Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

A RECÍPROCA DE UM TEOREMA BEM CONHECIDO SOBRE ANÉIS NOETHERIANOS

por

WAGNER DE OLIVEIRA CORTÊS

Porto Alegre, fevereiro de 2000

Dissertação submetida por WAGNER DE OLIVEIRA CORTÊS* como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Dra. Ada Maria de Souza Doering

Banca Examinadora:
Dr. Alveri Alves Sant'Ana (IMAT/UFRGS)
Dra. Cydara Cavedon Ripoll (IMAT/UFRGS)
Dra. Neuza Kasuko Kakuta (Depto.de Matemática–UNESP)

Data de Defesa: 28 de fevereiro de 2000.

---

* Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, pois se não fosse por Ele nada disso teria sido possível.

Agradeço a Ada pela orientação, aos meus amigos e professores da pós-graduação, aos meus pais pelo incentivo e carinho em todos os momentos, e também a minha queridíssima noiva Susana Ramires Machado pelo amor e companherismo.

Também quero agradecer aos professores Hamilton Prado Bueno(UFMG) , Erminia de Lourdes Campelo Fanti, Maria Gorete Carreira Andrade , Adalberto Spezamglio, Sebatião Antonio Izar , Hélia, Neuza Kazuko(Unesp-Ibilce) e a todos os meus amigos que sempre me deram apoio.

Resumo

É bem conhecido que dados R, S anéis tais que $R \subset S$ e S um R módulo finitamente gerado,se R é um anel noetheriano então S é um anel noetheriano. O objetivo deste trabalho será de apresentar a recíproca desse teorema feito por Paul M. Eakin Jr., isto é, se S é um anel noetheriano então R é um anel noetheriano.

Abstract

It's well known for R, S rings such that $R \subset S$ and S is finitely generated module R , if R is a noetherian ring then S is a noetherian ring.The objective this job will be to present a converse this theorem that it was done by Paul M. Eakin Jr. He told that if S is a noetherian ring then R is a noetherian ring.

Indice

Introdução

Um teorema muito conhecido de álgebra comutativa afirma que, sendo R e S anéis comutativos com unidade tais que $R \subset S$ e S é um R-módulo finitamente gerado, então se R for um anel noetheriano, S também será uma anel noetheriano[apêndice proposição 1].

Paul Eakin mostrou que a recíproca deste resultado é também verdadeira, isto é, sendo válidas as mesmas hipóteses, se S for um anel noetheriano R também será um anel noetheriano. O objetivo desta dissertação é o de apresentar a bonita prova desta recíproca feita por Eakin.

Neste trabalho sempre que falarmos em anéis estaremos supondo que tais anéis são anéis comutativos com unidade. O teorema 2, que é o principal deste trabalho, é devido a Eakin e para prová-lo precisaremos introduzir uma classe de anéis que são muito próximos dos anéis noetherianos e que Eakin chamou de anéis RMX(restricted maximum condition). Um anel R é um anel RMX se para todo ideal primo próprio P de R o anel R/P for um anel noetheriano. Decorre imediatamente da definição de anel RMX que todo anel noetheriano é um anel RMX. O contrário é falso e os exemplos 1,2 e 3 desta dissertação ilustram esse fato.

Para podermos provar o teorema 2 precisaremos provar antes um caso particular dele que afirma que, sendo R e S domínios tais que $R \subset S$, S é um R-módulo finitamente gerado e R é um anel RMX então, se S for um domínio noetheriano, R também será um domínio noetheriano. Os exemplos 5 e 6 deste trabalho mostram que a hipótese de finitude da extensão é de fato necessária mesmo no caso em que R e S tenham o mesmo corpo de frações.

Gilmer em[2], propõe a seguinte questão: Sejam R um domínio inteiramente fechado em seu corpo de frações K, L uma extensão finita separável de K e S o fecho inteiro de R em L. Se S for um domínio noetheriano, R também será um domínio noetheriano? Apresentaremos a resposta parcial que Eakin deu a esta questão. Mostraremos primeiramente que se o discriminante da extensão for um elemento inversível em R então R será necessariamente um domínio noetheriano. No outro caso, isto é, quando o discriminante não for inversível em R, mostra-se que R é uma intersecção de anéis de Krull noetherianos com uma intersecção finita de anéis de valorizações discreta de posto 1.

Apresentaremos ainda um exemplo que mostra que nem sempre a intersecção de anéis noetherianos é um anel noetheriano.

Proposição 1: *Seja R um anel comutativo com unidade. São equivalentes:*

i) R é um anel RMX.

ii) Se $A_1 \subset A_2 \subset ....$ é uma cadeia de ideais de R na qual um dos ideais contém um ideal primo próprio de R então a cadeia é estacionária.

iii) Se Ψ é um conjunto não vazio de ideais de R, tal que existe um ideal $A \in \Psi$ que contém um ideal primo próprio de R, então Ψ tem elemento máximo com respeito à inclusão.

iv) Se A é um ideal de R e P um ideal primo próprio de R então $(P + A)/P$ é um ideal finitamente gerado do anel R/P.

Prova:

$i) \Rightarrow ii)$

Considere a cadeia de ideais de R, $A_1 \subset A_2 \subset ....$, e $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_k \supset P$ onde P é um ideal primo próprio de R. Temos assim que $P \subset A_k \subset A_{k+1} \subset A_{k+2} \subset ....$ Como R/P é um domínio noetheriano, a cadeia $A_k/P \subset A_{k+1}/P \subset A_{k+2}/P \subset ...$ é estacionária, logo existe $j \in \mathbb{N}$, $j \geq k$, tal que $A_j/P = A_{j+n}/P$ para todo n natural. Portanto $A_j = A_{j+n}$ para todo n natural e a cadeia $A_1 \subset A_2 \subset ....$é uma cadeia estacionária.

$ii) \Rightarrow iii)$

Suponhamos que Ψ não possua elemento máximo, e seja A_1 o ideal de Ψ que contém um ideal primo próprio de R. Como Ψ não possui elemento máximo existe $A_2 \in \Psi$ tal que A_2 contém propriamente A_1. Da mesma maneira existe $A_3 \in \Psi$ tal que A_3 contém propriamente A_2. Procedendo assim obtemos uma cadeia de ideais $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ....$ na qual há um elemento que contém um ideal primo próprio de R e que não é estacionária, o que contraria a hipótese. Logo Ψ possui elemento máximo.

$iii) \Rightarrow iv)$

Dado P um ideal primo próprio de R, queremos mostrar que R/P é um anel noetheriano. De fato, seja $J_1/P \subset J_2/P \subset ...$ uma cadeia de ideais em R/P. Em R teremos $P \subset J_1 \subset J_2....$ Seja $\Psi = \{J_1, J_2, ...\}$. Como $P \subset J_1$, por hipótese existe $k \in \mathbb{N}$ tal que J_k é o elemento máximo de Ψ, daí $J_k = J_{k+n}$, para todo n natural. Logo a cadeia $J_1/P \subset J_2/P \subset ...$ é estacionária e, portanto, R/P é um anel noetheriano. Dessa maneira concluímos que $(A + P)/P$ é ideal finitamente gerado do anel R/P.

$iv) \Rightarrow i)$

Seja P um ideal primo próprio de R. Queremos mostrar que todo ideal de R/P é finitamente gerado. Com efeito, dado $\mathcal{F}$ um ideal qualquer de R/P, existe I um ideal de R tal que $I \supset P$ e $\mathcal{F} = I/P$. Como $\mathcal{F} = I/P = (I + P)/P$ é um ideal finitamente gerado de R/P, podemos concluir que R/P é *um* anel noetheriano. Portanto R é um anel RMX.

Agora veremos alguns exemplos de anéis RMX.

Exemplo 1) Todo anel de valorização discreta de dimensão 2 (por exemplo, o anel de valorização associado a um prolongamento da valorização p-ádica sobre $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}(\mathbb{X})$) é um anel RMX que não é um anel noetheriano.

Seja R um anel de valorização de um corpo K cujo grupo de valores seja $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ possui somente três subgrupos isolados, sabemos que em R existem apenas três ideais primos, o ideal nulo, o ideal máximo de R e um terceiro ideal primo que denotaremos por P [apêndice, proposição 12]

Queremos mostrar que R não é um anel noetheriano, embora seja um anel RMX.

Observe que se R fosse um anel noetheriano, então R seria um domínio de ideais principais [apêndice, proposição 5] e com isso, $\dim R = 1$ o que contraria o fato de $\dim R = 2$. Logo R não é um anel noetheriano. Para ver que R é um anel RMX, basta ver que R/P é um anel noetheriano, o que decorre do fato de R/P ser um anel de valorização com dimensão de krull 1.

Exemplo 2) Seja D um domínio e K seu corpo de frações com $D \neq K$.

Sejam $K[[X]]$ o anel das séries de potências formais e $\langle X\rangle$ o seu ideal máximo. Seja $T(D) = D + \langle X\rangle = \{\, d + Xf(X), d \in D, f(X) \in K[[X]]\}$. Então $T(D)$ não é um domínio noetheriano e se D for noetheriano então $T(D)$ é um anel RMX .

É fácil ver que $T(D)$ com as operações restritas de $K[[X]]$ é um domínio. Suponhamos que D é um anel noetheriano e vamos mostrar que $T(D)$ é um anel RMX.

Mostraremos inicialmente que $\langle X\rangle$ é o único ideal primo de altura 1 de $T(D)$. É imediato que $\langle X\rangle$ é um ideal de $T(D)$. Além disto, $\langle X\rangle$ é um ideal primo de $T(D)$, pois $\langle X\rangle$ é um ideal primo de $K[[X]]$. Resta mostrar que $\langle X\rangle$ é o único ideal primo de altura 1 de $T(D)$. Para isso, mostraremos que se I é um ideal próprio qualquer de $T(D)$ então $\langle X\rangle \subseteq \sqrt{I}$. De fato, dado I um ideal próprio de $T(D)$ e $f \in I$ um elemento não nulo, sejam $d \in D$, $\alpha \in K[[X]]$, tais que $f = d+ X\alpha$. Se $d \neq 0$ então f é inversível em $K[[X]]$. Neste caso, $1 = ff^{-1} = df^{-1} + Xf^{-1}\alpha$. Como $Xf^{-1}\alpha \in \langle X\rangle \subset T(D)$ e $1 \in D \subset T(D)$ temos que $df^{-1} \in T(D)$, logo $d = df^{-1}f \in fT(D) \subseteq I$ e, consequentemente, $X\alpha \in I$. Se $d = 0$ então $d \in I$ e $X\alpha = f \in I$. Logo nos dois casos temos que se $f = d + X\alpha$ é um elemento de I, com $d \in D$ e $\alpha \in K[[X]]$ então d, $X\alpha \in I$. Em particular se I é um ideal de $T(D)$ então $I = I \cap D + \langle X\rangle \cap I$ e se $I \supset \langle X\rangle$ então $I = I \cap D + \langle X\rangle$.

Mostremos que $\langle X\rangle \subseteq \sqrt{I}$ para todo ideal $I \neq \langle 0\rangle$ de $T(D)$. Observemos inicialmente que sendo $I \neq \langle 0 \rangle$ existe um elemento $g \in I \backslash D$, caso contrário I estaria contido em D, e neste caso I não seria um ideal de $T(D)$, pois XI não estaria contido em I. Seja $g \in I \backslash D$, $g = d + \alpha X$ com $d \in D$, $\alpha \in K[[X]]$ e $\alpha \neq 0$. Temos que $\alpha = \sum_{i=j}^{\infty} a_i X^i$ com $a_i \in K$ e $a_j \neq 0$. Seja $\alpha_1 = \sum_{i=j}^{\infty} a_i X^{i-j}$. Observe que α_1 é inversível em $K[[X]]$ e que $\alpha = \alpha_1 X^j$. Daí temos que $X^{j+1}\alpha_1\alpha_1^{-1}X = X^{j+2}$. Como $\alpha_1^{-1}X \in \langle X \rangle \subset T(D)$ e $\alpha_1 X^{j+1} = \alpha X$ temos que $X^{j+2} \in \langle \alpha X \rangle \subset I$. Logo $X \in \sqrt{I}$, de onde se conclui que $\langle X \rangle$ é o único ideal primo de altura 1.

Dado P um ideal primo próprio de $T(D)$, temos que $P \supset \langle X \rangle$ logo $P = (P \cap D) + \langle X \rangle$. Considere $i : D \hookrightarrow T(D)$ e $\pi : T(D) \hookrightarrow T(D)/P$ onde i é a aplicação inclusão e π a projeção canônica. Mostraremos que $\pi \circ i$ é sobrejetivo. Dado $f + P \in T(D)/P$, temos que $f = d + X\alpha$ para algum $d \in D$ e $\alpha \in K[[X]]$. Logo, como $X \in P$, $f + P = d + P = (\pi \circ i)(d)$ com isso $\pi \circ i$ é sobrejetivo. Portanto, pelo teorema dos isomorfismos, temos $T(D)/P \simeq D/\ker(\pi \circ i) = D/P \cap D$ que é um anel noetheriano. Sendo assim $T(D)$ é um anel RMX.

Mostraremos agora que $T(D)$ não é um anel noetheriano. Caso contrário, escolhendo z um elemento não nulo e não inversível de D, teríamos que os primos mínimos do ideal $zT(D)$ teriam que ter altura 1, e portanto $\langle X \rangle$ seria o único primo mínimo de $zT(D)$ o que implicaria que $z \in \langle X \rangle$, contrariando a escolha de z.

Observação: No exemplo acima, a função $h : T(D) \to D$ definida por $h(d + x\alpha) = d$ é um homomorfismo sobrejetor, logo todo domínio noetheriano é imagem homomórfica de um domínio não noetheriano RMX.

Exemplo 3) todos os anéis noetherianos e anéis de dimensão 1 são anéis RMX.

Lema 1: *Sejam $R \subset S$ anéis tais que R é um anel RMX e S um R-módulo finitamente gerado. Se P é um ideal primo de S tal que $P \cap R \neq \langle 0 \rangle$ entaõ S/P é um anel noetheriano.*

Prova:

Considere $i : R \to S$ a aplicação inclusão, $f : S \to S/P$ projeção canônica então $f \circ i : R \to S/P$ definida por $(f \circ i)(x) = x + P$ é um homomorfismo de anéis. Afirmamos que seu nucleo é $P \cap R$. Com efeito, se $z \in P \cap R$ então $(f \circ i)(z) = z + P = P$, pois $z \in P$, logo z é um elemento do núcleo de $f \circ i$, a outra inclusão é trivial. Pelo teorema dos isomorfismos de anéis temos $R/P \cap R \simeq \operatorname{Im} f \circ i \subset S/P$ e portanto $R/P \cap R \subset S/P$. Agora mostraremos que S/P é um $R/P \cap R$ -módulo finitamente gerado. De fato, como S é um R-módulo finitamente gerado, existem $a_1, ..., a_k \in S$ tais que $S = Ra_1 + ... + Ra_k$. Afirmamos que $S/P = (R/P \cap R)\overline{a_1} + .. + (R/P \cap R)\overline{a_k}$. É claro que $S/P \supseteq (R/P \cap R)\overline{a_1} + .. + (R/P \cap R)\overline{a_k}$. Por outro lado dado $\overline{x} = x + P$, $x \in S$ podemos escrever $x = b_1a_1 + ... + b_ka_k$, com $b_i \in R$ para todo $i = 1...k$ e dessa maneira $\overline{x} = x+P = (b_1a_1+...+b_ka_k)+P = (b_1+P)(a_1+P)+....+(b_k+P)(a_k+P)$. Pela identificação $h : R/P \cap R \hookrightarrow S/P$ definida por $h(z + P \cap R) = z + P$, podemos escrever $\overline{x} = (b_1 + P \cap R)(a_1 + P) + ... + (b_k + P \cap R)(a_k + P)$, o que implica que $\overline{x} \in (R/P \cap R)\overline{a_1} + .. + (R/P \cap R)\overline{a_k}$. Como $R/\ P \cap R$ é um anel noetheriano, pois R é um anel RMX, e $S/P = (R/P \cap R)\overline{a_1} + .. + (R/P \cap R)\overline{a_k}$ temos por [apêndice, proposição 1] que S/P é um anel noetheriano.

Corolário 1: *Sejam D e R domínios de integridade, $D \subset R$ e R um D-módulo finitamente gerado. Se D é um anel RMX então R é um anel RMX.*

Prova:

Como R é um D-módulo finitamente gerado então R é uma extensão inteira sobre D. Logo sendo R um domínio, se P for um ideal primo próprio de R então por [apêndice, proposição 8], $P \cap D \neq \langle 0 \rangle$. O resultado segue agora do lema 1.

Observação: A recíproca desse corolário é verdadeira e seguirá do teorema 2.

Definição 1: *Sejam $R \subset S$ anéis. Dizemos que um ideal A de R é um ideal contraído, se existir um ideal B de S tal que $A = B \cap R$, neste caso denota-se*

$A = B^c$. *Dizemos que um ideal B de S é um ideal estendido, se existir um ideal A de R tal que $B = AS$, neste caso denota-se $B = A^e$.*

Lema 2: *Sejam $R \subset S$ anéis tais que S seja um R-módulo finitamente gerado. Suponhamos que*

i) A é um ideal próprio contraído de R.

ii) S é um anel noetheriano.

iii) Nenhum ideal primo próprio de S se contrai ao ideal nulo de R.

Então há ideais primos próprios de R, $P_1, ..., P_k$ tais que $(P_1...P_k)^{ec} \subset A$.

Prova:

Como S é um anel noetheriano, existem $Q_1, ..., Q_k$ ideais primos próprios de S, tais que $(Q_1...Q_k) \subset A^e$[apêndice, proposição 2]. Seja $P_i = Q_i \cap R$. Por hipótese $P_i \neq \langle 0 \rangle$. Observe que $(P_1....P_k) \subset (P_1....P_k)^{ec} = (P_1^e....P_k^e)^c \subset (Q_1....Q_k)^c \subset A^{ec}$. Sendo A um ideal contraído então $A^{ec} = A$ [apêndice, proposição16], logo $(P_1...P_k)^{ec} \subset A$.

Lema 3: *Suponha que R seja um anel RMX, S um anel noetheriano tal que $R \subset S$ e S é um R-módulo finitamente gerado. Se $P_1, ..., P_k$ são ideais primos próprios de R então $R/(P_1...P_k)^{ec}$ é um anel noetheriano.*

Prova:

A prova será feita por indução no número de ideais primos.

Para $k = 1$, como P_1 é um ideal primo de R e S é uma extensão inteira de R, $P_1^{ec} = P_1$[apêndice, proposição 8] portanto, sendo R um anel RMX, temos que R/P_1^{ec} é um anel noetheriano.

Agora suponha que o lema seja verdadeiro se tivermos o produto de $k-1$ ideais primos e mostremos que o anel $R/(P_1...P_k)^{ec}$ é um anel noetheriano. Seja $\mathcal{P}$ um ideal primo de $R/(P_1...P_k)^{ec}$ e Q um ideal primo de R que contém $(P_1...P_k)^{ec}$ tal que $\mathcal{P} = Q/(P_1...P_k)^{ec}$. Mostraremos que o ideal $\mathcal{P}$ é finitamente gerado, de onde decorrerá que $R/(P_1...P_k)^{ec}$ é um anel noetheriano, pelo teorema de Cohen [apêndice, proposição 3]. Como $Q \supset (P_1...P_k)^{ec} \supset (P_1...P_k)$ e Q é um ideal primo, existe $i \in \{1,..,k\}$ tal que $Q \supset P_i$. Podemos supor sem perda de generalidade que $i = k$, isto é, que $Q \supset P_k$. Como R/P_k é um anel noetheriano e $Q/P_k \simeq Q/(P_1...P_k)^{ec}/P_k/(P_1...P_k)^{ec}$, para mostrar que $Q/(P_1...P_k)^{ec}$ é um ideal finitamente gerado, basta mostrar que $P_k/(P_1...P_k)^{ec}$ é ideal finitamente gerado, isto é, que $P_k/(P_1...P_k)^{ec}$ é $R/(P_1...P_k)^{ec}$-módulo finitamente gerado.

Sendo S um anel noetheriano, o ideal P_k^e é um ideal de S finitamente gerado portanto P_k^e é um S-módulo finitamente gerado [apêndice, proposição 13]. Além disto $(P_1...P_{k-1})^e$ está contido no anulador do S-módulo $P_k^e/(P_1...P_k)^e$, pois $(P_1...P_{k-1})^e {P_k}^e =$

$(P_1...P_k)^e$ logo $P_k^e/(P_1...P_k)^e$ é um $S/(P_1...P_{k-1})^e$-módulo finitamente gerado [apêndice, proposição 4]. Por outro lado, sendo S um R módulo finitamente gerado, $S/(P_1...P_{k-1})^e$ é um R-módulo finitamente gerado cujo anulador é $(P_1...P_{k-1})^{ec}$, pois $(P_1...P_{k-1})^{ec}S = (P_1...P_{k-1})^{ece} = (P_1...P_{k-1})^e$. Logo $S/(P_1...P_{k-1})^e$ é um $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$-módulo finitamente gerado. Como $P_k^e/(P_1...P_k)^e$ é $S/(P_1...P_{k-1})^e$-módulo finitamente gerado e $S/(P_1...P_{k-1})^e$ é $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$-módulo finitamente gerado, então $P_k^e/(P_1...P_k)^e$ é um $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$-módulo finitamente gerado. Sendo $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$ um anel noetheriano, $P_k^e/(P_1...P_k)^e$ é $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$-módulo noetheriano [apêndice, proposição 1]. Por outro lado, $P_k = P_k^{ec} \supset (P_1...P_k)^{ec}$, logo $P_k/(P_1...P_k)^{ec}$ é um R-módulo cujo anulador contém $(P_1...P_{k-1})^{ec}$, pois $(P_1...P_{k-1})^{ec}P_k = (P_1...P_{k-1})^{ec}P_k^{ec} = (P_1...P_k)^{ec}$. Logo $P_k/(P_1...P_k)^{ec}$ é

$R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$-módulo finitamente gerado. De fato, como $P_k/(P_1...P_k)^{ec}$ é um submódulo de $P_k^e/(P_1...P_k)^e$ que é um $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$-módulo noetheriano, logo $P_k/(P_1...P_k)^{ec}$ é um $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$-módulo finitamente gerado. Daí, como $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$ é um R-módulo cujo anulador contém $(P_1...P_k)^{ec}$ podemos concluir que $R/(P_1...P_{k-1})^{ec}$ é $R/(P_1...P_k)^{ec}$-módulo finitamente gerado e portanto $P_k/(P_1...P_k)^{ec}$ é um $R/(P_1...P_k)^{ec}$-módulo finitamente gerado o que conclui a prova do lema.

Lema 4: *Se R é um anel comutativo com unidade, então R é um anel noethe-*

riano se, e somente se, R/A é um anel noetheriano para todo ideal próprio A de R

Prova:

Se R é um anel noetheriano e I um ideal de R, então R/I é um anel noetheriano.[apêndice, proposição 14]

Se R não é um anel noetheriano então existe uma cadeia de ideais de R, $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset$ ...que não é estacionária. É claro que existe um número natural k tal que I_k é um ideal próprio de R. Em R/I_k a cadeia $I_{k+1}/I_k \subset I_{k+2}/I_k \subset I_{k+3}/I_k \subset$.... é uma cadeia de ideais que não é estacionária o que contradiz a hipótese de R/I_k ser um anel noetheriano.

Corolário 2: *Seja R um domínio RMX com corpo quociente K. Seja S um anel tal que $R \subset S \subset K$ e S um R-módulo finitamente gerado. Então S é um anel noetheriano se, e somente se, R é um anel noetheriano.*

Prova:

Suponhamos que S é um anel noetheriano. Como S é um R-módulo finitamente gerado, então existem $s_1, ..., s_n \in S$ tais que $S = Ra_1 + ... + Ra_n$. Como $S \subset K$, onde K é o corpo de frações de R, então cada $s_i = \frac{x_i}{x}$ com x_i, $x \in R$. Decorre dai que $xS \subset R$. Seja I um ideal próprio de R e $IS = I^e$. Afirmamos que

I^e é um ideal próprio em S. De fato,como I é ideal próprio de R existe um ideal máximo M de R tal que $M \supset I$. Como M^e é um ideal próprio de S [apendice, th6] e $I^e \subset M^e$ então I^e é um ideal próprio de S. Além disso, $xI^e = xIS$ é um ideal de S que é próprio, pois $I^e x \neq 0$. Afirmamos que $I^e x$ é um ideal de R contido em I. De fato, como $xI^e = xIS$ e $xS \subset R$ temos $xI^e \subset IR = I$. Logo $xI^e = xI^e \cap R$ é um ideal próprio de R que está contido em I.

Pelo lema 2 existem $P_1, ..., P_k$, ideais primos próprios de R tais que $(P_1....P_k)^{ec} \subset xI^e \subset I$. Pelo lema 3, temos que $R/(P_1...P_k)^{ec}$ é um anel noetheriano. Como $R/(P_1...P_k)^{ec}/I/(P_1....P_k)^{ec} \simeq R/I$, R/I é imagem homomórfica de um anel noetheriano, logo R/I é um anel noetheriano e, pelo lema 4, podemos concluir que R é um anel noetheriano.

O exemplo a seguir , mostra que no corolario 2, a hipótese de S ser uma extensão inteira de R não pode ser dispensada.

Exemplo 5: Seja K um corpo e v uma valorização de K cujo grupo de valores é $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com a ordem lexicográfica. Seja R o anel de valorização de v em K. Sabemos que a dimensão de Krull de R é 2 [apêndice, proposição 12] e que, em virtude disto, R não é um anel noetheriano [apêndice, proposição 5]. Sejam $\langle 0 \rangle \subset P \subset M$ os ideais primos de R. Observe que R/P é um anel de valorização de seu corpo de frações, cujo grupo de valores é $\mathbb{Z}$ [apêndice, proposição12], portanto R/P é um anel noetheriano[apêndice, proposição 5]. Como R/M é um corpo e R/P é um anel noetheriano, então R é um anel RMX. Seja $x \in M|P$ e $S = R[\frac{1}{x}]$. S é um anel de valorização de K que contém propriamente R; de fato $S = R_{P.}$ Assim S é um anel de valorização de K cujo grupo de valores é $\mathbb{Z}$, logo noetheriano. Note que S não é de fato um R módulo finitamente gerado

Queremos salientar ainda que no corolário 2, não podemos substituir a hipótese de S ser um R módulo finitamente gerado, pela hipótese mais fraca de S ser apenas uma extensão inteira de R, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 6: Seja K um corpo que é uma extensão algébrica e infinita de $\mathbb{Q}$, o corpo dos números racionais. Seja X um elemento transcendental sobre K e $R = K[[X]]$ o anel das séries formais sobre K. Sejam L o corpo de frações de R, $\langle X \rangle$ o ideal máximo de R e $D = \mathbb{Q} + \langle X \rangle$. Como D e R têm o ideal $\langle X \rangle$ em comum então o corpo de frações de D é igual ao corpo de frações de R. Temos assim $D \subset R \subset L$. Mostraremos que R é uma extensão inteira de D. Dada $f(X) = \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_i X^i \in R = K[[X]]$. Temos $f(X) = a_0 + Xg(X)$ onde $a_0 \in K$ e $Xg(X) \in \langle X \rangle$. Como $a_0 \in K$ temos que a_0 é algebrico sobre $\mathbb{Q}$, portanto a_0 é inteiro sobre $D = \mathbb{Q} + \langle X \rangle$. O elemento $Xg(X) \in D$, logo $f(X)$ é inteiro sobre D. Logo R é uma extensão inteira de D. Por outro lado, sendo K um corpo, $R = K[[X]]$ é um anel noetheriano [apêndice, proposição 15] que possui um só ideal máximo, que é $\langle X \rangle$, e que portanto, pelo teorema do ideal principal [apêndice, proposição 17], tem altura 1. Logo R é um anel local noetheriano com dimensão de Krull igual a 1. Como R é uma extensão inteira de D, pelo teorema do *lying over*, D possui apenas dois ideais primos, a saber $\langle 0 \rangle$ e $\langle X \rangle$. Como $D/\langle X \rangle$ é um corpo, temos que D é um anel RMX. Mostraremos que D não é um anel noetheriano. Consideremos M um D submódulo de L gerado por $\frac{1}{X}$, isto é $M = D\frac{1}{X}$. É facil ver que $R = K[[X]] \subseteq M$ pois $f(X) = (Xf(X))\frac{1}{X} \in D\frac{1}{X}$. Se D fosse um anel noetheriano, M seria um D módulo noetheriano, portanto R sendo um D submódulo de M, seria um D módulo finitamente gerado.

Se R fosse um D módulo finitamente gerado, $R/\langle X \rangle$ seria um $D/\langle X \rangle$-módulo finitamente gerado, isto é, K seria um $\mathbb{Q}$ módulo finitamente gerado, o que contraria o fato de K ser uma extensão algébrica de $\mathbb{Q}$ de grau infinito. Logo D não é um anel noetheriano.

Observação: O que foi feito neste exemplo nos permite concluir que se $K_1 \subset K_2$ são corpos de característica zero, K_2 é uma extensão infinita de K_1, $R = K_2[[X]]$, X trancendente sobre K_2 e $\langle X \rangle$ é o seu ideal máximo, então $D = K_1 + \langle X \rangle$ não é um anel noetheriano.

Lema 5: *Sejam D um domínio com corpo de frações K e R um anel que contém D tal que $R \cap K = D$. Então todo ideal próprio de D contém um ideal próprio contraído.*

Prova:

Mostraremos que todo ideal principal de D é a contração de um ideal de R. Seja $a \in D$. É claro que $aD \subset (aR) \cap D$. Por outro lado dado $c \in (aR) \cap D$ existe $s \in R$ tal que $c = as$. Como $s = \frac{c}{a}$ temos que $s \in R \cap K = D$, logo $c \in aD$. Logo $aD = (aR) \cap D$.

Lema 6: *Sejam D um domínio RMX com corpo quociente K, R um anel que contém D que é um D-módulo finitamente gerado e $D^* = R \cap K$. Se D^* é um anel RMX então R é um anel noetheriano se, e somente se, D^* é um anel noetheriano. Se D *é um D-módulo finitamente gerado então R é um anel noetheriano se, e somente se, D é um anel noetheriano.*

Prova:

Mostraremos primeiramente que se D^* é um anel RMX então R é um anel noetheriano se, e somente se, D^* é um anel noetheriano. Seja D^* um anel RMX e R

um anel noetheriano; como R é um D-módulo finitamente gerado e $D \subset D^* \subset R$, é claro que R é um D^*-módulo finitamente gerado. Como $D \subset D^* \subset K$ e K é o corpo de frações de D então K é o corpo de frações de D^*. Por outro lado, $D^* \subset R$ e $R \cap K = D^*$ logo, pelo lema 5, todo ideal próprio de D^* contém a contração de um ideal próprio de R. Sejam I um ideal próprio de D^* então I contém um ideal próprio A de D^* que é a contração de um ideal de R. Como são satisfeitas as hipóteses do lema 2, para D^* e R existem $P_1, ..., P_k$ ideais primos próprios de D^* tais que $(P_1...P_k)^{ec} \subset A \subset I$. Pelo lema 3, $D/(P_1....P_k)^{ec}$ é um anel noetheriano. Pelo teorema dos isomorfismos $D^*/(P_1....P_k)^{ec}/I/(P_1....P_k)^{ec} \simeq D^*/I$; portanto D^*/I é um anel noetheriano para todo ideal próprio I de D^*. Logo, pelo lema 4, D^* é um anel noetheriano. Reciprocamente, se D^* é um anel noetheriano e R é um D^*-módulo finitamente gerado, então R é um anel noetheriano[apêndice, proposição1].

Agora mostraremos que se D^* é um D-módulo finitamente gerado então R é um anel noetheriano se, e somente se, D é um anel noetheriano.

Sendo D^* um D-módulo finitamente gerado e D um anel RMX, pelo corolário 1, D^* é um anel RMX. Se R é um anel noetheriano, podemos concluir pelo que foi visto acima D^* é um anel noetheriano. Do corolário 2 segue que D é um anel noetheriano.

Reciprocamente, se D é um anel noetheriano, como R é um D-módulo finitamente gerado então R é um anel noetheriano [apendice, proposição 1].

Lema 7: *Sejam D um domínio com corpo de fracões K, L um corpo que contém K e q um elemento de L inteiro sobre D. Então há um domínio $D^* \subset K$ que satisfaz*

a) $D^* \supset D$ e D^* é um D-módulo finitamente gerado.

b) $D^*[q]$ é um $D[q]$-módulo finitamente gerado.

c) $D^*[q] \cap K = D^*$

Prova:

Seja $t_0 + t_1X + ... + X^{k+1}$ o polinômio mínimo de q sobre K. O conjunto $\{1, q, ..., q^k\}$ é uma base de $K(q)$ como K-espaço vetorial. Como q é inteiro sobre D, então $t_0, ..., t_k$ são inteiros sobre D [apêndice, proposição 6]. Sejam $D^* = D[t_0, ..., t_k]$ e $R = D^*[q] = D[t_0, ..., t_k, q]$. Como $t_0, ..., t_k$ e q são inteiros sobre D, temos que D^* é um D-módulo finitamente gerado e que R é um $D[q]$-módulo finitamente gerado. Resta ver que $D^* = R \cap K$. É claro que $D^* \subseteq K \cap R$. Para mostrar que $K \cap R \subseteq D^*$, mostraremos primeiramente que $\{1, q, ..., q^k\}$ é um conjunto gerador de R como D^*-módulo. Para tanto, como todo elemento j de R pode ser escrito como $j = c_0 + c_1q + .. + c_lq^l$ *com* $l \in \mathbb{N}$ e $c_0, ..., c_l \in D^*$, basta mostrar que $q^{k+1}, q^{k+2}, \ldots$ pertencem a $D^* + D^*q + \ldots. + D^*q^k$. Observe que $q^{k+1} = -t_0 - t_1q - \ldots - t_kq^k \in D^* + D^*q + \ldots. + D^*q^k$. Se $q^{k+i} \in D^* + D^*q + \ldots. + D^*q^k$ então existem $c_0, c_1, \ldots, c_k \in D^*$ tais que $q^{k+i} = c_0 + c_1q + \ldots. + c_kq^k$, segue daí que $q^{k+i+1} = c_0q + c_1q^2 + \ldots. + c_kq^{k+1} = c_0q + c_1q^2 + \ldots. + c_{k-1}q^k + c_k(-t_0 - t_1q - \ldots - t_kq^k) =$

$= -t_0c_k + q(c_0 - c_kt_1) + \ldots + (c_{k-1} - t_kc_k)q^k \in D^* + D^*q + \ldots. + D^*q^k$. Logo, por indução, temos que R é um D^*-módulo gerado por $\{1, q, \ldots, q^k\}$. Seja $z \in R \cap K$. Pelo que acabamos de ver, existem $a_0, \ldots, a_k \in D^*$ tais que $z = a_0 + a_1q + \ldots + a_kq^k$. Por outro lado $\{1, q, \ldots, q^k\}$ é base de $K(q)$ como K-espaço vetorial, logo um elemento de $K(q)$ pode ser escrito de uma maneira única como combinação linear com coeficientes em K desta base. Como $D^* \subset K$, pois, $t_0, \ldots., t_k \in K$ temos que $z = k_01$. Comparando as duas maneiras de escrever z temos que $a_0 = k_0$, $a_1 = \ldots. = a_k = 0$. Logo $z = a_0 \in D^*$, o que finaliza a prova do lema 7.

Teorema 1: *Seja D um domínio RMX. Suponha que S é um domínio tal que $D \subset S$ e S é um D-módulo finitamente gerado. Então S é um anel noetheriano se, e somente se, D é um anel noetheriano.*

Prova:

Sejam $q_1, \ldots, q_n$ elementos de S inteiros sobre D tais que $S = D[q_1, \ldots, q_n]$. Se D é um anel noetheriano então S também é um anel noetheriano[apêndice, proposição 1]. A recíproca será mostrada por indução em n. Suponha $n = 1$, isto é, $S = D[q_1]$. Sejam K e L o corpo quociente de D e S respectivamente. Pelo lema 7, existe D^* um domínio com corpo quociente K, tal que, $D^* \supset D$, D^* é um D-módulo finitamente gerado e $D^* = D^*[q_1] \cap K$. Como $S = D[q_1]$ é um anel noetheriano e $D^*[q_1]$ é um S-módulo finitamente gerado, então $D^*[q_1]$ é um anel noetheriano.Além disto, $D^*[q_1]$ é um D-módulo finitamente gerado, D é um anel RMX, D^* é um D-módulo finitamente gerado e $D^*[q_1]$ é um anel noetheriano, segue do lema 6, que D é um anel noetheriano. Suponha que $n > 1$ e que o resultado vale para $n - 1$. Como, pelo corolário 1, $D[q_1]$ é um domínio RMX, e $S = D[q_1][q_2, ..., q_n]$ é um domínio noetheriano que é uma extensão inteira de $D[q_1]$ então, por indução $D[q_1]$ é um anel noetheriano. Decorre do caso $n = 1$ que D é um anel noetheriano.

Lema 8: *Suponha $R \subset S$ anéis, com S uma extensão inteira de R. Então se a condição da cadeia ascendente para ideais primos vale em S também valerá para R.*

Prova:

Dado uma cadeia de ideais primos em R, $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset ...$, como S é uma extensão inteira de R, teremos que existem ideais primos Q_i em S tais que

$Q_i \cap R = P_i$ e $Q_1 \subset Q_2 \subset ...$,[apêndice, proposição8]. Mas, S satisfaz a condição da cadeia ascendente para ideais primos, com isto existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $Q_j = Q_{j+n}$ para todo n natural. Logo, podemos concluir que $P_j = P_{j+n}$ para todo n natural [apêndice, proposição 8].

Teorema 2: *Sejam $R \subset S$ anéis com S um R-módulo finitamente gerado então S é um anel noetheriano se, e somente se, R é um anel noetheriano.*

Prova:

A suficiencia é bem conhecida [apêndice, proposição 1].

Sendo S um anel noetheriano, S satisfará a condição da cadeia ascendente para ideais primos; pelo lema 8, R também satisfará a condição da cadeia ascendente para ideais primos. Queremos mostrar que R é um anel RMX de onde decorrerá, pelo teorema 1, que R é um anel noetheriano. Suponha o contrário, isto é, que R não seja um anel RMX, então $F = \{P \mid P$ é ideal primo próprio de R e R/P um anel não noetheriano$\}$ é, claramente, não vazio. O fato de R satisfazer a condição da cadeia ascendente para os ideais primos é equivalente a R satisfazer a "condição do máximo" para os ideais primos. Logo F possui um elemento máximo. Seja M esse elemento máximo. Afirmamos que o anel R/M é um anel RMX. De fato, para todo ideal primo próprio $\overline{J}$ *de* R/M existe J, um ideal primo de R tal que,

$M \subset J \subset R$, $\overline{J} = J/M$, $R/M/J/M \simeq R/J$. Se R/J não fosse anel noetheriano, contradiria o fato de M ser o elemento máximo de F. Logo R/J é um anel noetheriano. Concluimos assim que R/M é um anel RMX

Pelo teorema do *lying over* existe Q um ideal primo de S tal que $Q \cap R = M$. Como R/M é um domínio RMX, $R/M \hookrightarrow S/Q$, S/Q é um R/M-módulo finitamente gerado e S/Q é um anel noetheriano. Então, pelo teorema 1, temos que R/M é um anel noetheriano, o que contradiz o fato que $M \in F$. Logo $F = \emptyset$ e R é um anel RMX.

Se S é domínio, aplicando o teorema 1, então obtemos que R é um anel noetheriano.

Se S não for um domínio temos dois casos a considerar. No primeiro caso suponhamos que exista um ideal primo Q de S que se contraia ao ideal nulo de R. Neste caso temos $R \hookrightarrow S/Q$ e aplicando o teorema 1, obtemos que R é um anel noetheriano. No outro caso, temos que todo ideal primo próprio de S se contrai a um ideal primo próprio de R. Como S é um anel noetheriano que não é um domínio, $\langle 0 \rangle = Q_1 ... Q_k$ onde $Q_1, ..., Q_k$ são ideais primos próprios de S. Os ideais $Q_1^c, ..., Q_k^c$ são ideais primos próprios de R. Como R é um anel RMX, S é um anel noetheriano que é um R-módulo finitamente gerado, $Q_1^c, ..., Q_k^c$ são ideais primos próprios de R então, pelo lema 3, $R/(Q_1^c ... Q_k^c)^{ec}$ é um anel noetheriano. Por outro lado, $(Q_1^c...Q_k^c)^{ec} = (Q_1^{ce}...Q_k^{ce})^c \subseteq \langle 0\rangle^c = \langle 0\rangle$, logo $R/\langle 0\rangle \simeq R/(Q_1^c...Q_k^c)^{ec}$, portanto R é um anel noetheriano.

Proposição 2: *Seja R um anel que não é um domínio, no qual, para todo ideal próprio I tem-se que R/I é um anel artiniano, então R é um anel artiniano.*

Prova:

Como para todo ideal próprio I de R, R/I é um anel artiniano então R/I é um anel noetheriano e todo ideal primo de R/I é um ideal máximo. Se R/I é um anel noetheriano, para todo ideal próprio I de R então, pelo lema 4, temos que R é um anel noetheriano. Por outro lado, se P é um ideal primo de R, R/P é um anel artiniano logo R/P é um corpo e P é um ideal máximo de R. Assim R é um anel noetheriano no qual todo ideal primo é um ideal máximo, logo R é um anel artiniano.

Proposição 3: *Sejam S e R anéis, $R \subset S$ e S um R-módulo finitamente gerado. Então S é um anel artiniano se, e somente se, R é um anel artiniano.*

Prova:

É bem conhecido que se R é um anel artiniano, então S é um anel artiniano [apêndice, proposição 1].

Se S é um anel artiniano então S é um anel noetheriano no qual todo ideal primo é um ideal máximo. Sendo S um R-módulo finitamente gerado e S um anel noetheriano, pelo teorema 2, concluimos que R é um anel noetheriano. Por outro lado, como S é uma extensão inteira sobre R, logo $\dim S = \dim R = 0$. Portanto R é um anel artiniano.

Neste exemplo veremos uma aplicação basicamente técnica do teorema 2.

Exemplo 7: Seja K um corpo e $X_1, ..., X_k$ um número finito de váriaveis sobre K. Seja $K[X_1, ..., X_k]$, o anel de polinômios sobre K, $n \in \mathbb{N}$ e $\langle X_1, ..., X_k \rangle^n$ um ideal de $K[X_1, ..., X_k]$. Seja $D = K + \langle X_1, ..., X_k \rangle^n$. Então D é um anel noetheriano, mostrando que $K[X_1, ..., X_k]$ é um D-módulo finitamente gerado e usando o teorema 2. Para mostrar que $K[X_1, .., X_k]$ é um D-módulo finitamente gerado, basta verificar que $K[X_1, ..., X_k] = D[X_1, ..., X_k]$ e que $X_1, ..., X_k$ são inteiros sobre D [apêndice, proposição 7]. Para cada $i \in \{1, .., k\}$, considere o polinômio mônico $h_i(Z) \in D[Z]$, definido por $h_i(Z) = Z^n - X_i^n$. Observe que $h_i(X_i) = X_i^n - X_i^n = 0$. Logo X_i é inteiro sobre D. Como $K \subseteq D$, tem-se $K[X_1, .., X_k] \subseteq D[X_1, .., X_k]$. Por outro lado $D \subseteq K[X_1, ..., X_k]$, logo $D[X_1, ..., X_k] \subseteq K[X_1, ..., X_k]$, portanto $K[X_1, ..., X_k] = D[X_1, ..., X_k]$.

Proposição 4: *Sejam D um domínio inteiramente fechado e K o corpo quociente e L uma extensão finita separável de K. Seja J o fecho inteiro de D em L. Então existe $\alpha \in J$ tal que $L = K(\alpha)$.*

Prova:

Pelo teorema do elemento primitivo[apêndice, proposição 11] existe $l \in L$ tal que $L = K(l)$. Afirmamos que podemos escolher $l \in J$. Para tanto considere $X^n + k_{n-1}X^{n-1} + ... + k_1X + k_0$ o polinômio mínimo de l sobre K. Sejam $d_0, ..., d_{n-1}, d \in D$ tal que $k_i = \frac{d_i}{d}$. Seja $\alpha = dl$. Observe que $(dl)^n + (dl)^{n-1}d_{n-1} + ... + (dl)d_1d^{n-2} + d_0d^{n-1} = d^n(l^n + \frac{d_{n-1}}{d}l^{n-1} + ... + \frac{d_1}{d}l + \frac{d_0}{d}) = 0$. Logo dl é inteiro sobre D , portanto $dl \in J$. Como $K(l) = K(dl)$, pois $d \in K$ então $L = K(dl)$ com $dl \in J$.

Gilmer em[2], perguntou se, com as mesmas hipóteses da proposição 4, se J for um anel noetheriano podemos garantir que D é um anel noetheriano?

A pergunta não será respondida inteiramente, mas faremos duas observações. Pela proposição 4, existe $\alpha \in J$ tal que $L = K(\alpha)$. Seja $\{1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}\}$ uma base de L sobre K. Se T é o traço[apêndice, definição], seja $\varphi = \{\beta \in L \ / \ T(\beta J) \subseteq D\}$. Afirmamos que φ é um J-módulo. De fato, dados β_1, $\beta_2 \in \varphi$, temos que $T((\beta_1 + \beta_2)J) = T(\beta_1 J + \beta_2 J) = T(\beta_1 J) + T(\beta_2 J) \subseteq D + D = D$, o que implica $\beta_1 + \beta_2 \in \varphi$. Além disso, $\beta \in \varphi$ e $\zeta \in J$ então $T(\zeta\beta J) \subseteq T(\beta J) \subset D$, podemos concluir que $\zeta\beta \in \varphi$. Logo φ é um J-módulo. Além disto, $J \subseteq \varphi$ pois dado

$x \in J$, $T(x)$ é um dos coeficientes do pôlinomio mínimo de x sobre K, que é um polinômio que pertence a $D[X]$. Logo $J \subseteq \varphi$.

Mostraremos que se Δ é o discriminante de L sobre K,onde $\Delta = \det(T(\alpha^i\alpha^j))$, então $\varphi \subset D\frac{1}{\Delta}+D\frac{\alpha}{\Delta}+...+D\frac{\alpha^{n-1}}{\Delta}$. Em particular, se $\frac{1}{\Delta} \in D$ então $\varphi \subset D\frac{1}{\Delta}+D\frac{\alpha}{\Delta}+...+D\frac{\alpha^{n-1}}{\Delta}$ logo $J \subseteq \varphi \subseteq D\frac{1}{\Delta}+D\frac{\alpha}{\Delta}+...+D\frac{\alpha^{n-1}}{\Delta} \subset J$, portanto $J = D\frac{1}{\Delta}+D\frac{\alpha}{\Delta}+...+D\frac{\alpha^{n-1}}{\Delta}$. Desta maneira J é um D-módulo finitamente gerado e pelo teorema 2, D é um anel noetheriano. Se $z \in \varphi$, $z = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i$, com $a_i \in K$, então $z\alpha^j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^{i+j}$ e daí $T(z\alpha^j)=\sum_{i=0}^{n-1} a_iT(\alpha^i\alpha^j)$. Como L é uma extensão sepáravel de K, $\Delta = \det(T(\alpha^i\alpha^j))$ não é nulo[apêndice, proposição 18]. Como $T(\alpha^i\alpha^j) \in D$ para todo i,j obtemos, aplicando a regra de Cramer, que $\Delta a_i \in D$, para todo $i = 1, ..., n$. Dessa maneira podemos escrever $z = \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta a_i)\frac{1}{\Delta}\alpha^i = \sum_{i=0}^{n-1} d_i\frac{\alpha^i}{\Delta} \in D\frac{1}{\Delta}+...+D\frac{\alpha^{n-1}}{\Delta}$. Logo $\varphi \subseteq D\frac{1}{\Delta}+...+D\frac{\alpha^{n-1}}{\Delta}$.

Como foi falado anteriormente se o discriminante é um elemento inversível de D, conseguimos mostrar que D é um anel noetheriano. No outro caso se $\frac{1}{\Delta} \notin D$, não conseguimos mostrar que D é um anel noetheriano, mas mostraremos que D é a intersecção de um domínio de Krull noetheriano com um número finito de anéis de valorização discreta de posto 1.

Considere $J[\frac{1}{\Delta}]$ que é uma extensaõ inteira de $D[\frac{1}{\Delta}]$. Como $\frac{1}{\Delta} \in D[\frac{1}{\Delta}]$ então, pelo que vimos anteriormente, podemos concluir que $J[\frac{1}{\Delta}]$ é D$[\frac{1}{\Delta}]$-

módulo finitamente gerado. Como J é um anel noetheriano, então $J[\frac{1}{\Delta}]$ é um anel noetheriano e pelo teorema 2, $D[\frac{1}{\Delta}]$ é um anel noetheriano.

Por outro lado J é domínio inteiramente fechado e é um domínio noetheriano, logo J é um domínio de Krull[apendice, proposição 9]. Como $D = J \cap K$, então D é um domínio de Krull.

Seja $\Im = \{1, \Delta, \Delta^2, ...\}$, é fácil ver que $D[\frac{1}{\Delta}] = D_{\Im} = \bigcap_{altP=1\, e\, \Delta \notin P} D_P$, portanto $D[\frac{1}{\Delta}]$ é um domínio de krull noetheriano. Sejam $P_1, ..., P_n$ primos de altura 1 de D que contém Δ, logo $D = \underset{altP=1\, e\, \Delta\notin P}{(\cap D_P)} \cap D_{P_1} \cap D_{P_2} \cap .... \cap D_{P_n} = D[\frac{1}{\Delta}] \cap D_{P_1} \cap D_{P_2} \cap .... \cap D_{P_n}$[apêndice, proposição 10], onde D_{P_i} ($i = 1, ..., n$) são anéis de valorização discreta de dimensão 1.

Observação: No caso em que D tem dimensão de Krull igual a 1, poderemos concluir que D é um domínio noetheriano. Isto é claro, pois, quando o discriminante não é um elemento inversível de D, vimos que D é um domínio de Krull, mas todo domínio de Krull de dimensão 1 é um domínio noetheriano.

O próximo exemplo mostra que nem sempre intersecção de anéis noetherianos é um anel noetheriano.

Exemplo 8: Seja K um corpo de característica zero, X transcendente sobre K. Considere $D = K(X)[[Y]]$ o anel das séries formais com coeficientes em

$K(X)$, e $\langle Y\rangle$ o seu único ideal máximo. É fácil ver que $D = K(X) + \langle Y\rangle$. Sejam $R = K(X^2) + \langle Y\rangle$ e $J = K(X^2 + X) + \langle Y\rangle$ subanéis de D. Neste caso, veremos que R e J são anéis noetherianos e $R \cap J$ não é um anel noetheriano. Como$[K(X) : K(X^2)] = 2$, $\{1, X\}$ é um conjunto gerador de $K(X)$ como $K(X^2)$-módulo. Mostraremos que $\{1, X\}$ gera D como R-módulo. É claro que $R + RX \subseteq D$. Por outro lado $f \in D$, temos $f = g + h$ com $g \in K(X)$ e $h \in \langle Y\rangle$. Como $\{1, X\}$ é uma base de $K(X)$ como $K(X^2)$-espaço vetorial, logo podemos escrever $g = 1g_1 + Xg_2$ onde g_1 e $g_2 \in K(X^2) \subset D$. Temos assim $f = 1(g_1 + h) + g_2X0$ onde $g_1 + h \in K(X^2) + \langle Y\rangle = R$ e $g_2 \in K(X^2) \subset R$. Daí D é um R-módulo gerado por $\{1, X\}$. Logo, pelo teorema 2, R é um anel noetheriano. Analogamente, como $[K(X) : K(X^2+X)] = 2$, mostra-se que $\{1, X\}$ é um conjunto gerador de D como J-módulo. Pelo teorema 2, podemos concluir que J é um anel noetheriano.

Mostraremos que $R \cap J = K + \langle Y\rangle$. Decorrerá da observação que segue o exemplo 2 que $R \cap J$ não é um anel noetheriano. Para mostrar que $R \cap J = K + \langle Y\rangle$, basta mostrar que $K(X^2) \cap K(X^2 + X) = K$ e o faremos através de várias afirmações.

Afirmação 1: $K(X^2) \cap K[X] = K[X^2]$. É imediato que $K(X^2) \cap K[X] \supseteq K[X^2]$. Suponha que a outra inclusão seja falsa e escolha $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in K(X^2) \cap K[X] \setminus K[X^2]$. Como $f(X) \notin K[X^2]$ existe j ímpar tal que $a_j \neq 0$. Seja $i = \max\{j$

/ j ímpar e $a_j \neq 0\}$. Sejam $g(X^2) = \sum_{i=0}^{t} b_{2i}X^{2i}$, $h(X^2) = \sum_{i=0}^{m} c_{2i}X^{2i} \in K[X^2]$ não nulos, com $b_{2t} \neq 0$ e $c_{2m} \neq 0$ tais que $f(X) = \frac{g(X^2)}{h(X^2)}$. Como i é impar o coeficiente de X^{2m+i} em $g(X^2)$ é nulo. Por outro lado $g(X^2) = h(X^2)f(X)$ logo $0 = b_{2m+i} = c_{2m}a_i + c_{2m-2}a_{i-2} + ... + c_0a_{2m+i}$.

Pela escolha de i, se j é ímpar e $j > i$ então $a_j = 0$. Logo $0 = b_{2m+i} = c_{2m}a_i$; como $a_i \neq 0$ temos $c_{2m} = 0$ contrariando a escolha de $h(X)$. Logo não existe $f(X) \in K(X^2) \cap K[X] \backslash K[X^2]$, daí $K(X^2) \cap K[X] \subseteq K[X^2]$. Portanto $K(X^2) \cap K[X] = K[X^2]$.

Afirmação 2: $K[X^2] \cap K(X^2 + X) = K$. É claro que só precisa ser verificado que $K[X^2] \cap K(X^2 + X) \subseteq K$.

Suponhamos que $K[X^2] \cap K(X^2 + X) \neq K$. Seja $h(X^2) = a_0 + a_2X^2 + ... + a_{2n}X^{2n}$ um polinômio de $K[X^2]\backslash K$ que pertença a $K(X^2 + X)$ e que tenha grau mínimo dentre os polinômios que têm esta propriedade. Sejam $f(X^2 + X)$ e $g(X^2 + X) \in K(X^2 + X)$ tais que $h(X^2) = \frac{g(X^2+X)}{f(X^2+X)}$ isto é, $f(X^2 + X)h(X^2) = g(X^2 + X)$. Podemos escrever $f(X^2 + X) = b_0 + b_1(X^2 + X) + ... + b_k(X^2 + X)^k$ com $b_k \neq 0$ e $g(X^2+X) = c_0+c_1(X^2+X)+...+c_{n+k}(X^2+X)^{n+k}$ com $c_{n+k} \neq 0$. O único monômio de $f(X^2 + X)h(X^2)$ de grau $2n + 2k$, é $a_{2n}b_kX^{2n+2k}$ que deve ser igual ao único monômio de $g(X^2 + X)$ de grau $2n + 2k$, que é $c_{n+k}X^{2n+2k}$. Do mesmo modo, o único monômio de $f(X^2 + X)h(X^2)$ de grau $2n + 2k - 1$ é

$a_{2n}b_kkX^{2n+2k-1}$ que deve ser igual ao monômio de $g(X^2+X)$ de grau $2n+2k-1$, que é $(n+k)b_kX^{2n+2k-1}$. Temos assim que $a_{2n}b_k = c_{n+k}$ e $ka_{2n}b_k = (n+k)c_{n+k}$. Daí $kc_{n+k} = (n+k)c_{n+k}$. Como $n \geq 1$ e característica de K igual a zero então $c_{n+k} = 0$ o que contraria a escolha de $g(X^2+X)$. Logo $K[X^2] \cap K(X^2+X) \subseteq K$.

Observe que $(K(X^2+X) \cap K(X^2)) \cap K[X] = K(X^2+X) \cap (K(X^2) \cap K[X]) = K(X^2+X) \cap K[X^2] = K$. Segue da afirmação 3, a seguir, que $K(X^2+X) \cap K(X^2) = K$.

Afirmação 3: Se L é um corpo tal que $K \subseteq L \subseteq K(X)$ e tal que $L \cap K[X] = K$ então $[K(X) : L] = \infty$ e $L = K$.

Se $[K(X) : L]$ fosse finito, X seria algébrico sobre L. Seja $f(Z) = Z^n + l_{n-1}Z^{n-1} + ... + l_1Z + l_0 \in L[Z]$ o polinômio mínimo de X sobre L. Como $L \neq K(X)$, pois $L \cap K[X] = K$, então $n > 1$. Mostraremos que $l_1, ..., l_{n-1} \in K$ de onde concluiremos que $-l_0 = l_1X + ... + l_{n-1}X^{n-1} + X^n \in K[X] \cap L$. Como $K[X] \cap L = K$ teremos que $l_1X + ... + l_{n-1}X^{n-1} + X^n \in K$, o que não pode acontecer, pois X é transcendente sobre K. Logo $[K(X) : L]$ não pode ser finito. Seja $s = \min\{j \ / \ j > 1 \text{ e } l_j \neq 0\}$. Como $l_sX^s + ... + l_{n-1}X^{n-1} + X^n \in L[X] \subset K(X)$, temos que existem $g(X) = \sum_{i=i_0}^{t} a_iX^i \in K[X]$ com $a_{i_0} \neq 0$ e $h(X) = \sum_{j=j_0}^{m} b_jX^j \in K[X]$ com $b_{j_0} \neq 0$ tais que $(b_{j_0}X^{j_0} + ... + b_mX^m)(l_sX^s + ... + l_{n-1}X^{n-1} + X^n) = a_{i_0}X^{i_0} + ... + a_tX^t$.

Decorre daí que $l_s b_{j_0} = a_{i_0}$, logo $l_s \in K$. Suponhamos que $l_s, l_{s+1}, ..., l_i \in K$ e mostremos que $l_{i+1} \in K$. Sabemos que $a_{j_0+i+1} = l_s b_{j_0+i+1-s} + l_{s+1} b_{j_0+i-s} + ... + l_{i+1} b_{j_0}$, logo $b_{j_0} l_{i+1} = a_{i+j_0+1} - l_s b_{j_0+i+1-s} - l_{s+1} b_{j_0+i-s} - ... - l_i b_{j_0+1} \in K$. Logo $l_{i+1} \in K$ pois $b_{j_0} \neq 0$.

Mostremos que $L = K$. Se $L \neq K$ então existiria $\alpha \in K(X) \backslash K$, $\alpha \in L$. Sejam $f(X)$,$g(X) \in K[X]$ tal que $\alpha = \frac{f(X)}{g(X)}$. Considere $f(Z) - \alpha g(Z) \in L[Z]$ que é um polinomio que anula X, pois, $f(X) - \alpha g(X) = f(X) - \frac{f(X)}{g(X)} f(X) = 0$. Além do mais $f(Z) - \alpha g(Z) \neq 0$, pois $f(0) - \alpha g(0) \neq 0$ caso contrário $\alpha \in K$. Concluimos daí que X é algébrico sobre L e portanto $[K(X) : L]$ é finito, o que não pode acontecer. Logo $L = K$.

APÊNDICE

Proposição 1[1, VI, th5]:*Se A é um anel noetheriano(artiniano) e M um A-módulo finitamente gerado, então M é um A-módulo noetheriano(artiniano).*

Proposição 2[7, IV, pg 200]:*Se A um anel noetheriano, todo ideal I de A conterá um produto de um número finito de ideais primos.*

Proposição 3(Cohen)[5, III, th4]:*Se todos os ideais primos do anel A são finitamente gerados então A é um anel noetheriano.*

Proposição 4[1, II, pg19]:*Se A um anel, M um* A-módulo *e I um ideal de A contido no anulador de M* como A-módulo, *então M* é *um A/I-módulo(com as operações usuais).*

Proposição 5[5, IV, th11.1]:*Seja R um anel de valorização. Então as seguintes condições são equivalentes:*

a) R é um anel de valorização discreta de posto 1.

b) R é um domínio de ideais principais.

c) R é um anel noetheriano.

Proposiçaõ 6[7, IV, th4]:*Sejam A um domínio e K o corpo de frações de A. Seja x um elemento de alguma extensão de K tal que x é um elemento inteiro sobre A. Então x é algébrico sobre K e os coeficentes do polinômio mínimo de x sobre K são inteiros sobre A.*

Proposição 7[7, V, th1]:*Sejam A, B anéis tal que $A \subset B$. Sejam $x_1, ..., x_n \in B$ tais que $x_1, ..., x_n$ são inteiros sobre A. Então $A[x_1, ..., x_n]$ é A-módulo finitamente gerado.*

Proposição 8[1, I, th44]:*Sejam R, T anéis tais que $R \subset T$ e T é uma extensão inteira de R. Então valem os seguintes resultados:*

a) Dado P um ideal primo de R, existe um ideal primo Q de T tal que $Q \cap R = P$.

b) Dados ideais primos P_1 e P_2 de R tais que $P_1 \subset P_2$. Se Q_1 é um ideal primo de T tal que $Q_1 \cap R = P_1$, então existe um ideal primo Q_2 de T tal que $Q_1 \subset Q_2$ e $Q_2 \cap R = P_2$.

c) Dado um ideal primo P de R tais que existem Q_1, Q_2 ideais primos de T tais que $Q_1 \cap R = P_1$ e $Q_2 \cap R = P_2$. Então os ideais primos P_1 e P_2 não são comparáveis.

Proposição 9[6, V, th33.4]:*Seja D um domínio. Se D for um domínio noetheriano e se além disso for inteiramente fechado então D é um domínio de krull.*

Proposição 10[6, V, th33.5]:*Sejam R um domínio, K o seu corpo de frações. Suponha que um conjunto F de anéis de valorizações noetherianos de K satisfaça as seguintes condições:*

a) R é a intersecção de todos $V \in F$.

b)Se $a \in R$, $a \neq 0$ então há somente um número finito de $V \in F$ tais que a não é inversível em V.

Seja S um subconjunto multiplicativo fechado de R tal que $0 \notin S$ e seja $F' \subset F$ consistindo de todos os anéis V nos quais todo elemento de S é uma unidade . Então $R_S = \bigcap_{V \in F'} V$.

Proposição 11[7, II, th19]:*Seja K um corpo e L uma extensão separável e* *finita de K, então existe $\alpha \in L$ tal que $L = K(\alpha)$.*

Proposição 12[1, V, exercício 32]:*Seja Γ um grupo abeliano totalmente ordenado. Seja A um anel de valorização de um corpo K, cujo grupo de valores é Γ. Então existe um correspondencia biunívoca entre os ideais primos de A e os subgrupos isolados de Γ. Além disso, dado P um ideal primo de A, se H é o subgrupo isolado de Γ correspondente então os grupos de valores de A/P e A_P são H e G/H respectivamente.*

Proposição 13[1, VI, th2]:*Sejam A um anel e M um A-módulo. M é um A-módulo noetheriano se, e somente se, todo submódulo de M é finitamente gerado.*

Proposição 14(1, VI, th6]:*Se A é um anel noetheriano(artiniano) e I um ideal qualquer de A então A/I é um anel noetheriano(artiniano).*

Proposição 15[5, I, th3.3]:*Se A é um anel noetheriano então $A[[X]]$ é um anel noetheriano.*

Seja L uma extensão finita de K, de grau n. Para cada $x \in L$ considere a função K-linear $F_x : L \to L$ definida por $F_x(l) = xl$. Seja $p_x(X) \in K[X]$ o polinômio característico de F_x. É claro que $p_x(X)$ tem grau n.

Definição: *A função $T : L \to K$ que a cada $x \in L$ asssocia o coeficiente de X^{n-1} do polinômio $p_x(X)$ é chamado o traço da extensão e denotada $T_{L|K}$.*

Quando não houver confusão quanto a extensão costuma-se omitir o índice o traço simplesmente por T. È fácil ver que [7, II, pg88] que $T(x+y) = T(x)+T(y)$ e $T(kx) = kT(x)$ para todo $x, y \in L$ e $k \in K$.

Proposição 16[1, I, prop.17]:*Sejam $R \subset S$ anéis. São válidos os seguintes resultados:*

a) Para todo ideal I de R e todo ideal J de S temos que $I \subseteq I^{ec}$ e $J \supseteq J^{ce}$

b) Se $C = \{I$, ideal de R / $I^{ec} = I$ } o conjunto dos ideais contraídos de R e se $E =\{I$, ideal de R / $J^{ce} = J$ } o conjunto de ideais estendidos de S, então há uma aplicação $\vartheta : C \to E$ tal que para cada $I \in C$ aplica em I^e é uma aplicação bijetiva.

Proposição 17[4, III, th142]:*Se R é um anel noetheriano, I um ideal principal de R e P um ideal primo mínimo do ideal I então alt$P \leq 1$.*

Proposição 18[7, II, th22]: *Sejam $K \subset L$ corpos. O corpo discriminante da extensão $L|_K$ é zero se e somente se L é uma extensão insepárавel de K.*

BIBLIOGRAFIA

[1] Atiyah, M.F. e Macdonald,I.G., Introduction to commutative Algebra, 1969.

[2]Gilmer, Robert W., Contracted Ideals With Respect To Integral Extensions, Duke Math. J., vol.34, pg561-572,1967.

[3]Jr,Paul M. Eakin, The Converse to a Well Known Theorem on Noetherian rings, Math.Annalen, 177, pg278-282,1968.

[4]Kaplansky,I., Commutative rings, Chicago,1970.

[5]Matsumura,H., Commutative ring theory, Nova York 1986.

[6]Nagata, Masayosh, Local Rings, Nova York, 1962.

[7]Zariski, O. e Samuel,P., Commutative Algebra Volume I, Prince-

ton, 1958.

[8]Zariski, O. e Samuel, P., Commutative Algebra Volume II, Princeton, 1958

GRÁFICA UFRGS

Impressão: Gráfica UFRGS
Rua Ramiro Barcelos, 2705 - 1º andar
Fone: 316 5088 Fax: 316 5083 - Porto Alegre - RS
E-mail: grafica@vortex.ufrgs.br