

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**GABRIEL PASCOTTINI FLORES**

**SÍNTESE DE CONTROLADORES PARA  
SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM  
SISTEMAS LPV COM SATURAÇÃO**

Porto Alegre  
2019

**GABRIEL PASCOTTINI FLORES**

**SÍNTESE DE CONTROLADORES PARA  
SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM  
SISTEMAS LPV COM SATURAÇÃO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores

Porto Alegre  
2019

**GABRIEL PASCOTTINI FLORES**

**SÍNTESE DE CONTROLADORES PARA  
SEGUIMENTO DE REFERÊNCIAS EM  
SISTEMAS LPV COM SATURAÇÃO**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul –  
Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari, UTFPR  
Doutor pela Universidade Estadual de Campinas – Campinas, Brasil

Prof. Dr. Aurélio Tergolina Salton, UFRGS  
Doutor pela University of Newcastle – Newcastle, Austrália

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier de Toulouse – Toulouse, França

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre, fevereiro de 2019.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria inicialmente de agradecer ao meu orientador, Prof. Jeferson, por ter me apresentado ao mundo da teoria de controle e ter pacientemente me conduzido ao longo deste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer também aos meus amigos, que não desistiram de mim ao longo destes dois anos e seguem me proporcionando muitos momentos de diversão e alegria.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus pais, Ály e Jussara, não apenas pelo incondicional apoio em tudo o que eu faço, mas também pelo respeito e educação que me foram ensinados; e a minha namorada, Fernanda, por ter sido paciente e companheira durante todo o mestrado, sempre ao meu lado.

## RESUMO

Este trabalho aborda o problema de seguimento e rejeição de sinais em sistemas lineares com parâmetros variantes (do inglês *Linear Parameter-Varying* - LPV), sujeitos à saturação tanto em amplitude, quanto na taxa de variação do sinal de controle. Em sistemas com saturação na taxa de variação do sinal de controle, é assumido um modelo virtual para descrever a dinâmica do atuador. A estratégia de controle proposta considera controladores baseados no Princípio do Modelo Interno (PMI) para a garantia de seguimento/rejeição dos sinais de interesse e uma realimentação de estados com ganhos escalonados para a estabilização do sistema em malha fechada. Além disso, é introduzido um laço de *anti-windup* estático com ganhos também escalonados para melhoria do desempenho do sistema quando ocorre saturação da amplitude do sinal de controle. Condições de síntese na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) são desenvolvidas para a garantia de que todas as trajetórias do sistema em malha fechada iniciadas em um determinado conjunto de condições iniciais admissíveis convergem para um conjunto terminal positivamente invariante no interior da região de operação linear do sistema, dado que as amplitudes dos sinais exógenos sejam limitadas. Problemas de otimização para obtenção dos ganhos da realimentação de estados e do laço de *anti-windup* são propostos visando maximização do conjunto de condições iniciais ou das amplitudes dos sinais a serem seguidos/rejeitados. Em uma segunda etapa, é proposto um procedimento de análise baseado em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros visando o aumento conjunto de condições iniciais admissíveis. Exemplos numéricos ilustram os métodos propostos.

**Palavras-chave:** Controle Robusto, Sistemas Lineares com Parâmetros Variantes, Saturação em Amplitude e em Taxa de Variação, Seguimento de Referências.

## ABSTRACT

This work addresses the tracking/rejection problem for Linear Parameter-Varying (LPV) systems, subject to control signal saturation both in amplitude and rate. In systems subject to rate saturation, a virtual model is assumed to describe the actuator dynamics. The proposed control strategy considers the use of Internal Model Principle (IMP) based controllers to ensure tracking/rejection of the signals of interest and gain scheduling state feedback to stabilize the closed-loop system. Besides that, a scheduled static anti-windup compensator is introduced to improve the system's performance when amplitude saturation of the control signal occurs. Design conditions in the form of linear matrix inequalities are developed to ensure that all the closed-loop system's trajectories beginning in a certain admissible set of initial conditions converge to a terminal positively invariant set inside the region of linear operation of the system, given that the amplitudes of the exogenous signals are limited. Optimization problems to obtain the state feedback and the anti-windup compensator gains are proposed aiming to maximize the set of admissible initial conditions or the set of admissible amplitudes of the signals to be tracked/rejected. In a second step, a analysis procedure based on parameter dependent Lyapunov functions is proposed, aiming to enhance the set of admissible initial conditions. Numerical examples illustrate the proposed methods.

**Keywords:** Robust Control, Linear Parameter Varying Systems, Amplitude and Rate Saturation, Reference Tracking.

# SUMÁRIO

<b>Lista de Ilustrações</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>10</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2 Preliminares e Revisão Bibliográfica</b>	<b>14</b>
2.1 Sistemas Sujeitos à Saturação	14
2.1.1 Saturação em Amplitude	14
2.1.2 Saturação em Amplitude e em Taxa de Variação	17
2.2 Seguimento de Referências e Rejeição de Perturbações	18
2.2.1 Princípio do Modelo Interno	19
2.2.2 Controle com Ação Integral	20
2.2.3 Controlador Ressonante	21
2.2.4 Controlador <i>Notch</i> -Ressonante	22
2.3 Abordagem por Conjuntos Terminais	23
2.4 Sistemas LPV	25
2.5 Comentários Finais	27
<b>3 Saturação em Amplitude</b>	<b>28</b>
3.1 Preliminares	28
3.2 Problema de Síntese	30
3.3 Problema de Análise	36
3.4 Exemplos Numéricos	41
3.4.1 Exemplo 1 - Sistema SISO	41
3.4.2 Exemplo 2 - Sistema MIMO	44
3.5 Considerações Finais	47
<b>4 Saturação em Amplitude e em Taxa de Variação</b>	<b>49</b>
4.1 Preliminares	49
4.2 Problema de Síntese	51
4.3 Problema de Análise	56
4.4 Exemplos Numéricos	59
4.4.1 Exemplo 1 - Sistema SISO	59
4.4.2 Exemplo 2 - Sistema MIMO	62

4.5	Considerações Finais.....	65
<b>5</b>	<b>Conclusão e Trabalhos Futuros</b>	<b>66</b>
	<b>Referências</b>	<b>69</b>



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Compensação <i>anti-windup</i> estática. . . . .	17
Figura 2	Diagrama do modelo atuador e planta com saturações em posição e velocidade. . . . .	18
Figura 3	Sistema em malha fechada com modelo interno. . . . .	19
Figura 4	Resposta em frequência de (16) com $\omega_0 = 1\text{rad/s}$ . . . . .	22
Figura 5	Comparação entre os controladores ressonante e <i>notch</i> -ressonante. . . . .	23
Figura 6	Plano $z_1(t) \times z_2(t)$ ilustrando a abordagem por conjuntos terminais. . . . .	25
Figura 7	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada. . . . .	29
Figura 8	Ilustração do plano $z_1(t) \times z_2(t)$ com os conjuntos utilizados para um dado instante de tempo $t$ . . . . .	32
Figura 9	Ilustração do plano $z_1(t) \times z_2(t)$ com os conjuntos utilizados. . . . .	38
Figura 10	Variação do parâmetro $\sigma_1(t)$ ao longo do tempo. . . . .	42
Figura 11	Plano $x(t) \times x_c(t)$ e trajetórias $z(t)$ iniciadas na fronteira de $\mathcal{Z}_0$ . . . . .	43
Figura 12	Saída do sistema em malha fechada e sinal de referência. . . . .	43
Figura 13	Sinal de controle e erro de seguimento percentual. . . . .	44
Figura 14	Produto $z(t)'Pz(t)$ ao longo do tempo. . . . .	45
Figura 15	Plano $x(t) \times x_c(t)$ e trajetórias $z(t)$ iniciadas na fronteira de $\mathcal{Z}_1$ . . . . .	45
Figura 16	Variação dos parâmetros $\sigma(t)$ ao longo do tempo. . . . .	46
Figura 17	Sinais de saída e de controle. . . . .	47
Figura 18	Sinais de erro e produto $z(t)'Pz(t)$ . . . . .	47
Figura 19	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada. . . . .	51
Figura 20	Espaço $x(t) \times x_c(t) \times x_a(t)$ e trajetórias $z(t)$ iniciadas na fronteira de $\Omega(P, 1)$ . . . . .	59
Figura 21	Espaço $x(t) \times x_c(t) \times x_a(t)$ e trajetórias $z(t)$ iniciadas na fronteira de $\Omega(\gamma_2 P, 1)$ . . . . .	60
Figura 22	Sinais de saída e de controle. . . . .	61
Figura 23	Erro de seguimento do sistema em malha fechada. . . . .	61
Figura 24	Cortes dos conjuntos obtidos através da síntese, da análise e das regiões $S(F_1, u_0)$ e $S(F_2, u_0)$ . . . . .	62
Figura 25	Sinais $u(t)$ e $x_a(t)$ para os casos I e III. . . . .	64
Figura 26	Sinais $\dot{x}_a(t)$ para os casos I e III. . . . .	64
Figura 27	Sinais de saída e controle. . . . .	65
Figura 28	Taxa de variação dos sinais de controle e sinais de erro. . . . .	65

## LISTA DE ABREVIATURAS

LIT	Linear Invariante no Tempo
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> ou Desigualdade Matricial Linear
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i> ou Linear com Parâmetros Variantes
MIMO	<i>Multiple-Input, Multiple-Output</i> ou Múltiplas-Entradas, Múltiplas-Saídas
PMI	Princípio do Modelo Interno
SISO	<i>Single-Input, Single-Output</i> ou Uma-Entrada, Uma-Saída

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano de ordem $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$v_{(i)}$	$i$ -ésimo componente do vetor $v$
$A_{(i)}$	$i$ -ésima linha da matriz $A$
$A_{(i,j)}$	elemento localizado na $i$ -ésima linha e $j$ -ésima coluna da matriz $A$
$A'$	transposta da matriz $A$
$I_n$	matriz identidade de ordem $n$
$0_{n \times m}$	matriz de elementos nulos com dimensão $n \times m$
$\text{diag}\{A, B\}$	matriz bloco-diagonal formada pelas matrizes $A$ e $B$
$\text{conv}\{A_j\}$	envelope convexo com vértices $A_j$
$\text{He}\{AW\}$	bloco simétrico $AW + W'A'$
$\Omega(P, \vartheta)$	elipsoide definido por $\Omega(P, \vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px \leq \vartheta\}$
*	termo/bloco simétrico na matriz
$ a $	valor absoluto de $a$
$\ v\ $	norma do vetor $v$
$U \setminus Y$	conjunto de elementos que pertencem a $U$ e não pertencem a $Y$ , i.e. diferença entre os conjuntos $U$ e $Y$
$\text{eig}_{\min}(A)$	menor autovalor da matriz $A$
$\text{eig}_{\max}(A)$	maior autovalor da matriz $A$
$\otimes$	produto de Kronecker

# 1 INTRODUÇÃO

O problema de seguimento/rejeição de referências/perturbações sempre foi de extrema relevância no universo da teoria de controle, tanto por parte da academia, quanto por parte da indústria. No contexto da Engenharia, diversos são os exemplos de aplicações que demandam a solução deste problema, incluindo: controle de velocidade de motores elétricos (ERROUISSI et al., 2017), seguimento de referências periódicas em fontes ininterruptas de energia (ZHOU et al., 2017), controle de vibração de plataformas *offshore* (ZHANG; HAN; ZHANG, 2017) e o problema de redução de esforços mecânicos em turbinas eólicas (BIANCHI; MANTZ; DE BATTISTA, 2007; CASTRO et al., 2017). Além da garantia de seguimento/rejeição, outros problemas inerentes a estes sistemas são variações paramétricas ou na frequência dos sinais de interesse e não-linearidades, como a saturação do sinal de controle.

Das diversas técnicas de controle apresentadas na literatura para garantia de seguimento/rejeição de sinais de forma robusta destacam-se os controladores baseados no princípio do modelo interno (PMI). Em linhas gerais, o PMI diz que o seguimento/rejeição em regime permanente com erro nulo será garantido se o controlador apresentar ganho infinito nas frequências que descrevem os sinais de interesse. O PMI se aplica tanto para sinais constantes (tipo salto ou degrau), onde o seguimento/rejeição será assegurado caso exista um integrador na malha de controle, quanto para sinais periódicos, caso o controlador apresente pares de polos complexos puramente imaginários com as mesmas frequências das componentes harmônicas que descrevem os sinais de referência/perturbação. No que diz respeito ao problema de seguimento/rejeição de sinais periódicos, estes controladores são conhecidos como controladores ressonantes (PEREIRA et al., 2014), pois apresentam magnitude infinita (ressonância) nas frequências dos sinais que se deseja seguir e/ou rejeitar. Contudo, caso ocorra alguma pequena variação nas frequências de interesse, o desempenho do sistema em malha fechada tende a cair bruscamente, resultando em um elevado erro de seguimento. Para aumentar a robustez do sistema a este tipo de situação, foi proposto em (FLORES; ECKHARD; SALTON, 2016) um controlador que introduz um filtro *notch* em série com um controlador ressonante, o chamado controlador *notch*-ressonante. Nesta abordagem, a magnitude da resposta em frequência do controlador segue infinita nas frequências nominais de projeto, porém o ganho continua elevado para uma faixa de frequências no entorno das frequências nominais, reduzindo assim a perda de desempenho em regime permanente.

Além disso, existem diversas aplicações em que o sistema a ser controlado não só é sujeito a variações nas frequências dos sinais de interesse, mas também apresenta um comportamento variante no tempo. Nesse contexto, dependente da estrutura do sistema, o mesmo pode ser descrito através de um modelo linear com parâmetros variantes (do inglês *Linear Parameter-Varying* - LPV) (SHAMMA, 1988). A modelagem LPV tam-

bém permite a caracterização de alguns tipos de não-linearidades através de uma dependência paramétrica, resultando nos chamados modelos quasi-LPV. O problema de seguimento/rejeição de sinais em sistemas LPV/quasi-LPV impõe um nível de complexidade adicional em relação aos sistemas lineares invariantes no tempo (LIT) tradicionalmente abordados, visto que é necessário garantir, de forma robusta, a estabilidade e o desempenho de seguimento do sistema em malha fechada para toda a região de validade do modelo, i.e. para todos os possíveis valores dos parâmetros variantes. A abordagem mais usual para controle de sistemas LPV/quasi-LPV são os chamados controlares escalonados, onde a estrutura de controle é alterada seguindo a mesma dependência paramétrica da planta.

Ademais, é importante lembrar que os atuadores reais usualmente apresentam diversos tipos de limitação, tanto por questões físicas (construtivas), quanto por questões de segurança. Essas limitações podem ser representadas como restrições nas amplitudes e/ou nas taxas de variação dos sinais entregues à planta. Quando esses limites são violados, o sistema passa a se comportar como se não existisse um controlador, resultando em perda de desempenho, surgimento de trajetórias indesejadas ou ciclos-limite e, em casos mais extremos, na instabilidade do sistema em malha fechada (TARBOURIECH et al., 2011). Com relação à saturação em amplitude, a maneira mais usual de lidar com os efeitos é incluindo um compensador *anti-windup* no laço de controle, de modo que a diferença entre o sinal de controle efetivamente entregue à planta e o calculado é utilizada na correção dos estados do controlador (TARBOURIECH; TURNER, 2009). Já com relação à saturação na taxa de variação do sinal de controle, o método mais comumente empregado é a introdução de um modelo virtual de primeira ordem para a dinâmica do atuador, onde a estabilidade é garantida a partir de uma abordagem de setor com saturações encadeadas (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006). Com relação ao problema de seguimento/rejeição em sistemas sujeitos à saturação, é importante ressaltar que o PMI deixa de ser garantia suficiente para a solução do problema, uma vez que pode não existir amplitude de sinal de controle suficiente para que a saída siga os sinais de interesse (BAZANELLA; GOMES DA SILVA JR., 2005). Neste cenário, o seguimento/rejeição só será garantido pelo PMI caso não ocorra saturação em regime permanente, restringindo assim a gama de sinais exógenos (referências e perturbações) admissíveis. Esse problema é tratado em (FLORES, 2012) para sistemas sujeitos à saturação em amplitude. O autor propõe um método de síntese de controladores baseados no PMI e de laços de *anti-windup* tais que as trajetórias do sistema em malha fechada convergem assintoticamente para um conjunto terminal positivamente invariante contido na região de operação linear do sistemas, contanto que sejam respeitados determinados limites de amplitude dos sinais exógenos e de condições iniciais.

É no contexto destes problemas que este trabalho se insere, propondo um método sistemático de síntese de controladores e compensadores *anti-windup* escalonados para seguimentos/rejeição de sinais contínuos e periódicos em sistemas LPV com atuadores saturantes, tanto em amplitude, quanto em taxa de variação. Dentre os objetivos deste trabalho, destacam-se:

- Obtenção de condições de síntese na forma de desigualdades matriciais para a síntese simultânea de um controlador estabilizante e um compensador *anti-windup*, ambos escalonados, para sistemas LPV de tempo contínuo, tanto para os casos de saturação apenas em amplitude, quanto para o caso em que o atuador possui restrições em amplitude e também em taxa de variação;

- Caracterização dos conjuntos de condições iniciais e sinais exógenos admissíveis para os quais o seguimento/rejeição é garantido com um certo nível de desempenho;
- Obtenção de condições menos conservadoras para estimação de um conjunto de condições iniciais admissíveis a partir dos resultados obtidos na etapa de síntese.

Este trabalho apresenta a seguinte estrutura: no Capítulo 2 serão apresentados alguns conceitos básicos necessários para a compreensão do trabalho, em conjunto com uma revisão bibliográfica dos temas mais relevantes tratados; o Capítulo 3 apresenta uma metodologia para solução do problema de seguimento em sistemas LPV sujeitos à saturação em amplitude do sinal de controle, enquanto o Capítulo 4 estende a metodologia proposta para o problema de saturação na taxa de variação do sinal de controle; por fim, o Capítulo 5 apresenta uma síntese dos resultados obtidos, conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 PRELIMINARES E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão apresentadas uma revisão bibliográfica e uma série de conceitos básicos referentes aos tópicos abordados na sequência deste trabalho, mais especificamente: sistemas sujeitos à saturação em amplitude e em taxa de variação, onde serão apresentadas abordagens por não-linearidade de setor e uma breve discussão sobre técnicas de compensação *anti-windup*; seguimento de referências e rejeição de perturbações, onde serão apresentadas técnicas de controle baseadas no PMI; abordagem por conjuntos terminais (*ultimate boundedness*), um método baseado na teoria de conjuntos invariantes, que visa garantir a convergência das trajetórias do sistema para um dado conjunto terminal; e sistemas LPV, onde será apresentada uma breve descrição desta classe de sistemas variantes no tempo, bem como uma introdução à técnica de controle via ganhos escalonados.

### 2.1 Sistemas Sujeitos à Saturação

Nesta seção serão introduzidos alguns conceitos importantes com relação aos efeitos de saturação e de como esses efeitos podem ser incorporados na análise do sistema em malha fechada. Além disso, será apresentada uma breve discussão sobre o projeto de compensadores *anti-windup* estáticos.

#### 2.1.1 Saturação em Amplitude

A saturação em amplitude (também conhecida como saturação de posição) é normalmente uma condição inerente do atuador, que é incapaz de entregar à planta um sinal maior ou menor que determinados limites. Este tipo de comportamento pode causar degradação no desempenho do sistema em malha fechada e até mesmo levar à instabilidade (KHALIL, 2002; TARBOURIECH et al., 2011).

##### 2.1.1.1 Formulação do Problema

Considere o sistema invariante no tempo descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bsat_{u_0}(u(t)) + B_d d(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados da planta,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas e  $d(t) \in \mathbb{R}^l$  é um vetor de sinais exógenos. As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C$  são constantes e tem dimensões apropriadas. A função não-linear  $sat_{u_0}(u(t))$  em (1) denota uma saturação descentralizada e simétrica, dada por

$$sat_{u_{0(i)}}(u_{(i)}(t)) \triangleq sgn(u_{(i)}(t)) \min(|u_{(i)}(t)|, u_{0(i)}), \quad (2)$$

$i = 1, \dots, m$ , onde  $u_{0(i)} > 0$  é o  $i$ -ésimo limite de saturação do atuador.

Assuma agora uma realimentação estática de estados na forma

$$u(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

que resulta em um comportamento em malha fechada dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \text{sat}_{u_0}(Fx(t)) + B_d d(t). \quad (3)$$

Observe que não há modificação no sistema (3) caso o sinal  $BFx(t)$  seja somado e subtraído do lado direito da equação, de forma que

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + B \text{sat}_{u_0}(Fx(t)) - BFx(t) + B_d d(t). \quad (4)$$

Agora, é possível definir uma não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada na forma  $\psi_{u_0}(u(t)) = \text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t)$ , ou seja,

$$\psi_{u_{0(i)}}(u_{(i)}(t)) = \begin{cases} u_{0(i)} - u_{(i)}(t), & \text{se } u_{(i)}(t) > u_{0(i)} \\ 0, & \text{se } -u_{0(i)} \leq u_{(i)}(t) \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, m \\ -u_{0(i)} + u_{(i)}(t), & \text{se } u_{(i)}(t) < -u_{0(i)} \end{cases} \quad (5)$$

tal que o sistema (4) pode ser reescrito como

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + B\psi_{u_0}(Fx(t)) + B_d d(t). \quad (6)$$

Finalmente, é possível determinar a chamada região de operação linear (ou simplesmente região linear) do sistema (6), descrita por

$$S(F, u_0) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n; -u_{0(i)} \leq F_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)}, \quad i = 1, \dots, m\}. \quad (7)$$

No interior da região  $S(F, u_0)$ , o valor de  $F_{(i)}x(t)$  não viola os limites de controle  $-u_{0(i)}$  e  $u_{0(i)}$ , fazendo com que o sistema (6) se comporte como um sistema linear. Algumas propriedades importantes sobre a região linear são apresentadas em (TARBOURIECH et al., 2011):

- i) Sem nenhum tipo de suposição adicional, não há absolutamente nenhuma garantia de que as trajetórias do sistemas inicializadas em  $S(F, u_0)$  permaneçam confinadas a este conjunto;
- ii) A região linear é simétrica se os limites de saturação forem simétricos;
- iii)  $S(F, u_0)$  é compacta se  $m = n$  e não-limitada em alguma direção caso  $m < n$ ;
- iv) Se  $(A + BF)$  é Hurwitz<sup>1</sup>, então sempre será possível calcular conjuntos positivamente invariantes contidos no interior de  $S(F, u_0)$ .

Baseado em i), segue que não há garantias de que as trajetórias do sistema permaneçam no interior da região linear, mesmo que iniciadas dentro dela. Neste caso, condições adicionais devem ser impostas caso o problema de interesse seja garantir que as trajetórias do sistema fiquem confinadas nesta região. Uma solução para este problema é apresentada em (TARBOURIECH et al., 2011) a partir do uso de conjuntos positivamente invariantes gerados com base na propriedade iv). Além disso, ii) e iii) descrevem propriedades geométricas desta região, servindo de base na solução de problemas de inclusão elipsoidal. Essas propriedades são fundamentais para a descrição da abordagem baseada em conjuntos terminais que será descrita na Seção 2.3.

<sup>1</sup>Todos os autovalores de  $(A + BF)$  estão estritamente contidos no semi-plano esquerdo do plano complexo.



### 2.1.1.2 Abordagem por Não-Linearidade de Setor

Para o caso particular em que a saturação é modelada como uma não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada, conforme descrito em (5), o seguinte lema é verificado (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005):

**Lema 1** Se  $v$  e  $w$  são elementos de  $S(v, w, v_0)$ , onde

$$S(v, w, v_0) = \{v \in \mathbb{R}^m; w \in \mathbb{R}^m; -v_0 \leq v - w \leq v_0\}, \quad (8)$$

então, a não-linearidade  $\psi_{v_0}(v)$  satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\psi_{v_0}(v)'T(\psi_{v_0}(v) + w) \leq 0 \quad (9)$$

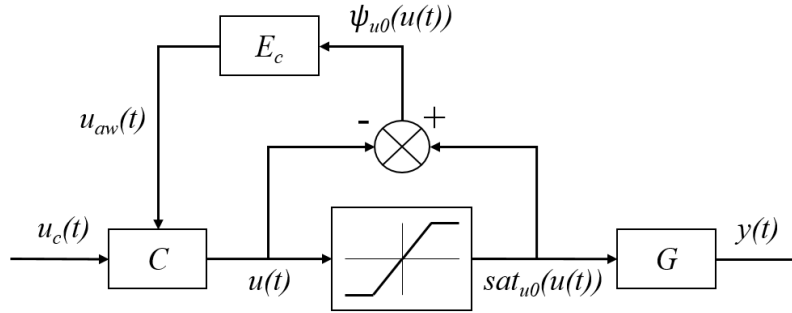
para qualquer matriz diagonal positiva definida  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

O Lema 1 apresenta a chamada condição de setor modificada ou generalizada. Do ponto de vista de análise de estabilidade, os resultados obtidos a partir da aplicação do Lema 1 são menos conservadores do que os obtidos pela condição de setor clássica (KHALIL, 2002), pois a escolha de  $v$ ,  $w$  e  $T$  fornece graus de liberdade adicionais. Note que a condição de setor clássica pode ser recuperada a partir da condição de setor generalizada assumindo  $v = Fx(t)$ ,  $w = \Lambda F$  e  $T = I_m$ , onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal qualquer.

### 2.1.1.3 Problema de Anti-Windup

Classicamente, o fenômeno de *windup* está em geral relacionado com a ocorrência de saturação do sinal de controle em controladores com ação integral (TURNER; HERRMAN; POSTLETHWAITE, 2007). Dependendo do sinal do erro, a saturação faz com que ocorra um expressivo aumento no valor da ação integral, muito maior do que o que seria atingido caso o sistema estivesse operando na região linear. Então, quando a saturação do sinal de controle cessa, esse “excesso de energia” acumulado na ação integral precisa ser dissipado. Na maioria das vezes, essa dissipação se manifesta na forma de elevados tempos de acomodação e grande sobressinal, degradando o desempenho transitório do sistema (DOYLE; SMITH; ENNS, 1987). Nos dias de hoje, essa abordagem não se restringe apenas ao caso de controladores com ação integral, mas se estende a qualquer tipo de correção nos estados do sistema a partir da diferença entre o sinal de controle calculado pelo controlador e o sinal de controle saturado (TURNER; HERRMAN; POSTLETHWAITE, 2007). Para minimizar estes efeitos em regime transitório, normalmente são utilizados os chamados compensadores *anti-windup*.

Em (TARBOURIECH; TURNER, 2009) é apresentada uma visão geral sobre técnicas de compensação *anti-windup*, incluindo as vantagens de cada método e suas aplicações. A compensação pode se dar de forma dinâmica, onde um controlador dinâmico gera o sinal de compensação, ou de forma estática, onde o compensador é apenas um ganho. Com relação aos compensadores estáticos, usualmente eles atuam diretamente sobre a não-linearidade  $\psi_{u_0}(u(t))$ , fornecendo um sinal de saída que pode ou ser somado à entrada do controlador, ou ainda servir como uma entrada exógena para o bloco de controle. A Figura 1 descreve uma típica estrutura de compensação *anti-windup* estática, onde  $C$  representa o controlador,  $u_c(t)$  representa a entrada do controlador,  $G$  representa a planta e  $E_c$  representa o ganho do compensador *anti-windup*. O sinal de compensação  $u_{aw}(t)$  pode alterar diretamente a entrada do controlador (somado a  $u_c(t)$ ) ou ser modelado como uma entrada exógena que corrige diretamente os estados do controlador, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Compensação *anti-windup* estática.

Observe que devido à construção do compensador *anti-windup*, este somente irá agir no sistema enquanto ocorrer saturação no sinal de controle. Note que dentro da região linear  $\psi_{u0}(t) = 0$  de tal forma que a dinâmica do sistema em malha fechada é regulada pelo controlador nominal  $C$ .

### 2.1.2 Saturação em Amplitude e em Taxa de Variação

Além da saturação em amplitude, atuadores reais podem apresentar outros tipos de limitações, como restrições na taxa de variação do sinal entregue à planta, conhecida como saturação em taxa de variação (ou saturação de velocidade). Assim como a saturação em amplitude, a saturação em taxa de variação pode causar degradação no desempenho transitório do sistema malha fechada e, inclusive, levá-lo à instabilidade.

O tópico de sistemas sujeitos à saturação de posição e de velocidade é menos explorado na literatura, alguns exemplos de trabalhos nesta linha de pesquisa incluem: (KAPILA; PAN; QUEIROZ, 1999; KAPILA; HADDAD, 2000; GOMES DA SILVA JR. et al., 2008; PALMEIRA, 2015). Geralmente, o atuador é modelado como um sistema de primeira ordem com saturação no seu sinal de entrada (representando a saturação de posição) e na dinâmica do seu estado (representando a saturação de velocidade). Este tipo de modelo já foi debatido na literatura e é conhecido como *position-feedback-type model with speed limitation*, conforme apresentado em (BATEMAN; LIN, 2003; GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003; LIN, 1997), e tem como vantagem a possibilidade de tratar ambos os tipos de saturação considerando apenas restrições de amplitude no laço de controle (TARBOURIECH; GARCIA, 2002).

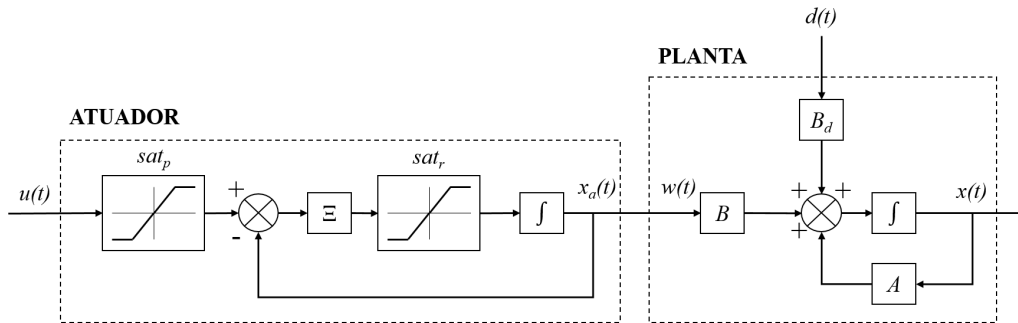
Em (PALMEIRA et al., 2016), é considerado um atuador composto por duas saturações encadeadas, permitindo a utilização da formulação proposta em (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006). O modelo do sistema atuador e planta pode ser descrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) + B_d d(t) \\ \dot{x}_a(t) = sat_r(-\Xi x_a(t) + \Xi sat_p(u(t))) \\ w(t) = x_a(t), \end{cases} \quad (10)$$

onde  $\Xi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz diagonal tal que  $\Xi_{(i,i)} = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  onde  $\xi_i$  está associado à largura de banda do atuador na  $i$ -ésima entrada da planta,  $x_a(t)$  é o vetor de estados do atuador,  $w(t)$  é o efetivo sinal de entrada entregue à entrada da planta,  $u(t)$  é o sinal de controle calculado pelo controlador,  $d(t)$  é um sinal de perturbação exógeno e  $sat_p$  e  $sat_r$  representam as restrições de saturação de posição e velocidade, respectivamente. A Figura 2 representa um diagrama do modelo utilizado.

Note que, devido à ocorrência de dois tipos de saturação no sistema, é necessário que

Figura 2: Diagrama do modelo atuador e planta com saturações em posição e velocidade.



as regiões de operação linear de cada uma destas saturações sejam levadas em conta para que seja definida a região de operação linear do sistema.

Considere uma realimentação de estados estabilizante na forma

$$u(t) = Fz(t) = [F_s \quad F_a] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

então, a região linear para a saturação em amplitude é tal como definida em (7). Já a região linear para a saturação em taxa de variação pode ser descrita como:

$$S(F, \Xi, u_r) = \{z(t) \in \mathbb{R}^{(n+m)}; -u_{r(i)} \leq ([0_{1 \times n} \quad -\Xi_{(i)}] + \Xi_{(i)}F)z(t) \leq u_{r(i)}\}, \quad (12)$$

$i = 1, \dots, m$ , onde  $u_{r(i)} > 0$  é o  $i$ -ésimo limite de saturação em taxa de variação do atuador.

Portanto, observe que a região de operação totalmente linear do sistema é aquela que atende (7) e (12) ao mesmo tempo, i.e.  $S(F, u_0) \cap S(F, \Xi, u_r)$ .

A compensação *anti-windup* para o problema de saturação em amplitude pode ser realizada da mesma forma que a apresentada na Seção 2.1.1.3. Contudo, com relação à compensação *anti-windup* para a não-linearidade de velocidade, existem alguns problemas. O primeiro é uma questão física: a dinâmica do atuador é intrínseca a ele, portanto, normalmente é impossível realizar uma correção de forma direta, tal qual ocorre no problema de saturação de posição. A segunda envolve a questão do modelo virtual: até seria possível realizar uma compensação virtual da dinâmica do atuador, porém, esta não apresentaria muito sentido físico. Na literatura existem trabalhos que apresentam soluções para a compensação *anti-windup* em sistemas que apresentam não-linearidades de posição e velocidade, como, por exemplo, (GALEANI et al., 2008), onde os autores propõem um modelo diferente para descrever as saturações e realizam a compensação *anti-windup* tanto na saída, quanto na entrada do controlador, com base na diferença entre o sinal calculado e o saturado para ambas as não-linearidades. Por outro lado, a formulação proposta lida apenas com a síntese do compensador *anti-windup*, assumindo que o controlador seja previamente calculado.

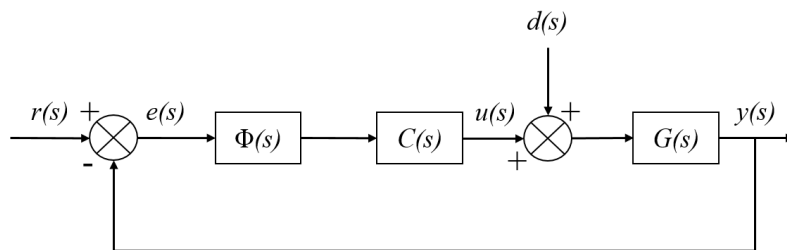
## 2.2 Seguimento de Referências e Rejeição de Perturbações

Nesta seção serão apresentadas três abordagens de controle que serão utilizadas ao longo deste trabalho, todas baseadas no PMI, sendo a primeira delas para seguimento/rejeição de sinais do tipo degrau, a segunda voltada para sinais periódicos e a terceira, que na realidade é uma extensão da segunda abordagem, focada em sinais periódicos com períodos incertos e/ou variantes no tempo.

### 2.2.1 Princípio do Modelo Interno

O PMI foi introduzido na década de 70 (CHEN, 1970; FRANCIS; WONHAM, 1976) e tem como ideia fundamental a geração, no interior da malha de controle, de um sinal com as mesmas características dos sinais a serem seguidos e/ou rejeitados. O sistema em malha fechada deve conter todos os modos persistentes (que não tendem a zero em regime permanente) dos sinais de referências e perturbações a fim de garantir o perfeito seguimento/rejeição. Considere a topologia de controle apresentada na Figura 3, onde  $C(s)$  é um controlador que garante a estabilidade do sistema em malha fechada,  $G(s)$  é o sistema a ser controlado,  $r(s)$  é um sinal exógeno de referência,  $d(s)$  é um sinal exógeno de perturbação,  $y(s)$  é a saída da planta e  $e(s)$  é o sinal de erro.

Figura 3: Sistema em malha fechada com modelo interno.



Os sinais  $r(s)$  e  $d(s)$  podem ser descritos como

$$r(s) = \frac{\phi_{rq}(s)}{\phi_r(s)\phi_{re}(s)} \text{ e } d(s) = \frac{\phi_{dq}(s)}{\phi_d(s)\phi_{de}(s)}, \quad (13)$$

onde  $\phi_r(s)$  e  $\phi_d(s)$  são polinômios com raízes com parte real maior ou igual a zero,  $\phi_{re}(s)$  e  $\phi_{de}(s)$  são polinômios com raízes que apresentam parte real negativa e  $\phi_{rq}(s)$  e  $\phi_{dq}(s)$  são polinômios quaisquer que correspondem aos numeradores de  $r(s)$  e  $d(s)$ , respectivamente. Defina  $\phi(s)$  como sendo o mínimo múltiplo comum entre os polinômios  $\phi_r(s)$  e  $\phi_d(s)$ , então, segundo (FRANCIS; WONHAM, 1976), garante-se o seguimento de  $r(s)$  e a rejeição de  $d(s)$  se a função de transferência  $\Phi(s) = 1/\phi(s)$  for inserida no caminho direto do laço de controle.

Suponha que  $C(s)$  e  $G(s)$  também possam ser escritos em função de polinômios em  $s$ , na forma

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \text{ e } G(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}.$$

Com base na Figura 3 é possível mostrar que o sinal de erro pode ser descrito como função do sinal de referência

$$e(s) = \frac{1}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)} r(s) = \frac{D_c(s)D_p(s)}{\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \frac{\phi_{rq}(s)}{\phi_{re}(s)}.$$

Note que todas as raízes do denominador da expressão do erro pertencem ao semi-plano esquerdo aberto do plano complexo, uma vez que os modos de  $\phi_e(s)$  são estáveis e o controlador  $C(s)$  garante a estabilidade do sistema em malha fechada, i.e. as raízes de  $\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  possuem parte real negativa. Portanto, a partir do Teorema do Valor Final segue que o erro em regime permanente do sistema em malha fechada é dado por

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \{s e(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s \frac{D_c(s)D_p(s)}{\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} \frac{\phi_{rq}(s)}{\phi_{re}(s)} \right\} = 0.$$

Também é possível analisar o PMI a partir da resposta em frequência do sistema em malha fechada a partir das funções de transferência da referência para a saída ( $T_r(s)$ ) e da perturbação para a saída ( $T_d(s)$ ). Considerando ainda a configuração apresentada na Figura 3, essas funções de transferência são descritas como

$$T_r(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\Phi(s)C(s)G(s)}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)},$$

$$T_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{G(s)}{1 + \Phi(s)C(s)G(s)}.$$

Assumindo  $r(s)$  e  $d(s)$  como sendo sinais puramente senoidais de frequência  $\omega_0$ , então  $\phi(s) = s^2 + \omega_0^2$  implica em  $|\Phi(j\omega_0)| = \infty$ . Se não há cancelamento de polos e zeros entre  $\Phi(s)$  e  $G(s)$ , então a introdução de  $\Phi(s)$  no caminho direto da malha de controle resulta em  $|\Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)| = \infty$ . Por consequência

$$|T_r(j\omega_0)| = \left| \frac{\Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)} \right| = 1, \quad \angle T_r(j\omega_0) = 0^\circ,$$

$$|T_d(j\omega_0)| = \left| \frac{G(j\omega_0)}{1 + \Phi(j\omega_0)C(j\omega_0)G(j\omega_0)} \right| = 0.$$

Como o módulo de  $T_r(s)$  é unitário para uma dada frequência  $\omega_0$ , a componente do sinal de referência nesta mesma frequência será replicada na saída do sistema, o que garante o perfeito seguimento desta referência. Com relação à perturbação, visto que o módulo de  $T_d(j\omega_0)$  é nulo, então os efeitos da componente de frequência  $\omega_0$  do sinal de perturbação na saída são anulados, garantindo a perfeita rejeição deste sinal. Uma vez que a magnitude de  $T_d(j\omega_0)$  é nula, o valor da fase não é relevante.

No caso de sistemas MIMO (Múltiplas-Entradas, Múltiplas-Saídas, do inglês *Multiple-Input, Multiple-Output* - MIMO) é necessário que  $\Phi(s)$  seja inserido em cada um dos  $p$  canais de erro de modo a garantir que o PMI seja verificado (FRANCIS; WONHAM, 1976).

Diversas topologias de controle se baseiam no PMI para garantir perfeito seguimento e/ou rejeição de referências/perturbações. Dentre as mais comuns estão: o controle com ação integral (CHEN, 1970), que tem como objetivo garantir seguimento/rejeição para sinais do tipo degrau e será tratado na Seção 2.2.2; e o controlador ressonante (CHEN, 1970), que é uma aplicação do PMI para sinais periódicos, abordado na Seção 2.2.3. A Seção 2.2.4 apresentará uma versão modificada da estrutura ressonante tradicional, que visa atuar em casos em que a frequência  $\omega_0$  é incerta e/ou variante no tempo.

## 2.2.2 Controle com Ação Integral

O controle com ação integral é provavelmente a forma mais clássica de aplicação do PMI e visa garantir o perfeito seguimento/rejeição de sinais do tipo salto ou degrau, (i.e. constantes). Um sinal do tipo degrau pode ser descrito na forma

$$r(s) = \frac{a}{s},$$

onde  $a$  é um termo escalar que determina a amplitude do sinal.

Como  $r(s)$  possui apenas um modo marginalmente estável ( $\phi_r(s) = s$ ), de acordo com o PMI, para garantir o perfeito seguimento/rejeição do sinal  $r(s)$ , basta inserir no caminho direto do laço de controle o termo

$$\Phi(s) = \frac{1}{s}, \quad (14)$$

que nada mais é do que um integrador, o que explica a origem do nome controle com ação integral.

Note que (14) pode ser descrito no espaço de estados como

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t), \quad (15)$$

onde (CHEN, 1970)

$$A_c = \text{diag}\{\overbrace{\Gamma, \Gamma, \dots, \Gamma}^{p\text{-upla}}\}, \quad B_c = \text{diag}\{\overbrace{\Upsilon, \Upsilon, \dots, \Upsilon}^{p\text{-upla}}\},$$

com

$$\Gamma = 0 \text{ e } \Upsilon = 1.$$

É importante ressaltar que esta abordagem resulta em um sistema de dimensão  $p$  devido à inserção do compensador dinâmico  $\dot{x}_{c(i)}(t) = \Gamma x_{c(i)}(t) + \Upsilon e_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  em cada um dos canais de erro.

### 2.2.3 Controlador Ressonante

Um sinal com características senoidais e de frequência  $\omega_0$  pode ser descrito por

$$r(s) = \frac{a_1 \omega_0 + a_2 s}{s^2 + \omega_0^2},$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são escalares que determinam a amplitude e a fase da senoide.

Então, para atender o PMI, o termo  $\Phi(s)$  deve apresentar um par de raízes puramente imaginárias em  $r_1 = j\omega_0$  e  $r_2 = -j\omega_0$ , ou seja,

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (16)$$

Quando há interesse no seguimento de diversas harmônicas e/ou frequências distintas, o termo  $\Phi(s)$  deve incorporar um par de polos imaginários puros referentes a cada uma destas, ou seja,

$$\Phi(s) = \prod_{k=1}^{n_h} \frac{1}{s^2 + \omega_k^2}, \quad (17)$$

onde  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_h$ , representa as  $n_h$  frequências de interesse.

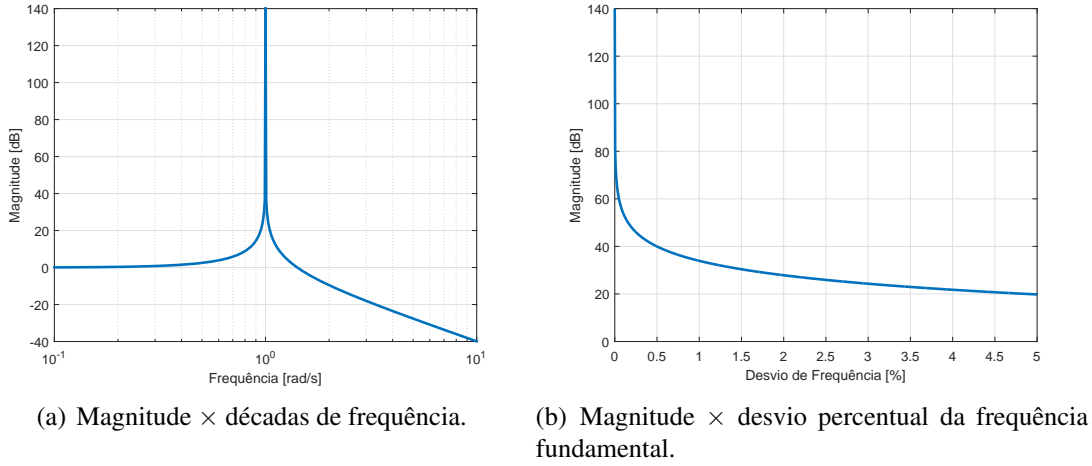
Considerando uma abordagem no espaço de estados, a função de transferência  $\Phi(s)$  pode ser realizada através do controlador dinâmico (15) com matrizes descritas como (PEREIRA et al., 2014)

$$A_{r_k} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_k \\ -\omega_k & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\Gamma = \text{diag}\{A_{r_1}, A_{r_2}, \dots, A_{r_{n_h}}\}, \quad \Upsilon = [B_r' \quad B_r' \quad \dots \quad B_r']',$$

$$A_c = \text{diag}\{\overbrace{\Gamma, \Gamma, \dots, \Gamma}^{p\text{-upla}}\}, \quad B_c = \text{diag}\{\overbrace{\Upsilon, \Upsilon, \dots, \Upsilon}^{p\text{-upla}}\},$$

considerando o caso em que se tem interesse de seguimento/rejeição de  $n_h$  frequências  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n_h$ , resultando em um sistema de dimensão  $2n_h p$ .

Figura 4: Resposta em frequência de (16) com  $\omega_0 = 1$  rad/s.

A Figura 5(a) apresenta um exemplo da magnitude da resposta em frequência de (16) com  $\omega_0 = 1$  rad/s.

Note que o ganho do controlador tende a infinito na frequência 1 rad/s. Contudo, a magnitude decresce bruscamente para pequenas variações de frequência no entorno de 1 rad/s. A Figura 5(b) ilustra essa queda do ganho em função da variação percentual da frequência em relação a frequência fundamental  $\omega_0 = 1$  rad/s. Observe que para uma variação de apenas 1.5%, o ganho do controlador cai de infinito para cerca de 30dB, o que resulta em uma brusca perda de desempenho de seguimento/rejeição. No intuito de reduzir os efeitos da perda de desempenho com a variação na frequência, foi proposta uma modificação do controlador ressonante, chamada de controlador *notch*-ressonante (FLORES; ECKHARD; SALTON, 2016).

## 2.2.4 Controlador *Notch*-Ressonante

O controlador *notch*-ressonante é uma modificação da abordagem ressonante tradicional. O objetivo deste controlador é garantir o PMI para as frequências de projeto  $\omega_k$  e ao mesmo tempo reduzir os efeitos de perda de desempenho por pequenas variações de frequência.

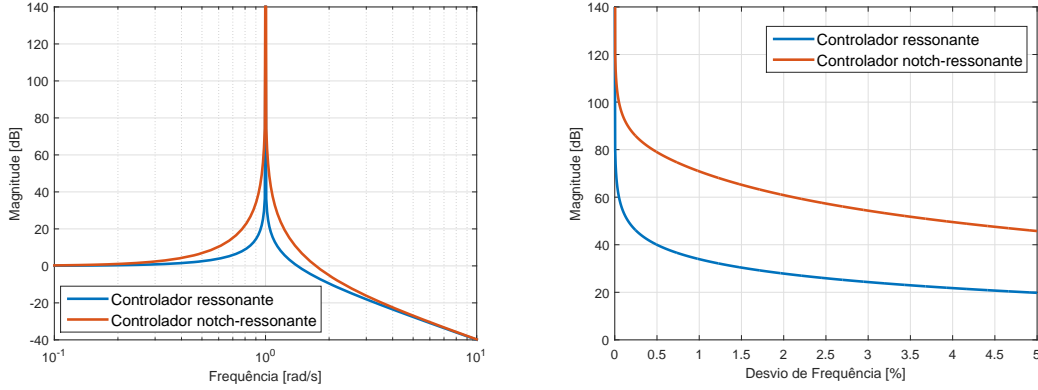
Para tal, foi proposta uma implementação em série de uma estrutura ressonante tradicional com um filtro *notch*, também conhecido como filtro rejeita-faixa, ambos sintonizados nas mesmas frequências (FLORES; ECKHARD; SALTON, 2016). Como resultado, as regiões de alto ganho dos modos ressonantes são “alargadas”, atendendo as frequências adjacentes com magnitudes mais elevadas quando comparado ao controlador ressonante. Ao mesmo tempo, a atenuação em altas frequências (*roll-off frequency*) da estrutura ressonante tradicional é mantida. O controlador *notch*-ressonante pode ser descrito através do produto das funções de transferência do filtro *notch* e do controlador ressonante, conforme a seguir

$$\Psi(s) = \prod_{k=1}^{n_h} \underbrace{\frac{s^2 + 2\zeta_z \omega_k s + \omega_k^2}{s^2 + 2\zeta_h \omega_k s + \omega_k^2}}_{\text{filtro notch}} \cdot \underbrace{\frac{\omega_k^2}{s^2 + \omega_k^2}}_{\text{c. ressonante}} \quad (19)$$

A Figura 5 apresenta a comparação da magnitude entre o controlador ressonante e o controlador *notch*-ressonante com  $\zeta_h = 0.01$  e  $\zeta_z = 0.99$ , ambos sintonizados para  $\omega_0 = 1$

rad/s.

Figura 5: Comparação entre os controladores ressonante e *notch*-ressonante.



(a) Magnitude  $\times$  décadas de frequência.

(b) Magnitude  $\times$  desvio percentual da frequência fundamental.

Observe que o controlador *notch*-ressonante apresenta um ganho de mais de 60dB para um desvio de 1.5%, enquanto o controlador ressonante apresenta em torno de 30dB para o mesmo desvio. Esta característica da resposta em frequência torna o controlador *notch*-ressonante mais propício para aplicações onde existe a possibilidade de as frequências de interesse sofrerem pequenas variações, pois, conforme apresentado em (FLORES; ECKHARD; SALTON, 2016), este aumento no ganho no entorno das frequências nominais implica em uma redução do erro em regime permanente.

Considerando uma abordagem no espaço de estados, o controlador *notch*-ressonante pode ser implementado com a estrutura (15), atendendo os múltiplos canais de erro da mesma forma que (2.2.2), mas com matrizes descritas por

$$A_{n_k} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_k \\ -\omega_k & -2\zeta_h\omega_k \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_{n_k} = [0 \quad 2\omega_k(\zeta_z - \zeta_h)], \quad D_n = 1, \quad (20)$$

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{r_k} & B_r C_{n_k} \\ 0_{2 \times 2} & A_{n_k} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_r D_n \\ B_n \end{bmatrix},$$

com

$$\Gamma = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_{n_h}\}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \bar{B}' & \bar{B}' & \dots & \bar{B}' \end{bmatrix}',$$

$$A_c = \text{diag}\{\overbrace{\Gamma, \Gamma, \dots, \Gamma}^{p\text{-upla}}\}, \quad B_c = \text{diag}\{\overbrace{\Upsilon, \Upsilon, \dots, \Upsilon}^{p\text{-upla}}\},$$

onde  $A_{r_k}$  e  $B_r$  são descritos tal qual em (18) e  $k = 1, \dots, n_h$ .

Em contrapartida ao melhor desempenho para as frequências adjacentes, o controlador *notch*-ressonante faz uso de um sistema de dimensão maior, no caso  $4n_h p$ , o dobro da dimensão do controlador ressonante, isto por que agora é necessário também contabilizar os estados relacionados à realização do filtro *notch*.

### 2.3 Abordagem por Conjuntos Terminais

A abordagem por conjuntos terminais (ou abordagem por conjuntos ultimamente limitados ou ainda *ultimate boundedness approach*) (KHALIL, 2002) consiste na garantia



de que as trajetórias do sistema em malha fechada serão uniformemente ultimamente limitadas em amplitude, conforme apresentado na definição a seguir.

**Definição 2.3.1** (KHALIL, 2002) *As soluções de  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  são ditas uniformemente ultimamente limitadas por um limitante terminal (ultimate bound)  $b$  se existirem constantes positivas  $b$  e  $c$  tais que, para todo  $a \in (0, c)$ , existe  $T \geq 0$  satisfazendo*

$$\|x(t_0)\| < a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T. \quad (21)$$

*Elas são ditas globalmente uniformemente ultimamente limitadas se (21) for válida para um valor arbitrariamente grande de  $a$ .*

A abordagem terminal é de particular interesse quando o sistema está sujeito a sinais exógenos que não assumem um valor constante em regime permanente, e.g. referências ou perturbações periódicas. Neste caso, há também que se considerar que as trajetórias do sistema em regime permanente serão variantes no tempo. Logo, não é mais possível estabelecer um ponto de equilíbrio, mas sim uma trajetória de equilíbrio para os estados do sistema. Contudo, a caracterização desta trajetória é não trivial e depende dos sinais exógenos atuando no sistema. Nesse contexto, a abordagem por conjuntos terminais pode ser utilizada na análise da estabilidade do sistema, garantindo que as trajetórias iniciadas em uma dada região terão um limitante superior  $b$  finito em regime permanente.

Em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009), esta abordagem foi empregada na solução do problema de seguimento/rejeição de sinais periódicos em sistemas com saturação. A solução apresentada nesta referência considera os seguintes conjuntos:

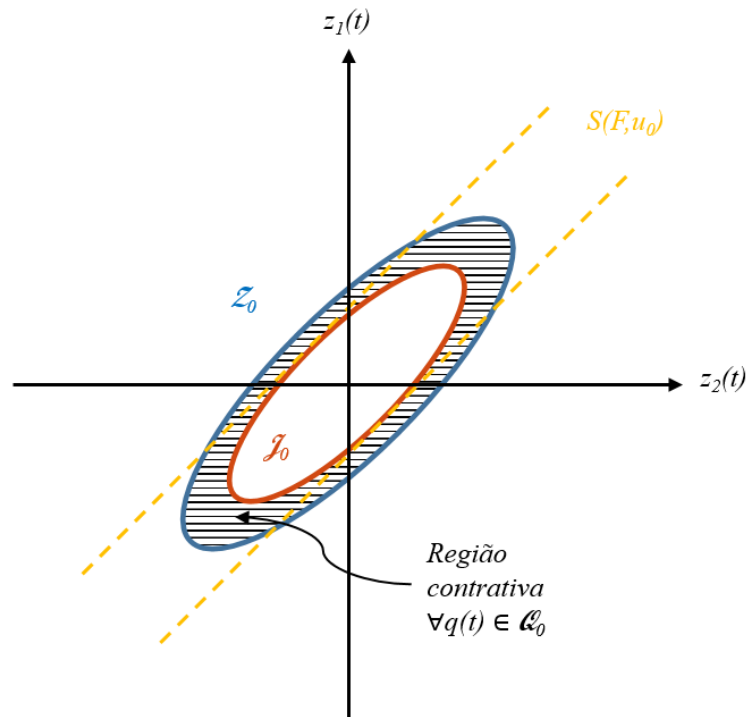
- $\mathcal{Z}_0 \rightarrow$  um conjunto de condições iniciais admissíveis;
- $\mathcal{Q}_0 \rightarrow$  um conjunto de referências e perturbações admissíveis;
- $\mathcal{J}_0 \rightarrow$  um conjunto contido na interseção do conjunto de condições iniciais admissíveis com a região de operação linear do sistema, i.e.  $\mathcal{J}_0 \subset (\mathcal{Z}_0 \cap S(F, u_0))$ .

A premissa fundamental é garantir que, assumindo os sinais exógenos confinados no conjunto  $\mathcal{Q}_0$ , todas as trajetórias iniciadas no interior de  $\mathcal{Z}_0$  irão convergir para o interior de  $\mathcal{J}_0$ , i.e. a região  $\mathcal{Z}_0 \setminus \mathcal{J}_0$  seja contrativa para todo  $x(0)$  iniciado no interior de  $\mathcal{Z}_0$ . Ao mesmo tempo, deve-se garantir que o conjunto  $\mathcal{J}_0$  seja positivamente invariante, de modo que as trajetórias  $x(t)$  ficarão limitadas pela sua fronteira a partir do momento que ingressarem no conjunto. Como o conjunto  $\mathcal{J}_0$  é positivamente invariante e está contido na região linear, o sistema se comporta como um sistema LIT e a presença de um controlador que atenda o PMI garante o seguimento/rejeição dos sinais de interesse.

Para uma melhor compreensão do método, observe a Figura 6, que ilustra a abordagem por conjuntos terminais proposta. Note que o conjunto  $\mathcal{J}_0$  está contido na região de operação linear  $S(F, u_0)$  do sistema. Observe também que a região entre os conjuntos  $\mathcal{Z}_0$  e  $\mathcal{J}_0$  é contrativa  $\forall q(t) \in \mathcal{Q}_0$ , i.e. para todas as amplitudes de referências e perturbações que pertencem ao conjunto de amplitudes admissíveis. Então, se todos os requisitos forem atendidos, todas as trajetórias iniciadas em  $\mathcal{Z}_0$  irão convergir assintoticamente e em um tempo finito para  $\mathcal{J}_0$  e lá permanecerão confinadas.

Outros trabalhos que fazem uso da abordagem por conjuntos terminais e valem menção: (FLORES et al., 2010, 2012), onde os autores utilizam controladores repetitivos para atendimento do PMI e, consequentemente, garantia de seguimento/rejeição; (FLORES; FLORES, 2018), onde é apresentada uma abordagem muito semelhante à dos trabalhos

Figura 6: Plano  $z_1(t) \times z_2(t)$  ilustrando a abordagem por conjuntos terminais.



anteriormente mencionados, contudo, aplicada a controladores repetitivos de alta ordem; (DILDA, 2013), onde a autora propõe a utilização da abordagem por conjuntos terminais para a estabilização de sistemas com atuadores sujeitos à zona-morta e saturação; e (CAMPOS et al., 2018) onde uma abordagem por conjuntos terminais é utilizada para lidar com o problema de quantização.

## 2.4 Sistemas LPV

O termo LPV se refere a uma classe de sistemas que podem ser modelados através de modelos lineares que possuem dependência de parâmetros na sua descrição. Em muitos casos, o projeto de controladores para sistemas LPV emprega metodologias de ganho escalonado, em que o controlador projetado também apresenta comportamento dependente de parâmetros.

A primeira menção formal a este tipo de sistema na literatura foi feita em (SHAMMA, 1988), onde o autor apresenta uma análise sobre métodos de controle LPV através de ganho escalonado. Destacam-se também na literatura os trabalhos (SHAMMA; ATHANS, 1990; RUGH; SHAMMA, 2000; SHAMMA, 2012; HOFFMANN; WERNER, 2015), onde os autores apresentam uma extensa pesquisa com relação a sistemas LPV e métodos de controle aplicáveis.

Outra característica importante desse tipo de sistema é a possibilidade de modelar alguns tipos de não-linearidades através de uma dependência paramétrica que envolve os próprios estados do sistema, resultando nos chamados modelos quasi-LPV (RUGH; SHAMMA, 2000). Algumas vantagens deste tipo de abordagem são: a possibilidade de utilização de técnicas de controle LPV, tanto para a análise de estabilidade, quanto para síntese do sistema em malha fechada e o menor grau de complexidade em relação a

abordagens não-lineares tradicionais. Por outro lado, deve-se garantir que as trajetórias do sistema em malha fechada não deixem uma dada região de validade do modelo.

Um sistema LPV pode ser descrito no espaço de estados como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t) \\ y(t) &= C(\sigma(t))x(t), \end{cases} \quad (22)$$

onde  $x(t)$  é o vetor de estados da planta,  $u(t)$  é o vetor de entradas da planta e  $y(t)$  é o vetor de saídas da planta.

O vetor  $\sigma(t)$  contém os  $N$  parâmetros variantes da planta e pode ser representado como:

$$\sigma(t) = [\sigma_1(t) \quad \sigma_2(t) \quad \dots \quad \sigma_N(t)], \quad (23)$$

onde todas as componentes de  $\sigma(t)$  são assumidas mensuráveis e limitadas em amplitude, conforme

$$\underline{\sigma}_j \leq \sigma_j(t) \leq \bar{\sigma}_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (24)$$

A partir de (24), é possível assumir que  $\sigma(t)$  está contido em um polítopo pertencente ao espaço  $\mathbb{R}^N$ , que pode ser descrito como um envelope convexo (*convex hull*) de  $2^N$  vértices, i.e.

$$\sigma(t) \in \mathcal{B} = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_{2^N}\}, \quad (25)$$

onde os vértices  $v_g$ ,  $g = 1, \dots, 2^N$ , são vetores coluna formados por todas as combinações possíveis entre os valores máximos e mínimos de  $\sigma_j(t)$ .

Assim,  $\sigma(t)$  pode ser descrito como uma combinação convexa dos vértices de  $\mathcal{B}$ , ou seja,

$$\sigma(t) = \sum_{g=1}^{2^N} \mu_g(t)v_g, \quad \sum_{g=1}^{2^N} \mu_g(t) = 1, \quad 0 \leq \mu_g(t) \leq 1, \quad (26)$$

onde  $\mu_g(t)$  são funções peso para cada vértice  $v_g$ .

Considerando que o sistema (22) depende de  $\sigma(t)$  de forma afim nos vértices do polítopo  $\mathcal{B}$ , então, as matrizes do sistema podem ser genericamente representadas por:

$$\begin{aligned} A(\sigma(t)) &= A_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)A_j, \quad B(\sigma(t)) = B_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)B_j, \\ C(\sigma(t)) &= C_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)C_j. \end{aligned} \quad (27)$$

onde  $A_0$ ,  $A_j$ ,  $B_0$ ,  $B_j$  e  $C_0$ ,  $C_j$  são matrizes que descrevem o sistema e suas relações com os  $N$  parâmetros  $\sigma_j(t)$ .

Com relação à aplicação do PMI à sistemas LPV pode-se mencionar: (CASTRO et al., 2017), onde os autores apresentam uma abordagem para redução de cargas mecânicas em turbinas eólicas modeladas como sistemas quasi-LPV, considerando aplicação de um controlador ressonante de frequência variável; e (BALLESTEROS; BOHN, 2011), onde a modelagem LPV e o PMI são aplicados ao problema de cancelamento ativo de ruído.

Já com relação a trabalhos que abordam o problema de sistemas LPV sujeitos à saturação, valem menção: (CAO; FANG, 2007), onde é apresentada uma solução para estabilização de sistemas LPV sujeitos à saturação de entrada (posição), fazendo uso de uma abordagem baseada em uma função candidata de Lyapunov também dependente de

parâmetros; (WU; GRIGORIADIS, 1999), onde os autores propõem um método para compensação *anti-windup* de sistemas LPV com atuadores sujeitos à restrições de amplitude e taxa de variação; e (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2018) onde o problema de estabilização de sistemas LPV com amostragem aperiódica sujeitos a saturação em amplitude é tratado.

## **2.5 Comentários Finais**

Ao longo deste capítulo foram apresentados os conceitos básicos por trás dos desenvolvimentos que serão detalhados nos Capítulos 3 e 4. Também foi apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre os temas em questão, com foco para o problema de seguimento de referencias e rejeição de perturbações em sistemas LPV com saturação a partir de controladores baseados no PMI.

### 3 SATURAÇÃO EM AMPLITUDE

Neste capítulo será proposta uma solução para o problema de seguimento/rejeição de referências/perturbações para sistemas LPV sujeitos à saturação em amplitude do sinal de entrada. A partir de uma função candidata de Lyapunov independente de parâmetros, serão obtidas condições para a síntese dos ganhos escalonados de realimentação de estados e do compensador *anti-windup*. A seguir, será proposto um problema de análise, desta vez baseado em uma função candidata de Lyapunov dependente de parâmetros, que visa aumentar o tamanho do conjunto de condições iniciais admissíveis para o qual o seguimento/rejeição é garantido. Exemplos numéricos ilustram o método proposto.

#### 3.1 Preliminares

Considere um sistema LPV descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B \text{sat}_{u_0}(u(t)) + B_d d(t) \\ y(t) = C(\sigma(t))x(t) \\ e(t) = r(t) - y(t) \end{cases} \quad (28)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados da planta,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas,  $d(t) \in \mathbb{R}^l$  é um vetor de perturbações exógenas,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas,  $e(t) \in \mathbb{R}^p$  é o erro de seguimento e  $r(t) \in \mathbb{R}^p$  é um vetor de referências a serem seguidas.

As matrizes  $A(\sigma(t))$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C(\sigma(t))$  possuem dimensões apropriadas e os pares  $(A(\sigma(t)), B)$  e  $(C(\sigma(t)), A(\sigma(t)))$  são controláveis e observáveis  $\forall t$ , respectivamente. Além disso, é assumido que o número de entradas é maior ou igual ao número de saídas, i.e.  $m \geq p$ , que é uma condição necessária para garantia de seguimento/rejeição através do PMI (CHEN, 1970).

A não-linearidade do tipo saturação apresentada em (28) é descrita como em (2), com limites de saturação  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ , e pode ser reescrita como uma não-linearidade do tipo zona-morta, da mesma forma que apresentado na Seção 2.1.1:

$$\psi_{u_0}(u(t)) = \text{sat}_{u_0}(u(t)) - u(t). \quad (29)$$

Assuma que os sinais de referência e perturbação são periódicos ou do tipo salto/degrau. Nesse caso, conforme descrito na Seção 2.2, o PMI é satisfeito se um controlador dinâmico na forma

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t)$$

for inserido no caminho direto entre o sinal de erro e a entrada da planta. O vetor  $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$  denota os estados do controlador e as matrizes  $A_c$  e  $B_c$  são determinadas de acordo com o controlador considerado, conforme descrito nas Seções 2.2.2 a 2.2.4.

Considere agora uma compensação *anti-windup* estática escalonada na entrada do controlador, que atua sob a não-linearidade (29) (TARBOURIECH; TURNER, 2009), resultando em:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) + B_c E_c(\sigma(t)) \psi_{u_0}(u(t)) \quad (30)$$

onde  $E_c(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$  é o chamado ganho de *anti-windup* escalonado, a ser determinado na solução do problema.

Supondo que todos os estados da planta e do controlador estão disponíveis para realimentação e que  $\sigma(t)$  é mensurável, considere a introdução de uma realimentação de estados estabilizante escalonada na forma:

$$u(t) = F_s(\sigma(t))x(t) + F_c(\sigma(t))x_c(t) \quad (31)$$

sendo  $F_s(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  o ganho de realimentação dos estados da planta e  $F_c(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$  o ganho de realimentação dos estados do controlador.

Considerando agora o estado aumentado  $z(t) = [x(t)' \ x_c(t)']' \in \mathbb{R}^{(n+n_c)}$ , então, segue que

$$u(t) = F(\sigma(t))z(t) \quad (32)$$

onde  $F(\sigma(t)) = [F_s(\sigma(t)) \ F_c(\sigma(t))] \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$  é o ganho de realimentação do estado aumentado.

Combinando (28), (30) e (32) tem-se que a dinâmica do sistema em malha fechada pode ser descrita por

$$\dot{z}(t) = (\mathbb{A}(\sigma(t)) + \mathbb{B}F(\sigma(t)))z(t) + (\mathbb{B} + \mathbb{B}_{aw}E_c(\sigma(t)))\psi_{u_0}(u(t)) + \mathbb{B}_q q(t), \quad (33)$$

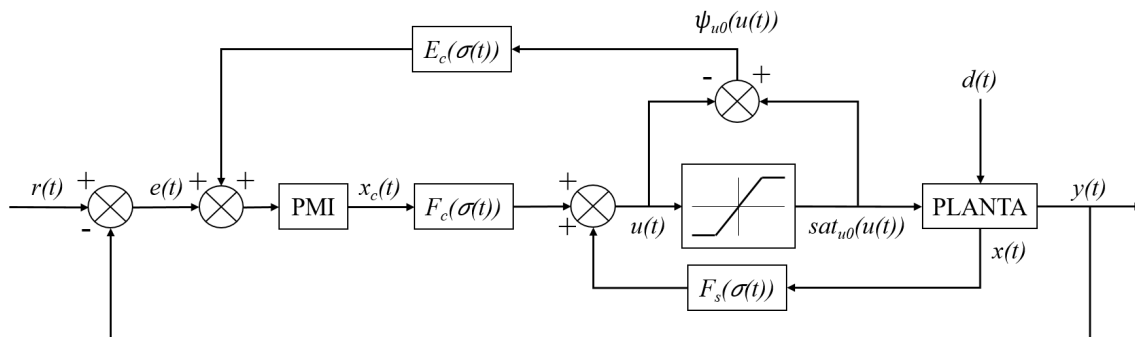
com

$$\mathbb{A}(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} A(\sigma(t)) & 0_{n \times n_c} \\ -B_c C(\sigma(t)) & A_c \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_c \times m} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_q = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & B_d \\ B_c & 0_{n_c \times l} \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B}_{aw} = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ B_c \end{bmatrix}, \quad q(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ d(t) \end{bmatrix}.$$

A Figura 7 ilustra o sistema em malha fechada proposto.

Figura 7: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.



Seguindo a modelagem politópica apresentada na Seção 2.4, segue que o vetor  $\sigma(t)$  é descrito como uma combinação convexa, na forma

$$\sigma(t) = \sum_{g=1}^{2^N} \mu_g(t) v_g, \quad \sigma(t) \in \mathcal{B}, \quad (34)$$

onde  $v_j$  são os  $2^N$  vértices que descrevem o conjunto  $\mathcal{B}$ . Como o sistema depende de  $\sigma(t)$  de forma afim nos vértices de  $\mathcal{B}$ , então as matrizes  $\mathbb{A}(\sigma(t))$ ,  $F(\sigma(t))$  e  $E_c(\sigma(t))$  também podem ser descritas genericamente por:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\sigma(t)) &= \mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t) \mathbb{A}_j, & F(\sigma(t)) &= F_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t) F_j, \\ E_c(\sigma(t)) &= E_{c_0} + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t) E_{c_j}.\end{aligned}\tag{35}$$

onde  $\mathbb{A}_0$ ,  $\mathbb{A}_j$  são matrizes que descrevem o sistema aumentado e suas relações com os parâmetros  $\sigma_j(t)$ . As matrizes  $F_0$ ,  $F_j$ ,  $E_{c_0}$  e  $E_{c_j}$  descrevem os ganhos de realimentação e de compensação *anti-windup* associados ao  $j$ -ésimo elemento do vetor  $\sigma(t)$ , respectivamente.

**Observação 1** *Neste trabalho, a matriz  $A_c$  que descreve o controlador foi considerada constante. Entretanto, é possível considerar que ela seja dependente de parâmetros, i.e.  $A_c(\sigma(t))$ , assim como feito em (CASTRO et al., 2017). Nesta formulação, as frequências de interesse para o problema de seguimento/rejeição são dependentes dos mesmos parâmetros que escalonam a planta ou podem ser vistas como parâmetros de escalonamento adicionais, acrescentando novos vértices ao politopo  $\mathcal{B}$ .*

### 3.2 Problema de Síntese

Como apresentado na Seção 2.2, devido à não-linearidade de saturação, o PMI deixa de ser condição suficiente para a garantia de seguimento/rejeição. Como o sistema em questão tem comportamento não-linear e é sujeito a sinais exógenos, a sua estabilidade depende dos valores de amplitude dos sinais de referência e perturbação.

É neste cenário que a abordagem por conjuntos terminais proposta em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009) se demonstra uma ferramenta importante, pois ela permite a caracterização de uma região terminal dentro da região linear do sistema, obtendo assim uma região de garantia para que as trajetórias de equilíbrio possam se estabelecer sem a ocorrência de saturação. Contudo, é preciso que esta garantia seja válida para toda a faixa de validade do sistema (28), uma vez que o sistema é do tipo LPV e varia no tempo de acordo com os parâmetros  $\sigma(t)$ . Note que a solução por ganho escalonado para estabilização do problema LPV impõe um certo grau de complexidade à abordagem por conjuntos terminais, pois o fato de o ganho de realimentação de estados ser variante no tempo implica que a região linear do sistema também será.

A garantia de confinamento das trajetórias no interior da região linear significa que o sistema passa a se comportar de forma linear, porém, variante no tempo, ou seja,  $\psi_{u_0}(u(t)) = 0, \forall t \geq t_1$ . Não ocorrendo mais saturação, a dinâmica do sistema pode ser reescrita como:

$$\dot{z}(t) = (\mathbb{A}(\sigma(t)) + \mathbb{B}F(\sigma(t)))z(t) + \mathbb{B}_q q(t), \quad \forall t \geq t_1.$$

Caso  $\sigma(t)$  pare de variar e assuma um comportamento estacionário, então o sistema se comportará tal qual um sistema LIT e a presença de um controlador que satisfaz o PMI na malha de controle volta a ser condição suficiente para garantia de seguimento/rejeição de referências/perturbações.

Para a descrição dos conjuntos da abordagem por conjuntos terminais da Seção 2.3, considere a mesma proposta apresentada em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009), onde os conjuntos  $\mathcal{Z}_0$ ,  $\mathcal{Q}_0$  e  $\mathcal{J}_0$  foram definidos como conjuntos elipsoidais, descritos por:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0 &= \Omega(P, 1) = \{z(t) \in \mathbb{R}^{(n+n_c)}; z(t)'Pz(t) \leq 1\}, P = P' > 0, \\ \mathcal{J}_0 &= \Omega(\bar{J}, 1) = \{z(t) \in \mathbb{R}^{(n+n_c)}; z(t)'\bar{J}z(t) \leq 1\}, \bar{J} = \eta_1 P, \eta_1 > 1, \\ \mathcal{Q}_0 &= \Omega(R, 1) = \{q(t) \in \mathbb{R}^{(p+l)}; q(t)'Rq(t) \leq 1\}, R = R' > 0.\end{aligned}\quad (36)$$

Note que o conjunto terminal  $\mathcal{J}_0$  é considerado uma versão escalonada (contraída, uma vez que  $\eta_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\eta_1 > 1$ ) do conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{Z}_0$ . Desta forma, segue que ambos conjuntos são curvas de nível associadas à função quadrática

$$V(z(t)) = z(t)'Pz(t). \quad (37)$$

A convergência das trajetórias é garantida se a região entre os conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(\eta_1 P, 1)$  for contrativa (i.e. as trajetórias iniciadas em  $\Omega(P, 1)$  convergem assintoticamente para o conjunto invariante  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ ), contanto que  $r(t)$  e  $d(t)$  pertençam ao conjunto  $\Omega(R, 1)$ .

Nas condições de estabilidade a serem definidas na sequência, será utilizada uma versão da condição de setor generalizada adaptada à sistemas LPV, de tal forma que  $\mathcal{Z}_0$  deve estar no interior da região de validade

$$S(F(\sigma(t)), G(\sigma(t)), u_0) = \{z(t) \in \mathbb{R}^{(n+n_c)}; -u_0 \leq (F(\sigma(t)) - G(\sigma(t)))z(t) \leq u_0\}, \quad (38)$$

definida a partir do Lema 1, considerando  $v = F(\sigma(t))z(t)$  e  $w = G(\sigma(t))z(t)$ .

Então, é possível formular o seguinte problema:

**Problema 1** *Calcular um ganho de realimentação de estados escalonado  $F(\sigma(t))$  e um ganho de compensação anti-windup também escalonado  $E_c(\sigma(t))$ , tais que,  $\forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$ ,  $\forall z(0) \in \mathcal{Z}_0 \subset S(F(\sigma(t)), G(\sigma(t)), u_0)$  e  $\forall q(t) \in \mathcal{Q}_0$ , então todas as trajetórias do sistema (33) iniciadas em  $\mathcal{Z}_0$  convergem assintoticamente para  $\mathcal{J}_0 \subset S(F(\sigma(t)), u_0)$  em um tempo finito  $t_1$  e permanecem no seu interior  $\forall t \geq t_1$ .*

As regiões consideradas são ilustradas no plano  $z_1(t) \times z_2(t)$  na Figura 8.

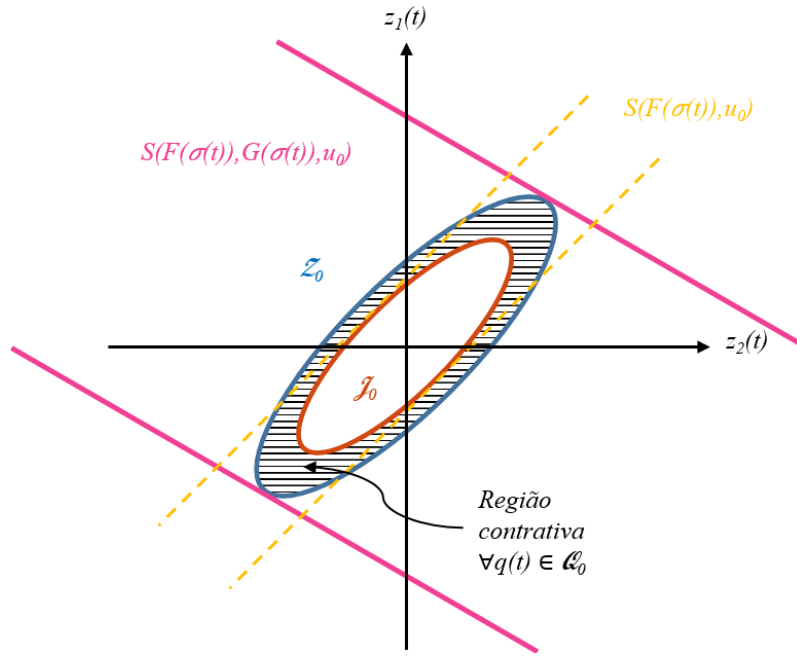
Observe que existem dois possíveis problemas de otimização implicitamente contidos no Problema 1: a maximização do conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{Z}_0$  e a maximização do conjunto de amplitudes de referências e perturbações admissíveis  $\mathcal{Q}_0$ . Neste caso, é necessária a existência de algum tipo de critério de medida para o tamanho dos conjuntos, como descrito em (BOYD et al., 1994). Neste trabalho, será considerada a maximização dos conjuntos em determinadas direções definidas previamente.

O teorema a seguir é baseado nos resultados de (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009) e apresenta condições para a determinação dos ganhos  $F(\sigma(t))$  e  $E_c(\sigma(t))$ , além de permitir a caracterização dos conjuntos  $\mathcal{Z}_0$ ,  $\mathcal{Q}_0$  e  $\mathcal{J}_0$ , de forma que o Problema 1 seja resolvido.

**Teorema 1** *Se existirem matrizes simétricas positivas definidas  $W \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$ , matrizes  $Y_0, Y_j \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $X_0, X_j \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $M_0, M_j \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,*



Figura 8: Ilustração do plano  $z_1(t) \times z_2(t)$  com os conjuntos utilizados para um dado instante de tempo  $t$ .



$j = 1, \dots, N$ , uma matriz diagonal  $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e escalares  $\lambda_1 > 0$  e  $\eta_1 > 1$  que satisfaçam

$$\begin{bmatrix} \hat{\Theta}_g + \bar{\lambda}_1 W & \mathbb{B}L + \hat{\Gamma}_g & \mathbb{B}_q \\ * & -2L & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & -\lambda_1 R \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_g &= \text{He}\{\mathbb{A}_0 W + \mathbb{B}Y_0 + (\hat{\mathbb{A}}W + \mathbb{B}\hat{Y})(v_g \otimes I_{(n+n_c)})\} \\ \hat{\Gamma}_g &= \mathbb{B}_{aw}M_0 - X'_0 + \mathbb{B}_{aw}\hat{M}(v_g \otimes I_m) - (\hat{X}[v_g \otimes I_m])' \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{0(i)} - X_{0(i)} + (\hat{Y}_{(i)} - \hat{X}_{(i)})(v_g \otimes I_{(n+n_c)}) & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1 W & * \\ Y_{0(i)} + \hat{Y}_{(i)}(v_g \otimes I_{(n+n_c)}) & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (41)$$

para  $i = 1, \dots, m$ ,  $g = 1, \dots, 2^N$ , onde  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1(3\eta_1 - 1)$ ,  $\hat{\mathbb{A}} = [\mathbb{A}_1 \ \mathbb{A}_2 \ \dots \ \mathbb{A}_N]$ ,  $\hat{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N]$ ,  $\hat{M} = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_N]$  e  $\hat{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]$ , então, os ganhos  $F_0 = Y_0 W^{-1}$ ,  $F_j = Y_j W^{-1}$ ,  $E_{c_0} = M_0 L^{-1}$  e  $E_{c_j} = M_j L^{-1}$  são tais que todas as trajetórias de (33) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$ ,  $P = W^{-1}$ , convergem para o conjunto positivamente invariante  $\Omega(\bar{J}, 1) \subset \bigcap_{g=1}^{2^N} S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], u_0)$ ,  $\hat{F} = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_N]$ , em um tempo finito  $t_1$  e permanecem neste conjunto  $\forall t \geq t_1$ , contanto que  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

*Prova.* A prova segue os mesmos passos da apresentada em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009), levando em conta o escalonamento dos ganhos  $F(\sigma(t))$  e  $E_c(\sigma(t))$  e a variação paramétrica da matriz  $\mathbb{A}(\sigma(t))$ . Considere  $\bar{\mathbb{A}}(t) = \mathbb{A}(\sigma(t)) +$

$\mathbb{B}F(\sigma(t))$ ,  $\bar{\mathbb{B}}(t) = \mathbb{B} + \mathbb{B}_{aw}E_c(\sigma(t))$  e a função candidata de Lyapunov quadrática (37). Então, a derivada de  $V(z(t))$  ao longo das trajetórias de (33) resulta em

$$\dot{V}(z(t)) = z(t)'(\bar{\mathbb{A}}(t)'P + P\bar{\mathbb{A}}(t))z(t) + 2z(t)'P\mathbb{B}_q q(t) + 2z(t)'P\bar{\mathbb{B}}(t)\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t)).$$

Considere uma versão dependente de parâmetros do Lema 1, como em (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2018), onde  $v = F(\sigma(t))z(t)$ ,  $v_0 = u_0$  e  $w = G(\sigma(t))z(t)$ , onde  $G(\sigma(t))$  é uma variável livre que depende de  $\sigma(t)$  de forma afim. Então, se  $z(t) \in S(F(\sigma(t)), G(\sigma(t)), u_0)$ ,  $\forall t \geq 0$ , segue que

$$\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))'T[\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t)) + G(\sigma(t))z(t)] \leq 0$$

é verificada para qualquer matriz  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal positiva definida. Logo, se

$$\dot{V}(z(t)) - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))'T\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t)) - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))'TG(\sigma(t))z(t) < 0, \quad (42)$$

então  $\dot{V}(z(t)) < 0$ , desde que  $z(t) \in S(F(\sigma(t)), G(\sigma(t)), u_0)$ .

Utilizando a abordagem por conjuntos terminais apresentada na Seção 2.3, deve-se garantir que  $\dot{V}(z(t)) < 0$  para todo  $z(t)$  e  $q(t)$  tais que  $z(t)'Pz(t) \leq 1$  ( $z(t)$  dentro de  $\Omega(P, 1)$ ),  $z(t)'\eta_1 Pz(t) \geq 1$  ( $z(t)$  fora de  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ ) e  $q(t)'Rq(t) \leq 1$  ( $q(t)$  dentro de  $\Omega(R, 1)$ ). Isto pode ser garantido através da aplicação do *S-Procedure* (BOYD et al., 1994) como apresentado em (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009), resultando em

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))'T\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t)) \\ - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))'TG(\sigma(t))z(t) + \lambda_1(1 - z(t)'Pz(t)) \\ + 3\lambda_1(z(t)'\eta_1 Pz(t) - 1) + \lambda_1(1 - q(t)'Rq(t)) < 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Como  $\lambda_1 - 3\lambda_1 + \lambda_1 = -\lambda_1 < 0$ ,  $\forall t$ , então, segue que (43) é verificada se

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))'T\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t)) \\ - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))'TG(\sigma(t))z(t) - \lambda_1 z(t)'Pz(t) \\ + 3\lambda_1 z(t)'\eta_1 Pz(t) - \lambda_1 q(t)'Rq(t) < 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Note que é possível escrever o lado esquerdo de (44) na forma

$$[z(t)' \quad \psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))' \quad q(t)'] \mathcal{M} \begin{bmatrix} z(t) \\ \psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t)) \\ q(t) \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \Theta(\sigma(t)) + \bar{\lambda}_1 P & P(\mathbb{B} + \mathbb{B}_{aw}E_c(\sigma(t))) - G(\sigma(t))'T & P\mathbb{B}_q \\ * & -2T & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & -\lambda_1 R \end{bmatrix},$$

$\Theta(\sigma(t)) = \text{He}\{P(\mathbb{A}(\sigma(t)) + \mathbb{B}F(\sigma(t)))\}$  e  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1(3\eta_1 - 1)$ .

Então, é suficiente que  $\mathcal{M} < 0$  para que (43) seja verificada. Pré- e pós-multiplicando  $\mathcal{M}$  por  $\text{diag}\{P^{-1}, T^{-1}, I_{(p+l)}\}$  e realizando as mudanças de variáveis  $W = P^{-1}$ ,  $X(\sigma(t)) = G(\sigma(t))P^{-1}$ ,  $Y(\sigma(t)) = F(\sigma(t))P^{-1}$ ,  $L = T^{-1}$  e  $M(\sigma(t)) = E_c(\sigma(t))T^{-1}$ , obtém-se

$$\bar{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}(\sigma(t)) + \bar{\lambda}_1 W & \mathbb{B}L + \bar{\Gamma}(\sigma(t)) & \mathbb{B}_q \\ * & -2L & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & -\lambda_1 R \end{bmatrix}$$

com  $\bar{\Theta}(\sigma(t)) = \text{He}\{\mathbb{A}(\sigma(t))W + \mathbb{B}Y(\sigma(t))\}$  e  $\bar{\Gamma}(\sigma(t)) = \mathbb{B}_{aw}M(\sigma(t)) - X(\sigma(t))'$ , de forma que  $\bar{\mathcal{M}} < 0$  também implica em (43).

Observe que  $\mathbb{A}(\sigma(t)) = \mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)\mathbb{A}_j$  e  $Y(\sigma(t)) = Y_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)Y_j$ , possibilitando a descrição do termo  $\bar{\Theta}(\sigma(t))$  na forma

$$\bar{\Theta}(\sigma(t)) = \text{He} \left\{ \mathbb{A}_0W + \mathbb{B}Y_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)(\mathbb{A}_jW + \mathbb{B}Y_j) \right\}, \quad (45)$$

de modo que, no vértice  $v_g$ , o termo  $\bar{\Theta}(\sigma(t))$  é igual a  $\bar{\Theta}(v_g) = \hat{\Theta}_g = \text{He}\{\mathbb{A}_0W + \mathbb{B}Y_0 + (\hat{\mathbb{A}}W + \mathbb{B}\hat{Y})(v_g \otimes I_{(n+n_c)})\}$ . O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao termo  $\bar{\Gamma}(\sigma(t))$ , que no vértice  $v_g$  é igual a  $\bar{\Gamma}(v_g) = \hat{\Gamma}_g = \mathbb{B}_{aw}M_0 - X'_0 + \mathbb{B}_{aw}\hat{M}(v_g \otimes I_m) - (\hat{X}[v_g \otimes I_m])'$ . Com base em argumentos de convexidade (BOYD et al., 1994), se (39) é verificada para todos os vértices  $v_g$  e matrizes  $\mathbb{A}_j$ ,  $Y_j$ ,  $M_j$  e  $X_j$ ,  $g = 1, \dots, 2^N$ ,  $j = 1, \dots, N$  então  $\bar{\mathcal{M}} < 0 \forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$ .

Observe que o termo na posição (1,1) de (39) implica em (FLORES, 2012)

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\frac{\bar{\lambda}_1}{2}V(z(t)) < 0,$$

$\forall z(t) \in \Omega(P, 1) \subset S(F(\sigma(t)), G(\sigma(t)), u_0)$ ,  $\forall z(t) \notin \Omega(\eta_1P, 1)$  e  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ . Então segue que  $V(z(t)) \leq e^{-\frac{\bar{\lambda}_1}{2}t}V(z(0)) \forall z(0) \in (\Omega(P, 1) \setminus \Omega(\eta_1P, 1))$ . Isso implica que o valor de  $\bar{\lambda}_1$  pode ser utilizado para regular o tempo necessário para que as trajetórias do sistema em malha fechada converjam para o conjunto positivamente invariante no interior da região linear. Ainda, como o conjunto terminal  $\Omega(\eta_1P, 1)$  é uma versão contraída do conjunto de condições iniciais admissíveis  $\Omega(P, 1)$ , existe  $t = t_1$  tal que  $V(z(t_1)) = 1/\eta_1$ , i.e.  $z(t_1)' \eta_1 P z(t_1) = 1$ . Além disso, como  $\dot{V}(z(t)) < 0$  é válido nos limites de  $\Omega(\eta_1P, 1)$ , então tem-se que todas as trajetórias que entram em  $\mathcal{J}_0$  permanecem em seu interior para todo  $t \geq t_1$ .

A condição (40) garante que  $\Omega(P, 1) \subset \bigcap_{g=1}^{2^N} S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], G_0 + \hat{G}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], u_0)$ ,  $\hat{G} = [G_1 \ G_2 \ \dots \ G_N]$  e, conseqüentemente, que a condição de setor para o caso LPV (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2018) é verificada para todo  $z(t) \in \Omega(P, 1)$ . Por fim, observe que a utilização de um ganho de realimentação escalonado  $F(\sigma(t))$  implica que a região de operação linear do sistema será dependente de parâmetros, de modo que a condição (41) garante que  $\Omega(\eta_1P, 1) \subset \bigcap_{g=1}^{2^N} S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], u_0)$ , i.e. o conjunto terminal estará contido na interseção das regiões lineares resultantes de cada vértice  $v_g$  e, portanto, dentro deste conjunto não ocorrerá saturação e o sistema em malha fechada terá comportamento linear.  $\square$

**Corolário 1** *Se as condições (39), (40) e (41) do Teorema 1 são verificadas, então  $\forall z(0) \in \Omega(P, 1)$ ,  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$  e  $\forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$ , segue que a norma do sinal de erro é limitada quando  $z(t) \in \Omega(\eta_1P, 1)$ , i.e.  $\|e(t)\| \leq \infty$  dentro do conjunto terminal  $\mathcal{J}_0$ . Além disso, se  $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \forall t > t_1$ , então a presença de um controlador que atenda ao PMI garante o seguimento/rejeição com erro nulo em regime permanente.*

*Prova.* Considere os vetores  $r(t)$  e  $y(t)$  descritos nas formas

$$r(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times l} \end{bmatrix}}_{C_q} q(t) \text{ e } y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0_{n \times n_c} \end{bmatrix}}_{C_z} z(t). \quad (46)$$

Lembrando que sinal de erro é definido como  $e(t) = r(t) - y(t)$ , então a norma ao quadrado do erro é descrita como  $\|e(t)\|^2 = \|r(t) - y(t)\|^2$ . Observe que  $\|r(t) - y(t)\|^2 \leq \|r(t)\|^2 + \|y(t)\|^2$ , portanto, fazendo uso de (46), pode-se dizer que

$$\|e(t)\|^2 \leq r(t)'r(t) + y(t)'y(t) = q(t)'C'_q C_q q(t) + z(t)'C'_z C_z z(t). \quad (47)$$

Das propriedades dos termos quadráticos, sabe-se que

$$eig_{min}(V)\|w\| \leq w'Vw \leq eig_{max}(V)\|u\|$$

onde  $w$  é um vetor genérico,  $V$  é uma matriz simétrica genérica de dimensões apropriadas,  $eig_{min}(V)$  e  $eig_{max}(V)$  representam o menor e o maior autovalor da matriz  $V$ , respectivamente. Então, a desigualdade (47) pode ser reescrita na forma

$$\|e(t)\|^2 \leq eig_{max}(C'_q C_q)\|q(t)\| + eig_{max}(C'_z C_z)\|z(t)\|. \quad (48)$$

Da definição dos conjuntos elipsoidais (36) sabe-se que

$$q(t)'Rq(t) \leq 1 \text{ e } z(t)'\eta_1 Pz(t) \leq 1,$$

portanto,

$$\begin{aligned} eig_{min}(R)\|q(t)\| \leq q(t)'Rq(t) \leq 1 &\Rightarrow \|q(t)\| \leq \frac{1}{eig_{min}(R)}, \\ \eta_1 eig_{min}(P)\|z(t)\| \leq z(t)'\eta_1 Pz(t) \leq 1 &\Rightarrow \|z(t)\| \leq \frac{1}{\eta_1 eig_{min}(P)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Note que as matrizes  $R$  e  $P$  são positivas definidas de acordo com o Teorema 1, portanto, os menores autovalores de  $R$  e  $P$  serão sempre maiores do que zero, o que garante que as normas de  $q(t)$  e  $z(t)$  sempre terão um limitante superior menor do que infinito.

Combinando (48) e (49) conclui-se que

$$\|e(t)\|^2 \leq \frac{eig_{max}(C'_q C_q)}{eig_{min}(R)} + \frac{eig_{max}(C'_z C_z)}{\eta_1 eig_{min}(P)} < \infty.$$

Caso  $\sigma(t) = \tilde{\sigma} \forall t > t_1$ , então o sistema passa a se comportar como um sistema LIT e a prova da convergência do erro de seguimento para zero segue os mesmos passos apresentados em (FLORES, 2012). □

Com base no Teorema 1, são propostos dois problemas de otimização para a obtenção dos ganhos  $F_0$ ,  $F_j$ ,  $E_{c_0}$  e  $E_{c_j}$ , tendo o primeiro deles como objetivo a maximização de  $\Omega(P, 1)$ , enquanto o segundo visa maximizar o conjunto  $\Omega(R, 1)$ .

Os conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(R, 1)$  podem ter seus tamanhos avaliados com base nos conjuntos poliedrais  $\mathcal{X}_R = conv\{x_1, x_2, \dots, x_f\}$  e  $\mathcal{D}_R = conv\{d_1, d_2, \dots, d_s\}$ , onde os vértices  $x_k \in \mathbb{R}^{(n+n_c)}$ ,  $k = 1, \dots, f$  e  $d_o \in \mathbb{R}^{(p+l)}$ ,  $o = 1, \dots, s$  correspondem a direções em que se deseja maximizar os conjuntos, conhecidas *a priori*. Considerando essa premissa, os objetivos dos problemas de otimização serão maximizar os escalares  $\alpha_1 > 0$  e  $\beta > 0$ , de forma que  $\alpha_1 \mathcal{X}_R \subset \Omega(P, 1)$  e  $\beta \mathcal{D}_R \subset \Omega(R, 1)$  sejam maximizados, respectivamente.

No que diz respeito a maximização do conjunto de condições iniciais admissíveis, esta pode ser obtida através da solução do seguinte problema de otimização:

**PO1:** min  $\gamma_1$   
sujeito à

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & * \\ \mathbf{x}_k & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, f \quad (50)$$

$$\mathbf{d}'_o R \mathbf{d}_o \leq 1, \quad o = 1, \dots, s \quad (51)$$

Condições (39), (40) e (41).

Com relação ao problema da maximização do conjunto de amplitudes de referências e perturbações admissíveis, este pode ser solucionado através do problema de otimização:

**PO2:** min  $\delta$   
sujeito à

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ \mathbf{x}_k & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, f \quad (52)$$

$$\mathbf{d}'_o R \mathbf{d}_o \leq \delta, \quad o = 1, \dots, s \quad (53)$$

Condições (39), (40) e (41).

Assumindo  $\alpha_1 = 1/\sqrt{\gamma_1}$  e  $\beta = 1/\sqrt{\delta}$ , a minimização de  $\gamma_1$  (ou  $\delta$ ) implicará na maximização de  $\alpha_1$  (ou  $\beta$ ).

**Observação 2** A condição (51) no **PO1** pode ser eliminada caso haja conhecimento a priori de uma matriz  $R$ . Contudo, o uso de uma matriz  $R$  fixa não é recomendado, visto que desta forma se elimina um grau de liberdade na solução do problema. A mesma observação é válida para condição (52) e a matriz  $W$  no **PO2**.

Observe que as condições (39), (40) e (41) só podem ser consideradas LMIs (desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) caso haja conhecimento prévio dos escalares  $\lambda_1$  e  $\eta_1$ . Portanto, soluções sub-ótimas dos problemas de otimização **PO1** e **PO2** podem ser obtidas através de varreduras em ambas as variáveis escalares. Para a realização deste procedimento, recomenda-se a determinação prévia de um coeficiente de decaimento exponencial  $\bar{\lambda}_1$  desejado, que é vinculado ao tempo  $t_1$  e, com base neste valor, descreva o escalar  $\lambda_1$  em função de  $\bar{\lambda}_1$  e  $\eta_1$ , através da relação  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1/(3\eta_1 - 1)$ . Desta forma, passa a ser necessário varrer apenas  $\eta_1$  para obter uma solução para um determinado  $\bar{\lambda}_1$ .

### 3.3 Problema de Análise

Visando a obtenção de condições menos conservadoras, nesta seção será considerada a utilização de uma função candidata de Lyapunov dependente de parâmetros dada por

$$V(z(t), \sigma(t)) = z(t)'P(\sigma(t))z(t), \quad (54)$$

de modo que  $P(\sigma(t))$  é afim em relação ao parâmetro  $\sigma(t)$ , i.e.

$$P(\sigma(t)) = P_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)P_j, \quad (55)$$

com  $\sigma(t) \in \mathcal{B}$ , onde  $P_0 = P'_0$  e  $P_j = P'_j$  são matrizes a serem determinadas.

A partir de (54), tem-se que

$$\dot{V}(z(t), \sigma(t)) = z(t)'P(\sigma(t))\dot{z}(t) + \dot{z}(t)'P(\sigma(t))z(t) + z(t)'\frac{\partial P(\sigma(t))}{\partial t}z(t), \quad (56)$$

i.e. a derivada de  $V(z(t), \sigma(t))$  depende de  $\dot{P}(\sigma(t)) = \frac{\partial P(\sigma(t))}{\partial t}$ .

Uma possível abordagem para lidar com o termo  $\dot{P}(\sigma(t))$  é assumir que  $\dot{\sigma}(t)$  é limitada

$$\underline{\dot{\sigma}}_j \leq \dot{\sigma}_j(t) \leq \bar{\dot{\sigma}}_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (57)$$

de modo que  $\dot{\sigma}(t)$  está contido em um polítopo que pertence ao espaço  $\mathbb{R}^N$ , que pode ser descrito como um envelope convexo de  $2^N$  vértices, i.e.

$$\dot{\sigma}(t) \in \tilde{\mathcal{B}} = \text{conv}\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{2^N}\},$$

onde os vetores  $\tilde{v}_g, g = 1, \dots, 2^N$ , são vetores coluna formados por todas as combinações possíveis entre os valores máximos e mínimos de  $\dot{\sigma}_j(t)$ . Observe que o intervalo descrito em (57) deve necessariamente conter o valor 0, i.e.  $\underline{\dot{\sigma}}_j < 0 < \bar{\dot{\sigma}}_j$ , pois, caso contrário, os parâmetros  $\sigma_j(t)$  nunca irão assumir um comportamento estacionário, podendo crescer ou decrescer indefinidamente e, conseqüentemente, violando a suposição  $\sigma(t) \in \mathcal{B}$ .

Assim,  $\dot{\sigma}(t)$  pode ser descrito através da combinação convexa

$$\dot{\sigma}(t) = \sum_{g=1}^{2^N} \tilde{\mu}_g(t)\tilde{v}_g, \quad \sum_{g=1}^{2^N} \tilde{\mu}_g(t) = 1, \quad 0 \leq \tilde{\mu}_g(t) \leq 1. \quad (58)$$

Derivando (55) em função do tempo, obtém-se

$$\dot{P}(\sigma(t)) = \sum_{j=1}^N \dot{\sigma}_j(t)P_j = \hat{P}(\tilde{\mu}_g(t)\tilde{v}_g \otimes I_{(n+n_c)}), \quad (59)$$

i.e.  $\dot{P}(\sigma(t))$  pode ser descrita através de uma combinação convexa dos vértices do polítopo  $\tilde{\mathcal{B}}$ , com  $\hat{P} = [P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_N]$ .

Do ponto de vista da abordagem por conjuntos terminais, considere agora

$$\mathcal{Z}_1 = \bigcap_{g=1}^{2^N} \Omega(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], 1), \quad (60)$$

e o conjunto terminal

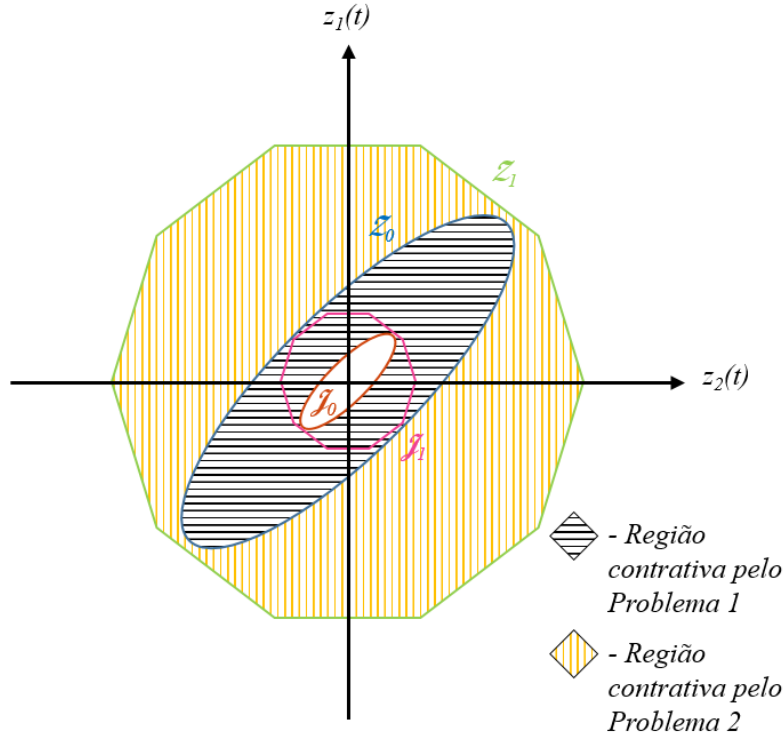
$$\mathcal{J}_1 = \bigcap_{g=1}^{2^N} \Omega(\eta_2 P_0 + \eta_2 \hat{P}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], 1), \quad (61)$$

que é uma versão contraída (através do escalar  $\eta_2 > 1$ ) de  $\mathcal{Z}_1$ .

Observe que os conjuntos (60) e (61) são curvas de nível associadas a função candidata de Lyapunov dependente de parâmetros (54), conforme provado em (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2018).

Baseado nestes conjuntos, o seguinte problema pode ser formulado:

Figura 9: Ilustração do plano  $z_1(t) \times z_2(t)$  com os conjuntos utilizados.



**Problema 2** Dadas as matrizes  $P, R, T, F_0, E_{c_0}, F_j$  e  $E_{c_j}, j = 1, \dots, N$ , obtidas através da solução de **PO1** ou **PO2**, determinar o conjunto  $Z_1 \supseteq \Omega(P, 1)$  tal que,  $\forall z(0) \in Z_1, \forall q(t) \in Q_0, \forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$  e  $\forall \dot{\sigma}(t) \in \tilde{\mathcal{B}}$ , todas as trajetórias do sistema (33) convergem assintoticamente para  $J_1 \subseteq \Omega(P, 1)$  em um tempo finito  $t_2$  e permanecem neste conjunto  $\forall t \geq t_2$ .

As regiões consideradas são ilustradas no plano  $z_1(t) \times z_2(t)$  na Figura 9.

Note que este problema sempre possui a solução particular  $P_j = P$  quando as matrizes  $P, R, T, F_0, E_{c_0}, F_j$  e  $E_{c_j}$  são determinadas pelas condições do Teorema 1 (Seção 3.2). Assim, no pior caso não ocorrerá aumento do conjuntos de condições iniciais admissíveis. Além disso, como foram utilizadas as mesmas matrizes  $R, T, F_0, E_{c_0}, F_j$  e  $E_{c_j}$  do problema de síntese, então, uma vez dentro de  $\Omega(P, 1)$ , as condições do Teorema 1 garantem a convergência para o conjunto  $J_0$  em um tempo finito e o consequente seguimento das referências e/ou rejeição das perturbações, caso  $\sigma(t)$  assumo comportamento estacionário. Como a matriz  $R$  deve ser a mesma do problema de síntese, o Problema 2 apresenta como objetivo implícito apenas a maximização do conjunto  $Z_1$ .

O Problema 2 pode ser solucionado através da aplicação do teorema enunciado a seguir.

**Teorema 2** Considere um dado conjunto de ganhos  $F_0, F_j \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$  e  $E_{c_0}, E_{c_j} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , matrizes simétricas positivas definidas  $P \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$  e uma matriz diagonal  $T = L^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  que satisfazem o Teorema 1. Se existirem matrizes simétricas  $P_0, P_j \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , matrizes  $G_0, G_j \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}, j = 1, \dots, N$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{(2n+2n_c+m+p+l) \times (n+n_c)}$  e escalares  $\lambda_2 > 0, \eta_2 > 1$  tais que

$$M(v_g, \tilde{v}_d) + Q\mathcal{N}(v_g) + \mathcal{N}(v_g)'Q' < 0 \quad (62)$$

$$\begin{bmatrix} P_0 + \hat{P}(v_g \otimes I_{(n+n_c)}) & * \\ F_{0(i)} - G_{0(i)} + (\hat{F}(i) - \hat{G}(i))(v_g \otimes I_{(n+n_c)}) & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (63)$$

$$\eta_2(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{n+n_c}]) \geq P \quad (64)$$

onde

$$M(v_g, \tilde{v}_d) = \begin{bmatrix} \hat{\Theta}_{gd} & P_0 + \hat{P}(v_g \otimes I_{(n+n_c)}) & \hat{\Delta}_g & 0_{(n+n_c) \times (p+l)} \\ * & 0_{(n+n_c) \times (n+n_c)} & 0_{(n+n_c) \times m} & 0_{(n+n_c) \times (p+l)} \\ * & * & -2T & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & -\lambda_2 R \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\hat{\Theta}_{gd} = \bar{\lambda}_2 P_0 + \hat{P}([\bar{\lambda}_2 v_g + \tilde{v}_d] \otimes I_{(n+n_c)})$$

$$\hat{\Delta}_g = -G'_0 T - (\hat{G}[v_g \otimes I_m])' T$$

$$\mathcal{N}(v_g) = [\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}F_0 + \tilde{A}_g \quad -I_{(n+n_c)} \quad \mathbb{B} + \mathbb{B}_{aw}E_{c_0} + \mathbb{B}_{aw}\hat{E}_c(v_g \otimes I_m) \quad \mathbb{B}_g] \quad (66)$$

$$\tilde{A}_g = (\hat{\mathbb{A}} + \mathbb{B}\hat{F})(v_g \otimes I_{(n+n_c)})$$

são verificadas para  $i = 1, \dots, m$ ,  $g = 1, \dots, 2^N$ ,  $d = 1, \dots, 2^N$ ,  $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2(3\eta_2 - 1)$  e  $\hat{G} = [G_1 \ G_2 \ \dots \ G_N]$  então, todas as trajetórias de (33) iniciadas em  $\mathcal{Z}_1 = \bigcap_{g=1}^{2^N} \Omega(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], 1)$  convergem assintoticamente para  $\mathcal{J}_1 = \bigcap_{g=1}^{2^N} \Omega(\eta_2 P_0 + \eta_2 \hat{P}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], 1) \subseteq \Omega(P, 1)$  em um tempo finito  $t_2$ , contanto que as amplitudes das referências e das perturbações sejam tais que  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

*Prova.* Considere a função candidata de Lyapunov (54) e sua derivada em relação ao tempo, dada por (56).

Da mesma forma que na prova do Teorema 1, deve-se garantir a verificação da condição de setor generalizada para todo  $z(t) \in \mathcal{Z}_1$ , i.e.  $\mathcal{Z}_1 \subset S(F(\sigma(t)), G(\sigma(t), u_0))$ , e que  $\dot{V}(t) < 0 \forall z(t) \in \mathcal{Z}_1 \setminus \mathcal{J}_1$  e  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ . Isso será verificado se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))' T \psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t)) \\ & - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))' T G(\sigma(t))z(t) + \lambda_2(1 - z(t)' P(\sigma(t))z(t)) \\ & + 3\lambda_2(z(t)' \eta_2 P(\sigma(t))z(t) - 1) + \lambda_2(1 - q(t)' R q(t)) < 0, \end{aligned} \quad (67)$$

for válida para quaisquer valores de  $\lambda_2 > 0$  e  $\eta_2 > 1$ .

Como  $\lambda_2 - 3\lambda_2 + \lambda_2 = -\lambda_2 < 0, \forall t$ , então, segue que (67) é verificada se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))' T \psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t)) \\ & - 2\psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))' T G(\sigma(t))z(t) + \lambda_2 z(t)' P(\sigma(t))z(t) \\ & + 3\lambda_2 z(t)' \eta_2 P(\sigma(t))z(t) + \lambda_2 q(t)' R q(t) < 0, \end{aligned} \quad (68)$$

O lado esquerdo de (68) pode ser reescrito na forma  $h(t)' \mathcal{M} h(t)$  onde

$$h(t) = [z(t)' \quad \dot{z}(t)' \quad \psi_{u_0}(F(\sigma(t))z(t))' \quad q(t)']'$$

e

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \lambda_2(3\eta_2 - 1)P(\sigma(t)) + \dot{P}(\sigma(t)) & P(\sigma(t)) & -G(\sigma(t))' T & 0_{(n+n_c) \times (p+l)} \\ * & 0_{(n+n_c) \times (n+n_c)} & 0_{(n+n_c) \times m} & 0_{(n+n_c) \times (p+l)} \\ * & * & -2T & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & -\lambda_2 R \end{bmatrix}.$$



Fazendo uso do lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001), é possível garantir que  $h(t)'Mh(t) < 0, \forall \mathcal{N}(\sigma(t))h(t) = 0, h(t) \neq 0$  se existir  $Q$  tal que  $\mathcal{M} + Q\mathcal{N}(\sigma(t)) + \mathcal{N}(\sigma(t))'Q' < 0$ . Definindo  $\mathcal{N}(\sigma(t))$  com base no sistema (33), obtém-se

$$\mathcal{N}(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{A}}(t) & -I_{(n+n_c)} & \bar{\mathbb{B}}(t) & \mathbb{B}_q \end{bmatrix},$$

com  $\bar{\mathbb{A}}(t) = \mathbb{A}(\sigma(t)) + \mathbb{B}F(\sigma(t))$  e  $\bar{\mathbb{B}}(t) = \mathbb{B} + \mathbb{B}_{aw}E_c(\sigma(t))$ , de forma que  $\mathcal{N}(\sigma(t))h(t) = 0, \forall h(t) \neq 0$ .  $Q \in \mathbb{R}^{(2n+2n_c+m+p+l) \times (n+n_c)}$  é uma variável livre a ser determinada.

Considerando que  $P(\sigma(t))$  e  $\dot{P}(\sigma(t))$  podem ser descritas através de (55) e (59), respectivamente, que  $\sigma(t) \in \mathcal{B}$  e que  $\dot{\sigma}(t) \in \tilde{\mathcal{B}}$ , então, nos vértices  $v_g$  e  $\tilde{v}_d$  dos polítopos  $\mathcal{B}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$ ,  $\mathcal{M}$  é exatamente igual a (65). Da mesma forma, no vértice  $v_g$ ,  $\mathcal{N}(\sigma(t))$  é igual a (66). Portanto, por argumentos de convexidade, se (62) é verificada para todos os vértices  $v_g$ ,  $\tilde{v}_d$  e matrizes  $\mathbb{A}_j, F_j, P_j, E_{c_j}$  e  $G_j, g = 1, \dots, 2^N, d = 1, \dots, 2^N, j = 1, \dots, N$  então  $\mathcal{M} < 0, \forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$  e  $\forall \dot{\sigma}(t) \in \tilde{\mathcal{B}}$ .

A condição (63) garante que  $\mathcal{Z}_1 \subset \bigcap_{g=1}^{2^N} S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], G_0 + \hat{G}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], u_0)$  e, conseqüentemente, que a versão LPV da condição de setor generalizada (9) (PALMEIRA; GOMES DA SILVA JR.; FLORES, 2018) é verificada para todo  $z(t) \in \Omega(P(\sigma(t)), 1), \forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$ .

Por último, a condição (64) garante que  $\mathcal{J}_1 \subseteq \Omega(P, 1) = \mathcal{Z}_0$ , portanto, existe  $t = t_3 \geq t_2$  de forma que  $z(t_3) \in \Omega(P, 1)$ . Então,  $\forall t \geq t_3$  garante-se que as trajetórias do sistema irão convergir de  $\mathcal{Z}_0$  para  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ , conforme estabelecido pelo Teorema 1, visto que as matrizes  $P, R, F_0, E_{c_0}, F_j$  e  $E_{c_j}, j = 1, \dots, N$  foram obtidas pela solução de **PO1** ou **PO2**.  $\square$

A partir do Teorema 2, é possível propor um problema de otimização que vise maximizar  $\mathcal{Z}_1$ . Considere um conjunto  $\Omega(\gamma_2 P, 1) \subset \mathcal{Z}_1$ , de forma que a minimização de  $\gamma_2$  implicará na maximização de  $\Omega(\gamma_2 P, 1)$  e, conseqüentemente, de  $\mathcal{Z}_1$ .

**PO3:** min  $\gamma_2$   
sujeito à

$$\begin{aligned} \gamma_2 P &\geq (P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}]) \\ 0 &\leq \gamma_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (69)$$

Condições (62), (63) e (64).

Note que o conjunto  $\Omega(\gamma_2 P, 1)$  é uma versão escalonada de  $\Omega(P, 1)$  obtido através da solução de **PO1** ou **PO2**, portanto, é possível calcular um escalar  $\alpha_2 = 1/\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} > 0$  que representa o quanto este conjunto cresceu nas direções  $x_k, k = 1, \dots, f$ . Contudo, observe que  $\mathcal{Z}_1 \supseteq \Omega(\gamma_2 P, 1)$ , uma vez que  $\bigcap_{g=1}^{2^N} \Omega(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{(n+n_c)}], 1)$  não necessariamente apresenta forma elipsoidal.

Assim como no problema de síntese, as condições propostas no Teorema 2 só serão LMIs caso haja conhecimento prévio dos escalares  $\lambda_2$  e  $\eta_2$ , o que sugere a realização de varreduras nestas duas variáveis para a solução do **PO3**. Para simplificar o procedimento, sugere-se novamente a fixação prévia de um coeficiente de decaimento exponencial  $\bar{\lambda}_2$  desejado, de forma que seja possível definir  $\lambda_2$  a partir da relação  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2/(3\eta_2 - 1)$ . Desta forma, basta varrer a variável  $\eta_2$  para se obter uma solução sub-ótima para um determinado  $\bar{\lambda}_2$ .

A solução do Problema 2 pode ser resumida no algoritmo a seguir:

1. Defina as direções de maximização  $x_k$  e  $d_o$  e especifique uma taxa de decaimento exponencial  $\bar{\lambda}_1$  desejada;
2. Resolva **PO1** ou **PO2** a partir de uma varredura na variável  $\eta_1$ , resultando nas matrizes  $F_0, E_{c_0}, F_j, E_{c_j}, P, R$  e  $T$ ;
3. Especifique uma taxa de decaimento exponencial  $\bar{\lambda}_2$  e resolva o **PO3** através de uma varredura na variável  $\eta_2$ , obtendo um novo conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{Z}_1$ .

**Observação 3** *O Problema 1 e o Problema 2 poderiam ser condensados em apenas um problema de síntese, considerando somente uma função candidata de Lyapunov quadrática dependente de parâmetros. Contudo, para que se obtenha condições de síntese não-lineares apenas nas variáveis  $\lambda_2, \eta_2$  e  $P$  neste cenário, seria necessário considerar uma estrutura fixa para a matriz  $Q$ , na forma  $Q' = [Q'_1 \quad Q'_2 \quad 0'_{(n+n_c) \times m} \quad 0_{(n+n_c) \times (p+l)'}]'$ , com  $Q_1 = Q_2 = \bar{Q} = \bar{Q}' \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$  durante a aplicação do lema de Finsler, o que restringe os graus de liberdade do problema. Por conta disto, optou-se por um procedimento em duas etapas, resultando em uma abordagem menos conservadora e que efetivamente aumenta a estimativa do conjunto de condições iniciais admissíveis, conforme será demonstrado nos exemplos numéricos a seguir.*

### 3.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção, dois exemplos numéricos serão apresentados para ilustrar o método:

**Exemplo 1:** Planta SISO de dimensão unitária ( $n = m = p = l = 1$ ) e um parâmetro variante. O objetivo deste exemplo é ilustrar as regiões consideradas na abordagem por conjuntos terminais, bem como o ganho na estimativa da região de atração através da solução de **PO3**, além de ilustrar a convergência e o confinamento das trajetórias do sistema em malha fechada;

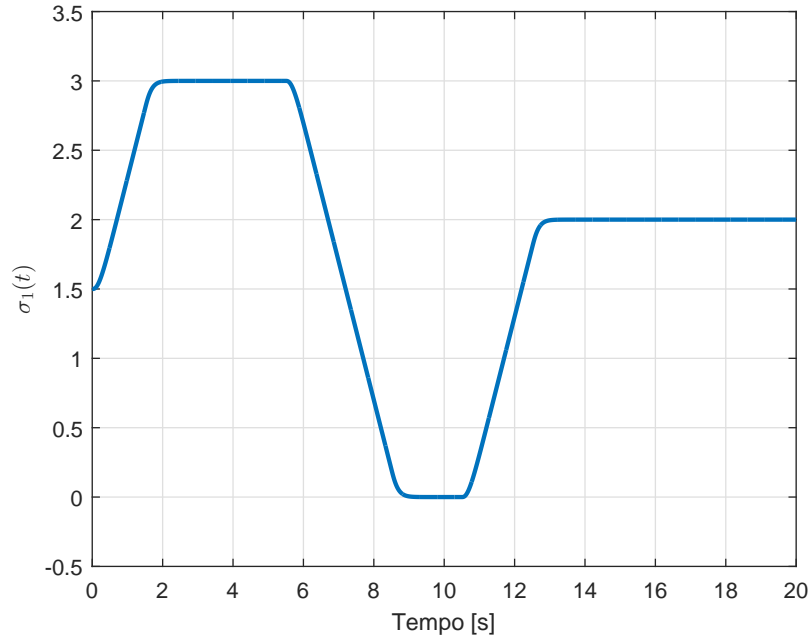
**Exemplo 2:** Planta MIMO, adaptada de (FLORES et al., 2012), considerando dois parâmetros variantes. Neste caso, o objetivo é estudar um exemplo de maior dimensão, sujeito a um elevado número de estados em malha fechada. Também serão analisados os efeitos da introdução do compensador *anti-windup* no sistema, bem como uma comparação entre as abordagens via ganhos independentes de parâmetros e via ganhos escalonados, especialmente no que diz respeito ao conservadorismo das soluções.

Todos os exemplos foram implementados em MATLAB 2012b e Simulink. As condições foram todas descritas através do *parser* YALMIP (LÖFBERG, 2004) e os problemas de otimização foram todos resolvidos utilizando o *solver* Mosek (MOSEK ApS, 2018).

#### 3.4.1 Exemplo 1 - Sistema SISO

O objetivo deste exemplo é ilustrar todos os conjuntos elipsoidais utilizados na solução do problema, a região de operação linear do sistema e as trajetórias  $z(t)$ . O sistema (28) é descrito por:

$$A(\sigma(t)) = (-2 + \sigma_1(t)), \quad B = B_d = 1, \quad C(\sigma(t)) = (5 + 2\sigma_1(t)), \quad u_0 = 1,$$

Figura 10: Variação do parâmetro  $\sigma_1(t)$  ao longo do tempo.

$\sigma_1(t) \in [0, 3]$  e  $\dot{\sigma}_1(t) \in [-3, 3]$ , conforme ilustrado na Figura 10.

Para possibilitar a visualização dos conjuntos e das trajetórias em um plano bidimensional, foi considerado o uso de um integrador como controlador, de forma que  $x_c(t)$  é um vetor de dimensão unitária, i.e.  $n_c = 1$ , resultando em um sistema aumentado com dimensão  $n + n_c = 2$ , permitindo a apresentação no plano  $x(t) \times x_c(t)$ .

As direções de maximização escolhidas foram  $x_1 = [1 \ 0]'$  e  $d_1 = [0.1 \ 0.05]'$ . O objetivo é maximizar a estimativa da região de atração, portanto, **PO1** será resolvido e o coeficiente de decaimento exponencial foi arbitrado em  $\bar{\lambda}_1 = 1.2$ . Uma solução sub-ótima para **PO1** é obtida com  $\eta_1 = 50$  e  $\lambda_1 = 0.0081$ , resultando em  $\alpha_1 = 0.2338$  e

$$P = \begin{bmatrix} 18.2995 & -4.3919 \\ -4.3919 & 2.0204 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0.7558 & -1.5116 \\ -1.5116 & 3.0237 \end{bmatrix} \times 10^6,$$

$$F_0 = [-16.0136 \ 3.9873], F_1 = [-1.4209 \ 0.0699],$$

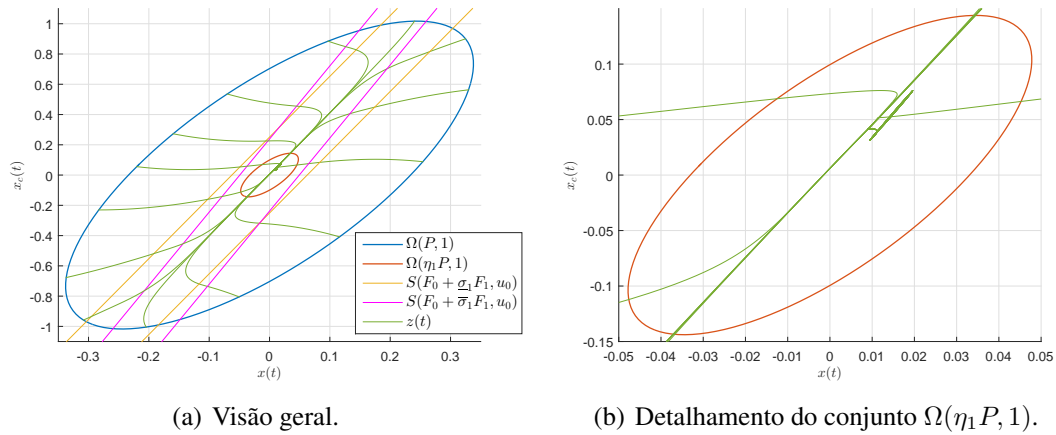
$$E_{c_0} = 0.6007, E_{c_1} = 0.0933,$$

de forma que  $q_{max} = d_1$  e  $q'_{max} R q_{max} = 1$ .

O sistema em malha fechada é então simulado considerando os sinais  $r(t) = 0.1 \ \forall t \geq 0s$  e  $d(t) = 0.05 \ \forall t \geq 5s$  e diversas condições iniciais  $z(0)$  na fronteira do elipsoide  $\Omega(P, 1)$ , i.e.  $z(0)' P z(0) = 1$ . As diversas trajetórias  $z(t)$  obtidas são apresentas no plano  $x(t) \times x_c(t)$  da Figura 12(a), junto com os elipsoides  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(\eta_1 P, 1)$  e as regiões lineares  $S(F_0 + \underline{\sigma}_1 F_1, u_0)$  e  $S(F_0 + \bar{\sigma}_1 F_1, u_0)$ . A Figura 12(b) apresenta o detalhamento do conjunto  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ . Observe que de fato todas as trajetórias iniciais na fronteira de  $\Omega(P, 1)$  convergiram para o conjunto terminal  $\Omega(\eta_1 P, 1)$  e lá permaneceram confinadas, somente ocorrendo mudanças nos pontos de equilíbrio, tanto por conta da variação do parâmetros  $\sigma_1(t)$ , quanto pela ocorrência de uma perturbação iniciada em  $t = 5s$ .

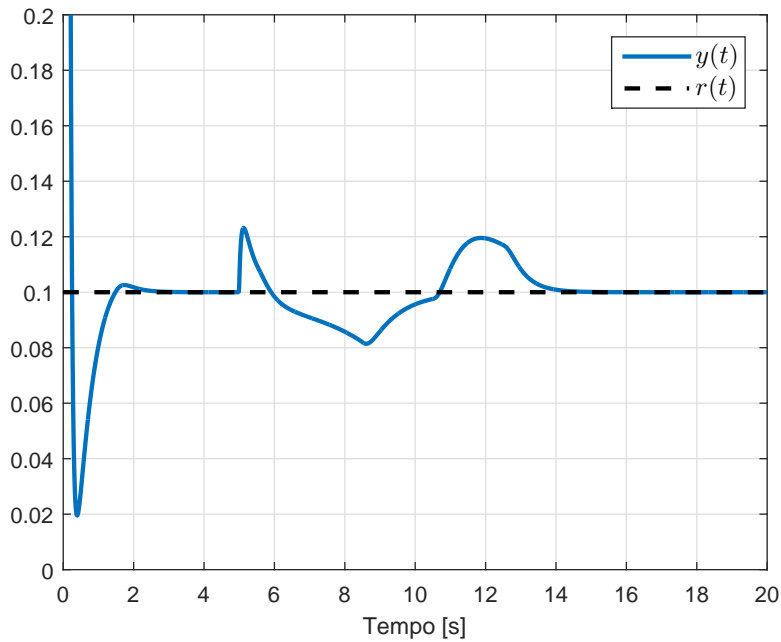
Considerando ainda a mesma solução para o problema de síntese apresentada, seja  $z(0) = [0.2336 \ 0]'$ , tal que  $z(0) \in \Omega(P, 1)$ . O sistema é então simulado com os mesmos parâmetros de simulação utilizados nas simulações anteriores, i.e.  $r(t) = 0.1 \ \forall t \geq 0s$  e

Figura 11: Plano  $x(t) \times x_c(t)$  e trajetórias  $z(t)$  iniciadas na fronteira de  $\mathcal{Z}_0$ .



$d(t) = 0.05 \forall t \geq 5s$ . A Figura 12 apresenta os sinais de referência e saída, a Figura 12(a) apresenta o sinal de controle e o erro de seguimento percentual, enquanto a Figura 14 apresenta o produto  $z(t)'Pz(t)$  ao longo do tempo.

Figura 12: Saída do sistema em malha fechada e sinal de referência.

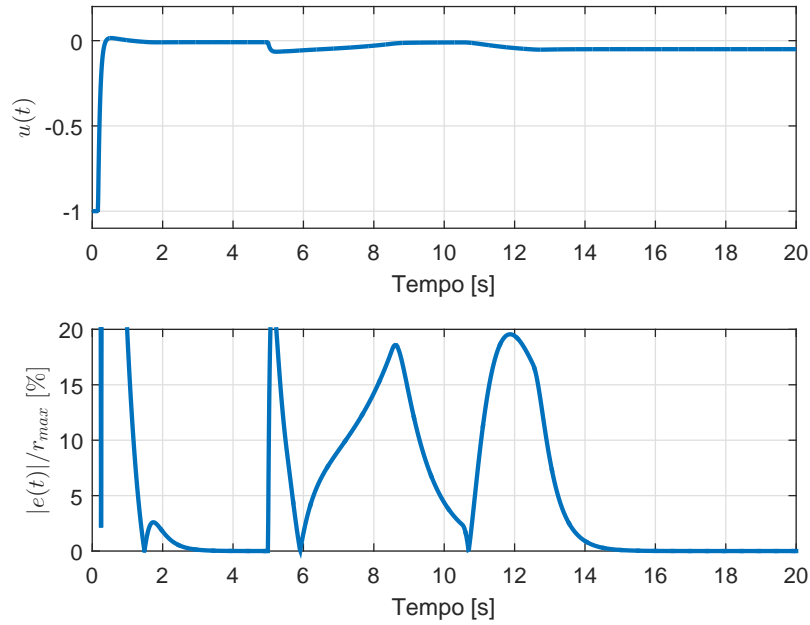


Considere agora uma solução sub-ótima para **PO3**, com  $\bar{\lambda}_2 = 1.2$ ,  $\eta_2 = 3$  e  $\lambda_2 = 0.1500$ , que resulta em  $\gamma_2 = 0.6530$  e, conseqüentemente, em  $\alpha_2 = 0.2893$ , e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 11.1008 & -2.2496 \\ -2.2496 & 0.8672 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} -0.0796 & 0.0552 \\ 0.0552 & -0.0376 \end{bmatrix}.$$

Assim como anteriormente, o sistema em malha fechada é então simulado para diversas condições iniciais  $z(0)$ , contudo, desta vez na fronteira de  $\mathcal{Z}_1 = \Omega(P_0 + \underline{\sigma}_1 P_1, 1) \cap \Omega(P_0 + \bar{\sigma}_1 P_1, 1)$ . Os sinais de referência e perturbação seguem com as mesmas características apresentadas anteriormente, assim como o parâmetro  $\sigma_1(t)$ . A Figura 16(a)

Figura 13: Sinal de controle e erro de seguimento percentual.



apresenta as diversas trajetórias  $z(t)$  obtidas, no plano  $x(t) \times x_c(t)$ , junto com os elipsoides  $\Omega(P_0 + \underline{\sigma}_1 P_1, 1)$ ,  $\Omega(P_0 + \bar{\sigma}_1 P_1, 1)$ ,  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ , o que permite comparar visualmente o tamanho de  $\mathcal{Z}_0$  e  $\mathcal{Z}_1$ , ao mesmo tempo que é possível visualizar a convergência de todas as trajetórias. A Figura 16(b) apresenta o detalhamento do conjunto terminal  $\mathcal{J}_0$ , que permite verificar que todas as trajetórias iniciadas em  $\mathcal{Z}_1$  convergiram para o seu interior e lá permaneceram confinadas.

### 3.4.2 Exemplo 2 - Sistema MIMO

Considere a planta LPV MIMO adaptada de (FLORES et al., 2012), onde

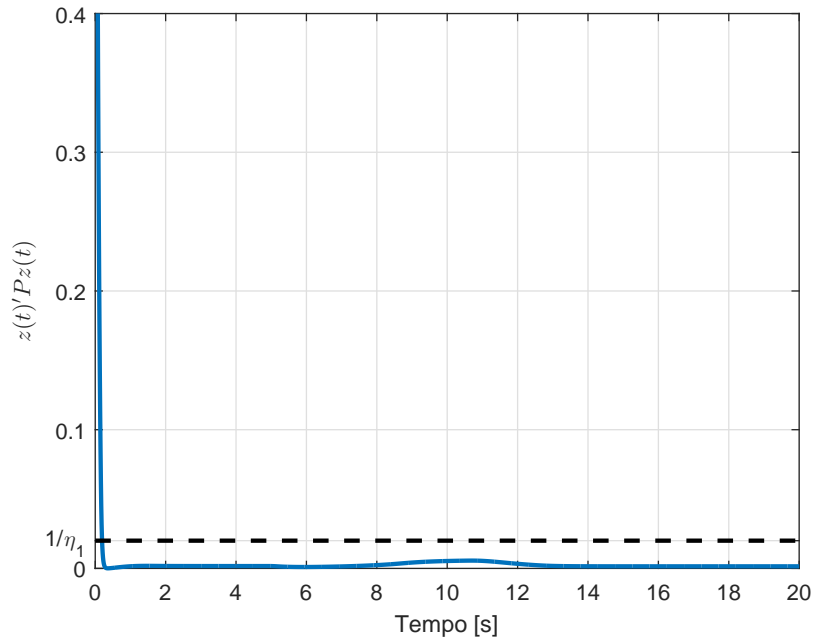
$$A(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 1 \\ -100 & -30 - \sigma_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -37 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -19 + \sigma_2(t) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -51 \\ 17 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 11 & 0 \\ 3 & 23 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} 10 & 20 - \sigma_1(t)/5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 + \sigma_2(t)/5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 = [10 \quad 5],$$

$\sigma_1(t) \in [0, 25]$ ,  $\sigma_2(t) \in [0, 17]$ ,  $\dot{\sigma}_1(t) \in [-3.5, 3.5]$  e  $\dot{\sigma}_2(t) \in [-3.5, 3.5]$ , conforme ilustrado na Figura 16.

Deseja-se seguir sinais senoidais com frequências  $\omega_{r_1} = 2\pi$  rad/s e  $\omega_{r_2} = \sqrt{2}\pi$  rad/s e rejeitar sinais senoidais com frequências  $\omega_{d_1} = 0.4\sqrt{5}\pi$  rad/s e  $\omega_{d_2} = \sqrt{2}\pi$  rad/s. Assim, para contemplar todas as frequências de interesse, são necessários considerar três modos com frequências  $\omega_1 = 2\pi$  rad/s,  $\omega_2 = \sqrt{2}\pi$  rad/s e  $\omega_3 = 0.4\sqrt{5}\pi$  rad/s. Para o atendimento destes requisitos de seguimento/rejeição, um controlador *notch*-ressonante

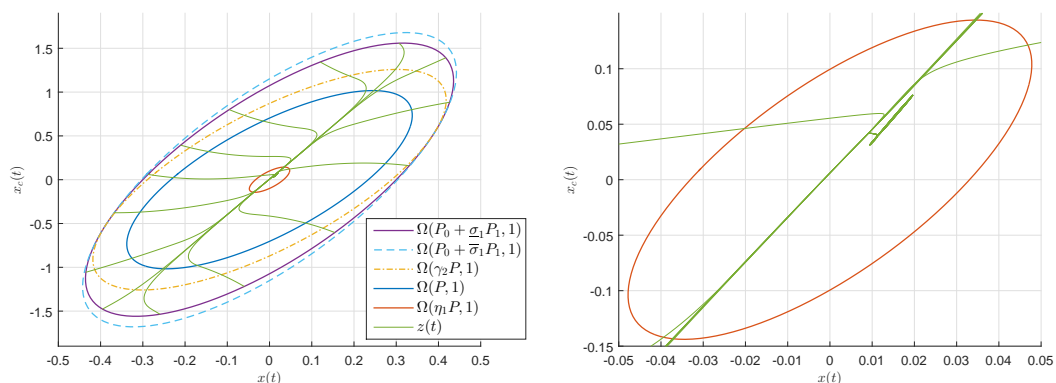
Figura 14: Produto  $z(t)'Pz(t)$  ao longo do tempo.

sintonizado nas frequências  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ , com  $\zeta_h = 0.01$  e  $\zeta_z = 0.99$ , é implementado em cada um dos dois canais de erro do sistema. O resultado é um sistema aumentado com  $n + n_c = 28$  estados.

As condições iniciais admissíveis do sistema em malha fechada devem ser maximizadas na direção  $x_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times n_c}]'$ , ao mesmo tempo que as amplitudes de referências/perturbações devem atender, no mínimo,  $d_1 = [1 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.25]'$ . O decaimento exponencial foi arbitrado como  $\bar{\lambda}_1 = 4$ .

Serão avaliadas três casos de síntese distintos:

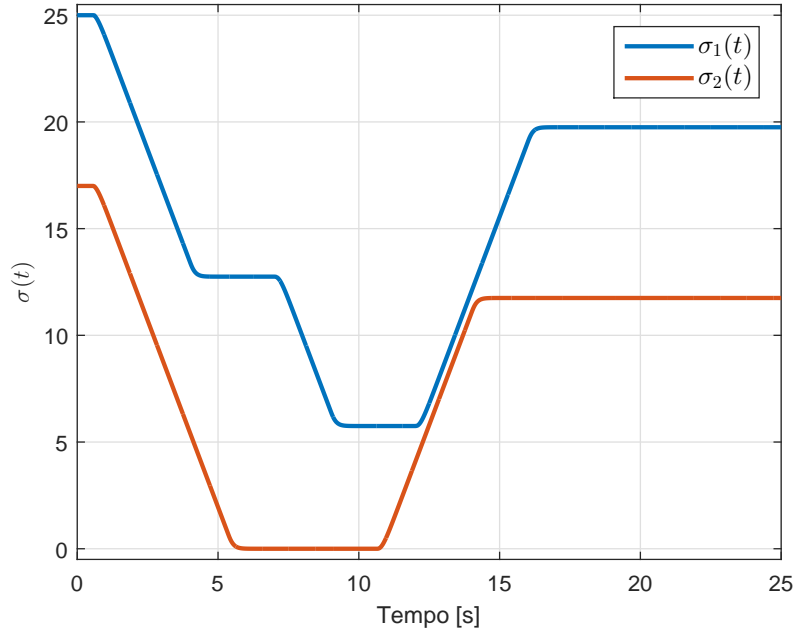
- I. Ganhos de realimentação e de compensação *anti-windup* escalonados;
- II. Ganhos de realimentação e de *anti-windup* independente de parâmetros, i.e.  $F_j = 0$ ,  $M_j = 0$  e  $X_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , nas condições (39), (40) e (41);

Figura 15: Plano  $x(t) \times x_c(t)$  e trajetórias  $z(t)$  iniciadas na fronteira de  $\mathcal{Z}_1$ .

(a) Visão geral.

(b) Detalhamento do conjunto  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ .

Figura 16: Variação dos parâmetros  $\sigma(t)$  ao longo do tempo.



### III. Ganhos de realimentação escalonados, mas sem a existência de compensação *anti-windup*, i.e. $M_j = 0$ nas condições (39), (40) e (41).

Considerando o caso I, uma solução sub-ótima do **PO1** é obtida para  $\eta_1 = 2450$  e  $\lambda_1 = 5.4429 \times 10^{-4}$ , resultando em  $\alpha_1 = 25.3569$  e  $q_{max} = 1.0043d_1$ . Com relação ao caso II, uma solução sub-ótima de **PO1** é obtida para  $\eta_1 = 123$  e  $\lambda_1 = 0.0109$ , que fornece  $\alpha_1 = 10.6864$  e  $q_{max} = 1.0034d_1$ . Por fim, uma solução sub-ótima de **PO1** é obtida para o caso III com  $\eta_1 = 1.0450$  e  $\lambda_1 = 1.8735$ , que resulta em  $\alpha_1 = 3.2592$  e  $q_{max} = 1.0019d_1$ .<sup>1</sup>

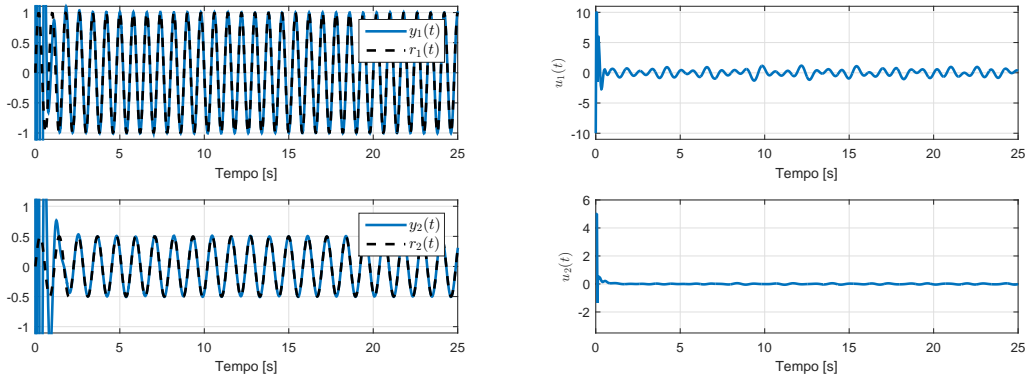
Comparando os resultados dos casos I e II percebe-se que a introdução de ganhos escalonados reduz consideravelmente o conservadorismo das condições de síntese, resultando em um  $\alpha_1$  mais de dois vezes maior quando comparado com os resultados obtidos com ganhos independentes de parâmetros. Agora, comparando os casos I e III, fica claro que a adição dos graus de liberdade referentes ao compensador *anti-windup* é de fundamental importância para a redução do conservadorismo das soluções, permitindo um aumento do valor de  $\alpha_1$  em mais sete vezes.

O sistema é então simulado com os ganhos obtidos como resultado do caso I, os sinais exógenos tem característica senoidal, com referências  $r_1(t) = \text{sen}(1.25\omega_{0_{r_1}}t)$ ,  $r_2(t) = 0.5\text{sen}(1.25\omega_{0_{r_2}}t)$ , ambas iniciando em  $t = 0$ s e perturbações  $d_1(t) = 0.5\text{sen}(1.25\omega_{0_{d_1}}t)$ ,  $d_2(t) = 0.25\text{sen}(1.25\omega_{0_{d_2}}t)$ , ambas incidindo no sistema a partir de  $t = 7$ s, ou seja, os sinais apresentam máximas amplitudes admissíveis e um desvio de +25% em suas frequências quando comparado às frequências de projeto. As condições iniciais são  $z(0) = 26.0419x_1$ , de forma  $z(0)'Pz(0) = 1$ , i.e. máximas possíveis na direção  $x_1$ , na fronteira de  $\Omega(P, 1)$ . A Figura 18(a) apresenta as saídas do sistema em malha fechada, a Figura 18(b) apresenta os sinais de controle e a Figura 19(a) apresenta o erro de seguimento em malha fechada. Por fim, o produto  $z(t)'Pz(t)$  ao longo do tempo é apresentado

<sup>1</sup>O raio de factibilidade das soluções do solver Mosek foi limitado em  $5 \times 10^4$ , a fim de evitar problemas de condicionamento das matrizes resultantes.

na Figura 19(b).

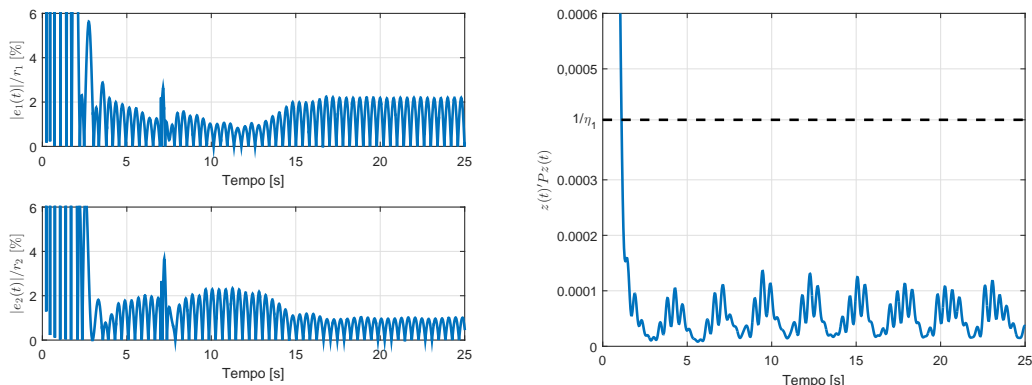
Figura 17: Sinais de saída e de controle.



(a) Saídas do sistema em malha fechada.

(b) Sinais de controle.

Figura 18: Sinais de erro e produto  $z(t)'Pz(t)$ .



(a) Erros de seguimento percentuais.

(b) Produto  $z(t)'Pz(t)$  ao longo do tempo.

Observe que, mesmo ocorrendo saturação de posição no sinal de controle, variação de parâmetros da planta, presença de perturbações e um desvio de +25% nas frequências dos sinais de interesse, o controlador foi capaz de conduzir a trajetória do sistema para uma trajetória de equilíbrio, de forma que o erro em regime permanente se manteve limitado a menos de 3%.

Considere agora a aplicação do **PO3** na solução obtida para o caso I, com  $\bar{\lambda}_2 = 4$ . Uma solução sub-ótima é obtida para  $\eta_2 = 5$  e  $\lambda_2 = 0.2857$ , resultando em  $\gamma_2 = 0.7301$  e, conseqüentemente em  $\alpha_2 = 29.6757$ , o que representa um aumento nas condições iniciais admissíveis na direção  $x_1$  de, pelo menos, 17% em relação ao obtido na solução do problema de síntese, visto que, neste caso,  $\bigcap_{g=1}^4 \Omega(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{n+n_c}], 1) \supset \Omega(\gamma_2 P, 1)$ .

### 3.5 Considerações Finais

Este capítulo apresentou um método de síntese de controladores e compensadores *anti-windup* escalonados para lidar com o problema de seguimento/rejeição de sinais em



sistemas LPV sujeitos a saturação na amplitude do sinal de controle. Em resumo, o método proposto se baseia na descrição da não-linearidade de saturação como uma zona-morta descentralizada, de modo que é possível utilizar o conceito de condição de setor generalizada para descrição de uma região de validade. Um conjunto de condições iniciais admissíveis é então posicionado no interior desta região e os ganhos de realimentação e compensação *anti-windup* são calculados de forma a garantir que todas as trajetórias do sistema iniciadas neste conjunto irão convergir para um conjunto terminal, este contido no interior da região linear do sistema, contanto que os sinais exógenos obedeçam certas condições.

No intuito de obter um conjunto de condições iniciais maior, um segundo procedimento foi proposto, fazendo uso de uma função candidata de Lyapunov dependente de parâmetros. Dois exemplos ilustraram o método e discutiram os benefícios de sua utilização, bem como as vantagens da realização do procedimento de análise para aumento do conjunto de condições iniciais.

## 4 SATURAÇÃO EM AMPLITUDE E EM TAXA DE VARIAÇÃO

Neste capítulo será proposta uma solução para o problema de seguimento/rejeição de referências/perturbações para sistemas LPV sujeitos à saturação em amplitude e em taxa de variação do sinal de controle. A proposta é bastante semelhante a apresentada no Capítulo 3, contudo, leva-se em consideração um modelo de atuador com as saturações encadeadas, além de se fazer uso da condição de setor generalizada para ambas as saturações. Serão propostos dois procedimentos, um de síntese, baseado em uma função candidata de Lyapunov independente de parâmetros, onde serão apresentadas condições para a síntese dos ganhos escalonados de realimentação de estados e de compensação *anti-windup*, e um de análise, baseado em uma função candidata de Lyapunov dependente de parâmetros, que visa aumentar o tamanho do conjunto de condições iniciais admissíveis para o qual o seguimento/rejeição é garantido. Os mesmos exemplos numéricos do Capítulo 3 ilustram o método proposto.

### 4.1 Preliminares

Considere um sistema LPV descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + Bw(t) + B_d d(t) \\ y(t) = C(\sigma(t))x(t) \\ e(t) = r(t) - y(t) \end{cases} \quad (70)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados da planta,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entradas,  $d(t) \in \mathbb{R}^l$  é um vetor de perturbações exógenas,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saídas,  $e(t) \in \mathbb{R}^p$  é o erro de seguimento e  $r(t) \in \mathbb{R}^p$  é um vetor de referências a serem seguidas.

As matrizes  $A(\sigma(t))$ ,  $B$ ,  $B_d$  e  $C(\sigma(t))$  possuem dimensões apropriadas e os pares  $(A(\sigma(t)), B)$  e  $(C(\sigma(t)), A(\sigma(t)))$  são controláveis e observáveis  $\forall t$ , respectivamente. Assim como na Seção 3.1, é assumido que o número de entradas é maior ou igual ao número de saídas.

Conforme apresentado no Capítulo 2, o sinal  $w(t)$  leva em conta a dinâmica do atuador descrita por:

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \text{sat}_r(-\Xi x_a(t) + \Xi \text{sat}_p(u(t))) \\ w(t) = x_a(t) \end{cases} \quad (71)$$

onde  $\Xi \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz diagonal formada pelos termos escalares  $\xi_i$ , conforme descrito na Seção 2.1.2.

Assim como na Seção 3.1, assuma que os sinais de interesse são periódicos ou do tipo salto/degrau, tal que um controlador dinâmico na forma

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t)$$

é inserido no caminho direto entre o sinal de erro e a entrada da planta. O vetor  $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$  denota os estados do controlador e as matrizes  $A_c$  e  $B_c$  são determinadas de acordo com o controlador considerado, conforme descrito nas Seções 2.2.2 a 2.2.4.

As não-linearidades do tipo saturação de (71) são descritas tal qual apresentado na Seção 2.1, com limites simétricos de saturação de posição  $\pm u_0 \in \mathbb{R}^m$  e limites simétricos de saturação de velocidade  $\pm u_r \in \mathbb{R}^m$ . Note que a dinâmica do atuador (71) está sujeita a saturações encadeadas, que podem ser reescritas como zonas-mortas descentralizadas (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006):

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \text{sat}_p(u(t)) - u(t), \\ \psi_2(t) &= \text{sat}_r(A_\xi z(t) + \Xi u(t) + \Xi \psi_1(t)) - (A_\xi z(t) + \Xi u(t) + \Xi \psi_1(t)), \end{aligned} \quad (72)$$

onde  $z(t) = [x(t)' \quad x_c(t)' \quad x_a(t)']' \in \mathbb{R}^{(n+n_c+m)}$  é o vetor de estados aumentados planta, controlador e atuador e  $A_\xi \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c+m)}$  é uma matriz relacionada ao comportamento do atuador, dada por:

$$A_\xi = \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & 0_{m \times n_c} & -\Xi \end{bmatrix}.$$

Se todos os estados da planta, do controlador e do atuador estão disponíveis para realimentação, então considere a introdução de uma realimentação de estados estabilizante escalonada, na forma

$$u(t) = F(\sigma(t))z(t) = \begin{bmatrix} F_s(\sigma(t)) & F_c(\sigma(t)) & F_a(\sigma(t)) \end{bmatrix} z(t), \quad (73)$$

onde  $F(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c+m)}$  é o ganho de realimentação escalonado a ser determinado na solução do problema, sendo  $F_s(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a parcela do ganho referente aos estados da planta,  $F_c(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$  a parcela referente aos estados do controlador e, por fim,  $F_a(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a parcela referente aos estados do atuador.

Considere um controlador com compensação *anti-windup* escalonada, tal como (30), atuando sobre a não-linearidade  $\psi_1(t)$ , ou seja

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) + B_c E_c(\sigma(t)) \psi_1(t). \quad (74)$$

Observe que o controlador (74) só apresenta compensação *anti-windup* para a saturação em amplitude. Isto ocorre por que a saturação na taxa de variação é relacionada à dinâmica do atuador, a qual usualmente não se tem acesso (TARBOURIECH; TURNER, 2009). Ademais, o modelo do atuador considerado é virtual, o que acaba eliminando o sentido físico da compensação.

Combinando (70), (71), (72), (73) e (74) se chega na descrição da dinâmica do sistema em malha fechada

$$\dot{z}(t) = (\mathbb{A}(\sigma(t)) + \mathbb{B}\Xi F(\sigma(t)))z(t) + \mathbb{B}\psi_2(t) + (\mathbb{B}\Xi + \mathbb{B}_{aw}E_c(\sigma(t)))\psi_1(t) + \mathbb{B}_q q(t), \quad (75)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\sigma(t)) &= (A_A(\sigma(t)) + \mathbb{B}A_\xi), \quad A_A(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} A(\sigma(t)) & 0_{n \times n_c} & B \\ -B_c C(\sigma(t)) & A_c & 0_{n_c \times m} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times n_c} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \\ \mathbb{B} &= \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ 0_{n_c \times m} \\ I_m \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_q = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} & B_d \\ B_c & 0_{n_c \times l} \\ 0_{m \times p} & 0_{m \times l} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{B}_{aw} = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ B_c \\ 0_{m \times p} \end{bmatrix}, \quad q(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ d(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que o sistema em malha fechada é de dimensão  $n_a = n + n_c + m$ , i.e.  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_a=(n+n_c+m)}$ .

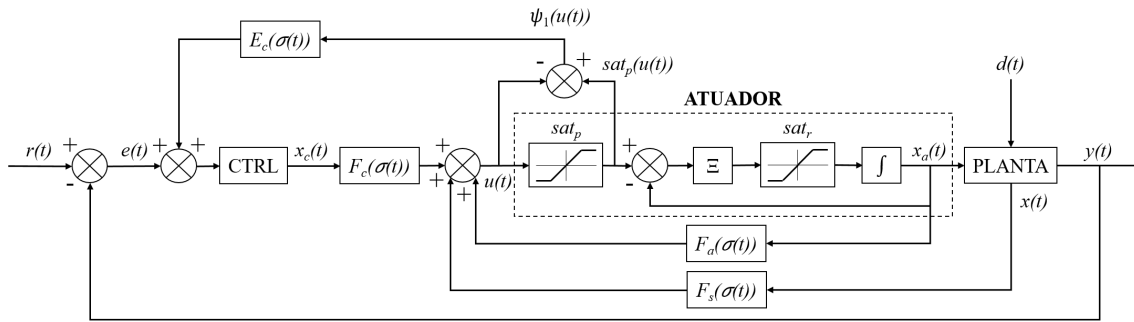
As regiões de operação linear da planta para as saturações de amplitude e de taxa de variação são definidas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} S(F(\sigma(t)), u_0) &= \{z(t) \in \mathbb{R}^{n_a}; -u_{0(i)} \leq F_{(i)}(\sigma(t))z(t) \leq u_{0(i)}\}, \\ S(F(\sigma(t)), \Xi, u_r) &= \{z(t) \in \mathbb{R}^{n_a}; -u_{r(i)} \leq (A_{1(i)} + \Xi_{(i)}F(\sigma(t)))z(t) \leq u_{r(i)}\}, \end{aligned} \quad (76)$$

$i = 1, \dots, m$ .

A Figura 19 ilustra o sistema em malha fechada proposto.

Figura 19: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.



Tal como na Seção 3.1, o vetor  $\sigma(t)$  segue sendo tal que  $\sigma(t) \in \mathcal{B}$ . Da mesma forma, as matrizes dependentes de  $\sigma(t)$  são assumidas afins nestes parâmetros, como segue:

$$\mathbb{A}(\sigma(t)) = \mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t) \mathbb{A}_j, \quad F(\sigma(t)) = F_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t) F_j, \quad E_c(\sigma(t)) = E_{c0} + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t) E_{c_j}.$$

## 4.2 Problema de Síntese

Em linhas gerais, o problema de seguimento/rejeição de referências/perturbações em sistemas LPV sujeitos a saturação em amplitude e saturação em taxa de variação é bastante semelhante ao problema apresentado na Seção 3.2. A grande diferença está na necessidade de considerar não apenas a não-linearidade de saturação em posição, mas também a de saturação em velocidade. Isto implica em uma formulação que trabalhe com duas zonas-mortas descentralizadas e duas condições de setor generalizadas, uma para cada um dos tipos de saturação. Portanto, é necessário considerar regiões distintas de validade das condições de setor. Considerando uma abordagem por conjuntos terminais, também é necessário levar em conta as regiões de operação linear do sistema com as duas não-linearidades, definidas em (76).

Considere inicialmente os seguintes conjuntos:

- $\mathcal{Z}_0 \rightarrow$  um possível conjunto de condições iniciais admissíveis;
- $\mathcal{Q}_0 \rightarrow$  conjunto de amplitudes de referências e perturbações admissíveis;
- $\mathcal{J}_0 \rightarrow$  conjunto terminal contido na interseção do conjunto de condições iniciais admissíveis com a interseção entre ambas as regiões de operação linear do sistema, i.e.  $\mathcal{J}_0 \subset (\mathcal{Z}_0 \cap S(F(\sigma(t)), u_0) \cap S(F(\sigma(t)), \Xi, u_r))$ .

Então, pode-se formular o seguinte problema:

**Problema 3** *Calcular um ganho de realimentação de estados escalonado  $F(\sigma(t))$  e um ganho de compensação anti-windup escalonado  $E_c(\sigma(t))$ , tais que,  $\forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$ ,  $\forall z(0) \in \mathcal{Z}_0$  e  $\forall q(t) \in \mathcal{Q}_0$ , todas as trajetórias do sistema (75) convergem assintoticamente para  $\mathcal{J}_0$  em um tempo finito  $t_1$  e permanecem em seu interior  $\forall t \geq t_1$ .*

Observe a semelhança entre o Problema 1 e o Problema 3. Ambos tratam da síntese de ganhos de realimentação e de compensação *anti-windup*. A diferença fundamental reside no conjunto terminal, que, no Problema 3 deve também estar contido na região de linearidade da saturação em taxa de variação.

Novamente, a garantia de confinamento das trajetórias no interior de  $\mathcal{J}_0$  significa que o sistema passa a se comportar de forma puramente linear, ou seja,  $\psi_1(t) = 0$  e  $\psi_2(t) = 0$ ,  $\forall t \geq t_1$ . Dado que não ocorre mais nenhum tipo de saturação, a dinâmica do sistema passa a ser regida por

$$\dot{z}(t) = (\mathbb{A}(\sigma(t)) + \mathbb{B}\Xi F(\sigma(t)))z(t) + \mathbb{B}_q q(t), \quad \forall t \geq t_1,$$

de forma que o PMI, implementado pelo controlador (74), volta a ser condição suficiente para garantia de seguimento/rejeição de referências/perturbações, caso  $\sigma(t)$  assuma comportamento estacionário. Assim como no Problema 1, novamente existem dois problemas de otimização implícitos no Problema 3: a maximização de  $\mathcal{Z}_0$  ou a maximização de  $\mathcal{Q}_0$ .

Da mesma forma que em (36), os conjuntos  $\mathcal{Z}_0$ ,  $\mathcal{Q}_0$  e  $\mathcal{J}_0$  são definidos como conjuntos elipsoidais:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \Omega(P, 1) = \{z(t) \in \mathbb{R}^{(n+n_c+m)}; z(t)'Pz(t) \leq 1\}, P = P' > 0, \\ \mathcal{J}_0 &= \Omega(\bar{J}, 1) = \{z(t) \in \mathbb{R}^{(n+n_c+m)}; z(t)'\bar{J}z(t) \leq 1\}, \bar{J} = \eta_1 P, \eta_1 > 1, \\ \mathcal{Q}_0 &= \Omega(R, 1) = \{q(t) \in \mathbb{R}^{(p+l)}; q(t)'Rq(t) \leq 1\}, R = R' > 0. \end{aligned} \quad (77)$$

onde  $\bar{J} = \eta_1 P$ ,  $\eta_1 > 1$ , i.e.  $\mathcal{J}_0$  será uma versão contraída de  $\mathcal{Z}_0$ .

O teorema a seguir é baseado nos resultados de (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006) e (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009) e apresenta uma possível solução para o Problema 3.

**Teorema 3** *Se existirem matrizes simétricas positivas definidas  $W \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  e  $R \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$ , matrizes  $Y_0, Y_j \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ ,  $X_{11_0}, X_{11_j} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ ,  $X_{22_0}, X_{22_j} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ ,  $X_{21_0}, X_{21_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $M_0, M_j \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , matrizes diagonais  $L_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $L_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e escalares  $\lambda_1 > 0$  e  $\eta_1 > 1$  que satisfaçam*

$$\begin{bmatrix} \hat{\Theta}_g + \bar{\lambda}W & \mathbb{B}\Xi L_1 + \hat{\Gamma}_g & \mathbb{B}L_2 - X'_{22_0} - (\hat{X}_{22}[v_g \otimes I_m])' & \mathbb{B}_q \\ * & -2L_1 & -X'_{21_0} - (\hat{X}_{21}[v_g \otimes I_m])' & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & -2L_2 & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & -\lambda_1 R \end{bmatrix} < 0 \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_g &= \text{He}\{\mathbb{A}_0 W + \mathbb{B}\Xi Y_0 + (\hat{\mathbb{A}}W + \mathbb{B}\Xi \hat{Y})(v_g \otimes I_{n_a})\} \\ \hat{\Gamma}_g &= \mathbb{B}_{aw} M_0 - X'_{11_0} + \mathbb{B}_{aw} \hat{M}(v_g \otimes I_m) - (\hat{X}_{11}[v_g \otimes I_m])' \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} W & * \\ Y_{0(i)} - X_{11_0(i)} + (\hat{Y}_{(i)} - \hat{X}_{11(i)})(v_g \otimes I_{n_a}) & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (79)$$

$$\begin{bmatrix} W & * & * \\ X_{11_0} + \hat{X}_{11}(v_g \otimes I_{n_a}) & 2L_1 & * \\ A_{1(i)}W + \hat{A}_g & \Xi_{(i)}L_1 - X_{21_0(i)} - \hat{X}_{21(i)}(v_g \otimes I_{n_a}) & u_{r(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (80)$$

$$\hat{A}_g = \Xi_{(i)}Y_0 - X_{22_0(i)} + (\Xi_{(i)}\hat{Y} - \hat{X}_{22(i)})(v_g \otimes I_{n_a})$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1 W & * & * \\ Y_{0(i)} + \hat{Y}(v_g \otimes I_{n_a}) & u_{0(i)}^2 & * \\ A_{1(i)}W + \Xi_{(i)}Y_0 + \Xi_{(i)}\hat{Y}(v_g \otimes I_{n_a}) & 0 & u_{r(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (81)$$

para  $i = 1, \dots, m$ ,  $g = 1, \dots, 2^N$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda_1(3\eta_1 - 1)$ ,  $\hat{\mathbb{A}} = [\mathbb{A}_1 \ \mathbb{A}_2 \ \dots \ \mathbb{A}_N]$ ,  $\hat{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_N]$ ,  $\hat{M} = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_N]$ ,  $\hat{X}_{11} = [X_{11_1} \ X_{11_2} \ \dots \ X_{11_N}]$ ,  $\hat{X}_{22} = [X_{22_1} \ X_{22_2} \ \dots \ X_{22_N}]$  e  $\hat{X}_{21} = [X_{21_1} \ X_{21_2} \ \dots \ X_{21_N}]$ , então, os ganhos  $F_0 = Y_0 W^{-1}$ ,  $F_j = Y_j W^{-1}$ ,  $E_{c_0} = M_0 L^{-1}$  e  $E_{c_j} = M_j L^{-1}$  são tais que todas as trajetórias de (75) iniciadas em  $\Omega(P, 1)$ ,  $P = W^{-1}$ , convergem para o conjunto positivamente invariante  $\Omega(\bar{J}, 1) \subset \left( \bigcap_{g=1}^{2^N} (S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], u_0)) \cap \bigcap_{g=1}^{2^N} (S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], \Xi, u_r)) \right)$  em um tempo finito  $t_1$  e permanecem neste conjunto  $\forall t \geq t_1$ , contanto que  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

*Prova.* A prova combina as ideias apresentadas em (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006) e (FLORES; GOMES DA SILVA JR.; SBARBARO, 2009). Considere  $\bar{\mathbb{A}}(t) = (\mathbb{A}(\sigma(t)) + \mathbb{B}\Xi F(\sigma(t)))$ ,  $\bar{\mathbb{B}}(t) = \mathbb{B}\Xi + \mathbb{B}_{aw}E_c(\sigma(t))$  e uma função candidata de Lyapunov quadrática  $V(z(t)) = z(t)'Pz(t)$ . A derivada da função  $V(z(t))$  ao longo das trajetórias de (75) é então descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= z(t)'(\bar{\mathbb{A}}(t)'P + P\bar{\mathbb{A}}(t))z(t) + 2z(t)'P\mathbb{B}_q q(t) + 2z(t)'P\bar{\mathbb{B}}(t)\psi_1(t) \\ &\quad + 2z(t)'P\mathbb{B}\psi_2(t). \end{aligned}$$

Considere agora a aplicação do Lema 1 para a saturação  $\psi_1(t)$ , i.e.  $\psi_{v_0}(v) = \psi_1(t)$  com  $v = u(t) = F(\sigma(t))z(t)$ ,  $v_0 = u_0$ ,  $w = E_{11}(\sigma(t))z(t)$  e  $T = T_1$ , então, se  $z(t) \in S(F(\sigma(t)), E_{11}(\sigma(t)), u_0)$ ,  $\forall t \geq 0$ , segue que

$$\psi_1(t)'T_1(\psi_1(t) + E_{11}(\sigma(t))z(t)) \leq 0$$

é verificada para qualquer matriz  $T_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal positiva definida.

Da mesma forma, considere a aplicação do Lema 1 para a saturação  $\psi_2(t)$ , i.e.  $\psi_{v_0}(v) = \psi_2(t)$  com  $v = (A_\xi + \Xi F(\sigma(t)))z(t) + \Xi\psi_1(t)$ ,  $v_0 = u_r$ ,  $w = E_{22}(\sigma(t))z(t) + E_{21}(\sigma(t))\psi_1(t)$  e  $T = T_2$ , então, se  $z(t) \in S(F(\sigma(t)), E_{22}(\sigma(t)), E_{21}(\sigma(t)), u_r)$ ,  $\forall t \geq 0$ , segue que

$$\psi_2(t)'T_2(\psi_2(t) + E_{22}(\sigma(t))z(t) + E_{21}(\sigma(t))\psi_1(t)) \leq 0$$

é verificada para qualquer matriz  $T_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  diagonal positiva definida.

Logo, se

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &- 2\psi_1(t)'T_1\psi_1(t) - 2\psi_1(t)'T_1E_{11}(\sigma(t))z(t) \\ &- 2\psi_2(t)'T_2\psi_2(t) - 2\psi_2(t)'T_2E_{22}(\sigma(t))z(t) - 2\psi_2(t)'T_2E_{21}(\sigma(t))\psi_1(t) < 0 \end{aligned}$$

então  $\dot{V}(z(t)) < 0$ , contanto que

$$z(t) \in (S(F(\sigma(t)), E_{11}(\sigma(t)), u_0) \cap S(F(\sigma(t)), E_{22}(\sigma(t)), E_{21}(\sigma(t)), u_r)).$$

Para que ocorra a garantia de convergência do conjunto de condições iniciais admissíveis para o conjunto positivamente invariante deve-se aplicar a abordagem por conjuntos terminais. É necessário garantir que  $\dot{V}(z(t)) < 0$  para todo  $z(t)$  e  $q(t)$  tais que  $z(t)'Pz(t) \leq 1$ ,  $z(t)'\eta_1 Pz(t) \geq 1$  e  $q(t)'Rq(t) \leq 1$ , da mesma forma que o apresentando na prova do Teorema 1. Introduzindo estas restrições a  $\dot{V}(z(t))$  obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &- 2\psi_1(t)'T_1\psi_1(t) - 2\psi_1(t)'T_1E_{11}(\sigma(t))z(t) \\ &- 2\psi_2(t)'T_2\psi_2(t) - 2\psi_2(t)'T_2E_{22}(\sigma(t))z(t) - 2\psi_2(t)'T_2E_{21}(\sigma(t))\psi_1(t) \quad (82) \\ &+ \lambda_1(1 - z(t)'Pz(t)) + 3\lambda_1(z(t)'\eta_1 Pz(t) - 1) + \lambda_1(1 - q(t)'Rq(t)) < 0 \end{aligned}$$

Como  $\lambda_1 - 3\lambda_1 + \lambda_1 = -\lambda_1 < 0, \forall t$ , então, segue que (82) é verificada se

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &- 2\psi_1(t)'T_1\psi_1(t) - 2\psi_1(t)'T_1E_{11}(\sigma(t))z(t) \\ &- 2\psi_2(t)'T_2\psi_2(t) - 2\psi_2(t)'T_2E_{22}(\sigma(t))z(t) - 2\psi_2(t)'T_2E_{21}(\sigma(t))\psi_1(t) \quad (83) \\ &- \lambda_1 z(t)'Pz(t) + 3\lambda_1 z(t)'\eta_1 Pz(t) - \lambda_1 q(t)'Rq(t) < 0 \end{aligned}$$

Note que é possível escrever o lado esquerdo de (83) na forma

$$[z(t)' \quad \psi_1(t)' \quad \psi_2(t)' \quad q(t)'] \mathcal{M} \begin{bmatrix} z(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ q(t) \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \Theta(\sigma(t)) + \bar{\lambda}P & P\bar{\mathbb{B}}(\sigma(t)) - E_{11}(\sigma(t))'T_1 & P\mathbb{B} - E_{22}(\sigma(t))'T_2 & P\mathbb{B}_q \\ * & -2T_1 & -E_{21}(\sigma(t))'T_2 & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & -2T_2 & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & -\lambda_1 R \end{bmatrix},$$

$$\Theta(\sigma(t)) = \text{He}\{P(A(\sigma(t)) + \mathbb{B}\Xi F(\sigma(t)))\} \text{ e } \bar{\lambda} = \lambda_1(3\eta_1 - 1).$$

Então, é suficiente que  $\mathcal{M} < 0$  para que (82) seja verificada. Pré- e pós-multiplicando  $\mathcal{M}$  por  $\text{diag}\{P^{-1}, T_1^{-1}, T_2^{-1}, I_{(p+l)}\}$  e realizando as mudanças de variáveis  $W = P^{-1}$ ,  $Y(\sigma(t)) = F(\sigma(t))P^{-1}$ ,  $X_{11}(\sigma(t)) = E_{11}(\sigma(t))P^{-1}$ ,  $X_{22}(\sigma(t)) = E_{22}(\sigma(t))P^{-1}$ ,  $X_{21}(\sigma(t)) = E_{21}(\sigma(t))T_1^{-1}$ ,  $L_1 = T_1^{-1}$ ,  $L_2 = T_2^{-1}$  e  $M(\sigma(t)) = E_c(\sigma(t))T^{-1}$ , chega-se a

$$\bar{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\Theta}(\sigma(t)) + \bar{\lambda}W & \mathbb{B}\Xi L_1 + \bar{\Gamma}(\sigma(t)) & \mathbb{B}L_2 - X_{22}(\sigma(t))' & \mathbb{B}_q \\ * & -2L_1 & -X_{21}(\sigma(t))' & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & -2L_2 & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & -\lambda_1 R \end{bmatrix},$$

$\bar{\Theta}(\sigma(t)) = \text{He}\{\mathbb{A}(\sigma(t))W + \mathbb{B}\Xi Y(\sigma(t))\}$  e  $\bar{\Gamma}(\sigma(t)) = \mathbb{B}_{aw}M(\sigma(t)) - X_{11}(\sigma(t))'$ , de forma que  $\bar{\mathcal{M}} < 0$  também implica em (82).

Observe que  $\mathbb{A}(\sigma(t)) = \mathbb{A}_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)\mathbb{A}_j$  e  $Y(\sigma(t)) = Y_0 + \sum_{j=1}^N \sigma_j(t)Y_j$ , possibilitando a descrição do termo  $\bar{\Theta}(\sigma(t))$  tal como em (45), de modo que, no vértice  $v_g$ , o termo  $\bar{\Theta}(\sigma(t))$  é igual a  $\bar{\Theta}(v_g) = \hat{\Theta}_g = \text{He}\{\mathbb{A}_0 + \mathbb{B}Y_0 + (\hat{\mathbb{A}}W + \mathbb{B}\hat{Y})(v_g \otimes I_{n_a})\}$ . Mesmo raciocínio pode ser aplicado aos termos  $\bar{\Gamma}(\sigma(t))$ ,  $X_{22}(\sigma(t))'$  e  $X_{22}(\sigma(t))$ , mostrando que no vértice  $v_g$  estes termos são iguais a  $\bar{\Gamma}(v_g) = \hat{\Gamma}_g = \mathbb{B}_{aw}M_0 - X'_{11_0} + \mathbb{B}_{aw}\hat{M}(v_g \otimes I_m) - (\hat{X}_{11}[v_g \otimes I_m])'$ ,  $X_{22}(v_g)' = X'_{22_0} + (\hat{X}_{22}[v_g \otimes I_m])'$  e  $X_{21}(v_g)' = X'_{21_0} + (\hat{X}_{21}[v_g \otimes I_m])'$ ,

respectivamente. Com base em argumentos de convexidade, se (78) é verificada para todos os vértices  $v_g$  e matrizes  $\mathbb{A}_j, Y_j, M_j, X_{11_j}, X_{22_j}$  e  $X_{21_j}, j = 1, \dots, N$ , então  $\bar{\mathcal{M}} < 0$   $\forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$ .

Da mesma forma que ocorre na prova do Teorema 1, observe que o termo na posição (1,1) de (78) implica em

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\frac{\bar{\lambda}}{2}V(z(t)) < 0,$$

$\forall z(t) \in \Omega(P, 1) \subset (S(F(\sigma(t)), E_{11}(\sigma(t)), u_0) \cap S(F(\sigma(t)), E_{22}(\sigma(t)), E_{21}(\sigma(t), u_r))),$   
 $\forall z(t) \notin \Omega(\eta_1 P, 1)$  e  $\forall q(t) \in \Omega(R, 1)$ . Então segue que  $V(z(t)) \leq e^{-\frac{\bar{\lambda}}{2}t}V(z(0)) \forall z(0) \in (\Omega(P, 1) \setminus \Omega(\eta_1 P, 1))$ . Ainda, como o conjunto terminal  $\Omega(\eta_1 P, 1)$  é uma versão contraída do conjunto de condições iniciais admissíveis  $\Omega(P, 1)$  existe  $t = t_1$  tal que  $V(z(t_1)) = 1/\eta_1$ , i.e.  $z(t_1)' \eta_1 P z(t_1) = 1$ . Além disso, como  $\dot{V}(z(t)) < 0$  é válido nos limites de  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ , então tem-se que todas as trajetórias que entram em  $\mathcal{J}_0$  permanecem em seu interior para todo  $t \geq t_1$ .

A condição (79) é análoga à condição (40) do Teorema 1, portanto, garante que  $\Omega(P, 1) \subset \bigcap_{j=1}^N S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], E_{11_0} + \hat{E}_{11}[v_g \otimes I_{n_a}], u_0), \hat{E}_{11} = [E_{11_1} \ E_{11_2} \ \dots \ E_{11_N}]$

(TARBOURIECH et al., 2011). A condição (80) garante que  $\Omega(P, 1) \subset (\bigcap_{j=1}^N S(F_0 +$

$\hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], E_{11_0} + \hat{E}_{11}[v_g \otimes I_{n_a}], u_0) \cap \bigcap_{j=1}^N S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], E_{22_0} + \hat{E}_{22}[v_g \otimes I_{n_a}], E_{21_0} +$

$\hat{E}_{21}[v_g \otimes I_m], u_r), \hat{E}_{22} = [E_{22_1} \ E_{22_2} \ \dots \ E_{22_N}], \hat{E}_{21} = [E_{21_1} \ E_{21_2} \ \dots \ E_{21_N}],$

assegurando a verificação de ambas as condições de setor generalizadas  $\forall z(t) \in \Omega(P, 1)$  (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006). Por fim, a condição (81) garante que o conjunto terminal  $\mathcal{J}_0$  estará contido na região de operação linear do sistema

para ambas as saturações, i.e.  $\Omega(\eta_1 P, 1) \subset (\bigcap_{j=1}^N S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], u_0) \cap \bigcap_{j=1}^N S(F_0 +$

$\hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], \Xi, u_r))$ , tendo estrutura similar à da condição (41), porém, considerando também a adição do termo referente à região linear da saturação em velocidade, através do complemento de Schur.  $\square$

Assim como apresentado para o Teorema 1, propõe-se dois problemas de otimização para a obtenção dos ganhos  $F_0, F_j, E_{c_0}$  e  $E_{c_j}$  com base no Teorema 3. A maximização do conjunto de condições iniciais admissíveis pode ser realizada através da solução do seguinte problema de otimização:

**PO4:**  $\min \gamma_1$

sujeito à

Condições (50), (51) (78), (79), (80) e (81).

Por outro lado, a maximização do conjunto de amplitudes de referências e perturbações admissíveis pode ser obtidas através da solução do problema de otimização:

**PO5:**  $\min \delta$

sujeito à

Condições (52), (53), (78), (79), (80) e (81).

Assim como apresentado na Seção 3.2, assumindo  $\alpha_1 = 1/\sqrt{\gamma_1}$  e  $\beta = 1/\sqrt{\delta}$ , a minimização de  $\gamma_1$  implicará na maximização de  $\alpha_1$  e, conseqüentemente, na maximização



de  $\Omega(P, 1)$ , enquanto a minimização de  $\delta$  implicará na maximização de  $\beta$  e, portanto, na maximização de  $\Omega(R, 1)$ .

A Observação 2 segue válida para **PO4** e **PO5**. Ressalta-se novamente que as condições (78), (79), (80) e (81) só serão LMIs caso haja conhecimento *a priori* dos escalares  $\lambda_1$  e  $\eta_1$ . Para contornar esta condição, sugere-se o uso do mesmo procedimento de varredura na variável  $\eta_1$  proposto na Seção 3.2.

### 4.3 Problema de Análise

Assim como proposto no Capítulo 3, será considerada uma função candidata de Lyapunov dependente de parâmetros (54), com objetivo de determinar um novo conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{Z}_1 \supseteq \mathcal{Z}_0$ . Então, é possível formular o seguinte problema, análogo ao Problema 2:

**Problema 4** *Dadas as matrizes  $P, R, T_1, T_2, F_0, E_{c_0}, F_j$  e  $E_{c_j}, j = 1, \dots, N$ , obtidas através da solução de **PO4** ou **PO5**, determinar o conjunto  $\mathcal{Z}_1 \supseteq \Omega(P, 1)$  tal que,  $\forall z(0) \in \mathcal{Z}_1, \forall q(t) \in \mathcal{Q}_0, \forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$  e  $\forall \hat{\sigma}(t) \in \hat{\mathcal{B}}$ , então, todas as trajetórias do sistema (75) convergem assintoticamente para  $\mathcal{J}_1 \subseteq \Omega(P, 1)$  em um tempo finito  $t_2$  e permanecem neste conjunto  $\forall t \geq t_2$ .*

Note que a maximização de  $\mathcal{Z}_1$  é um objetivo implícito no Problema 4. O Problema 4 tem como possível solução a aplicação do teorema enunciado a seguir.

**Teorema 4** *Considere um dado conjunto de ganhos  $F_0, F_j \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$  e  $E_{c_0}, E_{c_j} \in \mathbb{R}^{p \times m}, j = 1, \dots, N$ , matrizes simétricas positivas definidas  $P \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$  e  $R \in \mathbb{R}^{(p+l) \times (p+l)}$  e as matrizes diagonais  $T_1 = S_1^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}, T_2 = S_2^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , que satisfazem o Teorema 3. Se existirem matrizes simétricas  $P_0, P_j \in \mathbb{R}^{n_a \times n_a}$ , matrizes  $E_{11_0}, E_{11_j} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}, E_{22_0}, E_{22_j} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}, E_{21_0}, E_{21_j} \in \mathbb{R}^{m \times m}, Q \in \mathbb{R}^{(2n_a+2m+p+l) \times n_a}, n_a = n + n_c + m$ , e escalares  $\lambda_2 > 0, \eta_2 > 1$  tais que*

$$\tilde{M}(v_g, \tilde{v}_d) + Q\mathcal{N}(v_g) + \mathcal{N}(v_g)'Q' < 0 \quad (84)$$

$$\begin{bmatrix} P_0 + \hat{P}(v_g \otimes I_{n_a}) & * \\ F_{0(i)} - E_{11_0(i)} + (\hat{F}(i) - \hat{E}_{11(i)})(v_g \otimes I_{n_a}) & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} P_0 + \hat{P}(v_g \otimes I_{n_a}) & * & * \\ T_1 E_{11_0} + T_1 \hat{E}_{11}(v_g \otimes I_{n_a}) & 2T_1 & * \\ A_{1(i)} + \tilde{\Lambda}_g & \Xi(i) - E_{21_0(i)} - \hat{E}_{21(i)}(v_g \otimes I_m) & u_{r(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (86)$$

$$\tilde{\Lambda}_g = \Xi(i)F_0 - E_{22_0(i)} + (\Xi(i)\hat{F} - \hat{E}_{22(i)})(v_g \otimes I_{n_a})$$

$$\eta_2(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{n_a}]) \geq P \quad (87)$$

onde

$$\tilde{M}(v_g, \tilde{v}_d) = \begin{bmatrix} \hat{\Theta}_{gd} & P_0 + \hat{P}(v_g \otimes I_{n_a}) & \hat{\Delta}_{11_g} & \hat{\Delta}_{22_g} & 0_{n_a \times (p+l)} \\ * & 0_{n_a \times n_a} & 0_{n_a \times m} & 0_{n_a \times m} & 0_{n_a \times (p+l)} \\ * & * & -2T_1 & \hat{\Delta}_{21_g} & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & -2T_2 & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & * & -\lambda_2 R \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Theta}_{gd} &= \bar{\lambda}_2 P_0 + \hat{P}([\bar{\lambda}_2 v_g + \tilde{v}_d] \otimes I_{n_a}) \\
\hat{\Delta}_{11g} &= -E'_{11_0} T_1 - (\hat{E}_{11}[v_g \otimes I_m])' T_1 \\
\hat{\Delta}_{22g} &= -E'_{22_0} T_2 - (\hat{E}_{22}[v_g \otimes I_m])' T_2 \\
\hat{\Delta}_{21g} &= -E'_{21_0} T_2 - (\hat{E}_{21}[v_g \otimes I_m])' T_2 \\
\mathcal{N}(v_g) &= [\tilde{A}_g \quad -I_{n_a} \quad \mathbb{B}\Xi + \mathbb{B}_{aw}E_{c_0} + \hat{E}_c(v_g \otimes I_m) \quad \mathbb{B} \quad \mathbb{B}_q] \\
\tilde{A}_g &= \mathbb{A}_0 + \mathbb{B}\Xi F_0 + (\hat{\mathbb{A}} + \mathbb{B}\Xi \hat{F})(v_g \otimes I_{n_a})
\end{aligned} \tag{89}$$

são verificadas para  $i = 1, \dots, m$ ,  $g = 1, \dots, 2^N$ ,  $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2(3\eta_2 - 1)$ ,  $\hat{E}_{11} = [E_{11_1} \quad E_{11_2} \dots E_{11_N}]$ ,  $\hat{E}_{22} = [E_{22_1} \quad E_{22_2} \dots E_{22_N}]$  e  $\hat{E}_{21} = [E_{21_1} \quad E_{21_2} \dots E_{21_N}]$ , então, todas as trajetórias de (75) iniciadas em  $\mathcal{Z}_1 = \bigcap_{g=1}^{2^N} \Omega(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{n_a}], 1)$  convergem assintoticamente para  $\mathcal{J}_1 = \bigcap_{g=1}^{2^N} \Omega(\eta_2 P_0 + \eta_2 \hat{P}[v_g \otimes I_{n_a}], 1) \subset \Omega(P, 1)$  em um tempo finito  $t_2$ , contanto que as amplitudes das referências e das perturbações sejam tais que  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ .

*Prova.* A prova segue passos semelhantes aos da prova do Teorema 2. Considere uma função candidata de Lyapunov (54) e sua derivada em relação ao tempo, dada por

$$\dot{V}(t) = z(t)' P(\sigma(t)) \dot{z}(t) + \dot{z}(t)' P(\sigma(t)) z(t) + z(t)' \dot{P}(\sigma(t)) z(t).$$

Da mesma forma que na prova do Teorema 3, deve-se garantir a verificação das condições de setor generalizadas para ambas as saturações e que  $\dot{V}(t) < 0 \forall z(t) \in \mathcal{Z}_1 \setminus \mathcal{J}_1$  e  $q(t) \in \Omega(R, 1)$ . Isso será verificado se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &- 2\psi_1(t)' T_1 \psi_1(t) - 2\psi_1(t)' T_1 E_{11}(\sigma(t)) z(t) \\
&- 2\psi_2(t)' T_2 \psi_2(t) - 2\psi_2(t)' T_2 E_{22}(\sigma(t)) z(t) - 2\psi_2(t)' T_2 E_{21}(\sigma(t)) \psi_1(t) \\
&+ \lambda_2(1 - z(t)' P z(t)) + 3\lambda_2(z(t)' \eta_2 P z(t) - 1) + \lambda_2(1 - q(t)' R q(t)) < 0
\end{aligned} \tag{90}$$

for verificada para quaisquer valor de  $\lambda_2 > 0$  e  $\eta_2 > 1$ .

Como  $\lambda_2 - 3\lambda_2 + \lambda_2 = -\lambda_2 < 0, \forall t$ , então, segue que (90) é verificada se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &- 2\psi_1(t)' T_1 \psi_1(t) - 2\psi_1(t)' T_1 E_{11}(\sigma(t)) z(t) \\
&- 2\psi_2(t)' T_2 \psi_2(t) - 2\psi_2(t)' T_2 E_{22}(\sigma(t)) z(t) - 2\psi_2(t)' T_2 E_{21}(\sigma(t)) \psi_1(t) \\
&+ \lambda_2 z(t)' P z(t) + 3\lambda_2 z(t)' \eta_2 P z(t) + \lambda_2 q(t)' R q(t) < 0
\end{aligned} \tag{91}$$

O lado esquerdo de (91) pode ser reescrito na forma  $h(t)' \mathcal{M} h(t)$  onde

$$h(t) = [z(t)' \quad \dot{z}(t)' \quad \psi_1(t)' \quad \psi_2(t)' \quad q(t)']',$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_2 P(\sigma(t)) + \dot{P}(\sigma(t)) & P(\sigma(t)) & -E_{11}(\sigma(t))' T_1 & -E_{22}(\sigma(t))' T_2 & 0_{n_a \times (p+l)} \\ * & 0_{n_a \times n_a} & 0_{n_a \times m} & 0_{n_a \times m} & 0_{n_a \times (p+l)} \\ * & * & -2T_1 & -E_{21}(\sigma(t))' T_2 & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & -2T_2 & 0_{m \times (p+l)} \\ * & * & * & * & -\lambda_2 R \end{bmatrix},$$

e  $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2(3\eta_2 - 1)$

Fazendo uso do lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001), é possível garantir que  $h(t)' \mathcal{M} h(t) < 0, \forall \mathcal{N} h(t), h(t) \neq 0$ , i.e.  $\mathcal{M} < 0$ , se existir  $Q$  tal que  $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + Q \mathcal{N}(\sigma(t)) + \mathcal{N}(\sigma(t))' Q' < 0$ . Definindo  $\mathcal{N}(\sigma(t))$  com base no sistema (75), obtém-se

$$\mathcal{N}(\sigma(t)) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{A}}(t) & -I_{n_a} & \overline{\mathbb{B}}(t) & \mathbb{B} & \mathbb{B}_q \end{bmatrix}.$$

com  $\overline{\mathbb{A}}(t) = \mathbb{A}(\sigma(t)) + \mathbb{B} \Xi F(\sigma(t))$  e  $\overline{\mathbb{B}} = \mathbb{B} \Xi + \mathbb{B}_{aw} E_c(\sigma(t))$ , de forma que  $\mathcal{N}(\sigma(t)) h(t) = 0, \forall h(t) \neq 0$ .  $Q \in \mathbb{R}^{(2n_a + 2m + p + l) \times n_a}$  é uma variável livre a ser definida.

Considerando que  $P(\sigma(t))$  e  $\dot{P}(\sigma(t))$  podem ser descritas através de (55) e (59), respectivamente, que  $\sigma(t) \in \mathcal{B}$  e que  $\dot{\sigma}(t) \in \tilde{\mathcal{B}}$ , então, nos vértices  $v_g$  e  $\tilde{v}_d$  dos politopos  $\mathcal{B}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$ ,  $\mathcal{M}$  é exatamente igual a (88). Da mesma forma, no vértice  $v_g$ ,  $\mathcal{N}(\sigma(t))$  é igual a (66). Portanto, por argumentos de convexidade, se (84) é verificada para todos os vértices  $v_g$  e  $\tilde{v}_d$  e matrizes  $\mathbb{A}_j, F_j, P_j, E_{c_j}, E_{11_j}, E_{22_j}$  e  $E_{21_j}$ ,  $g = 1, \dots, 2^N$ ,  $d = 1, \dots, 2^N$ ,  $j = 1, \dots, N$ , então  $\mathcal{M} < 0, \forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$  e  $\forall \dot{\sigma}(t) \in \tilde{\mathcal{B}}$ .

A condição (85) garante que  $\mathcal{Z}_1 \subset \bigcap_{g=1}^{2^N} S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], E_{11_0} + \hat{E}_{11}[v_g \otimes I_{n_a}], u_0)$ , e, conseqüentemente, que a versão LPV da condição de setor generalizada (9) para a saturação em amplitude é verificada para todo  $z(t) \in \Omega(P(\sigma(t)), 1), \forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$ . A

condição (86) garante que  $\mathcal{Z}_1 \subset \left( \bigcap_{g=1}^{2^N} S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], E_{11_0} + \hat{E}_{11}[v_g \otimes I_{n_a}], u_0) \cap \right.$

$\left. \bigcap_{g=1}^{2^N} S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{n_a}], E_{22_0} + \hat{E}_{22}[v_g \otimes I_{n_a}], E_{21_0} + \hat{E}_{21}[v_g \otimes I_m], u_r) \right)$ , portanto, a versão

LPV da condição de setor generalizada (9) para a saturação em taxa de variação encadeada com a saturação em amplitude é verificada para todo  $z(t) \in \Omega(P(\sigma(t)), 1), \forall \sigma(t) \in \mathcal{B}$ .

Por último, a condição (87) garante que  $\mathcal{J}_1 \subseteq \Omega(P, 1) = \mathcal{Z}_0$ , portanto, existe  $t = t_3 \geq t_2$  de forma que  $z(t_3) \in \Omega(P, 1)$ . Então,  $\forall t \geq t_3$  garante-se que as trajetórias do sistema irão convergir de  $\mathcal{Z}_0$  para  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ , conforme estabelecido pelo Teorema 3, visto que as matrizes  $P, R, T_1, T_2, F_0, F_j, E_{c_0}$  e  $E_{c_j}$ ,  $j = 1, \dots, N$  foram obtidas pela solução de **PO4** ou **PO5**.  $\square$

De forma análoga ao Problema 4 é proposto o seguinte problema de otimização para a maximização do conjunto  $\mathcal{Z}_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{PO6:} \quad & \min \gamma_2 \\ & \text{sujeito à} \end{aligned}$$

$$0 \leq \gamma_2 \leq 1$$

Condições (69), (84), (85), (86) e (87).

Assim como apresentado na Seção 3.3, o conjunto  $\Omega(\gamma_2 P, 1)$  é uma versão escalonada do conjunto de condições iniciais admissíveis obtido através da solução do **PO4** ou do **PO5**. Portanto, também é possível calcular um escalar  $\alpha_2 = 1/\sqrt{\gamma_1 \gamma_2} > 0$  que representa o quanto este conjunto cresceu nas direções  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, f$ . Contudo, observe que  $\mathcal{Z}_1 \supseteq \Omega(\gamma_2 P, 1)$ , uma vez que  $\bigcap_{g=1}^{2^N} \Omega(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{n_a}], 1)$  não necessariamente tem forma elipsoidal.

Novamente, as condições apresentadas no Teorema 4 são LMIs apenas se as variáveis  $\lambda_2$  e  $\eta_2$  forem conhecidas *a priori*. Para que isso seja possível, sugere-se a aplicação do mesmo procedimento de varredura na variável  $\eta_2$  e do algoritmo proposto na Seção 3.3.

## 4.4 Exemplos Numéricos

Para ilustrar o método proposto, foram inseridas saturações em taxa de variação e modelos das dinâmicas dos atuadores nos dois exemplos do Capítulo 3. Novamente, todos os exemplos foram implementados em MATLAB 2012b e Simulink. As condições foram todas descritas através do *parser* YALMIP (LÖFBERG, 2004) e os problemas de otimização foram todos resolvidos utilizando o *solver* Mosek (MOSEK ApS, 2018).

### 4.4.1 Exemplo 1 - Sistema SISO

Os valores numéricos da planta, do controlador e do parâmetro variante são os mesmos considerados na Seção 3.4.1, sendo agora o escalar  $\nu$  arbitrado em 1 e parâmetros do atuador definidos como  $\Xi = 15$ ,  $u_0 = 1$  e  $u_r = 2$ . Note que agora  $n + n_c + m = 3$  representa a dimensão do vetor de estados aumentado, ou seja, os conjuntos e trajetórias serão apresentados no espaço tridimensional  $x(t) \times x_c(t) \times x_a(t)$ .

Considerando as direções de maximização  $x_1 = [0 \ 1 \ 1]$  e  $d_1 = [0.1 \ 0.05]$  e uma taxa de decaimento exponencial  $\bar{\lambda} = 1.2$ , a solução sub-ótima de **PO4** é obtida para com  $\eta_1 = 2$  e  $\lambda_1 = 0.2400$ , que resulta em  $\alpha_1 = 0.5619$  e

$$P = \begin{bmatrix} 138.4403 & -26.1956 & 35.2010 \\ -26.1956 & 6.4136 & -6.9768 \\ 35.2010 & -6.9768 & 10.7071 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1.1863 & -2.3728 \\ -2.3728 & 4.7501 \end{bmatrix} \times 10^5,$$

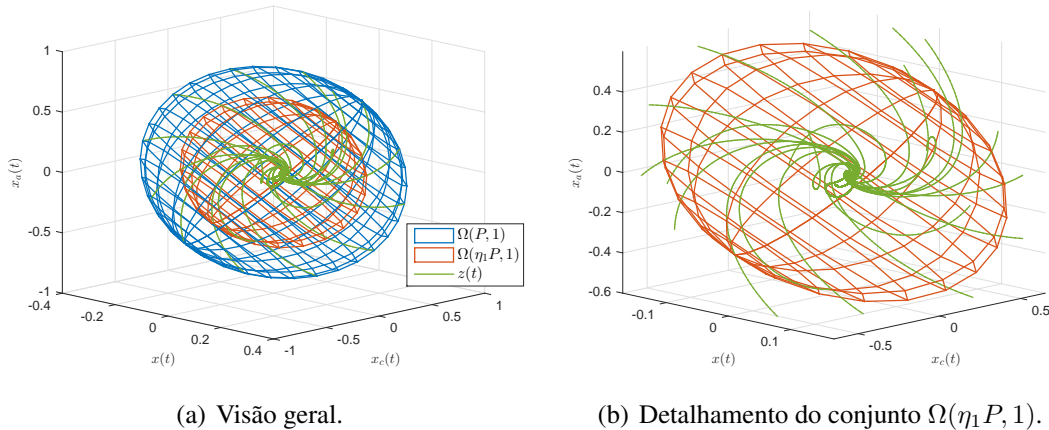
$$F_0 = [-1.2597 \ 0.2421 \ 0.5078], F_1 = [-0.0762 \ -0.0250 \ 0.0253],$$

$$E_{c_1} = 9.7507, E_{c_2} = 1.0292,$$

de forma que  $q_{max} = d_1$  e  $q'_{max} R q_{max} = 1$ .

O sistema em malha fechada é simulado considerando os sinais  $r(t) = 0.1 \ \forall t \geq 0$  s e  $d(t) = 0.05 \ \forall t \geq 5$  s para diversas condições iniciais  $z(0)$ , todas na fronteira do elipsoide  $\Omega(P, 1)$ , ou seja,  $z(0)' P z(0) = 1 \ \forall z(0)$ . A Figura 21(a) apresenta as diversas trajetórias  $z(t)$  obtidas, junto dos elipsoides  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(\eta_1 P, 1)$ , enquanto a Figura 21(b) apresenta um detalhamento do conjunto terminal.

Figura 20: Espaço  $x(t) \times x_c(t) \times x_a(t)$  e trajetórias  $z(t)$  iniciadas na fronteira de  $\Omega(P, 1)$ .



A observação das Figuras 21(a) e 21(b) permite concluir que, de fato, todas as trajetórias apresentadas iniciadas na fronteira de  $\Omega(P, 1)$  convergiram para  $\Omega(\eta_1 P, 1)$  e lá

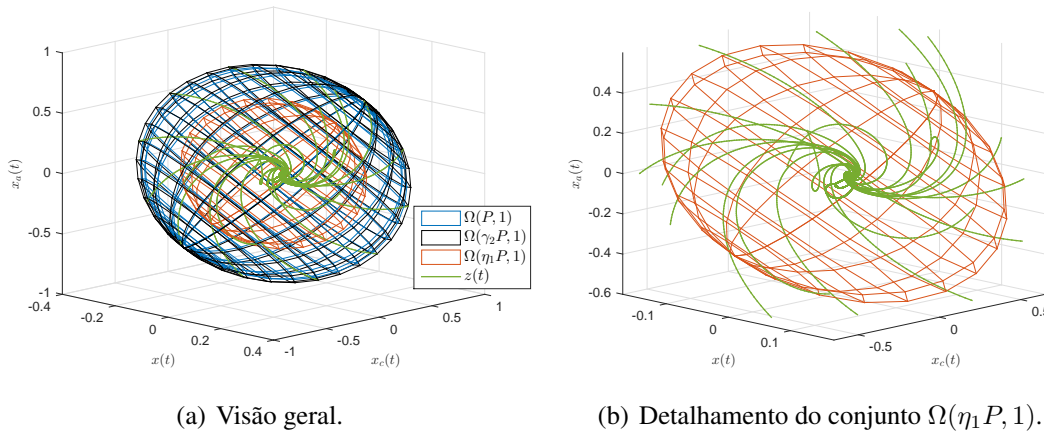
permaneceram confinadas, ocorrendo apenas mudanças nos pontos de equilíbrio devido à influência da variação de  $\sigma_1(t)$  e da perturbação  $d(t)$ .

Agora considere o objetivo de ampliar a estimativa da região de atração, portanto, a solução do problema **PO6**. Considere um decaimento exponencial  $\bar{\lambda} = 1.2$ , de modo que é possível obter uma solução sub-ótima para  $\eta_2 = 1.2670$  e  $\lambda_2 = 0.4284$ , resultando em  $\gamma_2 = 0.9434$ ,  $\alpha_2 = 0.5785$  e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 110.4314 & -20.7522 & 28.4636 \\ -20.7522 & 5.2730 & -5.6503 \\ 28.4636 & -5.6503 & 8.9850 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1.9599 & -0.1569 & 0.5523 \\ -0.1569 & -0.0249 & -0.0591 \\ 0.5523 & -0.0591 & 0.1495 \end{bmatrix}.$$

A Figura 22(a) apresenta uma comparação entre os conjuntos  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(\gamma_2 P, 1)$ , assim como diversas trajetórias iniciadas na fronteira de  $\Omega(\gamma_2 P, 1) \subset (\Omega(P_0 + \underline{\sigma}_1 P_1, 1) \cap \Omega(P_0 + \bar{\sigma}_1 P_1, 1))$ , que foram simuladas utilizando os mesmos critérios e sinais que anteriormente. A Figura 22(b) apresenta um detalhamento do conjunto terminal  $\mathcal{J}_0$ .

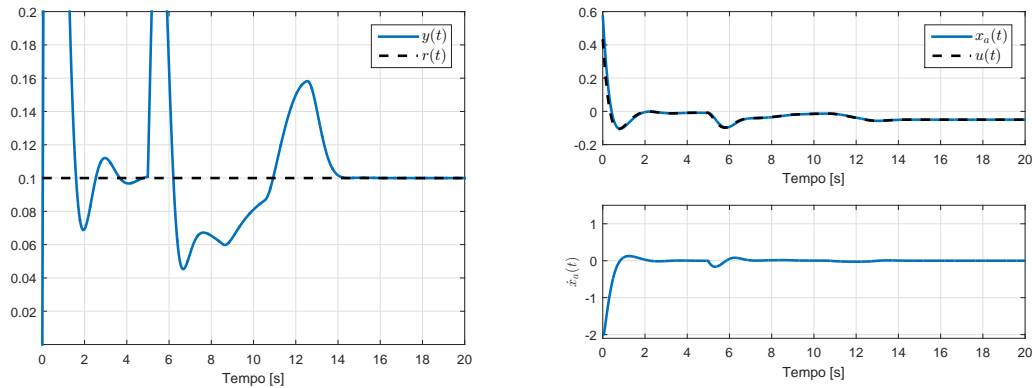
Figura 21: Espaço  $x(t) \times x_c(t) \times x_a(t)$  e trajetórias  $z(t)$  iniciadas na fronteira de  $\Omega(\gamma_2 P, 1)$ .



Observe que  $\Omega(P, 1) \subset \Omega(\gamma_2 P, 1) \subset (\Omega(P_0 + \underline{\sigma}_1 P_1, 1) \cap \Omega(P_0 + \bar{\sigma}_1 P_1, 1))$ , o que significa que de fato houve um aumento efetivo no conjunto de condições iniciais admissíveis, o que já poderia ser confirmado uma vez que  $\gamma_2 < 1$ .

Agora considere o sistema sendo simulado com a solução de **PO6**, para os mesmos parâmetros anteriormente definidos, contudo, com condição inicial  $z(0) = 0.5785 \times [0 \ 1 \ 1]'$ . A Figura 23(a) apresenta a saída do sistema em malha fechada, a Figura 23(b) apresenta o sinal de controle calculado pelo controlador, o sinal de controle efetivamente entregue à planta (estado do atuador  $x_a(t)$ ) e a taxa de variação do sinal de controle efetivo e a Figura 23 apresenta o erro de seguimento percentual em função da amplitude de referência.

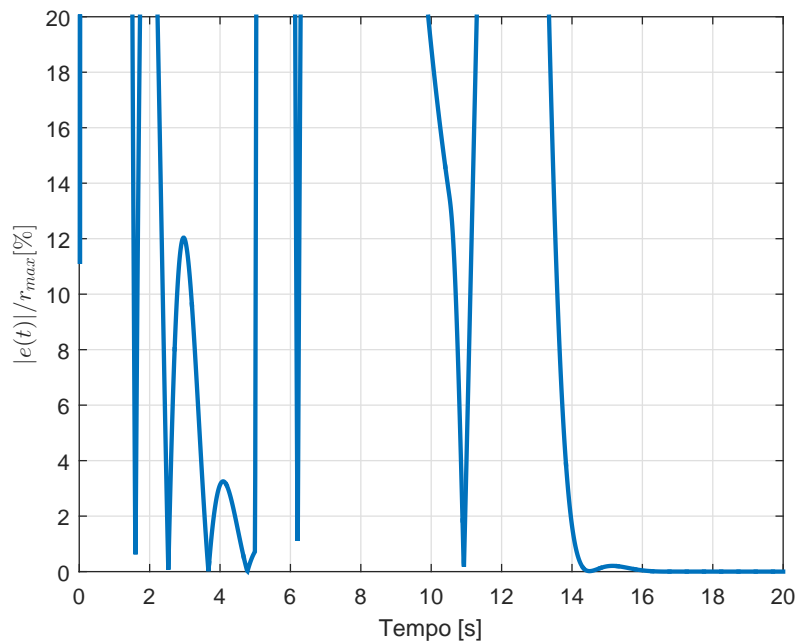
Figura 22: Sinais de saída e de controle.



(a) Saída do sistema em malha fechada e sinal de referência.

(b) Sinais  $u(t)$ ,  $x_a(t)$  e  $\dot{x}_a(t)$ .

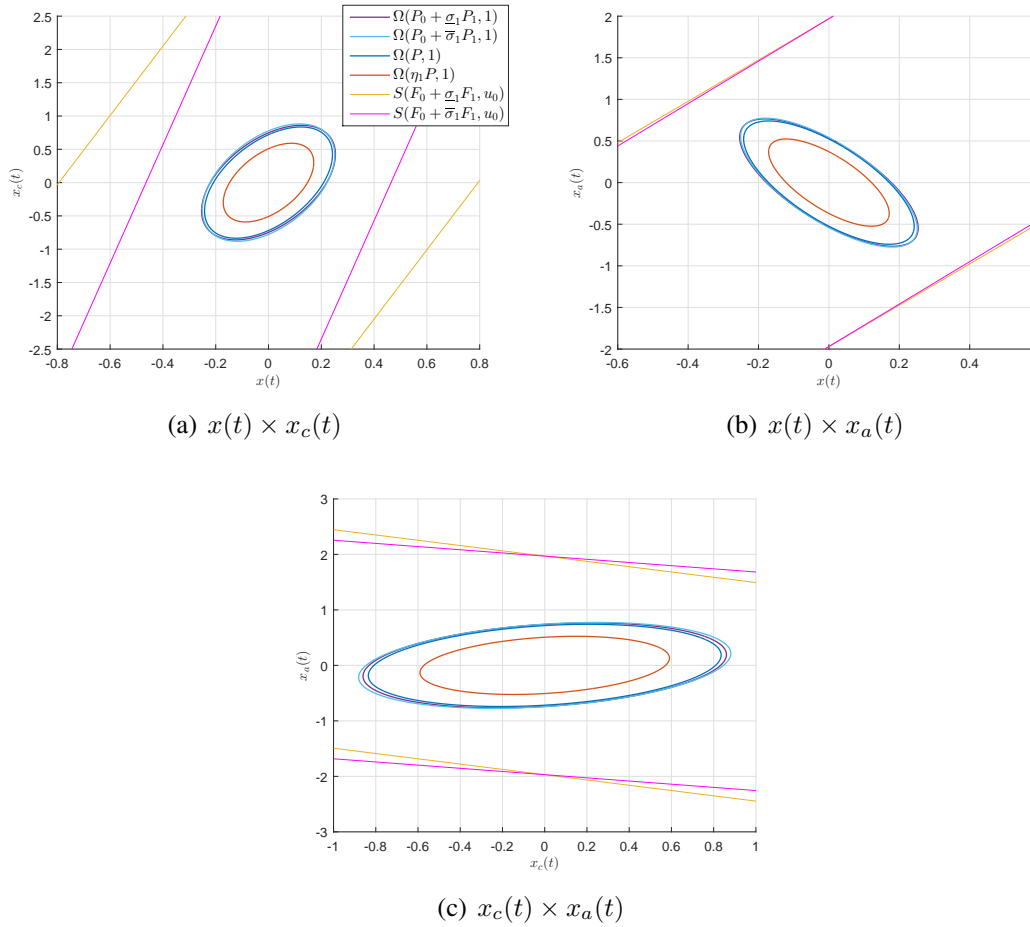
Figura 23: Erro de seguimento do sistema em malha fechada.



Observando as Figuras 23(a) e 23 é possível concluir que o seguimento da referência e a rejeição de perturbação foi garantido, resultando em erro nulo em regime permanente. Com relação a Figura 23(b), note a pouca ocorrência de saturação e apenas na taxa de variação do sinal de controle, não ocorrendo saturação em amplitude. A explicação por trás deste fenômeno está em como a abordagem por conjuntos terminais funciona. Observe a Figura 24, que apresenta os planos  $x(t) \times x_c(t)$ ,  $x(t) \times x_a(t)$  e  $x_c(t) \times x_a(t)$  e os respectivos cortes dos conjuntos  $\Omega(P_0 + \underline{\sigma}_1 P_1, 1)$ ,  $\Omega(P_0 + \bar{\sigma}_1 P_1, 1)$ ,  $\Omega(P, 1)$  e  $\Omega(\eta_1 P, 1)$  e das regiões de operação linear para saturação de posição  $S(F_0 + \underline{\sigma}_1 F_1, u_0)$  e  $S(F_0 + \bar{\sigma}_1 F_1, u_0)$ .

Veja que no exemplo apresentado, o conjunto de condições iniciais admissíveis ficou contido na região de operação linear da saturação em amplitude, o que significa que o sistema em malha fechada irá operar de forma linear com relação a esta não-linearidade, i.e.  $\psi_1(t) = 0, \forall t$ . Isto não é uma condição obrigatória imposta pelo método e, portanto,

Figura 24: Cortes dos conjuntos obtidos através da síntese, da análise e das regiões  $S(F_1, u_0)$  e  $S(F_2, u_0)$ .



não necessariamente o conjunto de condições iniciais admissíveis ficará restrito ao interior de  $S(F(\sigma(t)), u_0)$ . Contudo, há uma certa tendência de isto ocorrer ou ficar próximo de ocorrer, de modo a diminuir drasticamente as chances de ocorrência de saturação de posição. A explicação se dá na existência de muitas restrições no problema, o que aumenta bastante o conservadorismo das possíveis soluções, de forma que a maneira mais fácil de resolver o problema seria eliminando a ocorrência de uma das não-linearidades, ou até de ambas, em casos mais extremos.

#### 4.4.2 Exemplo 2 - Sistema MIMO

A planta é a mesma da apresentada na Seção 3.4.2, porém, agora considerando um atuador descrito por (71) com

$$\Xi = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, u_0 = [10 \quad 5] \text{ e } u_r = [20 \quad 10].$$

O objetivo de controle é o mesmo, seguir referências com frequências  $\omega_{r_1} = 2\pi$  rad/s e  $\omega_{r_2} = \sqrt{2}\pi$  rad/s e rejeitar perturbações com frequências  $\omega_{d_1} = 0.4\sqrt{5}\pi$  rad/s e  $\omega_{d_2} = \sqrt{2}\pi$  rad/s, com o menor erro de seguimento possível para pequenas variações nas frequências dos sinais exógenos. O controlador escolhido para atender a estes requisitos é exatamente o mesmo da Seção 3.4.2. O resultado é um sistema aumentado composto de

planta, atuador e controlador de ordem  $n + n_c + m = 30$ .

Deseja-se que as condições iniciais admissíveis do sistema em malha fechada sejam maximizadas na direção  $x_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0_{1 \times n_c} \ 5 \ 1]'$ , ao mesmo tempo que as amplitudes admissíveis dos sinais exógenos devem atender, no mínimo  $d_1 = [1 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.25]'$ . O decaimento exponencial é arbitrado na forma  $\bar{\lambda} = 1$ .

Assim como na Seção 3.4.2, no intuito de realizar uma análise das vantagens com relação à conservadorismo do uso de um controlador e um compensador *anti-windup* escalonados, três casos de síntese são propostos:

- I. Ganhos de realimentação e de compensação *anti-windup* escalonados;
- II. Ganhos de realimentação e de *anti-windup* independente de parâmetros, i.e.  $Y_j = 0$ ,  $M_j = 0$ ,  $X_{11j} = 0$ ,  $X_{22j} = 0$  e  $X_{21j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , nas condições (78), (79), (80) e (81);
- III. Ganhos de realimentação escalonados, mas sem a existência de compensação *anti-windup*, i.e.  $M_j = 0$  nas condições (78), (79), (80) e (81).

Uma solução sub-ótima de **PO4** para o caso I é obtida para  $\eta_1 = 1.4$  e  $\lambda_1 = 0.3125$ , resultando em  $\alpha_1 = 0.2774$  e  $q_{max} = d_1$ . Com relação ao caso II, uma solução sub-ótima de **PO4** é possível com os mesmos  $\eta_1 = 1.4$  e  $\lambda_1 = 0.3125$ , fornecendo  $\alpha_1 = 0.2773$  e  $q_{max} = d_1$ . Por último, uma solução sub-ótima de **PO4** para o caso III é também obtida para  $\eta_1 = 1.4$  e  $\lambda_1 = 0.3125$ , resultando em  $\alpha_1 = 0.2345$  e  $q_{max} = d_1$ .<sup>1</sup>

Observe que os três casos apresentaram resultados semelhantes com relação ao crescimento nas direções de maximização, com desvantagem maior para caso com controle e compensação *anti-windup* não escalonados. Diferentemente do ocorrido quando considerado apenas o problema de saturação em amplitude, neste exemplo o benefício obtido pela adição do compensador *anti-windup* foi praticamente nulo, sendo da ordem de 0.03% quando comparando os valores de  $\alpha_1$  para os casos I e III.

Considere as soluções do casos I e III simulados para condições iniciais na fronteira de seus respectivos conjuntos de condições iniciais admissíveis, i.e.  $z(0) = 0.2774x_1$  e  $z(0) = 0.2773x_1$ , respectivamente. Os sinais de referências são  $r_1(t) = sen(1.03\omega_{0,r_1}t)$  e  $r_2(t) = 0.5sen(1.03\omega_{0,r_2}t)$ , ambos iniciados em  $t = 0s$ , enquanto os sinais de perturbação iniciam em  $t = 5s$  e são descritos por  $d_1(t) = 0.5sen(1.03\omega_{0,d_1}t)$  e  $d_2(t) = 0.25sen(1.03\omega_{0,d_2}t)$ . Observe que todos os sinais exógenos sofrem um desvio de +3% em suas frequências com relação às frequências de projeto. Os parâmetros variam conforme apresentados na Figura 16. A Figura 25 apresenta os sinais  $u(t)$  e  $x_a(t)$ , enquanto a Figura 26 apresenta os sinais  $\dot{x}_a(t)$ , para ambos os sistemas em malha fechada.

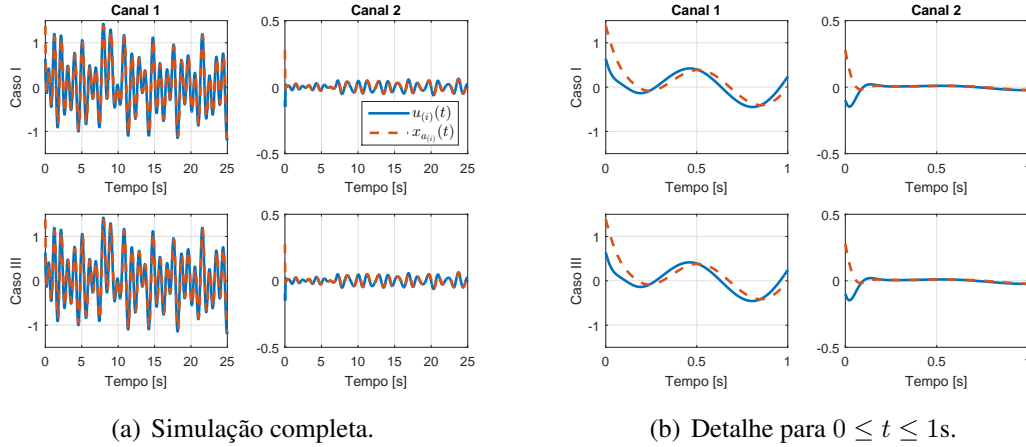
Note que, em ambos os casos não há ocorrência de nenhum tipo de saturação em nenhum dos sinais. Observe também o alto grau de semelhança entre os sinais relacionados ao caso I e ao caso III, devido à proximidade das condições iniciais. Isto sugere que os conjuntos de condições iniciais admissíveis possam estar posicionados na região em que o sistema apresenta comportamento linear para ambas as saturações, ou seja,  $\Omega(P, 1) \subset (\bigcap_{g=1}^4 S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{na}], u_0) \cap \bigcap_{g=1}^4 S(F_0 + \hat{F}[v_g \otimes I_{na}], \Xi, u_r))$ .

Considere agora a aplicação de **PO6** à solução obtida no caso I, com uma taxa de decaimento exponencial  $\bar{\lambda}_2 = 1$ . Então, uma solução é obtida com  $\eta_2 = 1.5$  e  $\lambda_2 =$

<sup>1</sup>Assim como no Capítulo 3, o raio de factibilidade das soluções do solver Mosek foi limitado em  $5 \times 10^4$ , a fim de evitar problemas de condicionamento das matrizes resultantes.



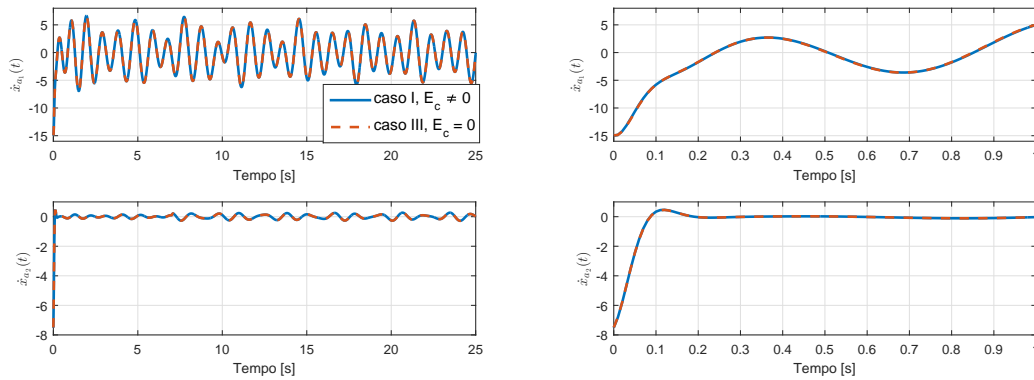
Figura 25: Sinais  $u(t)$  e  $x_a(t)$  para os casos I e III.



(a) Simulação completa.

(b) Detalhe para  $0 \leq t \leq 1s$ .

Figura 26: Sinais  $\dot{x}_a(t)$  para os casos I e III.



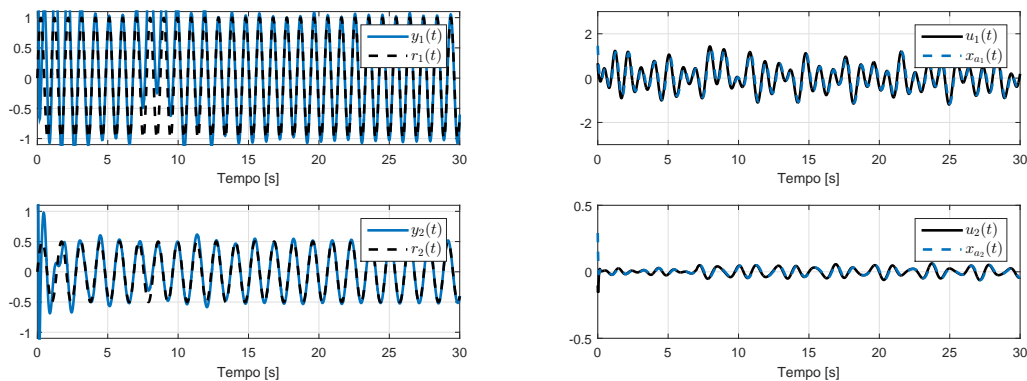
(a) Simulação completa.

(b) Detalhe para  $0 \leq t \leq 1s$ .

0.2857, apresentando  $\gamma_2 = 0.9038$  e  $\alpha_2 = 0.2918$ , de forma que foi possível obter um crescimento de pelo menos 5.18% nas condições iniciais na direção  $x_1$ . O sistema em malha fechada é então simulado para  $z(0) = \alpha_2 x_1$ , ou seja, condições iniciais na fronteira de  $\Omega(\gamma_2 P, 1) \subset \bigcap_{g=1}^4 \Omega(P_0 + \hat{P}[v_g \otimes I_{n_a}], 1)$ , sinais exógenos tais quais os da simulação anterior e parâmetros  $\sigma(t)$  variando conforme apresentado na Figura 16. A Figura 28(a) apresenta os sinais de saída e as suas respectivas referências, a Figura 28(b) apresenta os sinais  $u(t)$  e  $x_a(t)$ , enquanto a Figura 29(a) apresenta as taxas de variação dos sinais de controle efetivos. Por fim, a Figura 29(b) apresenta os erros de seguimento em função da máxima amplitude dos respectivos sinais de referência.

Note que novamente o erro de seguimento permaneceu limitado em regime permanente, apesar dos sinais exógenos terem frequências diferentes das de projeto. Observe também que, apesar de o conjunto de condições iniciais admissíveis ter efetivamente aumentado, este aumento não foi suficiente para que  $\mathcal{Z}_1$  saísse da região linear do sistema, de modo que não houve ocorrência de nenhum tipo de saturação, conforme observado nas Figuras 28(b) e 29(a).

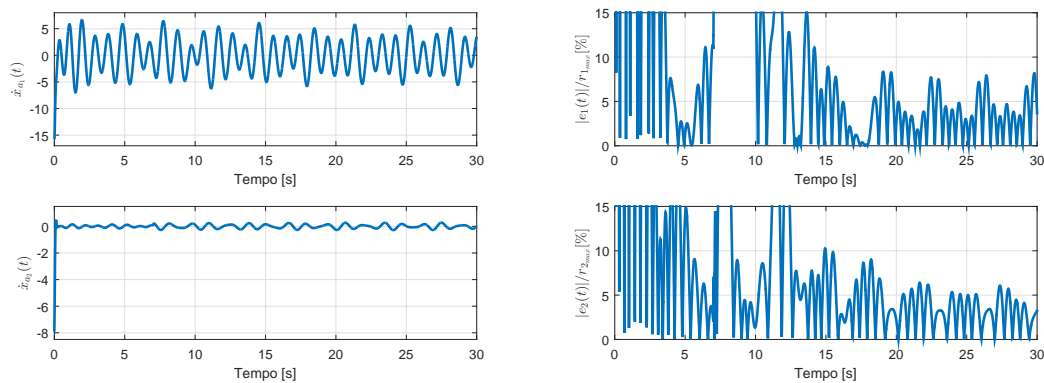
Figura 27: Sinais de saída e controle.



(a) Saídas do sistema em malha fechada e suas respectivas referências.

(b) Sinais  $u(t)$  e  $x_a(t)$ .

Figura 28: Taxa de variação dos sinais de controle e sinais de erro.



(a) Taxa de variação do sinal de controle efetivo.

(b) Erros de seguimento em malha fechada.

## 4.5 Considerações Finais

De forma semelhante à apresentada no Capítulo 3, neste capítulo foi discutida uma proposta de abordagem para o problema de seguimento/rejeição de sinais em sistemas LPV sujeitos a saturação na amplitude e na taxa de variação do sinal de controle. O método apresentado segue basicamente as mesmas premissas do capítulo anterior, também fazendo uso de ganhos de realimentação e de compensação *anti-windup* escalonados. A grande diferença entre os métodos reside nas definições das regiões de validade da condição de setor e de linearidade do sistema, visto que existem duas não-linearidades a serem consideradas. Portanto, deve-se garantir que o conjunto de condições iniciais admissíveis esteja contido na interseção das regiões de validade das condições de setor para ambas as saturações, bem como que o conjunto terminal esteja inserido na interseção das regiões de linearidade, também de ambas as saturações.

Novamente, um segundo procedimento foi proposto, com objetivo de aumentar o conjunto de condições iniciais admissíveis após a síntese dos ganhos. Os mesmos dois exemplos ilustraram o método e discutiram os benefícios de sua utilização.

## 5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou uma solução para o problema de seguimento e/ou rejeição de referências e/ou perturbações para sistemas LPV sujeitos à saturação em amplitude e em taxa de variação do sinal de controle. Em um primeiro momento, foi proposto um método para lidar com sistemas LPV somente sujeitos à saturação de posição. A solução se baseia em controladores e laços de compensação *anti-windup* escalonados e condições que garantem que as trajetórias do sistema em malha fechada convergem para um conjunto positivamente invariante contido na região de operação linear do sistema. O cálculo dos ganhos de realimentação do sistema em malha fechada e dos ganhos de compensação *anti-windup* é feito de forma simultânea através da solução de um problema de otimização, visando a maximização dos conjuntos de condições iniciais admissíveis ou de referências/perturbações admissíveis. No intuito de aumentar o conjunto de condições iniciais admissíveis, foi proposta uma etapa adicional de análise baseada em uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, assumindo uma limitação na taxa de variação dos parâmetros de escalonamento.

Dois exemplos de simulação foram escolhidos para ilustrar as duas etapas do método proposto. O primeiro exemplo tratou de uma planta de dimensão unitária, com apenas um parâmetro variante, e tinha como objetivo ilustrar a abordagem por conjuntos terminais, apresentando os conjuntos envolvidos e o comportamento das trajetórias iniciadas no interior do conjunto de condições iniciais admissíveis, que acabaram efetivamente convergindo para o conjunto terminal contido na região linear do sistema e lá permaneceram confinadas. Já o segundo exemplo apresentou um sistema MIMO, com dois parâmetros variantes e um objetivo de controle que forçou o sistema em malha fechada a ter uma dimensão mais elevada. O objetivo foi analisar as possibilidades de controle para sistemas LPV e comparar o seu nível de conservadorismo, apresentando a solução escalonada proposta, uma solução não escalonada e uma solução escalonada sem compensação *anti-windup*. Através dos exemplos numéricos apresentados foi possível comprovar a eficácia de ambos os procedimentos propostos: a abordagem por conjuntos terminais foi corretamente aplicada pelo primeiro procedimento, enquanto o segundo foi capaz de apresentar um maior conjunto de condições iniciais admissíveis. Além disso, foi possível analisar os benefícios do uso de controle escalonado e da inclusão da compensação *anti-windup*, que contribuíram fortemente para a redução do conservadorismo das soluções.

Na segunda etapa deste trabalho, o mesmo tipo de abordagem que foi utilizado para resolver o problema da primeira etapa foi aplicado ao problema de seguimento para sistemas LPV sujeitos não apenas a saturação de posição, mas também a saturação de velocidade. Nesse caso, foi necessário considerar na formulação do sistema aumentado um modelo de atuador com saturações encadeadas, de forma que os estados do atuador fossem incorporados à formulação do sistema em malha fechada. Foi feito uso do mesmo

tipo de abordagem por conjuntos terminais, contudo, foi necessário garantir a inclusão do conjunto terminal na interseção da região de operação linear para ambas as saturações. Novamente, foram propostas condições que permitiram a síntese simultânea dos ganhos de realimentação escalonados e dos ganhos de compensação *anti-windup* escalonados, além da caracterização dos conjuntos admissíveis. No intuito de aumentar o conjunto de condições iniciais admissíveis, também foi proposta uma segunda etapa de análise, baseada em uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, que permitiu efetivamente aumentar o conjunto de condições iniciais admissíveis ao mesmo tempo que as garantias da abordagem por conjuntos terminais foram mantidas.

Os mesmos dois exemplos numéricos foram escolhidos para ilustrar o método, agora considerando atuadores com saturações encadeadas. O primeiro seguiu sendo responsável por ilustrar a abordagem por conjuntos terminais, apresentando os conjuntos utilizados e as trajetórias convergentes, enquanto o segundo versou sobre as possibilidades de controle LPV e o conservadorismo relacionado a elas. Com base nos resultados apresentados, foi possível concluir que a abordagem proposta foi suficiente para garantir a solução do problema analisado, contudo, ela se demonstrou extremamente restritiva, de modo que nem o controle escalonado e nem os graus de liberdade adicionais decorrentes do uso da compensação *anti-windup* foram suficientes para permitir a ocorrência das duas saturações.

As principais contribuições deste trabalho foram:

- Aplicação de uma abordagem por conjuntos terminais a sistemas do tipo LPV com saturação de posição, obtendo garantia de seguimento/rejeição de referências/perturbações;
- Formulação de um problema de síntese simultânea de ganhos de realimentação escalonados e ganhos de compensação *anti-windup* escalonados;
- Extensão desta abordagem para sistemas sujeitos à saturação tanto de posição, quanto de velocidade;
- Formulação de um problema secundário que permite a obtenção de um conjunto de condições iniciais admissíveis maior.

Os resultados apresentados ao longo deste trabalho mostraram que ainda existem diversos problemas a serem resolvidos e pontos a serem melhorados, sugerindo algumas perspectivas de trabalhos futuros:

- *Redução do conservadorismo das soluções*: conforme demonstrado neste trabalho, as soluções propostas são suficientes para resolver os problemas apresentados. Entretanto, elas apresentam um elevado nível de conservadorismo, o que pode inviabilizar algumas aplicações práticas. Uma possibilidade seria trabalhar com um conjunto terminal que não seja uma versão escalonada do conjunto de condições iniciais admissíveis, seguindo a abordagem apresentada em (DILDA, 2013). Isso adicionaria um grau de liberdade ao problema e eliminaria uma das variáveis escalares de varredura. No entanto, dificultaria a formulação das condições de síntese e, principalmente, exigiria a formulação de um problema de otimização multiobjetivo, visto que o conjunto terminal não estaria mais diretamente relacionado ao conjunto de condições iniciais admissíveis;
- *Introdução de um laço de compensação anti-windup mais complexo*: a proposta apresentada neste trabalho leva em consideração um compensador *anti-windup* do

tipo estático que atua apenas sobre a não-linearidade de posição. Seria interessante estender o método proposto para compensadores mais complexos como, por exemplo, compensadores dinâmicos e/ou compensadores que fossem capazes de atuar no problema de *windup* relacionado a não-linearidade de velocidade. Além disso, é importante analisar a compensação tanto na entrada, quanto na saída do controlador, conforme apresentada em (FLORES et al., 2015);

- *Aplicação das metodologias para sistemas reais*: todos os exemplos utilizados neste trabalho se limitaram a ambiente de simulação. Contudo, a metodologia proposta tem potencial para aplicações em diversas plantas reais, sendo o exemplo mais interessante aquele que mais motivou este trabalho: o problema de redução de esforços mecânicos em turbinas eólicas. Uma turbina eólica pode ser modelada como um sistema quasi-LPV por partes onde o parâmetro variante é a velocidade do vento que incide sobre as pás, enquanto a variável de controle é o ângulo de *pitch* das pás, que possui limitações tanto em amplitude, quanto em taxa de variação. O objetivo de controle seria a rejeição de um sinal periódico com frequência que varia no tempo (perturbação mecânica dependente da velocidade do vento), o que poderia ser levado em consideração através de uma estrutura de controle *notch*-ressonante dependente de parâmetros;
- *Utilização de ferramentas matemáticas mais robustas e otimizadas*: O uso de ferramentas como o ROLMIP (AGULHARI; DE OLIVEIRA; PERES, 2012), que é um conjunto de rotinas em MATLAB dedicado à descrição de problemas com dependências de parâmetros, pode contribuir facilitando a geração das LMIs associadas a cada vértice, enquanto a programação dos problemas de otimização em *python*, utilizando *solvers* como o próprio Mosek ou o Ncpol2sdpa (WITTEK, 2015) pode apresentar contribuições com relação ao tempo computacional e robustez numérica das soluções obtidas.

## REFERÊNCIAS

- AGULHARI, C. M.; DE OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust LMI Parser: a computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON AUTOMATION (CBA), 2012. **Anais...** Campinas: Sociedade Brasileira de Automática, 2012. p.2298–2305.
- BALLESTEROS, P.; BOHN, C. Disturbance rejection through LPV gain-scheduling control with application to active noise cancellation. In: IFAC WORLD CONGRESS, 2011. **Anais...** Terrytown: IFAC, 2011. p.7897–7902.
- BATEMAN, A.; LIN, Z. An analysis and design method for linear systems under nested saturation. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.48, n.1, p.41–52, 2003.
- BAZANELLA, A. S.; GOMES DA SILVA JR., J. M. **Sistemas de controle: princípios e métodos de projeto**. Porto Alegre: UFRGS, 2005.
- BIANCHI, F. D.; MANTZ, R. J.; DE BATTISTA, H. **The wind and wind turbines**. Berlin: Springer, 2007.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. v.15.
- CAMPOS, G. C. et al. Stabilisation of discrete-time systems with finite-level uniform and logarithmic quantisers. **IET Control Theory & Applications**, Hertford, v.12, n.8, p.1125–1132, 2018.
- CAO, Y.-Y.; FANG, K. Parameter-dependent Lyapunov function approach to stability analysis and design for polytopic systems with input saturation. **Asian Journal of Control**, Taiwan, v.9, n.1, p.1–10, 2007.
- CASTRO, R. S. et al. Variable frequency resonant controller for load reduction in wind turbines. **Control Engineering Practice**, Oxford, v.66, p.76–88, 2017.
- CHEN, C.-T. **Introduction to linear system theory**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: MOHEIMANI, S. O. R. (Ed.). **Perspectives in robust control**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2001. p.241–257.

- DILDA, V. **Controle de sistemas lineares sujeitos a zona morta no atuador**. 2013. Tese (Doutorado em Engenharia de Automação e Sistemas) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.
- DOYLE, J. C.; SMITH, R. S.; ENNS, D. F. Control of plants with input saturation nonlinearities. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC), 1987. **Anais...** New York: IEEE, 1987. p.1034–1039.
- ERROUSSI, R. et al. Continuous-time model predictive control of a permanent magnet synchronous motor drive with disturbance decoupling. **IET Electric Power Applications**, Stevenage, v.11, n.5, p.697–706, 2017.
- FLORES, G. P.; FLORES, J. V. Robust design of high order repetitive controllers under control saturation. **IFAC-PapersOnLine**, Laxenburg, v.51, n.25, p.36–41, 2018.
- FLORES, J. V. **Projeto de controladores para o seguimento de referências periódicas em sistemas com atuadores saturantes**. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- FLORES, J. V.; ECKHARD, D.; SALTON, A. T. Modified MIMO resonant controller robust to period variation and parametric uncertainty. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS (CCA), 2016. **Anais...** New York: IEEE, 2016. p.1256–1261.
- FLORES, J. V. et al. Robust repetitive control with saturating actuators: a LMI approach. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC), 2010. **Anais...** New York: IEEE, 2010. p.4259–4264.
- FLORES, J. V. et al. Repetitive control design for MIMO systems with saturating actuators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.57, n.1, p.192–198, 2012.
- FLORES, J. V. et al. Antiwindup design for zero-phase repetitive controllers. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control**, New York, v.137, n.9, 2015.
- FLORES, J. V.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; SBARBARO, D. Robust periodic reference tracking for uncertain linear systems subject to control saturations. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 2009. **Anais...** New York: IEEE, 2009. p.7960–7965.
- FRANCIS, B. A.; WONHAM, W. M. The internal model principle of control theory. **Automatica**, Terrytown, v.12, n.5, p.457–465, 1976.
- GALEANI, S. et al. A magnitude and rate saturation model and its use in the solution of a static anti-windup problem. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v.57, n.1, p.1–9, 2008.
- GOMES DA SILVA JR., J. M. et al. Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.53, n.10, p.2367–2372, 2008.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: an LMI-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.50, n.1, p.106–111, 2005.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Local stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.48, n.5, p.842–847, 2003.

HOFFMANN, C.; WERNER, H. A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Brookline, v.23, n.2, p.416–433, 2015.

KAPILA, V.; HADDAD, W. M. Fixed-structure controller design for systems with actuator amplitude and rate non-linearities. **International Journal of Control**, Bristol, v.73, n.6, p.520–530, 2000.

KAPILA, V.; PAN, H.; QUEIROZ, M. S. de. LMI-based control of linear systems with actuator amplitude and rate nonlinearities. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC), 1999. **Anais...** New York: IEEE, 1999. v.2, p.1413–1418.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. New Jersey, Prentice Hall, 2002. v.3.

LIN, Z. Semi-global stabilization of linear systems with position and rate limited actuators. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC), 1997. **Anais...** New York: IEEE, 1997. v.2, p.1297–1301.

LÖFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE CSS INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SYSTEM DESIGN (CACSD), 2004. **Anais...** New York: IEEE, 2004.

MOSEK ApS. **The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual**. 2018. Disponível em: <https://docs.mosek.com/8.1/toolbox/index.html>.

PALMEIRA, A. H. K. **Estabilidade de sistemas amostrados com atuadores saturantes em magnitude e taxa de variação**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

PALMEIRA, A. H. K. et al. Sampled-data control under magnitude and rate saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Taiwan, v.26, n.15, p.3232–3252, 2016.

PALMEIRA, A. H. K.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; FLORES, J. V. Aperiodic sampled-data control for LPV systems under input saturation. **IFAC-PapersOnLine**, Laxenburg, v.51, n.26, p.130–136, 2018.

PEREIRA, L. F. A. et al. Multiple resonant controllers for uninterruptible power supplies - a systematic robust control design approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Brookline, v.61, n.3, p.1528–1538, 2014.

RUGH, W. J.; SHAMMA, J. S. Research on gain scheduling. **Automatica**, Terrytown, v.36, n.10, p.1401 – 1425, 2000.



- SHAMMA, J. S. **Analysis and design of gain scheduled control systems**. 1988. Tese (Doutorado em Systems Science and Engineering) — Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 1988.
- SHAMMA, J. S. An overview of LPV systems. In: MOHAMMADPOUR, J.; SCHERER, C. W. (Ed.). **Control of linear parameter varying systems with applications**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012. p.3–26.
- SHAMMA, J. S.; ATHANS, M. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, v.35, n.8, p.898–907, 1990.
- TARBOURIECH, S. et al. **Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2011.
- TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Output feedback compensators for linear systems with position and rate bounded actuators. In: KAPILA, V.; GRIGORIADIS, K. (Ed.). **Actuator saturation control**. Florida: CRC Press, 2002.
- TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Brookline, EUA, v.51, n.8, p.1364–1371, 2006.
- TARBOURIECH, S.; TURNER, M. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. **IET Control Theory & Applications**, Hertford, v.3, n.1, p.1–19, 2009.
- TURNER, M. C.; HERRMAN, G.; POSTLETHWAITE, I. Anti-windup compensation and the control of input-constrained systems. In: TURNER, M. C.; BATES, D. G. (Ed.). **Mathematical methods for robust and nonlinear control**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2007. p.143–173.
- WITTEK, P. Algorithm 950: Ncpol2sdpa—sparse semidefinite programming relaxations for polynomial optimization problems of noncommuting variables. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, New York, v.41, n.3, 2015.
- WU, F.; GRIGORIADIS, K. M. LPV-based control of systems with amplitude and rate actuator saturation constraints. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC), 1999. **Anais...** New York: IEEE, 1999. v.5, p.3191–3195.
- ZHANG, B.-L.; HAN, Q.-L.; ZHANG, X.-M. Recent advances in vibration control of offshore platforms. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v.89, n.2, p.755–771, 2017.
- ZHOU, K. et al. **Periodic control of power electronic converters**. Scotland: Institution of Engineering and Technology, 2017.