

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Jogos Evolucionários sobre Grafos Bipartidos Completos e Estrelas Duplas

por

Vanessa de Azeredo Abreu

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes
Orientador

Porto Alegre, Agosto de 2018.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Abreu, Vanessa de Azeredo

Jogos Evolucionários sobre Grafos Bipartidos Completos e Estrelas Duplas / Vanessa de Azeredo Abreu.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2018.

85 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2018.

Orientador: Moraes, Jean Carlo Pech de

Dissertação: Matemática Aplicada,
Sistemas Não-Lineares e Biomatemática

Jogos Evolucionários sobre Grafos Bipartidos Completos e Estrelas Duplas

por

Vanessa de Azeredo Abreu

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a
obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Sistemas Não-Lineares e Biomatemática

Orientador: Prof. Dr. Jean Carlo Pech de Moraes

Banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Elisa Regina Cara
UNIPAMPA

Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen
PPGMAp-UFRGS

Prof^a. Dr^a. Virgínia Maria Rodrigues
PPGMAp-UFRGS

Prof. Dr. Evandro Manica
IME-UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
01 de Agosto de 2018.

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Coordenador

Sumário

LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE SÍMBOLOS E TERMOS ESPECÍFICOS	v
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1 INTRODUÇÃO	1
2 TEORIA CLÁSSICA DOS JOGOS	4
2.1 Noções Elementares	4
2.2 Soluções de um Jogo	8
2.3 Estratégias Mistas	13
2.4 Soluções em Estratégias Mistas	14
2.5 O Teorema de Equilíbrio de Nash	16
2.6 Jogos Sequenciais ou de Forma Extensa	20
3 DINÂMICA DE REPLICAÇÃO E JOGOS EVOLUCIONÁRIOS	22
3.1 Equação de Replicação	22
3.2 Teoria dos Jogos Evolucionários	25
3.3 Teoria dos Jogos Evolucionários sobre Populações em Rede (Grafos)	29
3.3.1 Jogos Não-Cooperativos sobre Grafos	29
3.3.2 Pagamentos para Jogos sobre Grafos: estratégias puras	30
3.3.3 Pagamentos para Jogos sobre Grafos: estratégias mistas	31
3.4 Equação para a Dinâmica do Jogo sobre Populações em Rede	32
3.4.1 Modelo Evolutivo para o Caso $(N, 2)$ -Jogo	35

4	MODELO EVOLUTIVO PARA A DINÂMICA DO JOGO RE- PRESENTADO POR UM GRAFO BIPARTIDO COMPLETO	43
4.1	Caso Geral para um Grafo Bipartido Completo	43
4.1.1	Duas Matrizes de Pagamento	44
4.1.2	Uma Matriz de Pagamento	52
4.2	Estudo da Estabilidade de Pontos de Equilíbrio Puro	55
4.2.1	Matriz de Pagamento de (Biestabilidade)	57
4.2.2	Matriz de Pagamento de (Coexistência)	60
4.2.3	Um caso Mutante para Matrizes de Biestabilidade e Coexistência	65
5	SIMULAÇÕES ESTENDIDAS E RESULTADOS PARA UM GRAFO ESTRELA DUPLA	68
5.1	Modelo Evolutivo para um Grafo Estrela Dupla	68
5.1.1	Uma Matriz de Pagamento	69
5.2	Estudo da Estabilidade de Pontos de Equilíbrio Puro	74
5.2.1	Matriz de Pagamento de (Biestabilidade)	75
5.2.2	Matriz de Pagamento de (Coexistência)	77
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	80
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83

Lista de Figuras

Figura 2.1	Matriz de <i>payoffs</i> para o dilema do prisioneiro.	7
Figura 2.2	Matriz de <i>payoffs</i> para a batalha dos sexos.	8
Figura 2.3	Matriz de <i>payoffs</i> para o jogo.	10
Figura 2.4	Matriz de <i>payoffs</i> após a remoção da primeira coluna.	10
Figura 2.5	Matriz de <i>payoffs</i> de dimensão 2.	11
Figura 2.6	Matriz de <i>payoffs</i> do jogo de combinar moedas.	12
Figura 3.1	(a) população mista: jogadores atômicos (interiores) com estratégias diferentes são representados por formas diferentes; (b) grupos de jogadores atômicos com traços diferentes agregados em subpopulações; (c) subpopulações representadas como os vértices de um grafo completo; (d) subpopulações representadas como os vértices de um grafo genérico. Em (c) e (d) cada subpopulação de jogadores atômicos coincide com um vértice da rede e representa um jogador de vértice. (Fonte: Madeo e Mocenni (2015)).	27
Figura 4.1	Grafo Bipartido Completo com $m + n \geq 2$ vértices.	44
Figura 4.2	Grafo Bipartido Completo com 5 vértices.	45
Figura 4.3	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo. . . .	58
Figura 4.4	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário misto para um grafo bipartido completo. . .	59
Figura 4.5	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo. . . .	60
Figura 4.6	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo. . . .	61
Figura 4.7	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo. . . .	62
Figura 4.8	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo. . . .	66
Figura 4.9	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo. . . .	67

Figura 5.1	Grafo $G = G(m + k, E)$ com $m + k$ vértices onde $k = 2 + n$, $n \geq 1$.	68
Figura 5.2	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo estrela dupla.	75
Figura 5.3	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo estrela dupla.	76
Figura 5.4	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo estrela dupla.	77
Figura 5.5	Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo estrela dupla.	78

LISTA DE SÍMBOLOS E TERMOS ESPECÍFICOS

G	grafo ou rede arbitrária de conexões
E	conjunto de arestas do grafo
\mathbf{A}	matriz de adjacência de um grafo
\mathbf{J}	matriz jacobiana
\mathbf{B}_v	matriz de pagamento do jogador v
$\sigma_{v,s}$	pagamento recebido pelo jogador v ao jogar com a estratégia s
$\text{sgn}(\sigma_{v,s})$	sinal de $\sigma_{v,s}$
λ_i	autovalores de uma matriz
$\lambda(\mathbf{A})$	espectro de \mathbf{A}
$\text{Tr}(\mathbf{J})$	traço da matriz \mathbf{J}
$\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$	conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ sobre \mathbb{R}
<i>self-edges</i>	indica a presença de laços na rede de conexões
<i>links</i>	ligações entre vértices

payoffs ganho ou pagamento recebido pelos agentes em uma interação estratégica

fitness capacidade adaptativa ou reprodutiva de uma dada espécie em um ambiente

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo investigar a existência de soluções de estado estacionário puro (ou pontos de equilíbrio puro) assintoticamente estáveis para os modelos matemáticos, em um contexto evolutivo, que descrevem a dinâmica de jogos representados por grafos *Bipartidos Completos* e *Estrelas Duplas*. Estamos especificamente interessados em pontos de equilíbrio puro pelo fato de não haver, na literatura, resultados referentes à estabilidade dos mesmos. Os estudos encontrados concentram-se na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio misto, os quais sabemos não serem assintoticamente estáveis para jogos representados por redes arbitrárias de conexões sem *self-edges*.

O modelo matemático associado à dinâmica do jogo representado por um grafo qualquer, ao lado da teoria dos jogos evolucionários, permitiu analisar o comportamento assintótico dos pontos de equilíbrio obtidos para os grafos estudados neste trabalho. O conjunto de experimentos numéricos tornou viável conjecturar e provar a existência e unicidade de soluções de equilíbrio puro assintoticamente estáveis para grafos *Bipartidos Completos*.

ABSTRACT

This work aims to investigate the existence of asymptotically stable pure steady state solutions (or asymptotically stable pure equilibrium points) for the mathematical models, in an evolutionary context, that describe the dynamics of the games represented by Complete Bipartite and Double Star graphs. We are specifically interested in pure equilibrium points because there are no results, in the literature, regarding their stability. The works found study the stability of mixed equilibrium points, which we know are not asymptotically stable for non self-edges networks.

The mathematical model associated to the dynamics of the game represented by an arbitrary graph, alongside the evolutionary games theory, allowed to analyze the asymptotic behavior of the equilibrium points obtained for the graphs studied in this work. The set of numerical experiments made possible to conjecture and prove the existence and uniqueness of asymptotically stable pure equilibrium solutions for Complete Bipartite graphs.

1 INTRODUÇÃO

Vários sistemas físicos de interesse da física, biologia, economia e sociologia podem ser descritos como jogos evolucionários no contexto de sistemas dinâmicos em redes complexas [2]. Como, por exemplo, a dinâmica de opinião sob a influência de uma rede social [6], e o espalhamento de doenças contagiosas sujeitas à competição e seleção [4]. Dentre os diferentes mecanismos de interação estratégica, os mais simples são aqueles que podem ser modelados como jogos de duas ou três estratégias [7, 15].

Em [12], Madeo e Mocenni desenvolvem um modelo, de duas estratégias, para a teoria dos jogos evolucionários em redes. Sob uma perspectiva matemática, esse modelo consiste de um conjunto de $(M - 1)N$ equações diferenciais ordinárias, onde N é o número de vértices no grafo que descreve a rede de conexões e M é o número de estratégias. Nesse artigo, Madeo e Mocenni apresentam esse novo modelo e provam alguns resultados básicos para jogos com 2 estratégias. De fato, ainda há muito a ser estudado sobre esse novo modelo. Por exemplo, se considerarmos o contexto de uma rede social toda conectada (*grafo completo*), uma questão bastante natural é o efeito de suprimir *links* do jogador central ou segregar agentes na rede [21]. Esse tópico é inicialmente analisado em [13], onde estuda-se a existência de pontos estacionários para o sistema e sua viabilidade como um jogo de estratégias mistas. A importância de tais pontos estacionários é que eles representam situações onde diferentes subpopulações podem coexistir. Além disso, estudar a estabilidade desses pontos estacionários traz informações sobre a possibilidade de que subgrupos de jogadores com determinadas características possam subsistir de uma maneira assintoticamente estável [7, 12]. As conexões sociais, em jogos evolucionários, afetam fortemente a evolução das estratégias [19], onde a dinâmica de replicação de jogadores individuais, interagindo em jogos com estratégias de coor-

denaço (biestabilidade) ou anti-coordenaço (coexistência), é descrita de maneira a incentivar a seleção de estratégias que levem às aspirações pretendidas.

Assim como a segregação de agentes em uma rede, outro problema interessante é controlar o sistema dinâmico em redes de maneira a conduzir os agentes em direção a um ponto estacionário específico, *consensus problem* [17, 16, 10], ou *adaptive networks* que é estudado em [20, 3]. Nessa direção, mostra-se interessante buscar estabelecer resultados teóricos em relação a influência sob o sistema dinâmico quando variamos a força de conexão de jogadores centrais a outros jogadores. Esse processo pode ser visto como o caso limite do processo de *diffusion centrality* apresentado em [1], onde o papel de indivíduos centrais em rede é analisado observando o fluxo de informações.

Em um artigo submetido recentemente ao *IEEE Trans. in Autom Control*, [13], o orientador desse trabalho, junto com seus colaboradores, estuda a existência e viabilidade de pontos estacionários internos variando as propriedades de conectividade de jogadores centrais. Os principais resultados desse estudo relacionam propriedades do ponto estacionário interno à existência de cotas para funções que dependem das entradas das matrizes de pagamentos dos jogadores. Em particular, prova-se que quando o número de jogadores cresce, mais similares devem ser as matrizes de pagamento para que haja um ponto estacionário interno. Também prova-se resultados similares quando o jogador central é desconectado iterativamente de outros jogadores. Além disso, estuda-se a sensibilidade do sistema dinâmico à variação da força de conexão entre dois jogadores centrais.

O presente trabalho tem por objetivo investigar a existência de soluções de estado estacionário puro (ou pontos de equilíbrio puro) assintoticamente estáveis para os modelos matemáticos, em um contexto evolutivo, que descrevem a dinâmica de jogos representados por grafos *Bipartidos Completos* e *Estrelas Duplas*. Estamos

interessados em pontos de equilíbrio puro, especificamente pelo fato de não haver, na literatura, resultados referentes à estabilidade desses pontos. Os estudos encontrados concentram-se na análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio misto, os quais sabemos não serem assintoticamente estáveis para jogos representados por redes arbitrárias de conexões sem *self-edges* [13].

No capítulo a seguir, realizamos um estudo preliminar dos principais aspectos da teoria clássica dos jogos, definindo um *jogo* e suas componentes básicas, bem como as *soluções de um jogo*, os conceitos de *estratégia dominante* e *equilíbrios de Nash*, tanto em *estratégias puras* quanto *mistas*. Fazemos ainda, a distinção entre jogos de *forma normal* e *extensa*. Na sequência, capítulo 3, apresentamos e deduzimos a equação padrão de replicação, a qual nos permite escrever um modelo evolutivo para jogos sobre populações em rede. Além disso, descrevemos a dinâmica dos jogos evolucionários, introduzindo os elementos que caracterizam seu mecanismo de funcionamento e, em seguida, estendemos, para jogos sobre grafos, as ideias apresentadas, obtendo, assim, a equação para a dinâmica de jogos sobre populações em rede.

Nos capítulos 4 e 5, utilizamos o modelo matemático que descreve o jogo representado por uma rede arbitrária de conexões, ao lado de toda a teoria desenvolvida, de modo a analisar o comportamento assintótico de pontos de equilíbrio puro para jogos caracterizados por grafos bipartidos completos e estrelas duplas. Por fim, realizamos alguns grupos de experimentos de simulação, os quais nos permitiram conjecturar e provar não só a existência de soluções estacionárias puras assintoticamente estáveis, como também a unicidade das mesmas. No último capítulo fazemos um apanhado geral dos resultados obtidos por meio dos experimentos de simulação numérica, bem como suas contribuições e perspectivas de trabalhos futuros.

2 TEORIA CLÁSSICA DOS JOGOS

Em muitas situações de interação, os agentes são induzidos a agir estrategicamente. Isso significa que as linhas de ação, que um agente escolhe tomar, são condicionadas ou determinadas pelo comportamento observado ou esperado de outros. A teoria dos jogos consiste, mais precisamente, no estudo de como os agentes envolvidos, em uma determinada relação de interação estratégica, atuam de modo racional, no sentido de promover o melhor resultado possível para si próprios. Ao analisar um jogo é necessário identificar as estratégias disponíveis para cada um dos jogadores, quais os resultados que a escolha de cada estratégia permite alcançar, os instantes de tempo em que as decisões são tomadas e a quais informações, a respeito dos resultados que um oponente pode obter, os jogadores têm acesso.

A seguir, apresentamos os conceitos de *estratégia dominante* e *Equilíbrio de Nash*, dentre outros; além disso, caracterizamos e distinguimos os jogos de *forma normal* e *forma extensa*.

2.1 Noções Elementares

A cada instante de tempo, agentes econômicos, familiares e empresariais, por exemplo, têm de tomar decisões. Essas podem ter uma de duas naturezas: ou são independentes do comportamento individual de terceiros ou são decisões que têm consequências sobre os resultados que aqueles com os quais se interage podem obter. Um agente, ao adotar uma postura estratégica, está ciente de que as suas escolhas têm impacto sobre terceiros e que as opções desses têm um efeito direto sobre os resultados que ele pode alcançar. De maneira geral, são essas situações de interação estratégica que a teoria dos jogos busca estudar, podendo ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob

condições de conflito.

Para definir um jogo são necessários alguns elementos básicos. Primeiramente, consideremos um conjunto de *jogadores*; no caso mais simples a interação ocorre apenas entre dois agentes. É o que acontece, por exemplo, quando comprador e vendedor negociam a transação de um bem ou serviço. Cada jogador tem, dadas as estratégias disponíveis para os outros, um conjunto de *estratégias* possíveis para escolha. A partir do momento em que cada jogador escolhe sua estratégia, temos uma *situação* ou *perfil* no espaço de todas as situações (perfis) possíveis. Cada jogador tem interesse ou preferências para cada situação no jogo. Ou seja, cada estratégia produz um resultado (*payoff*) que depende, decisivamente, das linhas de ação ou estratégias escolhidas pelos demais jogadores. Em termos matemáticos, cada jogador tem uma *função utilidade* que atribui um número real (o ganho ou *payoff* do jogador) a cada situação do jogo.

Mais especificamente, um jogo tem os seguintes elementos básicos: existe um conjunto finito de jogadores, representado por $g = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Cada jogador $g_i \in g$ possui um conjunto finito $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$ de opções, onde $m_i \geq 2$, denominadas *estratégias puras* do jogador g_i . Um vetor $\mathbf{s} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n})$, onde s_{ij_i} é uma estratégia pura do jogador $g_i \in g$, é denominado um *perfil de estratégia pura*. O conjunto de todos os perfis de estratégia pura dos jogadores de g formam, portanto, o produto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

denominado *espaço de estratégia pura* do jogo. Para cada jogador $g_i \in g$, existe uma função utilidade

$$\begin{aligned} u_i : \quad S &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{s} &\mapsto u_i(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

que associa o ganho (*payoff*) $u_i(\mathbf{s})$ do jogador g_i a cada perfil de estratégia pura $\mathbf{s} \in S$.

De modo a ilustrar um jogo na sua forma mais simples (jogos de apenas dois jogadores e duas estratégias), consideremos *o dilema do prisioneiro*, um dos exemplos mais conhecidos na teoria dos jogos. A formulação desse problema teve como objetivo ilustrar a dificuldade de se analisar certos tipos de jogos.

A situação é a seguinte: dois ladrões, Al e Bob, são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em celas separadas e sem poderem se comunicar, o delegado faz a seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum deles confessar, ambos serão submetidos a uma pena de um ano. Se os dois confessarem, então ambos terão pena de 5 anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será libertado e o outro será condenado a 10 anos de prisão. Nesse contexto, temos $g = \{Al, Bob\}$, $S_{Al} = \{confessar, negar\}$, $S_{Bob} = \{confessar, negar\}$,

$S = \{(confessar, confessar), (confessar, negar), (negar, confessar), (negar, negar)\}$.

As funções utilidade $u_{Al} : S \rightarrow \mathbb{R}$ e $u_{Bob} : S \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$u_{Al}(confessar, confessar) = -5, \quad u_{Al}(confessar, negar) = 0,$$

$$u_{Al}(negar, confessar) = -10, \quad u_{Al}(negar, negar) = -1,$$

(que representam os ganhos (*payoffs*) de Al) e

$$u_{Bob}(confessar, confessar) = -5, \quad u_{Bob}(confessar, negar) = -10,$$

$$u_{Bob}(negar, confessar) = 0, \quad u_{Bob}(negar, negar) = -1,$$

(que representam os ganhos (*payoffs*) de Bob). Os *payoffs* dos jogadores são representados através de uma matriz, denominada *matriz de payoffs*.

		Bob	
		confessar	negar
Al	confessar	$(-5, -5)$	$(0, -10)$
	negar	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Figura 2.1: Matriz de *payoffs* para o dilema do prisioneiro.

Nessa matriz, os números de cada célula representam, respectivamente, os *payoffs* de Al e Bob para as escolhas deles em cada uma das situações correspondentes.

Outro exemplo interessante é a *batalha dos sexos*, no qual um homem e sua esposa desejam sair para passear. Enquanto o homem prefere assistir a um jogo de futebol, a esposa tem preferência por ir ao cinema. Se ambos forem juntos para o futebol, então o homem sentirá uma maior satisfação do que a mulher. Por outro lado, se eles forem juntos ao cinema, então quem obterá uma maior satisfação será a mulher. Em último caso, se eles saírem sozinhos, ambos ficarão igualmente insatisfeitos. Essa situação também pode ser modelada como um jogo estratégico, onde temos

$$g = \{homem, mulher\}, S_{homem} = \{futebol, cinema\}, S_{mulher} = \{futebol, cinema\},$$

$$S = \{(futebol, futebol), (futebol, cinema), (cinema, futebol), (cinema, cinema)\}.$$

As funções utilidade $u_{homem} : S \rightarrow \mathbb{R}$ e $u_{mulher} : S \rightarrow \mathbb{R}$ são descritas pela seguinte matriz de *payoffs*, onde os números de cada célula representam, respectivamente, os *payoffs* do *Homem* e da *Mulher* para as escolhas deles em cada uma das situações correspondentes:

		Mulher	
		futebol	cinema
Homem	futebol	(10, 5)	(0, 0)
	cinema	(0, 0)	(5, 10)

Figura 2.2: Matriz de *payoffs* para a batalha dos sexos.

2.2 Soluções de um Jogo

Uma solução de um jogo pode ser vista como uma previsão do mesmo; existem vários conceitos diferentes de solução. Nós abordamos os dois conceitos mais comuns: *dominância* e *equilíbrio de Nash*.

Voltemos ao dilema do prisioneiro. Encontrar uma solução para o dilema de Bob e Al é equivalente a identificar as estratégias que conduzam a um tempo menor de prisão. Se analisarmos o jogo do ponto de vista de Al, ele pode raciocinar do seguinte modo:

“Duas coisas podem acontecer: Bob pode confessar ou Bob pode negar; se Bob confessar, então é melhor para mim confessar também; se Bob não confessar, então eu fico livre se eu confessar. Em qualquer um dos casos, é melhor para mim confessar. Então, eu confessarei.”

De modo análogo, analisando o jogo do ponto de vista de Bob, podemos aplicar a mesma linha de raciocínio, chegando a mesma conclusão: Bob também irá confessar. Assim, ambos confessarão e ficarão presos por 5 anos. Do ponto de vista da teoria dos jogos, dizemos que os dois jogadores possuem uma *estratégia dominante*, isto é, todas menos uma estratégia são *estritamente dominadas*. Esse jogo é resolúvel pela técnica de *dominância estrita iterada* e termina em uma

solução que é um *equilíbrio de estratégia dominante*, conceitos que definimos a seguir.

Dominância

Discutiremos perfis de estratégia nos quais apenas a estratégia de um único jogador $g_i \in g$ varia, enquanto que as estratégias de seus oponentes permanecem fixas. Denotemos por

$$\mathbf{s}_{-i} = \left(s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, \dots, s_{nj_n} \right)$$

em $S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$ uma escolha de estratégia para todos os jogadores, menos o jogador g_i . Dessa forma, um perfil de estratégia pode ser convenientemente denotado por

$$\mathbf{s} = (s_{ij}, \mathbf{s}_{-i}) = \left(s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, \dots, s_{nj_n} \right).$$

Definição 2.1 (Estratégia Pura Estritamente Dominada). *Uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $g_i \in g$ é estritamente dominada pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se*

$$u_i(s_{ik'}, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(s_{ik}, \mathbf{s}_{-i}),$$

para todo $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$. A estratégia $s_{ik} \in S_i$ é fracamente dominada pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se $u_i(s_{ik'}, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, \mathbf{s}_{-i})$, para todo $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$.

A técnica conhecida por *Dominância estrita iterada* nada mais é do que um processo onde se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas. De modo a ilustrar essa técnica, consideremos o jogo determinado pela seguinte matriz de *payoffs*:

		g_2			
		s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
g_1	s_{11}	(5, 2)	(2, 6)	(1, 4)	(0, 4)
	s_{12}	(0, 0)	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	s_{13}	(7, 0)	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)
	s_{14}	(9, 5)	(1, 3)	(0, 2)	(4, 8)

Figura 2.3: Matriz de *payoffs* para o jogo.

Nesse jogo, para o jogador g_2 , a estratégia s_{21} é estritamente dominada pela estratégia s_{24} , assim, a primeira coluna da matriz pode ser eliminada, obtendo, assim, a nova matriz da Figura 2.4.

		g_2		
		s_{22}	s_{23}	s_{24}
g_1	s_{11}	(2, 6)	(1, 4)	(0, 4)
	s_{12}	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	s_{13}	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)
	s_{14}	(1, 3)	(0, 2)	(4, 8)

Figura 2.4: Matriz de *payoffs* após a remoção da primeira coluna.

Na matriz reduzida, temos que, para o jogador g_1 , as estratégias s_{11} e s_{14} são estritamente dominadas pelas estratégias s_{12} e s_{13} , respectivamente. De modo que as linhas 1 e 4 podem ser eliminadas. Além disso, a estratégia s_{23} do jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22} . Assim, a coluna 2 também pode ser removida. Obtemos, então, uma matriz reduzida de dimensão 2:

		g_2	
		s_{22}	s_{24}
g_1	s_{12}	$(3, 2)$	$(1, 1)$
	s_{13}	$(2, 2)$	$(5, 1)$

Figura 2.5: Matriz de *payoffs* de dimensão 2.

Observemos que a estratégia s_{24} do jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22} e, na matriz resultante 2×1 , a estratégia s_{13} do jogador g_1 é estritamente dominada pela estratégia s_{12} . Isso nos diz que o resultado do jogo é $(3, 2)$, ou seja, o jogador g_1 escolhe a estratégia s_{12} e o jogador g_2 escolhe a estratégia s_{22} .

Nesse exemplo, a técnica de dominância estrita iterada fornece um único perfil de estratégia como solução do jogo, no caso, o perfil (s_{12}, s_{22}) . Entretanto, pode acontecer da técnica fornecer vários ou, até mesmo, todo o espaço de estratégias, como é o caso, por exemplo, da batalha dos sexos, onde não existem estratégias estritamente dominadas.

Solução Estratégica ou Equilíbrio de Nash

Uma *solução estratégica* ou *equilíbrio de Nash* de um jogo é um ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais não o fizerem.

Definição 2.2 (Equilíbrio de Nash). Dizemos que um perfil de estratégias

$$\mathbf{s}^* = (s_1^*, \dots, s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, \dots, s_n^*) \in S$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e para todo $j_i = 1, \dots, m_i$, com $m_i \geq 2$.

Observação 2.1. (i) No dilema do prisioneiro, o perfil de estratégia (confessar, confessar) é um equilíbrio de Nash. De fato, se um prisioneiro confessar e o outro não, aquele que não confessou pega uma pena de 10 anos, ao invés de 5 anos, se tivesse optado por confessar. Além desse perfil, não há outros equilíbrios de Nash.

(ii) Na batalha dos sexos, os perfis de estratégia (futebol, futebol) e (cinema, cinema) são os únicos equilíbrios de Nash do jogo.

(iii) No exemplo de aplicação da técnica de dominância estrita iterada, o único equilíbrio de Nash do jogo é o perfil de estratégia (s_{12}, s_{22}) .

(iv) Existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras. É o caso, por exemplo, do jogo de combinar moedas (matching pennies). Nesse jogo, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador dá a sua moeda para o primeiro. Se uma das moedas apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, é a vez do primeiro jogador dar uma moeda para o segundo. Esse jogo é representado pela seguinte matriz de payoffs:

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	(+1, -1)	(-1, +1)
	s_{12}	(-1, +1)	(+1, -1)

Figura 2.6: Matriz de payoffs do jogo de combinar moedas.

2.3 Estratégias Mistas

Conforme mencionamos, existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras. Uma alternativa, nesses casos, é a de considerar o jogo do ponto de vista probabilístico, isto é, ao invés de escolher um perfil de estratégia pura, o jogador deve escolher uma *distribuição de probabilidades* sobre suas estratégias puras.

Uma *estratégia mista* \mathbf{p}_i para o jogador $g_i \in g$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto S_i de estratégias puras do jogador, isto é, \mathbf{p}_i é um elemento do conjunto

$$\Delta_{m_i} = \left\{ (x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid x_k \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\}.$$

Desse modo, se $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$, então

$$p_{ik} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1.$$

Observemos que cada Δ_{m_i} é um conjunto compacto e convexo. O espaço de todos os perfis de estratégia mista é o produto cartesiano

$$\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n},$$

denominado *espaço de estratégia mista*. Um vetor $\mathbf{P} \in \Delta$ é denominado um *perfil de estratégia mista*. Mantemos a notação utilizada no caso de estratégias puras, \mathbf{P}_{-i} , para representar as estratégias de todos os jogadores, com exceção do jogador g_i . Como o produto cartesiano de conjuntos compactos e convexos é compacto e convexo, Δ é compacto e convexo.

Cada perfil de estratégia mista $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \in \Delta$ determina um *payoff* esperado, uma média dos *payoffs* ponderada pelas distribuições de pro-

habilidades $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Mais precisamente, se

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) \\ &= (\underbrace{p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_1}}_{\mathbf{p}_1}; \underbrace{p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_2}}_{\mathbf{p}_2}; \dots; \underbrace{p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm_n}}_{\mathbf{p}_n}), \end{aligned}$$

então

$$u_i(\mathbf{P}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^n p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}) \right).$$

2.4 Soluções em Estratégias Mistas

Podemos estender para estratégias mistas todos os critérios básicos para soluções de jogos em estratégias puras.

Definição 2.3 (Dominância Estrita Iterada). *Sejam $S_i^{(0)} = S_i$ e $\Delta_{m_i}^{(0)} = \Delta_{m_i}$.*

Definamos, recursivamente,

$$S_i^{(n)} = \left\{ s \in S_i^{(n-1)} \mid \nexists \mathbf{p} \in \Delta_{m_i}^{(n-1)} \mid \forall s_{-i} \in S_{-i}^{(n-1)}, u_i(\mathbf{p}, s_{-i}) > u_i(s, s_{-i}) \right\}$$

e

$$\Delta_{m_i}^{(n)} = \left\{ \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{m_i}) \in \Delta_{m_i} \mid \forall k = 1, \dots, m_i, p_k > 0 \Leftrightarrow s_{ik} \in S_i^{(n)} \right\},$$

onde, por abuso de notação, $u_i(\mathbf{p}, s_{-i})$ representa o payoff esperado quando o jogador g_i escolhe a estratégia mista \mathbf{p} e os demais jogadores escolhem as estratégias mistas correspondentes às estratégias puras dadas por s_{-i} . A interseção

$$S_i^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_i^{(n)}$$

é o conjunto de estratégias puras e

$$\Delta_{m_i}^\infty = \left\{ \mathbf{p} \in \Delta_{m_i} \mid \nexists \mathbf{p}' \in \Delta_{m_i} \mid \forall s_{-i} \in S_{-i}^{(\infty)}, u_i(\mathbf{p}', s_{-i}) > u_i(\mathbf{p}, s_{-i}) \right\}$$

é o conjunto de todas as estratégias mistas do jogador g_i que sobrevivem à técnica de dominância estrita iterada.

Definição 2.4 (Equilíbrio de Nash). Dizemos que um perfil de estratégia mista

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*, \dots, \mathbf{p}_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n}$$

é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \geq u_i(\mathbf{p}, \mathbf{P}_{-i}^*)$$

para todo $\mathbf{p} \in \Delta_{m_i}$, isto é, nenhum jogador sente motivação de trocar sua estratégia mista se os demais não o fizerem.

Observação 2.2. (i) No dilema do prisioneiro, o perfil de estratégia mista

$$\mathbf{P}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*) = (1, 0; 1, 0)$$

é um equilíbrio de Nash, pois

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2^*) = u_1(p, 1-p; 1, 0) = 5p - 10 \leq -5 = u_1(1, 0; 1, 0) = u_1(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$$

para todo $\mathbf{p} = (p, 1-p) \in \Delta_2$ e

$$u_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{q}) = u_2(1, 0; q, 1-q) = 5q - 10 \leq -5 = u_2(1, 0; 1, 0) = u_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$$

para todo $\mathbf{q} = (q, 1-q) \in \Delta_2$. Notemos que esse equilíbrio corresponde ao equilíbrio em estratégias puras $\mathbf{s}^* = (\text{confessar}, \text{confessar})$.

(ii) Na batalha dos sexos, os equilíbrios de Nash em estratégias mistas são $(1, 0; 1, 0)$ e $(0, 1; 0, 1)$, correspondentes aos equilíbrios de Nash em estratégias puras (futebol, futebol) e (cinema, cinema), respectivamente, é o ponto $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

(iii) No exemplo de aplicação da técnica de dominância estrita iterada, o único equilíbrio de Nash em estratégia mista é o ponto $(0, 1, 0, 0; 0, 1, 0, 0)$ que corresponde ao equilíbrio de Nash (s_{12}, s_{22}) em estratégias puras.

(iv) No jogo de combinar moedas, o único equilíbrio de Nash em estratégias mistas é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Existência de Soluções

Conforme visto para o jogo de combinar moedas, item (iv) da observação 2.1, existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras e, até agora, todos os jogos analisados apresentaram pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. A seguir verificamos que esse resultado sobre a existência de equilíbrios de Nash em estratégias mistas é geral.

2.5 O Teorema de Equilíbrio de Nash

De fato, todo jogo definido por matrizes de *payoffs* possui um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. A demonstração que apresentamos, aqui, no Teorema 2.4, é devida a John Nash e ela faz uso do teorema do ponto fixo de Brouwer.

Teorema 2.1 (Ponto Fixo de Brouwer). *Se Δ é um subconjunto compacto e convexo de um espaço euclidiano de dimensão finita e $\mathbf{F} : \Delta \rightarrow \Delta$ é uma função contínua, então \mathbf{F} possui um ponto fixo em Δ , isto é, existe $\mathbf{P}^* \in \Delta$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{P}^*) = \mathbf{P}^*$.*

Demonstração. Pode ser encontrada em [5]. □

Mantendo as notações estabelecidas nas seções precedentes, apresentamos dois teoremas que fornecem caracterizações alternativas para um equilíbrio de Nash.

Teorema 2.2. *Para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, sejam as funções*

$$\begin{aligned} z_{ij} : \quad \Delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{P} &\mapsto z_{ij}(\mathbf{P}) = u_i(s_{ij}, \mathbf{P}_{-i}) - u_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{P}_{-i}) \end{aligned}$$

(isto é, z_{ij} mede o ganho ou perda do jogador g_i quando ele troca a distribuição de probabilidades \mathbf{p}_i pela estratégia pura s_{ij}). Temos que \mathbf{P}^ é um equilíbrio de Nash*

se, e somente se,

$$z_{ij}(\mathbf{P}^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$.

Demonstração. Se $\mathbf{P}^* = (\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*)$ é um equilíbrio de Nash, então $u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij}, \mathbf{P}_{-i}^*)$ para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. Consequentemente,

$$z_{ij}(\mathbf{P}^*) = u_i(s_{ij}, \mathbf{P}_{-i}^*) - u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$.

Se

$$z_{ij}(\mathbf{P}^*) = u_i(s_{ij}, \mathbf{P}_{-i}^*) - u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, então

$$u_i(s_{ij}, \mathbf{P}_{-i}^*) = u_i(\mathbf{e}_j, \mathbf{P}_{-i}^*) \leq u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*)$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, onde \mathbf{e}_j é o vetor em \mathbb{R}^{m_i} que tem 1 na j -ésima coordenada e zero nas demais. Precisamos mostrar que para qualquer $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{im_i}) \in \Delta_{m_i}$

$$u_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{P}_{-i}^*) \leq u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*).$$

Como $\mathbf{x} \mapsto u_i(\mathbf{x}, \mathbf{P}_{-i}^*)$ é um funcional linear, temos que

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{P}_{-i}^*) &= u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{P}_{-i}^*\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot u_i(\mathbf{e}_k, \mathbf{P}_{-i}^*) \leq \\ &\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) = u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \cdot \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos o fato de que $\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$, dado que $\mathbf{p}_i \in \Delta_{m_i}$. \square

Teorema 2.3. *Defina a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \Delta &= \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n} \rightarrow \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n} \\ \mathbf{P} &= (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) \in \Delta \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{P}) = (\mathbf{y}_1(\mathbf{P}), \mathbf{y}_2(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{y}_n(\mathbf{P})) \in \Delta, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{y}_i(\mathbf{P}) = (y_{i1}(\mathbf{P}), y_{i2}(\mathbf{P}), \dots, y_{im_i}(\mathbf{P}))$, $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$ e

$$y_{ij}(\mathbf{P}) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(\mathbf{P})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P})}.$$

Temos que $\mathbf{P}^* \in \Delta$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, $\mathbf{F}(\mathbf{P}^*) = \mathbf{P}^*$, isto é, se, e somente se, \mathbf{P}^* é um ponto fixo da aplicação \mathbf{F} .

Demonstração. Observemos que, de fato, $\mathbf{F}(\Delta) \subseteq \Delta$, pois $y_{ij} \geq 0$ e

$$\sum_{k=1}^{m_i} y_{ik}(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^{m_i} \left(\frac{p_{ik} + g_{ik}(\mathbf{P})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P})} \right) = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P})} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P})} = 1,$$

isto é, cada $\mathbf{y}_i(\mathbf{P}) \in \Delta_{m_i}$.

Se \mathbf{P}^* é um equilíbrio de Nash, então $g_{ij}(\mathbf{P}^*) = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. De modo que $y_{ij}(\mathbf{P}^*) = p_{ij}^*$ para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, isto é, $\mathbf{y}_i(\mathbf{P}^*) = \mathbf{p}_i^*$ para cada $i = 1, \dots, n$ ou, ainda, $\mathbf{F}(\mathbf{P}^*) = \mathbf{P}^*$.

Suponhamos que $\mathbf{P}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*, \dots, \mathbf{p}_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n}$ seja um ponto fixo da aplicação $\mathbf{F}: \Delta \rightarrow \Delta$, isto é, suponhamos que

$$p_{ij}^* = \frac{p_{ij}^* + g_{ij}(\mathbf{P}^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P}^*)}$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. É imediato que $p_{ij}^* \cdot \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P}^*) = g_{ij}(\mathbf{P}^*)$,

para todo $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. Assumamos $\alpha = \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{P}^*) = 0$, de modo

que $g_{ik}(\mathbf{P}^*) = 0$ para todo $k = 1, \dots, m_i$ e $i = 1, \dots, n$.

De fato, se, por absurdo, $\alpha > 0$, vemos a partir da relação acima que $g_{ij}(\mathbf{P}^*) > 0$ se, e somente se, $p_{ij}^* > 0$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $p_{i1}^* > 0, p_{i2}^* > 0, \dots, p_{il}^* > 0$ e $p_{i(l+1)}^* = p_{i(l+2)}^* = \dots = p_{im_i}^* = 0$. Observemos que

$$\mathbf{p}_i^* = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \mathbf{e}_k,$$

onde \mathbf{e}_i é o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^{m_i} . Dado que $g_{ik}(\mathbf{P}^*) > 0$ para todo $k = 1, \dots, l$, temos que

$$u_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{P}_{-i}^*) > u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*),$$

para todo $k = 1, \dots, l$. Logo,

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) &= u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \mathbf{e}_k, \mathbf{P}_{-i}^*\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \cdot u_i(\mathbf{e}_k, \mathbf{P}_{-i}^*) = \sum_{k=1}^l p_{ik}^* \cdot u_i(\mathbf{e}_k, \mathbf{P}_{-i}^*) > \\ &\sum_{k=1}^l p_{ik}^* \cdot u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) = u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*) \cdot \sum_{k=1}^l p_{ik}^* = u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{P}_{-i}^*), \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Isso mostra que $g_{ij}(\mathbf{P}^*) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$ e, assim, \mathbf{P}^* é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. \square

Teorema 2.4 (Equilíbrio de Nash). *Todo jogo definido por matrizes de payoffs possui um equilíbrio de Nash.*

Demonstração. A aplicação $\mathbf{F} : \Delta \rightarrow \Delta$ definida no teorema anterior é contínua e Δ é um conjunto compacto e convexo, portanto, podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Brouwer, o qual garante que \mathbf{F} possui um ponto fixo \mathbf{P}^* . Consequentemente, pelo teorema anterior, \mathbf{P}^* é um equilíbrio de Nash. \square

2.6 Jogos Sequenciais ou de Forma Extensa

Ao contrário dos jogos mencionados nas seções precedentes (jogos de forma normal), os quais são estáticos, os jogos sequenciais ou de forma extensa são caracterizados por sua dinamicidade, uma vez que as estratégias são escolhidas não mais de modo simultâneo, mas em sequência. Como vimos, nas seções anteriores, a forma normal é usada em situações onde os jogadores escolhem sua estratégia *simultaneamente* ou o fazem sem conhecer a estratégia de outros jogadores.

Existem outras situações, como, por exemplo, no mundo dos negócios ou na política e em alguns jogos de cartas, em que os jogadores tomam suas decisões de forma sequencial, depois de observar a ação que um outro jogador realiza. A forma extensa apresenta uma estrutura mais adequada para analisar jogos dessa natureza, especificando quem se move, quando, com qual informação e o *payoff* ou ganho de cada jogador, contendo toda informação necessária sobre um jogo.

Jogos sequenciais não são representados por uma matriz de resultados, como no caso dos jogos de forma normal; existem diversas maneiras de representar esse tipo de jogo, das quais todas tentam formalizar a ideia de *árvore*: 1) relação de ordem; 2) teoria de grafos e alfabetos, dentre outras.

Esse trabalho está inserido na teoria dos jogos evolucionários sobre redes, os quais são caracterizados como jogos de forma extensa representados por grafos. No capítulo a seguir, detalhamos a dinâmica de funcionamento dos jogos evolucionários e a de sua versão estendida sobre redes arbitrárias de conexões.

O objetivo desse capítulo foi elucidar e situar o leitor a respeito dos principais elementos que compõem as interações modeladas pela teoria dos jogos de modo a facilitar a compreensão e associação com a teoria dos jogos evolucionários.

Na sequência, apresentamos o modelo matemático que descreve a dinâmica de replicação em uma população. Esse modelo é conhecido como a equação padrão de replicação, e é por meio desta equação que obtém-se o modelo evolutivo para jogos sobre grafos.

3 DINÂMICA DE REPLICAÇÃO E JOGOS EVOLUCIONÁRIOS

Neste capítulo, apresentamos o modelo matemático que descreve a dinâmica de replicação em uma população, ou seja, a evolução das frequências de estratégias em uma população, mais especificamente o sucesso reprodutivo de indivíduos de um certo tipo nessa população [8]. Além disso, introduzimos os elementos que caracterizam o mecanismo de funcionamento dos jogos evolucionários e, em seguida, estendemos a teoria para jogos sobre grafos.

3.1 Equação de Replicação

A forma contínua, mais geral, da equação de replicação é dada pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}_i = x_i[f_i(x) - \phi(x)], \quad (3.1)$$

onde $\phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x)$, x_i é a proporção de indivíduos do tipo E_i na população, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor da distribuição de tipos na população, $f_i(x)$ é o *fitness* (a capacidade reprodutiva da população) de indivíduos do tipo E_i e $\phi(x)$ é o *fitness* médio da população (dada por uma média ponderada do *fitness* dos n tipos na população). Basicamente, o que a equação de replicação está dizendo é que a taxa de aumento de indivíduos do tipo E_i (i.e. $\frac{\dot{x}_i}{x_i}$) é a diferença entre o *fitness* de E_i (i.e. $f_i(x)$) e o *fitness* médio de toda a população (i.e. $\phi(x)$).

Por definição, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$; logo, a equação (3.1) está definida no simplex

n -dimensional

$$S_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, 0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n \right\}. \quad (3.2)$$

Dedução da Equação de Replicação:

Seja y_i o número de indivíduos do tipo E_i , e seja y o número total de indivíduos na população, de modo que $y = \sum_{j=1}^n y_j$ e $x_i = \frac{y_i}{y}$. Diremos que x_j é a probabilidade de um indivíduo do tipo E_i interagir com um do tipo E_j . O número esperado de tipos E_i na descendência de um tipo E_i é dado por $\sum_{j=1}^n f_{ij}x_j$, onde f_{ij} é o sucesso reprodutivo esperado que um indivíduo do tipo E_i obtenha ao acasalar com um do tipo E_j (o termo f_{ij} pode ser interpretado como sendo uma taxa de reprodução), ou seja, $\frac{\dot{y}_i}{y_i} = \sum_{j=1}^n f_{ij}x_j$ taxa de aumento de indivíduos do tipo E_i e o número total de indivíduos E_i na geração seguinte será $y_i \sum_{j=1}^n f_{ij}x_j$. Para calcular o *fitness* $f_i(x)$ de um indivíduo do tipo E_i precisamos levar em conta o sucesso reprodutivo esperado no cruzamento e a probabilidade de que este cruzamento ocorra. Desse modo, temos $f_i(x) = \sum_{j=1}^n f_{ij}x_j$.

A partir da taxa de aumento de indivíduos do tipo E_i na descendência de E_i , podemos escrever

$$\dot{y}_i = y_i \sum_{j=1}^n f_{ij}x_j. \quad (3.3)$$

De $y = \sum_{j=1}^n y_j$, obtemos

$$\dot{y} = \sum_{j=1}^n \dot{y}_j. \quad (3.4)$$

Tomando o logaritmo natural em ambos os lados de $x_i = \frac{y_i}{y}$, temos

$$\ln(x_i) = \ln(y_i) - \ln(y). \quad (3.5)$$

Derivando a identidade (3.5) em relação ao tempo t , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_i}{x_i} &= \frac{\dot{y}_i}{y_i} - \frac{\dot{y}}{y} \\ &= \sum_{j=1}^n f_{ij} x_j - \sum_{j=1}^n \frac{\dot{y}_j}{y}, \end{aligned}$$

por (3.4).

Usando que $f_i(x) = \sum_{j=1}^n f_{ij} x_j$ e $x_j = \frac{y_j}{y}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_i}{x_i} &= f_i(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\dot{y}_j}{\left(\frac{y_j}{x_j}\right)} \\ \dot{x}_i &= x_i \left[f_i(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\dot{y}_j}{y_j} x_j \right]. \end{aligned}$$

Usando que $\frac{\dot{y}_j}{y_j} = \sum_{k=1}^n f_{jk} x_k$, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i \left[f_i(x) - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n f_{jk} x_k \right) x_j \right] \\ &= x_i \left[f_i(x) - \sum_{j=1}^n f_j(x) x_j \right] \\ &= x_i [f_i(x) - \phi(x)]. \end{aligned}$$

É possível observar que a equação de replicação, deduzida acima, assume uma distribuição populacional uniforme, isto é, a estrutura da população não

é incorporada ao *fitness*. Entretanto, em aplicações, as populações são, geralmente, mais realísticas.

A análise é mais difícil e computacionalmente intensiva na formulação discreta (a qual não iremos abordar), portanto, a forma contínua é, frequentemente, usada, embora algumas propriedades significativas sejam perdidas.

3.2 Teoria dos Jogos Evolucionários

Conforme mencionado no capítulo 2, os jogos foram introduzidos para modelar interações estratégicas entre indivíduos, onde a recompensa de cada jogador depende de suas próprias decisões e independe das decisões de seus oponentes. Essa interação dinâmica, entre indivíduos em um contexto de jogos conduzidos pela evolução, pode ser descrita pela teoria dos jogos evolucionários, na qual os jogadores são membros indistinguíveis de uma população ampla caracterizada por um fenótipo que determina a estratégia que eles escolhem ao jogar com algum outro indivíduo, selecionado, de modo aleatório, na população. O pagamento que cada jogador recebe nos jogos é avaliado por funções específicas, enquanto a dinâmica do sistema é descrita pela equação de replicação apresentada na seção anterior. A variável de estado dessa equação é a distribuição de estratégias entre os indivíduos da população.

Na dinâmica da teoria dos jogos evolucionários, cada membro da população é chamado *replicador*; o qual está hábil a produzir cópias idênticas de si mesmo. Os descendentes usarão a mesma estratégia de seus pais. Um replicador é indistinguível dos outros, exceto pela estratégia única que ele usa, entre as M disponíveis, durante todo seu tempo de vida.

Assumindo que as interações ocorrem de forma contínua, ao longo do tempo, a dinâmica de seleção natural pode determinar mudanças na parcela x_s da

população que usa a estratégia pura $s \in S = \{1, 2, \dots, M\}$ ao longo do tempo. Essa variação depende da comparação entre o pagamento (*payoff*) p_s da estratégia s e o pagamento médio $\phi(x) = \sum_{s=1}^M x_s p_s$ de toda a população. Essa dinâmica é modelada pela equação de replicação (3.1), redefinida como:

$$\dot{x}_s = x_s(p_s - \phi). \quad (3.6)$$

Por definição, $0 \leq x_s \leq 1$ e $\sum_{s=1}^M x_s = 1$. Além disso, os pagamentos p_s e ϕ dependem da distribuição de estratégia $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_M]$ da população.

Quando todos os replicadores compartilharem a mesma função de pagamento, mas diferirem pelas estratégias usadas nos jogos jogados, as interações descritas serão assumidas como sendo simétricas.

Consideremos $N \geq 2$ subpopulações de replicadores e modelemos as interações como jogos jogados por N indivíduos, escolhidos, aleatoriamente, de uma subpopulação diferente. Denotemos por $x_{v,s}$ a parcela da subpopulação $v \in \{1, \dots, N\}$ que usa a estratégia pura $s \in S$. Por definição, $x_{v,s} \in [0, 1]$ e $\sum_{s=1}^M x_{v,s} = 1$. Desse modo, temos que o vetor $\mathbf{x}_v = [x_{v,1} \dots x_{v,M}]$ descreve a distribuição interna das estratégias puras S disponíveis na subpopulação v . Todos os replicadores da subpopulação v compartilham a mesma função de pagamento; em particular, $p_{v,s}$ denota o pagamento obtido por cada replicador em v que usa a estratégia s , e $\phi_v = \sum_{s=1}^M x_{v,s} p_{v,s}$ é o pagamento médio de toda a subpopulação v . Uma vez que, por convenção, a interação entre duas subpopulações diferentes é assimétrica, temos, em geral, $p_{v,s} \neq p_{w,s}$.

A figura 3.1 apresenta diferentes estruturas populacionais em jogos.

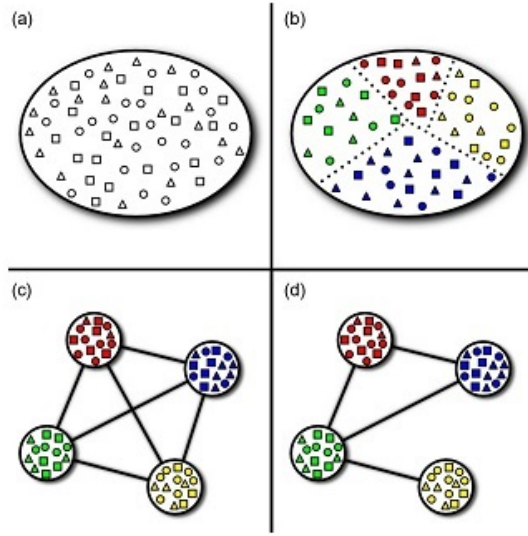


Figura 3.1: (a) população mista: jogadores atômicos (interiores) com estratégias diferentes são representados por formas diferentes; (b) grupos de jogadores atômicos com traços diferentes agregados em subpopulações; (c) subpopulações representadas como os vértices de um grafo completo; (d) subpopulações representadas como os vértices de um grafo genérico. Em (c) e (d) cada subpopulação de jogadores atômicos coincide com um vértice da rede e representa um jogador de vértice. (Fonte: Madeo e Mocenni (2015)).

Em cada instante de tempo os replicadores de alguma subpopulação estão jogando jogos de 2-jogadores com indivíduos de alguma outra subpopulação. Vamos indicar por $x_{v,s}(t)$ a parcela da subpopulação v pré-programada para usar a estratégia pura s no tempo t e suponhamos que o tamanho da população seja $n_v(t)$. É sabido que $p_{v,s}(t)$ pode ser interpretada como uma taxa reprodutiva; portanto, $p_{v,s}(t)\tau$ é o número de descendentes produzidos por um replicador em v que usa a estratégia s entre os instantes de tempo t e $t + \tau$. Decorrente disso, o número de indivíduos na população depois de um tempo τ é

$$n_v(t + \tau) = n_v(t) + \sum_{r=1}^M n_v(t)x_{v,r}(t)p_{v,r}(t)\tau \quad (3.7)$$

onde $n_v(t)x_{v,r}(t)$ é o número de indivíduos na subpopulação que usa a estratégia

r no tempo t , e $n_v(t)x_{v,r}(t)p_{v,r}(t)\tau$ é o total de descendentes produzidos por essa subpopulação. Além disso, por definição,

$$\begin{aligned}
x_{v,s}(t + \tau) &= \frac{n_v(t)x_{v,s}(t) + n_v(t)x_{v,s}(t)p_{v,s}(t)\tau}{n_v(t + \tau)} \\
&= \frac{n_v(t)x_{v,s}(t)(1 + p_{v,s}(t)\tau)}{n_v(t) \left(1 + \sum_{r=1}^M x_{v,r}(t)p_{v,r}(t)\tau \right)} \\
&= \frac{x_{v,s}(t)(1 + p_{v,s}(t)\tau)}{1 + \phi_v(t)\tau}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

A equação acima não depende de $n_v(t)$, portanto, essa relação é válida para qualquer tamanho inicial da população. O limite contínuo de (3.8) é obtido tomando a taxa de variação de $x_{v,s}(t)$, que é dada por

$$\frac{x_{v,s}(t + \tau) - x_{v,s}(t)}{\tau} = \frac{x_{v,s}(t)(p_{v,s}(t) - \phi_v(t))}{1 + \phi_v(t)\tau}.$$

Fazendo $\tau \rightarrow 0$, obtemos

$$\dot{x}_{v,s}(t) = x_{v,s}(t)(p_{v,s}(t) - \phi_v(t)). \tag{3.9}$$

A equação (3.9) é conhecida como a equação de replicação de multi-população. Ela é utilizada para populações heterogêneas como ilustrado na figura 3.1, onde as subpopulações são identificadas por cores diferentes. Como um replicador interage com membros de todos os outros grupos, podemos descrever o sistema através de um grafo completamente conectado como mostrado na figura 3.1.(c), onde os vértices representam as subpopulações.

3.3 Teoria dos Jogos Evolucionários sobre Populações em Rede (Grafos)

Na dinâmica dos jogos evolucionários sobre grafos, cada jogador está localizado em um vértice do grafo, o qual é interpretado como uma população infinita de replicadores que se replicam dentro (dessa população) do vértice. Em cada instante de tempo, um jogo é jogado por dois replicadores, escolhidos aleatoriamente, pertencentes a vértices diferentes conectados, e o resultado do jogo influencia a capacidade desses indivíduos produzirem descendentes, de tal modo que o comportamento de um jogador de vértice é determinado pela distribuição de estratégias usadas pelos replicadores internos. Em um contexto evolutivo, isso nos diz que, quem perde morre ou não se replica, logo, não passa adiante o seu gene (a estratégia adotada no jogo).

3.3.1 Jogos Não-Cooperativos sobre Grafos

A teoria padrão de jogos não-cooperativos, jogos nos quais os jogadores tomam decisões de forma independente e pensando exclusivamente em seu benefício próprio [9], pode ser estendida para introduzir uma rede de conexões entre jogadores. Essa rede é descrita por um grafo e cada jogador corresponde a um vértice. Uma aresta entre dois jogadores indica que eles interagem. Entretanto, um jogador pode considerar algumas interações mais importantes do que outras e dois jogadores conectados podem ter percepções diferentes da importância de sua interação. Esses aspectos podem ser contabilizados assumindo que o grafo é ponderado e direcionado; uma aresta direcionada é rotulada com um peso positivo para indicar a importância que o primeiro jogador atribui ao jogo específico.

Formalmente, seja G um grafo com pesos e direcionado de ordem $N < +\infty$, e seja V o conjunto de vértices (*jogadores de vértice*), $V = \{1, \dots, N\}$. O

grafo G é descrito por uma matriz de adjacência $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{N \times N}$; em particular, se para o jogador v é significativo jogar com o jogador w , então, há uma aresta que começa em v e termina em w . Nesse caso, a entrada (v, w) de \mathbf{A} , $a_{v,w}$, é o peso positivo atribuído por v ao jogo com w . Em geral, $a_{v,w} \neq a_{w,v}$. Quando $a_{v,w} > 0$ e $a_{w,v} = 0$, há uma interação entre v e w , mas apenas v recebe um pagamento. Finalmente, $a_{v,w} = a_{w,v} = 0$ significa que não há interação entre esses jogadores. Assumimos, ainda, que G não possui laços, i.e., $a_{v,v} = 0, \forall v \in V$.

3.3.2 Pagamentos para Jogos sobre Grafos: estratégias puras

Em um contexto interconectado, o pagamento efetivo (ou o *fitness* de uma estratégia) pode ser definido como uma medida ambiental (capacidade de adaptação ao meio ou capacidade reprodutiva das espécies) dependendo sobre tudo das interações entre os jogadores conectados. Quando estratégias puras são adotadas, cada jogador de vértice ganha um pagamento que corresponde à soma, ponderada pelas forças de conexão $a_{v,w}$, dos resultados dos jogos de 2-jogadores que ele joga contra seus vizinhos.

Seja $s_w \in S$ a estratégia pura de um jogador (de vértice) genérico w representada pelo s_w -ésimo versor $\mathbf{e}_{s_w} \in \mathbb{R}^M$. Então, o pagamento efetivo para o jogador de vértice v , é denotado por

$$\bar{\pi}_v^G(s_1, \dots, s_N) = \sum_{w=1}^N a_{v,w} \mathbf{e}_{s_w}^T \mathbf{B}_v \mathbf{e}_{s_w} = \mathbf{e}_{s_v}^T \mathbf{B}_v \mathbf{k}_v(s_1, \dots, s_N) \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{B}_v \in \mathbb{R}^{M \times M}$ é a matriz de pagamento do jogador v , $\mathbf{k}_v(s_1, \dots, s_N) = \sum_{w=1}^N a_{v,w} \mathbf{e}_{s_w}$ e G indica a presença do grafo de conexões. Esse modelo, baseado na soma ponderada, será denotado por WS.

Entretanto, há situações onde é conveniente usar pagamento norma-

lizado. De fato, o pagamento pode ser normalizado pela soma dos pesos de todas as arestas conectadas a um vértice. Nesse caso, a matriz \mathbf{A} pode ser manipulada dividindo cada entrada de linha v por $d_v = \sum_{w=1}^N a_{v,w}$, tornando-a estocástica de linha. O pagamento obtido é um tipo de média ponderada e esse modelo será denotado por WA. Observemos que o modelo WA corresponde ao modelo WS quando uma matriz estocástica de linha \mathbf{A} descreve o grafo.

Seja $\bar{\pi}_v^G$ um tensor N -dimensional, onde a entrada (s_1, \dots, s_N) é $\bar{\pi}_v^G(s_1, \dots, s_N)$. Por essa razão, o jogo entre jogadores interconectados em um grafo finito é equivalente a um jogo de N -jogadores. A estrutura do grafo está embutida na matriz de adjacência \mathbf{A} .

3.3.3 Pagamentos para Jogos sobre Grafos: estratégias mistas

As funções de pagamento introduzidas, anteriormente, permitiram descrever um jogo com N -jogadores e M -estratégias, denotado de agora em diante como (N, M) -jogo. Esse jogo pode ser estendido sobre o simplex Δ_M para contabilizar também as estratégias mistas:

$$\Delta_M = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^M : \sum_{s=1}^M z_s = 1 \text{ e } 0 \leq z_s \leq 1, \forall s \in S \right\}. \quad (3.11)$$

Indiquemos por $\mathbf{x}_v = [x_{v,1} \dots x_{v,M}]^T \in \Delta_M$ a estratégia mista do jogador v , e por $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$ o perfil de estratégia mista de toda a rede. A fórmula do pagamento efetivo (pagamento esperado que o jogador v obtenha) é a seguinte:

$$\pi_v^G(\mathbf{X}) = \sum_{s_1=1}^M \dots \sum_{s_N=1}^M \left(\prod_{w=1}^N x_{w,s_w} \right) \bar{\pi}_v^G(s_1, \dots, s_N). \quad (3.12)$$

De modo similar à (3.10), a equação anterior pode ser reescrita de uma

forma mais conveniente e compacta

$$\pi_v^G(\mathbf{X}) = \mathbf{x}_v^T \mathbf{B}_v \mathbf{k}_v(\mathbf{X}) \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{k}_v(\mathbf{X}) = \sum_{w=1}^N a_{v,w} \mathbf{x}_w$.

O conceito de equilíbrio de Nash pode ser introduzido com base no pagamento efetivo para estratégias puras e mistas.

Definição 3.1. *O conjunto de equilíbrio de Nash é definido como*

$$\Theta^{EN} = \{ \mathbf{X} : \forall v, \forall x_{v,s} > 0, p_{v,s}^G = p_{v,s'}^G, \forall x_{v,s'} > 0 \text{ e } p_{v,s}^G \geq p_{v,s'}^G, \forall x_{v,s'} = 0 \}$$

e o conjunto de equilíbrio de Nash estrito é

$$\Theta^{ENE} = \{ \mathbf{X} : \forall v, \forall x_{v,s} > 0, p_{v,s}^G > p_{v,s'}^G, \forall x_{v,s'} = 0 \}.$$

onde $p_{v,s}^G = \sum_{u=1}^N a_{v,u} \mathbf{e}_s^T \mathbf{B}_v \mathbf{x}_u$ é a função de pagamento do jogador v usando a estratégia pura s .

3.4 Equação para a Dinâmica do Jogo sobre Populações em Rede

Seguindo a teoria desenvolvida nas seções anteriores e utilizando de forma conjunta a equação de replicação de multipopulação (3.9) e as funções de pagamento definidas em (3.10) e (3.13), podemos obter o modelo que estende a equação de replicação para grafos. O problema de valor inicial (PVI) resultante é o seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x}_{v,s} = x_{v,s} (p_{v,s}^G - \phi_v^G), \quad \forall v \in V, \forall s \in S \\ x_{v,s}(0) = c_{v,s} \end{cases} \quad (3.14)$$

onde $\mathbf{x}_v(0) = [x_{v,1}(0) \dots x_{v,M}(0)]^T = [c_{v,1} \dots c_{v,M}]^T \in \Delta_M$ é o vetor da distribuição de condições iniciais para o jogador v , $\phi_v^G = \sum_{u=1}^N a_{v,u} \mathbf{x}_v^T \mathbf{B}_v \mathbf{x}_u$ é o pagamento médio de todo o conjunto de estratégias disponíveis para o vértice v e $p_{v,s}^G$ conforme definido anteriormente.

O sistema (3.14) representa a equação estendida para a dinâmica do jogo sobre populações em rede, onde a matriz de adjacência da rede está embutida nas funções de pagamento $p_{v,s}^G$ e ϕ_v^G .

Principais Propriedades de (3.14):

(i) **Invariância do Simplex:** se $\mathbf{x}_v(0) \in \Delta_M$, $\forall v$, então $\mathbf{x}_v(t) \in \Delta_M$, $\forall v, t > 0$;

(ii) **Estratégias Puras são Estados Estacionários:** seja Θ^* o conjunto de estados estacionários de (3.14). Se $\mathbf{X} = \{\mathbf{e}_{s_v}\}_{v=1}^N$, então $\mathbf{X} \in \Theta^*$;

(iii) **Equilíbrios de Nash são Estados Estacionários:** se $\mathbf{X} \in \Theta^{EN}$, então $\mathbf{X} \in \Theta^*$;

(iv) **Estados Estacionários Internos são Equilíbrios de Nash:** suponhamos que $x_{v,s} \in (0, 1)$, $\forall v, s$. Então, $\mathbf{X} \in \Theta^*$ se, e somente se, $\mathbf{X} \in \Theta^{EN}$;

(v) **Estados Estáveis de Lyapunov são Equilíbrios de Nash:** se $\mathbf{X} \in \Theta^*$ é um estado estacionário estável de Lyapunov, então $\mathbf{X} \in \Theta^{EN}$;

(vi) **Soluções Equivalentes:** o teorema abaixo apresenta as condições necessárias para que haja equivalência entre o modelo (3.14) e a equação padrão de replicação (3.6).

Teorema 3.1. [9] *Seja $\mathbf{X}(t) = \{\mathbf{x}_1(t) \dots \mathbf{x}_N(t)\}$ a única solução do sistema (3.14) onde $x_{v,s}(0) = c_s, \forall v$. Suponhamos que \mathbf{A} é uma matriz estocástica de linha e $\mathbf{B}_v = \mathbf{B}, \forall v$. Seja $\mathbf{y}(t)$ a única solução da equação (3.6), com $y_s(0) = c_s$. Então, $\mathbf{x}_v(t) = \mathbf{y}(t), \forall v, t \geq 0$.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ conforme descritos no enunciado e seja $\Psi(t) = [\psi_1(t) \dots \psi_N(t)]^T$ tal que $\psi_v(t) = \mathbf{y}(t), \forall v$. Como \mathbf{A} é estocástica de linha, temos que $\sum_{w=1}^N a_{v,w} = 1, \forall v$ e então

$$\mathbf{k}_v(\Psi) = \sum_{w=1}^N a_{v,w} \psi_w = \sum_{w=1}^N a_{v,w} \mathbf{y} = \mathbf{y} \underbrace{\sum_{w=1}^N a_{v,w}}_1 = \mathbf{y}.$$

Além disso, para \mathbf{A} estocástica de linha, as funções de pagamento são

$$\begin{aligned} p_{v,s}^G &= \mathbf{e}_s^T \mathbf{B} \mathbf{k}_v(\Psi) = \mathbf{e}_s^T \mathbf{B} \mathbf{y} = p_s \\ \phi_v^G &= \mathbf{x}_v^T \mathbf{B} \mathbf{k}_v(\Psi) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = \phi. \end{aligned}$$

Substituindo $\Psi(t)$ em (3.9), obtemos

$$\dot{\psi}_{v,s} = \dot{y}_s = y_s(p_s - \phi) = \psi_{v,s} (p_{v,s}^G - \phi_v^G)$$

pois, por hipótese, $\mathbf{y}(t)$ é a única solução da equação (3.6). Portanto, $\Psi(t)$ é uma solução de (3.9). Como $\psi_{v,s}(0) = y_s(0) = c_s, \forall v$, pela unicidade da solução do problema (3.14), segue que $\psi_v(t) = \mathbf{x}_v(t)$, e, portanto, $\mathbf{x}_v(t) = \mathbf{y}(t), \forall v, t \geq 0$. \square

3.4.1 Modelo Evolutivo para o Caso $(N, 2)$ -Jogo

Nesta seção, apresentamos alguns resultados a respeito da existência e estabilidade das soluções de estado estacionário do sistema (3.14) com apenas 2 estratégias. Nesse caso, as variáveis de estado são $\mathbf{x}_v = [x_{v,1} \ 1 - x_{v,1}]^T$, $\forall v$. Denotemos $x_{v,1}$ por y_v e $\mathbf{y} = [y_1 \ \dots \ y_N]^T$. Escrevemos $b_{v,s,r}$ para representar o pagamento que um jogador v recebe ao jogar com a estratégia s contra um r -estrategista. As matrizes de pagamento assumem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{B}_v = \begin{pmatrix} b_{v,1,1} & b_{v,1,2} \\ b_{v,2,1} & b_{v,2,2} \end{pmatrix}, \quad \forall v. \quad (3.15)$$

Denotamos por $\sigma_{v,r} = (-1)^{r+1}(b_{v,1,r} - b_{v,2,r})$ a diferença de recompensa do jogador v contra um r -estrategista. Nesse caso, temos: $\sigma_{v,1} = (b_{v,1,1} - b_{v,2,1})$ e $\sigma_{v,2} = (b_{v,2,2} - b_{v,1,2})$. O número de jogadores conectados ao vértice v usando a estratégia pura s é definido por $\mathbf{k}_v(\mathbf{y}) = (k_{v,1}(\mathbf{y}), k_{v,2}(\mathbf{y})) = \sum_{u=1}^N a_{v,u}(y_u, 1 - y_u)$.

A dinâmica dos jogos evolucionários sobre populações em rede é descrita por um sistema de N equações diferenciais do tipo:

$$\dot{y}_v = y_v(1 - y_v)f_v(\mathbf{y}) \quad (3.16)$$

onde

$$f_v(\mathbf{y}) = \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}) - \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}) \quad (3.17)$$

é a função de pagamento. As soluções de (3.16) pertencem ao simplex

$$\Delta_S = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N : 0 \leq y_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, N \}. \quad (3.18)$$

Problema de Valor Inicial (PVI) para o Caso $(N, 2)$ -jogo:

$$\begin{cases} \dot{x}_{v,1} = x_{v,1} (p_{v,1}^G - \phi_v^G) \\ \dot{x}_{v,2} = x_{v,2} (p_{v,2}^G - \phi_v^G) \\ x_{v,1} + x_{v,2} = 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

A seguir, mostramos que esse sistema pode ser reescrito como em (3.16).

A primeira equação do sistema (3.19) pode ser reescrita como:

$$\dot{x}_{v,1} = x_{v,1} \left(\sum_{u=1}^N a_{v,u} \mathbf{e}_1^T \mathbf{B}_v \mathbf{x}_u - \sum_{u=1}^N a_{v,u} \mathbf{x}_v^T \mathbf{B}_v \mathbf{x}_u \right), \quad (3.20)$$

basta substituímos $p_{v,1}^G$ e ϕ_v^G por Σ^1 e Σ^2 , respectivamente, conforme definidos a seguir.

Definindo $\Sigma^1 := \sum_{u=1}^N a_{v,u} \mathbf{e}_1^T \mathbf{B}_v \mathbf{x}_u$ e $\Sigma^2 := \sum_{u=1}^N a_{v,u} \mathbf{x}_v^T \mathbf{B}_v \mathbf{x}_u$, temos

$$\begin{aligned} \Sigma^1 &= \sum_{u=1}^N a_{v,u} [1 \ 0] \begin{pmatrix} b_{v,1,1} & b_{v,1,2} \\ b_{v,2,1} & b_{v,2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{u,1} \\ 1 - x_{u,1} \end{pmatrix} \\ &= [b_{v,1,1} \ b_{v,1,2}] \sum_{u=1}^N a_{v,u} \begin{pmatrix} y_u \\ 1 - y_u \end{pmatrix} \\ &= [b_{v,1,1} \ b_{v,1,2}] \mathbf{k}_v(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Sigma^2 &= \sum_{u=1}^N a_{v,u} [y_v \ 1 - y_v] \begin{pmatrix} b_{v,1,1} & b_{v,1,2} \\ b_{v,2,1} & b_{v,2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{u,1} \\ 1 - x_{u,1} \end{pmatrix} \\
&= [y_v b_{v,1,1} + (1 - y_v) b_{v,2,1} \quad y_v b_{v,1,2} + (1 - y_v) b_{v,2,2}] \sum_{u=1}^N a_{v,u} \begin{pmatrix} y_u \\ 1 - y_u \end{pmatrix} \\
&= [y_v(b_{v,1,1} - b_{v,2,1}) + b_{v,2,1} \quad y_v(b_{v,1,2} - b_{v,2,2}) + b_{v,2,2}] \mathbf{k}_v(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Tomando $y_v = x_{v,1}$, e substituindo Σ^1 e Σ^2 em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{y}_v &= y_v ([b_{v,1,1} \ b_{v,1,2}] \mathbf{k}_v(\mathbf{y}) - [y_v(b_{v,1,1} - b_{v,2,1}) + b_{v,2,1} \quad y_v(b_{v,1,2} - b_{v,2,2}) + b_{v,2,2}] \mathbf{k}_v(\mathbf{y})) \\
&= y_v [-y_v(b_{v,1,1} - b_{v,2,1}) + b_{v,1,1} - b_{v,2,1} \quad -y_v(b_{v,1,2} - b_{v,2,2}) + b_{v,1,2} - b_{v,2,2}] \mathbf{k}_v(\mathbf{y}) \\
&= y_v [(1 - y_v)(b_{v,1,1} - b_{v,2,1}) \quad (1 - y_v)(b_{v,1,2} - b_{v,2,2})] \mathbf{k}_v(\mathbf{y}) \\
&= y_v(1 - y_v) [b_{v,1,1} - b_{v,2,1} \quad b_{v,1,2} - b_{v,2,2}] \mathbf{k}_v(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Usando, $\sigma_{v,r} = (-1)^{r+1}(b_{v,1,r} - b_{v,2,r})$ e $\mathbf{k}_v(\mathbf{y}) = (k_{v,1}(\mathbf{y}), k_{v,2}(\mathbf{y}))$, temos

$$\begin{aligned}
&= y_v(1 - y_v) [\sigma_{v,1} \quad -\sigma_{v,2}] \begin{bmatrix} k_{v,1}(\mathbf{y}) \\ k_{v,2}(\mathbf{y}) \end{bmatrix} \\
&= y_v(1 - y_v) (\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}) - \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y})) \\
&= y_v(1 - y_v) f_v(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

O resultado é análogo tomando $x_{v,2} = 1 - y_v$. Isso nos mostra que o (PVI) para o caso do $(N, 2)$ -jogo pode ser reescrito como em (3.16).

Como um dos nossos objetivos é estudar o comportamento assintótico das soluções de estado estacionário do modelo descrito pela equação (3.16), definimos o conjunto de estados estacionários por

$$\Theta^* = \{ \mathbf{y}^* \in [0, 1]^N : \forall v (y_v^* = 0 \text{ ou } y_v^* = 1 \text{ ou } f_v(\mathbf{y}^*) = 0) \}. \quad (3.21)$$

Observações. De modo a analisar a estabilidade linear de um estado estacionário \mathbf{y}^* de (3.16), introduzimos a matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*) = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*}$, onde

$$j_{v,u}(\mathbf{y}^*) = \begin{cases} (1 - 2y_v^*)(\sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*)), & \text{para } u = v \\ y_v^*(1 - y_v^*)(\sigma_{v,1} + \sigma_{v,2})a_{v,u}, & \text{para } u \neq v. \end{cases} \quad (3.22)$$

A estabilidade do estado estacionário \mathbf{y}^* depende dos autovalores $\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*))$ da matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)$. Dizemos que \mathbf{y}^* é um estado estacionário assintoticamente estável se todos os autovalores de $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)$ são negativos. O teorema a seguir relaciona o espectro da matriz jacobiana com o da matriz de adjacência de um grafo.

Teorema 3.2. [9] *Suponhamos que $\sigma_{v,1} = \sigma_1$ e $\sigma_{v,2} = \sigma_2$, $\forall v$ e $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) \neq 0$. Então, sempre existe um estado estacionário $\mathbf{y}^* \in \Theta^m$ tal que $y_v^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$, $\forall v$. Além disso, $\lambda(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \lambda(\mathbf{A})$, onde \mathbf{A} é a matriz de adjacência de um grafo sem laços.*

Demonstração. Seja $\mathbf{y}^* \in \Theta^m$ tal que

$$\begin{aligned} \Theta^m &= \{ \mathbf{y}^* \in (0, 1)^N : f_v(\mathbf{y}^*) = 0, \forall v \} \\ &= \{ \mathbf{y}^* \in (0, 1)^N : \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) = \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*), \forall v \}. \end{aligned}$$

De fato, $\sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) = \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*)$, $\forall v$ pode ser escrita como

$$\sigma_1 \sum_{u=1}^N a_{v,u} y_u^* = \sigma_2 \sum_{u=1}^N a_{v,u} (1 - y_u^*) \Leftrightarrow \sigma_1 \mathbf{A} \mathbf{y}^* = \sigma_2 \mathbf{A} (\mathbf{1} - \mathbf{y}^*), \quad (3.23)$$

onde $\mathbf{1}$ é um vetor N -dimensional.

$\therefore \mathbf{y}^* \in \Theta^m$ satisfaz o sistema linear (3.23).

Por hipótese, $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned}\sigma_1 \mathbf{A} \mathbf{y}^* &= \sigma_2 \mathbf{A} \mathbf{1} - \sigma_2 \mathbf{A} \mathbf{y}^* \\ \sigma_1 \mathbf{A} \mathbf{y}^* + \sigma_2 \mathbf{A} \mathbf{y}^* &= \sigma_2 \mathbf{A} \mathbf{1} \\ (\sigma_1 + \sigma_2) \mathbf{A} \mathbf{y}^* &= \sigma_2 \mathbf{A} \mathbf{1} \\ \mathbf{A} \mathbf{y}^* &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{A} \mathbf{1}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Pelo sistema linear não-homogêneo (3.24), $\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{A} \mathbf{1} \in \text{Im}(\mathbf{A})$. Sabemos que existe, pelo menos, uma solução para (3.24), a qual tem a seguinte forma:

$$\mathbf{y}^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{1} + \mathbf{y}_0\tag{3.25}$$

onde $\mathbf{y}_0 \in \text{Null}(\mathbf{A})$. Se \mathbf{A} for invertível, o espaço nulo de \mathbf{A} ($\text{Null}(\mathbf{A})$) é formado apenas por $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{y}^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{1}$ será o único estado estacionário misto de (3.24).

Por fim, verifiquemos que $\lambda(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \lambda(\mathbf{A})$:

(i) $u = v \Rightarrow j_{v,u}(\mathbf{y}^*) = (1 - 2y_v^*) \underbrace{(\sigma_{v,1} k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,2} k_{v,2}(\mathbf{y}^*))}_{f_v(\mathbf{y}^*)=0} = 0$ (a diagonal da matriz Jacobiana é nula);

(ii) $u \neq v \Rightarrow j_{v,u}(\mathbf{y}^*) = y_v^*(1 - y_v^*)(\sigma_1 + \sigma_2) a_{v,u}$.

Então,

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{y}^*) &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) (\sigma_1 + \sigma_2) \mathbf{A} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{A} \\ \therefore \lambda(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) &= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \lambda(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

□

Isso nos diz que o comportamento assintótico do estado estacionário \mathbf{y}^* depende apenas da topologia do grafo.

De fato, não é possível encontrar um resultado similar ao do Teorema 3.2 para estados estacionários puros, pois não há uma relação entre o espectro da matriz jacobiana em um ponto de equilíbrio puro e o espectro da matriz de adjacência do grafo. O que é possível fazer são algumas considerações em relação à estabilidade dos pontos de equilíbrio puro $(0, \dots, 0)$ e $(1, \dots, 1)$.

Seja $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_{N-1}^*, y_N^*)$ um ponto de equilíbrio puro tal que $y_v^* \in \{0, 1\}$, $\forall v \in \{1, \dots, N\}$.

Notemos que $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)$ é uma matriz diagonal e seus autovalores são:

$$\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) = \begin{cases} \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*), & \text{se } y_v^* = 0 \\ \sigma_{v,2}k_{v,2}(\mathbf{y}^*) - \sigma_{v,1}k_{v,1}(\mathbf{y}^*), & \text{se } y_v^* = 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Queremos mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.3. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{N \times N}$ matriz de adjacência de um grafo G sem laços tal que cada vértice de G tenha, ao menos, um vizinho. Assumamos que $\sigma_{v,1} = \sigma_1$ e $\sigma_{v,2} = \sigma_2$, $\forall v$ e $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) \neq 0$. Então, $(0, \dots, 0)$ e $(1, \dots, 1)$ em \mathbb{R}^N são pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis se, e somente se, $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) > 0$. Além disso, esses são os únicos pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis sob as condições assumidas.*

Demonstração. Vamos começar supondo que $(0, \dots, 0)$ é assintoticamente estável.

Por (3.26),

$$\begin{aligned}
\lambda_v(\mathbf{J}(0, \dots, 0)) &= \sigma_1 \sum_{u=1}^N a_{v,u} 0 - \sigma_2 \sum_{u=1}^N a_{v,u} (1 - 0) \\
&= -\sigma_2 \sum_{u=1}^N a_{v,u} \\
&= -\sigma_2 \delta_1,
\end{aligned}$$

onde $\delta_1 = \sum_{u=1}^N a_{v,u} > 0$, visto que, por hipótese, cada jogador de vértice v tem, ao menos, um vizinho u .

Devido à estabilidade assintótica do ponto $(0, \dots, 0)$, temos que $-\sigma_2 \delta_1 < 0$, o que implica $\sigma_2 > 0$. Portanto,

$$\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) > 0.$$

Suponhamos, agora, que $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) > 0$. Então, $-\sigma_2 \delta_1 < 0$, pois $\delta_1 > 0$. Logo,

$(0, \dots, 0)$ é assintoticamente estável.

O raciocínio é análogo para o ponto $(1, \dots, 1)$.

Supondo $(1, \dots, 1)$ assintoticamente estável, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_v(\mathbf{J}(1, \dots, 1)) &= \sigma_2 \sum_{u=1}^N a_{v,u} (1 - 1) - \sigma_1 \sum_{u=1}^N a_{v,u} 1 \\
&= -\sigma_1 \sum_{u=1}^N a_{v,u} \\
&= -\sigma_1 \delta_1, \text{ com } \delta_1 > 0.
\end{aligned}$$

Logo, $-\sigma_1 \delta_1 < 0 \Rightarrow \sigma_1 > 0$. Assim,

$$\text{sgn}(\sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) > 0.$$

Se supormos que $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) > 0$, temos $\lambda_v(\mathbf{J}(1, \dots, 1)) = -\sigma_1 \delta_1 < 0$, resultando na estabilidade assintótica do ponto $(1, \dots, 1)$.

Mostremos, agora, que esses são os únicos pontos de equilíbrio puros nos quais ocorre estabilidade assintótica.

Como $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)$ é uma matriz diagonal,

$$\lambda_v(\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)) = (1 - 2y_v^*)(\sigma_1 k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_2 k_{v,2}(\mathbf{y}^*)). \quad (3.27)$$

Por hipótese, (3.27) é negativo, $\forall v$. Temos duas possibilidades:

$$(1 - 2y_v^*) > 0 \text{ e } (\sigma_1 k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_2 k_{v,2}(\mathbf{y}^*)) < 0$$

ou

$$(1 - 2y_v^*) < 0 \text{ e } (\sigma_1 k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_2 k_{v,2}(\mathbf{y}^*)) > 0.$$

$$1) (\sigma_1 k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_2 k_{v,2}(\mathbf{y}^*)) < 0 \text{ e } (1 - 2y_v^*) > 0 \Rightarrow y_v^* = 0, \forall v, \text{ pois } y_v^* \in \{0, 1\}.$$

$$2) (\sigma_1 k_{v,1}(\mathbf{y}^*) - \sigma_2 k_{v,2}(\mathbf{y}^*)) > 0 \text{ e } (1 - 2y_v^*) < 0 \Rightarrow y_v^* = 1, \forall v, \text{ pois } y_v^* \in \{0, 1\}.$$

Portanto, $(0, \dots, 0)$ e $(1, \dots, 1)$ são as únicas soluções estacionárias puras assintoticamente estáveis possíveis. \square

É importante ressaltar que esse resultado não consta na literatura estudada para a elaboração deste trabalho e que, de agora em diante, particularizamos a estrutura do grafo de modo a tentar obter resultados mais fortes para estes casos. De maneira mais precisa, consideramos dois tipos específicos de grafos: bipartidos completos e estrelas duplas, nos quais relaxamos a hipótese dos jogadores de vértice utilizarem uma mesma matriz de pagamento.

4 MODELO EVOLUTIVO PARA A DINÂMICA DO JOGO REPRESENTADO POR UM GRAFO BIPARTIDO COMPLETO

Nosso objetivo, neste capítulo, é apresentar o modelo evolutivo que descreve a dinâmica do jogo representado por um grafo bipartido completo qualquer, bem como alguns aspectos referentes à estabilidade dos pontos de equilíbrio puro encontrados. Inicialmente, utilizando duas matrizes de pagamento distintas e a teoria desenvolvida anteriormente, obtemos o modelo para um grafo bipartido completo com 5 vértices. Em seguida, estendemos o raciocínio empregado de modo a obter o modelo para um caso mais geral de grafo bipartido completo. Além disso, apresentamos as modificações necessárias para a obtenção do modelo quando os jogadores de vértice jogam com a mesma matriz de pagamento. Por fim, com base em dois grupos de experimentos de simulação numérica, conjecturamos e provamos a existência e unicidade de pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis.

4.1 Caso Geral para um Grafo Bipartido Completo

Consideremos um grafo $G = G(m+n, E)$ bipartido completo, conforme ilustrado na (Figura 4.1), com $m+n \geq 2$ vértices, onde m e n são as cardinalidades de dois conjuntos, independentes e não-vazios, de vértices, e E denota o conjunto de arestas do grafo. Por definição, cada vértice do conjunto de tamanho m está conectado a cada vértice do conjunto de tamanho n , e não há conexão entre dois vértices de um mesmo conjunto.

Seja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

de dimensão $m + n$, a matriz de adjacência do grafo G . Notemos que os elementos não-nulos da matriz estão divididos por m e n . Isso deve-se ao fato de que mais adiante, em nossas simulações numéricas, empregaremos o modelo de pagamento WA. Desse modo, a partir de agora, desenvolvemos toda a teoria necessária com a matriz já em sua forma estocástica de linha.

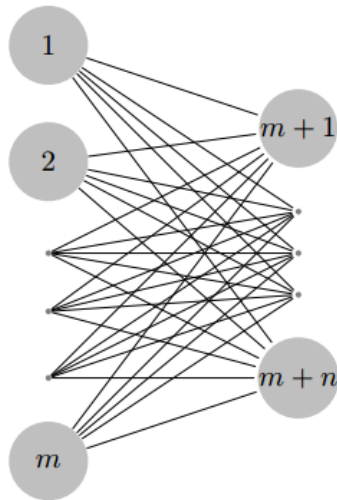


Figura 4.1: Grafo Bipartido Completo com $m + n \geq 2$ vértices.

4.1.1 Duas Matrizes de Pagamento

Suponhamos, inicialmente, que os jogadores de vértice do conjunto de tamanho m utilizem uma mesma matriz de pagamento \mathbf{B}_1 e os do conjunto de ta-

manho n utilizem uma matriz \mathbf{B}_2 , ambas de dimensão 2.

Seja a função de pagamento dada por

$$f_v(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sigma_1 k_{v,1}(\mathbf{y}) - \sigma_2 k_{v,2}(\mathbf{y}), & \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \sigma_3 k_{v,1}(\mathbf{y}) - \sigma_4 k_{v,2}(\mathbf{y}), & \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Consideremos o grafo $G(3+2, E)$, tal que $m = 3$ e $n = 2$, conforme ilustrado abaixo. Sua matriz de adjacência é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

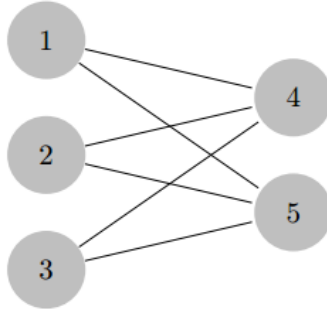


Figura 4.2: Grafo Bipartido Completo com 5 vértices.

A seguir, apresentamos o cálculo das componentes necessárias para a obtenção das equações que compõem o modelo evolutivo que descreve a dinâmica do jogo representado por um grafo bipartido completo, onde duas matrizes de pagamento são utilizadas.

Temos $\sigma_{v,1} = \sigma_1$, $\sigma_{v,2} = \sigma_2$, $\forall v \in \{1, 2, 3\}$ e $\sigma_{v,1} = \sigma_3$, $\sigma_{v,2} = \sigma_4$, $\forall v \in \{4, 5\}$, e

$$k_{v,1}(\mathbf{y}) = \sum_{u=1}^5 a_{v,u} y_u \text{ e } k_{v,2}(\mathbf{y}) = \sum_{u=1}^5 a_{v,u} (1 - y_u), \forall v \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Logo,

$$k_{1,1}(\mathbf{y}) = k_{2,1}(\mathbf{y}) = k_{3,1}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}[y_4 + y_5] = \frac{1}{2} \sum_{i=4}^5 y_i,$$

$$k_{1,2}(\mathbf{y}) = k_{2,2}(\mathbf{y}) = k_{3,2}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}[2 - y_4 - y_5] = \frac{1}{2} \left[2 - \sum_{i=4}^5 y_i \right],$$

$$k_{4,1}(\mathbf{y}) = k_{5,1}(\mathbf{y}) = \frac{1}{3}[y_1 + y_2 + y_3] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

e

$$k_{4,2}(\mathbf{y}) = k_{5,2}(\mathbf{y}) = \frac{1}{3}[3 - y_1 - y_2 - y_3] = \frac{1}{3} \left[3 - \sum_{i=1}^3 y_i \right].$$

Substituindo na função de pagamento dada por (4.2), obtemos:

$$f_v(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sigma_1 \frac{1}{2} \sum_{i=4}^5 y_i - \sigma_2 \frac{1}{2} \left[2 - \sum_{i=4}^5 y_i \right], & \forall v \in \{1, 2, 3\} \\ \sigma_3 \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i - \sigma_4 \frac{1}{3} \left[3 - \sum_{i=1}^3 y_i \right], & \forall v \in \{4, 5\}. \end{cases}$$

Logo, o modelo evolutivo que descreve a dinâmica do jogo representado pelo grafo $G(3 + 2, E)$ é dado por

$$\begin{cases} \dot{y}_v = y_v(1 - y_v) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{2} \sum_{i=4}^5 y_i - \sigma_2 \right], & \forall v \in \{1, 2, 3\} \\ \dot{y}_v = y_v(1 - y_v) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i - \sigma_4 \right], & \forall v \in \{4, 5\}. \end{cases}$$

Estendendo esse raciocínio para quaisquer m, n inteiros e positivos, obtemos:

$$\begin{aligned}
k_{v,1}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i \text{ e } k_{v,2}(\mathbf{y}) = \frac{1}{n} \left[n - \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i \right], \forall v \in \{1, \dots, m\}. \\
k_{v,1}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i \text{ e } k_{v,2}(\mathbf{y}) = \frac{1}{m} \left[m - \sum_{i=1}^m y_i \right], \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}. \\
f_v(\mathbf{y}) &= \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i - \sigma_2, \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ (\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \sigma_4, \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.16) os dados obtidos, encontramos que o sistema de equações que descreve o modelo evolutivo para a dinâmica do jogo representado por um grafo bipartido completo, onde duas matrizes de pagamento distintas são utilizadas, é

$$\begin{cases} \dot{y}_v = y_v(1 - y_v) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i - \sigma_2 \right], \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \dot{y}_v = y_v(1 - y_v) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \sigma_4 \right], \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Na sequência, calculamos a matriz jacobiana do sistema (4.4) de modo a investigar a estabilidade assintótica das soluções de estado estacionário.

i)

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_v} = (1 - 2y_v) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i - \sigma_2 \right], \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_z} = 0, \forall z \in \{1, 2, \dots, v-1, v+1, \dots, m\}. \end{cases}$$

ii)

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (1 - 2y_1) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i - \sigma_2 \right] & & \\ & \ddots & \\ & & (1 - 2y_m) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i - \sigma_2 \right] \end{pmatrix}$$

iii)

$$\left\{ \frac{\partial y_v}{\partial y_z} = y_v(1 - y_v) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \right], \forall v \in \{1, \dots, m\}, \forall z \in \{m+1, \dots, m+n\}. \right.$$

iv)

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1(1 - y_1) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \right] & \dots & y_1(1 - y_1) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \right] \\ y_2(1 - y_2) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \right] & \dots & y_2(1 - y_2) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m(1 - y_m) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \right] & \dots & y_m(1 - y_m) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \right] \end{pmatrix}$$

v)

$$\left\{ \frac{\partial y_v}{\partial y_z} = y_v(1 - y_v) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \right], \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}, \forall z \in \{1, \dots, m\}. \right.$$

vi)

$$\mathbf{J}_3(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_{m+1}(1 - y_{m+1}) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \right] & \dots & y_{m+1}(1 - y_{m+1}) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \right] \\ y_{m+2}(1 - y_{m+2}) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \right] & \dots & y_{m+2}(1 - y_{m+2}) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m+n}(1 - y_{m+n}) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \right] & \dots & y_{m+n}(1 - y_{m+n}) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \right] \end{pmatrix}$$

vii)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_v}{\partial y_v} &= (1 - 2y_v) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \sigma_4 \right], \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\} \\ \frac{\partial y_v}{\partial y_z} &= 0, \forall z \in \{m+1, \dots, v-1, v+1, \dots, m+n\}. \end{aligned} \right.$$

viii)

$$\mathbf{J}_4(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (1 - 2y_{m+1}) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \sigma_4 \right] & & \\ & \ddots & \\ & & (1 - 2y_{m+n}) \left[(\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \sigma_4 \right] \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz Jacobiana do sistema (4.4) é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1(\mathbf{y}) & \mathbf{J}_2(\mathbf{y}) \\ \mathbf{J}_3(\mathbf{y}) & \mathbf{J}_4(\mathbf{y}) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Observações Importantes sobre a matriz $\mathbf{J}(\mathbf{y})$:

1) Seja $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*, y_{m+1}^*, \dots, y_{m+n}^*)$ um ponto de equilíbrio puro, ou seja, um ponto tal que cada $y_v^* \in \{0, 1\}$, $\forall v \in \{1, \dots, m, m+1, \dots, m+n\}$. Então, $\mathbf{J}_2(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ e $\mathbf{J}_3(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula e $\mathbb{M}_k(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes de dimensão k sobre \mathbb{R} .

Demonstração. Cada entrada de $\mathbf{J}_2(\mathbf{y}^*)$ é do tipo $j_{v,u} = y_v^*(1-y_v^*)(\sigma_1+\sigma_2)\frac{1}{n}$, $\forall v \in \{1, \dots, m\}$. Como cada $y_v^* \in \{0, 1\}$:

$$\begin{cases} y_v^* = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - y_v^* = 0 \text{ quando } y_v^* = 1. \end{cases} \Rightarrow j_{v,u} = 0.$$

De modo análogo, cada entrada de \mathbf{J}_3 é do tipo $j_{v,u} = y_v^*(1-y_v^*)(\sigma_3 + \sigma_4)\frac{1}{m}$, $\forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}$. Assim, como cada $y_v^* \in \{0, 1\}$, temos:

$$\begin{cases} y_v^* = 0 \\ \text{ou} \\ 1 - y_v^* = 0 \text{ quando } y_v^* = 1. \end{cases} \Rightarrow j_{v,u} = 0.$$

ponto de equilíbrio (misto) interior, com m componentes iguais à $\frac{\sigma_4}{\sigma_3 + \sigma_4}$ e n iguais à $\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$, pois (4.6) e (4.7) são satisfeitas. Podemos verificar que se $\sigma_1 = \sigma_2$ e $\sigma_3 = \sigma_4$ então $\mathbf{y}_1^* = \left(\frac{\sigma_4}{\sigma_3 + \sigma_4}, \dots, \frac{\sigma_4}{\sigma_3 + \sigma_4} \right)$ e $\mathbf{y}_2^* = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)$ também são pontos de equilíbrio (misto) interior e, conseqüentemente, $\mathbf{y}_1^* = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) = \mathbf{y}_2^*$.

Substituindo \mathbf{y}_1^* na função de pagamento (4.2), obtemos:

$$f_v(\mathbf{y}_1^*) = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} n \frac{\sigma_4}{\sigma_3 + \sigma_4} - \sigma_2 = 2\sigma_2 \frac{\sigma_4}{2\sigma_4} - \sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_2 = 0, \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ (\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} m \frac{\sigma_4}{\sigma_3 + \sigma_4} - \sigma_4 = 2\sigma_4 \frac{\sigma_4}{2\sigma_4} - \sigma_4 = \sigma_4 - \sigma_4 = 0, \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases}$$

De modo análogo, substituindo \mathbf{y}_2^* na função de pagamento (4.2), obtemos:

$$f_v(\mathbf{y}_2^*) = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} n \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} - \sigma_2 = 2\sigma_2 \frac{\sigma_2}{2\sigma_2} - \sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_2 = 0, \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ (\sigma_3 + \sigma_4) \frac{1}{m} m \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} - \sigma_4 = 2\sigma_4 \frac{\sigma_2}{2\sigma_2} - \sigma_4 = \sigma_4 - \sigma_4 = 0, \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases}$$

Portanto, $\mathbf{y}_1^* = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) = \mathbf{y}_2^*$ é o único ponto de equilíbrio (misto) interior em Δ_S , onde todas as componentes são iguais. A existência desse ponto de equilíbrio (misto) interior é garantida pelo Teorema 3.2.

Aplicando a Jacobiana no ponto $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$:

$$\mathbf{J} \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma_1}{2n} & \dots & \frac{\sigma_1}{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma_1}{2n} & \dots & \frac{\sigma_1}{2n} \\ \frac{\sigma_3}{2m} & \dots & \frac{\sigma_3}{2m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_3}{2m} & \dots & \frac{\sigma_3}{2m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } \sigma_1 \neq \sigma_3.$$

De fato,

$$\sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i = \text{Tr} \left(\mathbf{J} \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) \right) = 0,$$

onde λ_i denota os autovalores da $\mathbf{J} \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$. Logo, como o traço é nulo, nem todos os autovalores da $\mathbf{J} \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$ podem ser negativos e, portanto, $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ não é assintoticamente estável.

4.1.2 Uma Matriz de Pagamento

No caso em que os jogadores de vértice jogam todos com uma mesma matriz de pagamento, temos, $\sigma_{v,1} = \sigma_1$ e $\sigma_{v,2} = \sigma_2$, $\forall v$. O sistema de equações que descreve o modelo evolutivo para a dinâmica do jogo representado por um grafo bipartido completo, onde todos os indivíduos da população recebem o mesmo pagamento, é idêntico ao sistema (4.4), basta trocarmos σ_3 por σ_1 e σ_4 por σ_2 :

$$\begin{cases} \dot{y}_v = y_v(1 - y_v) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i - \sigma_2 \right], \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \dot{y}_v = y_v(1 - y_v) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \sigma_2 \right], \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Calculando a Matriz Jacobiana do Sistema:

Os passos intermediários, para a obtenção da matriz jacobiana, são análogos aos apresentados para o caso anterior, bastando trocarmos σ_3 por σ_1 e σ_4 por σ_2 ; sendo assim, $\mathbf{J}_1(\mathbf{y})$ e $\mathbf{J}_2(\mathbf{y})$ mantêm-se inalteradas. Já $\mathbf{J}_3(\mathbf{y})$ e $\mathbf{J}_4(\mathbf{y})$ passam a ser escritas como:

$$\bar{\mathbf{J}}_3(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_{m+1}(1 - y_{m+1})[(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{1}{m}] & \dots & y_{m+1}(1 - y_{m+1})[(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{1}{m}] \\ y_{m+2}(1 - y_{m+2})[(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{1}{m}] & \dots & y_{m+2}(1 - y_{m+2})[(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{1}{m}] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m+n}(1 - y_{m+n})[(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{1}{m}] & \dots & y_{m+n}(1 - y_{m+n})[(\sigma_1 + \sigma_2)\frac{1}{m}] \end{pmatrix}$$

e

$$\bar{\mathbf{J}}_4(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (1 - 2y_{m+1}) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \sigma_2 \right] & & \\ & \dots & \\ & & (1 - 2y_{m+n}) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i - \sigma_2 \right] \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz Jacobiana do sistema (4.8) é dada por

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1(\mathbf{y}) & \mathbf{J}_2(\mathbf{y}) \\ \bar{\mathbf{J}}_3(\mathbf{y}) & \bar{\mathbf{J}}_4(\mathbf{y}) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

As observações feitas em relação à $\mathbf{J}(\mathbf{y})$ são válidas para $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{y})$ também.

Buscando por Pontos de Equilíbrio (Misto) Interior:

Novamente, verifiquemos sob quais condições $f_v(\mathbf{y}^*) = 0$. Então,

$$f_v(\mathbf{y}^*) = (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i^* - \sigma_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \forall v \in \{1, \dots, m\}.$$

$$f_v(\mathbf{y}^*) = (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i^* - \sigma_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}.$$

Portanto, \mathbf{y}^* é um ponto de equilíbrio (misto) interior se, e somente se,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} y_i^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i^*. \quad (4.10)$$

Devido a singularidade da matriz de adjacência (4.1), existem infinitos pontos satisfazendo a condição (4.10). De fato, se tomarmos $\mathbf{y}^* = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)$, (4.10) é satisfeita. Porém, não podemos garantir que esse ponto de equilíbrio misto seja viável, ou seja, que pertença ao simplex Δ_S , quando $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Dizemos que um estado estacionário misto (interior) \mathbf{y}^* é viável se, e somente se, $y_v^* \in (0, 1)$, $\forall v$.

Aplicando a Jacobiana no ponto $\mathbf{y}^* = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)$:

$$\bar{\mathbf{J}} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{n} & \dots & \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{n} & \dots & \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{n} \\ \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{m} & \dots & \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{m} & \dots & \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Portanto,

$$\bar{\mathbf{J}} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \mathbf{A}.$$

O que implica que

$$\lambda \left(\bar{\mathbf{J}} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \dots, \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \right) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \lambda(\mathbf{A}),$$

conforme afirmado na parte final do Teorema 3.2.

4.2 Estudo da Estabilidade de Pontos de Equilíbrio Puro

Desenvolvemos dois grupos de experimentos de simulação. Em ambos os experimentos, o sistema de equações (4.8) é simulado usando grafos bipartidos completos não-direcionados, o modelo de pagamento WA e assumindo que todos os jogadores de vértice jogam com uma mesma matriz de pagamento. Enquanto no primeiro experimento os jogadores de vértice tomam decisões de acordo com uma matriz de pagamento de Biestabilidade, no segundo as fazem de acordo com uma matriz de pagamento de Coexistência, as quais são definidas, a seguir, nas subseções 4.2.1 e 4.2.2. Quatro distribuições diferentes de condições iniciais puras levemente perturbadas são atribuídas aos vértices do grafo: $[x_{v,1} \ x_{v,2}]^t = [0.99 \ 0.01]^t$ ou $[x_{v,1} \ x_{v,2}]^t = [0.01 \ 0.99]^t$.

Os resultados obtidos são mostrados nas figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9. A primeira coluna de cada figura apresenta a distribuição de condições iniciais, enquanto a segunda mostra as soluções em estado estacionário para um grafo bipartido completo não-direcionado com $m + n \geq 2$ vértices. A cor de cada vértice indica a variável $x_{v,1}$, e quantifica a inclinação do jogador v em direção à uma das duas estratégias puras viáveis: a cor *azul* é usada para indicar a estratégia 1 ($x_{v,1} = 1$), e a cor *vermelha* para a estratégia 2 ($x_{v,1} = 0$). As estratégias mistas ($0 < x_{v,1} < 1$) são indicadas pela cor *rosa*.

Nosso objetivo é analisar o comportamento assintótico de pontos de equilíbrio puro em três dinâmicas distintas: *i*) quando todos os jogadores de vértice utilizam uma mesma estratégia; *ii*) quando todos os jogadores de vértice do conjunto de tamanho m utilizam a estratégia 1 e os do conjunto de tamanho n utilizam a estratégia 2; *iii*) um caso mutante, ou seja, onde um jogador de vértice, do conjunto de tamanho m , utiliza a estratégia indicada pela cor *vermelha*, enquanto os demais $(m - 1)$ -jogadores de vértice, desse mesmo conjunto, utilizam a estratégia indicada pela cor *azul*; os n -jogadores de vértice restantes também utilizam a estratégia de cor *vermelha*. Os três cenários que acabamos de descrever são ilustrados nas duas subseções a seguir. Os resultados apresentados são resultantes de simulações numéricas, variando os parâmetros a e n , e fixando m . Em nossas simulações, tomamos a e n variando de 1 a 60 e de 1 a 20, respectivamente, e fixamos $m = 30$. Para realizar esse conjunto de simulações foram desenvolvidos algoritmos no software SciLab.

4.2.1 Matriz de Pagamento de (Biestabilidade)

Vamos começar analisando o caso em que todos os jogadores de vértice jogam com uma matriz de pagamento de (Biestabilidade) do tipo

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \forall a > 0 \quad (\sigma_1 = a = \sigma_2 > 0). \quad (4.12)$$

i) Consideremos a situação em que todos os jogadores de vértice utilizam uma mesma estratégia. Assumamos, por exemplo, que iniciem jogando com a estratégia 1.

A Figura 4.3 nos informa o que acontece quando uma condição inicial homogênea é assumida. Podemos observar que a dinâmica é a mesma para cada jogador de vértice, mais especificamente, após decorrido um certo tempo, todos os jogadores de vértice continuam a usar a estratégia 1. Ressaltamos, ainda, que a solução obtida é equivalente à dada pela equação padrão de replicação (ver Teorema 3.1). A dominância da estratégia 1 adotada, desde o início, por todos os jogadores de vértice, representa o ponto de equilíbrio puro $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

ii) Consideremos, agora, o caso em que os jogadores do conjunto de cardinalidade m utilizam a estratégia 1 e os do de cardinalidade n utilizam a estratégia 2. Cada jogador de vértice *azul* tem n vizinhos *vermelhos*, e cada jogador de vértice *vermelho* tem m vizinhos *azuis*. Observamos que para $a = 1$, os jogadores *azuis* decidem mudar suas estratégias para *vermelha*, enquanto os *vermelhos* fazem o oposto. Desse modo, eles alcançam um acordo mútuo no ponto de equilíbrio misto interior $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ indicado pela cor *rosa* (Figura 4.4).

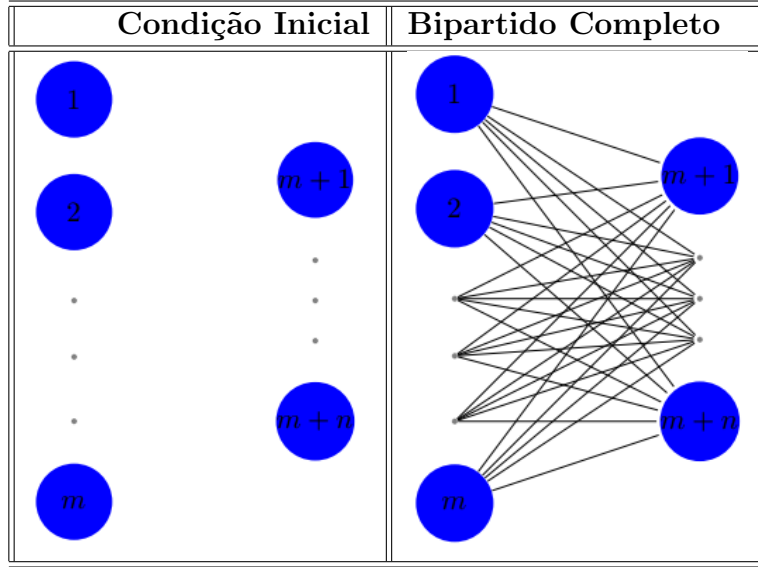


Figura 4.3: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo.

Por (4.11), temos que

$$\bar{\mathbf{J}} \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

É imediato que $\lambda(\bar{\mathbf{J}}(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})) = \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{A})$. Visto que, pela teoria espectral de grafos, o espectro da matriz de adjacência de um grafo bipartido completo $G = G(m+n, E)$ é $\lambda(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, -\lambda_1, 0, \dots, 0\}$, onde $\lambda_1 > 0$ e 0 tem multiplicidade $(m+n) - 2$, concluímos que $\lambda(\bar{\mathbf{J}}(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})) = \{\frac{1}{2}\lambda_1, -\frac{1}{2}\lambda_1, 0, \dots, 0\}$ e, portanto, o ponto de equilíbrio misto $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ não é assintoticamente estável. Mais especificamente, esse equilíbrio misto é instável pois $\lambda(\bar{\mathbf{J}}(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}))$ contém um autovalor positivo.

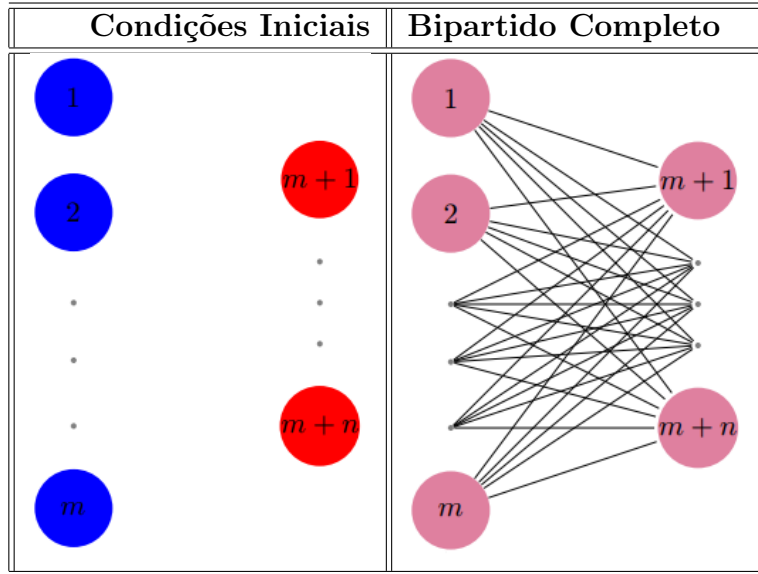


Figura 4.4: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário misto para um grafo bipartido completo.

Para os demais valores de a , a solução de estado estacionário fica oscilando entre os pontos $(0, \dots, 0)$ e $(1, \dots, 1)$ em \mathbb{R}^{m+n} , o que indica uma dominância das estratégias 2 e 1, respectivamente. Essa dinâmica é ilustrada na (Figura 4.5).

Com base nos resultados apresentados no Teorema 3.3, sabemos que as soluções de estado estacionário puro obtidas nos experimentos de simulação são assintoticamente estáveis e as únicas possíveis.

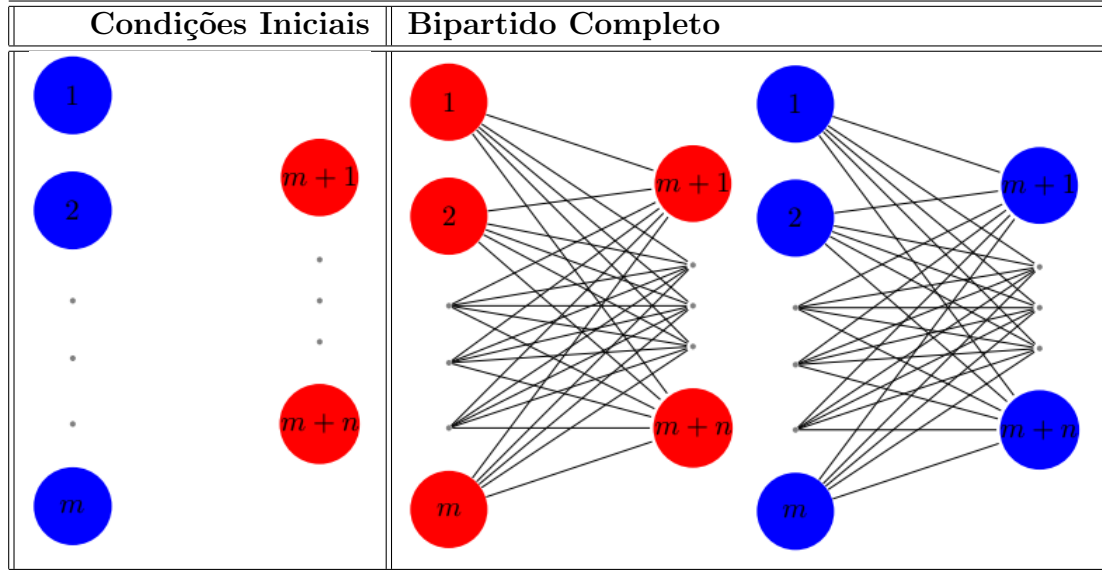


Figura 4.5: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo.

4.2.2 Matriz de Pagamento de (Coexistência)

Vamos analisar, agora, o caso em que todos os jogadores de vértice jogam com uma matriz de pagamento de (Coexistência) do tipo

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall a > 0 \quad (\sigma_1 = -a = \sigma_2 < 0). \quad (4.14)$$

i) Assumamos, novamente, que todos os jogadores de vértice iniciem jogando com a estratégia 1.

Dependendo do valor assumido por a , um lado do grafo mantém suas estratégias iniciais e o outro troca para a estratégia *vermelha* (Figura 4.6). O padrão obtido corresponde aos pontos de equilíbrio puro $(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_n)$ ou $(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \underbrace{1, \dots, 1}_n)$.

ii) Considerando o caso em que os jogadores do conjunto de cardinalidade m utilizam

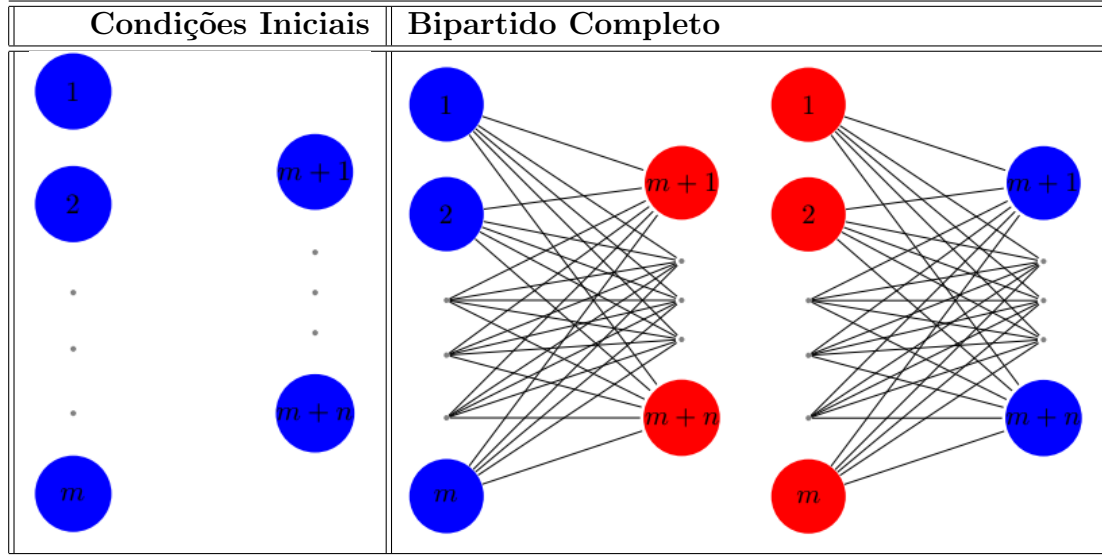


Figura 4.6: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo.

a estratégia 1 e os de cardinalidade n utilizam a estratégia 2, observamos que todos os jogadores mantêm, com o decorrer do tempo, as estratégias adotadas inicialmente. Esse comportamento representa a solução de equilíbrio puro $(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_n)$, cuja dinâmica está ilustrada na (Figura 4.7).

Nesse caso, particularmente, para grafos bipartidos completos, podemos conjecturar e provar a existência e unicidade de pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis:

Proposição 4.1. *Dado um grafo $G = G(m+n, E)$ bipartido completo com $m+n \geq 2$ vértices e matriz de adjacência \mathbf{A} (estocástica de linha), e assumindo $\sigma_{v,1} = \sigma_1$ e $\sigma_{v,2} = \sigma_2$, $\forall v$ tal que $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) < 0$, temos que $(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_n)$ e $(\underbrace{0, \dots, 0}_m, \underbrace{1, \dots, 1}_n)$ são os únicos pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis do sistema de equações (4.8).*

Recordemos que no teorema 3.3 os pontos de equilíbrio puro $(0, \dots, 0)$ e $(1, \dots, 1)$ são assintoticamente estáveis se, e somente se, $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) > 0$ (o

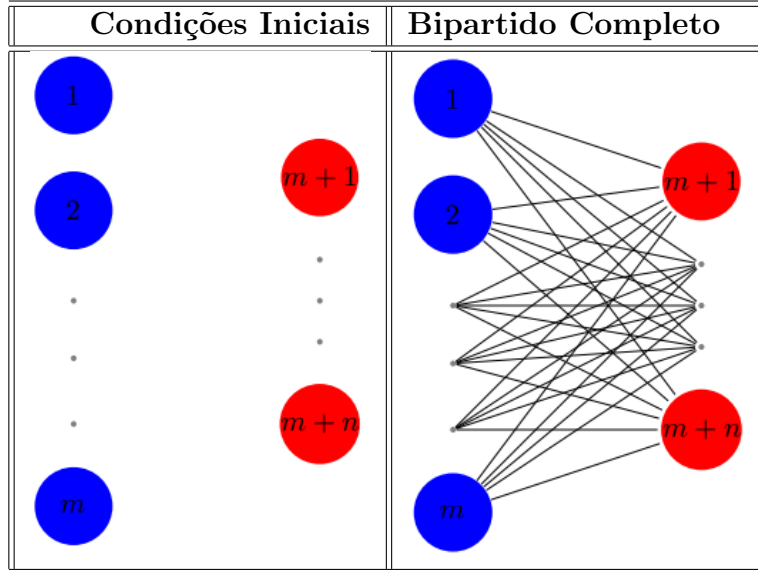


Figura 4.7: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo.

que é equivalente a dizer que \mathbf{B} é uma matriz de pagamento de biestabilidade), já a proposição 4.1 nos fornece novos pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis se, e somente se, $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) < 0$ (o que é equivalente a dizer que \mathbf{B} é uma matriz de pagamento de coexistência).

Demonstração. (EXISTÊNCIA.)

i) Substituindo $(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_n)$ na matriz jacobiana (4.9), obtemos:

$$\bar{j}_{v,u} = (1-2) \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} 0 - \sigma_2 \right] = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{n} 0 + \sigma_2 = \sigma_2 < 0, \forall v \in \{1, \dots, m\},$$

$$\bar{j}_{v,u} = (1-0) \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} \sum_{i=1}^m 1 - \sigma_2 \right] = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m} m - \sigma_2 = \sigma_1 < 0, \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}$$

e

$$\bar{\mathbf{J}}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} \sigma_2 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_1 & \\ & & & & \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Substituindo em $\mathbf{J}_1(\mathbf{y}^*)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_v(\mathbf{y}^*) &= (1 - 2y_v^*) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} 1 - \sigma_2 \right] \\
&= (1 - 2y_v^*) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} n - \sigma_2 \right] \\
&= \underbrace{\sigma_1}_{<0} (1 - 2y_v^*) \Rightarrow (1 - 2y_v^*) > 0, \text{ pois queremos que } \gamma_v(\mathbf{y}^*) \text{ seja negativo.}
\end{aligned}$$

Logo, $y_v^* = 0, \forall v \in \{1, \dots, m\}$. Portanto, $\mathbf{y}^* = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$.

Suponhamos, agora, que $[(\sigma_1 + \sigma_2)\delta_2 - \sigma_2] < 0$ e $(1 - 2y_v^*) > 0$, o que implica que $y_v^* = 0, \forall v \in \{m+1, \dots, m+n\}$.

Substituindo no bloco $\mathbf{J}_1(\mathbf{y}^*)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_v(\mathbf{y}^*) &= (1 - 2y_v^*) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} 0 - \sigma_2 \right] \\
&= (1 - 2y_v^*) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{n} 0 - \sigma_2 \right] \\
&= -\sigma_2(1 - 2y_v^*) \Rightarrow (1 - 2y_v^*) < 0.
\end{aligned}$$

Logo, $y_v^* = 1, \forall v \in \{1, \dots, m\}$ e $\mathbf{y}^* = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. O resultado é análogo se partirmos de $\mathbf{J}_1(\mathbf{y}^*)$.

Portanto, $\mathbf{y}^* = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ e $\mathbf{y}^* = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ são os únicos pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis possíveis quando a matriz de pagamento é uma matriz de Coexistência. \square

4.2.3 Um caso Mutante para Matrizes de Biestabilidade e Coexistência

Partindo da distribuição de estratégias apresentada na primeira coluna da figura 4.5, o que acontece se “introduzirmos” um jogador com um comportamento mutante?

A figura 4.8 ilustra essa dinâmica, mostrando as soluções de estado estacionário quando os jogadores $2, m + 1, \dots, m + n - 1$ e $m + n$ usam a estratégia quase-pura 2 e uma matriz de biestabilidade. Nesse caso, o grafo torna-se todo vermelho. Isso ocorre porque o jogador 2 (escolhido como agente desviante, isto é, aquele que joga com uma estratégia diferente da dos demais) interage apenas com jogadores vermelhos, e, portanto, não vê razão alguma para mudar de estratégia. Ao mesmo tempo, os jogadores azuis trocam suas estratégias para vermelha, pois estão rodeados apenas por jogadores vermelhos. A dominância da estratégia associada à cor *vermelha* indica que o sistema (4.8) tem como solução de equilíbrio puro o ponto $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

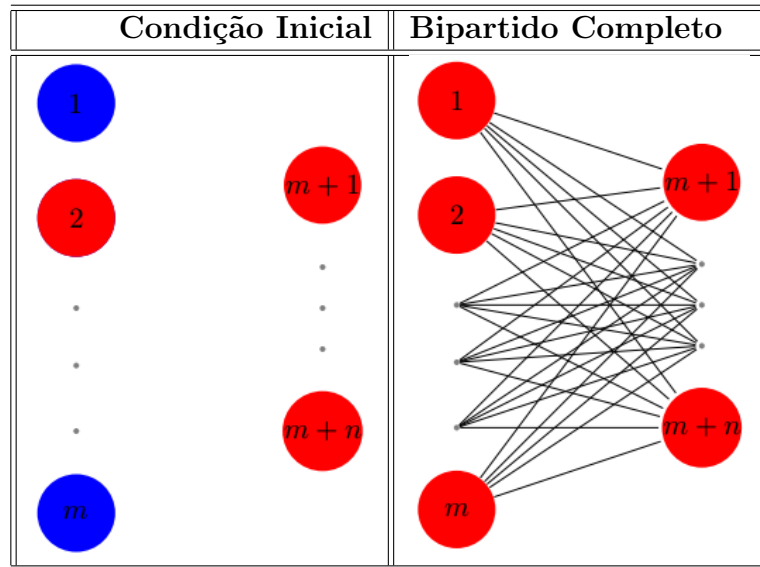


Figura 4.8: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo.

Já no caso em que uma matriz de coexistência é utilizada, observamos que a introdução de um jogador desviante (de comportamento mutante) (Figura 4.9), o qual é representado pelo jogador 2, não interfere no padrão da solução, atingindo o mesmo ponto de equilíbrio puro obtido no cenário ilustrado pela (Figura 4.7) $(\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_n)$. O jogador desviante decide adaptar-se aos demais jogadores

de vértice do conjunto ao qual pertence, trocando sua estratégia para *azul*, enquanto todos os outros permanecem com suas estratégias iniciais.

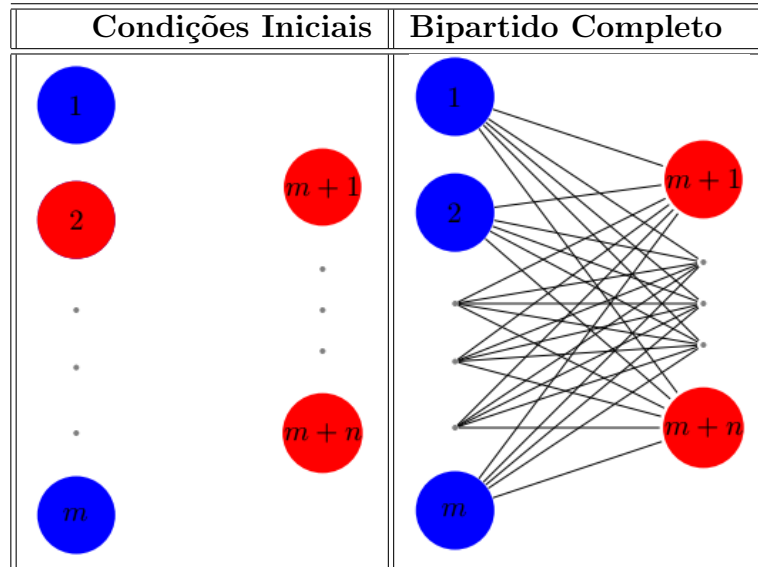


Figura 4.9: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo bipartido completo.

Ao contrário do que ocorre quando todos os jogadores de vértice jogam com uma matriz de biestabilidade, no caso de uma matriz de coexistência, a presença de um único jogador desviante no conjunto não é o suficiente para que haja a dominância da estratégia associada ao comportamento mutante. De modo geral, mesmo após a introdução de m jogadores desviantes no conjunto de cardinalidade m , não haverá um domínio da estratégia associada à cor vermelha. A introdução de no máximo $m - 1$ jogadores mutantes conduz à dinâmica da Figura 4.9. A presença de m jogadores desviantes é equivalente ao caso em que todos partem de uma mesma estratégia (Figura 4.6).

5 SIMULAÇÕES ESTENDIDAS E RESULTADOS PARA UM GRAFO ESTRELA DUPLA

Neste capítulo, apresentamos o modelo evolutivo que descreve a dinâmica do jogo representado por um grafo *estrela dupla* qualquer, bem como alguns aspectos referentes à estabilidade dos pontos de equilíbrio puro encontrados. Utilizando uma única matriz de pagamento e a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores, obtemos o modelo que descreve a dinâmica do jogo representado por esse grafo. Fechamos o capítulo mostrando que não ocorre estabilidade assintótica nos pontos de equilíbrio puro obtidos dos experimentos numéricos realizados.

5.1 Modelo Evolutivo para um Grafo Estrela Dupla

Seja $G = G(m + k, E)$ um grafo estrela dupla, conforme ilustrado na (Figura 5.1),

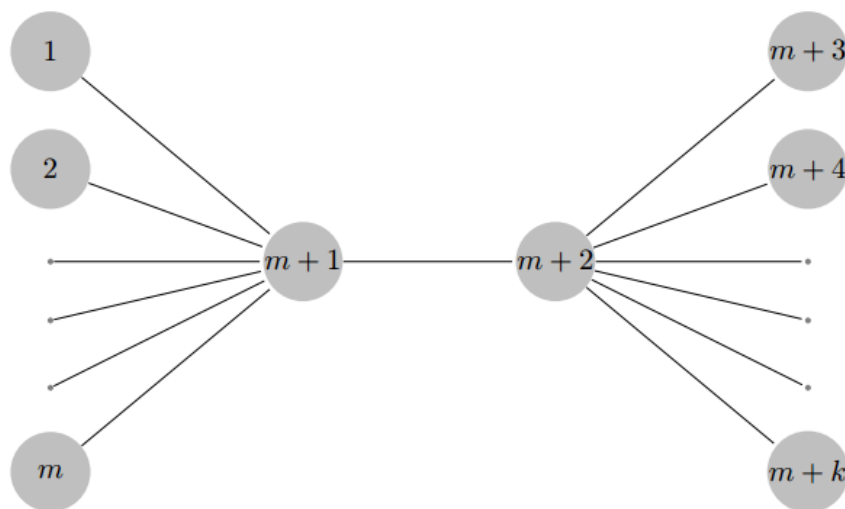


Figura 5.1: Grafo $G = G(m + k, E)$ com $m + k$ vértices onde $k = 2 + n$, $n \geq 1$.

representado pela matriz de adjacência

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{m+1} & \dots & \frac{1}{m+1} & 0 & \frac{1}{m+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{m+1} & 0 & \frac{1}{m+1} & \dots & \frac{1}{m+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

de dimensão $m + k$. Observe que, novamente, apresentados a matriz de adjacência do grafo em sua forma estocástica de linha.

5.1.1 Uma Matriz de Pagamento

Assumamos que todos os jogadores de vértice joguem com uma mesma matriz de pagamento, de modo que $\sigma_{v,1} = \sigma_1$ e $\sigma_{v,2} = \sigma_2$, $\forall v$. A função de pagamento de G é dada por $f_v(\mathbf{y}) = \sigma_1 k_{v,1}(\mathbf{y}) - \sigma_2 k_{v,2}(\mathbf{y})$, $\forall v$, onde

$$k_{v,1}(\mathbf{y}) = \begin{cases} y_{m+1}, & \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \frac{1}{m+1} \left(\sum_{i=1}^m y_i + y_{m+2} \right), & \text{para } v = m+1 \\ \frac{1}{m+1} \left(y_{m+1} + \sum_{i=m+3}^{m+k} y_i \right), & \text{para } v = m+2 \\ y_{m+2}, & \forall v \in \{m+3, \dots, m+k\}. \end{cases}$$

e

$$k_{v,2}(y) = \begin{cases} 1 - y_{m+1}, \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \frac{1}{m+1} \left(m+1 - \sum_{i=1}^m y_i - y_{m+2} \right), \text{ para } v = m+1 \\ \frac{1}{m+1} \left(m+1 - y_{m+1} - \sum_{i=m+3}^{m+k} y_i \right), \text{ para } v = m+2 \\ 1 - y_{m+2}, \forall v \in \{m+3, \dots, m+k\}. \end{cases}$$

Substituindo na função de pagamento, obtemos

$$f_v(\mathbf{y}) = \begin{cases} \sigma_1 y_{m+1} - \sigma_2 (1 - y_{m+1}), \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m+1} \left(\sum_{i=1}^m y_i + y_{m+2} \right) - \sigma_2, \text{ para } v = m+1 \\ (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m+1} \left(y_{m+1} + \sum_{i=m+3}^{m+k} y_i \right) - \sigma_2, \text{ para } v = m+2 \\ \sigma_1 y_{m+2} - \sigma_2 (1 - y_{m+2}), \forall v \in \{m+3, \dots, m+k\}. \end{cases}$$

Logo, o modelo evolutivo que descreve a dinâmica do jogo representado pelo grafo $G = G(m+k, E)$ é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_v = y_v(1 - y_v)[(\sigma_1 + \sigma_2)y_{m+1} - \sigma_2], \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \dot{y}_{m+1} = y_{m+1}(1 - y_{m+1}) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m+1} \left[\sum_{i=1}^m y_i + y_{m+2} \right] - \sigma_2 \right] \\ \dot{y}_{m+2} = y_{m+2}(1 - y_{m+2}) \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m+1} \left[y_{m+1} + \sum_{i=m+3}^{m+k} y_i \right] - \sigma_2 \right] \\ \dot{y}_v = y_v(1 - y_v)[(\sigma_1 + \sigma_2)y_{m+2} - \sigma_2], \forall v \in \{m+3, \dots, m+k\}. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Calculando a Matriz Jacobiana do Sistema:

i)

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_v} = (1 - 2y_v)[(\sigma_1 + \sigma_2)y_{m+2} - \sigma_2], \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_z} = 0, \forall z \in \{1, \dots, v-1, v+1, \dots, m\}. \end{cases}$$

ii)

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (1 - 2y_1)[(\sigma_1 + \sigma_2)y_{m+2} - \sigma_2] & & & \\ & \ddots & & \\ & & & (1 - 2y_m)[(\sigma_1 + \sigma_2)y_{m+2} - \sigma_2] \end{pmatrix}$$

iii)

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_{m+1}} = (\sigma_1 + \sigma_2)y_v(1 - y_v), \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_z} = 0, \forall z \in \{m+2, \dots, m+k\}. \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_2(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (\sigma_1 + \sigma_2)y_1(1 - y_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sigma_1 + \sigma_2)y_m(1 - y_m) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

iv)

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{y}_{m+1}}{\partial y_v} = (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m+1} y_v(1 - y_v), \forall v \in \{1, \dots, m, m+2\} \\ \frac{\partial \dot{y}_{m+1}}{\partial y_{m+1}} = \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m+1} \left[\sum_{i=1}^m y_i + y_{m+2} \right] - \sigma_2 \right] (1 - 2y_{m+1}) \\ \frac{\partial \dot{y}_{m+1}}{\partial y_v} = 0, \forall v \in \{m+3, \dots, m+k\}. \end{cases}$$

$$\mathbf{J}_3(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{y}_{m+1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{y}_{m+1}}{\partial y_m} & \frac{\partial \dot{y}_{m+1}}{\partial y_{m+1}} & \frac{\partial \dot{y}_{m+1}}{\partial y_{m+2}} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

v)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{y}_{m+2}}{\partial y_v} = 0, \forall v \in \{1, \dots, m\} \\ \frac{\partial \dot{y}_{m+2}}{\partial y_v} = (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m+1} y_{m+2} (1 - y_{m+2}), \forall v \in \{m+1, m+3, \dots, m+k\} \\ \frac{\partial \dot{y}_{m+2}}{\partial y_{m+2}} = \left[(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{1}{m+1} \left[y_{m+1} + \sum_{i=m+3}^{m+k} y_i \right] - \sigma_2 \right] (1 - 2y_{m+2}). \end{array} \right.$$

$$\mathbf{J}_4(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial \dot{y}_{m+2}}{\partial y_{m+1}} & \frac{\partial \dot{y}_{m+2}}{\partial y_{m+2}} & \frac{\partial \dot{y}_{m+2}}{\partial y_{m+3}} & \cdots & \frac{\partial \dot{y}_{m+2}}{\partial y_{m+k}} \end{pmatrix}$$

vi)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_z} = 0, \forall v \in \{m+3, \dots, m+k\}, \forall z \in \{1, \dots, m+1\} \\ \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_{m+2}} = (\sigma_1 + \sigma_2) y_v (1 - y_v), \forall v \in \{m+3, \dots, m+k\} \\ \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_v} = [(\sigma_1 + \sigma_2) y_{m+2} - \sigma_2] (1 - 2y_v), \forall v \in \{m+3, \dots, m+k\} \\ \frac{\partial \dot{y}_v}{\partial y_z} = 0, \forall z \in \{m+3, \dots, v-1, v+1, \dots, m+k\}. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{J}_5(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{y}_{m+3}}{\partial y_{m+2}} & \frac{\partial \dot{y}_{m+3}}{\partial y_{m+3}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{y}_{m+k-1}}{\partial y_{m+2}} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{y}_{m+k}}{\partial y_{m+2}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial \dot{y}_{m+k}}{\partial y_{m+k}} \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1(\mathbf{y}) & \mathbf{J}_2(\mathbf{y}) \\ \mathbf{J}_3(\mathbf{y}) \\ \mathbf{J}_4(\mathbf{y}) \\ \mathbf{J}_5(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

onde $\mathbf{J}_1(\mathbf{y})$, $\mathbf{J}_2(\mathbf{y})$, $\mathbf{J}_3(\mathbf{y})$, $\mathbf{J}_4(\mathbf{y})$, $\mathbf{J}_5(\mathbf{y})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{y})$ têm dimensões $m \times m$, $m \times k$, $1 \times (m+k)$, $1 \times (m+k)$, $(k-2) \times (m+k)$ e $(m+k) \times (m+k)$, respectivamente.

Observações Importantes sobre a Matriz Jacobiana em um Ponto de Equilíbrio Puro:

1) Seja $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*, y_{m+1}^*, y_{m+2}^*, \dots, y_{m+k}^*)$ um ponto de equilíbrio puro, ou seja, um ponto tal que cada $y_v^* \in \{0, 1\}$, $\forall v \in \{1, \dots, m, m+1, m+2, \dots, m+k\}$. Então, $\mathbf{J}_2(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0} \in \mathbb{M}_{m \times (n+1)}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Cada entrada de $\mathbf{J}_2(\mathbf{y}^*)$ é do tipo $j_{v,u} = (\sigma_1 + \sigma_2)y_v^*(1 - y_v^*)$, $\forall v \in \{1, \dots, m\}$. Como cada $y_v^* \in \{0, 1\}$, então $y_v^* = 0$ ou $1 - y_v^* = 0$. Logo, $j_{v,u} = 0$.

Portanto, $\mathbf{J}_2(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0} \in \mathbb{M}_{m \times (n+1)}(\mathbb{R})$.

ii) e quando, a partir da configuração descrita em i , alteramos a escolha de estratégia de algum jogador de vértice localizado nas extremidades do grafo (os dois extremos sofrem essa modificação).

As situações descritas e os resultados obtidos são ilustrados na sequência.

5.2.1 Matriz de Pagamento de (Biestabilidade)

Vamos começar analisando o caso em que todos os jogadores de vértice jogam com a matriz de pagamento dada por (4.12).

i) A figura 5.2 nos informa o que acontece quando os $m + 1$ primeiros jogadores usam a estratégia indicada pela cor *azul* e os demais $n + 1$ jogam com a indicada pela cor *vermelha*. Podemos observar que, após decorrido um certo tempo, todos os jogadores de vértice continuam a usar suas estratégias iniciais. A prevalência das estratégias adotadas inicialmente, por todos os jogadores de vértice, corresponde ao ponto de equilíbrio puro $(1, \dots, 1, 1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m+k}$.

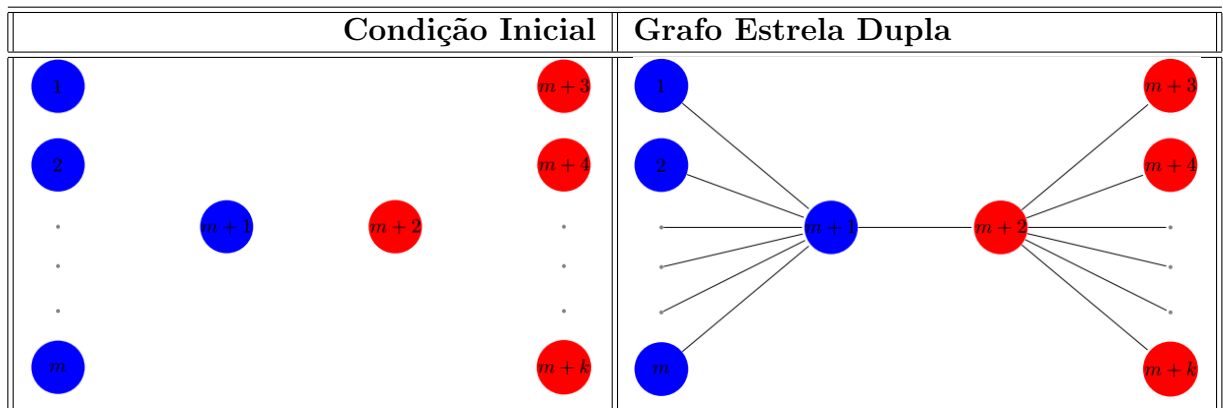


Figura 5.2: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo estrela dupla.

ii) Consideremos, agora, o caso em que algum dos jogadores do conjunto de cardinalidade m utilize uma estratégia diferente da dos demais jogadores do conjunto e

que algum do de cardinalidade n também utilize uma estratégia diferente da dos demais (primeira coluna da Figura 5.3). O jogador 2, o qual joga com uma estratégia *vermelha*, interage e está rodeado apenas por jogadores *azuis*, de modo que decide adaptar-se à maioria trocando sua estratégia para *azul*. De maneira análoga, o jogador $m + k$, que joga com a estratégia *azul*, tem apenas vizinhos *vermelhos*, o que o leva a trocar de estratégia. Esse comportamento resulta na mesma solução de equilíbrio puro obtida acima $(1, \dots, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ (segunda coluna da Figura 5.3).

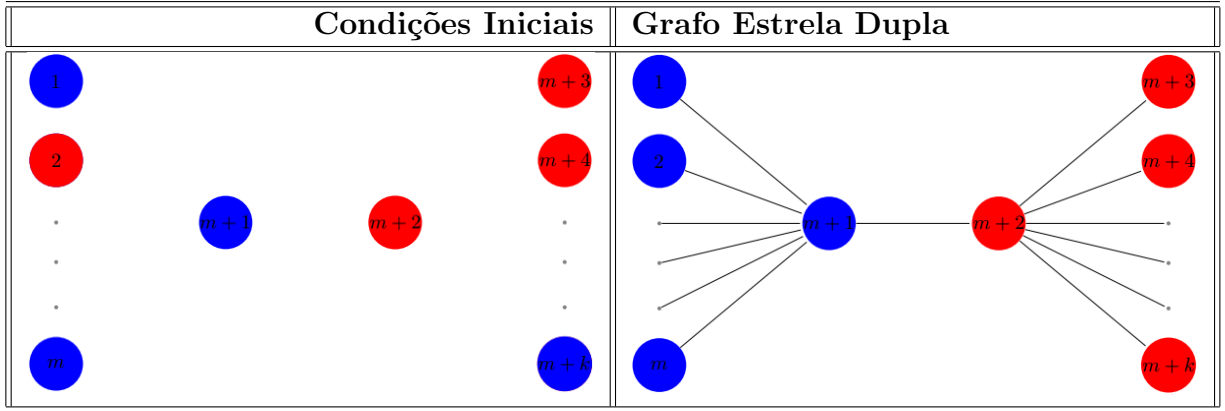


Figura 5.3: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo estrela dupla.

Proposição 5.1. *Dado um grafo estrela dupla $G = G(m + k, E)$ com $m + k \geq 4$ vértices e matriz de adjacência \mathbf{A} (estocástica de linha), e assumindo $\sigma_{v,1} = \sigma_1$ e $\sigma_{v,2} = \sigma_2, \forall v$ tal que $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) > 0$, temos que o ponto de equilíbrio puro $(1, \dots, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ do sistema de equações (5.2) não é assintoticamente estável.*

Demonstração. Recordemos que $\mathbf{J}(\mathbf{y}^*)$ é uma matriz diagonal. Tomando o bloco $\mathbf{J}_1(\mathbf{y}^*)$, que por sua vez também é diagonal, observamos que cada entrada da diagonal avaliada no ponto $(1, \dots, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ é positiva. Portanto, como $\mathbf{J}(1, \dots, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ tem pelo menos m autovalores positivos, não ocorre estabilidade assintótica no ponto de equilíbrio puro $(1, \dots, 1, 1, 0, 0, \dots, 0)$. \square

5.2.2 Matriz de Pagamento de (Coexistência)

Vamos analisar, agora, o caso em que todos os jogadores de vértice jogam com a matriz de pagamento (4.14).

i) Assumamos, novamente, que os $m + 1$ primeiros jogadores usem a estratégia indicada pela cor *azul* enquanto os demais $n + 1$ jogam com a indicada pela cor *vermelha*.

Apenas os jogadores centrais $m + 1$ e $m + 2$ mantêm as estratégias adotadas inicialmente; os jogadores localizados no extremo da rede trocam de *azul* para *vermelha* e vice-versa. O padrão obtido corresponde ao ponto de equilíbrio puro $(\underbrace{0, \dots, 0}_m, 1, 0, 1, \underbrace{\dots, 1}_n)$.

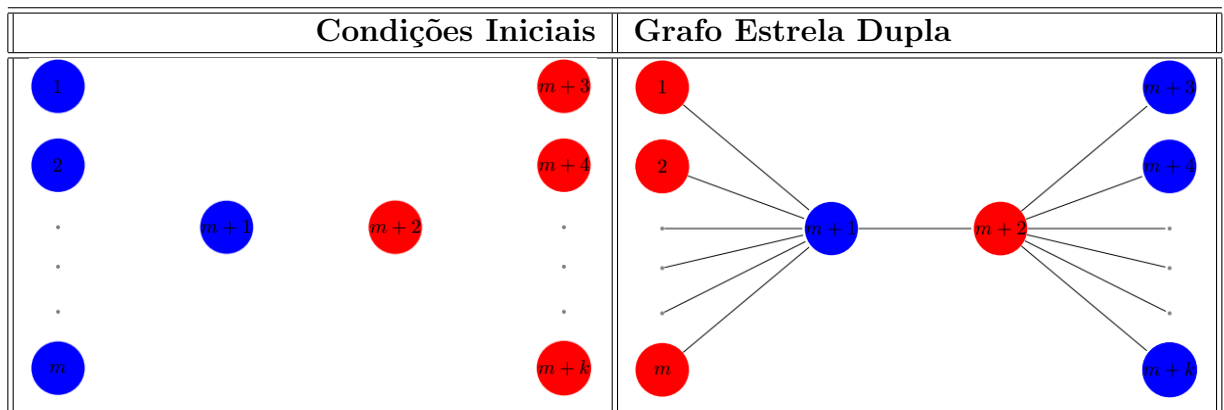


Figura 5.4: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo estrela dupla.

ii) Consideremos, agora, o caso em que os jogadores 2 e $m + k$ utilizem uma estratégia diferente da dos demais jogadores dos conjuntos aos quais pertencem (primeira coluna da Figura 5.5). O jogador 2, que joga com uma estratégia *vermelha*, apesar de interagir e estar rodeado apenas por jogadores *azuis*, decide manter sua estratégia; o mesmo ocorre com o jogador de vértice $m + k$, que mesmo cercado por jogadores

vermelhos, opta por preservar sua escolha inicial. Os jogadores centrais, $m + 1$ e $m + 2$, também não alteram suas estratégias iniciais; o jogador $m + 1$ tem $m - 1$ vizinhos *azuis* e 2 *vermelhos*, e o jogador $m + 2$ tem $n - 1$ vizinhos *vermelhos* e 2 *azuis*. Ao mesmo tempo que esses jogadores escolhem preservar suas estratégias iniciais, seus vizinhos extremos trocam de estratégia visto que há a possibilidade de troca por parte dos jogadores centrais; os jogadores extremos julgam melhor fazer essa troca de modo a tentar minimizar a perda de pagamentos, pois caso tal troca venha, de fato, a ser concretizada, todos saem ganhando. No fim das contas, esse comportamento conduz à solução anterior $(\underbrace{0, \dots, 0}_m, 1, 0, 1, \dots, 1)$ (segunda coluna da Figura 5.5).

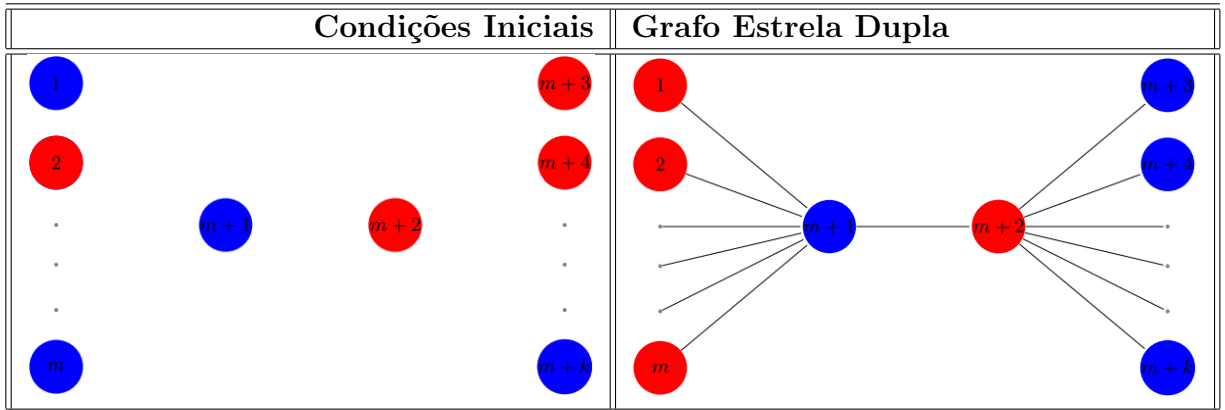


Figura 5.5: Configuração inicial da distribuição de estratégias e solução de estado estacionário puro para um grafo estrela dupla.

Proposição 5.2. *Dado um grafo estrela dupla $G = G(m + k, E)$ com $m + k \geq 4$ vértices e matriz de adjacência \mathbf{A} (estocástica de linha), e assumindo $\sigma_{v,1} = \sigma_1$ e $\sigma_{v,2} = \sigma_2, \forall v$ tal que $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) < 0$, temos que o ponto de equilíbrio puro $(0, \dots, 0, 1, 0, 1, \dots, 1)$ do sistema de equações (5.2) não é assintoticamente estável.*

Demonstração. Novamente, tomando o bloco $\mathbf{J}_1(\mathbf{y}^*)$, observamos que cada entrada da diagonal avaliada, agora, no ponto $(0, \dots, 0, 1, 0, 1, \dots, 1)$ é positiva. Portanto, como $\mathbf{J}(0, \dots, 0, 1, 0, 1, \dots, 1)$ tem pelo menos m autovalores positivos, não

ocorre estabilidade assintótica no ponto de equilíbrio puro $(0, \dots, 0, 1, 0, 1, \dots, 1)$.

□

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo realizado permitiu identificar a existência de pontos de equilíbrio puro assintoticamente estáveis para os modelos matemáticos que descrevem jogos representados por grafos bipartidos completos e estrelas duplas, bem como atestar a unicidade das soluções obtidas.

É importante ressaltar que, de um ponto de partida teórico, não foi possível extrair muitas informações a respeito da estabilidade assintótica de pontos de equilíbrio puro para o modelo evolutivo associado à uma rede arbitrária de conexões. Entretanto, conseguimos provar que, dado um grafo sem laços, tal que cada vértice possua ao menos um vizinho, e assumindo que cada jogador de vértice jogue com uma mesma matriz de pagamento, os pontos de equilíbrio puro $(0, \dots, 0)$ e $(1, \dots, 1)$ são assintoticamente estáveis se, e somente se, a matriz de pagamento é uma matriz de biestabilidade. O mesmo não é possível afirmar para matrizes de coexistência e, diferentemente do que ocorre para pontos de equilíbrio misto interiores, não há uma relação entre o espectro da matriz jacobiana do sistema resultante e o da matriz de adjacência do grafo.

Dado um grafo bipartido completo qualquer, ao assumirmos que algum jogador apresente um comportamento desviante ao dos demais jogadores do conjunto ao qual pertence, observamos que, ao contrário do que ocorre quando todos os jogadores de vértice jogam com uma matriz de biestabilidade, no caso de uma matriz de coexistência a presença de um único jogador desviante no conjunto não é suficiente para que haja dominância da estratégia associada ao comportamento mutante. Verificamos que mesmo após a introdução de m jogadores desviantes no conjunto de mesma cardinalidade, não é alcançado um domínio da estratégia associada à mutação.

Desse modo, podemos dizer que os experimentos de simulação numérica realizados para as duas estruturas de grafos estudadas nesse trabalho, mostraram-se imprescindíveis e de grande contribuição para a obtenção de resultados teóricos referentes ao comportamento assintótico de pontos de equilíbrio puro. Além disso, isso nos leva a acreditar que é possível obter resultados análogos para outros tipos de grafos, tais como os bipartidos não-completos, os quais representam uma classe de grafos mais ampla do que as dos grafos aqui estudados, visto que pequenas modificações em um grafo bipartido não-completo qualquer, desde que não violem sua definição, geram diferentes grafos desse tipo.

Uma possível continuidade a deste trabalho poderia ser investigar a viabilidade de estender esses resultados para o caso em que duas matrizes de pagamento são utilizadas ou quando aumentamos o número de estratégias para três, bem como estudar o comportamento do modelo para outras estruturas de grafos. Poderíamos ainda, alterar o modelo de pagamento utilizado na obtenção do modelo evolutivo; de fato, sabemos que, em geral, os modelos de pagamentos WA e WS produzem jogos distintos, conseqüentemente, conduzindo a resultados diferentes (mais precisamente, as soluções de equilíbrio obtidas diferem de um modelo para outro).

Além do mais, ao partir de um grafo completamente conectado, seria natural nos perguntar qual o efeito na dinâmica da equação de replicação, ao escolher um vértice específico e começar a deletar sucessivamente diferentes *links* desse vértice, onde o objetivo seria analisar como essa remoção de *links* afeta a dinâmica em geral, principalmente o comportamento assintótico da solução. Acreditamos que quando há remoção de *links*, podemos fazer com que haja mudança na escolha assintótica dos jogadores. Em termos biológicos, isso significa perguntar como que o impedimento de dois grupos diferentes se encontrarem pode afetar na distribuição dos genótipos referentes à cada estratégia quando trabalhamos com a equação de replicação. Outra questão natural que segue dos resultados obtidos em

[13] é considerar o efeito, sobre o sistema, de mudar o peso da conexão entre dois *links*. Para isso, podemos introduzir um parâmetro w que nos permite identificar três cenários: 1) quando os dois vértices não estão conectados ($w = 0$); 2) quando eles estão conectados fracamente ($0 < w < 1$); e 3) quando há uma forte conexão entre os dois ($w \geq 1$). A primeira questão em consideração é estudar o comportamento assintótico da dinâmica com respeito às mudanças em w . Como podemos ver, de uma perspectiva dos jogos evolucionários, ainda há muito a ser estudado em relação a esse modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Banerjee, A. Chandrasekhar, E. Duflo and M. Jackson, “Gossip: Identifying Central Individuals in a Social Network”, arXiv:1406.2293v3.
- [2] A. Barrat, M. Barthélemy and A. Vespignani, *Dynamical processes on complex networks*. Camb. Univ. Press, 2008.
- [3] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno and M. Chavez, *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics reports, is 4, vol. 424, pp. 175-308, 2006.
- [4] M. D’Orsogna and M. Perc, “Statistical physics of crime: A review”, *Phys. Life Rev.*, vol. 12, pp. 1–21, 2015.
- [5] J. Dugundji, *Topology. 1aedição*. Boston: Allyn and Bacon, 1965.
- [6] G. Ehrhardt, M. Marsili and F. Vega-Redondo. “Diffusion and growth in an evolving network.” *Int. J. of Game Theory*, is. 3, vol. 334, pp. 383–397, 2006.
- [7] J. Hofbauer and K. Sigmund, “Evolutionary game dynamics”, *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 40, no. 4, pp. 479-519, 2013.
- [8] J. Hofbauer and K. Sigmund, “Evolutionary games and population dynamics”, Cambridge University Press, 1998.
- [9] W. Kang, *What Is A Non-Cooperative Game? Nash Equilibrium as the Prediction of a Game Interactive Games Non-Cooperative Game Theory*. Harvard Scholar.
- [10] B. Kozma and A. Barrat, “Consensus formation on adaptive networks”, *Physical Review E*, vol.77, p. 016102, 2008.

- [11] D. Madeo and C. Mocenni , “Game Interactions and dynamics on networked populations”, *IEEE Trans. on Autom. Control*, is. 7, vol. 60, pp. 1801–1810, 2015.
- [12] D. Madeo and C. Mocenni , “A New Mathematical Model for Evolutionary Games on Finite Networks of Players”, arxiv: 1307. 1670V1, 2013.
- [13] D. Madeo and C. Mocenni, J.C. Moraes, J. Zubelli “Central Players Connectivity in Evolutionary Games on Graphs”, *IEEE Trans. on Autom. Control*, submitted.
- [14] M. Newman, *Network: An introduction*, Oxf. Univ. Press, Inc. New York, 2010.
- [15] M. Nowak, *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*. Harvard, MA: Belknap Press of Harvard Univ. Press, 2006.
- [16] R. Olfati-Saber, A. Fax and R. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems”, *Proc. of the IEEE*, is. 1, vol 95, 215–233, 2007.
- [17] W. Ren and R. Beard, “Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies”, *IEEE Trans. Autom. Control*, is. 5, vol. 50, pp. 655–661, 2005.
- [18] B. Sartini, G. Garbugio, H.J. Bortolossi, P. Santos e L. Barreto, “Uma Introdução à Teoria dos Jogos.” *II Bienal da SBM*, Universidade Federal da Bahia, pp. 1–62, 2004.
- [19] C. Tang, Y. Wang, L. Cao, X. Li and Y. Yang, “Towards the role of social connectivity and aspiration level on evolutionary game”, *EPJ B*, 86: 26, 2013.

- [20] A. Traulsen, F. C. Santos and J. M. Pacheco, *Evolutionary Games in Self-Organizing Populations*, in: Adaptive networks, G. Thilo, and H. Sayama, Springer Berlin Heidelberg, Germany, 2009.
- [21] D. Zanette and S. Gil, “Opinion spreading and agent segregation on evolving networks.” *Physica D: Nonl. Phen.*, is. 1, vol. 224, pp. 156–165, 2006.
- [22] J. Weibull, *Evolutionary Game Theory*. Cambridge, MA: MIT Press, 1995.