UNIVERSIDADE FEDERAL

DO RIO GRANDE DO SUL

TESTES NÃO-PARAMETRICOS

UMA ALTERNATIVA PARA ANALISE DE VARIANCIA

A
28/01/85

Visto
28/01/85

ALUNA : MARCIA D'ELIA BRANCO
MATRICULA : 1399/81

ORIENTADORA : Maria Tereza Albanes
SUPERVISOR : Edgar Mario Wagner
AUXILIOS COMPUTACIONAIS : Mario Bernardes Wagner

S U M A R I O

1 - INTRODUÇÃO

O curso de Bacharelado em Estatística da UFGRS é finalizado com um trabalho de conclusão, realizado ao longo do último semestre, que tem ligação direta com o estágio do aluno. O estágio, da autora deste trabalho, foi desenvolvido no setor de Bioestatística, desta Universidade, no qual havia necessidade da criação de programas estatísticos na área não-paramétrica, para serem utilizados no micro-computador.

Não temos conhecimento de que em algum outro local da Universidade encontrem-se programas para o micro-computador nesta área. Os testes mais comuns de serem encontrados são os do campo paramétrico, no qual o setor possui vários programas. Na área não paramétrica, no entanto, tinha-se apenas o teste qui-quadrado, frequentemente utilizado, e o teste de Mann-Whitney.

A utilização do micro-computador como um instrumento para o estatístico ou pesquisador, diariamente tem se tornado mais freqüênte e necessário. A partir do momento em que se decidiu desenvolver os programas com testes não-paramétricos, levou-se em conta sua aplicação em muitos trabalhos que venham utilizar esta técnica.

Entre os testes não-paramétricos existentes foram escolhidos para este trabalho a apresentação dos testes de Kruskal-Wallis e de Friedman. Estes dois testes são substitutos do teste F da Análise de Variância clássica para comparações de mais de duas populações, quando as suposições destas não são satisfeitas. O teste de Kruskal-Wallis é aplicado quando se tem um Delineamento Experimental Completamente Casualizado (amostras independentes) e o teste de Friedman em um Delineamento Experimental em Blocos Casualizado (amostras dependentes).

Muitas vezes os testes paramétricos são utilizados de maneira indevida pela falta de informações que ainda existe sobre os testes não-paramétricos. Este trabalho visa apresentar a idéia básica de cada um dos testes, bem como suas suposições e aplicações.

2- AS PROVAS NÃO-PARAMÉTRICAS

A conhecida Análise de Variância, utilizada para comparação de várias populações, é uma análise paramétrica que usa o teste F de Snedecor. Neste tipo de análise, as hipóteses a serem testadas fazem referência as médias populacionais, ou seja:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_K$
$H_1 : \mu_i \neq \mu_j$, para pelo menos um (i, j), tal que $i \neq j$ onde K é o número de populações.

O teste F é montado sobre a suposição de que as distribuições de probabilidade das variáveis são conhecidas e normalmente distribuidas. Isto é, supõe que cada amostra provêm de uma população normal com média μ_i e σ^2 . Quando tal condição não é satisfeita, os testes paramétricos não são aconselháveis.

Uma das alternativas para solucionar este problema de não-normalidade é fazer uma Transformação de dados. Por exemplo, usando a função logaritmica ou raiz quadrada, consegue-se, em alguns casos, controlar este problema.

A outra alternativa é adotar uma análise não-paramétrica dos dados. Esta análise é feita através de testes que não fazem suposições sobre a distribuição de probabilidade dos dados. O uso de testes não-paramétricos tem validade quando não se pode usar os paramétricos, no entanto, quando as suposições paramétricas estão satisfeitas, estes tem preferência pois são mais poderosos.

A seguir vamos apresentar vantagens e desvantagens da utilização dos testes não-paramétricos.

VANTAGENS

- Independem da distribuição de probabilidade populacional da qual a amostra foi obtida;
- Dispensam a normalidade dos dados;
- São mais faceis de serem utilizados ;
- Aplicam-se a dados em escala ordinal, e alguns testes até mesmo para dados em escala nominal;
- Em geral as probabilidades são exatas, salvo quando usam-se aproximações;
- Como dependem de poucas suposições, a chance de serem incorretamente usados é menor.

DESVANTAGENS

- Não levam em consideração a magnitude dos dados, provocando desperdicio de informações, em alguns casos;
- Quando as exigências dos testes paramétricos são satisfeitas, os não paramétricos são menos eficientes.

3 - TESTE DE KRUSKAL-WALLIS

3.1- A ESTATISTICA DE KRUSKAL-WALLIS

O teste de Kruskal-Wallis foi introduzido por seus autores em 1952, como um substituto do teste F da Análise de Variância. Este teste tem por finalidade verificar se K amostras independentes são provinientes de populações idênticas ou distintas. No caso particular de duas amostras (K=2) ele corresponde ao teste de Mann-Whitney.

Quando comparado com o teste da Mediana para K amostras, que tem praticamente a mesma finalidade, o teste de K-W se mostra mais eficiente. O teste da Mediana compara cada valor amostral somente com um valor, a mediana dos dados; ao passo que K-W leva em conta a comparação de cada valor com todos os outros.

Vamos desenvolver a seguir alguns passos para se chegar a estatística do teste de Kruskal-Wallis.

Define-se como

K - o numero de amostras
n_i - o tamanho da i-ésima amostra
$N = \sum n_i$, para $i=1,2,\ldots,K$
α - como o nivel mínimo de significância

Sobre a hipótese de que não há diferença significativa entre as populações, considera-se que todas as amostras são provinientes de uma mesma população. Temos então, uma única amostra de tamanho N. Dispondo estas observações numa ordem crescente e atribuindo valores de 1 a N a cada observação, assinalando a qual amostra pertence o valor, temos o que se chama posto. Isto é, o menor valor receberá o posto 1, e assim por diante, até que o maior valor receba o posto N.

Sobre a hipótese de que esta amostra de N elementos é aleatória, a soma dos postos em cada i-ésima amostra não deve ser diferente, a não ser por causa do tamanho da amostra.

Temos que

$\Sigma\ i = N(N+1)/2$ é a soma de todos os postos atribuidos as K amostras.

Então,

$(ni/N).(N(N+1)/2) = (ni(N+1))/2$ é a soma esperada dos postos para a i-ésima amostra.

O teste estatístico de K-W baseia-se na função dos desvios entre o valor encontrado como soma dos postos e o valor esperado para esta soma.

Considera-se Ri, o valor encontrado pela soma dos postos da i-ésima amostra. Então, utilizando o quadrado dos desvios, temos

$$s = \Sigma\ (Ri - (ni(N+1))/2)^2$$

Como o critério do teste de K-W é uma ponderação das somas dos quadrados dos desvios pelo inverso dos respectivos tamanhos de amostras ponderados, resulta que, a estatística de K-W é dada por

$$H = 12/(N(N+1))\ \Sigma\ 1/ni\ (Ri - ni(N+1)/2)^2$$

As probabilidades exatas de H estão tabuladas para K=3 e para ni<=6.

Rejeita-se a igualdade entre populações quando o valor da estatística H é maior ou igual ao valor tabelado, para valores de K, n1,...,nK e α . Para valores não tabulados usa-se o critério de aproximação que será apresentado a seguir.

Os ni postos da amostra i são aleatoriamente selecionados da população dos primeiros N números inteiros, considerando a hipótese de igualdade entre as populações. Eles constituem uma amostra aleatória de tamanho ni, extraídos sem reposição de uma população finita. A média e a variância desta população são

$$\mu = \Sigma\ i\ /N = (N+1)/2$$

$$\sigma^2 = \Sigma\ (\ i - (N+1)/2\ )^2/\ N = (N^2 - 1)/2$$

Sendo, $\bar{R}i = Ri/ni$, prova-se que:

$$E(\bar{R}i) = \mu \quad e \quad Var(\bar{R}i) = \sigma^2\ ((N-ni))/(ni(N-1))$$

Então

$$E(\bar{R}i) = (N+1)/2 \quad e \quad Var(\bar{R}i) = ((N+1)(N-ni))/(12ni)$$

para i=1,2,...,K

Como $\bar{R}i$ é uma média amostral, pelo Teorema do Limite Central, usa-se a aproximação da distribuição Normal padronizada.

$$Zi = \frac{\bar{R}i - (N+1)/2}{(N+1)(N-ni))/12ni} \quad , \text{ para } i=1,2,\ldots,K$$

Conseqüentemente Zi^2 tem distribuição aproximadamente qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Mas os Zi são evidentemente variáveis aleatórias dependentes, pois $\Sigma\, niRi = N(N+1)/2$ é uma constante. Assim para valores não muito pequenos de ni temos

$$\Sigma\ (N-ni)/N\ Zi^2 = \Sigma \frac{12ni(Ri - (N+1)/2)^2}{N(N+1)} = H \qquad (*)$$

Onde H tem distribuição aproximadamente qui-quadrado com K-1 graus de liberdade.

Desenvolvendo (*), chega-se a uma forma mais simples para cálculo de H dada por

$$H = 12/(N(N+1)) \quad \Sigma\ Ri^2/ni \quad - \quad 3(N+1)$$

Rejeita-se a igualdade entre as populações, quando o valor de H for maior ou igual ao valor dado na tabela qui-quadrado com K-1 graus de liberdade e um nivel de significância α .

3.2- SUPOSIÇÕES DE TESTE

O teste de Kruskal-Wallis, como já foi dito anteriormente, é usado quando se tem mais de duas populações (tratamentos) a serem comparados. Entretanto, algumas condições para seu uso devem ser atendidas, tais como

- Os dados devem estar no mínimo em escala ordinal;
- As observações devem ser independentes dentro e entre as amostras;
- A variável de interesse deve ser contínua;
- As K populações (tratamentos) são aproximadamente da mesma forma;
- Dentro de cada amostra as observações devem ser provinientes de uma mesma população.

3.3- PROCEDIMENTO

A) Definição das Hipóteses do Teste

Sendo F_i a função de distribuição de probabilidade da i-ésima população, temos

H_o : $F_1=F_2=.....=F_K$
H_1 : $F_i \neq F_j$, para pelo menos um (i,j), dado $i \neq j$

Ou então

H_o : Não existe diferença entre os K tratamentos.
H_1 : Pelo menos dois tratamentos diferem entre si.

B) Escolha do Nivel Minimo de Significância

Antes de se realizar o teste é importante ter definido qual será o nosso nivel mínimo de significância (α). Alguns trabalhos exigem um α mais rigoroso (α pequeno), enquanto outros não são tão exigentes (α grande). Isso vai depender do tipo de dado que se está analisando e dos objetivos do trabalho.

O nivel mínimo de significância α é definido como

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_o / H_o \text{ verdadeira})$$

C) Cálculo da Estatística H

Define-se como R_{ij} um valor dentro do conjunto dos primeiros N números inteiros que está relacionado com o elemento j da amostra i; de tal forma que $R_{ij}=1$ e atribuído ao menor de todos os valores observados e $R_{ij}=N$ ao maior de todos.

Após a atribuição dos postos (R_{ij}) soma-se os postos dentro de uma mesma amostra obtendo-se os R_is e calcula-se a estatística H, dada por

$$H = 12/(N(N+1)) \sum R_i^2/n_i - 3(N+1)$$

Onde

$N = \sum n_i$
$R_i = \sum R_{ij}$, para $j=1,....,n_i$
n_i , e o tamanho da i-ésima amostra.

D) Valores Empatados

No caso de se ter dois ou mais valores iguais, não se pode definir quem terá um posto maior ou menor. Neste caso usa-se como posto para os valores a média dos postos que seriam utilizados para estes valores. Alem disso usa-se uma correção para empates na estatística H , dada por

$C = 1 - \Sigma T / (N^3 - N)$, onde

$T = t^3 - t$

$N = \Sigma ni$, para $i=1,\ldots,K$

t , é o número de observações empatadas em um grupo de valores empatados.

Segue-se então que a estatística H corrigida é dada por

$H^* = H/C$

A função desta correção para empates é aumentar o valor da estatística H. Logo, se com a estatística sem correção a hipótese nula já havia sido rejeitada, a sua utilização é desnecessária; pois com mais forte razão será rejeitada.

E) Região de Rejeição

Quando temos K=3 para nenhum ni>6, utiliza-se os valores tabelados da tabela H de Kruskal-Wallis, em anexo na Tabela 3 .

Se H >= Htabelado então rejeita-se Ho, isto é, existe diferença entre os tratamentos a um nivel α de significância.

Para grandes amostras (valores não tabelados), usa-se a aproximacão da distribuição qui-quadrado com K-1 graus de Liberdade.

Se $H >= \chi^2_\alpha$ então rejeita-se Ho, isto é, a um nivel α de significância existe diferença significativa entre os tratamentos.

Após rejeitar-se Ho, temos apenas a informação de que existe diferença significativa entre pelo menos dois tratamentos. Neste momento, interessa verificar quais tratamentos são significativamente diferentes entre si e quais não são.

A função das Comparações Múltiplas, que serão vistas a seguir, é justamente continuar a análise feita pelo teste de Kruskal-Wallis e detectar onde se encontram estas diferenças.

3.4- COMPARAÇÕES MULTIPLAS

Não nos deteremos muito nesto item, pois ele requereria particular atenção para ser desenvolvido adequadamente. Vamos apresentar, nesto trabalho, apenas as técnicas de comparações múltiplas envolvendo todos os pares de tratamentos, sem fazer uma análise maior dos seus fundamentos teóricos.

Para alguns tamanhos de amostras temos valores exatos para comparação, dados em tabela, mas em outros casos utiliza-se aproximações. Veremos a seguir alguns casos.

A) Amostra Pequenas

A.1- Os tamanhos de amostras são todos iguais - (n1=n2=....=nK)

Calcula-se a diferença em módulo entre as somas dos postos das amostras duas a duas, assim

$|Ri - Rj|$, dado $i \neq j$

Este valor é comparado com o valor de diferença mínima significativa (Λ) dado pela Tabela 4 , para certos valores de α ,K e n.

Se $|Ri-Rj| >= \Lambda$ então existe diferença significativa entre o tratamento i e o tratamento j, a um nivel α de significância.

A.2- Os tamanhos das amostras não são todos iguais -

Calcula-se a diferença em módulo da média dos postos das amostras duas a duas, assim

$|Ri-Rj|$, dado $i \neq j$

Este valor é comparado com o valor de diferença mínima significativa (DMS) dado a seguir

$$DMS = \sqrt{(N(N+1))/12\ (1/ni + 1/nj)\ H}$$

onde H é o valor tabelado da estatística de K-W, tirado do teste global.

Se $|Ri-Rj| >= DMS$ então existe diferença significativa entre o tratamento i e o tratamento j, a um nivel α de significância.

B) Amostras Grandes

B.1- Os tamanhos de amostras são todos iguais -
($n1=n2=....=nK$)

Determina-se a estatística DMS dada por

$$DMS = Q \sqrt{(K(N+1))/12}$$

onde Q é dado pela Tabela 5 , para certos valores de α e K .

Se $|Ri-Rj| >= DMS$ então existe diferença significativa entre o tratamento i e o tratamento j, a um nível α de significância.

B.2- Os tamanhos de amostras não são todos iguais -

Determina-se a estatística DMS, dada por:

$$DMS = Z_{(\alpha/K(K+1))} \cdot \sqrt{(N(N+1))/12 \ (1/ni + 1/nj)}$$

onde $Z_{(\alpha/K(K+1))}$ é o limite superior da distribuição N(0,1).

Se $|Ri-Rj| >= DMS$ então existe diferença significativa entre o tratamento i e o tratamento j, a um nivel α de significância.

3.5- EXEMPLO

Os candidatos ao curso de pós-graduação em Administração, normalmente, optam por uma área específica antes de realizarem os testes de seleção. Os candidatos ficam, assim, agrupados nas seguintes áreas: Tecnologia Operacional, Recursos Humanos, Finanças e Marketing.

Entre os testes realizados (cinco testes) está incluido o de Aptidão Quantitativa, sobre o qual desejamos verificar se as notas nele obtidas são significativamente diferente para os candidatos das diferentes áreas. No caso de ocorrer diferença entre as áreas, deseja-se saber ainda, quais áreas apresentam candidatos com maior aptidão quantitativa.

Através de uma amostra aleatória, vamos verificar os interesses apresesentados acima.

Análise Estatística

A) Hipóteses

Ho : Não existe diferença entre as áreas, em relação `a aptidão quantitativa.

H1 : Pelo menos duas áreas apresentam diferença significativa.

B) Nivel de Significância

Vamos utilizar o nivel mínimo de significância usual de 5% (α =0.05)

C) Teste Estatístico

Como temos amostras pequenas e independentes, vamos utilizar o teste de Kruskal-Wallis, para os valores dados a seguir.

TESTE DE APTIDÃO QUANTITATIVA

Repetições	T. O.	R. H.	Fin.	Mark.
1	29 (22)	15 (6.5)	30 (23)	20 (13)
2	15 (6.5)	16 (10)	23 (19)	22 (18)
3	21 (16)	15 (6.5)	25 (21)	21 (16)
4	21 (16)	10 (01)	15 (6.5)	15 (6.5)
5	20 (13)	11 (02)	24 (20)	12 (03)
6	20 (13)	-	15 (6.5)	-
7	-	-	18 (11)	-

Os valores entre ( ) correspondem aos postos dos respectivos valores.

Fazendo a soma destes postos, temos

R1 = 86.5   R2 = 26.0   R3 = 107.0   R4 = 56.5

Calcula-se então a estatística H de K-W, da seguinte maneira

$H = 12/(N(N+1)) \Sigma Ri^2/ni \quad - 3(N+1)$

$H = 12/(23(24)) (86.5 /6 + 26 /5 + 107 /7 + 56.5 /5) - 3(24)$
$H = 7.64643$

Comparamos H com o valor de qui-quadrado, com 3 graus de liberdade, dado pela tabela 2, que e 7.81.

D) Conclusão

Rejeita-se Ho, Logo, não podemos afirmar, a um nível de 5% de significância, que as diferentes áreas são distintas quanto à nota no teste de Aptidão Quantitativa.

4- TESTE DE FRIEDMAN

4.1- A ESTATISTICA DE FRIEDMAN

O teste de Friedman tem por finalidade verificar se K amostras dependentes são provinientes de populacões idênticas ou distintas, sendo um substituto do teste F da Análise de Variância.

Suponha que os valores amostrais encontram-se distribuídos em K Linhas e n colunas. Cada Linha indica um bloco (ou repetição) ao qual foram aplicados K tratamentos (ou amostras) indicados pelas colunas.

As observações dos diferentes blocos são independentes, mas os diferentes tratamentos não são, pois as unidades de um mesmo bloco tem uma relação em comum. Esta é a idéia do Delineamento Experimental em Blocos Casualizado (DBC).

O teste de Friedman substitui cada valor observado dentro do i-ésimo bloco por um valor (posto) de 1 a K, onde K e o número de tratamentos. De maneira que o valor 1 (Rij=1) seja atribuido ao menor valor dentro do bloco, e assim por diante, até que o valor K (Rij=K) seja atribuido ao maior valor dentro do bloco.

Se Rij corresponde ao posto atribuído ao elemento da i-ésima amostra e do bloco j, onde i=1,2,....,K e j=1,2,....,n , entao R.1, R.2,....,R.n são as somas dos primeiros K números inteiros e R1,R2,....,RK são as somas dos postos dados ao tratamento i em todos os blocos. Portanto, os totais das Linhas são constantes, mas os totais das colunas são efetados pelas diferenças entre os tratamentos.

Se não existir nenhum efeito de tratamento, isto é, as populações podem ser consideradas iguais, então os totais das colunas são todos iguais, e dados por

$$(n(K+1))/2$$

Este teste baseia-se no quadrado dos desvios entre as somas reais das colunas e os valores esperados, sobre a hipótese de igualdade entre populações, sendo a estatística de Friedman definida por

$$F = 12/(nK(K+1)) \; \Sigma (Ri - (n(K+1))/2)^2$$

Rejeita-se a hipótese de igualdade entre os tratamentos (populações) para grandes valores de F.

As probabilidades exatas de F estão tabeladas para k=3 com n<=15 e K=4 com n<=5. Para valores não tabelados usa-se o critério de aproximação. Gibbons(1971) apresenta a demonstração de que a estatística F aproxima-se de uma distribuição de probabilidade qui-quadrado com K-1 graus de liberdade.

A estatística F é mais facilmente calculada pela fórmula dada a seguir, que é algebricamente equivalente a anterior.

$$F = 12/(Kn(K+1)) \; \Sigma Ri^2 - 3n(K+1)$$

Como F aproxima-se de uma qui-quadrado com K-1 graus de liberdade para dado α, rejeita-se a hipótese de igualdade entre populações quando

$$F >= \chi^2_\alpha$$

4.2- SUPOSIÇÕES DO TESTE

O teste de Friedman serve para comparações entre diferentes populações (K>2), quando existe dependencia entre as amostras, isto implica que todos os tamanhos de amostras sejem iguais. Porem algumas suposições para o seu uso devem ser atendidas, tais como

- Os n grupos (blocos) de K observações devem ser independentes entre si;
- As K populações devem ser aproximadamente da mesma forma;
- A variável de interesse deve ser contínua, senão o teste é apenas aproximado;
- Os dados devem estar pelo menos em escala ordinal.

4.3- PROCEDIMENTO

A) Definição das Hipóteses do Teste

Sendo Fi a função de distribuição de probabilidade da i-ésima população, para i=1,2,....,K , temos

H_0 : $F1=F2=....=FK$
H_1 : $Fi \neq Fj$, para pelo menos um (i, j) , dado $i \neq j$

Ou então

H_0 : Não existe diferença entre os K tratamentos.
H_1 : Pelo menos dois tratamentos diferem entre si.

B) Escolha do Nivel Mínimo de Significância

A escolha do nivel mínimo de significância α , deve ser orientada pelas mesmas considerações feitas em 3.3, item B.

C) Calculo da Estatística F

Define-se como Rij o valor do posto atribuído ao elemento j da amostra i. Este posto é atribuido de maneira que os valores sejam ordenados dentro de cada bloco. Os valores de Rij variam de 1 a K.

Após a atribuição de postos a todos os valores, soma-se os postos obtidos dentro de cada amostra, obtendo-se os Ris, e calcula-se a estatística F dada por

$$F = 12/(nK(K+1)) \sum Ri^2 - 3n(K+1)$$

onde n é o número de elementos de cada amostra e K é o número de amostras (tratamentos).

D) Valores Empatados

No caso de se ter duas ou mais observações iguais dentro do mesmo bloco, utiliza-se como posto para estas observações a média dos postos que seriam dados a estes valores. Além disso usa-se uma correção para a estatística F, dada por

$$C = 1 - \frac{\sum Ti}{nK(K^2-1)}$$

onde $Ti = \sum t_{ih}^3 - K$ e t_{ih} é o número de observações empatadas na amostra i.

Segue-se então que, a estatística F corrigida é dada por

$$F^* = F/C$$

E) Região de Rejeição

Para valores previstos na Tabela 6, para certos valores de K, n e α , utiliza-se estes valores para comparação.

Se $F >= \chi^2_r$ então rejeita-se Ho, isto é, os tratamentos diferem entre si a um nivel α de significância.

No caso de grandes amostras (valores nao tabelados) usa-se a aproximação qui-quadrado com K-1 graus de Liberdade.

Se $F >= \chi^2_\alpha$ então rejeita-se Ho, isto é, a um nivel de significância α , aceita-se a diferenca entre tratamentos.

Após a rejeição da hipótese nula utiliza-se as Comparações Múltiplas para detectar onde estão estas diferenças previstas pelo teste de Friedman. ALgumas destas comparações serão apresentadas a seguir.

4.4- COMPARAÇÕES MULTIPLAS

Convem novamente salientar que esse trabalho não tem por objetivo um estudo mais profundo sobre Comparações Múltiplas, em função disso vamos apenas expor algumas técnicas para comparações envolvendo todos os pares de tratamentos.

Para alguns valores de K e n, temos probabilidades exatas calculadas e tabeladas, mas quando as amostras são ditas grandes, utiliza-se aproximações. Veremos a seguir como se procede em cada caso.

A) Amostras Pequenas

Considera-se a diferença em módulo entre as somas dos postos das amostras duas a duas, assim

$|Ri-Rj|$ dado $i \neq j$

Este valor comparado com o valor de diferença mínima significativa (Δ_1) dado na Tabela 4 , para valores de K,n e α.

Se $|Ri-Rj| >= \Delta_1$ então os tratamentos i e j diferenciam-se entre si, a um nivel α de significância.

B) Amostras Grandes

Considera-se como o valor de comparação com as diferenças entre as somas de postos, o valor de DMS dado a seguir

$DMS = Q \cdot \sqrt{(nK(K+1))/12}$
onde Q é o valor tabelado dado pela Tabela 5 para valores de K e α .

Se $|Ri-Rj| >= DMS$ então os tratamentos i e j, a um nivel α de significância, diferem entre si.

4.5- EXEMPLO

Este exemplo se refere a mesma população do examplo anterior de K-W, os candidatos a pós-graduação em Administração.

O objetivo, agora, é saber se os candidatos que optam pela área de Recursos Humanos, tem melhor conhecimento em alguma das áreas testadas, ou se não existe diferença entre os testes. Sabemos que foram realizados quatro testes, a saber: Raciocínio Lógico (R.L.), Aptidão Quantitativa (A.Q.), Habilidade Verbal (H.V.) e Inglês (I.).

Análise Estatística

A) Hipóteses

Ho : Não existe diferença entre os testes
H1 : Pelo menos dois testes diferenciam-se entre si.

B) Nivel de Significância

Vamos escolher o nivel mínimo de significância usual de 5%.

C) Teste Estatístico

Como temos amostras pequenas e, naturalmente, dependentes (diferentes testes aplicados à mesma pessoa, podendo-se compará-las a blocos), vamos utilizar o teste de Friedman, para os valores dados a seguir.

AREA DE RECUSOS HUMANOS

Candidato	R.L.	A.Q.	H.V.	I.
1	23 (2)	15 (1)	28 (3)	43 (4)
2	23 (3)	16 (1)	29 (4)	20 (2)
3	17 (2.5)	15 (1)	18 (4)	17 (2.5)
4	15 (3)	10 (1)	19 (4)	11 (2)
5	17 (4)	11 (1.5)	15 (3)	11 (1.5)

Os valores entre ( ) correspondem aos postos dos respectivos valores.

Fazendo a soma destes postos, para cada teste, temos

$R1 = 14.5 \quad R2 = 5.5 \quad R3 = 18 \quad R4 = 12$

Calcula-se então a estatística F de Friedman, dada a seguir

$$F = 12/(nK(K+1)) \sum Ri^2 - 3n(K+1)$$

$$F = 12/((5)(4)(5)) (14.5 + 5.5 + 18 + 12) - (3)(5)(5)$$
$$F = 10.5105$$

Comparamos F com o valor tabelado, dado pela Tabela 6, para $K=4$ e $n=5$. Como não se tem um valor na tabela para um $\alpha = 0.05$, utiliza-se o mais próximo que é $\alpha = 0.055$, que tem um valor correspondente de 7.32.

D) Conclusão

Rejeita-se Ho, logo, a um nivel de 55% de confiança não aceitamos a igualdade entre os testes. Isso nos faz optar pelas Comparações Múltiplas, a fim de obtermos uma conclusão mais precisa.

Fazendo a diferença entre postos, temos

$$|R1-R2| = |14.5 - 5.5| = 9.0$$
$$|R1-R3| = |14.5 - 18| = 3.5$$
$$|R1-R4| = |14.5 - 12| = 2.5$$
$$|R2-R3| = |5.5 - 18| = 12.5$$
$$|R2-R4| = |5.5 - 12| = 6.5$$
$$|R3-R4| = |18 - 12| = 6.0$$

Como $\Delta_1 = 11$, para $K=4$ e $n=5$, com um nivel mínimo de significância $\alpha = 0.037$, o único valor significativo é o da comparação das amostras 2 e 3 (A.Q. e H.V.).

Com isso concluímos que, os candidatos à área de Recursos Humanos tem melhor habilidade verbal que aptidão quantitativa. Sobre os outos testes nao podemos verificar nenhuma diferença significativa.

5 - OS PROGRAMAS NO MICRO-COMPUTADOR

Foram desenvolvidos dois programas para o micro-computador em Linguagem BASIC no Sistema Operacional CP/M (Control Program / Monitor). Estes programas estão arquivados em disco com os nomes de "K-W.MIA" e "TFRI.MIA", que contem, respectivamente, os testes de Kruskal-Wallis e de Friedman; os dois complementados pelas técnicas de Comparações Múltiplas.

A melhor maneira do usúario aprender a lidar com os programas é vendo como ele funciona, por isso, resolveu-se ilustrar com exemplos cada etapa da estrutura do programa, como apresentaremos a seguir.

A) Entrada de Dados

A.1 - Informações iniciais -

```
                 TESTE DE FRIEDMAN

UM TESTE NAO PARAMETRICO PARA K AMOSTRAS INDEPENDENTES

NUMERO DE AMOSTRAS = NUMERO DE TRATAMENTOS

QUANTAS AMOSTRAS?
 4
TAMANHO DAS AMOSTRAS = NUMERO DE BLOCOS

TAMANHO DAS AMOSTRAS?
 5
```

A.2 - Tabela de dados

Em ambos os programas surge no video uma tabela que será preenchida pelos valores do usuário. As colunas estão relacionadas com as diferentes amostras (A - i), enquanto que nas linhas temos as diferentes repetições.

TESTE DE FRIEDMAN

A - 1	A - 2	A - 3	A - 4
23.00	15.00	28.00	43.00
23.00	16.00	29.00	20.00
17.00	15.00	18.00	17.00
15.00	10.00	19.00	11.00
17.00	11.00	15.00	11.00

A.3 - Correção nos dados

Depois da tabela completa, surge no video a pergunta - "Existe algum erro?". No caso de termos inserido algum valor incorretamente, surge a alternativa de substituí-lo. Respondendo sim (2) a pegunta acima, aparece na tela as seguintes questões:

-"Qual amostra?" -"Qual posição?"
-"Novo valor?"

Após respondê-las, o novo valor é colocado no lugar do antigo e a pergunta -"Existe algum erro?" é refeita. No caso de não se ter problemas nos dados, responde-se não (1) a questão e o programa segue normalmente seu curso.

B) Resultados

B.1 - Conclusão do teste

Nesta etapa os dados já estão todos computados, e após alguns instantes o video mostra a estatística calculada H (ou F). São inseridos os valores de α e da tabela H (ou F) ou χ^2 , conforme o caso (Tabelas 3,6 e 2). Então aparece na tela a conclusão.

ESTATISTICA H = 7.64643
N.M.S. = .05

CONCLUSAO:
NAO REJEITA-SE A IGUALDADE ENTRE POPULACOES

8.2 - Comparações Múltiplas

No caso de se concluir pela rejeição da hipótese nula, os programas oferecem a alternativa de Comparações Múltiplas, onde são calculados os DMS (diferenca minima significativa) e a diferenca em modulo entre as médias dos postos, para K-W; e entre a soma dos postos para Friedman.

6 - CONSIDERACOES FINAIS

O trabalho desenvolvido apresenta dois testes não-paramétricos muito utilizados como substituto do teste F, na análise de variância clássica para comparações entre mais de duas populações.

Resaltamos, que os testes de Kruskal-Wallis e de Friedman são considerados, pela literatura, os mais eficientes substitutos do teste F . Este fato é comprovado pelo alto poder que possuem. Sendo que o teste de K-W quando comparado com o teste F , demaneira que as suposições destes estejam satisfeitas, apresentou uma eficiência assintótica de 95.5% (Siegel,1975). Já para o teste de Friedman não temos indicação do seu poder exato, entretanto, seu poder se confundiu com o do teste F numa experiência realizada por Friedman (Siegel, 1975).

Estes, no entanto, não são os únicos dois testes usados para comparações de K amostras. Convem lembrar aqui alguns outros como: o teste de Cochran, para amostras dependentes, porém com dados em escala nominal (ou dicotomizados); o teste da Mediana, para amostras independentes; o teste de Jonckhere, para amostras independentes; e o teste qui-quadrado, tambem para amostras independentes, que pode ser usado para dados em escala nominal e que e o mais conhecido dos testes não-paramétricos.

Algumas resalvas sobre os programas são de interesse, neste instante, fazer, tais como

- Não são aceitos dados com o valor zero, sob pena se serem ignorados;
- Nao deve haver nenhum valor maior ou igual a 999 999 ;
- As comparações múltiplas são feitas de maneira aproximada, podendo ocorrer de se rejeitar Ho pelo teste global e ele não acusar nenhuma diferença significativa entre as amostras duas a duas. Neste caso, utiliza-se as técnicas aqui apresentadas para amostras pequenas. Assim sendo, busca-se nas Tabelas 4 e 7 , os valores de DMS (Δ e Δ_1) para comparação.

O trabalho apresentado pretendeu dar uma idéia geral da análise não-paramétrica, usada como substituta da Análise de Variância, contudo, aconselha-se ao leitor procurar à bibliografia indicada, caso deseje um perfil mais amplo do contesto.

B I B L I O G R A F I A

- CAMPOS, H., _Estatística Experimental Não-Paramétrica_, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", USP, 1976.

- DANIEL, W.W., _Applied Nonparametric Statistics_, Houghton Miffin Company Boston, 1978.

- GIBBONS, J.D., _Nonparametric Statistical Inference_, McGraw-Hill, 1971.

- LEHMANN, E.L., _Nonparametric Statistical Methods Based on Ranks_, McGraw-Hill, 1975.

- SIEGEL, S., _Estatística Não-Paramétrica_, McGraw-Hill do Brasil LTDA, 1981.

A N E X O S   I

LISTAGEM DOS PROGRAMAS

```
HOME
PRINT TAB(20) "TESTE DE KRUSKAL-WALLIS":PRINT
PRINT "UM TESTE NAO PARAMETRICO PARA K AMOSTRAS INDEPENDENTES":PRINT
PRINT "NUMERO DE AMOSTRAS = NUMERO DE TRATAMENTOS":PRINT
INPUT "QUANTAS AMOSTRAS":M:PRINT
DIM TA(2*M): DIM N(M): DIM NEM(M): DIM R(M): DIM RMEDIO(M)
PRINT "TAMANHO DA AMOSTRA = NUMERO DE REPETICOES POR TRATAMENTO":PRINT
FOR J=1 TO M
PRINT "TAMANHO DA AMOSTRA "J""
INPUT "";NEM(J)
STA=NEM(J)+STA
N(J)=NEM(J)
NEXT J
FOR J=1 TO M-1
IF N(J)<N(J+1) THEN 190
N=N(J)
SWAP N(J),N(J+1)
GOTO 200
N=N(J+1)
NEXT J
DIM X(N,2*M): DIM M(N,M): DIM RES(2*M)
HOME:PRINT TAB(5) "TESTE DE KRUSKAL-WALLIS":PRINT
TTA=(8*M)+3
PRINT STRING$ (TTA,61)
FOR J=1 TO M
U=(J-1)*8+1: HTAB U
VTAB 4: PRINT "   A -"J"":PRINT STRING$ (TTA,61):PRINT
FOR I=1 TO NEM(J)
HTAB(U)
INPUT ;M(I,J): HTAB U:PRINT USING"####.##";M(I,J)
NEXT I
NEXT J
RP=7+N
VTAB RP: PRINT STRING$ (TTA,61)
VTAB (RP+1):PRINT:PRINT "CONFIRA SEUS DADOS"
PRINT "EXISTE ALGUM ERRO? :  1.NAO   2.SIM"
INPUT "";ER: IF ER<>2 THEN 450
INPUT "QUAL AMOSTRA";A
VTAB (RP+5):HTAB 20:INPUT "QUAL POSICAO";R:INPUT "NOVO VALOR";NOVO
M(R,A)=NOVO: U=(A-1)*10+1
HTAB U: VTAB (6+R): PRINT USING"####.##";NOVO
VTAB (RP+3):PRINT "                                          ":PRINT "                                          ":PRINT "
                                          ":PRINT "                                          "
GOTO 340
REM "COLOCAR OS DADOS NAS COLUNAS IMPARAES DA MATRIZ"
C=-1
FOR J=1 TO M
C=C+1
FOR I=1 TO NEM(J)
X(I,J+C)=M(I,J)
NEXT I :NEXT J
C=-1
FOR J=1 TO M
C=C+1
TA(J+C)=NEM(J)
NEXT J
REM "COMPARAR OS DADOS E ATRIBUIR POSTOS A ELES"
MAXMENOR=-10000: PS=0
FOR J=1 TO 2*M-1 STEP 2
FOR I=1 TO TA(J)
PS=PS+1: MENOR=999999999#: DELTA=0
```

```
PS=PS+1: MENOR=999999999#: DELTA=0
FOR K=1 TO 2*M-1 STEP 2
FOR H=1 TO TA(K)
IF X(H,K)<=MAXMENOR THEN 670
IF X(H,K)>=MENOR THEN 710
MENOR =X(H,K)
L=H: C=K: GOTO 710
IF X(H,K)<>MAXMENOR THEN 710
DELTA=DELTA+1
IF DELTA=1 THEN 710
PS=PS+1
NEXT H
NEXT K
IF PS>STA THEN 790
X(L,C+1)=PS
MAXMENOR =MENOR
NEXT I
NEXT J
REM "VERIFICA EMPATES"
FOR J=1 TO 2*M-1 STEP 2
FOR I=1 TO TA(J)
IF X(I,J+1)<>0 THEN 990
R=0: PS=0
FOR K=1 TO 2*M-1 STEP 2
FOR H=1 TO TA(K)
IF X(H,K)<>X(I,J) THEN 880
R=R+1
IF X(H,K+1)<>0 THEN C=K:L=H
NEXT H
NEXT K
PS=(X(L,C+1) + (X(L,C+1)+R-1))/2
SDT=R^3-R + SDT
X(L,C+1)=PS: X(I,J+1)=PS
FOR K=1 TO 2*M-1 STEP 2
FOR H=1 TO TA(K)
IF X(H,K)<>X(I,J) THEN 970
IF X(H,K+1)=0 THEN X(H,K+1)=PS
NEXT H
NEXT K
NEXT I
NEXT J
REM "FATOR DE CORRECAO PARA EMPATES"
FC=1- (SDT/(STA^3-STA))
REM "CALCULA O SOMATORIO DOS RJ AO QUADRADO"
FOR J=1 TO 2*M-1 STEP 2
FOR I=1 TO TA(J)
RES(J)=X(I,J+1)+RES(J)
NEXT I
PARCELA=(RES(J)^2/TA(J))
STORIO=PARCELA+STORIO
NEXT J
REM "ESTATISTICA DE KRUSKAL-WALLIS"
CONSTANTE=12/(STA*(STA+1))
H=(CONSTANTE*STORIO - 3*(STA+1))/FC
IF (N+9)>24 THEN HOME
VTAB (N+9): PRINT "ESTATISTICA DE KRUSKAL-WALLIS: H=" H
PRINT "                                                  ":PRINT "          "
VTAB(N+11):INPUT "NIVEL MINIMO DE SIGNIFICANCIA - ALFA";ALFA
IF M>3 OR N>6 THEN 1210
INPUT "VALOR TABELADO - H - DA TABELA DE KRUSKAL-WALLIS";TH
GOTO 1220
```

```
1200 GOTO 1220
1210 PRINT "APROXIMACAO QUI-QUADRADO COM "M-1" GRAUS DE LIBERDADE:":INPUT "";TH
1220 PRINT:PRINT TAB(10) "CONCLUSAO:"
1230 IF H<TH THEN C$="NS": GOTO 1260
1240 PRINT "REJEITA-SE A HIPOTESE NULA. LOGO A UM NIVEL DE "ALFA*100" % DE SIGNIFICANCIA ""VERIFICA-SE DIFERENCA ENTRE AS AMOSTRAS
1250 GOSUB 1520:GOTO 1280
1260 PRINT "NAO REJEITA-SE A HIPOTESE NULA. LOGO A UM NIVEL DE "ALFA*100" % DE SIGNIFICANCIA ""NAO SE VERIFICA DIFERENCA ENTRE AS
OSTRAS"
1270 GOSUB  1520: END
1280 PRINT:PRINT "COMPARACOES MULTIPLAS:  1.SIM   2.NAO": INPUT "";CM
1290 IF CM=2 THEN END
1300 HOME: PRINT TAB(15) "COMPARACOES MULTIPLAS:":PRINT
1310 PRINT "AMOSTRAS" TAB(12) "DIFERENCA ENTRE MEDIAS" TAB(42) "DMS"
1320 PRINT STRING$ (50,61):PRINT
1330 FOR J=1 TO M
1340 FOR K=1 TO M-J
1350 PRINT ""J" COM "J+K""
1360 NEXT K
1370 NEXT J
1380 FOR J=1 TO 2*M-3 STEP 2
1390 FOR K=2 TO 2*M-J STEP 2
1400 CASA=CASA+1
1410 DMS=SQR(STA*(STA+1)/12*(1/TA(J)+1/TA(J+K))*TH)
1420 MODEL = ABS(RES(J)/TA(J)-RES(J+K)/TA(J+K))
1430 LINHA =5+CASA
1440 VTAB LINHA
450 HTAB 20: PRINT USING"###.##";MODEL:HTAB 40: VTAB LINHA:PRINT USING"###.##";DMS
1460 IF MODEL<DMS THEN 1480
470 HTAB 48: VTAB LINHA:PRINT "*"
480 NEXT K,J
1490 PRINT STRING$ (50,61):PRINT
500 PRINT:PRINT "* : SIGNIFICA QUE AS AMOSTRAS DIFEREM ENTRE SI": END
510 REM "IMPRIME TABELA"
520 P1=(80 - M*8)/2
530 LPRINT TAB(P1) "TESTE DE KRUSKAL-WALLIS":LPRINT
540 LPRINT TAB(P1) STRING$ (TTA,61)
550 P2=P1
560 FOR J=1 TO M
570 LPRINT TAB(P2+3) "A -"J"";
580 P2=P2+8
590 NEXT J
600 LPRINT:LPRINT TAB(P1) STRING$ (TTA,61)
610 P2=P1
620 FOR I=1 TO N
630 FOR J=1 TO 2*M STEP 2
640 IF X(I,J)=0 THEN  GOSUB 1790:GOTO 1660
650 LPRINT TAB(P2+1);:LPRINT USING"####.##"; X(I,J);
660 P2=P2+8
670 NEXT J
680 LPRINT : P2=P1
690 NEXT I
700 LPRINT TAB(P1) STRING$ (TTA,61)
710 LPRINT:LPRINT TAB(P1) "ESTATISTICA H =" H
720 LPRINT TAB(P1) "N.M.S. =" ALFA
730 LPRINT: LPRINT TAB(P1) "CONCLUSAO:"
740 IF C$="NS" THEN 1770
750 LPRINT TAB(P1) "REJEITA-SE A IGUALDADE ENTRE POPULACOES"
760 GOTO 1800
770 LPRINT TAB(P1) "NAO REJEITA-SE A IGUALDADE ENTRE POPULACOES"
780 GOTO 1800
790 LPRINT TAB(P2+4) "    ";:RETURN
300 RETURN
```

```
HOME
PRINT TAB(20) "TESTE DE FRIEDMAN":PRINT
PRINT "  UM TESTE NAO PARAMETRICO PARA K AMOSTRAS DEPENDENTES":PRINT:PRINT
PRINT "NUMERO DE AMOSTRAS=NUMERO DE TRATAMENTOS":PRINT
INPUT "QUANTAS AMOSTRAS":M:PRINT
PRINT "TAMANHO DAS AMOSTRAS=NUMERO DE BLOCOS":PRINT
INPUT  "TAMANHO DAS AMOSTRAS ";N
STA=N*M
DIM X(N,2*M):DIM M(N,M):DIM T(N): DIM R(2*M)
HOME:PRINT TAB(10) "TESTE DE FRIEDMAN":PRINT
TTA=(8*M)
PRINT STRING$ (TTA,61):PRINT
FOR J=1 TO M
U=(J-1)*8+1
HTAB U:VTAB 4:PRINT "A-"J""
PRINT STRING$ (TTA,61):PRINT
FOR I=1 TO N
HTAB U
INPUT ;M(I,J):HTAB U:PRINT USING"####.##";M(I,J)
NEXT I
NEXT J
RG=7+N
VTAB RG:PRINT STRING$ (TTA,61):PRINT
VTAB(RG+2): PRINT "CONFIRA SEUS DADOS"
PRINT "EXISTE ALGUM ERRO? :  1.NAO   2.SIM"
INPUT "";ER: IF ER<>2 THEN 350
INPUT "QUAL AMOSTRA":A
VTAB(RG+5):HTAB 20: INPUT "QUAL POSICAO";R
INPUT "NOVO VALOR";NOVO
M(R,A)=NOVO: U=(A-1)*10+1
HTAB U: VTAB (6+R):PRINT USING"####.##";NOVO
VTAB (RG+3):PRINT "                              ":PRINT "                                        ":PRINT "
"
PRINT "
"
GOTO 240
REM "COLOCAR OS DADOS NAS COLUNAS IMPARES DA MATRIZ"
C=-1
FOR J=1 TO M
C=C+1
FOR I=1 TO N
X(I,J+C)=M(I,J)
NEXT I
NEXT J
REM "COMPARAR OS DADOS E ATRIBUIR POSTOS A ELES"
FOR I=1 TO N
MAXMENOR=-1000 : PS=0
FOR J=1 TO 2*M-1 STEP 2
PS=PS+1: MENOR=999999! : DELTA=0
FOR K=1 TO 2*M-1 STEP 2
IF X(I,K)<=MAXMENOR THEN 530
IF X(I,K)>= MENOR THEN 570
MENOR =X(I,K)
 C=K: GOTO 570
IF X(I,K)<> MAXMENOR THEN 570
DELTA=DELTA + 1
IF DELTA=1 THEN 570
PS=PS+1
NEXT K
IF PS>M THEN 620
X(I,C+1)=PS
```

```
MAXMENOR=MENOR
NEXT J
NEXT I
REM "VERIFICA EMPATES"
FOR I=1 TO N
EMP=0
FOR J=1 TO 2*M-1 STEP 2
IF X(I,J+1)<>0 THEN 820
EMP=EMP+1
R=0: PS=0
FOR K=1 TO 2*M-1 STEP 2
IF X(I,K)<>X(I,J) THEN 740
R=R+1
IF X(I,K+1)<>0 THEN C=K
NEXT K
T(I)=R^3+T(I)
PS=(X(I,C+1) + (X(I,C+1)+R-1))/2
X(I,C+1)=PS: X(I,J+1)=PS
FOR K=1 TO 2*M-1 STEP 2
IF X(I,K) <> X(I,J) THEN 810
IF X(I,K+1)=0 THEN X(I,K+1)=PS
NEXT K
NEXT J
T(I)= T(I)-EMP
SFC= T(I)+SFC
NEXT I
FC=1-(SFC/(N*M*(M^2-1)))
FOR J=1 TO 2*M-1 STEP 2
FOR I=1 TO N
R(J)=X(I,J+1)+R(J)
NEXT I
STORIO=R(J)^2 + STORIO
NEXT J
REM "ESTATISTICA DE FRIEDMAN"
PARCELA = 12/(N*M*(M+1))
F = (PARCELA * STORIO - 3 * N*(M+1))/FC
VTAB(RG+2):PRINT "ESTATISTICA DE FRIEDMAN =" F
PRINT "                                        ":PRINT "                                        "
INPUT "NIVEL MINIMO DE SIGNIFICANCIA - ALFA"; ALFA
IF (M=3 AND N<=15) OR (M=4 AND N<=8) OR (M=5 AND N<=5) THEN 1020
 PRINT "APROXIMACAO QUI-QUADRADO COM "M-1" GRAUS DE LIBERDADE:":INPUT "";TH
 GOTO 1020
 PRINT "VALOR F DA TABELA DE FRIEDMAN":INPUT "";TH
 PRINT:PRINT TAB(30)"CONCLUSAO:":PRINT
 IF F>TH THEN C$="*":GOTO 1070
 PRINT "NAO REJEITA-SE A HIPOTESE NULA.LOGO A UM NIVEL DE "ALFA*100" % DE SIGNIFICANCIA"" NAO SE VERIFICA DIFERENCA ENTRE AS AMO
S."
 GOSUB 1360:END
 PRINT "REJEITA-SE A HIPOTESE NULA. LOGO A UM NIVEL DE "ALFA*100" % DE SIGNIFICANCIA"" VERIFICA-SE DIFERENCA ENTRE AS AMOSTRAS"
 GOSUB 1360
 PRINT:PRINT "COMPARACOES MULTIPLAS : 1.SIM 2.NAO":INPUT "";CM
 IF CM=2 THEN END
 PRINT:INPUT "VALOR - Q - DA TABELA ";Q
 HOME
 PRINT TAB(20) "COMPARACOES MULTIPLAS":PRINT:PRINT
 PRINT "AMOSTRAS" TAB(12) "DIFERENCA ENTRE POSTOS" TAB(42) "DMS"
 PRINT STRING$ (50,61)
 FOR J=1 TO M
 FOR K=1 TO M-J
 PRINT ""J" COM "J+K""
 NEXT K
```

```
00 NEXT J
10 FOR J=1 TO 2*M-3 STEP 2
20 FOR K=2 TO 2*M-J STEP 2
30 CASA=CASA+1
40 DMS=Q*SQR(N*M*(M+1)/12)
50 MODEL=ABS(R(J) - R(J+K))
60 LINHA=CASA + 5
70 VTAB LINHA:HTAB 20:PRINT USING"###.##":MODEL
80 HTAB 38:VTAB LINHA:PRINT USING"###.##":DMS
90 IF MODEL<DMS THEN 1310
00 HTAB 48: VTAB LINHA: PRINT "*"
10 NEXT K
20 NEXT J
30 PRINT STRING$ (50,61):PRINT
40 PRINT: PRINT "* : SIGNIFICA QUE AS AMOSTRAS DIFEREM ENTRE SI"
50 END
60 REM "IMPRIME TABELA"
70 P1=(80- M*8)/2
80 LPRINT TAB(P1) "TESTE DE FRIEDMAN":LPRINT
90 LPRINT TAB(P1) STRING$ (TTA,61)
00 P2=P1
.0 FOR J=1 TO M
20 LPRINT TAB(P2+3) "A -"J"";
30 P2=P2+8
0 NEXT J
0 LPRINT:LPRINT TAB(P1) STRING$ (TTA,61)
0 P2=P1
0 FOR I=1 TO N
0 FOR J=1 TO 2*M STEP 2
0 LPRINT TAB(P2+1)::LPRINT USING"####.##": X(I,J);
0 P2=P2+8
0 NEXT J
0 LPRINT: P2=P1
0 NEXT I
0 LPRINT TAB(P1) STRING$ (TTA,61)
0 LPRINT:LPRINT TAB(P1) "ESTATISTICA F =" F
0 LPRINT TAB(P1) "N.M.S.=" ALFA
0 LPRINT: LPRINT TAB(P1) "CONCLUSAO:"
0 IF C$="*" THEN 1610
0 LPRINT TAB(P1)"NAO REJEITA-SE A IGUALDADE ENTRE POPULACOES "
0 GOTO 1630
0 LPRINT TAB(P1) "REJEITA-SE A IGUALDADE ENTRE POPULACOES "
0 RETURN
0 REM
```

A N E X O S   II

TABELAS

TABLE II. THE CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION FUNCTION

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \quad \text{FOR } 0{\cdot}00 \le u \le 4{\cdot}99.$$

u	·00	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
·0	·5000	·5040	·5080	·5120	·5160	·5199	·5239	·5279	·5319	·5359
·1	·5398	·5438	·5478	·5517	·5557	·5596	·5636	·5675	·5714	·5753
·2	·5793	·5832	·5871	·5910	·5948	·5987	·6026	·6064	·6103	·6141
·3	·6179	·6217	·6255	·6293	·6331	·6368	·6406	·6443	·6480	·6517
·4	·6554	·6591	·6628	·6664	·6700	·6736	·6772	·6808	·6844	·6879
·5	·6915	·6950	·6985	·7019	·7054	·7088	·7123	·7157	·7190	·7224
·6	·7257	·7291	·7324	·7357	·7389	·7422	·7454	·7486	·7517	·7549
·7	·7580	·7611	·7642	·7673	·7703	·7734	·7764	·7794	·7823	·7852
·8	·7881	·7910	·7939	·7967	·7995	·8023	·8051	·8078	·8106	·8133
·9	·8159	·8186	·8212	·8238	·8264	·8289	·8315	·8340	·8365	·8389
1·0	·8413	·8438	·8461	·8485	·8508	·8531	·8554	·8577	·8599	·8621
1·1	·8643	·8665	·8686	·8708	·8729	·8749	·8770	·8790	·8810	·8830
1·2	·8849	·8869	·8888	·8907	·8925	·8944	·8962	·8980	·8997	·90147
1·3	·90320	·90490	·90658	·90824	·90988	·91149	·91309	·91466	·91621	·91774
1·4	·91924	·92073	·92220	·92364	·92507	·92647	·92785	·92922	·93056	·93189
1·5	·93319	·93448	·93574	·93699	·93822	·93943	·94062	·94179	·94295	·94408
1·6	·94520	·94630	·94738	·94845	·94950	·95053	·95154	·95254	·95352	·95449
1·7	·95543	·95637	·95728	·95818	·95907	·95994	·96080	·96164	·96246	·96327
1·8	·96407	·96485	·96562	·96638	·96712	·96784	·96856	·96926	·96995	·97062
1·9	·97128	·97193	·97257	·97320	·97381	·97441	·97500	·97558	·97615	·97670
2·0	·97725	·97778	·97831	·97882	·97932	·97982	·98030	·98077	·98124	·98169
2·1	·98214	·98257	·98300	·98341	·98382	·98422	·98461	·98500	·98537	·98574
2·2	·98610	·98645	·98679	·98713	·98745	·98778	·98809	·98840	·98870	·98899
2·3	·98928	·98956	·98983	$\cdot 9^{2}0097$	$\cdot 9^{2}0358$	$\cdot 9^{2}0613$	$\cdot 9^{2}0863$	$\cdot 9^{2}1106$	$\cdot 9^{2}1344$	$\cdot 9^{2}1576$
2·4	$\cdot 9^{2}1802$	$\cdot 9^{2}2024$	$\cdot 9^{2}2240$	$\cdot 9^{2}2451$	$\cdot 9^{2}2656$	$\cdot 9^{2}2857$	$\cdot 9^{2}3053$	$\cdot 9^{2}3244$	$\cdot 9^{2}3431$	$\cdot 9^{2}3613$
2·5	$\cdot 9^{2}3790$	$\cdot 9^{2}3963$	$\cdot 9^{2}4132$	$\cdot 9^{2}4297$	$\cdot 9^{2}4457$	$\cdot 9^{2}4614$	$\cdot 9^{2}4766$	$\cdot 9^{2}4915$	$\cdot 9^{2}5060$	$\cdot 9^{2}5201$
2·6	$\cdot 9^{2}5339$	$\cdot 9^{2}5473$	$\cdot 9^{2}5604$	$\cdot 9^{2}5731$	$\cdot 9^{2}5855$	$\cdot 9^{2}5975$	$\cdot 9^{2}6093$	$\cdot 9^{2}6207$	$\cdot 9^{2}6319$	$\cdot 9^{2}6427$
2·7	$\cdot 9^{2}6533$	$\cdot 9^{2}6636$	$\cdot 9^{2}6736$	$\cdot 9^{2}6833$	$\cdot 9^{2}6928$	$\cdot 9^{2}7020$	$\cdot 9^{2}7110$	$\cdot 9^{2}7197$	$\cdot 9^{2}7282$	$\cdot 9^{2}7365$
2·8	$\cdot 9^{2}7445$	$\cdot 9^{2}7523$	$\cdot 9^{2}7599$	$\cdot 9^{2}7673$	$\cdot 9^{2}7744$	$\cdot 9^{2}7814$	$\cdot 9^{2}7882$	$\cdot 9^{2}7948$	$\cdot 9^{2}8012$	$\cdot 9^{2}8074$
2·9	$\cdot 9^{2}8134$	$\cdot 9^{2}8193$	$\cdot 9^{2}8250$	$\cdot 9^{2}8305$	$\cdot 9^{2}8359$	$\cdot 9^{2}8411$	$\cdot 9^{2}8462$	$\cdot 9^{2}8511$	$\cdot 9^{2}8559$	$\cdot 9^{2}8605$
3·0	$\cdot 9^{2}8650$	$\cdot 9^{2}8694$	$\cdot 9^{2}8736$	$\cdot 9^{2}8777$	$\cdot 9^{2}8817$	$\cdot 9^{2}8856$	$\cdot 9^{2}8893$	$\cdot 9^{2}8930$	$\cdot 9^{2}8965$	$\cdot 9^{2}8999$
3·1	$\cdot 9^{3}0324$	$\cdot 9^{3}0646$	$\cdot 9^{3}0957$	$\cdot 9^{3}1260$	$\cdot 9^{3}1553$	$\cdot 9^{3}1836$	$\cdot 9^{3}2112$	$\cdot 9^{3}2378$	$\cdot 9^{3}2636$	$\cdot 9^{3}2886$
3·2	$\cdot 9^{3}3129$	$\cdot 9^{3}3363$	$\cdot 9^{3}3590$	$\cdot 9^{3}3810$	$\cdot 9^{3}4024$	$\cdot 9^{3}4230$	$\cdot 9^{3}4429$	$\cdot 9^{3}4623$	$\cdot 9^{3}4810$	$\cdot 9^{3}4991$
3·3	$\cdot 9^{3}5166$	$\cdot 9^{3}5335$	$\cdot 9^{3}5499$	$\cdot 9^{3}5658$	$\cdot 9^{3}5811$	$\cdot 9^{3}5959$	$\cdot 9^{3}6103$	$\cdot 9^{3}6242$	$\cdot 9^{3}6376$	$\cdot 9^{3}6505$
3·4	$\cdot 9^{3}6631$	$\cdot 9^{3}6752$	$\cdot 9^{3}6869$	$\cdot 9^{3}6982$	$\cdot 9^{3}7091$	$\cdot 9^{3}7197$	$\cdot 9^{3}7299$	$\cdot 9^{3}7398$	$\cdot 9^{3}7493$	$\cdot 9^{3}7585$
3·5	$\cdot 9^{3}7674$	$\cdot 9^{3}7759$	$\cdot 9^{3}7842$	$\cdot 9^{3}7922$	$\cdot 9^{3}7999$	$\cdot 9^{3}8074$	$\cdot 9^{3}8146$	$\cdot 9^{3}8215$	$\cdot 9^{3}8282$	$\cdot 9^{3}8347$
3·6	$\cdot 9^{3}8409$	$\cdot 9^{3}8469$	$\cdot 9^{3}8527$	$\cdot 9^{3}8583$	$\cdot 9^{3}8637$	$\cdot 9^{3}8689$	$\cdot 9^{3}8739$	$\cdot 9^{3}8787$	$\cdot 9^{3}8834$	$\cdot 9^{3}8879$
3·7	$\cdot 9^{3}8922$	$\cdot 9^{3}8964$	$\cdot 9^{4}0039$	$\cdot 9^{4}0426$	$\cdot 9^{4}0799$	$\cdot 9^{4}1158$	$\cdot 9^{4}1504$	$\cdot 9^{4}1838$	$\cdot 9^{4}2159$	$\cdot 9^{4}2468$
3·8	$\cdot 9^{4}2765$	$\cdot 9^{4}3052$	$\cdot 9^{4}3327$	$\cdot 9^{4}3593$	$\cdot 9^{4}3848$	$\cdot 9^{4}4094$	$\cdot 9^{4}4331$	$\cdot 9^{4}4558$	$\cdot 9^{4}4777$	$\cdot 9^{4}4988$
3·9	$\cdot 9^{4}5190$	$\cdot 9^{4}5385$	$\cdot 9^{4}5573$	$\cdot 9^{4}5753$	$\cdot 9^{4}5926$	$\cdot 9^{4}6092$	$\cdot 9^{4}6253$	$\cdot 9^{4}6406$	$\cdot 9^{4}6554$	$\cdot 9^{4}6696$
4·0	$\cdot 9^{4}6833$	$\cdot 9^{4}6964$	$\cdot 9^{4}7090$	$\cdot 9^{4}7211$	$\cdot 9^{4}7327$	$\cdot 9^{4}7439$	$\cdot 9^{4}7546$	$\cdot 9^{4}7649$	$\cdot 9^{4}7748$	$\cdot 9^{4}7843$
4·1	$\cdot 9^{4}7934$	$\cdot 9^{4}8022$	$\cdot 9^{4}8106$	$\cdot 9^{4}8186$	$\cdot 9^{4}8263$	$\cdot 9^{4}8338$	$\cdot 9^{4}8409$	$\cdot 9^{4}8477$	$\cdot 9^{4}8542$	$\cdot 9^{4}8605$
4·2	$\cdot 9^{4}8665$	$\cdot 9^{4}8723$	$\cdot 9^{4}8778$	$\cdot 9^{4}8832$	$\cdot 9^{4}8882$	$\cdot 9^{4}8931$	$\cdot 9^{4}8978$	$\cdot 9^{5}0226$	$\cdot 9^{5}0655$	$\cdot 9^{5}1066$
4·3	$\cdot 9^{5}1460$	$\cdot 9^{5}1837$	$\cdot 9^{5}2199$	$\cdot 9^{5}2545$	$\cdot 9^{5}2876$	$\cdot 9^{5}3193$	$\cdot 9^{5}3497$	$\cdot 9^{5}3788$	$\cdot 9^{5}4066$	$\cdot 9^{5}4332$
4·4	$\cdot 9^{5}4587$	$\cdot 9^{5}4831$	$\cdot 9^{5}5065$	$\cdot 9^{5}5288$	$\cdot 9^{5}5502$	$\cdot 9^{5}5706$	$\cdot 9^{5}5902$	$\cdot 9^{5}6089$	$\cdot 9^{5}6268$	$\cdot 9^{5}6439$
4·5	$\cdot 9^{5}6602$	$\cdot 9^{5}6759$	$\cdot 9^{5}6908$	$\cdot 9^{5}7051$	$\cdot 9^{5}7187$	$\cdot 9^{5}7318$	$\cdot 9^{5}7442$	$\cdot 9^{5}7561$	$\cdot 9^{5}7675$	$\cdot 9^{5}7784$
4·6	$\cdot 9^{5}7888$	$\cdot 9^{5}7987$	$\cdot 9^{5}8081$	$\cdot 9^{5}8172$	$\cdot 9^{5}8258$	$\cdot 9^{5}8340$	$\cdot 9^{5}8419$	$\cdot 9^{5}8494$	$\cdot 9^{5}8566$	$\cdot 9^{5}8634$
4·7	$\cdot 9^{5}8699$	$\cdot 9^{5}8761$	$\cdot 9^{5}8821$	$\cdot 9^{5}8877$	$\cdot 9^{5}8931$	$\cdot 9^{5}8983$	$\cdot 9^{6}0320$	$\cdot 9^{6}0789$	$\cdot 9^{6}1235$	$\cdot 9^{6}1661$
4·8	$\cdot 9^{6}2067$	$\cdot 9^{6}2453$	$\cdot 9^{6}2822$	$\cdot 9^{6}3173$	$\cdot 9^{6}3508$	$\cdot 9^{6}3827$	$\cdot 9^{6}4131$	$\cdot 9^{6}4420$	$\cdot 9^{6}4696$	$\cdot 9^{6}4958$
4·9	$\cdot 9^{6}5208$	$\cdot 9^{6}5446$	$\cdot 9^{6}5673$	$\cdot 9^{6}5889$	$\cdot 9^{6}6094$	$\cdot 9^{6}6289$	$\cdot 9^{6}6475$	$\cdot 9^{6}6652$	$\cdot 9^{6}6821$	$\cdot 9^{6}6981$

Example: $\Phi(3{\cdot}57) = \cdot 9^{3}8215 = 0{\cdot}9998215$.

TABELA 2 - Limites da distribuição de χ^2

	α									
G. L.	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	---	0,02	0,10	0,45	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,10	0,21	0,58	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,35	0,58	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,71	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	2,73	3,49	5,07	7,34	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	3,33	4,17	5,90	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	3,94	4,87	6,74	9,34	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	4,57	5,58	7,58	10,34	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	5,23	6,30	8,44	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	5,89	7,04	9,30	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	6,57	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	7,26	8,55	11,04	14,34	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	7,96	9,31	11,91	15,34	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	8,67	10,09	12,79	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	9,39	10,86	13,68	17,34	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	10,12	11,65	14,56	18,34	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	10,85	12,44	15,45	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	11,59	13,24	16,34	20,34	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	12,34	14,04	17,24	21,34	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	13,09	14,85	18,14	22,34	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	13,85	15,66	19,04	23,34	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	14,61	16,47	19,94	24,34	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	15,38	17,29	20,84	25,34	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	16,15	18,11	21,75	26,34	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	16,93	18,94	22,66	27,34	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	17,71	19,77	23,57	28,34	33,71	39.09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	18,49	20,60	24,48	29,34	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67

TABELA 2 - Continuação

					α					
G. L.	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
40	26,51	29,05	33,66	39,34	45,62	51,80	55,76	59,34	63,69	66,77
50	34,76	37,69	42,94	49,33	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	43,19	46,46	52,29	59,33	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	51,74	55,33	61,70	69,33	77,58	85,53	90,53	95,02	100,42	104,22
80	60,39	64,28	71,14	79,33	88,13	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	69,13	73,29	80,62	89,33	98,64	107,56	113,14	118,14	124,12	128,30
100	77,93	82,36	90,13	99,33	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

Esta tabela foi adaptada de

SNEDECOR, G. W. e W. G. COCHRAN - 1973 - "Statistical Methods".

6.ª ed. - The Iowa State University Press - Ames, Iowa.

TABELA 3 - Limites da distribuição de H no teste de Kruskal-Wallis, com $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq 6$

$$P_0\ (H \geq h) = \alpha$$

n_1	n_2	n_3	h	α
1	1	4	3,571	0,200
1	1	5	3,857	0,143
1	2	2	3,600	0,200
1	2	3	3,524	0,200
			4,286	0,100
1	2	4	3,161	0,190
			4,018	0,114
			4,821	0,057
1	2	5	3,333	0,190
			4,200	0,095
			5,000	0,048
			5,250	0,036
1	3	3	3,286	0,157
			4,571	0,100
			5,143	0,043
1	3	4	3,208	0,200
			4,056	0,093
			5,208	0,050
			5,833	0,021
1	3	5	3,218	0,190
			4,018	0,095
			4,871	0,052
			4,960	0,048
			6,400	0,012
1	4	4	3,000	0,222
			3,267	0,178

n_1	n_2	n_3	h	α
1	4	4	4,067	0,102
			4,867	0,054
			4,967	0,048
			6,667	0,010
1	4	5	3,000	0,208
			3,087	0,194
			3,960	0,102
			3,987	0,098
			4,860	0,056
			4,986	0,044
			6,840	0,011
			6,954	0,008
			7,364	0,005
1	5	5	2,946	0,227
			3,236	0,188
			4,036	0,105
			4,109	0,086
			4,909	0,053
			5,127	0,046
			6,836	0,011
			7,309	0,009
			7,746	0,005
			8,182	0,002
2	2	2	3,714	0,200
			4,571	0,067
2	2	3	3,750	0,219
			3,929	0,181
			4,464	0,105
			4,500	0,067
			4,714	0,048
			5,357	0,029
2	2	4	3,458	0,210
			3,667	0,190
			4,458	0,100

n_1	n_2	n_3	h	α
2	2	4	5,125	0,052
			5,500	0,024
			6,000	0,014
2	2	5	3,333	0,206
			3,360	0,196
			4,293	0,122
			4,373	0,890
			5,040	0,056
			6,133	0,013
			6,533	0,008
2	2	6	5,018	0,050
			5,345	0,038
			5,527	0,036
			5,745	0,021
			6,545	0,011
			6,654	0,008
2	3	3	3,778	0,200
			4,556	0,100
			5,139	0,061
			5,556	0,025
			6,250	0,011
2	3	4	3,311	0,203
			3,444	0,197
			4,444	0,102
			4,511	0,098
			5,400	0,051
			5,444	0,046
			6,300	0,011
			6,444	0,008
			7,000	0,005
2	3	5	3,386	0,201
			3,414	0,193
			4,494	0,101
			4,651	0,091

TABELA 3 - Continuação

n_1	n_2	n_3	h	α
2	3	5	5,106	0,052
			5,251	0,049
			6,822	0,010
			6,909	0,009
			6,949	0,006
			7,182	0,004
2	3	6	5,227	0,052
			5,348	0,046
			6,061	0,026
			6,136	0,023
			6,727	0,011
			6,970	0,009
2	4	4	3,354	0,210
			3,464	0,192
			4,446	0,103
			4,554	0,098
			5,236	0,052
			5,454	0,046
			6,546	0,020
			6,873	0,011
			7,036	0,006
			7,854	0,002
2	4	5	3,364	0,200
			4,518	0,101
			4,541	0,098
			5,268	0,051
			5,273	0,049
			6,504	0,020
			7,118	0,010
			7,500	0,007
			7,573	0,005
			8,114	0,001
2	4	6	5,263	0,050
			5,340	0,049
			6,109	0,025
			6,186	0,024

n_1	n_2	n_3	h	α
2	4	6	7,212	0,011
			7,340	0,010
2	5	5	3,369	0,203
			3,392	0,198
			4,508	0,100
			5,246	0,051
			5,338	0,047
			6,346	0,025
			6,446	0,020
			7,269	0,010
			7,762	0,007
			8,131	0,005
			8,685	0,001
2	5	6	5,319	0,050
			5,338	0,047
			6,189	0,026
			6,196	0,025
			7,299	0,010
			7,376	0,010
2	6	6	5,352	0,051
			5,410	0,050
			6,171	0,026
			6,210	0,024
			7,410	0,010
			7,467	0,010
3	3	3	3,467	0,196
			4,622	0,100
			5,600	0,050
			5,956	0,025
			6,489	0,011
			7,200	0,004
3	3	4	3,391	0,196
			3,836	0,150
			4,700	0,101
			4,709	0,092

n_1	n_2	n_3	h	α
3	3	4	5,727	0,050
			6,154	0,025
			6,746	0,010
			7,000	0,006
			7,318	0,004
			7,436	0,002
			8,018	0,001
3	3	5	3,394	0,209
			3,442	0,196
			4,412	0,109
			4,533	0,097
			5,515	0,051
			5,648	0,049
			6,303	0,026
			6,376	0,020
			6,982	0,011
			7,079	0,009
			7,467	0,008
			7,515	0,005
			8,048	0,002
			8,242	0,001
			8,727	0,001
3	3	6	5,551	0,051
			5,615	0,050
			6,385	0,025
			6,436	0,022
			7,192	0,010
			7,410	0,008
3	4	4	3,394	0,201
			3,417	0,195
			3,848	0,150
			4,477	0,102
			4,546	0,099
			5,576	0,051
			5,598	0,049
			6,394	0,025
			6,659	0,020
			7,144	0,010
			7,636	0,004

TABELA 3 - Continuação

n_1	n_2	n_3	h	α
3	4	4	8,227	0,002
			8,909	0,001
3	4	5	3,312	0,204
			3,318	0,199
			3,831	0,150
			4,523	0,103
			4,549	0,099
			4,939	0,075
			5,631	0,050
			6,410	0,025
			6,676	0,020
			7,445	0,010
			7,641	0,007
			7,906	0,005
			8,446	0,002
			8,503	0,001
			9,118	0,001
3	4	6	5,604	0,050
			5,610	0,049
			6,500	0,025
			6,538	0,025
			7,467	0,010
			7,500	0,010
3	5	5	3,306	0,202
			3,429	0,195
			3,798	0,152
			4,545	0,100
			4,993	0,075
			5,626	0,051
			5,706	0,046
			6,488	0,025
			6,752	0,021
			6,866	0,019
			7,543	0,010
			7,894	0,007
			8,237	0,005
			8,334	0,005
			8,950	0,002
			9,055	0,001
			9,398	0,001

n_1	n_2	n_3	h	α
3	5	6	5,554	0,052
			5,600	0,050
			6,621	0,026
			6,667	0,024
			7,560	0,010
			7,590	0,010
3	6	6	5,600	0,052
			5,625	0,050
			6,683	0,025
			6,725	0,025
			7,683	0,010
			7,725	0,010
4	4	4	3,231	0,212
			3,500	0,197
			3,846	0,151
			3,962	0,145
			4,500	0,104
			4,654	0,097
			5,115	0,074
			5,654	0,055
			5,692	0,049
			6,577	0,026
			6,615	0,024
			6,731	0,021
			6,962	0,019
			7,538	0,011
			7,731	0,007
			8,000	0,005
			8,346	0,002
			8,654	0,001
			9,269	0,001
4	4	5	3,330	0,200
			3,828	0,151
			4,619	0,100
			5,014	0,076
			5,024	0,074
			5,618	0,050
			6,597	0,026
			6,676	0,024
			6,943	0,020

n_1	n_2	n_3	h	α
4	4	5	7,744	0,011
			7,760	0,009
			7,810	0,008
			8,140	0,005
			8,189	0,005
			8,782	0,002
			8,997	0,001
			9,590	0,001
4	4	6	5,667	0,050
			5,681	0,049
			6,595	0,026
			6,667	0,025
			7,724	0,010
			7,795	0,010
4	5	5	3,311	0,200
			3,846	0,151
			3,883	0,148
			4,520	0,101
			4,523	0,099
			5,023	0,075
			5,643	0,050
			6,671	0,025
			6,760	0,025
			6,943	0,020
			7,766	0,010
			7,860	0,010
			8,226	0,007
			8,371	0,005
			8,543	0,005
			9,163	0,002
			9,323	0,001
			9,926	0,001
4	5	6	5,656	0,051
			5,661	0,050
			6,736	0,025
			6,750	0,025
			7,896	0,010
			7,936	0,010

TABELA 3 - Continuação

n_1	n_2	n_3	h	α	n_1	n_2	n_3	h	α	n_1	n_2	n_3	h	α
4	6	6	5,721	0,050	5	5	5	8,000	0,009	5	6	6	5,752	0,050
			5,724	0,050				8,060	0,009				5,765	0,050
			6,783	0,025				8,420	0,007				6,838	0,025
			6,812	0,024				8,720	0,005				6,848	0,025
			7,989	0,010				8,820	0,005				8,119	0,010
			8,000	0,010				9,420	0,002				8,124	0,010
								9,620	0,002					
								9,680	0,001					
5	5	5	3,380	0,201				10,220	0,001	6	6	6	5,719	0,050
			3,420	0,190									5,801	0,049
			3,860	0,150									6,877	0,026
			4,560	0,100	5	5	6	5,698	0,050				6,889	0,025
			5,040	0,075				5,729	0,050				8,187	0,010
			5,660	0,051				6,781	0,025				8,222	0,010
			5,780	0,049				6,788	0,025					
			6,740	0,025				8,012	0,010					
			7,020	0,020				8,028	0,010					
			7,980	0,011										

Esta Tabela, para $n_i \leq 5$, foi adaptada de :

HOLLANDER, M. & WOLFE, D. A. - 1973 - Nonparametric Statistical Methods. John Wiley & Sons. New York.

Para $n_i = 6$ os limites foram obtidos de:

TSAI, W. S. ; DURAN, B. S. & LEWIS, T. O. - 1975 - Journal of the American Statistical Association, 70 , nº 352.

TABELA 4 - Diferença mínima significativa (Δ) para as comparações múltiplas, baseadas no teste de Kruskal-Wallis, envolvendo todos os pares $(i\ ,\ j)$ de Tratamentos e com $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$.

$$P_0\ (|\ R_i - R_j\ | \geq \Delta) = \alpha$$

k = número de tratamentos

n = número de repetições por tratamento

n	Δ	α
	k = 3	
2	8	0,067
3	15	0,064
	16	0,029
	17	0,011
4	24	0,045
	25	0,031
	27	0,011
5	33	0,048
	35	0,031
	39	0,009
6	43	0,049
	51	0,011
	k = 4	
2	12	0,029
3	22	0,043
	23	0,023
	24	0,012

n	Δ	α
	k = 4	
4	34	0,049
	36	0,026
	38	0,012
	k = 5	
2	15	0,048
	16	0,016
3	28	0,060
	30	0,023
	32	0,007
4	44	0,056
	46	0,033
	50	0,010
	k = 6	
2	19	0,030
	20	0,010
3	35	0,055
	37	0,024
	39	0,009

n	Δ	α
	k = 7	
2	22	0,056
	23	0,021
	24	0,007
3	42	0,054
	44	0,026
	46	0,012
	k = 8	
2	26	0,041
	28	0,005
3	49	0,055
	51	0,029
	54	0,010
	k = 9	
2	29	0,063
	30	0,031
	31	0,012

TABELA 4 - Continuação

n	Δ	α	n	Δ	α	n	Δ	α
	k = 10			k = 12			k = 14	
2	33	0,050	2	40	0,062	2	48	0,044
	34	0,025		41	0,033		49	0,024
	35	0,009		43	0,006		50	0,012
	k = 11			k = 13			k = 15	
2	37	0,040	2	44	0,052	2	52	0,038
	38	0,020		45	0,028		54	0,010
	39	0,008		46	0,014			

Esta tabela foi adaptada de:

HOLLANDER & WOLFE - 1973 - Nonparametric Statistical Methods. John Wiley & Sons. New York.

TABELA 5 - Valores da amplitude Q a ser usada nas comparações múltiplas, caso de grandes amostras, com

$n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n \qquad (n \to \infty)$

k = número de amostras

k	α 0,20	0,10	0,05	0,01	0,001
2	1,812	2,326	2,772	3,643	4,654
3	2,424	2,902	3,314	4,120	5,063
4	2,784	3,240	3,633	4,403	5,309
5	3,037	3,478	3,858	4,603	5,484
6	3.232	3,661	4,030	4,757	5,619
7	3,389	3,808	4,170	4,882	5,730
8	3,520	3,931	4,286	4,987	5,823
9	3,632	4,037	4,386	5,078	5,903
10	3,730	4,129	4,474	5,157	5,973
11	3,817	4,211	4,552	5,227	6,036
12	3,895	4,285	4,622	5,290	6,092
13	3,966	4,351	4,685	5,348	6,144
14	4,030	4,412	4,743	5,400	6,191
15	4,089	4,468	4,796	5,448	6,234
16	4,144	4,519	4,845	5,493	6,274
17	4,195	4,568	4,891	5,535	6,312
18	4,242	4,612	4,934	5,574	6,347
19	4,287	4,654	4,974	5,611	6,380
20	4,328	4,694	5,012	5,645	6,411
22	4,405	4,767	5,081	5,709	6,468
24	4,474	4,832	5,144	5,766	6,520
26	4,537	4,892	5,201	5,818	6,568
28	4,595	4,947	5,253	5,866	6,611
30	4,648	4,997	5,301	5,910	6,651
32	4,697	5,044	5,346	5,952	6,688
34	4,743	5,087	5,388	5,990	6,723
36	4,786	5,128	5,427	6,026	6,756
38	4,826	5,166	5,463	6,060	6,787

TABELA 5 - Continuação

			α		
k	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001
40	4.864	5,202	5,498	6,092	6,816
50	5,026	5,357	5,646	6,228	6,940
60	5,155	5,480	5,764	6,338	7,041
70	5,262	5,582	5,863	6,429	7,124
80	5,353	5,669	5,947	6,507	7,196
90	5.433	5,745	6,020	6,575	7,258
100	5,503	5,812	6,085	6,636	7,314

Esta tabela foi adaptada de:

HARTER, H. L. - 1960 - Tables of Range and Studentized Range. Annals of Mathematical Statistics 31: 1122-47.

TABELA 6 - Limites da distribuição de χ_r^2 no teste de Friedman

$$P_0\ (\chi_r^2 \geq \chi_0^2) = \alpha$$

k = número de tratamentos

n = número de repetições por tratamento

n	χ_0^2	α
	k = 3	
2	4,00	0,167
3	4,67	0,194
	6,00	0,028
4	4,50	0,125
	6,00	0,069
	6,50	0,042
	8,00	0,005
5	3,60	0,182
	4,80	0,124
	5,20	0,093
	6,40	0,039
	7,60	0,024
	8,40	0,008
	10,00	0,001
6	4,00	0,184
	4,33	0,142
	5,33	0,072
	6,33	0,052
	7,00	0,029
	8,33	0,012
	9,00	0,008
	10,33	0,002
7	3,71	0,192
	4,57	0,112
	5,43	0,085
	6,00	0,051
	7,14	0,027
	8,00	0,016
	8,86	0,008
	11,14	0,001

n	χ_0^2	α
	k = 3	
8	4,00	0,149
	4,75	0,120
	5,25	0,079
	6,25	0,047
	7,00	0,030
	9,00	0,010
	12,00	0,001
9	3,56	0,187
	4,67	0,107
	5,56	0,069
	6,00	0,057
	6,22	0,048
	6,89	0,031
	8,67	0,010
	11,56	0,001
10	3,80	0,187
	4,20	0,135
	5,00	0,092
	5,60	0,066
	6,20	0,046
	7,40	0,026
	8,60	0,012
	9,60	0,007
	12,20	0,001
11	3,82	0,163
	4,91	0,100
	5,64	0,062
	6,54	0,043
	7,09	0,027
	8,91	0,011
	9,46	0,007
	12,18	0,001

n	χ_0^2	α
	k = 3	
12	3,50	0,191
	4,67	0,108
	5,17	0,080
	6,17	0,050
	7,17	0,028
	8,67	0,011
	9,50	0,008
	12,50	0,001
13	3,85	0,165
	4,31	0,129
	4,77	0,098
	6,00	0,050
	7,54	0,025
	8,77	0,012
	9,38	0,008
	12,15	0,001
14	3,57	0,188
	4,43	0,117
	5,14	0,089
	5,57	0,063
	6,14	0,049
	7,43	0,023
	9,00	0,010
	13,00	0,001
15	3,60	0,189
	4,80	0,106
	4,93	0,096
	5,73	0,059
	6,40	0,047
	7,60	0,022
	8,93	0,010
	12,40	0,001

TABELA 6 - Continuação

n	χ^2_0	α	n	χ^2_0	α	n	χ^2_0	α
	k = 4			k = 4			k = 5	
2	5,40	0,167	6	4,80	0,197	3	6,40	0,172
	6,00	0,042		6,20	0,110		7,20	0,117
				6,40	0,089		7,47	0,096
3	5,40	0,175		7,40	0,056		8,27	0,056
	5,80	0,148		7,60	0,043		8,53	0,045
	6,60	0,075		8,80	0,023		9,87	0,015
	7,00	0,054		10,00	0,010		10,13	0,008
	7,40	0,033		12,60	0,001		11,47	0,001
	8,20	0,017						
	9,00	0,002	7	4,89	0,195	4	6,20	0,197
				6,26	0,100		7,40	0,113
4	4,80	0,200		7,63	0,052		7,60	0,095
	6,00	0,105		7,80	0,041		8,60	0,060
	6,30	0,094		9,00	0,023		8,80	0,049
	7,50	0,052		10,37	0,010		9,80	0,025
	7,80	0,036		13,11	0,001		11,00	0,010
	8,40	0,019					13,00	0,001
	9,30	0,012	8	4,80	0,193			
	9,60	0,007		6,30	0,100	5	6,08	0,195
	11,10	0,001		7,50	0,051		7,52	0,107
				7,65	0,049		7,68	0,094
5	5,16	0,162		8,85	0,025		8,80	0,056
	6,12	0,107		10,35	0,011		8,96	0,049
	6,36	0,093		10,50	0,009		10,08	0,026
	7,32	0,055		13,35	0,001		11,52	0,010
	7,80	0,044					14,08	0,001
	8,76	0,023						
	9,72	0,012						
	9,96	0,009						
	12,12	0,001						

Esta tabela, para k = 3 foi adaptada de:

OWEN, D. B. - 1962 - Handbook of Statistical Tables. Addison Wesley Publishing Co. Reading. Massachussets.

Para k = 4 e 5 foi adaptada de:

HOLLANDER, M. & WOLFE, D. A. - 1973 - Nonparametric Statistical Methods. John Wiley & Sons. New York.

TABELA 7 - Diferença mínima significativa (Δ_1) para as comparações múltiplas, baseadas no teste de Friedman, envolvendo todos os pares (i , j) de tratamentos

$$P_0 \left(\left| R_i - R_j \right| \geq \Delta_1 \right) = \alpha$$

k = número de tratamentos

n = número de repetições por tratamento

n	Δ_1	α	n	Δ_1	α	n	Δ_1	α
k = 3			k = 3			k = 4		
3	6	0,028	13	12	0,049	8	14	0,034
				13	0,030		15	0,019
4	7	0,042		15	0,009		16	0,009
	8	0,005						
			14	13	0,038	9	15	0,032
5	8	0,039		14	0,023		17	0,010
	9	0,008		16	0,007			
						10	15	0,046
6	9	0,029	15	13	0,047		16	0,029
	10	0,009		14	0,028		18	0,010
				16	0,010			
7	9	0,051				11	16	0,041
	10	0,023					17	0,026
	11	0,008					19	0,009
			k = 4					
8	10	0,039				12	17	0,038
	11	0,018	2	6	0,083		18	0,023
	12	0,007					20	0,008
			3	8	0,049			
9	10	0,048		9	0,007	13	18	0,032
	11	0,026					19	0,021
	12	0,013	4	10	0,026		21	0,008
				11	0,005			
10	11	0,037				14	18	0,042
	12	0,019	5	11	0,037		19	0,028
	13	0,010		12	0,013		21	0,011
11	11	0,049	6	12	0,037	15	19	0,037
	12	0,028		13	0,018		20	0,024
	14	0,008		14	0,006		22	0,010
12	12	0,038	7	13	0,037			
	13	0,022		14	0,020			
	14	0,012		15	0,008			

TABELA 7 - Continuação

n	Δ_1	α
	k = 5	
2	8	0,050
3	10	0,067
	11	0,018
	12	0,002
4	12	0,054
	13	0,020
	14	0,006
5	14	0,040
	16	0,006
6	15	0,049
	16	0,028
	17	0,013
7	16	0,052
	17	0,033
	19	0,009
8	18	0,036
	19	0,022
	20	0,012
9	19	0,037
	20	0,024
	22	0,008
10	20	0,038
	21	0,025
	23	0,009
11	21	0,038
	22	0,025
	24	0,010
12	22	0,038
	23	0,025
	25	0,011
13	23	0,035
	24	0,024
	26	0,011

n	Δ_1	α
	k = 5	
14	24	0,034
	25	0,024
	27	0,011
15	24	0,045
	26	0,022
	28	0,010
	k = 6	
2	10	0,033
3	13	0,030
	14	0,008
4	15	0,047
	16	0,018
	17	0,006
5	17	0,047
	18	0,022
	19	0,010
6	19	0,040
	20	0,021
	21	0,010
7	20	0,049
	21	0,032
	23	0,010
8	22	0,039
	23	0,026
	25	0,008
9	23	0,043
	24	0,030
	26	0,012
10	24	0,047
	26	0,023
	28	0,009

n	Δ_1	α
	k = 6	
11	26	0,036
	27	0,026
	29	0,012
12	27	0,039
	28	0,028
	31	0,009
13	28	0,039
	29	0,028
	32	0,010
14	29	0,040
	30	0,030
	33	0,011
15	30	0,040
	32	0,023
	34	0,012
	k = 7	
2	12	0,024
3	15	0,048
	16	0,016
4	18	0,040
	20	0,007
5	20	0,052
	21	0,028
	22	0,014
6	22	0,050
	23	0,032
	25	0,009
7	24	0,047
	25	0,032
	27	0,011

TABELA 7 - Continuação

n	Δ_1	α
	k = 7	
8	26	0,041
	27	0,030
	29	0,011
9	27	0,050
	29	0,026
	31	0,011
10	29	0,042
	30	0,031
	33	0,010
11	30	0,049
	32	0,027
	35	0,009
12	32	0,040
	33	0,030
	36	0,011
13	33	0,043
	35	0,025
	38	0,009
14	34	0,047
	36	0,028
	39	0,011
15	36	0,038
	37	0,030
	41	0,009
	k = 8	
2	14	0,018
3	17	0,067
	18	0,027
	19	0,009
4	21	0,036
	23	0,007
5	23	0,057
	24	0,034
	26	0,009
6	26	0,045
	27	0,027
	29	0,009
7	28	0,048
	29	0,032
	31	0,012
8	30	0,046
	31	0,033
	34	0,009
9	32	0,043
	33	0,032
	36	0,010
10	34	0,040
	35	0,031
	38	0,010
11	35	0,048
	37	0,028
	40	0,010
12	37	0,042
	39	0,026
	42	0,010
13	39	0,039
	40	0,030
	44	0,009
14	40	0,042
	42	0,027
	45	0,012
15	42	0,037
	43	0,030
	47	0,011
	k = 9	
2	15	0,068
	16	0,014
3	20	0,041
	22	0,005
4	23	0,064
	24	0,034
	26	0,008
5	27	0,040
	28	0,023
	29	0,013
6	29	0,058
	30	0,038
	33	0,008
7	32	0,046
	33	0,032
	36	0,008
8	34	0,049
	36	0,026
	38	0,012
9	36	0,050
	38	0,030
	41	0,010
10	38	0,050
	40	0,031
	43	0,011
11	40	0,048
	42	0,030
	46	0,009
12	42	0,046
	44	0,029
	48	0,009

TABELA 7 - Continuação

n	Δ_1	α	n	Δ_1	α	n	Δ_1	α
	k = 9			k = 10			k = 11	
13	44	0,042	9	41	0,046	5	33	0,055
	46	0,027		43	0,027		34	0,035
	50	0,009		46	0,009		37	0,008
14	46	0,041	10	43	0,047	6	37	0,045
	48	0,026		45	0,030		38	0,030
	52	0,009		49	0,009		41	0,008
15	47	0,046	11	45	0,049	7	40	0,049
	50	0,025		47	0,032		41	0,035
	54	0,009		51	0,010		44	0,011
			12	48	0,040	8	43	0,046
				50	0,027		44	0,035
	k = 10			54	0,009		48	0,009
2	17	0,056	13	50	0,039	9	46	0,043
	18	0,011		52	0,026		47	0,034
				56	0,009		51	0,009
3	22	0,057						
	23	0,026	14	52	0,039	10	48	0,047
	24	0,010		54	0,026		50	0,031
				58	0,010		54	0,009
4	26	0,060						
	27	0,033	15	53	0,045	11	51	0,040
	29	0,009		56	0,026		53	0,027
				60	0,010		57	0,009
5	30	0,047						
	31	0,029				12	53	0,043
	33	0,010					55	0,029
				k = 11			59	0,011
6	33	0,051						
	34	0,033	2	19	0,045	13	55	0,046
	37	0,008		20	0,009		57	0,031
							62	0,010
7	36	0,047	3	25	0,038			
	37	0,033		27	0,007	14	57	0,045
	40	0,010					60	0,026
			4	29	0,057		64	0,011
8	38	0,052		30	0,033			
	40	0,031		32	0,010	15	59	0,046
	43	0,010					62	0,027
							67	0,009

TABELA 7 - Continuação

n	Δ_1	α	n	Δ_1	α	n	Δ_1	α
	k = 12			k = 12			k = 13	
2	21	0,038	13	61	0,043	9	55	0,048
	22	0,008		63	0,030		57	0,030
				68	0,010		61	0,010
3	27	0,053						
	28	0,027	14	63	0,046	10	58	0,047
	29	0,012		66	0,027		60	0,032
				71	0,009		65	0,009
4	32	0,055						
	33	0,033	15	66	0,040	11	61	0,046
	35	0,011		68	0,028		63	0,032
				73	0,011		68	0,010
5	37	0,042						
	38	0,027				12	64	0,045
	40	0,011					66	0,032
				k = 13			71	0,010
6	40	0,059						
	42	0,028	2	23	0,032	13	67	0,041
	45	0,008		24	0,006		69	0,030
							74	0,011
7	44	0,050	3	30	0,038			
	46	0,026		32	0,009	14	69	0,046
	49	0,009					72	0,028
			4	35	0,054		77	0,010
8	47	0,050		36	0,033			
	49	0,030		38	0,012	15	72	0,040
	52	0,011					74	0,030
			5	40	0,049		80	0,010
9	50	0,048		41	0,033			
	52	0,032		44	0,009			
	66	0,010						
			6	44	0,054		k = 14	
10	53	0,047		46	0,027			
	55	0,032		49	0,009	2	25	0,027
	59	0,010					26	0,005
11	56	0,043	7	48	0,051	3	32	0,052
	58	0,029		50	0,028		33	0,028
	62	0,011		53	0,010		35	0,006
12	58	0,048	8	52	0,046	4	38	0,053
	61	0,027		53	0,035		39	0,034
	65	0,011		57	0,010		41	0,013

TABELA 7 - Continuação

n	Δ_1	α	n	Δ_1	α	n	Δ_1	α
	k = 14			k = 14			k = 15	
5	43	0,057	14	75	0,045	8	60	0,056
	45	0,027		78	0,028		63	0,027
	47	0,012		84	0,009		67	0,009
6	48	0,050	15	78	0,043	9	64	0,052
	50	0,026		81	0,028		67	0,028
	53	0,009		87	0,010		71	0,011
7	52	0,053				10	68	0,049
	54	0,030					71	0,028
	57	0,012		k = 15			75	0,011
8	56	0,051	2	26	0,071	11	72	0,043
	58	0,031		27	0,024		74	0,032
	62	0,010		28	0,005		79	0,011
9	60	0,047	3	35	0,039	12	75	0,045
	62	0,029		37	0,010		78	0,028
	66	0,010					83	0,010
			4	41	0,053			
10	63	0,048		42	0,035	13	78	0,046
	65	0,033		45	0,008		81	0,030
	70	0,010					87	0,009
			5	47	0,046			
11	66	0,049		48	0,033	14	81	0,046
	69	0,029		51	0,010		84	0,030
	74	0,009					90	0,010
			6	52	0,047			
12	69	0,048		53	0,035	15	84	0,043
	72	0,030		57	0,009		87	0,029
	77	0,010					94	0,009
			7	56	0,055			
13	72	0,047		58	0,032			
	75	0,030		62	0,010			
	80	0,011						

Esta tabela foi adaptada de:

HOLLANDER, M. & WOLFE, D. A. - 1973 - Nonparametric Statistical Methods. John Wiley & Sons. New York.