

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE MINAS,  
METALÚRGICA E DE MATERIAIS (PPGE3M)**

**REINALDO MARQUES MARTINS**

**VIABILIDADE DE DADOS SECUNDÁRIOS NA ESTIMATIVA DE MODELO  
DE CURTO PRAZO**

**Porto Alegre**

**2019**

**REINALDO MARQUES MARTINS**  
**ENGENHEIRO GEÓLOGO**

**VIABILIDADE DE DADOS SECUNDÁRIOS NA ESTIMATIVA DE MODELO  
DE CURTO PRAZO**

*Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia de  
Minas da Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, como requisito parcial à  
obtenção do título de Mestre em  
Engenharia, modalidade Acadêmica:  
Tecnologia Mineral.*

**Orientador: Prof. Dr. João Felipe Coimbra de Leite Costa**

**Porto Alegre**

**2019**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção de título de Mestre em Engenharia, área de concentração Metalurgia Extrativa e Tecnologia Mineral e aprovada em sua forma final pelo Orientado e Banca Examinadora do curso de Pós-Graduação

Orientador:

Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rodrigo de Lemos Peroni

Profa. Dra. Vanessa Cerqueira Koppe

Dr. Marcelo Cheuiche Godoy

Prof. Dr. Carlos Pérez Bergmann  
Coordenador do PPGEM

À minha família

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr João Felipe C.L. Costa, por toda orientação e formação passado ao longo desse período do mestrado.

Aos amigos pelas incontáveis horas de discussões, em especial ao colega Ronald Scheffer e a Simone Guimarães. Obrigado pela paciência e amizade.

A Mosaic Fertilizantes pelo apoio e disponibilidade de informações.

A minha família por perdoar minha ausência e pelo apoio incondicional.

“Avalia-se a inteligência de um indivíduo pela quantidade de  
Incertezas que ele é capaz de suportar”

Immanuel Kant

## RESUMO

Um dos pontos críticos frequentes no planejamento de lavra é a diferença entre os teores planejados e os executados na usina. Em geral, essa situação está associada à própria complexidade da jazida e as limitações da amostragem realizada, ocorrendo problemas em atingir níveis de flutuações toleráveis na alimentação da usina.

Para melhoria dos modelos geológicos e diminuição da incerteza na previsão dos teores, optou-se, nesta pesquisa, por incorporar informações de menor custo, que possuem, em geral, viés e baixa precisão quando comparados às amostras advindas dos furos de sondagem diamantada. Desta forma, os dados de baixa precisão considerados como dados secundários foram tratados e utilizados na estimativa do modelo em conjunto com dados primários (furos de sonda). O uso dessa informação propiciou uma maior acuracidade e precisão no resultado da estimativa do modelo de blocos e, assim, na tomada de decisão no planejamento de curto prazo.

Nos estudos de caso realizados em uma mina de fosfato, foram modeladas as continuidades espaciais considerando três bancos de dados: dados primários (i), dados primários e secundários originais (ii) e dados primários e secundários estandardizados (iii). A partir da definição destes três diferentes bancos de dados, foram estimados modelos realizando a combinação de metodologias de estimativa e banco de dados. Assim, os quatro cenários considerados derivam de modelos gerados por: krigagem ordinária com banco de dados (i), krigagem ordinária com banco de dados (ii), krigagem ordinária com banco de dados (iii) e cokrigagem ordinária com banco de dados (iii).

A partir dos casos estudados conclui-se que a adição de dados secundários diminuiu consideravelmente a incerteza na previsão dos teores. O modelo criado utilizando o banco de dados de amostras primárias combinados com os dados secundários tratados (estandardizados e reescalados), estimado pela metodologia de cokrigagem, demonstrou maior aderência e o menor erro relativo das estimativas, sugerindo a possibilidade de utilização prática na indústria em análise, melhorando a previsibilidade de resultados na usina sem custo adicional.

**Palavras-chave:** viés e baixa precisão, teor das estimativas, krigagem, cokrigagem

## ABSTRACT

One of the sensitive points in mining planning is the difference of planned and executed grades in the plant. In general, this situation is associated with the complexity of the deposit and the sampling limitations, not allowing adequate levels of grade fluctuations in the plant feed.

In this research, the geological models' improve and decrease the uncertainty in the prediction of the grades occurs by incorporation of lower cost information. Which generally have bias and low precision when compared to the samples coming from diamond drilling holes. In this way, the low accuracy data named as secondary data were treated and used with primary data (diamond drill holes) in the model estimation. The use of the secondary information provided greater accuracy and precision in the block model estimation and, therefore, in the short term planning decision-making.

In the case studies implemented in a phosphate mine, spatial continuities were modeled considering 3 datasets: primary data (i), primary data and original secondary data (ii) and primary data and standardized secondary data (iii). The models were estimated by combining the 3 databases and estimation methodologies. Thus, the four final model scenarios considered: ordinary kriging with database (i), ordinary kriging with database (ii), ordinary kriging with database (iii) and ordinary cokriging with database (iii).

From the case studies it is concluded that: the addition of secondary data reduced the uncertainty in the prediction of the grades. The model estimated by cokriging using the database of primary samples combined with the treated secondary data (standardized and rescheduling), demonstrated greater adherence and the smaller relative error, suggesting the possibility of practical use in the industry, improving the predictability at the plant without additional cost.

**key-words:** bias and low precision, grade estimation, kriging, cokriging.



## SUMÁRIO

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Capítulo 1 CONTEXTUALIZAÇÃO .....</b>                           | <b>10</b> |
| 1.1. Introdução .....                                              | 10        |
| 1.2. Estado da Arte .....                                          | 11        |
| 1.3. Objetivo .....                                                | 13        |
| 1.4. Metodologia .....                                             | 14        |
| 1.5. Estrutura da dissertação.....                                 | 15        |
| <b>Capítulo 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....</b>                        | <b>16</b> |
| 2.1. Fundamentos teóricos.....                                     | 16        |
| 2.2. Análise exploratória .....                                    | 16        |
| 2.3. Amostragem de dados multivariados .....                       | 17        |
| 2.4. Medidas de correlação – Variabilidade espacial conjunta ..... | 18        |
| 2.5. Validações .....                                              | 31        |
| <b>Capítulo 3 IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA.....</b>                | <b>34</b> |
| 3.1. Estudo de caso.....                                           | 34        |
| <b>Capítulo 4 CONCLUSÕES, RESTRIÇÕES E CONSIDERAÇÕES .....</b>     | <b>51</b> |
| 4.1. Conclusões – estudo de caso.....                              | 52        |
| 4.2. Restrições e considerações para trabalhos futuros. ....       | 53        |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                           | <b>54</b> |

## Capítulo 1 CONTEXTUALIZAÇÃO

### 1.1. INTRODUÇÃO

No contexto atual, onde as *commodities* tem variações de preços bruscas em períodos relativamente curtos, o detalhamento das jazidas e dos planos de lavra são cada vez mais minuciosos, principalmente pela variabilidade característica da jazida. Assim, a modelagem geológica torna-se um fator importante para que uma empresa de mineração seja competitiva, pois um melhor conhecimento dos seus recursos geológicos é parte essencial de um planejamento de lavra eficiente.

Um dos desafios frequentes no planejamento é a diferença entre os teores planejados e os executados na usina. Em geral, essa situação está associada à própria complexidade da jazida e as limitações da amostragem realizada, ocorrendo problemas em atingir níveis de flutuações toleráveis na alimentação da usina.

Para melhoria dos modelos geológicos e diminuição da incerteza na previsão dos teores, o planejamento de lavra requer amostragem com espaçamento adensado para garantir previsões mais acuradas e precisas. Porém, os altos custos e tempo de resposta são um limitante para o incremento do número de sondagens.

Por esse motivo, aparece uma opção de poder incorporar informações de menor custo que possuem, em geral, viés e baixa precisão quando comparados às amostras advindas dos furos de sondagem diamantada. Estes dados ditos secundários podem ser: amostras por trincheiras, sondagens secundárias, amostras de canaletas, etc. Estas informações secundárias, na falta de sondagens primárias, podem auxiliar na melhor estimativa de teores e, assim, na tomada de decisão no planejamento de curto prazo.

Atualmente, existem várias formas de incorporar a informação proveniente do adensamento amostral, Goovaerts (1997). Um dos métodos mais indicados é a cokrigagem, Maréchal (1970). Esta é uma extensão da krigagem, Matheron (1963,1965), no caso de muitas variáveis correlacionadas entre si, que fornece um estimador não tendencioso o qual minimiza a variância do erro, Wackernagel (2003).

Considerando duas fontes de dados disponíveis na modelagem geológica de curto prazo, devem ser tomadas decisões sobre quais amostras serão utilizadas, assim como se essas amostras podem ser mescladas.

Este trabalho inclui desde a escolha e tratamento de banco de dados, passando pela estimativa do modelo por diversas metodologias de estimativa até ao planejamento operacional

de pilha de homogeneização que alimenta a usina. Será feita revisão de conceitos geostatísticos, de krigagem, de cokrigagem e em especial da cokrigagem ordinária estandardizada, Minitt e Deutsch (2014). Este último método, tem como base tratar os dados secundários antes de serem utilizados na estimativa junto aos dados primários.

Foram utilizadas na estimativa diferentes tipos de informação, (i) apenas sondagens; (ii) sondagens e amostras de pó de perfuratriz; (iii) sondagens e amostras de pó de perfuratriz transformadas (estandardizadas e reescaladas). As informações foram combinadas com as metodologias de estimativa disponíveis gerando quatro modelos de blocos: (1) krigagem ordinária com dados (i); (2) krigagem ordinária com dados (ii); krigagem ordinária com dados (iii) e cokrigagem ordinária com dados (iii).

Como meio comparativo dos diferentes métodos de estimativa, foram construídas pilhas de homogeneização a partir dos blocos lavrados e os teores resultantes dos blocos utilizados foram comparados aos resultados informados pela amostragem da usina de beneficiamento (ditos teores reais para reconciliação). Essa reconciliação foi o suporte de análise dos resultados gerados nesse trabalho.

## 1.2. ESTADO DA ARTE

A utilização de dados com maior densidade amostral, porém menos acurados e com possível viés, ditos secundários, torna-se uma realidade visto as reduções nos investimentos em coletas de amostras de maior qualidade ditas primárias. A aplicação de uma metodologia para integração de informação secundária e primária tornou-se necessária e com o intuito principal de melhoria na estimativa da variável primária. Assim, o método de cokrigagem será testado para essa integração de dados amostrados.

Segundo Soares (2006), a utilização de uma variável auxiliar através da cokrigagem só é realmente vantajosa, em relação a krigagem normal da variável principal, se esta for sub amostrada em relação a variável secundária e se ambas as variáveis forem correlacionadas. A prática de cokrigagem bem como os algoritmos relativos à sua implementação podem ser consultados através das seguintes publicações: Maréchal (1970); Wackernagel (2003); Marcote (1991); Myers (1991) e Goovaerts (1997).

Sobre as estimativas em depósitos multivariados utilizando cokrigagem, Angelico (2006) realizou estudos de determinação da variabilidade na estimativa do PH e manganês (Mn) do solo de acordo com a matéria orgânica (MO). Segundo o autor, as variáveis primárias, PH e Mn, são onerosas e de difícil obtenção, por este motivo a utilização da variável secundária tornou-se necessária. Os resultados mostraram que a incorporação dos dados de matéria

orgânica possibilitou uma maior eficiência da caracterização química do solo. Além disso, o autor conclui que as margens de erros apresentadas nas estimativas se mostraram aceitáveis para a maioria das práticas agrícolas, incluindo a agricultura de precisão.

Boezio (2004) analisou os benefícios do uso de informação secundária na estimativa da variável de interesse, com diferentes técnicas de co-estimativa e a modelagem da correionalização. A metodologia foi aplicada para estimar o nível da água subterrânea utilizando dados de topografia como informação secundária, e os resultados mostraram que a incorporação dos dados de topografia utilizando a metodologia de estimativa por cokrigagem foi positiva. Soares (2006) salienta que, quando a correlação entre as variáveis secundária e principal é elevada e quando o modelo de correionalização é simples e perfeitamente ajustável aos três variogramas, existem vantagens na aplicação da cokrigagem em relação à krigagem.

No que diz respeito à malha amostral, (Reuwsaat, 2011) avaliou o adensamento amostral com malha regular de alguns atributos no minério de ferro. Através da técnica de cokrigagem, avaliou os dados que possuíam heterotopia parcial. Em todas as alternativas analisadas, verificou-se que o procedimento mais adequado de estimativa ocorreu quando o banco de dados foi preenchido com a utilização das relações entre os atributos por modelos de regressão linear. Mais informações sobre este método em Andriotti (2005). Depois do banco de dados ter sido isotopizado, procedeu-se a estimativa do depósito com o MCI, modelo de correionalização intrínseca (Wackernagel, 2003).

Ainda na utilização de cokrigagem para integração de dados imprecisos, enviesados e heterotópicos no processo de estimativa, Minitt e Deutsch (2014), criaram em seu estudo, um banco de dados artificial a partir de simulações, com espaçamento amostral regular. Neste artigo, utiliza-se a técnica geoestatística de cokrigagem standardizada, que combina diferentes conjuntos de dados, a partir de diferentes amostragens heterotópicas e com diferentes qualidades. Os resultados mostraram que a cokrigagem ordinária standardizada fornece melhores estimativas de recursos recuperáveis em escalas local e global, em comparação a krigagem ordinária da variável primária. No estudo, é apontado o benefício altamente significativo da incorporação da variável secundária, pois, o viés e a imprecisão existentes, devida à má amostragem nos dados secundários, não são transferidos para os resultados das estimativas. É importante salientar, que o coeficiente de correlação entre as variáveis primária e secundária para aplicação desta técnica afeta os resultados das estimativas. Os autores sugerem que se o coeficiente de correlação for igual ou superior a 0.7, o método sugerido funciona bem, ou seja, há correlação forte. Correlação abaixo de 0.2 não é adequado ao método sugerido e entre 0.2 e 0.7, os resultados podem ser questionáveis.

Araújo (2015) efetuou um trabalho relevante a respeito do uso de cokrigagem ordinária estandardizada com dados secundários imprecisos e enviesados. No estudo, a autora demonstra o ganho na qualidade de estimativa de teores com o uso adicional de informação, avaliando os benefícios na melhoria da classificação dos blocos. Foram avaliadas as metodologias de krigagem e cokrigagem ordinária estandardizada em dois estudos de caso. No primeiro estudo de caso, foi utilizado um banco de dados sintético com as amostras primárias e secundárias com elevada correlação. A utilização de informação secundária nas estimativas por cokrigagem ordinária estandardizadas produziram bons resultados, uma vez que as amostras de baixa qualidade foram consideradas informações secundárias e sua média foi filtrada. Os resultados das estimativas foram menos suavizados do que os obtidos por krigagem ordinária, o que levou a estimativas mais próximas do valor de referência dos blocos. No segundo estudo de caso, foi considerado um banco de dados real com amostras primárias e secundárias com moderada correlação. Neste caso, verificou-se que a utilização da informação secundária (enviesada e imprecisa) com moderada correlação, para auxiliar na estimativa, depende de correção. Na estimativa por krigagem ordinária, em que as variáveis foram utilizadas juntas ignorando a qualidade das amostras, os erros foram transferidos para estimativa, superestimando o modelo de blocos, o que torna inadequado este procedimento. A estimativa por krigagem ordinária com a variável primária e secundária estandardizada é uma alternativa para incorporação da informação secundária no planejamento de curto prazo.

### **1.3. OBJETIVO**

A atualização sistemática do modelo de blocos para o planejamento de curto prazo baseado nas amostras de informação secundária é uma realidade comum nas rotinas operacionais das minas. A utilização dessas informações pode trazer benefícios para toda cadeia produtiva da mina, porém haverá consequências indesejáveis na operação de mina, quando o modelo de teores estiver comprometido em termos de acuracidade e precisão.

Essa dissertação propõe a investigação dos benefícios da integração de informação secundária imprecisa e eventualmente enviesada proveniente do adensamento amostral de curto prazo. Para avaliação, os dados secundários serão utilizados de forma direta, ou seja, sem um pré-tratamento, também será testada a utilização dos dados após o tratamento pela metodologia de estandardização e reescalonamento dos dados. Serão testados os métodos de estimativa de krigagem ordinária, krigagem ordinária com os dados estandardizados e reescaloados e cokrigagem com os dados estandardizados e reescaloados.

Este trabalho apresenta os seguintes objetivos:

i. Avaliar os dados geológicos com o intuito de incorporar diretamente os dados primários (sondagem rotativa diamantada) com os dados secundários (amostras de pó de perfuratriz) em um mesmo banco de dados.

ii. Testar metodologias de estimativa diferentes utilizando este banco de dados integrado;

iii. Investigar através da aderência, entre modelos estimados e resultado de usina de beneficiamento, a possível redução de viés dos teores no planejamento de curto prazo, avaliando o benefício da incorporação da informação secundária imprecisa e enviesada na estimativa dos blocos.

#### **1.4. METODOLOGIA**

Para atingir os objetivos propostos nessa investigação, foi utilizado um banco de dados real e criado modelos estimados por diferentes metodologias. Com os modelos criados, foram planejadas pilhas de homogeneização e enviadas para a usina de beneficiamento. Segundo Schofield (1980), as pilhas de homogeneização, são unidades armazenadoras do material que será alimentado à usina de beneficiamento, e, se planejadas e operadas adequadamente, reduzem significativamente a variabilidade dos teores da lavra. Os resultados dos teores das pilhas na usina serão a referência para a reconciliação e definição de melhor banco de dados a ser utilizado e melhor método de estimativa.

Serão realizados os estudos em um banco de dados do Complexo mineroquímico de Araxá (fornecido pela empresa Mosaic Fertilizantes). Com o banco de dados formado pelos dados primários (sondagem rotativa diamantada) e dados secundários (pó de perfuratriz), será realizada uma análise exploratória avaliando sua estatística univariada e bivariada. Além disso, será verificada a correlação entre as variáveis primária e secundária.

Após a análise estatística dos dados, será realizado o modelamento da continuidade espacial, levando em consideração a continuidade espacial direta e cruzada a partir da covariância. A consideração de atributos correlacionados no processo de estimativa leva à construção de modelos de covariâncias que devem satisfazer à condição de definição positiva do modelo linear de correionalização, Goovaerts (1997).

Com dados selecionados e modelagem espacial concluída, serão executadas estimativas por, krigagem, Matheron (1963) e cokrigagem, Marechal (1970). A cokrigagem, baseada no mesmo princípio que a krigagem, procura realizar estimativas com erro médio zero e variância do erro mínima, porém considerando covariâncias diretas e cruzadas dos atributos. Como caso

específico, a cokrigagem será trabalhada no método da cokrigagem ordinária rescalonada e estandardizada, Goovaerts (1997), baseada na condição de não enviesamento. Isso exige que a soma de todos os pesos seja igual a um, Isaaks and Srivastava (1989). Com esta condição de não enviesamento o estimador será ligeiramente modificado.

Como meio comparativo dos diferentes métodos de estimativa, foram simuladas pilhas de homogeneização a partir dos blocos lavrados e os teores resultantes desses blocos foi considerado o teor médio das pilhas. Estas pilhas foram alimentadas na usina e os resultados simulados foram comparados aos resultados informados pela amostragem da usina. Essa reconciliação foi o suporte de análise dos resultados gerados nesse trabalho.

## **1.5. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO**

A seguir descreve-se sucintamente a organização dessa dissertação.

No Capítulo 2, apresenta-se o referencial bibliográfico dos temas que fundamentaram o estudo. Serão descritos temas a respeito de amostragem de dados multivariados, apresentada a fundamentação teórica dos métodos de estimativa de krigagem ordinária e cokrigagem ordinária estandardizada, assim como o modelo de continuidade espacial com dados que possuem heterotopia total. Também, serão apresentados sucintamente os temas de regressão linear e ferramentas de avaliação da coerência dos modelos estimados em relação aos dados originais.

No Capítulo 3, é desenvolvido o estudo com o banco de dados real de uma mina a céu aberto de fosfato. Serão modeladas as continuidades espaciais considerando dados primários (i), dados primários e secundários originais (ii), dados primários e secundários estandardizados (iii). A partir da definição dos diferentes bancos de dados, serão estimados modelos realizando a combinação de metodologias de estimativa e banco de dados. Serão construídos modelos por: krigagem ordinária com (i), krigagem ordinária com (ii), krigagem ordinária com (iii) e cokrigagem ordinária com (iii). Utilizando os modelos criados, foram planejadas e executadas 26 pilhas que foram alimentadas em uma usina de beneficiamento. Cada pilha possui quatro teores da variável  $P_2O_5\%$  estimados a partir de cada modelo estimado. Os resultados das 26 pilhas foram reconciliados com esses valores dos quatro modelos.

Por fim, o Capítulo 4 traz as conclusões do estudo realizado e as recomendações para trabalhos futuros.

## Capítulo 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo apresenta uma breve visão teórica dos conceitos e métodos geoestatísticos utilizados nesta dissertação, juntamente com as respectivas referências pesquisadas.

Avaliando uma estimativa local, podemos considerar a utilização de variáveis primárias sendo suplementadas por variáveis ditas secundárias. Segundo Goovaerts (1997), medidas diretas de informações primárias são suplementadas quando utilizamos informações secundárias. Quando a informação secundária é mais adensada, levá-la em consideração pode melhorar as estimativas, principalmente quando temos dados primários, geralmente de maior interesse, escassos ou mal correlacionados no espaço. Ainda, quando a informação secundária não está densamente amostrada, a consideração conjunta das variáveis leva a resultados mais coerentes com o fenômeno estudado.

### 2.2. ANÁLISE EXPLORATÓRIA

A análise exploratória dos dados amostrais consiste de cálculos estatísticos cujo objetivo é detectar tendências de agrupamento, dispersão ou correlação entre as variáveis (Isaaks & Srivastava, 1989).

Segundo Soares (2006), a análise estatística é feita com o objetivo de caracterizar e descrever estatisticamente as distribuições dos dados, para um melhor entendimento do comportamento das variáveis de interesse dentro do depósito.

Para tal caracterização, são utilizadas medidas de tendência central, que corresponde à extensão na qual todos os valores de dados se agrupam em torno de um valor central típico. Segundo Levine *et al.* (2008), quando as pessoas conversam sobre um “valor médio” ou “valor do meio” ou “valor mais frequente”, elas estão falando informalmente sobre a média aritmética, a mediana e a moda, três medidas de tendência. A média é regida pela equação 1:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad (1)$$

onde:

$v_i$  = valores observados

$n$  = número de observações

Além da tendência central, todo conjunto de dados pode ser caracterizado por sua variação e seu formato. A variação mede o *spread*, ou dispersão, dos valores em um conjunto



de dados. Segundo Levine (2008), as medidas mais aplicadas na estatística são o desvio-padrão ( $\sigma$ ) e a variância ( $\sigma^2$ ).

A variância é dada pela diferença quadrática média entre os valores observados e sua média. Essa medida é muito sensível a valores extremos e é medida nas mesmas unidades das amostras ao quadrado, conforme equação 2.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - m)^2 \quad (2)$$

A raiz quadrada da variância é denominada desvio-padrão ( $\sigma$ ). Este é mais frequentemente usado, já que tem unidade igual à das amostras.

Quando temos um conjunto de dados que contém uma grande quantidade de valores, pode ser difícil tirar conclusões a respeito desses números. Logo, existem inúmeros tipos de gráficos que podemos utilizar para apresentar visualmente os dados numéricos. Para uma análise de distribuição de frequência, pode ser utilizado o histograma, que nada mais é que um gráfico de barras para dados numéricos em grupo no qual as frequências ou percentagens de cada grupo de dados numéricos são representadas por barras verticais individuais.

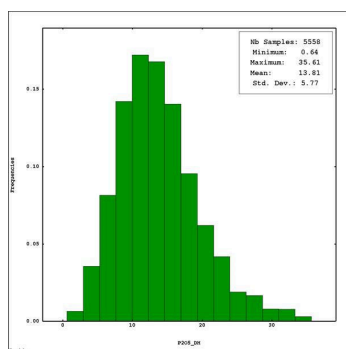


Figura 1-Histograma exemplo.

### 2.3. AMOSTRAGEM DE DADOS MULTIVARIADOS

Considerado diferentes variáveis  $Z(u_\alpha)$  em um determinado domínio, podemos encontrá-las amostradas e dispostas nos mesmos locais ou em locais diferentes. Como apresentado abaixo, temos a configuração espacial dos dados com: isotopia, heterotopia parcial e total:

Isotopia: as amostras estão disponíveis, para todas as variáveis, nos mesmos locais. Essa é a melhor condição para cálculo de variogramas cruzados (Wackernagel, 2003).

Heterotopia parcial: existe em situações ou locais onde as diferentes variáveis estão todas amostradas. Ainda, existem outros pontos amostrais em que ora apenas a variável primária está disponível e pontos onde ora a secundária está presente, (Olea, 1999).

Heterotopia total ou completa: quando as variáveis são medidas em locais diferentes não tendo nenhum ponto em comum. O banco de dado considerado nesta dissertação apresenta heterotopia total. Deste modo, o variograma cruzado não pode ser calculado diretamente. Myers (1991) sugere a utilização de pseudo-variogramas cruzados para poder estimar os dados por cokrigagem, nesta configuração de dados. Pseudo-variogramas cruzados são definidos por como demonstrado na equação 3:

$$\gamma_{ij}^p(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z_i(u_\alpha) - z_j(u_\alpha + h)]^2 \quad (3)$$

onde  $\gamma_{ij}^p(h)$  é o pseudovariograma cruzado entre as variáveis  $z_i(u_\alpha)$  e  $z_j(u_\alpha + h)$ , e  $N(h)$  é o número de pares de valores de,  $z_i(u_\alpha)$  e  $z_j(u_\alpha + h)$ .

Uma alternativa é a utilização da covariância cruzada, descrita por Deutsch e Journel (1998) e proposto posteriormente por Minnitt e Deutsch (2014). Este tema será discutido ao longo da dissertação, por se tratar da ferramenta que se baseou este estudo.

## 2.4. MEDIDAS DE CORRELAÇÃO – VARIABILIDADE ESPACIAL CONJUNTA

Em estudos que envolvem duas ou mais variáveis, há interesse em se conhecer o relacionamento entre elas, além das estatísticas descritivas normalmente calculadas. Um aspecto essencial da modelagem geoestatística é estabelecer medidas quantitativas da correlação espacial para uso subsequente em estimativa e simulação. A variabilidade espacial é diferente para cada variável em cada tipo de depósito ou mesmo diferentes fácies ou camadas dentro de um mesmo depósito (Deutsch, 2002). Logo, se faz necessário caracterizar a variabilidade espacial conjunta, e com este fim, temos os seguintes conceitos:

### 2.4.1. Covariância

A covariância, ou variância conjunta, é uma medida do grau de interdependência (ou inter-relação) numérica entre duas variáveis aleatórias. Quando se considera apenas uma variável, é denominada covariância direta.

Na covariância direta para uma variável (Exemplo: Au com Au, Ni com Ni, Cu com Cu), avaliamos a esperança matemática da amostra  $Z(u)$ , multiplicada pela amostra espaçada de  $h$  metros, menos a média ao quadrado, como demonstrado na equação 4:

$$C(h) = E[Z(u) \cdot Z(u + h)] - E[Z(u)] \cdot E[Z(u + h)] = E[Z(u) \cdot Z(u + h)] - m^2 \quad (4)$$

De forma experimental, a função de covariância é dada pela equação 5:

$$C(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} z(u_{\alpha}) \cdot z(u_{\alpha} + h) - m(h)^2 \quad (5)$$

Onde,

- $m(h)$  é a média da variável  $Z(u)$  calculada a partir dos  $z(u_{\alpha})$ ,
- $N(h)$  é o número de pares afastados por um vetor de  $h$  metros.

Em  $h = 0$ , teremos a variância máxima dos dados,  $C(0) = \sigma^2$ .

Propriedades relevantes da covariância, dizem respeito a:

- Função simétrica, onde a covariância da amostra 1 para amostra 2 é igual a covariância da amostra 2 para a amostra 1.  $C(h) = C(-h)$
- Nenhum valor de covariância é maior do que a covariância de zero:  $|C(h)| \leq C(0)$ .

O variograma apresenta um valor máximo que é igual à variância máxima dos dados,  $\gamma(h) = C(0) - C(h)$ .

Quando se trata de duas ou mais variáveis, a função é denominada como covariância cruzada. A função de covariância cruzada é entre duas variáveis,  $Z_i(u)$  e  $Z_j(u)$ , separadas por um vetor de separação  $h$ . Além disso, nesse caso de covariância cruzada, temos que considerar as médias das duas variáveis, como demonstrado na equação 6:

$$C_{ij}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} z_i(u_{\alpha}) \cdot z_j(u_{\alpha} + h) - m_i \cdot m_j \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j \quad (6)$$

Onde,

- $C_{ij}(h)$  é a função de covariância cruzada,
- $N(h)$  é o número de pares de valores  $z_i(u_{\alpha}), z_j(u_{\alpha} + h)$  separados por um vetor de  $h$  metros,
- $m_i, m_j$  são as médias das variáveis  $Z_i(u)$  e  $Z_j(u)$ .

A função de covariância cruzada não é simétrica, equação 7:

$$C_{ij}(h) \neq C_{ij}(-h) \quad (7)$$

Isto quer dizer que uma mudança na ordem das variáveis ou no sentido do vetor de separação  $h$ , modifica o valor da função covariância cruzada (Wackernagel, 2003).

Comumente, esta não simetria é denominada efeito de retardo. Isto ocorre muito em depósitos intempéricos, onde temos diferentes mobilidades geoquímicas das espécies químicas.

Pode existir correlação em  $h \neq 0$ , mesmo sendo nula a correlação para  $h = 0$ . Sendo assim, a covariância cruzada não tem necessariamente seu máximo para o vetor de separação nulo.

O efeito retardado é geralmente ignorado e a covariância cruzada é calculada como a média das funções  $C_{ij}(h)$  e  $C_{ij}(-h)$ , equação 8:

$$C_{ij}(h) = \frac{1}{2}(C_{ij}(+h) + C_{ij}(-h)) \quad (8)$$

A standardização da função covariância, pela variância, constitui o correlograma demonstrado na equação 9:

$$\rho(h) = \frac{C(h)}{\sigma^2} \in [-1,1] \quad (9)$$

Onde  $\rho(h)$ , corresponde ao coeficiente de correlação linear dos dados separados de  $h$  metros,  $C(h)$  é a variância dos dados separados por uma distância  $h$  e  $\sigma^2$  é a variância *a priori* dos dados.

O correlograma cruzado é análogo ao correlograma direto, porém ao invés de dividir a covariância pela variância diretamente, temos que dividir a covariância cruzada pelo o produto dos desvios padrões, conforme equação 10.

$$\rho_{ij}(h) = \frac{C_{ij}(h)}{\sigma_i \sigma_j} \in [-1,1] \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j \quad (10)$$

Onde  $C_{ij}(h)$  é a função de covariância cruzada e  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  são os desvios padrões das variáveis  $Z_i(u)$  e  $Z_j(u)$  respectivamente.

#### 2.4.2. Semi-Variograma

O semi-variograma direto, contrariamente à função de covariância, mede a dissimilaridade entre dados separados por um vetor de separação  $h$ , conforme equação 11:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z(u_\alpha) - z(u_\alpha + h)]^2 \quad (11)$$

Onde,  $\gamma(h)$  é a função semi-variograma,  $N(h)$  é o número de pares de valores  $z(u_\alpha)$ ,  $z(u_\alpha + h)$  afastados por um vetor de separação  $h$ .

Para o caso do semi-variograma cruzado  $\gamma_{ij}(h)$ , é definido como a semi-esperança matemática do produto dos incrementos das variáveis  $z_i(u_\alpha)$ ,  $z_i(u_\alpha + h)$  e  $z_j(u_\alpha + h)$  separadas por  $h$ , equação 12:

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z_i(u_\alpha) - z_i(u_\alpha + h)] \cdot [z_j(u_\alpha) - z_j(u_\alpha + h)] \quad (12)$$

Sendo assim, em dados com heterotopia completa, é impossível a modelagem de um semi-variograma cruzado, pois é necessário de que as variáveis estejam simultaneamente nos locais  $u_\alpha$  e  $u_\alpha + h$ .

Contrariamente à função covariância cruzada, o semi-variograma cruzado é simétrico, já que é calculado a partir dos incrementos das variáveis ( $Z_i$  com  $Z_i$  ou  $Z_j$  com  $Z_j$ ), não sendo afetados pela mudança no sentido do vetor de separação  $h$ .

Os modelos semivariográficos são caracterizados por quatro componentes (Figura 2): alcance ( $a$ ) que corresponde à distância dentro da qual as amostras apresentam-se correlacionadas espacialmente, o patamar ( $C$ ) que é o valor do semivariograma correspondente a seu alcance ( $a$ ), a partir dele considera-se que não existe mais dependência espacial entre as amostras, porque a variância da diferença entre pares de amostras ( $Var [z_i(u_\alpha) - z_i(u_\alpha + h)]$ ) torna-se invariante com a distância, o efeito pepita ( $C_0$ ), que mostra a descontinuidade do semivariograma para distâncias menores do que a menor distância entre as amostras e parte desta descontinuidade pode ser também devida a erros de medição e o patamar ou sill ( $C$ ): é a soma entre a contribuição ( $C_1$ ) e o efeito pepita ( $C_0$ ), que corresponde à variância *a priori* dos dados. Os elementos estão apresentados na figura 2.

Com a adição de erros aos dados, há um aumento na variância e, portanto, alteram os parâmetros do modelo variográfico. Dentre eles, o mais afetado é o efeito pepita,  $C_0$ , que representa no modelo, a variabilidade geológica do fenômeno a curta distância, os erros referentes aos procedimentos de amostragem e de protocolos de preparação inadequados.

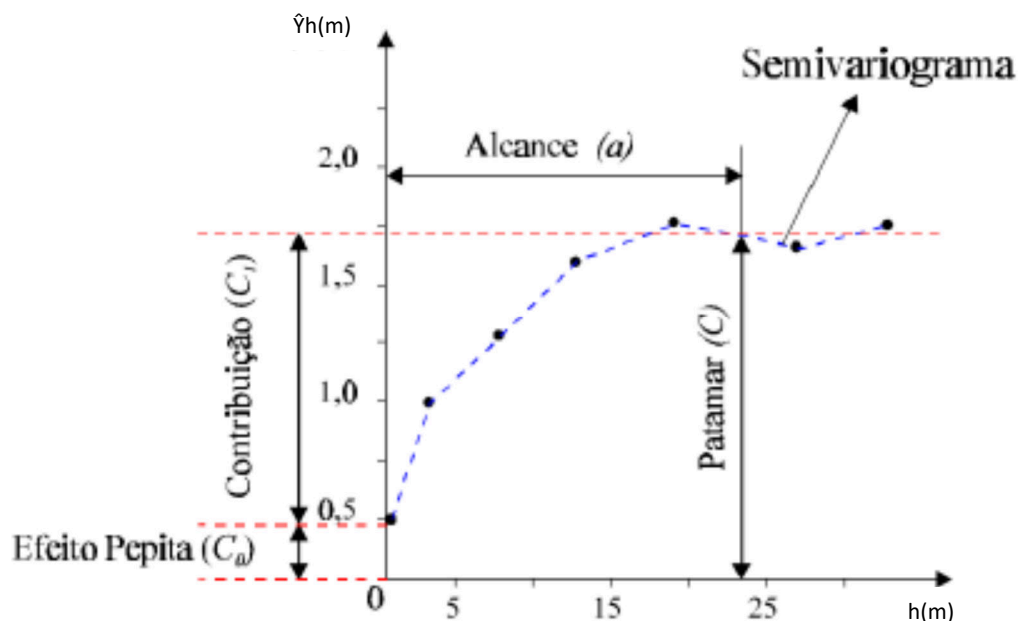


Figura 2 - Componentes do Semi-variograma experimental.

#### 2.4.3. Transformação de covariância para variograma

Para a transformação, deve ser considerada a hipótese de estacionariedade de segunda ordem, como descrito em Goovaerts (1997). A hipótese de estacionariedade de segunda ordem é assumida para as distribuições univariadas e bivariadas. Assim, independentemente da localização  $u_\alpha$ , toda variável randômica possui a mesma distribuição univariada e em qualquer ponto as duas variáveis randômicas tem a mesma distribuição bivariada. Isso implica, que o valor esperado de covariância entre duas variáveis randômicas também seja invariante sob a translação, Armstrong (1998). Koppe (2009) comenta que na prática, apenas os dois momentos estatísticos, média e covariância, são considerados, por isso a hipótese assumida é de segunda ordem. Logo, uma função randômica  $Z(u)$  é chamada estacionária de segunda ordem, quando o valor esperado de  $Z(u)$  existe (finito) e é invariável no domínio em questão e quando a covariância entre duas variáveis randômicas  $Z(u_\alpha)$  e  $Z(u_\alpha + h)$  existe e depende apenas do vetor  $h$ .

A equação 13 demonstra, que apesar de fornecerem informações inversas (descorrelação e correlação) a respeito do comportamento espacial, o variograma é equivalente à função covariância e pode ser calculado com a equação 13:

$$\begin{aligned} y_{ij}(h) &= C_{ij}(0) - C_{ij}(h) \\ y_{ij}(h) &= \sigma_{ij}^2 - C_{ij}(h) \end{aligned} \quad (13)$$

Onde,  $y_{ij}(h)$  é a função variograma cruzada,  $C_{ij}(h)$  a função de covariância cruzada e  $\sigma_{ij}^2$ .

Em situações, como é o caso de heterotopia total, a disposição dos dados impossibilita o cálculo do variograma cruzado. Minnitt & Deutsch (2014) propuseram que a continuidade espacial do fenômeno fosse modelada a partir da covariância cruzada das variáveis extrapolando os pontos experimentais para  $h > 0$  a fim de obter a covariância para  $h=0$  (Figura 3).

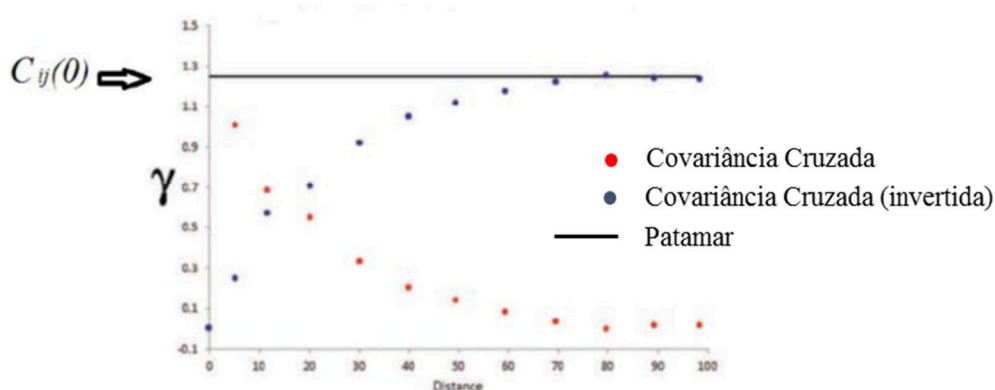


Figura 3 - Adaptado de Minnitt e Deutsch(2014), extrapolação da covariância cruzado no eixo y. Covariância original dos dados (pontos vermelhos) e variograma experimental dos dados após a inversão (Equação 13).

#### 2.4.4. Krigagem

Segundo Sinclair & Blackwell (2004), krigagem é um termo genérico aplicado a uma gama de métodos de estimativa que dependem da minimização do erro de estimativa. Esse nome foi dado por G. Matheron e P. Carlier, que desenvolveram a teoria geoestatística baseados nos trabalhos sobre estimativas de teores em minas de ouro na África do Sul por Daniel Krige.

O termo krigagem inclui vários métodos específicos como: krigagem simples (KS), krigagem ordinária (KO) - Matheron (1963), krigagem de indicadores (KI) – Journel (1982, 1983) e Matheron (1982), krigagem universal (KU) – Marechal (1970), krigagem disjuntiva - Matheron (1976), krigagem múltiplos indicadores (KIM) e krigagem de probabilidade (KP) – Sullivan (1984).

Todos estes métodos se baseiam no conceito de que a autocorrelação de uma variável regionalizada, pode ser modelada por uma função matemática inferida, através dos dados da variável regionalizada e usada para auxiliar na estimativa. O termo de variável regionalizada introduzido por Matheron foi criado para enfatizar as feições particulares das variáveis geológicas, Valente (1989). O objetivo da krigagem é gerar a melhor estimativa em um local

não amostrado, utilizando a informação fornecida por dados contidos na grande área na qual o local a ser estimado também está incluído. Os dados conhecidos são utilizados em um conjunto de equações lineares onde cada termo somado é constituído por duas partes, uma delas é o valor do dado conhecido e a outra é um peso conhecido como peso de krigagem. Para obter o peso de krigagem, é necessária a resolução de uma matriz constituída pelas covariâncias entre os dados conhecidos e o ponto a ser estimado. As covariâncias são estimadas através do modelo ajustado aos dados amostrais disponíveis. De forma geral, para estimar-se o valor de um atributo contínuo  $Z$ , em um local não amostrado,  $u$ , usando apenas os valores conhecidos de  $Z$  dentro de uma área de estudo  $R$ , a variável randômica resultante da krigagem, conhecida como  $Z^*(u)$ , é definida pela equação 14:

$$Z^*(u) - m(u) = \sum_{\alpha=1}^{n(u)} \lambda_{\alpha}(u) [Z(u_{\alpha}) - m(u_{\alpha})] \quad (14)$$

Onde  $\lambda_{\alpha}(u)$  é o peso dado à amostra  $z(u_{\alpha})$  que é uma das realizações da variável randômica  $Z(u_{\alpha})$ ,  $m(u)$  é a média da variável randômica  $Z(u)$  e  $m(u_{\alpha})$  é a média da variável randômica  $Z$ .

#### 2.4.5. Krigagem Ordinária

A krigagem ordinária é um tipo de krigagem que não necessita do valor da média estacionária. A média local é calculada através de amostras vizinhas. Neste caso, a obtenção de um estimador não tendencioso requer que a soma dos pesos seja unitária, equação 15:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (15)$$

O estimador de krigagem ordinária ficaria assim, equação 16:

$$Z^*(u_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(u_i) \quad (16)$$

Os pesos são calculados através do seguinte sistema, equação 17:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_{0i}(u) \cdot C(u_i, u_{\alpha}) - \mu(u) &= C(u, u_{\alpha}) \\ \alpha &= 1, 2, \dots, n(u) \\ \sum_{i=1}^{n(u)} \lambda_{0i} &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$



Onde  $C(u_i, u_\alpha)$  é a covariância entre as amostras  $u_i$  e  $u_\alpha$ ;  $C(u, u_\alpha)$  é a covariância entre os valores de  $Z$  observados em  $u_\alpha$  e  $u$ .  $\mu(u)$  é o multiplicador de Lagrange, necessário minimizar o erro, equação 15.

Em termos matriciais, a krigagem ordinária é expressa da seguinte forma:

$k \cdot \lambda = K \Rightarrow \lambda = K^{-1} \cdot K$ , sendo que:

$$k = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & 1 \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}; \lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{01} \\ \lambda_{02} \\ \lambda_{0n} \\ \mu \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$K = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} & 1 \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda_{01} \\ \lambda_{02} \\ \lambda_{0n} \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{1u} \\ C_{2u} \\ C_{nu} \\ 1 \end{vmatrix}$$

Onde  $C_{ij}$  é a covariância entre os valores de  $Z$  em dois pontos amostrais e  $C_{iu}$  é a covariância entre o ponto sendo estimado e cada um dos pontos amostrais vizinhos.

#### 2.4.6. Cokrigagem

A cokrigagem é a extensão natural da krigagem no caso de múltiplas variáveis. Esta fornece um estimador não tendencioso que minimiza a variância do erro. Cada função randômica  $Z_i(u)$ , pode ser expressa como um resíduo  $R$  com a média zero e covariância  $CR_i(h)$ , e um termo de tendência  $m_i(u)$  da forma, equação 19:

$$Z_i(u) = R_i(u) + m_i(u) \quad (19)$$

Temos diferentes métodos de cokrigagem, dependendo do modelo assumido para a tendência  $m_i(u)$ , são eles:

- Cokrigagem simples (CKS): considera que as tendências são constantes em toda a área de estudo;
- Cokrigagem ordinária (CKO): trabalha com média local, considera flutuações locais sobre a média limitando a hipótese de estacionariedade a uma vizinha local. Armstrong (1998) explica que estacionariedade é verificada quando todos os momentos estatísticos não variam com a translação.
- Cokrigagem com um modelo de tendência (CKT): considera que a média varia suavemente na área de estudo.
- 

#### 2.4.7. Cokrigagem simples (CKS)

A ideia é calcular o valor da variável  $Z_1$  no ponto  $u$  utilizando as variáveis  $Z_1$  e  $Z_2$  considerando pesos diferentes. Também, consideramos que as médias das variáveis primárias e secundárias são modeladas como estacionárias  $m_1$  e  $m_2$ , equação 20.

$$Z_{CKS}^*(u) - m_1 = \sum_{\alpha 1=1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha 1}^{CKS} \cdot [Z_1(u_{\alpha 1}) - m_1] + \sum_{\alpha 2=1}^{n2(u)} \lambda_{\alpha 2}^{CKS} \cdot [Z_2(u_{\alpha 2}) - m_2] \quad (20)$$

Sendo assim temos o somatório do peso da primária  $\lambda_{\alpha 1}^{CKS}$ , multiplicado pelo resíduo da primária  $Z_1(u_{\alpha 1})$  menos sua média mais a adição do somatório do peso da secundária  $\lambda_{\alpha 2}^{CKS}$ , multiplicado pelo resíduo da secundária  $Z_2(u_{\alpha 2})$  menos sua média.

Nota-se, que é considerado pesos diferentes para cada variável. O peso da secundária é tão maior quanto maior for a *CROSS*-correlação com a variável primária.

Outro fator relevante é que o número de variáveis de  $m_1$  não precisa ser necessariamente o mesmo número de variáveis para  $m_2$ .

O sistema CKS que resolve os pesos é o seguinte, equação 21:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta 1=1}^{n1(u)} \lambda_{\beta 1}^{CKS} \cdot C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) + \sum_{\beta 2=1}^{n2(u)} \lambda_{\beta 2}^{CKS} \cdot C_{12}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 2}) &= C_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \sum_{\beta 1=1}^{n1(u)} \lambda_{\beta 1}^{CKS} \cdot C_{21}(u_{\alpha 2} - u_{\beta 1}) + \sum_{\beta 2=1}^{n2(u)} \lambda_{\beta 2}^{CKS} \cdot C_{22}(u_{\alpha 2} - u_{\beta 2}) &= C_{21}(u_{\alpha 2} - u) \\ \alpha 1 = 1, \dots, n1(u) \quad \alpha 2 = 1, \dots, n2(u) & \end{aligned} \quad (21)$$

Onde:

$C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1})$  = covariância direta da primária;

$C_{12}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 2})$  = covariância cruzada da primária com a secundária;

$C_{22}(u_{\alpha 2} - u_{\beta 2})$  = covariância direta da secundária;

$C_{21}(u_{\alpha 2} - u)$  = covariância cruzada da secundária com a primária.

Se encontrarmos um variograma com efeito pepita puro, ou um correlograma com covariância zero, significa que a secundária não tem correlação com a primária e a segunda equação fica igual a zero, daí o sistema simplifica para a krigagem simples. Logo, em teoria, só utilizamos krigagem simples quando não temos correlação entre as variáveis.

A variância de CKS é dada pela equação 22:

$$\sigma_{CKS}^2(u) = C_{11}(0) - \sum_{\alpha 1=1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha 1}^{CKS} \cdot C_{11}(u_{\alpha 1} - u) - \sum_{\alpha 2=1}^{n2(u)} \lambda_{\alpha 2}^{CKS} \cdot C_{21}(u_{\alpha 2} - u) \quad (22)$$

O primeiro termo diz respeito a mesma função da variância de krigagem simples, equação 23:

$$\sigma_{CKS}^2(u) = C_{11}(0) - \sum_{\alpha 1=1}^{n1(u)} \lambda_{\alpha 1}^{CKS} \cdot C_{11}(u_{\alpha 1} - u) \quad (23)$$

Porém, equação 24, temos mais um fator para ser subtraído do erro, o fator de covariância cruzada:

$$\sum_{\alpha 2=1}^{n_2(u)} \lambda_{\alpha 2}^{CKS} \cdot C_{21}(u_{\alpha 2} - u) \quad (24)$$

Quanto mais correlação existir entre a primária e a secundária, menor ficará o erro. Por este fato, a variância da cokrigagem é menor que a variância de krigagem.

#### 2.4.8. Cokrigagem ordinária (CKO)

Considera-se a média somente numa vizinhança local e não na totalidade da área de estudo, equação 25.

$$Z_{CKO1}^*(u) = \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot Z_2(u_{\alpha 2}) \quad (25)$$

A soma dos pesos  $\lambda_{\alpha 1}^{CKO}$  mais  $\lambda_{\alpha 2}^{CKO}$  tem que ser igual a 1 para satisfazer a condição de estacionariedade.

Para o CKO, existem as denominadas condições tradicionais, onde, equação 26:

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} = 1 \quad \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} = 0 \quad (26)$$

Logo, caso a somatória dos pesos da variável primária seja igual a 1, o somatório dos pesos da variável secundária deve ser igual a zero. Isso não sugere que não será considerado peso para a secundária, quer dizer que ela deverá ter um somatório igual a zero.

Na prática, a condição sobre os pesos da variável secundária provoca a ocorrência de pesos negativos ou muito pequenos, levando a estimativas negativas ou diminuindo a influência da variável secundária.

Para resolver este problema, Goovaerts (1997) considera que o somatório dos pesos das variáveis consideradas seja igual a 1. A utilização dessa condição só é possível se o estimador é previamente re-escalado pelas médias. As médias  $m_1$  e  $m_2$  são as médias desagrupadas de  $Z_1$  e  $Z_2$ .

Logo para equação 27:

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} = 1, \quad (27) \text{ temos que o re-escalado seja, equação 28:}$$

$$Z_{CKO1}^*(u) = \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot [Z_2(u_{\alpha 2}) - m_2 + m_1] \quad (28)$$

Neste caso, a cokrigagem ordinária é não tradicional, pois, utiliza a média da primária para a secundária.

Da mesma forma que foi explicada na cokrigagem simples, pelo fato de adicionarmos mais um termo a ser subtraído, o fator de covariância cruzada, podemos afirmar que a variância de cokrigagem ordinária é menor que a variância de krigagem ordinária.

#### 2.4.9. Cokrigagem ordinária standardizada - SCOK

As amostras (secundárias) originadas de rotinas de amostragem de curto prazo, ou pré-lavra, se tornam abundantes durante o desenvolvimento da vida da mina, quando comparados aos furos de sondagem diamantados (DDH-Primárias). Essa abundância de amostras secundárias auxilia no melhor modelamento da continuidade espacial do fenômeno, assim como a definição de contatos de diferentes litologias, visto seu espaçamento amostral menor.

As diferentes técnicas de amostragens para a variável secundária possuem suportes amostrais diferentes, assim, na maioria das vezes, possuem uma imprecisão e um viés. Para utilização destes dados na estimativa do modelo de blocos, ao invés de utilizar fatores, para tentar minimizar este viés e imprecisão, a cokrigagem ordinária estandardizada apresenta-se como uma alternativa e permite que os dados secundários possam ser utilizados de forma aceitável teoricamente. Considerando estes erros oriundos da amostragem, a variância da variável primária e secundária podem possuir diferenças consideráveis, gerando dificuldades nas realizações das matrizes de cokrigagem.

Uma boa prática seria padronizar e re-escalar os valores de covariância. De forma geral, essa padronização é alcançada considerando a variável, menos sua média, dividido pelo seu desvio padrão.

Segundo Minnitt e Deutsch (2014), reescalonamento se dá no momento que a variável secundária, após a estandardização, é multiplicada pelo desvio padrão da variável primária mais a média da primária.

Logo, o estimado do SCOK pode ser calculado conforme a equação 29:

$$\frac{Z^*_{SCOK}(u) - m_i}{\sigma_i} = \sum_{\alpha_i=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_i}^{CKO} \cdot \frac{[Z_i(u_{\alpha_i}) - m_i]}{\sigma_i} + \sum_{\alpha_j=2}^{n_2} \lambda_{\alpha_j}^{CKO} \cdot \frac{[Z_j(u_{\alpha_j}) - m_j]}{\sigma_j} \quad (29),$$

Onde:

$Z^*_{SCOK}(u)$  A estimativa por krigagem ordinária estandardizada;

$Z_i(u_{\alpha_i})$  Variável primária;

$m_i$  Média da primária;

$\sigma_i$  Desvio padrão da primária

$\sum_{\alpha_i=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_i}^{CKO}$  Somatório dos pesos da variável primária

$Z_j(u_{\alpha_j})$  Variável secundária;

$m_j$  Média da secundária;

$\sigma_j$  Desvio padrão da secundária;

$\sum_{\alpha_j=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_j}^{CKO}$  Somatório dos pesos da variável secundária.

Conforme descrito em Goovaerts (1997), quando multiplicarmos primeiro a variável secundária pelo desvio padrão da primária, e depois dividirmos pelo desvio padrão da variável secundária, encontraremos a relação entre os pesos dados às amostras, equação 30.

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_i}^{SCOK}(u) &= g_{\alpha_i}^{SCOK} \longrightarrow \alpha_i = 1, \dots, n_{i(u)} \\ Z_{\alpha_j}^{SCOK}(u) &= \frac{\sigma_i}{\sigma_j} g_{\alpha_j}^{SCOK} \longrightarrow \alpha_j = 1, \dots, n_{j(u)} \end{aligned} \quad (30),$$

Os pesos da variável primária ficam os mesmos nos dois sistemas.

Segundo Minnitt e Deutsch (2014), para a utilização desse método, deve ser respeitado as condições de o somatório dos pesos da primária mais o somatório dos pesos da secundária ser igual a 1 (Equação 27):

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1}^{CKO} + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_2}^{CKO} = 1$$

Também devem ser respeitadas as condições:

$$m_i = E\{Z_i(u)\};$$

$$m_j = E\{Z_j(u)\} \quad \text{São médias estacionárias de } i \text{ e } j.$$

#### 2.4.10. Modelo linear de correção (MLC)

Como discutido anteriormente, a cokrigagem apresenta vantagens quando trabalhamos com estimativas de diferentes variáveis, porém, esses sistemas incluem não somente a covariância da variável de interesse, mas também as covariâncias das variáveis secundárias e as covariâncias cruzadas entre elas.

No MLC, todos os modelos diretos e cruzados são expressos como combinações lineares das mesmas estruturas básicas (Journel e Huijbregts, 1978). Para respeitar as condições do MLC, deveremos avaliar três condições:

- Mesmos modelos (esférico, exponencial, gaussiano, cúbico, etc.) – alcances iguais;
- Determinantes do patamar sejam maiores que zero;
- Coeficiente de correlação esteja entre -1 e +1.

Primeira condição:

Imputamos que as estruturas serão definidas no variograma da primária e repetidas nas estruturas dos variograma da secundária e do cruzado, equação 31.

$$\gamma_{11} = C_{0_{11}} + C_{1_{11}} SphR_1 + C_{2_{11}} SphR_2 \quad (31)$$

$$\gamma_{22} = C_{0_{22}} + C_{1_{22}} SphR_1 + C_{2_{22}} SphR_2$$

$$\gamma_{12} = C_{0_{12}} + C_{1_{12}} SphR_1 + C_{2_{12}} SphR_2$$

Onde,

$C_{0_{11}} ; C_{0_{22}} ; C_{0_{12}}$  = Efeito pepita;

$C_{1_{11}} ; C_{1_{22}} ; C_{1_{12}}$  = Contribuição de patamar da estrutura de alcance 1 ( $R_1$ );

$C_{2_{11}} ; C_{2_{22}} ; C_{2_{12}}$  = Contribuição de patamar da estrutura de alcance 2 ( $R_2$ ).

Segunda condição:

Respeitadas as condições dos alcances, devemos avaliar se os determinantes sejam positivos.

$$\begin{vmatrix} C_{0_{11}} & C_{0_{12}} \\ C_{0_{21}} & C_{0_{22}} \end{vmatrix} \geq 0; \quad \begin{vmatrix} C_{1_{11}} & C_{1_{21}} \\ C_{1_{21}} & C_{1_{22}} \end{vmatrix} \geq 0; \quad \begin{vmatrix} C_{2_{11}} & C_{2_{12}} \\ C_{2_{21}} & C_{2_{22}} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (32)$$

Terceira condição:

Os coeficientes de correlação regionalizados,  $r_{ij}^k$ , devem estar incluídos no intervalo [-1 e +1], equação 33:

$$r_{ij}^k = \frac{b_{ij}^k}{\sqrt{b_{ii}^k \cdot b_{jj}^k}} \in [-1,1] \quad (33)$$

Onde  $b_{ii}^k$  e  $b_{ij}^k$  é a matriz de coeficientes de contribuição direta e cruzada para a variância global de cada estrutura k.

Logo temos,

$$\frac{C_{0_{12}}}{\sqrt{C_{0_{11}} \cdot C_{0_{22}}}} \in [-1,1] ; \frac{C_{1_{12}}}{\sqrt{C_{1_{11}} \cdot C_{1_{22}}}} \in [-1,1] ; \frac{C_{2_{12}}}{\sqrt{C_{2_{11}} \cdot C_{2_{22}}}} \in [-1,1]$$

O efeito pepita define uma correlação em micro-escala e estruturas de alcances maiores definem correlações nas escalas correspondentes. Como visto o MLC só é satisfeito quando as três condições forem satisfeitas simultaneamente. Por isso, o MLC não é simples e a sua complexidade aumenta com o número de variáveis.

## 2.5. VALIDAÇÕES

### 2.5.1. Análise de deriva

Uma das validações das estimativas consiste na análise de deriva (*drift analysis ou swath plots*). Este processo nada mais é que a construção de gráficos de médias de teores em faixas de blocos do depósito ao longo de diversas direções. Assim, nesses gráficos, são realizadas as comparações entre os teores médios nas faixas obtidos pelo método de estimativa e os teores médios locais calculados a partir das amostras nessa faixa. Com essa informação, somos capazes de avaliar o viés local do método de estimativa, verificando se os valores estimados, em média, seguem a tendência dos dados.

Para obter-se os teores médios locais calculados a partir das amostras sem viés, uma prática comum consiste em estimar um modelo de blocos utilizando a técnica conhecida como vizinho mais próximo (*Nearest Neighbour -NN*). Isso evita, no cálculo de médias locais, a influência do agrupamento preferencial dos dados.

Por ser um método determinístico, o NN não fornece medida de incerteza relacionada à estimativa. Porém, globalmente representa uma estimativa não enviesada da distribuição dos teores, podendo ser uma referência para a comparação realizada na análise de deriva.

### 2.5.2. Coeficiente de correlação

A presença de viés condicional é um problema em qualquer modelo estimado. O coeficiente angular da reta é muitas vezes utilizado como diagnóstico para verificar o viés condicional, Rossi & Deustch (2014). Consideremos duas variáveis, uma primária  $Z_1(u)$  e a outra secundária  $Z_2(u)$ . Inicialmente, consideremos somente os locais nos quais estão amostradas as duas variáveis, ou seja, o vetor de separação  $h$  entre elas é zero. Assim, é possível construir um gráfico de dispersão como representado na Figura 4:

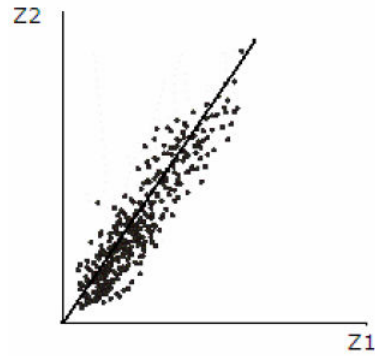


Figura 4 Gráfico de dispersão entre duas variáveis  $Z_1$  e  $Z_2$

Para cada variável, a variância é definida de acordo à equação 34 e analogamente, é possível definir a covariância cruzada entre elas como a variação conjunta de  $Z_1(u)$  e  $Z_2(u)$  em torno a suas médias.

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= E[(Z_1 - m_1)^2] = \frac{1}{n_1} \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} (Z_1(U_{\alpha_1}) - m_1)^2 \\ \sigma_2^2 &= E[(Z_2 - m_2)^2] = \frac{1}{n_2} \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} (Z_2(U_{\alpha_2}) - m_2)^2\end{aligned}\quad (34)$$

Onde,

$\sigma_1^2$  é a variância da variável  $Z_1(u)$ ,

$\sigma_2^2$  é a variância da variável  $Z_2(u)$

$n_1$  é o total de locais  $u_{\alpha_1}$  onde se dispõe da informação  $Z_1(u_{\alpha_1})$ ,

$n_2$  é o total de locais  $u_{\alpha_2}$  onde se dispõe da informação  $Z_2(u_{\alpha_2})$ ,

$m_1$  é a média da variável  $Z_1(u)$

$m_2$  é a média da variável  $Z_2(u)$ .

$$\sigma_{12} = C_{12}(0) = E[(Z_1 - m_1) \cdot (Z_2 - m_2)] = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n (z_1(u_\alpha) - m_1) \cdot (z_2(u_\alpha) - m_2) \quad (35)$$

Onde,

$\sigma_{12}$  é a covariância cruzada,  $C_{12}(0)$  entre as variáveis  $Z_1(u)$  e  $Z_2(u)$  para um vetor de separação  $h$  nulo,

$n$  é o total de locais  $u_\alpha$  nos quais se dispõe conjuntamente das informações das variáveis  $Z_1(u)$  e  $Z_2(u)$ .

O coeficiente de correlação  $\rho_{12}(0)$  é a medida da relação linear entre  $Z_1(u)$  e  $Z_2(0)$ , e está definido similarmente a equação 35, descrita novamente na equação 36:



$$\sigma_{12}(0) = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \in [-1,1] \quad (36)$$

O coeficiente de correlação é calculado utilizando dados das duas variáveis provenientes dos mesmos locais  $u_\alpha$ , ou seja, do subconjunto isotópico. Dessa forma, ele representa somente a correlação para um vetor de separação  $h$  nulo, e, portanto, o seu significado é limitado ao não levar em consideração a variação conjunta para  $|h| > 0$ .

### 2.5.3. Erro relativo

Uma prática comum de avaliação da qualidade da estimativa é a realização da reconciliação entre o valor de referência e o valor estimado. Uma ferramenta é a avaliação do erro relativo percentual. Para a análise, é realizada a diferença entre o valor de referência menos o valor estimado, dividido pelo valor de referência, multiplicado por 100, equação 37:

$$ER(\%) = \frac{(VR - VE)}{VR} \times 100; \quad (37)$$

Onde,

$ER$  = Erro relativo

$VR$  = Valor de referência

$VE$  = Valor estimado

Neste capítulo, foi apresentado o referencial bibliográfico dos temas que fundamentaram o estudo. Descritos temas a respeito de amostragem de dados multivariados, apresentada a fundamentação teórica dos métodos de estimativa de krigagem ordinária e cokrigagem ordinária estandardizada, assim como o modelo de continuidade espacial com dados que possuem heterotopia total. Também, foram apresentados sucintamente os temas de regressão linear e ferramentas de avaliação da coerência dos modelos estimados em relação aos dados originais.

No próximo capítulo, será desenvolvido o estudo com o banco de dados real de uma mina a céu aberto de fosfato. Serão modeladas as continuidades espaciais considerando dados primários (i), dados primários e secundários originais (ii), dados primários e secundários estandardizados (iii).

## Capítulo 3 IMPLEMENTAÇÃO DA METODOLOGIA

### 3.1. ESTUDO DE CASO

O estudo de caso descrito refere-se à aplicação das metodologias, apresentadas no capítulo 2, em uma mina a céu aberto de fosfato do interior de Minas Gerais. Os dados são de diferentes atributos em um mesmo domínio geológico, com malha irregular e heterotopia total.

Os chamados dados primários são compostos por furos de sondagem rotativa diamantada e os dados ditos secundários são originados de amostragem por recuperação em pó de perfuratriz. Serão modeladas as continuidades espaciais considerando dados primários (i), dados primários e secundários originais (ii) e dados primários e secundários estandardizados (iii). A partir da definição dos três bancos de dados, serão estimados modelos realizando a combinação de metodologias de estimativa e banco de dados. Serão construídos modelos por: krigagem ordinária com (i), krigagem ordinária com (ii), krigagem ordinária com (iii) e cokrigagem ordinária com (iii).

Utilizando os modelos criados, foram planejadas e executadas 26 pilhas que foram alimentadas em uma usina de beneficiamento. Cada pilha possui quatro teores da variável  $P_2O_5\%$  planejados em função dos valores dos blocos estimados nos quatro modelos estimados. Os resultados previstos das 26 pilhas foram reconciliados com os valores amostrados na usina.

#### 3.1.1. Distribuição espacial dos dados

A respeito da configuração espacial dos dados, os dados possuem malhas amostrais diferentes. As amostras primárias possuem espaçamento amostral médio de 50x50x3 m, enquanto as amostras secundárias possuem uma malha 10x10x3 m. A figura 5 mostra o mapa de localização das amostras primárias e na figura 6 temos a distribuição dos dados secundários. Nota-se a diferença entre as malhas amostrais e a heterotopia total dos dados conforme figura 7.

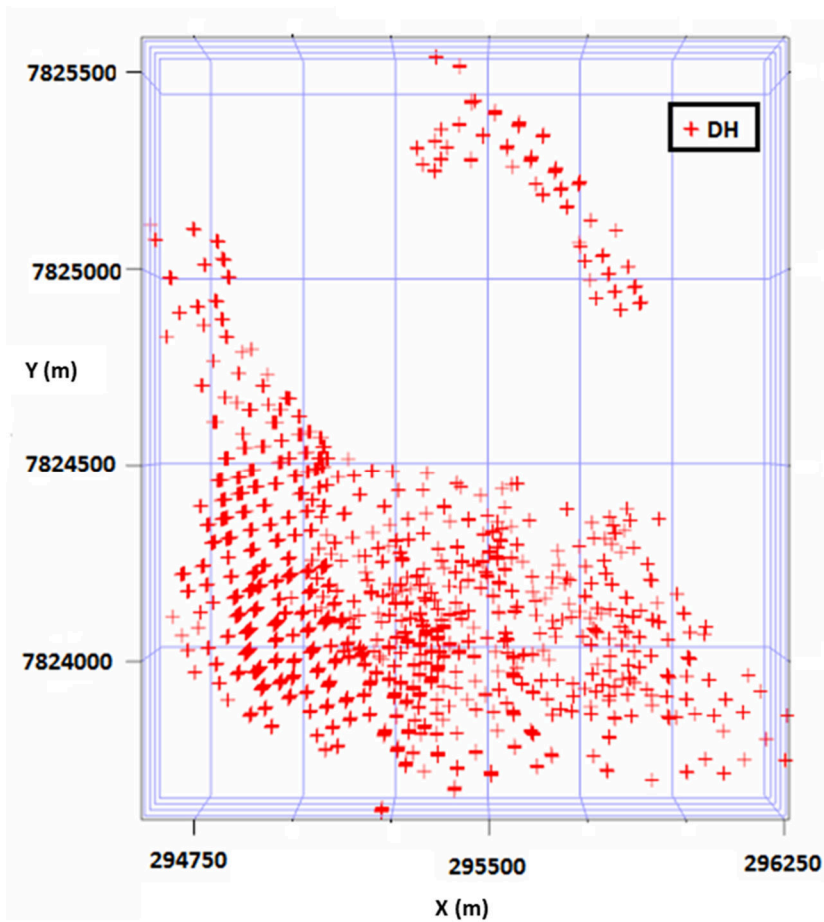


Figura 5 Distribuição dos dados primários

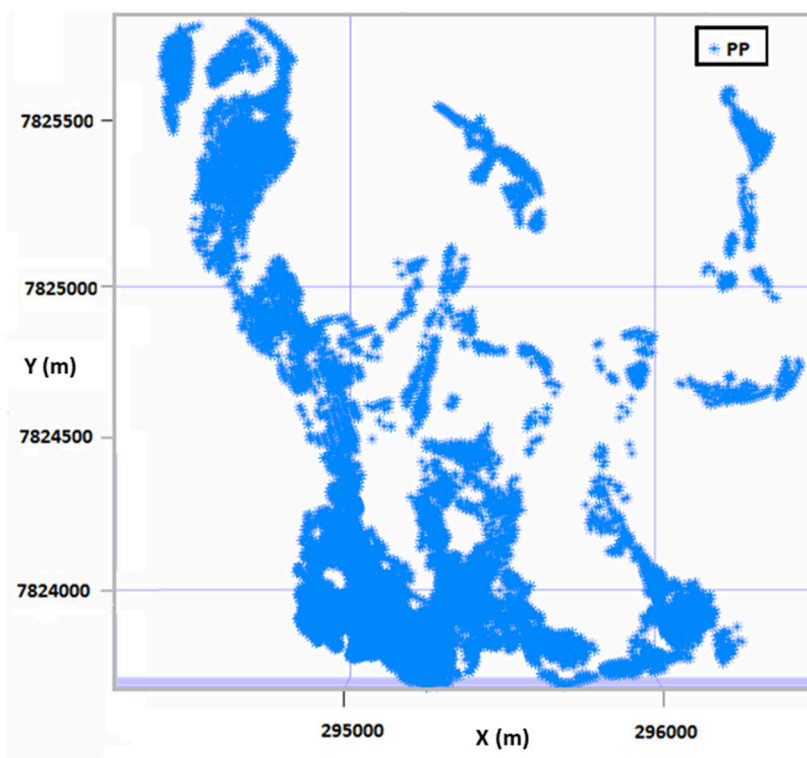


Figura 6 Distribuição dos dados secundários

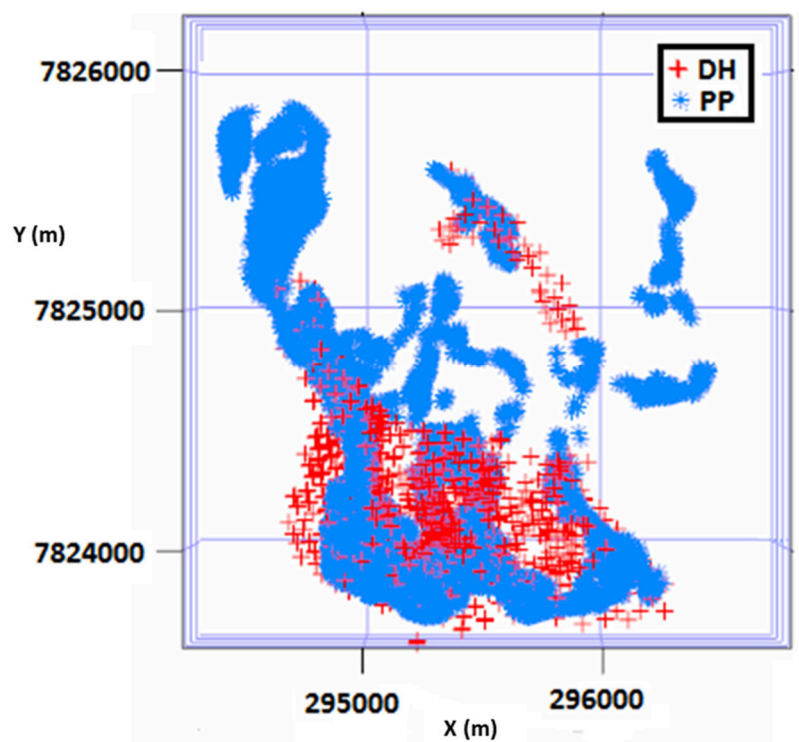


Figura 7 Distribuição dos dados primários e secundários. Dados em vermelho representam os dados primários em azul os dados secundários.

### 3.1.2. Estatística descritiva dos dados

A tabela 1 mostra os parâmetros estatísticos para os teores de  $P_2O_5\%$  nos dois tipos de amostragens. Nota-se a diferença do número de amostras secundárias (pó de perfuratriz=27482) em relação às amostras primárias (furo de sondagem=5558). Outro destaque faz referência ao viés positivo no teor de  $P_2O_5\%$  nas amostras secundárias, cerca de 0,5% acima dos teores encontrados nas amostras primárias.

Tabela 1 Estatística descritiva dos dados da variável  $P_2O_5\%$  amostradas por diferentes técnicas.

| Variável                 | $P_2O_5$ _Pó de perfuratriz | $P_2O_5$ Furo de sondagem |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| NºAmostras               | 27482                       | 5558                      |
| Média                    | 14.46                       | 13.81                     |
| Desvio Padrão            | 5.47                        | 5.77                      |
| Variância                | 29.95                       | 33.28                     |
| Coefficiente de Variação | 37.85                       | 41.77                     |
| Mínimo                   | 1.36                        | 0.64                      |
| Q1                       | 10.83                       | 9.72                      |
| Mediana                  | 13.72                       | 13.11                     |
| Q3                       | 17.43                       | 17.04                     |
| Máximo                   | 38.53                       | 35.61                     |
| Moda                     | 16.21                       | 11.50                     |
| Nº da moda               | 5                           | 11                        |

As amostras coletadas em pó de perfuratriz, dados secundários, apresentam um mínimo de teor mais alto (1.36%) quando comparado com as amostras de furos de sondagem (0,64), dados primários. No que diz respeito à assimetria, nota-se uma ligeira assimetria positiva nos dois casos. Temos as médias com valores um pouco maiores que as medianas (0,7%). Isso é evidenciado nos histogramas da figura 8.

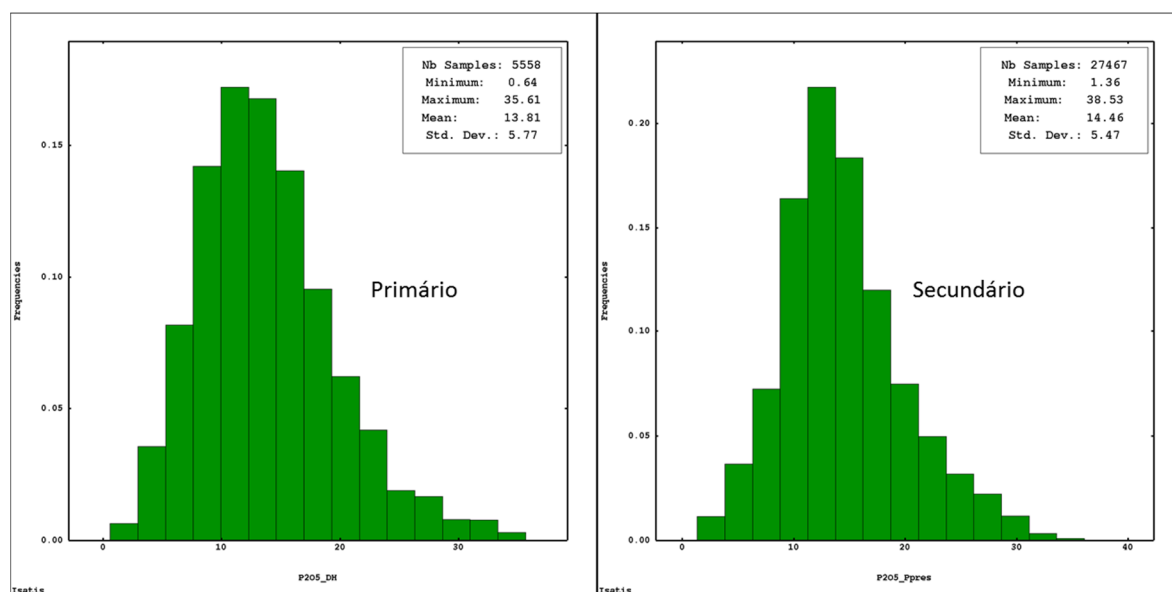


Figura 8 Histogramas dos dados primários e secundários. Ligeira assimetria positiva na distribuição dos teores.

Outra característica identificada diz respeito ao intervalo menor entre os quartis das amostras secundárias. A diferença entre o quartil inferior e superior é de 6.6% de  $P_2O_5$ , já na amostra primária temos 7.32% entre os quartis. Isso demonstra uma variância menor dos dados secundários, como comprovado nos números, onde a variância dos dados secundários (29.95%) é menor que os dados primários (33.28%).

A diferença entre as médias da variável primária (13.81%) e secundária (14.46%) indica que as amostras de pó de perfuratriz possuem problemas na acuracidade, o que implica o enviesamento dos resultados. Este fato pode estar relacionado às características da mineralização, qualidade da amostragem (relação volume x variância entre as técnicas utilizadas), preparação e análises químicas das amostras diferentes empregadas nos dois tipos de amostras. Para o caso da amostragem primária, a amostra é retirada diretamente do testemunho de sondagem, quarteada em laboratório interno e enviada uma alíquota para laboratório externo com certificação de qualidade internacional. No caso das amostras

secundárias, é aproveitado todo o material que retorna do furo em forma de pó. O material é quarteado em campo e levado para a preparação e análise química em laboratório próprio.

Também vale ressaltar que a média e desvio padrão usados na transformação da variável secundária tem que representar a mesma região da variável primária. Neste trabalho, as regiões são pouco diferentes, o que não foi considerado problema.

### 3.1.3. Estatística bivariada

Conforme já mencionado, as amostras possuem heterotopia total, ou seja, quando as variáveis são medidas em locais diferentes não tendo nenhum ponto em comum. Assim, foi calculada a correlação entre elas a partir do *cross* correlograma omnidirecional extrapolado para o ponto  $h = 0$ . A figura 9 demonstra a correlação entre as amostras de aproximadamente 0,75.

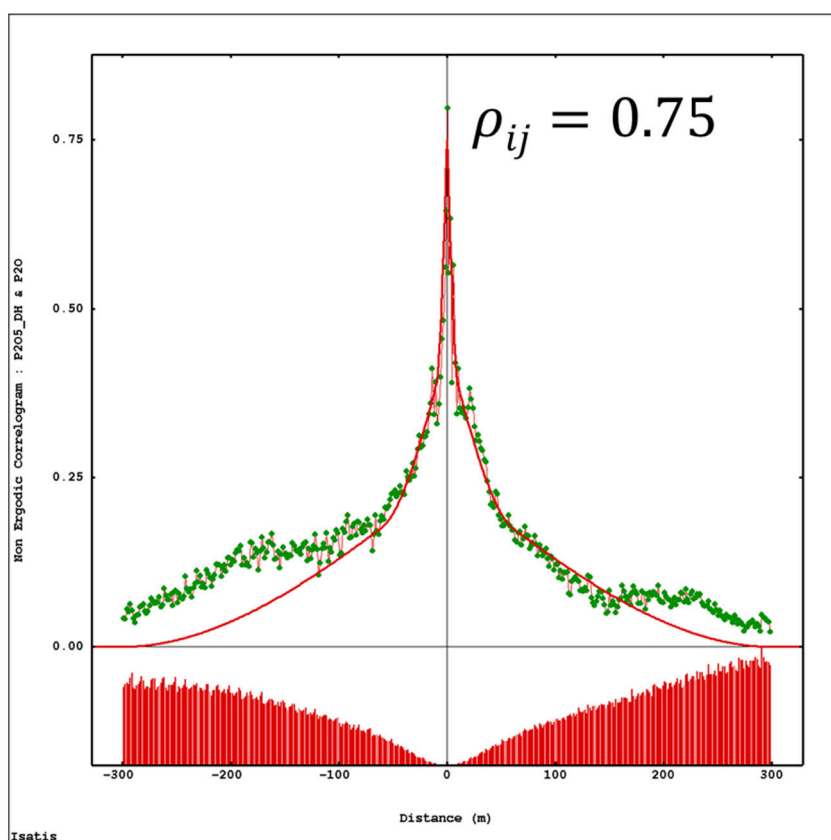


Figura 9 Cross correlograma das amostras primárias e secundária. Correlação de 0,75.

### 3.1.4. Transformação da variável secundária

Para que os dados secundários sejam utilizados conjuntamente com os dados primários, os erros de viés e precisão foram corrigidos. Para isto, as amostras secundárias foram

estandardizadas e reescaladas (equação 29), utilizando os valores de média e desvio padrão da variável primária.

De forma mais simplificada, a equação 29 pode ser quebrada e representada nas etapas de estandardização (equação 38) e reescalamento (equação 39).

$$Z_j(u_{cj})^{STD} = \frac{[z_j(u_{cj}) - m_j]}{\sigma_j} \quad (38)$$

onde,  $Z_j(u_{cj})^{STD}$  é a variável secundária estandardizada,  $Z_j(u_{cj})$  são os dados da variável secundária,  $m_j$  é a média da variável secundária  $Z_j(u_{cj})$  e  $\sigma_j$  é o desvio padrão da variável secundária.

$$Z_j(u_{cj})_{BACK}^{STD} = Z_j(u_{cj})^{STD} * \sigma_i + m_i \quad (39)$$

onde,  $Z_j(u_{cj})_{BACK}^{STD}$  é a variável secundária reescalada,  $Z_j(u_{cj})^{STD}$  é a variável secundária estandardizada,  $\sigma_i$  é o desvio padrão da variável primária e  $m_i$  é a média da variável primária.

Após a transformação da variável secundária, os dados primários e secundários passam a ter a mesma ordem e magnitude, ou seja, passam a ter médias e desvio padrão muito próximos. Assim, as duas variáveis podem ser utilizadas combinadas em uma mesma estimativa.

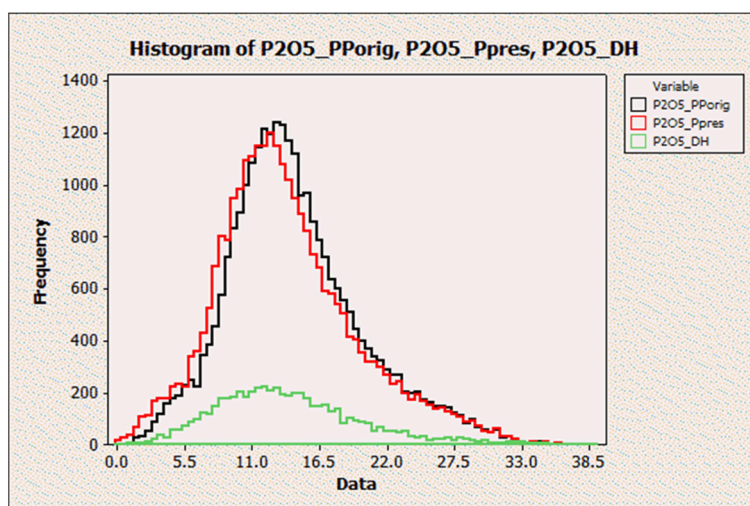


Figura 10 Histograma comparativo entre as amostras primárias (verde), dados secundários originais (preto) e dados secundários transformados (vermelho).

Podemos observar, no histograma da figura 10, o deslocamento da curva dos dados secundários (linha preta) em direção aos dados primários (linha verde). Os dados transformados

(linha vermelha) possuem média e desvio padrão iguais aos dados primários, conforme tabela 2.

Tabela 2 Comparativo estatístico entre dados primários (sondagem), dados secundários originais (pó de perfuratriz) e dados secundários transformados (pó de perfuratriz transformado)

| Variável      | P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> Furo de sondagem | P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _Pó de perfuratriz | P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> _PP_ Transformados |
|---------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Nº Amostras   | 5558                                           | 27482                                            | 27467                                            |
| Média         | 13.81                                          | 14.46                                            | 13.81                                            |
| Desvio Padrão | 5.77                                           | 5.47                                             | 5.77                                             |
| Variância     | 33.28                                          | 29.95                                            | 33.28                                            |

Com o reescalonamento, algumas amostras ficaram com teores negativos, devido a média da variável secundária (14.46 %) ser maior que a média da variável primária (13.82%). Tivemos um total de 15 amostras com teores negativos, estas amostras foram desconsideradas do banco de dados para as análises subsequentes assim como desconsideradas para as estimativas.

Após a transformação da variável secundária (standardização e reescalonamento), foi refeita a correlação entre as variáveis. Assim, a variância cruzada para  $h=0$  entre as variáveis primária e secundária ficou bem próxima de 1.

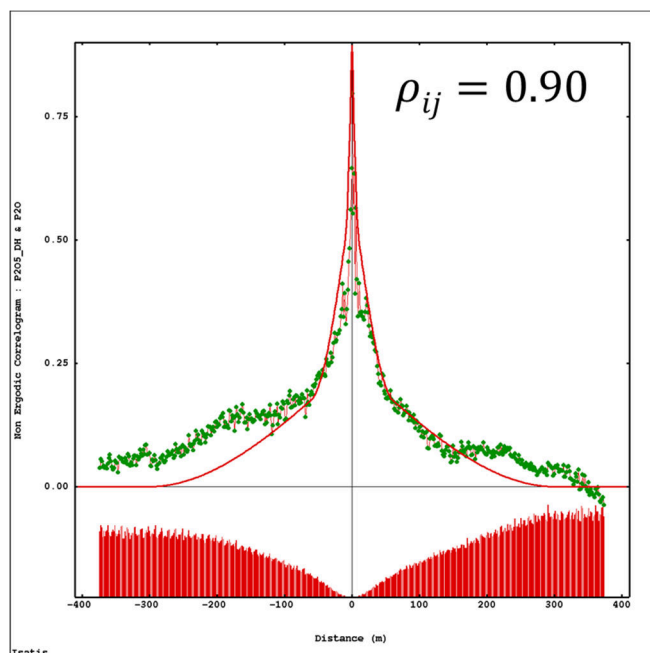


Figura 11 Cross-correlograma das amostras primárias e secundária estandardizada e reescalonada. Correlação de 0.90.



### 3.1.5. Continuidade espacial

Na avaliação da continuidade espacial da distribuição dos teores para a variável  $P_2O_5\%$ , foram utilizados os semivariogramas para cada método de estimativa. As direções de maior, intermediária e menor continuidade espacial foram definidas para os domínios geológicos conforme tabela 3.

Tabela 3 Continuidade espacial do domínio geológico estudado.

| Direções                             | Direção de mergulho/mergulho |
|--------------------------------------|------------------------------|
| Maior continuidade ( $h_3$ )         | N157°d0°                     |
| Continuidade intermediária ( $h_2$ ) | N67°d0°                      |
| Perpendicular ( $h_1$ )              | N0°d90°                      |

As estimativas em blocos possuíam tamanho de 10x10x5 m e a discretização de blocos, 5x5x2 m nas direções norte (x), leste (y) e vertical (z).

Na estratégia de busca, utilizou-se no mínimo 3 amostras e no máximo 12 para estimativa. Usou-se o mesmo alcance encontrado no semivariograma da variável primária. Sendo, 450 metros na direção de maior continuidade, 180 metros na direção intermediária e 55 metros na direção perpendicular ao plano contendo os eixos maior e intermediário. Com exceção da estimativa por krigagem ordinária com os dados primários e secundários transformados, onde neste, foi definido um semivariograma com 450 metros na direção de maior continuidade, 300 metros na direção intermediária e 38 metros na direção perpendicular ao plano.

Na primeira estimativa, foi realizada a krigagem ordinária com os dados primários, utilizados o semivariograma conforme equação 40.

$$\gamma_1(h) = 8,16 + 14,13Sph_1\left(\frac{h_1}{15}, \frac{h_2}{30}, \frac{h_3}{40}\right) + 10,97Sph_2\left(\frac{h_1}{55}, \frac{h_2}{180}, \frac{h_3}{450}\right) \quad (40)$$

onde,  $\gamma_1(h)$  corresponde ao semivariograma direto da variável primária  $P_2O_5\%$  sondagem. Já  $Sph_1$  corresponde ao modelo esférico da primeira estrutura e  $Sph_2$  corresponde ao modelo esférico da segunda estrutura.

O segundo modelo estimado utilizando krigagem ordinária considerando os dados primários mais secundários originais. Neste caso, foi considerado o mesmo semivariograma

descrito na equação 40. Optou-se por manter este semivariograma, pois, a mina em estudo utiliza desde mesmo racional para o desenvolvimento dos seus modelos.

Para o terceiro modelo estimado, foi realizada krigagem ordinária considerando os dados primários mais secundários transformados (standardizados e reescalados). Foi modelado o semivariograma conforme equação 41.

$$\gamma(h) = 3,21 + 12,00Sp_{h_1}\left(\frac{h_1}{16}, \frac{h_2}{25}, \frac{h_3}{50}\right) + 18,00Sp_{h_2}\left(\frac{h_1}{38}, \frac{h_2}{300}, \frac{h_3}{450}\right) \quad (41)$$

onde,  $\gamma(h)$  corresponde ao semivariograma direto da variável primária P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>% sondagem, mais a variável secundária P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>% de pó de perfuratriz estandardizada e reescalada.

A última estimativa foi realizada por cokrigagem ordinária. Para definir o modelo de continuidade espacial, devido aos dados serem heterotópicos, foi usada a covariância cruzada entre as variáveis e em seguida transformada para semivariogramas. Como definido no capítulo 2, item 2.4.7, precisamos definir os semivariogramas da variável primária, equação 40, variável secundária, equação 42, e semivariograma cruzado, equação 43. O modelo linear de correionalização (MLC) foi obedecido para modelar a continuidade espacial das variáveis diretas e cruzadas.

$$\gamma_2(h) = 8,46 + 13,78Sp_{h_1}\left(\frac{h_1}{15}, \frac{h_2}{30}, \frac{h_3}{40}\right) + 10,95Sp_{h_2}\left(\frac{h_1}{55}, \frac{h_2}{180}, \frac{h_3}{450}\right) \quad (42)$$

$$\gamma_{12}(h) = 8,30 + 13,94Sp_{h_1}\left(\frac{h_1}{15}, \frac{h_2}{30}, \frac{h_3}{40}\right) + 10,96Sp_{h_2}\left(\frac{h_1}{55}, \frac{h_2}{180}, \frac{h_3}{450}\right) \quad (43)$$

onde,  $\gamma_2(h)$  corresponde ao semivariograma direto da variável secundária P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>% pó de perfuratriz original transformada e  $\gamma_{12}(h)$  corresponde ao semivariograma cruzado da variável primária P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>% sondagem com a variável secundária P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>% de pó de perfuratriz estandardizada e reescalada.

### 3.1.6. Validação das estimativas

Após a criação dos modelos pelas diferentes metodologias e banco de dados, foi realizada uma validação do modelo através da análise de deriva. Como referência para a análise, foi criado um modelo por vizinho mais próximo, conforme descrito no item 2.5.1. Para cada avaliação, o modelo estimado por vizinho mais próximo respeitou o banco de dados da análise. Por exemplo, a deriva do modelo estimado por krigagem ordinária e banco de dados composto

pelas amostras primárias e amostras secundárias originais é comparado na deriva por um modelo de vizinho mais próximo estimado com o banco de dados composto por amostras primárias e amostras secundárias originais.

Na figura 12, temos os gráficos construídos para a avaliação do modelo estimado por krigagem ordinária utilizando apenas furos de sondagem rotativa. Nas três direções, tivemos uma boa aderência entre o modelo estimado pela krigagem e o modelo de referência. Ocorreu um pequeno descolamento no eixo Z, em profundidade.

Na figura 13, são apresentados os gráficos referentes ao modelo estimado por krigagem ordinária e banco de dados composto pelas amostras primárias e amostras secundárias originais.

Na figura 14, são apresentados os gráficos referentes ao modelo estimado por krigagem ordinária e banco de dados composto pelas amostras primárias e amostras secundárias transformadas (standardizadas e reescaloadas).

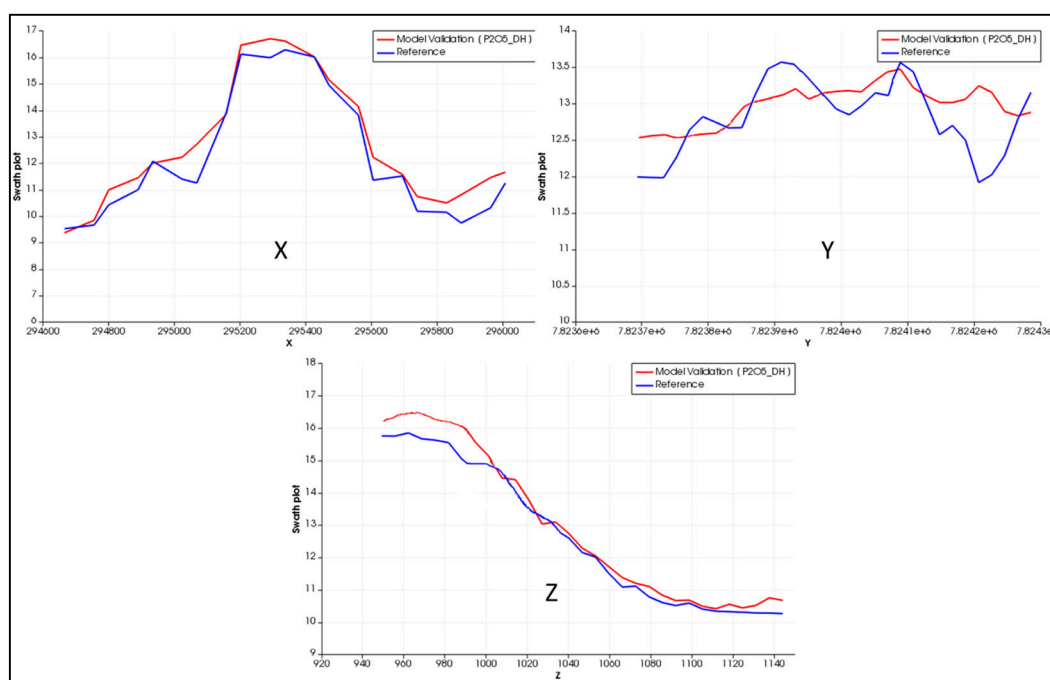


Figura 12 Gráficos de deriva entre modelo krigado com furos de sondagem e modelo de referência (NN) nas direções X,Y e Z. Unidades em metros.

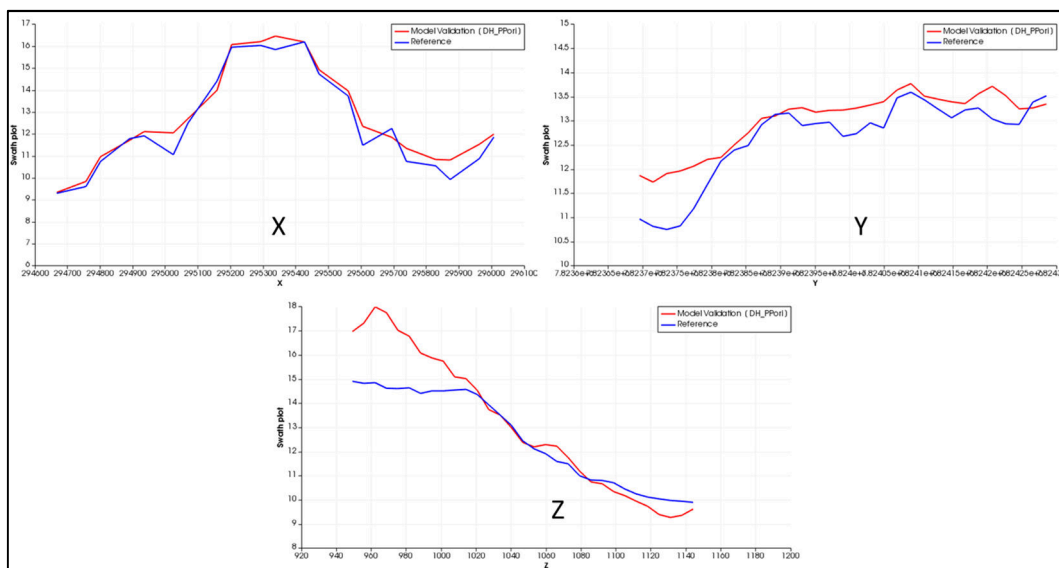


Figura 13 Gráficos de deriva entre modelo krigado com amostras primárias e amostras secundárias originais e modelo de referência (NN) nas direções X,Y e Z. Unidades em metros.

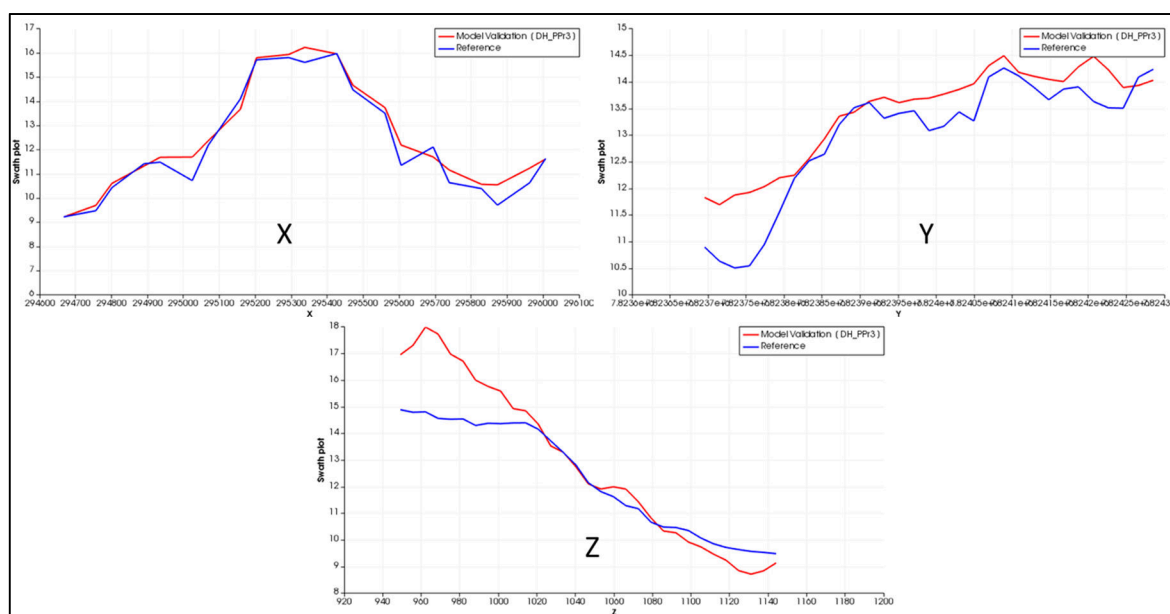


Figura 14 Gráficos de deriva entre o modelo krigado com amostras primárias e amostras secundárias transformadas e modelo de referência (NN) nas direções X,Y e Z. Unidades em metros.

De forma geral, conforme figuras 12, 13 e 14, o principal descolamento se deu em profundidade no eixo Z. Pode ser observado que não ocorreram significativas superestimativas nem subestimativas nas três análises e nos três eixos.

Por outro lado, conforme visualizado na figura 15, a estimativa por cokrigagem com o banco de dados composto por amostras primárias e secundárias transformadas, obtivemos os melhores resultados na deriva.

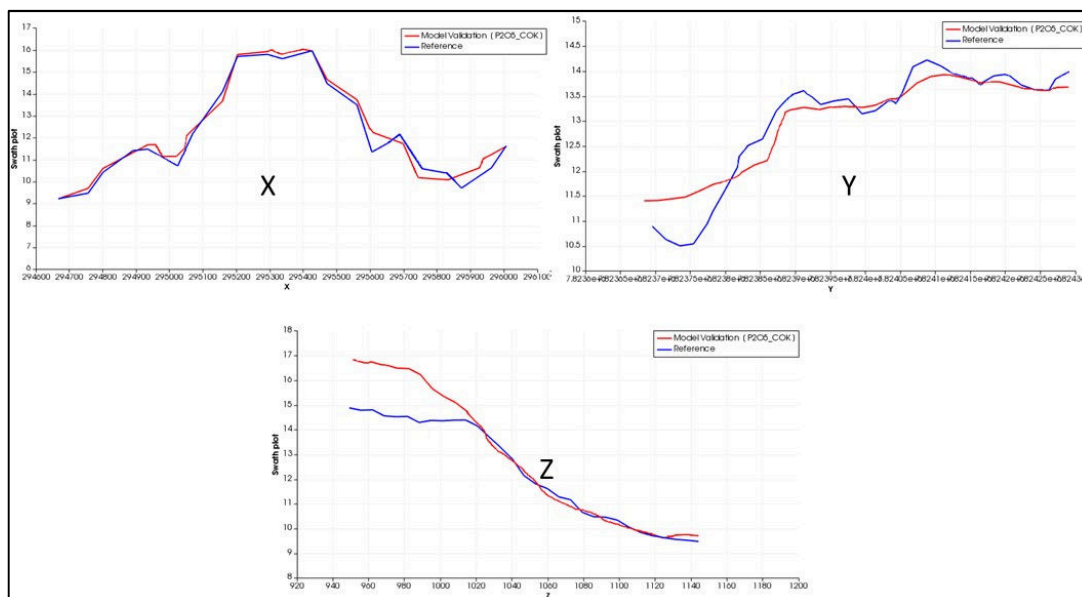


Figura 15 Deriva entre modelo cokrigado com amostras primárias e amostras secundárias transformadas e modelo de referência (NN) nas direções X, Y e Z. Unidades em metros.

### 3.1.7. Seleção das pilhas de homogeneização e reconciliação de teores.

Como meio de reconciliação dos diferentes métodos de estimativa, foram construídas pilhas de homogeneização a partir dos blocos lavrados. Os teores resultantes dos blocos utilizados foram comparados aos resultados informados pela amostragem da usina (ditos teores reais para reconciliação). Essa reconciliação foi o suporte de análise dos resultados gerados nesse trabalho.

Foram planejadas e executadas 26 pilhas que foram alimentadas em uma usina de beneficiamento. Como parâmetro das pilhas, todas deveriam contar com mais de 90% de massa proveniente de frentes de lavra diretamente da mina (*in situ*), e com avanços com mais de 95% de aderência de lavra. Além disso, todas as pilhas tiveram amostragens constantes na saída do moinho, ou seja, primeira etapa na entrada da usina, o que garantiu a confiabilidade dos resultados informados pela usina.

Cada pilha possui quatro teores da variável  $P_2O_5\%$  planejados a partir de cada modelo estimado. Os resultados das 26 pilhas foram reconciliados com os teores planejados derivados de cada modelo estimado (tabela 4).

Tabela 4 Reconciliação entre resultados de usina e os teores planejados derivados de cada modelo estimado.

| Usina | N° Pilha | P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> % |       |              |               |                 |
|-------|----------|---------------------------------|-------|--------------|---------------|-----------------|
|       |          | Usina                           | OK_DH | OK_DH_PPorig | OK_DH_PPTrans | SCOK_DH_PPTrans |
| 311   | 6723     | 15.17                           | 13.95 | 14.37        | 13.73         | 14.58           |
|       | 6724     | 14.87                           | 14.49 | 13.89        | 13.26         | 13.83           |
|       | 6725     | 15.00                           | 12.13 | 14.17        | 13.55         | 13.89           |
|       | 6726     | 13.80                           | 13.28 | 14.20        | 13.57         | 13.45           |
|       | 6727     | 16.77                           | 14.65 | 15.87        | 15.39         | 16.09           |
|       | 6740     | 14.66                           | 12.81 | 16.24        | 15.75         | 15.48           |
|       | 6747     | 14.37                           | 14.42 | 14.20        | 13.64         | 13.62           |
|       | 6748     | 13.70                           | 14.10 | 14.20        | 13.64         | 13.55           |
|       | 6750     | 18.92                           | 16.24 | 17.53        | 17.20         | 17.93           |
|       | 6752     | 17.58                           | 15.92 | 17.50        | 17.08         | 17.30           |
|       | 6753     | 15.98                           | 14.82 | 17.73        | 17.27         | 16.44           |
|       | 6757     | 14.94                           | 13.11 | 17.32        | 16.86         | 16.71           |
|       | 6758     | 19.02                           | 16.97 | 19.86        | 19.53         | 19.21           |
|       | 6759     | 18.20                           | 15.60 | 17.88        | 17.46         | 17.51           |
|       | 6760     | 16.96                           | 16.03 | 16.72        | 16.26         | 16.36           |
|       | 6762     | 17.63                           | 14.03 | 17.39        | 16.94         | 16.91           |
|       | 6809     | 15.20                           | 14.05 | 16.08        | 15.58         | 15.32           |
|       | 6811     | 13.34                           | 16.28 | 15.95        | 15.51         | 15.09           |
| 312   | 1001     | 16.03                           | 14.09 | 14.65        | 14.24         | 14.24           |
|       | 1002     | 14.97                           | 14.01 | 15.98        | 15.57         | 15.67           |
|       | 1010     | 13.58                           | 14.48 | 14.98        | 14.42         | 14.39           |
|       | 1011     | 13.20                           | 13.94 | 13.63        | 12.91         | 13.12           |
|       | 1012     | 15.20                           | 12.57 | 13.40        | 12.76         | 13.52           |
|       | 1014     | 15.08                           | 15.67 | 15.67        | 15.14         | 15.13           |
|       | 1018     | 13.42                           | 14.44 | 14.33        | 13.80         | 13.60           |
|       | 1036     | 17.93                           | 17.20 | 19.27        | 18.98         | 17.73           |

Usina Resultados da usina  
OK\_DH Krigagem ordinária com dados primários  
OK\_DH\_PPorig Krigagem ordinária com dados primários e secundários originais  
OK\_DH\_PPTrans Krigagem ordinária com dados primários e secundários transformados  
SCOK\_DH\_PPTrans cokrigagem ordinária com dados primários e secundários transformados

### 3.1.8. Reconciliação modelos estimados versus resultados da usina.

Para reconciliação, foi utilizada a correlação entre os resultados de usina e os modelos.

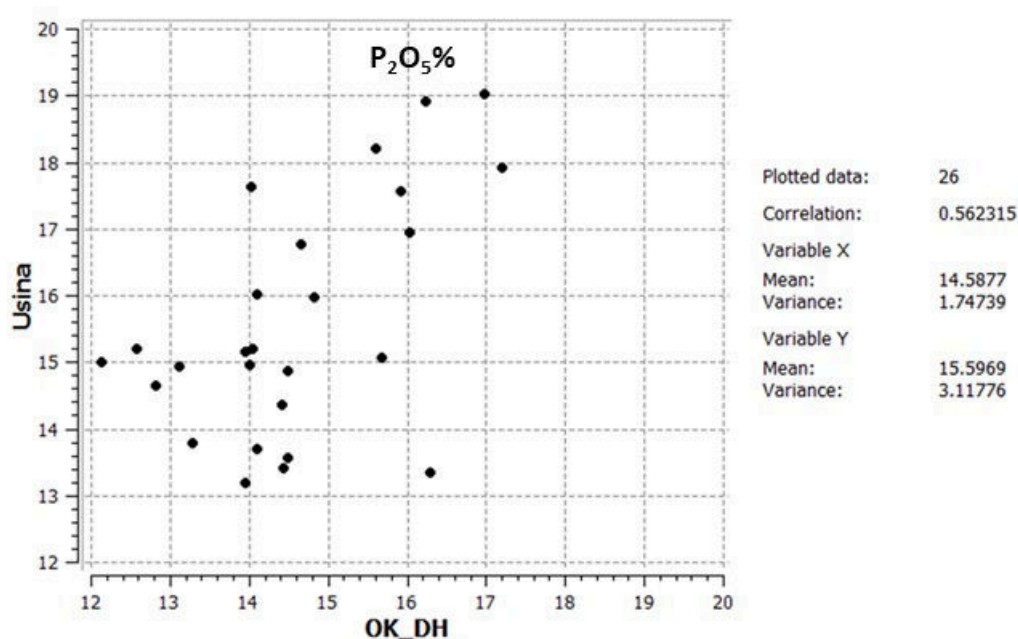


Figura 16 Gráfico de correlação entre o resultado da variável P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>% das pilhas de homogeneização alimentadas na usina de beneficiamento e da variável P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>% planejado derivado do modelo estimado por krigagem utilizando banco de dados com amostras primárias.

Na figura 16, é apresentada a correlação entre o resultado da variável  $P_2O_5\%$  das pilhas de homogeneização escolhidas alimentadas na usina de beneficiamento e da variável  $P_2O_5\%$  planejado, derivado do modelo estimado por krigagem ordinária utilizando somente dados primários, ou seja, furos de sondagem. Encontramos uma correlação de 56.23% entre o planejado e realizado na usina.

Quando calculamos a correlação entre o resultado da variável  $P_2O_5\%$  das pilhas e o modelo estimado utilizando todos os dados, sem tratamento algum, tivemos um ganho considerável entre a correlação do planejado e o executado, conforme figura 17. Tivemos um aumento de correlação de 21.88%, chegando a 78.11%. Ou seja, mesmo com viés e baixa precisão, quando comparados à amostragem por sondagem rotativa, as amostras de pó de perfuratriz melhoram os resultados previamente planejados.

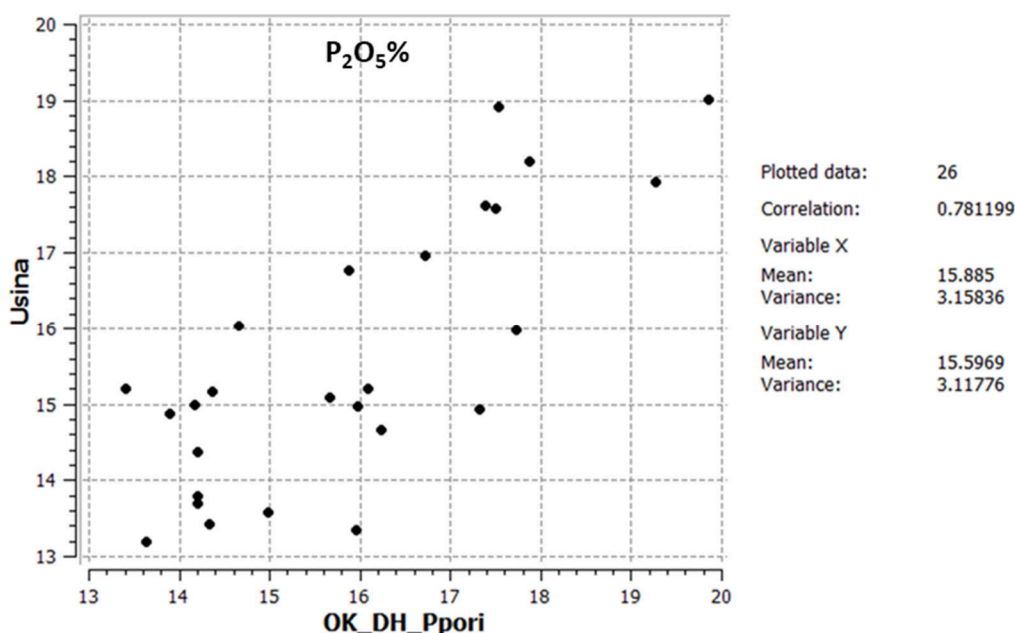


Figura 17 Gráfico de correlação entre o resultado da variável  $P_2O_5\%$  das pilhas alimentadas na usina e da variável  $P_2O_5\%$  planejado do modelo estimado por krigagem utilizando banco de dados com amostras primárias e amostras secundárias originais.

No caso a seguir, onde a correlação média é entre usina e modelo krigado com o banco de dados composto por amostras primárias e secundárias transformadas, ocorreu um pequeno aumento da correlação e uma redução na média dos resultados do modelo estimado em 0.5% do teor de  $P_2O_5\%$ . Saímos de uma média do teor planejado de 15.88% de  $P_2O_5\%$  (figura 17) para 15.38% de  $P_2O_5\%$  (figura 18). A princípio, considerando apenas a correlação, pode-se inferir que não há a necessidade de tratamento (standardização e reescalonamento). Porém, se considerarmos que 0.5% de  $P_2O_5\%$  em 15% de teor médio representa cerca de 3% de diferença.

Logo, pode-se sugerir que, realizando o tratamento dos dados, a estimativa desse modelo implica em uma redução do viés no teor planejado dessas 26 pilhas. Assim, tratando os dados com a transformada, reduzimos o viés que as amostras secundárias carregam.

Para a última comparação (figura 19), considerando o modelo estimado por cokrigagem ordinária com o banco de dados composto de amostras primárias e secundárias transformadas, tivemos um ganho de 23.53% de correlação quando comparadas a primeira estimativa por krigagem ordinária dos dados primários. Vale ressaltar, que a cokrigagem é a extensão natural da krigagem no caso de múltiplas variáveis, como descrito no item 2.4.7. Ou seja, no tratamento de dados multivariados, em teoria, a cokrigagem é a melhor metodologia para aplicação.

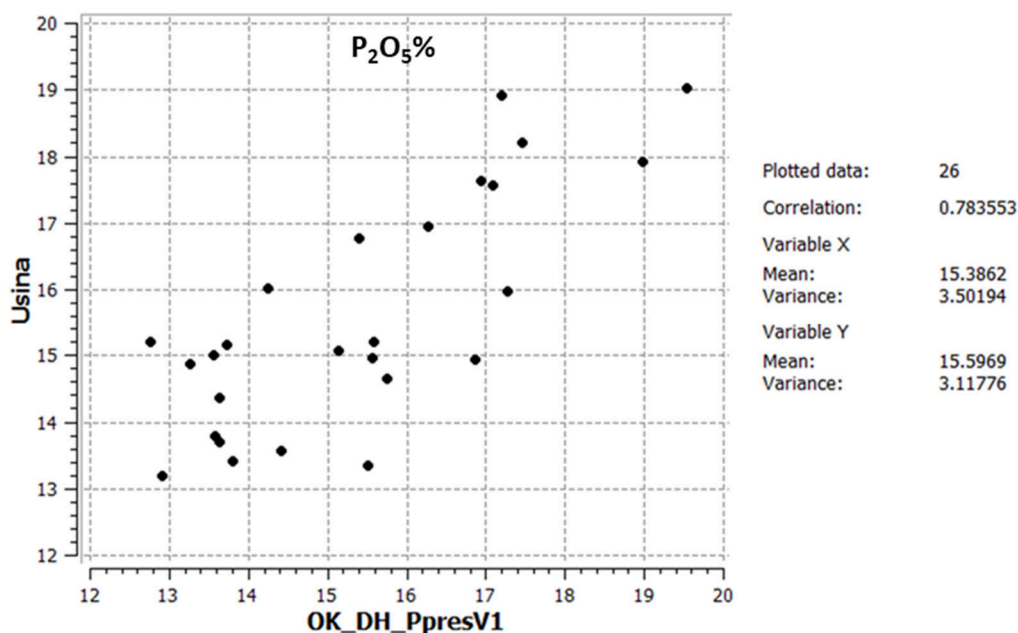


Figura 18 Gráfico de correlação entre o resultado da variável  $P_2O_5\%$  das pilhas alimentadas na usina e da variável  $P_2O_5\%$  planejado do modelo estimado por krigagem utilizando banco de dados com amostras primárias e amostras secundárias estandardizadas e reescaloadas.



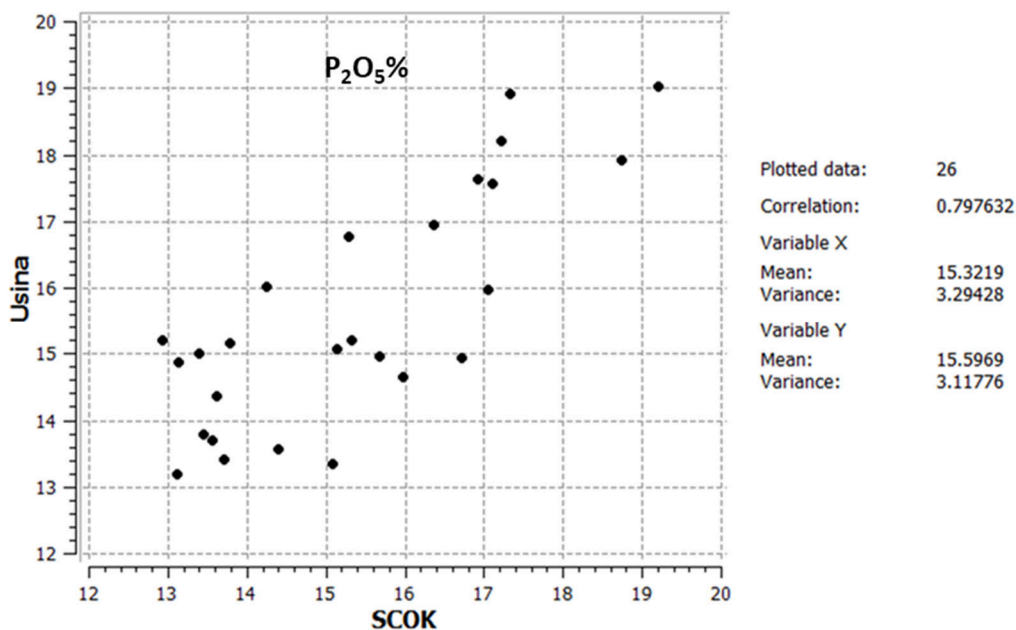


Figura 19 Gráfico de correlação entre o resultado da variável  $P_2O_5\%$  das pilhas alimentadas na usina e da variável  $P_2O_5\%$  planejado do modelo estimado por cokrigagem utilizando banco de dados com amostras primárias e amostras secundárias estandardizadas e reescaloadas.

### 3.1.9. Análise do erro relativo modelos estimados versus resultados da usina

Como comparativo adicional, foi realizada uma análise do erro relativo (tabela 5). Nota-se, que a média do erro relativo foi decrescente conforme a adição da informação e o tratamento dos dados. Fica demonstrado na tabela 5, que a opção onde a média do erro relativo é menor está situada nos teores planejados com o modelo estimado por cokrigagem com dados primários e secundários transformados. Entretanto, é importante ressaltar, que utilizando krigagem ordinária com dados transformados, para o caso estudado, não tivemos muita diferença.

Tabela 5 Erro relativo entre teores planejados derivados dos modelos testados e resultados da usina.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |          | Erro relativo % |              |               |                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------------|--------------|---------------|-----------------|
| Usina                                                                                                                                                                                                                                                                                             | N° Pilha | OK_DH           | OK_DH_PPorig | OK_DH_PPTrans | SCOK_DH_PPTrans |
| 311                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 6723     | -8.1%           | -5.3%        | -9.5%         | -3.9%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6724     | -2.6%           | -6.6%        | -10.9%        | -7.0%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6725     | -19.1%          | -5.6%        | -9.7%         | -7.4%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6726     | -3.7%           | 2.9%         | -1.6%         | -2.5%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6727     | -12.7%          | -5.4%        | -8.2%         | -4.0%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6740     | -12.6%          | 10.8%        | 7.4%          | 5.6%            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6747     | 0.4%            | -1.2%        | -5.1%         | -5.2%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6748     | 2.9%            | 3.7%         | -0.4%         | -1.1%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6750     | -14.2%          | -7.3%        | -9.1%         | -5.3%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6752     | -9.4%           | -0.4%        | -2.8%         | -1.6%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6753     | -7.2%           | 10.9%        | 8.1%          | 2.9%            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6757     | -12.2%          | 15.9%        | 12.8%         | 11.8%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6758     | -10.8%          | 4.4%         | 2.7%          | 1.0%            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6759     | -14.3%          | -1.8%        | -4.1%         | -3.8%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6760     | -5.5%           | -1.4%        | -4.1%         | -3.5%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6762     | -20.4%          | -1.4%        | -3.9%         | -4.1%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6809     | -7.6%           | 5.8%         | 2.5%          | 0.8%            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 6811     | 22.0%           | 19.6%        | 16.3%         | 13.1%           |
| 312                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1001     | -12.1%          | -8.6%        | -11.2%        | -11.2%          |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1002     | -6.4%           | 6.8%         | 4.0%          | 4.7%            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1010     | 6.7%            | 10.3%        | 6.2%          | 6.0%            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1011     | 5.6%            | 3.2%         | -2.2%         | -0.6%           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1012     | -17.3%          | -11.8%       | -16.1%        | -11.1%          |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1014     | 3.9%            | 3.9%         | 0.4%          | 0.3%            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1018     | 7.6%            | 6.8%         | 2.8%          | 1.4%            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1036     | -4.1%           | 7.5%         | 5.8%          | -1.1%           |
| <b>Média total</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                |          | <b>-5.8%</b>    | <b>2.1%</b>  | <b>-1.2%</b>  | <b>-1.0%</b>    |
| OK_DH Krigagem ordinária com dados primários<br>OK_DH_PPori Krigagem ordinária com dados primários e secundários originais<br>OK_DH_PPTra Krigagem ordinária com dados primários e secundários transformados<br>SCOK_DH_PPTr cokrigagem ordinária com dados primários e secundários transformados |          |                 |              |               |                 |

Neste capítulo, foi apresentado o estudo de caso onde foram utilizados dados com heterotopia total de diferentes fontes e a partir destes, criados modelos com diferentes metodologias de estimativas.

Utilizando os modelos criados, foram planejadas e executadas 26 pilhas de homogeneização que foram alimentadas em uma usina. Cada pilha possuía quatro teores da variável  $P_2O_5\%$  planejados em função dos teores dos blocos nos quatro modelos estimados. Os resultados previstos das 26 pilhas foram reconciliados com os valores amostrados na usina.

No próximo capítulo, serão descritas todas as conclusões e considerações a respeito do estudo de caso.

## Capítulo 4 CONCLUSÕES, RESTRIÇÕES E CONSIDERAÇÕES

Uma das fontes frequentes de problemas no planejamento de lavra é a diferença entre os teores planejados e os executados na usina. Em geral, essa situação está associada à própria complexidade da jazida e limitações da amostragem realizada, ocorrendo problemas em atingir níveis de flutuações toleráveis na alimentação da usina.

Para melhoria dos modelos geológicos e diminuição da incerteza na previsão dos teores, optou-se, nesta pesquisa, por incorporar informações de menor custo, que possuem, em geral, viés e baixa precisão quando comparados às amostras advindas dos furos de sondagem diamantada. Desta forma, os dados de baixa precisão considerados como dados secundários foram tratados e utilizados na estimativa do modelo em conjunto com dados primários (furos de sonda). O uso dessa informação propiciou uma maior acuracidade e precisão no resultado da estimativa do modelo de blocos e, assim, na tomada de decisão no planejamento de curto prazo.

Nos estudos de caso realizados em uma mina de fosfato, os chamados dados primários são compostos por furos de sondagem rotativa diamantada e, os dados secundários são originados de amostragem por recuperação em pó de perfuratriz. Foram modeladas as continuidades espaciais considerando dados primários (i), dados primários e secundários originais (ii) e dados primários e secundários standardizados (iii). A partir da definição destes três diferentes bancos de dados, foram estimados modelos realizando a combinação de metodologias de estimativa e banco de dados. Assim, os quatro cenários considerados derivam de modelos gerados por: krigagem ordinária com banco de dados (i), krigagem ordinária com banco de dados (ii), krigagem ordinária com banco de dados (iii) e cokrigagem ordinária com banco de dados (iii).

Para comparação dos diferentes métodos de estimativa, foram utilizadas 26 pilhas de homogeneização a partir dos blocos lavrados. Os teores resultantes dos blocos analisados foram comparados aos resultados informados pela amostragem da usina de beneficiamento (teores reais para reconciliação). Essa reconciliação foi o suporte de análise dos resultados gerados nesse trabalho.

#### 4.1. CONCLUSÕES – ESTUDO DE CASO

Avaliando o cenário 1, que utilizou a metodologia de krigagem com dados primários, quando comparados aos demais cenários, apresentou menor correlação entre teores de  $P_2O_5\%$  planejados nas pilhas e os resultados de usina, 56.23% de correlação (figura 16), e o maior erro relativo médio (tabela 5), aproximadamente 5.8%.

No cenário 2, com a adição de amostras secundárias sem prévio tratamento (correção), o resultado da reconciliação da variável  $P_2O_5\%$  informado pela usina e o modelo estimado foi mais satisfatório, aumentando a correlação para 78.11%, quase 50% de melhora (figura 17). O erro relativo diminuiu para patamares de 2% (tabela 5). Logo, usando dados mesmo com viés e baixa precisão, quando comparados às estimativas somente por sondagem rotativa, as amostras de pó de perfuratriz melhoram os resultados dos modelos de teores estimados previamente planejados.

No cenário 3, no qual a correlação média é entre resultados de usina e modelo krigado, com o banco de dados composto por amostras primárias e secundárias transformadas (standardizadas e reescaladas), obteve-se um ganho de correlação pequeno e uma redução na média dos resultados do modelo estimado em 0.5% do teor de  $P_2O_5\%$ . Saiu-se de uma média do teor planejado de 15.88% (figura 17) para 15.38% de  $P_2O_5\%$  (figura 18). A princípio, considerando apenas a correlação, pode-se inferir que não há a necessidade de tratamento (standardização e reescalamento). Porém, ao considerar que 0.5% de  $P_2O_5$  em 15% de teor médio representa cerca de 3% de diferença, sugere-se que, ao realizar o tratamento dos dados, a estimativa nesse modelo reduz o viés global no teor planejado. Assim, o tratamento dos dados com a transformada, reduziu o viés que as amostras secundárias carregam, e ao mesmo tempo, levou a diminuição do erro relativo para 1.2% (quase 50% de redução em relação a situação anterior) (figura 5), o que corrobora a sugestão de utilização dos dados secundários tratados.

Para a última avaliação, cenário 4 (figura 19), considerou-se o modelo estimado por cokrigagem ordinária, com o banco de dados composto de amostras primárias e secundárias transformadas. Obteve-se um ganho de 23.53% de correlação quando comparadas à primeira estimativa, cenário 1. Além disso, o erro relativo foi o menor de todas as estimativas, alcançando apenas 1% (figura 5). Ressalta-se que a cokrigagem é a extensão natural da krigagem no caso de múltiplas variáveis, como descrito no item 2.4.7. Logo, no tratamento de dados multivariados, como executados nesse trabalho, a cokrigagem se mostrou a melhor metodologia.

Conclui-se que, a partir dos casos estudados, a adição de dados secundários, nos cenários 2, 3 e 4, diminuiu consideravelmente a incerteza na previsão dos teores. O modelo criado no

cenário 4, utilizando o banco de dados de amostras primárias combinados com os dados secundários tratados (standardizados e reescalados), estimados pela metodologia de cokrigagem, demonstrou maior aderência e o menor erro relativo das estimativas, sugerindo a possibilidade de utilização prática na indústria em análise, melhorando a previsibilidade de resultados na usina sem custo adicional.

#### **4.2. RESTRIÇÕES E CONSIDERAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.**

Como análise final, elenca-se algumas limitações da pesquisa e considerações para trabalhos futuros.

O caso estudado obteve uma boa correlação inicial entre os dados, 75% entre dados primários e dados secundários originais. Uma correlação muito baixa pode apresentar resultados não conclusivos ou até mesmo questionáveis. Além disso, para o caso estudado, as amostras dos diferentes métodos tinham o mesmo comprimento. Caso as amostras apresentem suportes diferentes, deve ser avaliado previamente, usando ferramentas da geoestatística, se a correção adotada nesse trabalho seria adequada.

Para reconciliação, foram considerados teores reais os dados informados pela usina de beneficiamento. Não foram avaliados os protocolos de amostragem e as rotinas amostrais de usina. Para ajudar na validação, sugere-se a utilização da metodologia de validação cruzada e Jackknife.

Essa metodologia de standardização e reescalamento favorece a utilização de dados secundários na estimativa do modelo de recursos para emissão de relatórios públicos. Com adição destes dados, aumentaria o ganho de informação, tornando o modelo estimado mais robusto para declaração de recursos e reservas minerais.

## REFERÊNCIAS

- ARMSTRONG, M. Basic Linear Geostatistics. Berlin, Springer, 153p, 1988.
- ANGELICO, J.C. Desempenho da co-krigagem na determinação da variabilidade de atributos do solo. Viçosa, MG, R. Bras. Ci. Solo, 2006. 30:931-936, Set,2006.
- ANDRIOTTI, J. L. S. Fundamentos de Estatística e Geoestatística. São Leopoldo: Editora Unisinos, 165p, 2003.
- ARAUJO, C.P. Uso de informação secundária imprecisa e inacurada no planejamento de curto prazo. 2015. 104p. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.
- BOEZIO, M. N. M. Métodos Geoestatísticos para a incorporação da topografia como informação secundária no mapeamento do nível de água subterrânea. 2004. 292p (Mestrado em Engenharia). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2004.
- DEUTSCH, C. V.; JOURNAL, A. G. GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide. New York: Oxford University Press, 340p, 1998.
- DEUTSCH, C. V. Geostatistical Reservoir Modeling. Alberta: Oxford University Press, 376p, 2002.
- GOOVAERTS, P. Geostatistics for Natural Resources Evaluation. New York: Oxford University Press, 483p.1997.
- ISAAKS, E. H. and SRIVASTAVA, R. M. Applied Geostatistics. New York: Oxford University Press, 560 p, 1989.
- JOURNAL, A. G. E HUIJBREGTS, C. J. Mining Geostatistics. London:Academic press, 1978.
- JOURNAL, A. G. 1982. The Indicator Approach to Estimation of Spatial Distributions. In Proceedings of the 17<sup>th</sup> APCOM (International Symposium on the Application of Computers and Mathematics in the Mineral Industry), SME-AIME, Golden, Colorado, EUA, pp. 793-806, 1982
- JOURNAL, A.G. Non-parametric estimation of spatial distributions. Mathematical Geology, 15(3): 445-468. 1983.
- KOPPE, V.C. Metodologia para Comparar a Eficiência de Alternativas para disposição de amostras.2009. 215p. Tese (Doutorado em Engenharia). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- KRIGE, D.G. A Statistical Approach to Some Mine Valuations and Allied Problems at the Witwatersrand. Thesis, University of Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 1951.

LEVINE, D.M.; STEPHAN, D.F.; KREHBIEL, T.C.; BERENSON, M.L. Estatística: teoria e aplicações. Trad. Teresa Cristina Padilha de Souza. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, v.2 752p. 2008

MARECHAL, A. Cokriegeage et regression en correlation intrisique. Centre de Geostatistique. Fontainebleau, 40p. 1970.

MARCOTTE, D. Cokriging with Matlab. Computers & Geosciences, Vol. 17, No 9, pp. 1265-1280, 1991.

MATHERON, G. Principles of Geostatistics, Economic Geology, Littleton, v. 58, n.8 pp. 1246 – 1266, Dec.1963.

MATHERON, G. Les Variables Régionalisées et leur Estimation. Paris, Masson. 212p, 1965.

MATHERON, G. The Intrinsic Random Functions and Their Applications. *In Adv. Appl. Prob.*, Jerusalem, v. 5, n.3, p. 439-468, Dec.1973.

MATHERON, G. La d'Estructuration des Hautes Teneurs et le krigeage des Indicatrices. Internal report N-761, Fontainebleau: C.G. Ecole des Mines de Paris, 33p,1982

MINNITT, R.C.A & DEUTSCH, C.V. Cokriging for optimal mineral resource. The Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy, Vol. 114, No 3, p. 189-203, 2014.

MYERS, D. E. Pseudo-crossvariograms, positive definiteness and cokriging. Mathematical Geology, Vol. 23, No 6, pp. 805-816. 1991.

OLEA, R. A. Geoestatistic for Engineers and Earth Scientists. 1ed. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 303p. 1999.

REUWSAAT, J. D. V. Estudo de alternativas de estimativa para jazidas de ferro utilizando dados heterotópicos. 2011. 164p. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

ROSSI, M. & DEUTSCH, C. V. Mineral Resource Estimation, Dordrecht:Springer, 332p.2014.

SCHOFIELD, C.G. Homogenisation/Blending Systems Design and Control for Minerals Processing. Germany: TransTech Publications, 236p.1980.

SINCLAIR, A.J.; BLACKWELL, G.H. Applied Mineral Inventory Estimation. Cambridge: Cambridge University Press, 401 p.2004.

SOARES, A. Geoestatística para as ciências da terra e do ambiente. Lisboa: IST, 214p.2006

SULLIVAN, J. Conditional Recovery estimation through kriging – Theory and Practive, Dordrecht, Holland, pp.365-384.1984.

WACKERNAGEL, H. Multivariate Geoestatistics.3.ed. Berlin: Springer-Verlag, 387p. 2003.

VALENTE, J. M. Geomatématica, lições de geoestatística. Ouro Preto: Fundação Gorceix. 510-713p.1989