

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UM ESTUDO DE PARAMETRIZAÇÃO DE MODELOS HIPERELÁSTICOS EM FUNÇÃO DA  
TEMPERATURA

por

André Piva Romeu

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, junho de 2019



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

UM ESTUDO DE PARAMETRIZAÇÃO DE MODELOS HIPERELÁSTICOS EM FUNÇÃO DA  
TEMPERATURA

por

André Piva Romeu

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS  
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
**ENGENHEIRO MECÂNICO**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof<sup>a</sup>. Dr. Mario Roland Sobczyk Sobrinho  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Comissão de Avaliação:

Prof. Daniel Milbrath de Leon

Prof. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Rogério José Marczak

Porto Alegre, 24, junho de 2019

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha família, da qual o apoio foi fundamental para esta construção, aos meus amigos, que entendem a minha ausência e ao corpo docente, que tem como missão de vida compartilhar conhecimento.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço

Ao meu professor orientador, pelo apoio nesta, e em outras etapas.

Ao Gmap por proporcionar um ambiente de compartilhamento de conhecimento.

Ao colega e amigo Gustavo de Abreu Caceres, sem o qual este trabalho não seria possível.

Ao colega e amigo Álvaro Bruscato Schmidt, pelo apoio incondicional na graduação.

ROMEU, A. P. **Um Estudo de Parametrização de Modelos Hiperelásticos em função da Temperatura.** 2019.17. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

## RESUMO

O presente estudo analisou diferentes formas de incorporar variação térmica em modelos constitutivos hiperelásticos para materiais hiperelásticos. Dados foram obtidos em ensaios de tração uniaxial para quatro diferentes temperaturas. Os dados foram utilizados para obter diferentes modelos constitutivos com energia de deformação linearmente corrigida e com interpolação polinomial térmica de cada variável no modelo constitutivo de cada modelo hiperelástico. Encontrou-se uma pequena diferença entre eles, indicando não haver necessidade de usar o ajuste polinomial para cada constante.

**PALAVRAS-CHAVE:** hiperelasticidade estática, modelo constitutivo, elastômeros, termoelasticidade

ROMEU, A. P. **A Parametrization Study of Hyperelastic Models as Temperature dependent.** 2019.17. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

## ABSTRACT

The present study analysed different forms of incorporating thermal changes in hyperelastic constitutive models for incompressible material. Data was obtained from actual uniaxial tensile tests for four different temperatures. The data was used to fit several theoretical constitutive models by linear correction of the deformation energy and by interpolating a temperature dependent polynomial for every constitutive parameter of each hyperelastic models. A small difference was found between them, indicating that there is no need to use polynomial fitting for each constant.

**KEYWORDS:** hyperelasticity, constitutive model, rubber-like materials, thermoelasticity

## ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO .....	1
2 EXPERIMENTAL .....	1
3 PREPARAÇÃO DE DADOS .....	3
4 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	4
5 MODELOS HIPERELÁSTICOS .....	5
6 MÉTODOS .....	7
7 RESULTADOS .....	9
8. CONCLUSÕES .....	12
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	13
APÊNDICE I .....	14
APÊNDICE II .....	17

## 1. INTRODUÇÃO

Borrachas naturais e sintéticas, chamadas de elastômeros, possuem grande uso na engenharia por possuírem propriedades mecânicas singulares. Dentre os principais usos de elastômeros encontram-se pneus e vários modelos de amortecedores [Chagnon et al, 2004]. Elastômeros possuem comportamentos complexos como histerese, viscoelasticidade e, no caso de deformações estáticas, hiperelasticidade [Khajehsaeida et al, H, 2013] que será foco desta monografia.

A característica principal de materiais hiperelásticos é, segundo Treloar, 1975, exibirem alta deformação ao sofrerem pequenas tensões, ao compará-los aos materiais chamados de sólidos duros (metais, cristais e vítreos). Sua curva tensão x deformação possui não linearidade que torna o uso da lei de Hooke inviável e a definição de um valor constante para o módulo de Young impossível. Utiliza-se uma função energia de deformação não constante para associar deformação com tensão:

$$\sigma_{ij} = f\left(\frac{\partial W}{\partial E_{ij}}\right) \quad (1.1)$$

Sendo  $W$  a energia de deformação absorvida por volume,  $E_{ij}$  a medida de deformação e  $\sigma_{ij}$  a medida de tensão. Conforme Hoss, 2009, existe um grande numero de relações constitutivas para materiais hiperelásticos na literatura, que visam prover uma modelagem adequada do material para aplicações práticas da engenharia.

Modelos hiperelásticos utilizam-se de dados experimentais, e, portanto, estão ligados a uma temperatura específica. Este trabalho visa incluir a variante temperatura através de fórmulas parametrizadas das constantes calculadas de diferentes modelos constitutivos. Para tal foi realizado ensaios de tração uniaxial em corpos de prova de Neoprene em quatro diferentes temperaturas. Após a obtenção dos dados de tensão e deformação, foi utilizado o programa Hyperfit para o cálculo das constantes de cada modelo hiperelástico. Estes dados foram analisados e posteriormente parametrizados para criação de funções de temperatura.

Compararam-se os modelos calculados através da parametrização com os utilizando o método proposto por Ferry, 1970 que implementa a variável temperatura de forma linear. Encontrou-se resultados semelhantes entre os dois métodos, com diferença média de 1,2% entre eles. O método linear de Ferry mostrou-se mais eficiente e simples de ser utilizado.

## 2. EXPERIMENTAL

Ensaio mecânicos são necessários para avaliar de forma experimental características de um determinado material, entre elas suas características reológicas, densidade, tensão de ruptura, alongamento máximo e dureza [Marczak et al, 2006]. No caso dos materiais elastoméricos, a utilização de ensaios se torna primordial, devido a escassa literatura e grande variação nas composições desses materiais. Dentre os ensaios mecânicos, o mais comum e mais bem documentado é o ensaio de tração uniaxial, normalizado pela ASTM D412 que normaliza também o corpo de prova.

O ensaio de tração uniaxial para elastômeros consiste em tracionar um corpo de prova padrão tipo C até uma deformação pré-determinada ou o rompimento do material. Criando assim uma correlação entre carga e deformação. Explicado por Callister et al, 2016, a máquina de ensaios de tração é projetada para alongar o corpo de prova a uma taxa ou carga constante, além de medir contínua e simultaneamente a carga instantânea aplicada e os alongamentos resultantes. Assumindo deformação homogênea no material e incompressibilidade do mesmo, é possível, através de diferentes modelos matemáticos, criar uma curva característica para aquele material àquela temperatura.

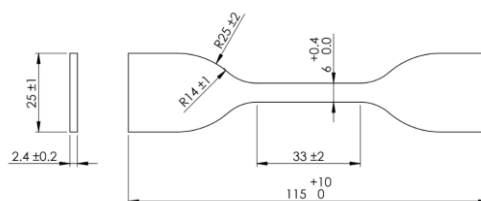


Figura 2.1 – Medidas dos corpos de prova utilizados

Para a obtenção de dados experimentais foram realizados diversos testes de tração uniaxial. Inicialmente foram determinadas quatro diferentes temperaturas nas quais as amostras de Neoprene seriam analisadas. A temperatura inicial escolhida foi de 30°C, e as subsequentes temperaturas, incrementos de 30K. Estes intervalos foram decididos para abranger temperaturas ambientes, temperaturas operacionais e temperaturas elevadas onde a revulcanização poderia ocorrer. A máquina utilizada para o experimento, SHIMADZU modelo AG-X, foi utilizada em conjunto com um forno da mesma companhia e um leitor ótico instalado em conjunto para anotações mais precisas de deslocamento. A célula de carga utilizada foi o modelo SLBL-1kN e as garras utilizadas foram EMIC/INSTRON GR001, modelo auto travante por efeito alavanca, muito utilizada para materiais com grandes deformações.



Figura 2.2 – Máquina de ensaio de tração uniaxial

Foram criadas 19 amostras e o uso inicial previa nove amostras: uma para análise à temperatura ambiente e duas para cada temperatura prevista. Ao iniciar os procedimentos experimentais logo se notou uma dificuldade para a realização de testes na temperatura de 30°C. As lâmpadas utilizadas na parte interna do forno, que não possui sistema de refrigeração, geraram calor suficiente para tornar a atmosfera interna próxima de 40°C, invalidando a possibilidade de utilizar o forno para temperaturas inferiores a 40°C. Foi então escolhido alterar o ensaio previsto a temperatura de 30°C, para a temperatura ambiente de 24°C. Prosseguiu-se com a temperatura de 60°C com incrementos de 30K. Para equilíbrio térmico, foi utilizado o seguinte parâmetro: 2 minutos de temperatura estável no interior do forno, utilizando o próprio sistema de controle de temperatura do forno para a medida.

O material utilizado, borracha de policloropreno, é uma borracha sintética com propriedades mais resistentes que a borracha natural, entre elas: melhor resistência à gasolina; resistência ao ozônio; à oxidação; à chama; e materiais corrosivos [Morton, 1995]. Obtida através da polimerização do cloropreno (2-cloro-1, 3 butadieno), o elastômero, segundo Nagdi, 1987, é mais conhecido como Neoprene, marca registrada da empresa DuPont. As amostras utilizadas nesta monografia foram adquiridas através do SENAI, Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial.

Ensaio experimentais, tais como o acima descrito, possuem falhas devido a erros humanos e de medição computacional. Escorregamentos foram observados em amostras nas temperaturas de 24 e 60°C. Esse é um dos principais erros que pode acontecer durante um



ensaio de tração uniaxial. Foram, entretanto, ignorados, tendo em vista que o estudo seria conduzido utilizando apenas 75% de deformação e os erros de medição iniciam em 150%. A utilização de intervalo de 0 a 0,75 de deformação nominal foi utilizada para a comparação ser possível em todas as temperaturas abordadas, tendo que em 120°C a ruptura ocorreu com uma deformação de aproximadamente 0,8. Para reduzir outras anomalias de medição, os dados coletados foram posteriormente tratados.

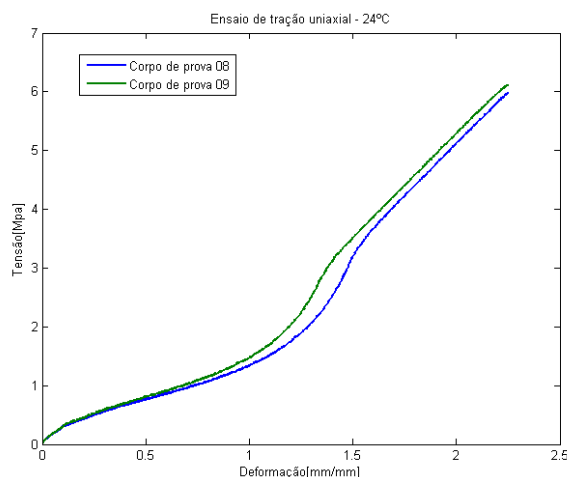


Figura 2.3 – Gráfico Tensão x Deformação para os corpos de prova à 24°C. Escorregamento aparece como linearidade, iniciando-se na deformação de 1,5.

### 3. PREPARAÇÃO DE DADOS

Os dados adquiridos nos ensaios mecânicos foram organizados e tratados para melhor representar o comportamento do material. Uniram-se os valores obtidos em ensaios de mesma temperatura através de uma média aritmética, obtendo-se um conjunto mais uniforme de dados e desacentuando qualquer erro de medida. Na fixação dos corpos de prova é normal ocorrer uma tensão inicial ligeiramente superior a zero. Essa tensão é subtraída das medidas, pois ela não resulta em nenhuma deformação.

Os dados obtidos através do software utilizado nos testes de tração apresentam carga e deslocamento. Para uma melhor análise dos resultados, transformaram-se os dados em tensão e deformação, através das seguintes definições:

$$\sigma = \frac{F}{A^0} \quad (3.1)$$

Onde  $\sigma$  é a tensão de engenharia,  $F$  a carga e  $A^0$  a área inicial da secção útil do corpo de prova, medida a priori.

$$e = \frac{L-L^0}{L^0} \quad (3.2)$$

Onde  $e$  é deformação,  $L$  a distância entre dois pontos de medida observados durante o ensaio no corpo de prova e  $L^0$  a distancia inicial desses mesmos pontos.

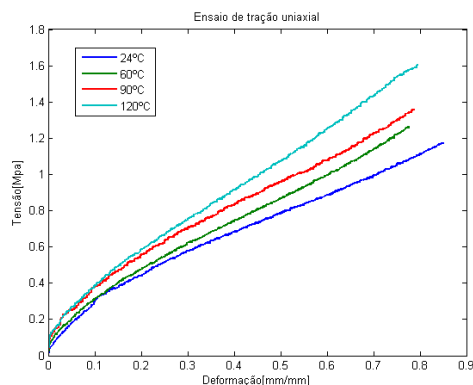


Figura 3.2: Gráfico tensão x deformação das médias dos ensaios

Observa-se na figura 3.2 uma correlação entre temperatura e o comportamento hiperelástico do Neoprene. Ao elevar-se a temperatura, a tensão necessária para atingir a mesma deformação é elevada. Este comportamento é descrito por Treloar, 1975, embora estudos mostrem que determinados elastômeros possuem comportamento reverso, conforme descreve Lion, 1997.

Com os quatro novos pares de dados, um para cada diferente temperatura, criou-se arquivos para a utilização do software Hyperfit, um software criado pelo GMAp, grupo de mecânica aplicada da Universidade federal do Rio Grande do Sul. O programa utiliza a linguagem MATLAB e com ela é possível calcular, de forma rápida e eficaz as constantes de 42 modelos hiperelásticos diferentes, ao introduzir dados experimentais o programa, que possui as funções de energia de deformação, faz um ajuste de curvas e encontra as constantes para aqueles dados. O programa possui também auxílio gráfico e cálculo de erro, com o qual é capaz de comparar os diversos modelos [Marczak, 2011]. No apêndice II encontram-se os gráficos de tensão x deformação de cada modelo para a temperatura de 24°C.

#### 4. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

De forma geral, uma relação constitutiva é uma equação, ou conjunto de equações que relacionam tensão com deformação descreve Marczak et al, 2006. Ao estudar o comportamento da tensão em um ponto é usual utilizarmos o tensor tensão de Cauchy, que, ao assumir-se incompressibilidade do material e tração uniaxial pura, pode ser simplificado para apenas um termo,  $\sigma_{11}$ . Este termo pode ser definido como:

$$\sigma_{11} = -p_0 + 2\lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{2}{\lambda_1^2} \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (4.1)$$

Onde  $p_0$  é a pressão hidrostática,  $I$  o invariante e  $\lambda_1$  o alongamento na direção principal, dado por:

$$\lambda_1 = \lambda = \frac{L}{L_0} \quad (4.2)$$

Para o caso de tração uniaxial de material incompressível, os invariantes tomam a forma:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (4.3)$$

e

$$I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \quad (4.4)$$

Assumindo  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  podemos encontrar  $p_0$  em função de  $\lambda$  e  $W$ , que, em conjunto com (4.1), forma a função de tensão axial:

$$\sigma = \sigma_{11} = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (4.5)$$

Esta fórmula é utilizada para correlacionar tensão e deformação, através de funções de  $W$  obtidas por modelos hiperelásticos. Para o cálculo de coeficiente de correlação, principal método utilizado nesta dissertação para a análise dos modelos, utiliza-se a seguinte definição:

$$R^2 = 1 - \frac{SQ_{res}}{SQ_{tot}} \quad (4.6)$$

Sendo  $R^2$  o coeficiente de correlação que varia de 0 a 1, sendo 1 equivalente a um modelo que perfeitamente representa a realidade.  $SQ_{res}$  e  $SQ_{tot}$  são definidos por:

$$SQ_{tot} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (4.7)$$

e

$$SQ_{res} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (4.8)$$

Com  $y_i$  sendo o valor observado,  $\bar{y}$  a média dos valores observados e  $\hat{y}_i$  o valor obtido pelo método em estudo.

## 5. MODELOS HIPERELÁSTICOS

Modelos hiperelásticos possuem simples implementação e calibração, assim como eficiência computacional. Conforme expressa Bergström, 2015, entre as dificuldades dos modelos, encontra-se a dificuldade de capturar efeitos como viscoelasticidade e histerese, uso restrito a materiais elastoméricos e a dificuldade de utilizar um ensaio para descrever o comportamento em outra solicitação. Os modelos hiperelásticos são separados em dois grupos, os chamados fenomenológicos, baseados na observação do comportamento do material durante testes; e os micromecânicos, modelos estatísticos desenvolvidos por análise química.

Este trabalho apresenta 42 diferentes modelos, entre eles estão celebrados modelos como Ogden, Mooney-Rivlin e Neo-Hookeano, e modelos mais recentes, como Veronda-Westmann. Cada modelo foi ajustado às quatro temperaturas estudadas nesta monografia e suas constantes anotadas. A tabela 5.1 lista os modelos hiperelásticos presentes na biblioteca Hyperfit.

Tabela 5.1: Modelos Hiperelásticos testados.

1. Mooney-Rivlin de 2 termos	22. Edwards-Vilgis
2. Mooney-Rivlin de 3 termos	23. Davis De-Thomas
3. Mooney-Rivlin de 5 termos	24. Gent-Thomas
4. Mooney-Rivlin de 9 termos	25. Yeoh-Fleming
5. Polinomial	26. H. Bechir et al de 4 termos
6. Neo-Hookeano	27. H. Bechir et al de 6 termos
7. Yeoh de 2 termos	28. Hartmann-Neff de 3 termos
8. Yeoh de 3 termos	29. Hartmann-Neff de 5 termos
9. Yeoh de 5 termos	30. Hartmann-Neff de 7 termos
10. Arruda-Boyce	31. Yeoh Modificado
11. Gent	32. Van Der Waals
12. Ogden de 2 termos	33. Fung
13. Ogden de 3 termos	34. Horgan-Saccomandi
14. Veronda-Westmann	35. Kilian
15. Humphrey-Yin	36. Gent 3
16. Hart-Smith	37. Hoss-Marczak (Low Strain)

17. Peng-Landel	38. Hoss-Marczak (High Strain)
18. Knowles	39. Hart-Smith Ameliori
19. Martins	40. Takamizawa-Hayashi
20. Pucci-Sacomandi	41. Yamashita-Kawabata
21. Gregory	42. Amin

Durante o ajuste de curvas dos modelos constitutivos, notou-se que grande parte deles conseguiu simular o comportamento do material de forma precisa na temperatura de 24°C dentro dos parâmetros estabelecidos – isto é, de 0 a 75% de deformação. Pois nestes parâmetros o material apresenta apenas uma inflexão, tornando-o mais fácil de simular/prever. Entretanto, para maiores temperaturas os modelos falharam em representar o acréscimo na rigidez inicial.

Alguns modelos tiveram grande dificuldade em descrever corretamente o comportamento do material, por não serem abrangentes. Concebido para análise de tecidos biológicos, Martins et al, 2006, o modelo constitutivo de Martins não falhou em reproduzir o comportamento do elastômero estudado, entretanto sua curva característica em nada assemelha-se ao observado no ensaio de tração uniaxial. A figura 5.1 abaixo mostra a curva teórica deste modelo e os dados experimentais utilizados. Diversos modelos testados não foram concebidos para o uso com Neoprene, e sim para simulações de tecidos orgânicos, de forma que o presente trabalho não se atentará a estes modelos. A eficiência do emprego do modelo para o material e ensaio utilizado; bem como o comportamento de suas constantes em relação à temperatura, foram os fatores considerados para a análise final do modelo proposto.

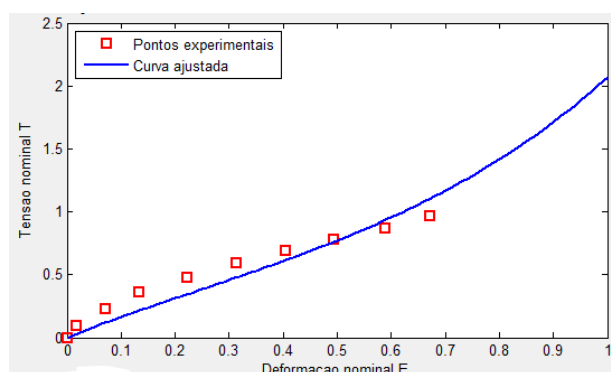


Figura 5.1 – Ajuste de curva para o modelo de Martins na temperatura ambiente

A acurácia dos modelos foi inicialmente verificada utilizando o cálculo do coeficiente de determinação próprio do software utilizado. A figura 5.2 exemplifica a curva do coeficiente de determinação de um modelo bem representativo com o já mencionado, modelo de Martins.

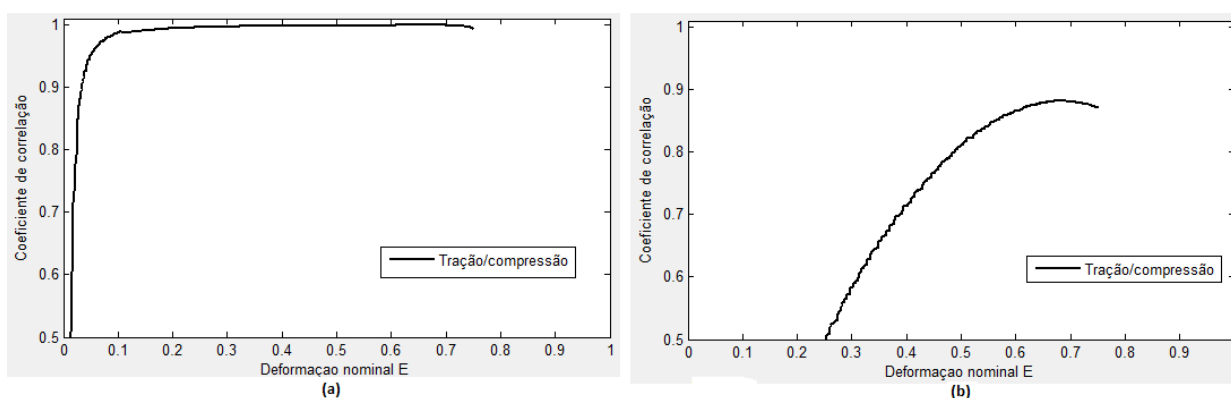


Figura 5.2 – Coeficiente de correlação, (a) Modelo Polinomial de 3 termos e (b) Modelo de Martins

Criou-se uma tabela comparando todos os modelos estudados utilizando o coeficiente de correlação médio no intervalo preestabelecido. Dentre os que melhor representam o comportamento a 24°C, destacaram-se os modelos de Mooney-Rivlin de cinco termos; Yeoh-Fleming; Hartmann-Neff de cinco termos; e Amin. Os que tiveram menos de 50% de compatibilidade teórica-experimental ( $R^2 < 0,5$ ) foram: Yeoh de cinco termos; Veronda-Westmann; 27. H. Bechir et al de 6 termos; e Hart-Smith Ameliori. O apêndice II possui as tabelas descrevendo a eficácia dos modelos para as demais temperaturas.

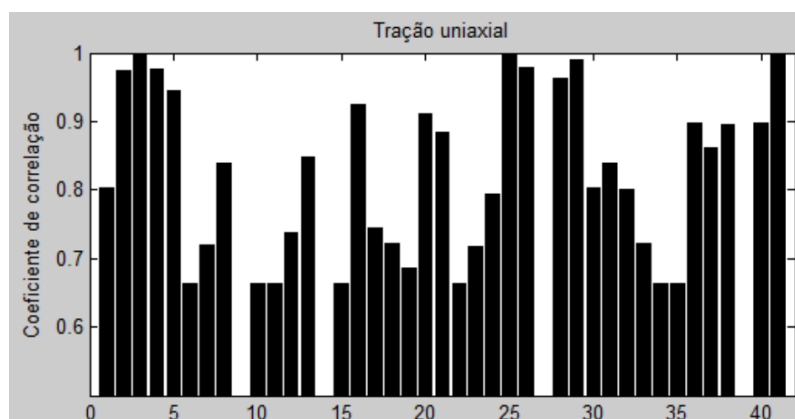


Figura 5.3 – Coeficiente de Correlação dos modelos estudados à temperatura de 24°C, ordem de acordo com a tabela 5.1

## 6. MÉTODOS

O objetivo inicial de parametrizar as constantes dos modelos constitutivos foi realizado utilizando o método dos mínimos quadrados para polinômios de segundo grau. O objetivo desta escolha foi tentar descrever os comportamentos de diferentes constantes e assim obter um resultado mais dinâmico e baseado em ensaios realizados. Polinômios de terceiro grau possuem um  $R^2$  igual a 1 nessa aplicação, pois a limitação de dados experimentais nos fornece apenas quatro variáveis de temperatura. Não foi aplicado o método por não ser possível quantificar uma relação entre o comportamento teórico e calculado destas variáveis. Polinômios de primeiro grau são retas e sua utilização assemelha-se ao proposto por Ferry, 1970, que traz linearidade no uso da temperatura, não sendo este o objetivo deste trabalho.

Criou-se as 149 funções paramétricas das constantes e avaliaram-se seus coeficientes de correlação: 66.% dos modelos apresentaram uma ou mais constantes com funções paramétricas polinomiais de segunda ordem com coeficientes inferiores a 0.7, considerado insuficiente. Dentre eles, apenas dois modelos foram testados, Yeoh-Fleming e Hartmann-Neff de 5 termos, ambos escolhidos por possuírem um coeficiente de correlação alto à temperatura ambiente. Dentre os demais 14 modelos (33.3%), cinco foram escolhidos para serem estudados. Mooney-Rivlin de cinco termos, Neo-Hookeano, Gent, Pucci-Saccomandi e Edwards-Vilgis, escolhidos por sua ampla utilização e por representarem o comportamento do material de forma satisfatória.

Através da função deformação de cada modelo constitutivo, utilizando a equação (4.5), (4.3), (4.4) e utilizando as relações paramétricas criadas, obtém-se:

$$\sigma = f(\lambda, T) \quad (6.1)$$

Para cada modelo. Essa função é então comparada com a equação proposta por Ferry, 1970:

$$\sigma = \sigma(T_{ref}) \frac{T}{T_{ref}} + \sum \sigma_i (T_{ref}) \frac{T}{T_{ref}} e^{(-t/a_T \tau_i)} \quad (6.2)$$

Onde as temperaturas são absolutas (K) e o somatório representa propriedades temporais tais como relaxação. O presente trabalho aplica conceitos estáticos, portanto o termo do somatório é aproximado por zero, resultando em:

$$\sigma = \sigma(T_{ref}) \frac{T}{T_{ref}} \quad (6.3)$$

Sendo  $T_{ref}$  é uma temperatura de referência, normalmente ensaiada. Nesta monografia a temperatura de referência foi a temperatura ambiente de 24°C(297K) Os resultados obtidos experimentalmente, através de (6.1) e de (6.3) são então plotados e analisados com os resultados experimentais para aferir qual método assemelha-se mais com a realidade observada, utilizando as equações (4.7), (4.8) e (4.6).

A tabela 6.1 mostra a função energia de deformação de cada modelo estudado e suas constantes em função da temperatura em °C.

Tabela 6.1: Função de energia de deformação e parametrização dos modelos estudados

Mooney-Rivlin de cinco termos	$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2$	$C_{10}(t) = -(2 * 10^{-5})t^2 - 0.0091t - 1.1249$
		$C_{01}(t) = 3 * 10^{-5}t^2 + 0.0119t + 1.7478$
		$C_{11}(t) = 6 * 10^{-5}t^2 + 0.0004t + 0.9099$
		$C_{20}(t) = -(3 * 10^{-5})t^2 + 0.001t - 0.3773$
Neo-Hookeano	$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$	$\mu(t) = 2 * 10^{-5}t^2 + 0.0007t + 0.736$
Gent	$W = -\frac{\mu}{2}(I_1 - 3) \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3}\right)$	$I_L(t) = -24.577t^2 + 2981t + 10226$
		$\mu(t) = 2 * 10^{-5}t^2 + 0.0007t + 0.7359$
Pucci-Saccomandi	$W = -\frac{\mu}{2} J_L \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_L}\right) + C_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right)$	$\mu(t) = 2 * 10^{-5}t^2 - 0.0003t + 0.1318$
		$J_L(t) = 3 * 10^{-5}t^2 + 0.0079t + 4.6408$
		$C_2 = -(2 * 10^{-5})t^2 + 0.0037t + 1.3201$
Edwards-Vilgis	$W = \frac{\mu}{2} \left( \frac{(J_L + 2)(J_L - 3)(I_1 - 3)}{J_L(J_L - I_1 + 3)} + \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_L}\right) \right)$	$\mu(t) = 2 * 10^{-5}t^2 + 0.0007t + 0.736$
		$J_L(t) = -14.74t^2 + 1496.6t + 58792$
Yeoh-Fleming	$W = \frac{A}{B} \left( 1 - e^{-B(I_1 - 3)} \right) - C_{10}(I_1 - 3) \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{I_L - 3}\right)$	$A(t) = 2 * 10^{-6}t^2 + 0.0012t + 0.311$
		$B(t) = -(5 * 10^{-6})t^2 + 0.0004t - 0.0407$
		$C_{10}(t) = -(6 * 10^{-5})t^2 + 0.0153t - 0.0467$
		$I_L(t) = -7E - 06t^2 + 0.0014t + 2.9219$
Hartmann-Neff de cinco termos	$W = \alpha(I_1^3 - 3^3) + \sum_{i=1}^2 C_{i0}(I_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^2 C_{0j} \left( I_2^{3/2} - 3\sqrt{3} \right)^j$	$C_{10}(t) = 0.0012t^2 - 0.2237t - 0.3859$
		$C_{20}(t) = 0.0006t^2 - 0.0959t + 0.1097$
		$C_{01}(t) = -0.0002t^2 + 0.0416t + 0.3803$
		$C_{02}(t) = -(1 * 10^{-4})t^2 + 0.0184t - 0.0093$
		$\alpha(t) = -(3 * 10^{-4})t^2 + 0.0046t - 0.0014$

## 7. RESULTADOS

Ao analisar o comportamento de cada função, notou-se que, para o modelo de Hartmann-Neff de cinco termos, a parametrização falhou em emular o comportamento do material, resultando em gráficos catastróficos e sem significado físico. Estes resultados deram-se por o modelo não favorecer pequenas alterações em seus parâmetros. O calculo de R<sup>2</sup> não

foi feito para esse modelo por ter sido uma falha crítica do método proposto. É interessante notar que o coeficiente de correlação da constante  $C_{20}$ , bem como  $\alpha$ , é menor do que 0.7.

O modelo de Pucci-Saccomandi comportou-se de maneira similar ao de Hartmann-Neff, entretanto, possuindo nenhum parâmetro com coeficiente de correlação inferior a 70%, o modelo falhou ao superestimar a rigidez do material. Esse comportamento é atribuído à soma de erros em sua parametrização, tendo em vista que nenhuma de suas constantes obteve uma representação aceitável pelo método, não obtendo nenhum valor superior a 0.9.

Em ambos os casos acima mencionados o método linear provou-se eficiente.

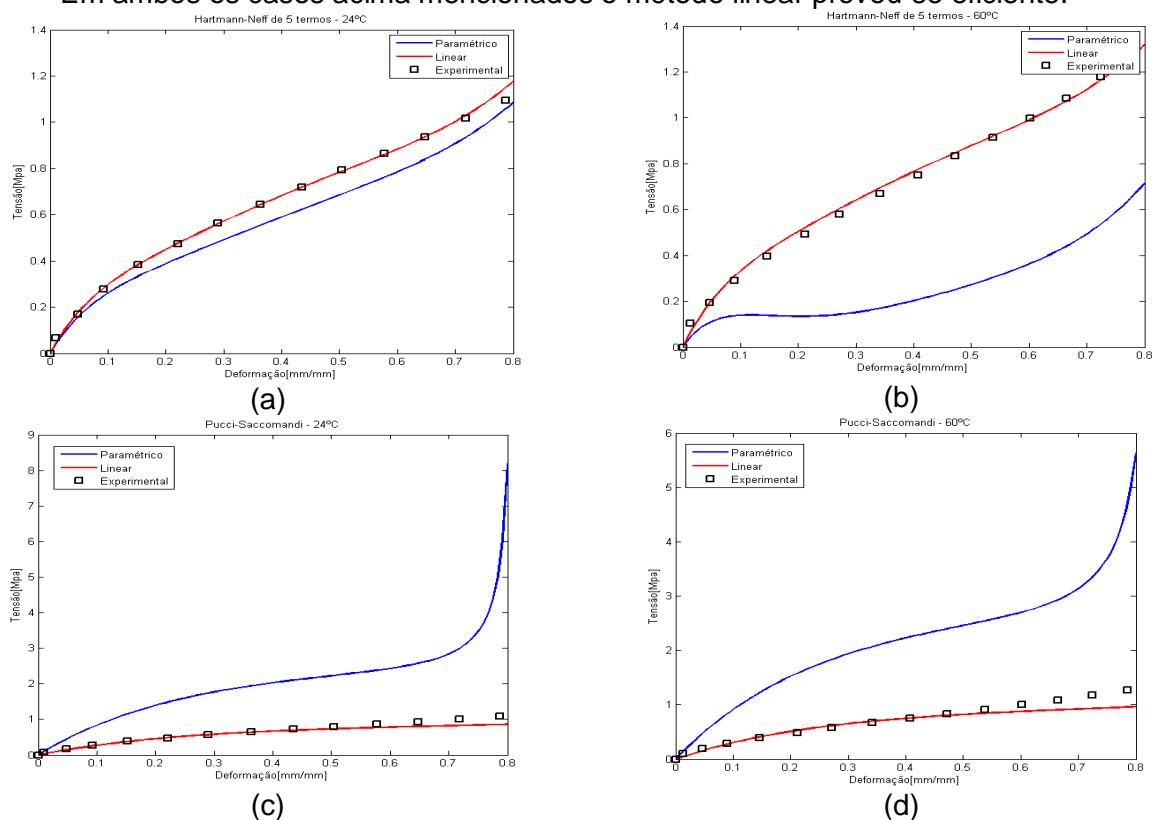


Figura 7.1 – Gráficos Tensão x Deformação, (a) e (b) Hartmann-Neff de cinco termos, 24 e 60°C respectivamente. (c) e (d) Pucci-Saccomandi, 24 e 60°C respectivamente.

O modelo de Mooney-Rivlin testado foi o de cinco termos, inicialmente ambos os métodos obtiveram resultados semelhantes, contudo ao elevar-se a temperatura o método linear obteve um melhor resultado. Na temperatura de referência espera-se que o resultado obtido pelo método linear seja superior ao obtido por parametrização, pois não possui os erros associados às curvas paramétricas. No modelo em questão isso não ocorreu, o modelo paramétrico foi 0.05% superior ao linear, o que, devido a erros computacionais de arredondamento, é insignificante. Calculando o  $R^2$  de ambos os métodos para as temperaturas abrangentes nessa monografia, obteve-se excelentes resultados para ambos, sendo 0.929 o obtido pelo método proposto de parametrização e 0.990 o resultado obtido por linearidade. Entre os resultados calculados neste trabalho, o de Mooney-Rivlin foi o mais discrepante, com 6% de diferença entre os métodos estudados.

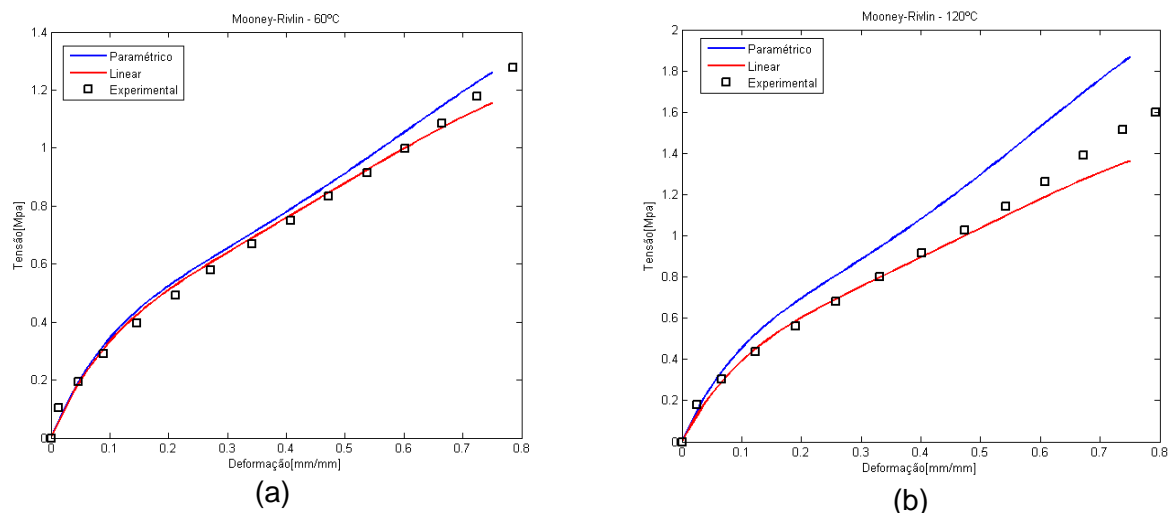


Figura 7.2 – Gráficos Tensão x Deformação, (a) e (b) Mooney-Rivlin de cinco termos, 60 e 120°C respectivamente.

O modelo hiperelástico Neo-Hookeano é um caso particular do modelo de Mooney-Rivlin, sua simplicidade computacional e sua eficácia ao adequar-se ao real comportamento do material elastomérico o torna um modelo muito utilizado. Utilizando o método linear de aproximação de tensão, obteve-se um coeficiente médio de 0.980, muito similar ao obtido pelo método paramétrico, 0.979. Ambos os métodos perderam a acurácia ao elevar-se a temperatura.

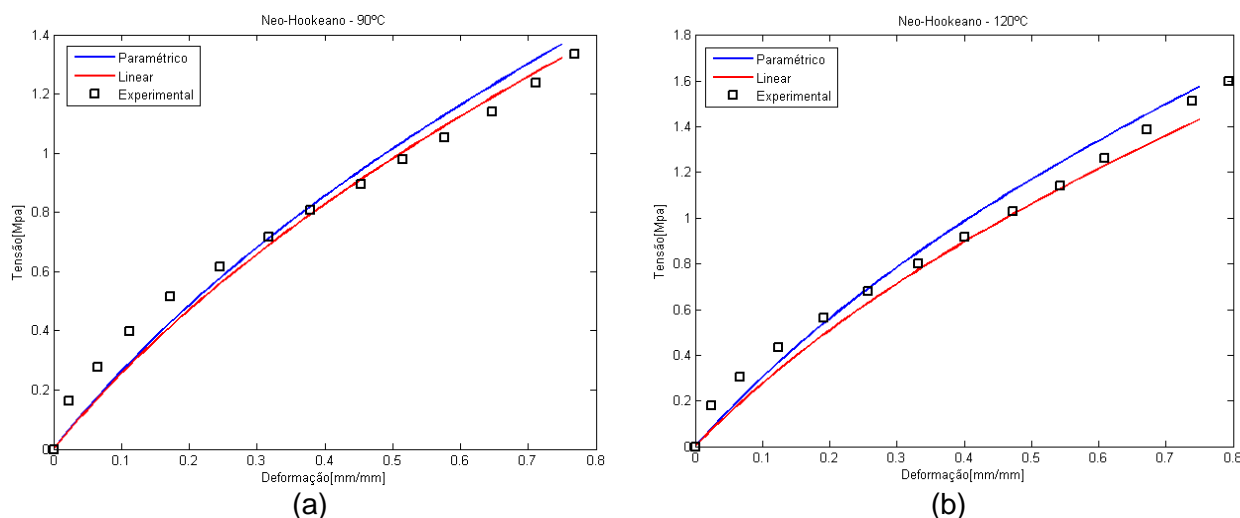


Figura 7.3 – Gráficos Tensão x Deformação, (a) e (b) Neo-Hookeano, 90 e 120°C respectivamente.

O modelo hiperelástico proposto por Gent, assim como o Neo-Hookeano, é baseado apenas no primeiro invariante, o que simplifica o cálculo de (4.5). Obtiveram-se resultados semelhantes ao modelo Neo-Hookeano. Com coeficiente de correlação médio de 0.979 e 0.980, os métodos paramétrico e linear são virtualmente equivalentes, considerando o Neoprene estudado e a relação constitutiva empregada.



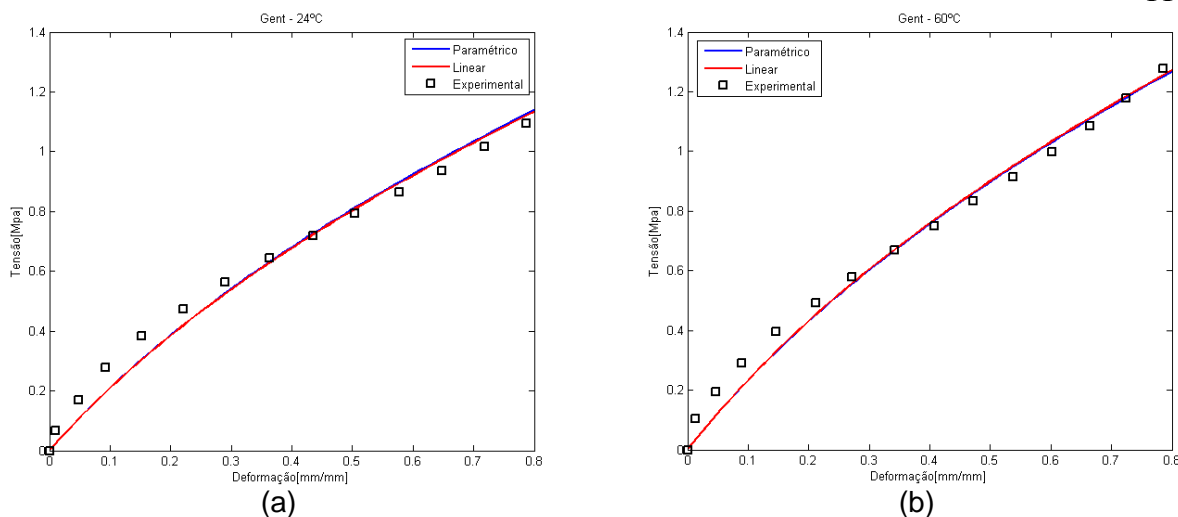


Figura 7.4 – Gráficos Tensão x Deformação, (a) e (b) Gent, 24 e 60°C respectivamente.

Semelhante aos dados obtidos nos modelos hiperelásticos de Gent e Neo-Hookeano, o modelo constitutivo de Edwards-Vilgis obteve a mesma correlação de 0.14% de diferença entre métodos.

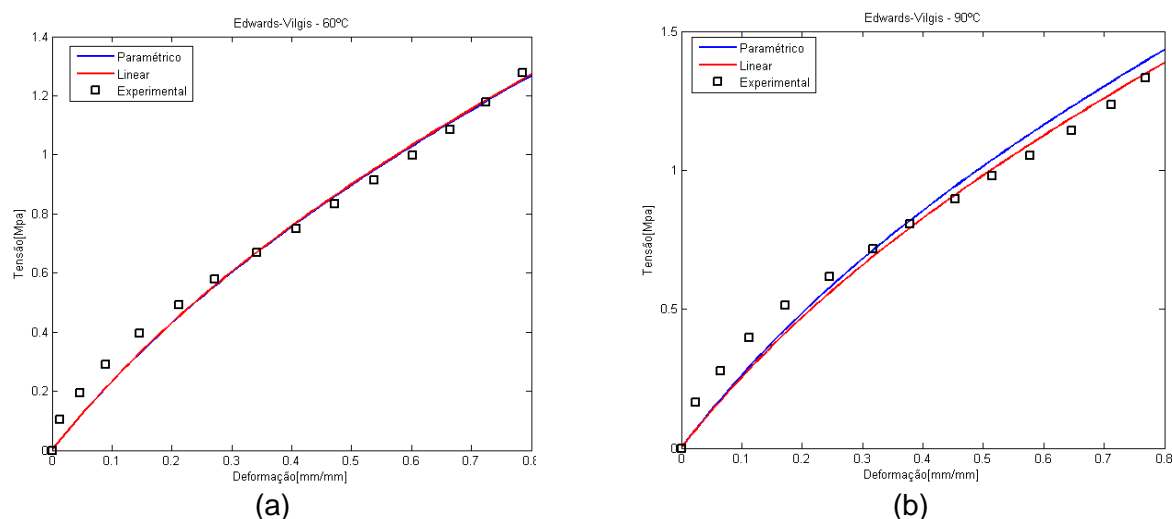


Figura 7.5 – Gráficos Tensão x Deformação, (a) e (b) Edwards-Vilgis, 60 e 90°C respectivamente.

Diferentemente dos outros modelos calculados, o modelo de Yeoh-Fleming possui uma constante termo-dependente com uma parametrização considerada ruim, com coeficiente de correlação 0.15. A constante  $B(t)$  varia pouco e por isso o método paramétrico pode ser aplicado. Com resultados diferentes dos demais casos calculados, o método linear obteve um coeficiente inferior ao obtido pelo método proposto, 0.5%.

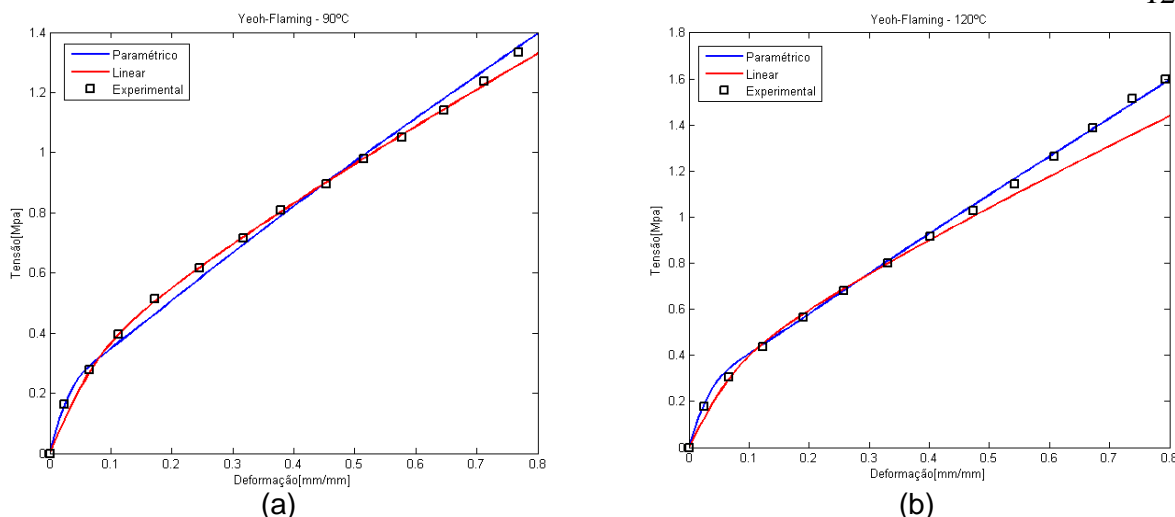


Figura 7.6 – Gráficos Tensão x Deformação, (a) e (b) Yeoh-Fleming, 90 e 120°C respectivamente.

A tabela 7.1 abaixo contém os coeficientes de correlação obtidos para cada método e modelo utilizado, bem como suas respectivas médias. Obteve-se, neste trabalho, um desempenho ligeiramente superior utilizando o método linear, com resultados 1,2% melhores, na média. Ambos os modelos simularam o efeito da temperatura de forma satisfatória, entretanto o modelo proposto falhou criticamente em certos modelos constitutivos.

Tabela 7.1: Coeficientes de correlação calculados e suas médias aritméticas.

R <sup>2</sup>		Mooney-Rivlin de 5 termos	Neo-Hookeano	Gent	Edwards-Vilgis	Yeoh-Fleming	Média
24°C	Paramétrico	0.999251353	0.982231478	0.982240196	0.982225579	0.998865601	0.988962841
	Linear	0.998682129	0.982574297	0.982572525	0.982571833	0.999290154	0.989138188
60°C	Paramétrico	0.989037451	0.986881268	0.986880925	0.986880797	0.995456350	0.989027358
	Linear	0.992528423	0.986802438	0.986801920	0.986799387	0.994177113	0.989421856
90°C	Paramétrico	0.908009739	0.968534498	0.968565177	0.968498759	0.995353300	0.961792295
	Linear	0.996914472	0.974844565	0.974842810	0.974843082	0.997655391	0.983820064
120°C	Paramétrico	0.821382952	0.979789501	0.979802806	0.979666080	0.998827266	0.951893721
	Linear	0.972882151	0.978730705	0.978731831	0.978767476	0.976570751	0.977136583
Média	Paramétrico	0.929420374	0.979359186	0.979372276	0.979317804	0.997125629	<b>0.972919054</b>
	Linear	0.990251794	0.980738001	0.980737271	0.980745445	0.991923353	<b>0.984879173</b>

## 8. CONCLUSÕES

A hiperelasticidade é um fenômeno pouco entendido, e a alteração estrutural causada pela variação térmica possui poucos estudos. O presente trabalho propôs um novo método para incluir a variável temperatura em uma relação constitutiva. O método proposto foi a interpolação de constantes definidas através de soluções computacionais de ensaios físicos a diferentes temperaturas. O método foi comparado ao ajuste linear, que, através de uma relação simples de temperatura desejada e temperatura ensaiada obtém uma relação tensão x deformação dependente da temperatura.

O método linear assume que a energia imposta ao material na forma calorífica, transforma-se em energia de deformação. O modelo proposto visa englobar situações em que

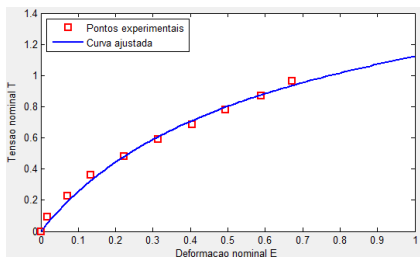
essa energia não é diretamente transformada, como no caso de novos processos de vulcanização, que pode ocorrer a temperaturas de 80°C. Para a borracha de policloropreno utilizada o método linear mostrou-se ligeiramente superior ao método proposto, entretanto, por possuir menor custo experimental e computacional, torna-se desnecessário o uso do método de parametrização.

O presente trabalho conteve-se a um material elastomérico e um ensaio mecânico. Novos testes a diferentes temperaturas e utilizando materiais distintos são necessários para um melhor entendimento do modelo proposto e sua adaptação a temperaturas elevadas.

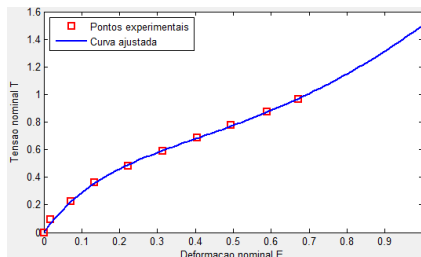
## REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Bergström, J. **“Mechanics of Solid Polymers Theory and Computational Modeling”**, 2015.
- Callister Jr. W. D., Rethwisch, D. G., **“Ciência e Engenharia de Materiais: Uma Introdução”** 5ª ed., 2016.
- Chagnon, G., Verron, E., Gornet, L., Marckmann, G., Charrier, P. **“On the relevance of Continuum Damage Mechanics as applied to the Mullins effect in elastomers”**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 52 (7), pp.1627-1650, 2004.
- Ferry, J. D. **“Viscoelastic Properties of Polymers”** 2nd Edition, 1970.
- Gomes, M M., “Borracha de Policloropreno (CR)”, <http://www.rubberpedia.com>.  
Acessado em 07/05/2019.
- Hoss, L. **“Modelos constitutivos hiperelásticos para elastômeros incompressíveis : ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo”** Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.
- Khajehsaeida, H., Arghavania, J., Naghdabadiab J. **“A hyperelastic constitutive model for rubber-like materials”**, European Journal of Mechanics - A/Solids Volume 38, pp 144-151, 2013.
- Lion, A. **“On The Large Deformation Behaviour Of Reinforced Rubber At Different Temperatures”** Department of Mechanical Engineering, University of Kassel, Germany (1997)
- Marczak R. J., Gheller Jr, J., Hoss, L. **“Caracterização de elastômeros para simulação numérica”**, SENAI-RS, 2006
- Marczak, R. J. **“HyperFit – Programa de calibração de modelos constitutivos para materiais hiperelásticos”** Versão 2.12, 2011
- Martins, P. A. L. S., Natal, J. R. M., Ferreira, A. J. M. **“A Comparative Study of Several Material Models for Prediction of Hyperelastic Properties: Application to Silicone-Rubber and Soft Tissues”** Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2006.
- Morton , M. **“Rubber Technology”**, 3rd Ed. , Van Nostrand Reinold Company : New York , Chapter 12 , 1995.
- Nagdi, K. **“Manuale della Gomma”**, Tecniche Nuove, 1987.
- Treloar, L. R. G. **“The Physics of Rubber Elasticity”**, Oxford University Press, 1975.

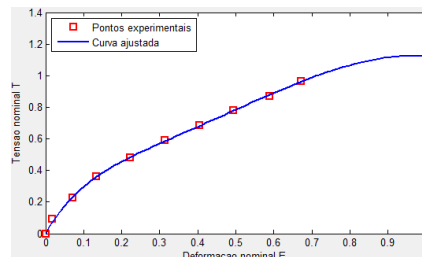
APÊNDICE I – Ajuste de curvas para ensaio de tração uniaxial, 24°C. Modelos hiperelásticos segundo tabela 5.1



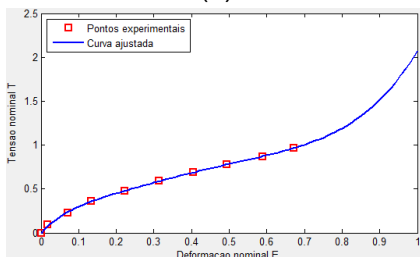
(1)



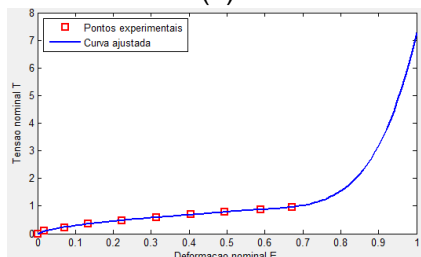
(2)



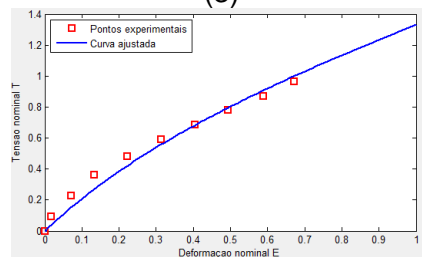
(3)



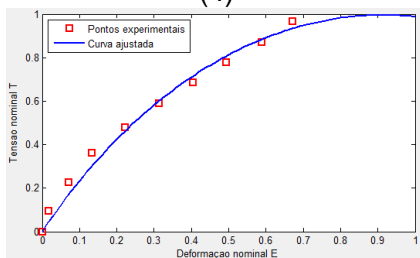
(4)



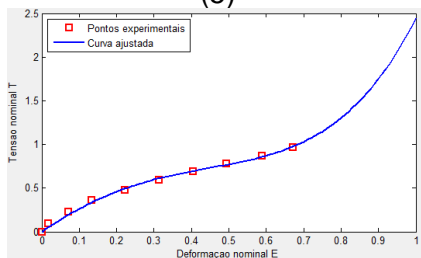
(5)



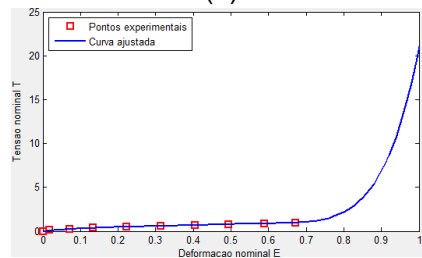
(6)



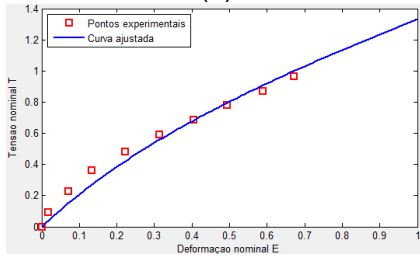
(7)



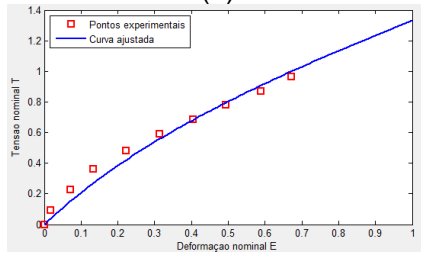
(8)



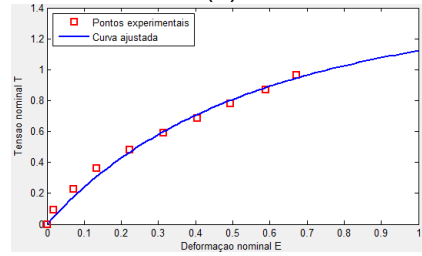
(9)



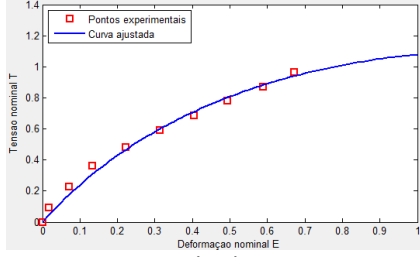
(10)



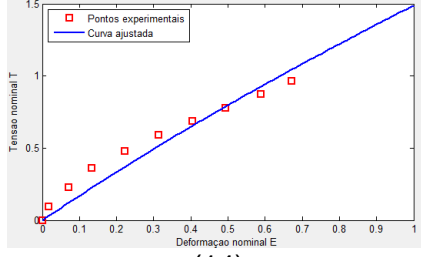
(11)



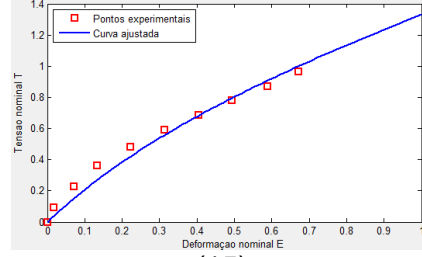
(12)



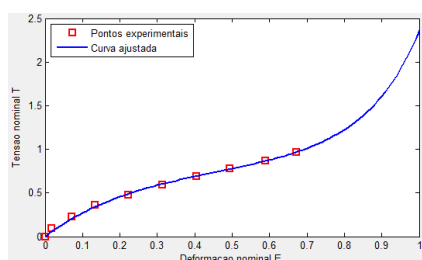
(13)



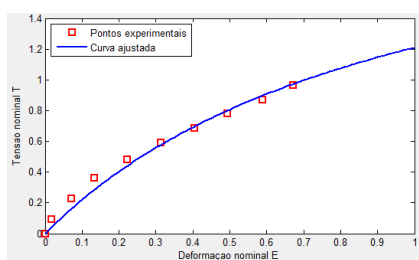
(14)



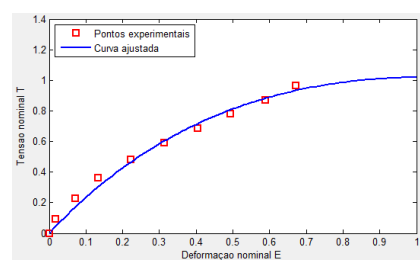
(15)



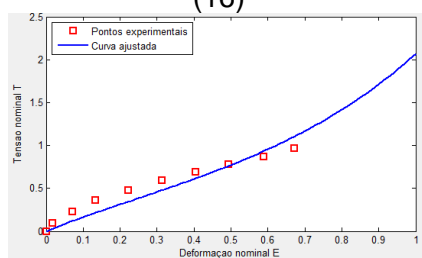
(16)



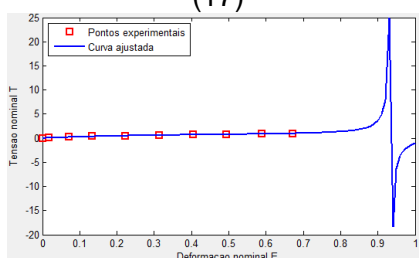
(17)



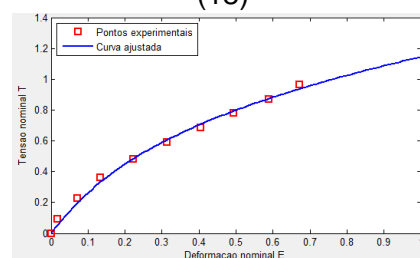
(18)



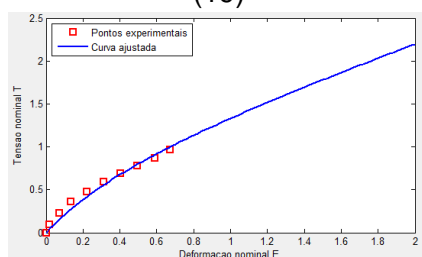
(19)



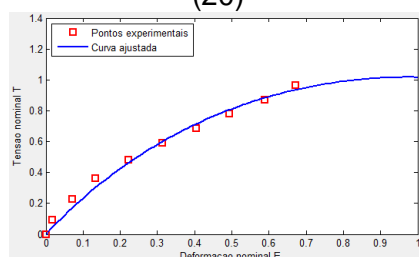
(20)



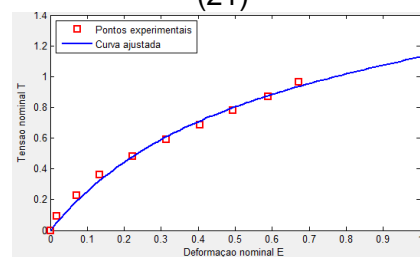
(21)



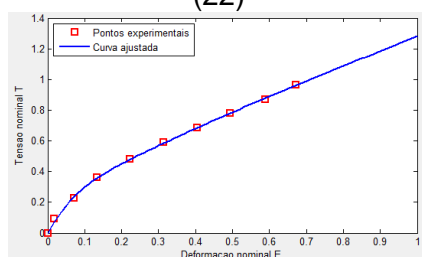
(22)



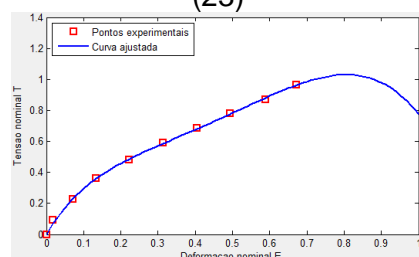
(23)



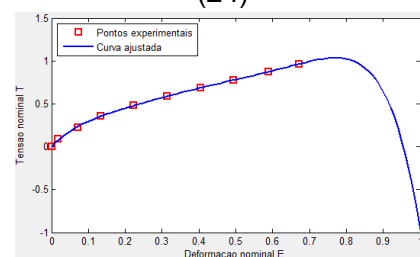
(24)



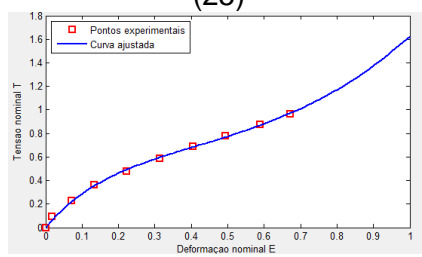
(25)



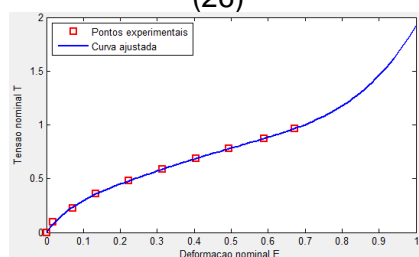
(26)



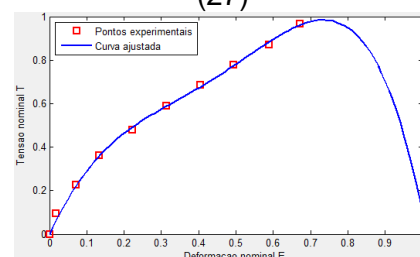
(27)



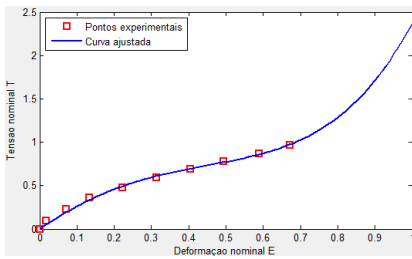
(28)



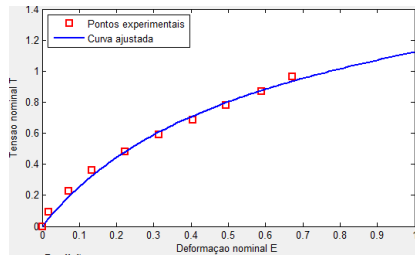
(29)



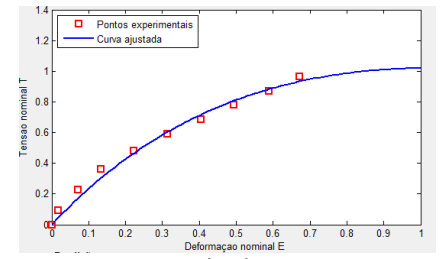
(30)



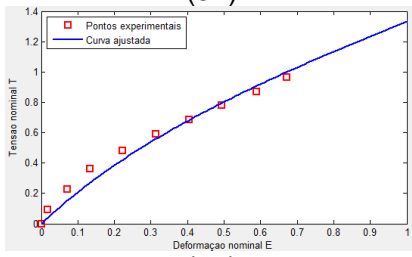
(31)



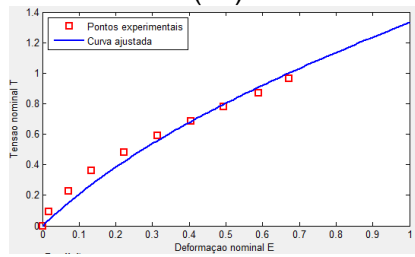
(32)



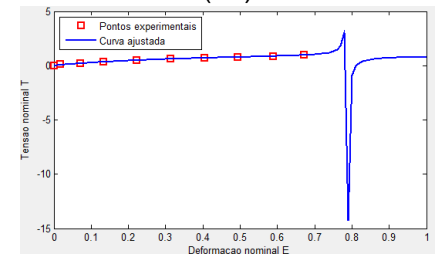
(33)



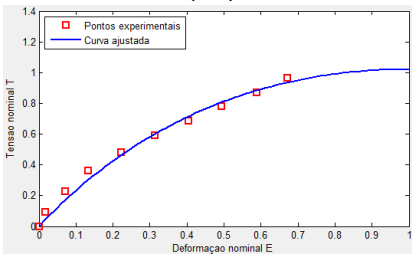
(34)



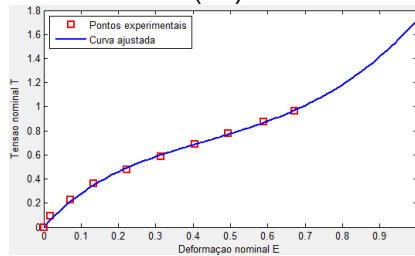
(35)



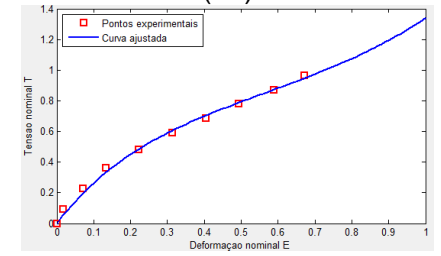
(36)



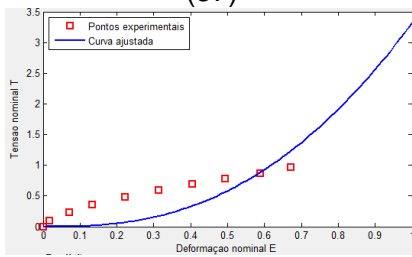
(37)



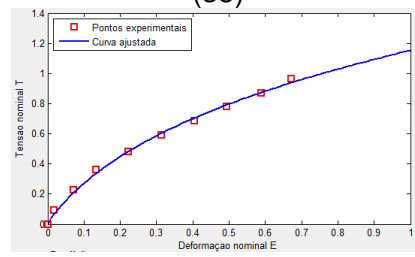
(38)



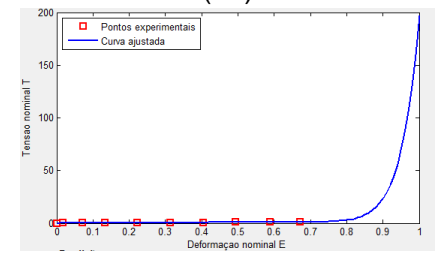
(39)



(40)



(41)



(42)

APÊNDICE II – Coeficiente de correlação dos modelos hiperelásticos

