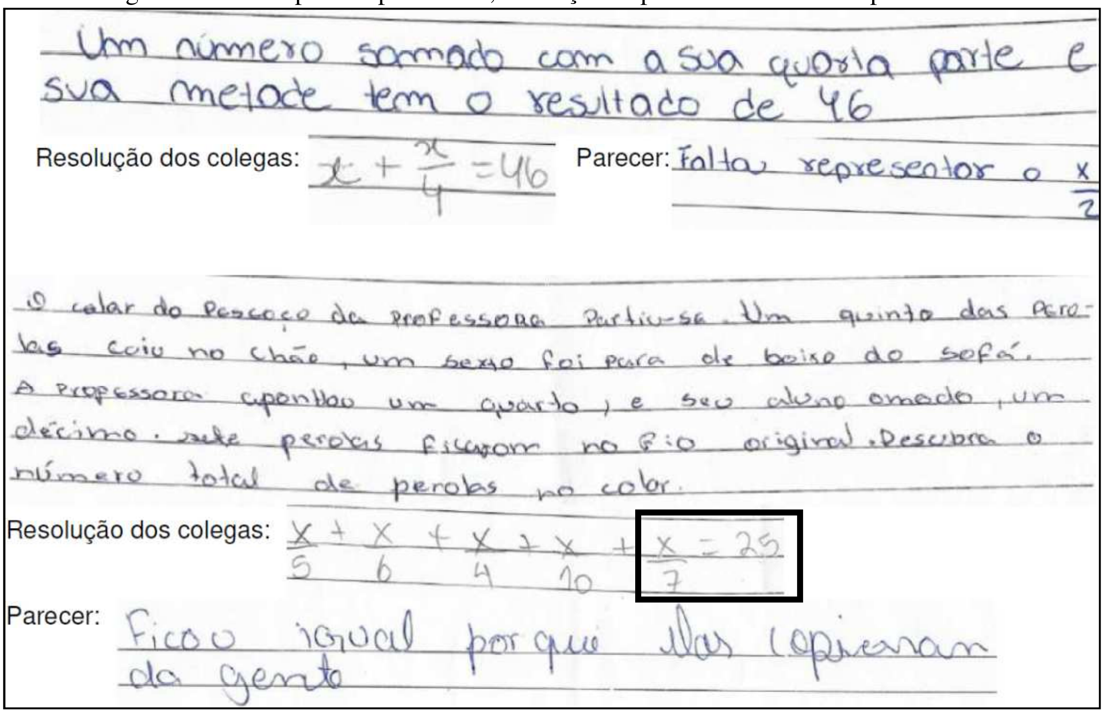
Fonte: acervo das autoras

Destaca-se que nas aulas não foram trabalhadas as resoluções das situações propostas, apenas a representação em escrita simbólica, portanto os alunos não foram orientados a analisar se seus problemas eram possíveis de resolver. Verifica-se que nos exemplos acima, faltam informações para que possa haver tentativa de responder às perguntas.

A segunda parte da atividade solicitava que os alunos avaliassem e elaborassem um parecer das representações que os colegas fizeram dos problemas anteriormente elaborados. A maioria dos pareceres foram frases curtas do tipo “está certo”, que estava coerente com a resolução. Dois problemas merecem destaque em relação aos pareceres e estão reproduzidos na figura 25. O primeiro demonstra que o grupo analisou a representação elaborada pelos colegas e identificou a falta de um dos termos. O segundo exemplo expõe uma representação incoerente com o problema elaborado, indicando inclusive o número 25, que não foi citado. Pelo parecer, infere-se que o grupo que elaborou o problema representou da mesma forma, considerando como a representação correta do problema proposto.

Durante a realização da atividade, os alunos precisaram, inicialmente, realizar a conversão do problema elaborado em língua materna para a escrita simbólica e, em seguida, realizar novamente esta conversão a partir do problema proposto pelos colegas.

Figura 25 – Exemplos de problemas, resoluções e pareceres elaborados pelos alunos


Um número somado com a sua quarta parte e sua metade tem o resultado de 46

Resolução dos colegas: $x + \frac{x}{4} = 46$ Parecer: Falta representar o $\frac{x}{2}$

O colar do Pescoço da professora Partiu-se. Um quinto das Perolas caiu no chão, um sexto foi para de baixo do sofá. A professora apanhou um quarto, e seu aluno amado, um décimo. Sete perolas ficaram no fio original. Descubra o número total de perolas no colar.

Resolução dos colegas: $\frac{x}{5} + \frac{x}{6} + \frac{x}{4} + \frac{x}{10} + \boxed{\frac{x}{7} = 25}$

Parecer: Ficou igual por que elas copiaram da gente

Fonte: acervo das autoras

A socialização dos resultados não foi efetiva, pois a aula estava chegando ao final, portanto foi uma conversa rápida em que as duplas apontaram que, em geral, as representações dos colegas foram semelhantes às indicadas por quem elaborou os problemas.

A professora-pesquisadora reforçou algumas conclusões destacadas ao longo do desenvolvimento das atividades, como a importância que a escrita simbólica tem em abreviar a escrita e facilitar a resolução de alguns problemas e a necessidade de todos compreenderem o seu significado para que seu uso faça sentido. Destacou ainda que a matemática se apresenta muitas vezes de forma simbólica e é muito importante que os estudantes sempre observem o que está escrito pensando no que as representações significam.

Apesar da inspiração direta nos problemas dados como exercício, considera-se que os objetivos foram alcançados, pois os grupos elaboraram os problemas em língua materna e os representaram em escrita simbólica e conseguiram avaliar as representações dos colegas.

O processo de conversão ocorreu novamente. Em geral, os alunos escreveram e representaram os problemas com símbolos matemáticos com facilidade e sem necessitar a intervenção da professora-pesquisadora.

Conclusões sobre a prática

Na prática, os estudantes inicialmente partiram de seu cotidiano e de uma escrita simbólica própria. A utilização dos símbolos e situações matemáticas começou com algumas dificuldades, porém, gradativamente, o processo foi se tornando mais familiar.

Embora o enfoque principal dado nas atividades fosse a passagem da escrita em língua materna para a escrita simbólica, oportunizou-se diferentes situações para que os estudantes realizassem essa tarefa de forma diversificada, em diferentes contextos (sua rotina, situações matemáticas e problemas históricos), buscando favorecer o processo de conversão.

Manifestações durante a prática sugerem que houve sensibilização dos estudantes acerca dos seus hábitos pessoais, como ingestão de refrigerante e produtos industrializados e o tempo gasto em atividades como jogos de computador e redes sociais. Essa reflexão foi um destaque positivo em relação à proposta. Embora não fosse um objetivo inicial, a sensibilização ocorreu e foi uma consequência obtida com a realização da prática.

As atividades realizadas favoreceram a produção semiótica, pois os alunos criaram seus próprios símbolos e estruturaram a escrita simbólica. Houve conversão de registros multifuncionais discursivos para registros monofuncionais discursivos com a conversão da escrita em língua materna para a escrita simbólica, inicialmente a partir da escrita elaborada pelos próprios alunos e, posteriormente, a partir da escrita de situações e problemas pré-determinados.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O entendimento da simbologia, da representação genérica e a possibilidade de traduzir com símbolos o que é escrito na língua materna são necessários nos anos de escolarização e em conteúdos que se relacionam diretamente com a vida cotidiana, como funções. Acreditamos que o assunto escolhido para o nosso trabalho é relevante e pode contribuir com a compreensão da disciplina de matemática em todo o âmbito da escola básica.

Duval (2012) afirma que as pesquisas em sala de aula que envolvem atividades de conversão em que a representação de partida é um enunciado em língua natural ou um texto são muito complexas. O autor ainda defende que não é possível descartar ou negligenciar no ensino de matemática a língua natural, pois ela é um registro tão importante quanto outros como figuras, gráficos, símbolos. A proposta implementada nesta dissertação e todo o estudo que a embasou permitiu confirmarmos a importância de valorizar tanto a escrita em língua materna quanto a escrita simbólica nas aulas de matemática.

Percebemos que uma grande dificuldade encontrada nas aulas foi a leitura e interpretação das situações propostas e, consequentemente, dos registros semióticos, especificamente o registro em língua materna, bem como a reflexão acerca do que foi construído em conjunto para auxiliar na resolução individual das atividades.

Consideramos que o fato de as aulas terem ocorrido muitas vezes em intervalos de tempo maiores que uma semana também interferiu de maneira prejudicial em nossa prática, pois algumas atividades eram semelhantes e os alunos muitas vezes não recordavam mais o que haviam feito e muitos tópicos destacados previamente em atividades anteriores se perdiam.

Nesta pesquisa nos propomos a refletir acerca da questão: atividades inspiradas na história da matemática, no que diz respeito ao processo de construção da simbologia matemática, podem favorecer o aprendizado da escrita simbólica da matemática escolar na perspectiva de Duval?

Com base nas reflexões realizadas neste estudo, percebemos que a história da matemática pode auxiliar principalmente no planejamento docente. Mesmo não sendo inserida diretamente em atividades, deve permear o conhecimento do professor, tornando-o mais completo e auxiliando na organização das atividades.

O estudo da escrita simbólica baseado em contextos históricos nos quais ela se desenvolveu pode permitir que o estudante desenvolva seu pensamento, gradativamente abreviando a escrita e utilizando símbolos, compreendendo o que eles representam e sua manipulação.

O estudo da história da álgebra permitiu compreendermos a importância da evolução da escrita simbólica para a aprendizagem. Acreditamos que antes de o aluno utilizar símbolos ou traduzir frases de outros, ele deve compreender o que os símbolos representam, construir suas próprias frases e traduzi-las, de forma que seja capaz de ler o que os símbolos dizem e utilizá-los para abreviar as palavras.

A história da matemática foi uma importante fonte de inspiração para a elaboração das atividades e elas permitiram que os alunos refletissem acerca dos símbolos que conhecem e utilizam no cotidiano, bem como oportunizou a elaboração de expressões próprias, com simbologias criadas pelos educandos. A partir disso, permitimos a reflexão e relação com o uso de símbolos em matemática.

Acreditamos que a atividade realizada a partir da elaboração da tabela com a evolução da escrita simbólica algébrica ao longo do tempo possibilitou sensibilizar os estudantes para a ideia de que a matemática é dinâmica. Diferentes matemáticos participaram da criação e consolidação dos símbolos que hoje são utilizados. Oportunizamos uma visão humana da matemática e os alunos demonstraram em suas respostas que refletiram acerca da importância de evoluir.

No capítulo 3 citamos a importância de quando utilizarmos problemas históricos realizarmos uma discussão e situarmos os estudantes no contexto em que foram criados. Em nossa prática, o tempo impediu que os problemas históricos fossem mais bem explorados. Acreditamos que é importante ler e conversar com os estudantes, esclarecer dúvidas acerca de termos desconhecidos e contextualizar as sociedades em que esses problemas estavam presentes. Esperamos que em uma nova oportunidade para a utilização desses problemas o professor que estiver conduzindo a aula possa desenvolver um trabalho mais completo no sentido de possibilitar aos alunos maiores informações históricas e culturais acerca das sociedades e povos relacionados às situações extraídas de documentos e fontes históricas.

Concluímos que utilizar a história da matemática em sala de aula não é uma tarefa simples. Houve muita reflexão desde a proposta inicial apresentada no projeto para ingresso no mestrado. Quando pensamos a história da matemática de maneira mais abrangente, e não apenas informativa, verificamos que nem sempre é possível ou mais acertado levá-la para a sala de aula, pois os termos e o contexto histórico nem sempre são simples de apresentar aos alunos. Porém, pensamos que a história da matemática é um campo rico em conhecimentos, que pode ser amplamente explorado pelos professores, pois fornece complemento para a formação docente e inspiração para desenvolver atividades que possam contribuir para a aprendizagem dos estudantes.

Acreditamos que foram atingidos os objetivos elencados no início deste trabalho: conhecer a história do desenvolvimento da simbologia algébrica; reconhecer e utilizar a história da matemática como fonte para o ensino e aprendizagem de matemática; reconhecer e compreender a utilização de símbolos como facilitadora para o estudo da álgebra; refletir sobre a prática implementada e suas contribuições para o ensino de matemática, especificamente da introdução à escrita simbólica, analisar à luz da teoria dos registros de representação semiótica os dados obtidos na prática.

Ressaltamos que as atividades desenvolvidas foram pensadas com base no público-alvo descrito na seção 5.1. Consideramos ser possível adaptar as atividades para outros estudantes. Caso seja realizado um trabalho em um sétimo ano, provavelmente os alunos não teriam ainda utilizado símbolos como o *x*. Então poderia ocorrer uma mudança na ordem das atividades ou inserção de aulas teóricas entre os exercícios. As duas primeiras atividades podem ser introdutórias para a escrita simbólica, seja apresentação ou revisão do assunto, pois permitem uma reflexão acerca da utilização de escritas abreviadas e sua execução é bastante intuitiva.

Consideramos que, com a proposta de mais atividades semelhantes, o processo de conversão com escrita simbólica matemática se tornaria mais familiar e, com o tempo, mais fácil para os estudantes, contribuindo para que, com a ocorrência da conversão, haja *semiose* e, posteriormente a *noesis*, ocorrendo compreensão de conteúdos como resolução de equações e funções.

Acreditamos que nossa pesquisa contribuiu para manter em debate a utilização da história da matemática na prática docente com destaque para a escrita simbólica, em nossa opinião extremamente relevante para o estudo da matemática na escola básica.

Alguns tipos de atividades apresentadas podem contribuir para projetos interdisciplinares que englobem diferentes áreas do saber. Esperamos que este trabalho seja fonte de reflexão para professores e pesquisadores em educação matemática e desperte novas inquietações que resultem em novos estudos.

Olhar para o passado, seja ele recente ou remoto, individual ou coletivo, mostra que somos seres em constante transformação. A professora-pesquisadora que iniciou esta pesquisa certamente não é a mesma que escreve estas linhas. O processo de elaboração do texto e implementação das atividades propostas modificou o olhar sobre as aulas de matemática e sobre a produção dos alunos. Ao longo da escrita mostrou-se indispensável o cuidado com a escolha das palavras e a reflexão acerca do que elas dizem. Essa análise aprofundada acerca do que dizer e como dizer contribuiu para o amadurecimento da visão enquanto professora e pesquisadora em educação. Em uma sala de aula, assim como para o conhecimento, não há pontos finais. O processo continua e se modifica o tempo todo, assim como os sujeitos envolvidos, o que gera mais transformações e torna esse processo tão enriquecedor.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Francisco Reginaldo Roberto. *A utilização do recurso da história da matemática para facilitar a assimilação de alguns conteúdos.* 2014. 61 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino). Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossoró, 2014.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. *Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática.* In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) *Pesquisa qualitativa em educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 25-45.

BAUMGART, John K. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*: *Álgebra.* São Paulo: Atual, 1992.

BENTLEY, Peter. *O livro dos números. Uma história ilustrada da matemática.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

BIANCHINI, Edwaldo. *Matemática Bianchini.* 8ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BICUDO, M. A. V. *Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica.* In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.101-114.

BISSI, Tiago. *Álgebra e história da matemática: análise de uma proposta de ensino a partir da matemática do Antigo Egito*. 2016. 149 f. Dissertação (mestrado em educação em ciências e matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1991.

BRANDEMBERG, João Cláudio. Organizado por Iram Abreu Mendes e Miguel Chaquiam. *Método histórico para resolução algébrica de equações*. *Coleção História da Matemática para professores, 5*. Belém: SBHMt., 2009.

BRASIL, Glaucio Braz Nunes. *O uso dos métodos egípcio, babilônico, chinês e russo no ensino da multiplicação de números naturais na escola privada.* 2015. 50 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino). Universidade Federal do Amapá. Macapá, 2015.

CARVALHO, Lucas Moisés Carneiro de. *Reflexo da adoção da história da matemática na prática pedagógica dos professores de matemática do ensino médio de uma escola da rede particular de ensino do município de Sobral.* 2013. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2013.

CASTRO, Thiago Barros de. *A História da Matemática como Motivação para o Processo de Aprendizagem e Contextualização dos Conteúdos Matemáticos na Educação Básica*. 2016. 45 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2016.

CHIAROTTI, João Paulo. *Números inteiros: uma proposta de tratamento para o ensino fundamental a partir das ideias de Descartes e Hilbert.* 2016. 147 p. Dissertação (Mestrado

Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2016.

DIAS, Graciana Ferreira. *A História da Matemática como Metodologia de Ensino: Um Estudo a Partir do Tratado Sobre o Triângulo Aritmético de Blaise Pascal*. 2014. 193f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Instituto de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2014.

DOMINGUES, Hygino H. *Síntese da História das Equações Algébricas*. Caderno ensino aprendizagem de matemática. São José do Rio Preto: SBEM, 2000.

DUVAL, Raymond. *Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica*. In: Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 2, n. 3. Campo Mourão, jul/dez, 2013. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende.

DUVAL, Raymond. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. In: Revemat, v. 7, n. 2. Florianópolis, 2012. p. 266-297.

DUVAL, Raymond. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). *Aprendizagem em matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

EMEF FRANCISCO CÂNDIDO XAVIER. *Projeto Político Pedagógico*. São Leopoldo: 2016-2019.

ESTRADA, Maria Fernanda et al. *História da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

FELICIANO, Léa Paz da Silva. *A linguagem e a etimologia nos termos utilizados na matemática: uma construção histórica*. 2013. 197 f. Tese (Doutorado em educação matemática). Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, 2013.

FLORES, Cláudia Regina. *Registros de representação semiótica em matemática:* história, epistemologia, aprendizagem. In: BOLEMA, v. 19, n. 26. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2006. p. 1-22.

GARBI, Gilberto Geraldo. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997.

GARNICA, A. V. M. *História Oral e Educação Matemática*. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.79-100.

GIL, Katia Henn. *Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra*. 2008. 118f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

GONÇALVES, Alessandro. *Análise das estratégias e erros dos alunos do 9º ano em questões de álgebra baseadas no Saresp de 2008 a 2011*. 2014. 178f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2014.

GOLDENBERG, M. *A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record, 1997.

GOUVEA, Diuliano Azeredo. *O ensino dos logaritmos tendo como eixo norteador a história.* 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2013.

KATZ, Victor, J. *História da Matemática.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1998.

LINS, Romulo Campos. *Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática.* In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. *Educação Matemática: pesquisa em movimento.* 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005. P. 92-120.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; Valdés, Juan E. N. *A história como um agente de cognição na educação matemática.* Porto Alegre: Sulina, 2006.

MENDES, Maurício. *Desenvolvimento do clube de história da matemática: um diálogo de ciências humanas com a matemática.* 2014. 69 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: 2014.

MIGUEL, Antonio et al. *História da Matemática em atividades didáticas*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MIGUEL, Antonio. *Três estudos sobre história e educação matemática.* 1993. 274p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 1993.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação Matemática: propostas e desafios.* 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MORAES, Luis Claudio Longo. *Ensino de Probabilidade: Historicidade e Interdisciplinaridade*. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2014.

MOURA, Anna Regina Lanner de; SOUSA, Maria do Carmo de. *O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes*. In: ZETETIKE, v. 13, n. 24. Campinas: Unicamp, jul./dez. 2005.

PEREIRA, Juliana de Melo. *História da Matemática na Formação do Professor: dificuldades e* sugestões. 2013 54 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2013.

RIBEIRO, Denise Benino Dourado. *O uso da história das equações nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na educação básica.* 2015. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

RODRIGUES, Gisane Fagundes. *História da Matemática: um olhar sob a perspectiva para a formação do professor de matemática.* 2016. 109 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2016.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João B. P. de. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROXO, Euclides. *A Matemática na Educação Secundária.* Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1937.

SERRÃO, Marcelo Miranda. *Problemas matemáticos da antiguidade como estratégia para o ensino de matemática na educação básica*. 2014. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

SILVA, Aldeni Rosa da. *Por que usamos símbolos em matemática?* 2013. 60 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Programa de Pós Graduação Profissional em Matemática da Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013.

STEWART, Ian. *Em busca do infinito: Uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

VAN DER WAERDEN, Bartel Leenert. *A history of algebra.* Berlim: Springer-Verlag, 1985.