UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARLEI TAIS DICKEL

GEOGEBRA E ISOMETRIAS: A AÇÃO DE ARRASTAR NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

Porto Alegre, RS, Brasil
2019

MARLEI TAIS DICKEL

GEOGEBRA E ISOMETRIAS: A AÇÃO DE ARRASTAR NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre, 2019

MARLEI TAIS DICKEL

GEOGEBRA E ISOMETRIAS: A AÇÃO DE ARRASTAR NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS

Dissertação de Mestrado elaborada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

BANCA EXAMINADORA

Dr. Vandoir Stormowski
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Dra. Inês Farias Ferreira
Universidade Federal de Santa Maria

RESUMO

Neste trabalho, discute-se o potencial dos ambientes de geometria dinâmica para a construção de conceitos de isometrias. Debate-se o papel da ação de arrastar na manipulação de atividades dinâmicas sobre isometrias com a utilização do GeoGebra, bem como, o desencadeamento do pensamento matemático a partir da interação entre aluno e software. De caráter qualitativo, neste estudo são analisadas atividades matemáticas resolvidas por alunos do 3º ano do Ensino Médio, da Rede Pública, com base na Teoria das Tecnologias Cognitivas e nas análises cognitivas do arrastar. Os resultados apontam para a compreensão de conceitos que envolvem as isometrias, que surgem a partir da manipulação no software, em forma de arrastamento, conduzindo à construção de pensamentos matemáticos em conjunto com a tecnologia.

Palavras-chave: Isometrias, GeoGebra, Tecnologias Cognitivas, Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

This paper discusses the potential of dynamic geometry environments for the construction of isometry concepts. This paper discusses the role of dragging in the manipulation of dynamic activities on isometries using GeoGebra, as well as the triggering of mathematical thinking from student interaction with software. Of qualitative character, in this study are analyzed mathematical activities solved by students of the 3rd year of High School, of the Public Network, based on the Theory of Cognitive Technologies and in the cognitive analyzes of the drag. The results point to the understanding of concepts that involve the isometries, which arise from manipulation in software, in the form of entrainment, leading to the construction of mathematical thoughts in conjunction with technology.

Keywords: Isometries, GeoGebra, Cognitive Technologies, Dynamic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Há tempos a geometria faz parte do nosso cotidiano, desde os tempos mais antigos, através de uma quantidade variada de formas geométricas fornecidas pela natureza, bem como em seus desenhos representativos do meio em que viviam. De modo admirável, o homem primitivo foi capaz de transformar a percepção sobre o espaço à sua volta em uma espécie de geometria rudimentar básica, que ele utilizou para construir moradias, tecer, confeccionar vasos e potes, para fazer pinturas e ornamentos.

Da mesma forma, as transformações geométricas fazem parte desta história da humanidade, há mais tempo do que se possa imaginar. Uma das primeiras evidências aparece na pintura rupestre do sítio de El Buey na Bolívia. Em particular, as isometrias têm sido usadas pelo homem como elementos decorativos, no qual as figuras geométricas adquiriram disposições mais complexas, partindo de uma única figura, para construir rosáceas, frisos ou pavimentações (BACALHAU, 2012).

Por outro lado, para Basso e Notare (2015), o surgimento das tecnologias e dos ambientes dinâmicos proporcionou a evolução tanto da Matemática, quanto da Educação Matemática. Nesse cenário, o aluno tem a possibilidade de desenvolver a capacidade de pensar em conjunto com a tecnologia. Isto está corroborado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), que orientam que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

Sob estas perspectivas, são inúmeros os caminhos e histórias que levaram a autora a desenvolver esta pesquisa, que constitui sua dissertação de mestrado. Cabe ressaltar que o início da trajetória partiu, principalmente, de sua participação em projetos de extensão e pesquisa relacionados com o uso de softwares no ensino de matemática, ainda no período da graduação em Licenciatura em Matemática. Os últimos projetos nos quais se dedicou tiveram foco em estudos e pesquisa envolvendo a arte e a matemática, em particular as ilusões de óptica[1], tendo o GeoGebra como ferramenta didática e computacional, resultando em seu Trabalho de

[1] Ilusão de óptica refere-se a todas as imagens que momentaneamente enganam o cérebro, fazendo com que a visão enxergue erroneamente.

Conclusão de Curso intitulado “MATEMÁTICA E ILUSÃO DE ÓPTICA: CONSTRUÇÕES COM O GEOGEBRA” (DICKEL, 2015).

A partir disso, fez-se um levantamento bibliográfico e teórico abrangendo os temas centrais deste trabalho, geometria dinâmica, ilusões de óptica e isometrias, que desencadearam na seleção dos caminhos metodológicos e teóricos para esta pesquisa.

Nestes contextos, no presente trabalho pretende-se aliar esses temas, discutindo o uso de ambiente de geometria dinâmica inserido em uma proposta matemática sobre isometrias. Em particular, foram desenvolvidas atividades de investigação e manipulação com o uso do software GeoGebra que abordam as isometrias, sob o embasamento teórico das tecnologias cognitivas e das análises cognitivas do arrastamento, onde a ação de arrastar em ambientes dinâmicos proporciona a elaboração de conjecturas, que conduzem os estudantes à construção de conceitos matemáticos, a fim de desenvolver o pensamento matemático (ARZARELLO, 2002).

Desta forma, a questão norteadora dessa pesquisa é: **Como o recurso de arrastar em ambiente de geometria dinâmica contribui para a construção de conceitos de isometrias por meio do trabalho com imagens de ilusão de óptica?**

Para responder a essa pergunta, levou-se em consideração o potencial dos *softwares* de geometria dinâmica no processo de aprendizagem, e, assim, desenvolvemos uma sequência de atividades, na qual procuramos provocar nos alunos a exploração, a construção e a argumentação. Tal sequência foi aplicada em uma turma do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública, para a produção, coleta e a análise dos dados.

Os objetivos da pesquisa são:

- Analisar o processo de construção das isometrias por meio do *software* GeoGebra;
- Observar como os alunos mobilizam o pensamento matemático e o arrastar, durante o processo de construção das isometrias;
- Elaborar, implementar e analisar uma sequência de atividades para investigar o papel do arrastar no processo de construção de conceitos de isometrias;
- Identificar as contribuições do *software* GeoGebra para a compreensão das propriedades e definições das isometrias.

Para fundamentar as escolhas feitas quanto à produção do material didático e à organização da experiência, no capítulo 2, apresentam-se estudos e pesquisas sobre teorias acerca de imagens de ilusão de óptica, o potencial das tecnologias cognitivas em *softwares* de geometria dinâmica, o GeoGebra, e os conceitos matemáticos abordados no estudo de isometrias.

No capítulo 3, buscamos estabelecer e justificar as escolhas e caminhos metodológicos referentes à metodologia de pesquisa adotada, além de apresentar outros estudos e pesquisas já realizados que norteiam as isometrias utilizando *softwares* de geometria dinâmica.

A descrição do experimento da sequência de atividades, desde a organização à aplicação da mesma, encontra-se no capítulo 4. Neste, portanto, destacam-se o planejamento e os objetivos das atividades.

No capítulo 5, descrevemos o desenrolar da sequência de atividades e as análises dos resultados, destacando o pensamento matemático construído pelos alunos por meio da interação com *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra.

Para finalizar o trabalho, apresentamos o capítulo 6, que expõem reflexões e considerações finais acerca dos resultados.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No ensino de Matemática, o estudo dos conceitos geométricos é importante, pois ajuda o aluno a compreender, descrever e representar o mundo que o cerca. Assim, uma das possibilidades de desenvolvimento de conceitos geométricos pode ser a partir da exploração de réplicas de imagens, para enriquecer e auxiliar na construção de diversos conhecimentos necessários à formação básica dos alunos.

Para dar sustentação teórica para a pesquisa, apresentam-se nesse capítulo teorias que abordam a arte e a ilusão de óptica, o potencial dos recursos tecnológicos no desenvolvimento do pensamento matemático, em especial o papel do arrastar em ambientes de geometria dinâmica, e os conceitos matemáticos envolvidos no estudo das transformações geométricas.

2.1 Educação Matemática e Arte

A arte está presente na matemática e a matemática está presente na arte, pois ambas se encontram unidas nos mais variados meios e expressões. Como exemplos de interligação entre as mesmas, apresentam-se inúmeros aspectos abordados na arquitetura, nas formas geométricas encontradas na natureza, na constituição de músicas utilizando-se os mais variados instrumentos, na visualização de obras de arte, desenhos, entre outros.

> A matemática e a arte nunca estiveram em campos antagônicos, pois desde sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade. Na verdade, podemos observar a influência mútua de uma sobre a outra desde os primeiros registros históricos que temos de ambas. Essas duas áreas sempre estiveram intimamente ligadas, desde as civilizações mais antigas, e são inúmeros os exemplos de sua interação. Muitos povos utilizaram elementos matemáticos na confecção de suas obras: os egípcios com suas monumentais pirâmides e gigantescas estátuas; os gregos com o famoso Parthenon e com seus belíssimos mosaicos; os romanos com suas inúmeras construções com formas circulares, entre elas o Coliseu. (FAINGUELERNT; NUNES, 2006, p. 18)

Neste sentido a arte se põe a dialogar com a matemática, proporcionando o desenvolvimento de potencialidades visuais, bem como vincular a matemática a uma obra construída com equilíbrio, harmonia, beleza e delicadeza nos detalhes. Desta forma, segundo Fainguelernt e Nunes (2011, p.12), quando as artes entram em uma sala de aula de matemática, este ambiente se transforma “em um espaço de criação, de diálogo, de construção de conhecimentos, de reflexão e de descobertas. Um espaço onde a sensibilidade, a intuição, a percepção, a criação e a imaginação se fazem presentes”.

Desta forma, é perceptível que, quando o aluno faz conexões tanto com o cotidiano quanto com as demais disciplinas, ele pode tornar-se mais investigador e interessado, favorecendo assim a sua formação integral, contribuindo tanto em termos pessoais, como acadêmicos.

Em particular, existe uma forte relação entre a geometria e a arte, uma vez que os primeiros contatos com a geometria foram por meio do desenho e das formas que estão intimamente ligados à arte. Assim, percebe-se que estas áreas tem uma ligação natural e histórica entre si. Exemplificando, segundo Gullar (2006), o artista plástico belga, Georges Vantongerloo (1886-1965) possuía amplos conhecimentos matemáticos que influíram de maneira decisiva na sua arte.

No ensino de matemática o estudo dos conceitos geométricos é extremamente importante, pois ajuda o aluno a compreender, descrever e representar de forma organizada o seu cotidiano. Nesse contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam que:

> É fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a matemática e as outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.51).

Por outro lado, a geometria relaciona com diversos ramos da matemática, como álgebra e aritmética, possibilitando o pensamento lógico, dedutivo, estruturado e sistematizado, que amparam na resolução de problemas e desenvolvem a forma como o educando interage com o seu cotidiano.

Assim, entende-se que explorar a elaboração de réplicas de imagens podem enriquecer e auxiliar na construção de diversos conhecimentos matemáticos necessários à formação básica dos alunos.

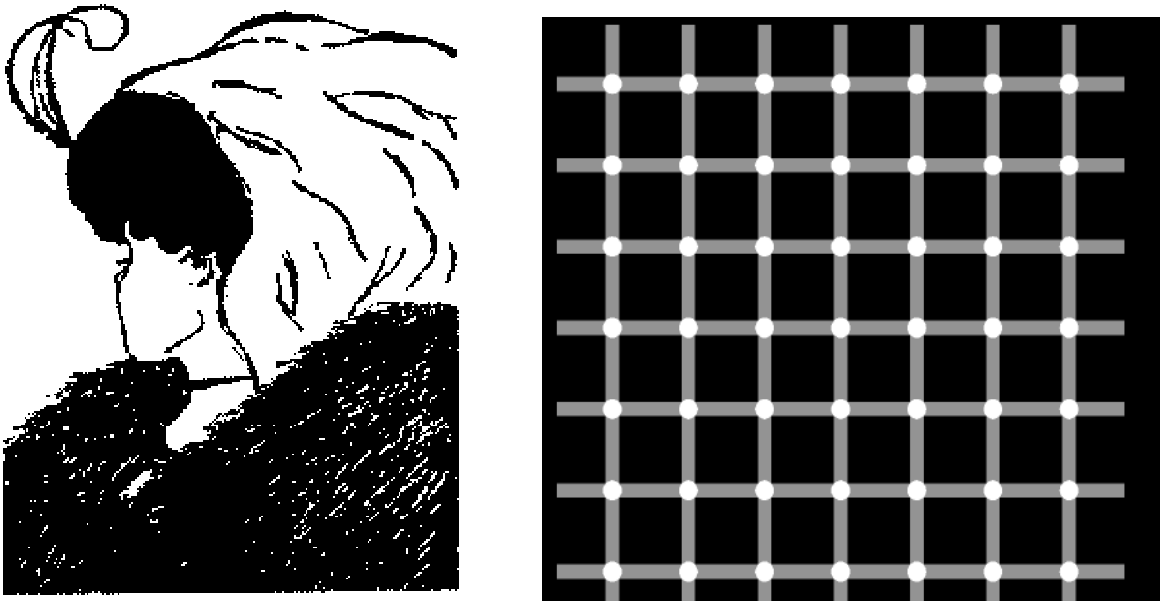
Nesta perspectiva, este trabalho se propõe a abordar aspectos da arte, mais especificamente, da ilusão de óptica, relacionando-os com a matemática, pois, constatou-se que, ao serem construídas réplicas de imagens desse estilo, com o uso do software GeoGebra é possível realizar diversas conexões entre a arte e a matemática, em especial, com as isometrias.

2.1.1 Ilusão de óptica

Ilusão de óptica refere-se a todas as imagens que momentaneamente enganam o cérebro, fazendo com que a visão enxergue erroneamente. Por exemplo, em algumas figuras é difícil perceber o que existe, como ilustra a Figura 1(a), na qual podemos observar duas pessoas. Por outro lado, em outras imagens podem ser vistas figuras que não estão realmente presentes, como nos retrata a Figura 1(b), na qual enxergamos pontos pretos que na verdade não existem.

Figura 1: Imagens de ilusão de óptica: (a) A moça e a velha; (b) Pontos pretos e brancos.

(a) (b)



Fonte: Imagens: (a) LEIVAS (2013); (b) disponível em: http://ilusaodeotica.com.

Numa descrição de ilusão de óptica, as pessoas descrevem diferentes formas, a partir do que estão visualizando ou percebendo, no momento em que se apresenta uma imagem. Nesse sentido, reporta-se novamente à Figura 1(a), produzida em 1915, pelo cartunista William Ely Hill. Esta imagem causa uma ilusão de óptica, onde duas imagens podem ser visualizadas. Uma delas seria uma jovem, posicionada de perfil olhando para longe e a outra seria o rosto de uma senhora idosa que olha para o chão.

As ilusões de óptica têm sido estudadas por psicólogos durante anos e indicam que nem sempre, aquilo que a pessoa vê é o que se pensa que seja. Malba Tahan (1973), em seu livro “As maravilhas da matemática”, no capítulo 8, retrata a ilusão de óptica sob o título “As aparências enganam”. James Newman (apud TAHAN, 1973) reconhece que este tema não é específico da matemática. Porém, é assunto de alto interesse para um estudioso da geometria, no qual é sempre interessante saber como poderá o raciocínio interferir nas ilusões de óptica que desvirtuam a visão natural das coisas.

Desta forma, a compreensão das imagens de ilusão de óptica é feita por meio da percepção visual, remetendo aos conceitos psicológicos envolvidos na construção destas imagens para que estas se constituam uma ilusão de óptica.

2.1.3 Percepção

Segundo Sternberg (2000), percepção é o conjunto de processos pelos quais se reconhecem, se organizam e se entendem as sensações recebidas dos estímulos ambientais. Esta pode ser classificada em diferentes aspectos. Porém, neste trabalho, será abordada apenas a percepção visual, pois alguns estudos em relação à mesma a justificam e irão auxiliar no entendimento de como são feitas as imagens de ilusão de óptica.

De acordo com Filho (2004), agrega-se a este tipo de percepção, os princípios Gestálticos, tais conceitos também explicam a existência das ilusões de óptica. A Gestalt é conhecida como a "psicologia da forma" e fundamenta-se na ideia de que "o todo difere da soma de suas partes". Neste trabalho, para a reprodução das imagens, far-se-á necessária a utilização destes conceitos, tais como:

- *Boa forma ou pregnância das formas:* qualidade que determina a facilidade com que se percebem figuras. A percepção ocorre de forma mais fácil para as boas formas, ou seja, as formas simples, regulares, simétricas e equilibradas.
- *Similaridade ou semelhança:* objetos similares em forma ou tamanho ou cor são mais facilmente interpretados como um grupo.
- *Acabamento:* tende-se a acabar ou completar perceptivamente os objetos que não estão, de fato, completos.
- *Proporções:* linhas retas podem parecer inclinadas, assim como traços do mesmo tamanho podem dar a impressão de que são diferentes. Tudo depende da maneira como essas composições estão organizadas.
- *Contraste de cores:* objetos pequenos de tamanhos semelhantes organizados por cor ou dimensão aparentarão estar agrupados. Assim como, linhas e cores são utilizadas para dar profundidade a imagens bidimensionais. Portanto, a percepção visual pode enganar, ou seja, não se engana pela visão e, sim, somente pela compreensão ou percepção.

Dessa forma, entende-se que aliar o estudo de conceitos de isometrias a imagens interessantes de ilusão de óptica pode constituir-se uma potencial ferramenta para a aprendizagem da Matemática. Integrar esse estudo com o uso de recursos digitais pode enriquecer ainda mais os processos de construção e compreensão destes conceitos matemáticos.

2.2 Tecnologias Digitais na Educação Matemática

Há tempos, vêm se falando das tecnologias digitais na Educação de Matemática, no que diz respeito aos processos de ensino e aprendizagem. Compreende-se que a integração das tecnologias digitais nas aulas de Matemática pode tornar o aluno mais investigativo e interessado, aprimorando o pensamento matemático na resolução de problemas e descoberta de conceitos.

Desta forma, com o surgimento e avanço das tecnologias e dos ambientes dinâmicos, a geometria como um todo tem-se tornado mais acessível ao pensamento dos alunos, proporcionando novas formas de representar e manipular os objetos geométricos, podendo o discente "fazer matemática", ou seja: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e demonstrar os conceitos por ele construídos.

Para Basso e Notare (2015), a tecnologia digital é uma ferramenta didática que deve servir para auxiliar o aluno a desencadear o pensamento matemático, proporcionando possibilidades e manipulações nas mais variadas matemáticas.

Com os *softwares* de geometria dinâmica, temos a possibilidade de representação e manipulação de objetos matemáticos, que abrem novas possibilidades para o pensamento matemático.

Sob estas perspectivas, Papert (1985) ressalta que a manipulação com *softwares* e computadores pode influenciar a maneira de pensar das pessoas, as quais podem resultar na construção de conceitos. Assim a informática na Educação Matemática é tão importante quanto o lápis, o papel e o giz. O pensar matemático pode acontecer também a partir dos mais variados recursos tecnológicos (computador, calculadora, internet, entre outros) para que, das investigações e dúvidas, possam constituir-se novas formas de estudar e aplicar esse saber.

No entanto, vale ressaltar que utilizar os recursos computacionais por si só não garantem o fazer matemático do aluno. Assim os professores devem ser críticos e cuidadosos para que tal recurso não se torne algo somente atrativo e que simplesmente reforçam as mesmas características do modelo de escola que privilegia a transmissão do conhecimento, e sim apresentar problemas e situações nos quais os alunos possam desenvolver junto à tecnologia o pensamento matemático.

Nessa perspectiva, para Goldenberg (2000), a razão para introduzir novas tecnologias na sala de aula não é recriar as atividades existentes, mas sim permitir possibilidades mais atraentes que novas ferramentas proporcionam, ou seja, utilizar as ferramentas das tecnologias como forma de desenvolver problemas matemáticos, onde os alunos não apenas "têm" ideias, mas precisam de bons problemas para explorar habilidades e maneiras de pensar, um arsenal de estratégias e técnicas, feitos sob a orientação do professor. Assim, o aluno tem a possibilidade de ter novas visões sobre o problema, de desenvolver o pensamento generalizador, construindo modelos mentais.

Os autores acima citados referem-se à utilização de recursos computacionais como meios de compreender conceitos matemáticos indo ao encontro da Teoria das Tecnologias Cognitivas, uma extensão das teorias ecológicas da co-evolução cognitiva de seres humanos e artefatos (SHAFFER, D., CLINTON K. apud CLARK, 2006; DONALD, 1991, 2001), que sugere que os meios computacionais estão criando novas formas de atividade cognitiva e com uma nova cultura cognitiva.

Nesse sentido, o uso de ferramentas de manipulação e exploração em ambientes de geometria dinâmica, proporciona uma forma de contribuição para a compreensão dos conceitos de isometrias, bem como a construção de réplicas. Deste modo, na secção a seguir descrevesse uma base da Teoria das Tecnologias Cognitivas.

2.2.1 Teoria das Tecnologias Cognitivas

A Teoria das Tecnologias Cognitivas descreve coletivamente uma ecologia cognitiva em que o pensamento emerge da interação entre pessoas e tecnologias, ou seja, os poderes mentais do aprendiz aceleraram e tornam o processo de alcançar objetivos educacionais previamente escolhidos mais eficientes.

Pea (1987) descreve que uma tecnologia cognitiva é qualquer meio que ajuda a transcender as limitações da mente em pensar, aprender e resolver problemas, ou seja, que os softwares e os computadores, ao serem manipulados e utilizados como ferramentas didáticas, influenciam o pensar dos alunos e vice-versa, desenvolvendo pensamentos matemáticos que vão além das possibilidades obtidas com o lápis e o papel.

A tecnologia cognitiva dispõe de ferramentas que possibilitam exteriorizar, diversificar e ampliar os pensamentos. Portanto, as funções destas ferramentas são as que ajudam os alunos a compreender e utilizar as diferentes atividades mentais envolvidas na matemática pensando.

Elas nem começam nem terminam com o computador, mas surgem no decorrer da exploração, como parte do processo de interação. Existem cinco diferentes categorias de funções que podem ser identificadas para as tecnologias cognitivas (PEA, 1987, p. 106, tradução da autora). Cada uma fornece importante apoio cognitivo:

- Ferramentas para desenvolver fluência conceitual: ajuda o aluno a ter mais fluência na execução de tarefas matemáticas que poderiam ser laboriosas e contraproducentes para o pensamento matemático.
- Ferramentas para a exploração matemática: auxiliam o aluno a reconhecer padrões e fazer novas descobertas sobre as propriedades matemáticas.
- Ferramentas para integrar diferentes representações matemáticas: ajudam os alunos a representar o pensamento matemático em diferentes linguagens matemáticas, como linguagem natural, figural, gráfica e simbólica.
- Ferramentas para aprender a aprender: promovem a aprendizagem reflexiva pela prática, ou seja, reflexão que avalia o trabalho realizado e avalia o potencial de generalização de métodos e resultados.
- Ferramentas para a aprendizagem de métodos de resolução de problemas: incentiva estratégias de raciocínio para a resolução de problemas matemáticos.

Sob esta ótica, Shaffer e Clinton (2006) ressaltam que não há ferramentas sem pensar, e não há pensamento sem ferramentas. Desta forma, ambos conceitos não existem um sem o outro, cada ferramenta contém pensamentos, e cada pensamento contém ferramentas. Assim os autores reúnem estas duas perspectivas numa só, chamando de *Toolforthoughts* (*ferramentaparapensamentos*), isto é, resultado de um processo de ferramentas existentes em uma relação recíproca com os pensamentos.

Nas atividades propostas nesta pesquisa, um dos objetivos foi explorar as generalizações dos conceitos de isometrias, na criação de uma ilusão de óptica, que pode ser construída por meio do GeoGebra, utilizando-o como uma *ferramentaparapensamentos.* O GeoGebra foi utilizado como uma *ferramentaparapensamentos*, pois este *software* possibilita a manipulação direta de objetos matemáticos em movimentos dinâmicos, que proporcionam ao aluno o desenvolver do pensamento matemático. No entanto, isso ocorre quando o pensamento do aluno e o recurso tecnológico operam de forma recíproca e imbricada, em um movimento de vai-e-vem constante, em que um não existe sem o outro.

A partir dos estudos teóricos realizados nessa pesquisa, que apontam que as tecnologias digitais auxiliam os alunos a pensar em Matemática, é que se faz uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra como uma f*erramentaparapensamentos* para analisar quais as contribuições deste recurso digital no estudo de isometrias.

Nessa perspectiva, Leung (2008) ressalta que a ação de arrastar em ambientes dinâmicos possibilita ao aluno um meio para expressar seus pensamentos de maneira visual-dinâmica, que pode contribuir para a formação do conhecimento abstrato. O dinamismo e o arrastar proporcionam que o aluno visualize "concretamente" variações de objetos conceituais, que só seriam possíveis de serem visualizados a partir de uma "animação mental", com o objetivo de reconhecer padrões de variação ou propriedades invariantes. O sucesso de perceber tais padrões ou propriedades geralmente ajuda a compreender o conceito matemático abstrato subjacente (LEUNG, 2008).

Desta forma, a interação dos alunos com ambientes dinâmicos e, em especial, a ação de arrastar, torna-se uma ferramenta para o pensar matemático, indo ao encontro das Tecnologias Cognitivas. Assim, Leung (2008) afirma que, ao construir um objeto arrastável em um ambiente dinâmico, existe uma

> co-ação entre o usuário e o ambiente de geometria dinâmica na qual o objeto construído e seu modo de arrastar tornam-se uma ferramenta cognitiva no ambiente de geometria dinâmica que tem o potencial de desenvolver um sistema semiótico (processo de produção de signos) que interpreta o significado matemático. (LEUNG, 2008, pg. 136, tradução da autora)

Sob estas perspectivas, observa-se que os alunos, ao manipularem os objetos nos *softwares* de geometria dinâmica, em particular no GeoGebra, expressam por meio desta exploração diferentes modalidades de arrastamento, a fim de alcançar objetivos, como explorar, conjecturar, validar conceitos matemáticos, entre outros.

Segundo Arzarello (2002), a utilização da ação de arrastar em ambientes dinâmicos proporciona a elaboração de conjecturas, que conduzem os estudantes à construção de conceitos matemáticos, a fim de desenvolver o pensamento matemático. Segundo o autor, podem-se identificar sete modalidades de arrastar que auxiliam na compreensão do pensamento matemático, apresentados a seguir:

- Arrastar "sem rumo": move pontos básicos na tela aleatoriamente, sem um plano, a fim de descobrir configurações interessantes ou regularidades nas figuras.
- Arrastar limitado: move um ponto "semi-arrastável" (o ponto apresenta restrições de movimento por ser dependente de outro objeto geométrico na construção).
- Arrastar guiado: arrasta pontos básicos de uma figura, a fim de impor à mesma uma forma particular.

- Arrastar lugar geométrico ou “locus”: move um ponto básico para que a figura mantenha uma propriedade descoberta; o ponto que é movido segue um caminho pré-estabelecido, mesmo que os usuários não percebam isto: o locus não é visível e nem sempre evidente para as estudantes, que podem não perceber que estão arrastando o ponto ao longo de um lugar geométrico.
- Arrastar alinhado: desenha novos pontos ao longo de uma linha para manter a regularidade da figura.
- Arrastar vinculado: vincula um ponto a um objeto, movendo-o para esse objeto.
- Arrastar teste: movimenta os pontos arrastáveis ou semi-arrasáveis, a fim de verificar se a figura mantém propriedades iniciais. Se sim, então a figura passa no “teste”; caso contrário, a figura não foi construída de acordo com as propriedades geométricas que a definem.

Segundo Arzarello (2002), as modalidades de arrastar sem rumo e guiada são geralmente utilizadas em fases de exploração e descoberta; a modalidade de arrastar locus está associada à elaboração de uma conjectura; o arrastar teste é usado principalmente para testar uma conjectura.

Por outro lado, Restrepo (2008) ressalta que as modalidades utilizadas nas fases de exploração descrevem um destes três objetivos:

1. Arrastar para identificar as invariantes da figura: dada uma construção, movem-se os pontos livres para encontrar suas invariantes. Então identificam-se as propriedades geométricas da figura.

2. Arrastar para observar variações durante o movimento: movem-se os pontos de uma construção, a fim de compreender as regularidades na variação, observar quais são suas variações, o que muda e o que é conservado.

3. Arrastar para encontrar o caminho de um ponto: move-se um ponto para identificar sua trajetória, o objeto geométrico descrito por este ponto.

Dentro dessas situações, identificam-se diferentes classes de atividades que podem ser solicitadas aos estudantes, que estão diretamente relacionadas ao arrastar. A seguir, apresentam-se as classes de tarefas identificadas segundo tais modalidades e objetivos sobre o arrastamento em ambientes dinâmicos:

- Tarefa de exploração: os alunos exploram uma construção que é dada a eles, movendo os pontos da figura, buscam identificar as particularidades da construção, podendo usar o arrastar para identificar os invariantes da figura. De acordo com a construção, eles também podem usar o arrastar para encontrar a trajetória de um ponto;

- Tarefa de construção: os alunos são convidados a construir uma réplica de ilusão de óptica, identificando as isometrias; ao final para verificar a validade da construção, os alunos devem mover a mesma para validar ou invalidar a construção;
- Tarefa de identificação de invariante: os alunos devem explorar uma construção e identificar quais propriedades geométricas a figura apresenta; os alunos também podem conjecturar e validar ou invalidar propriedades ao arrastar;
- Tarefa de reprodução "tipo caixa-preta": os alunos devem explorar uma figura, identificar suas propriedades geométricas e reproduzi-la para que apresente o mesmo comportamento durante o movimento;
- Tarefa de identificação de variação: os alunos são convidados a mover e observar as variações durante o movimento, ver o que muda e o que quem se mantém, quais são as regularidades na variação.

Portanto, analisar como os alunos usam o recurso de arrastar em ambientes de geometria dinâmica pode fornecer informações sobre seus processos cognitivos e o nível de compreensão sobre o problema no qual estão trabalhando. Desta forma, o uso do recurso computacional surge como uma ferramenta importante que proporciona a exploração e a construção de conceitos matemáticos.

2.2.2 *Software* GeoGebra

O *software* de matemática dinâmica GeoGebra[2] permite explorar simultaneamente diferentes representações (como geométrica, algébrica, numérica e gráfica) de um mesmo conceito matemático. Ainda, torna o ensino de matemática mais dinâmico, possibilitando despertar um maior interesse por parte dos alunos pela busca do conhecimento matemático.

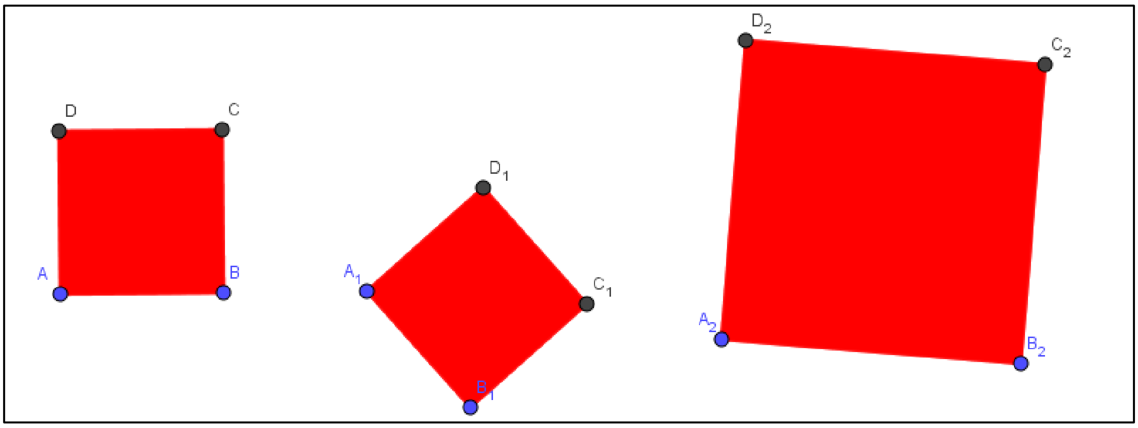
O GeoGebra é um *software* de código aberto, disponível para *download* na *internet*, multiplataforma, que pode ser utilizado em diversos níveis de ensino. Além disso, abrange diversas áreas do conhecimento matemático, pois engloba: geometria básica e avançada em duas dimensões (2D) e três dimensões (3D), álgebra, cálculo e estatística, além de possibilitar relacioná-los entre si e também fazer uso de planilhas e gráficos. Incluem-se como características a disponibilidade de inúmeros recursos de construção exibidos em barras de

[2] https://www.geogebra.org/

comandos.

Nesse sentido, cabe ressaltar que os *softwares* de matemática dinâmica podem proporcionar um ambiente propício para a aprendizagem da Matemática, pois segundo Gravina e Contiero (2011), são aplicativos que tem o recurso de “estabilidade sob ação de movimento”, isto é, após uma construção geométrica, podem-se movimentar os objetos geométricos na tela do computador, variando seu tamanho e posição, mas preservando suas propriedades, como mostra a Figura 2, que retrata a construção de um quadrado que, ao movimentado/arrastado na janela de visualização, não perde suas propriedades, permanecendo um quadrado.

Figura 2: Quadrado - “estabilidade sob ação de movimento”



Fonte: Construção feita pela autora

Nas atividades selecionadas e apresentadas na sequência descrita no capítulo 4, os estudantes, em duplas, têm a oportunidade de utilizar o *software* GeoGebra para explorar, construir e conceituar as isometrias, a partir da ação de arrastar. Portanto, as propriedades geométricas e os elementos que definem cada uma das isometrias podem ser observados pelos estudantes por meio de manipulação e investigação no *software*. Nessas atividades, realça-se o potencial do GeoGebra para promover o pensar em matemática, nas quais a tecnologia torna-se um instrumento matemático importante.

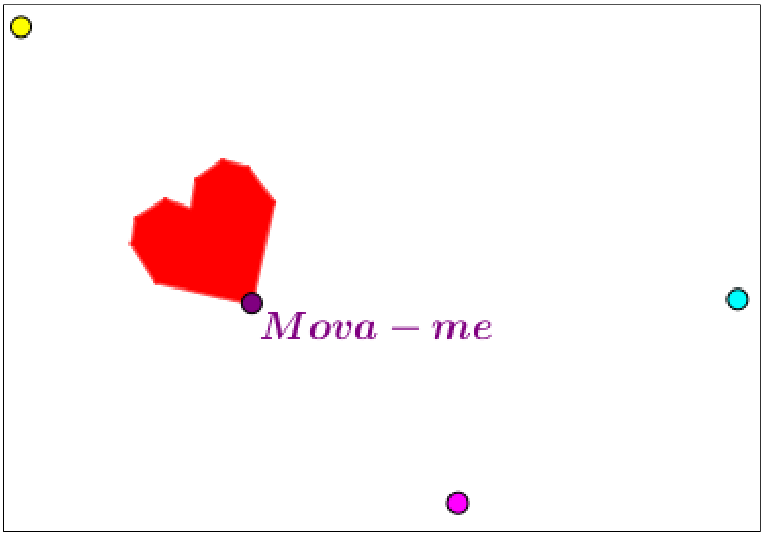
Dessa forma, discute-se o potencial do recurso de arrastar proporcionado pelo GeoGebra de forma articulada com duas atividades elaboradas para a pesquisa, buscando realçar as possibilidades da ação de arrastar e os conceitos matemáticos que podem emergir desse processo. Destaca-se as duas primeiras atividades, nas quais a ação de arrastar é elemento importante. Nelas, os estudantes, em duplas, podem utilizar o *software* GeoGebra para explorar, por meio do movimento de arrastar, pontos construídos sobre objetos geométricos que provocavam em outros pontos, deles dependentes, as transformações de isometrias. Na primeira atividade, é possível movimentar os pontos apresentados no arquivo digital, seguindo o enunciado a seguir:

Mova o ponto ***mova-me*** *e responda os seguintes questionamentos:*

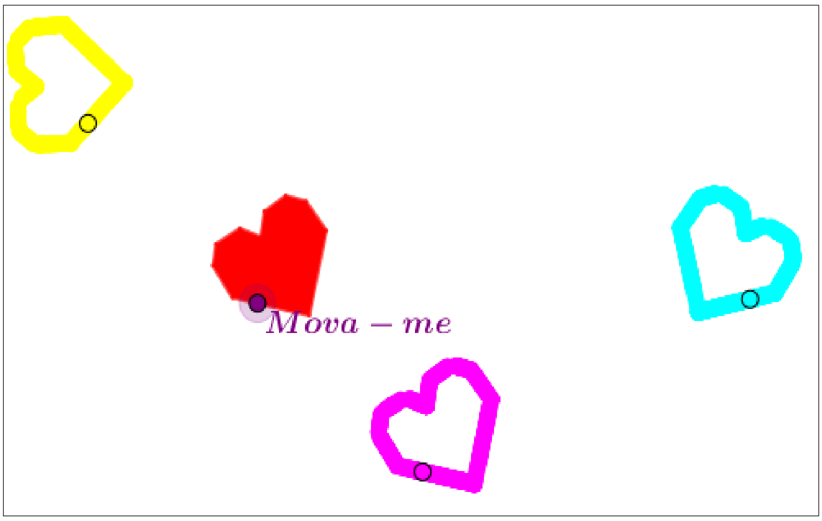
1. *Ao movimentar o ponto* ***mova-me****, o que você observa?*
2. *Como é possível obter os outros corações "iguais", a partir do ponto* ***mova-me****?*
3. *Qual a diferença entre os corações construídos?*
4. *Qual a relação destes corações construídos com o inicial?*

Figura 3: (a) e (b) Tela inicial da atividade 1

(a)



(b)



Fonte: Construção feita pela autora, disponível em https://www.geogebra.org/m/mbbddjm5#material/jmm5hq4q.

Assim, nesta atividade tem-se o recurso de arrastar pensado para investigar e descobrir propriedades impostas pelo problema, que são mantidas sob ação do movimento, dando ênfase às modalidades, descritas por Arzarello (2002), arrastar sem rumo, arrastar limitado e arrastar lugar geométrico ou locus. Sob estas perspectivas, pode-se notar que, ao movimentar o ponto principal ***mova-me***, é possível visualizar dinamicamente as construções dos demais corações, nas quais devem ser exploradas as propriedades de cada uma das isometrias.

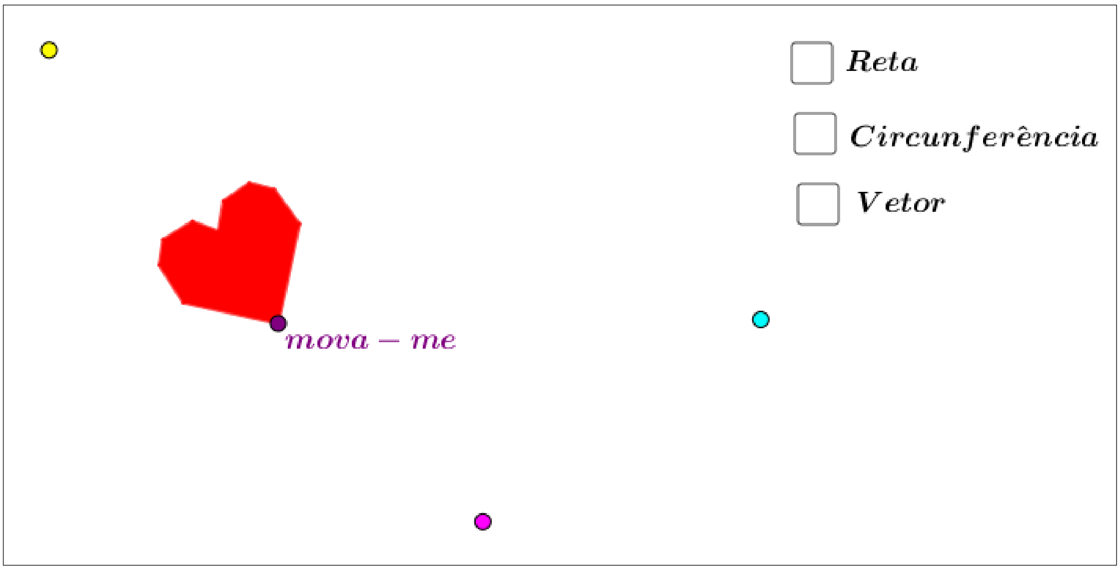
Na segunda atividade, descrita no enunciado a seguir, o recurso de arrastar foi pensado para explorar e realizar conjecturas, reconhecendo os três tipos de isometrias: reflexão, rotação e translação. Neste caso, as modalidades mais presentes são arrastar alinhado e arrastar teste. Nesse sentido, ao movimentarmos o ponto observamos dinamicamente as construções dos corações e suas respectivas relações com cada um dos elementos apresentados, utilizados para o desenvolvimento dos conceitos das isometrias.

Mova o ponto ***mova-me*** *e responda os seguintes questionamentos:*

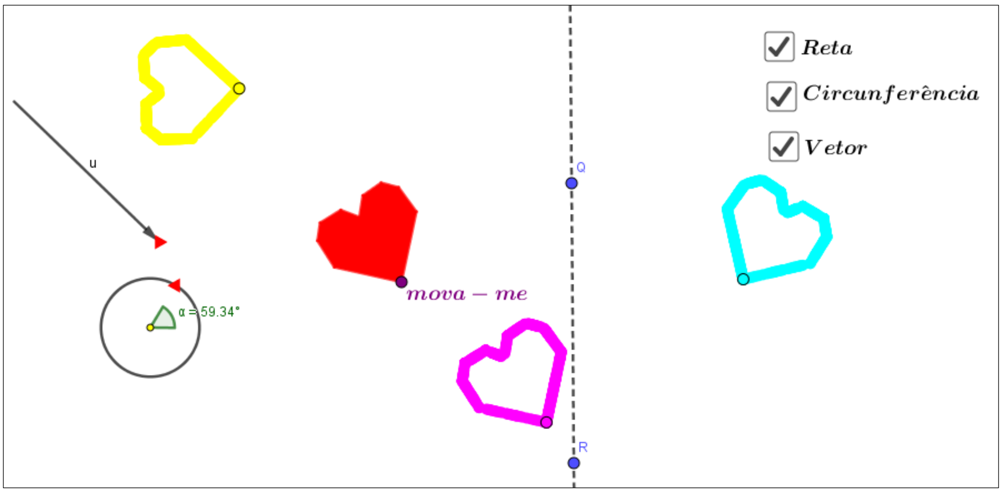
1. *Ao movimentar o ponto* ***mova-me****, o que você observa?*
2. *O que você percebe ao movimentar o ponto* ***mova-me*** *em relação a reta?*
3. *O que você percebe ao movimentar o ponto* ***mova-me*** *em relação ao círculo e ângulo?*
4. *O que você percebe ao movimentar o ponto* ***mova-me*** *em relação ao vetor?*

Figura 4: (a) e (b) Tela inicial da atividade 2.

(a)



(b)



Fonte: Construção feita pela autora, disponível em https://www.geogebra.org/m/mbbddjm5#material/bfcbuh3b.

Segundo Leung (2008), o que faz um ambiente de matemática dinâmica, em particular, de geometria dinâmica um poderoso mundo para a construção do conhecimento matemático é a sua capacidade de tornar visualmente explícito o dinamismo implícito de "pensar sobre" conceitos matemáticos (em especial, os geométricos).

2.3 Transformações Geométricas: Isometrias

Uma transformação geométrica é uma função que faz corresponder a cada objeto geométrico do plano, um novo objeto geométrico desse plano. Estas transformações, que são sinônimos de beleza e harmonia, podem ser observadas em construções, objetos, obras de arte, elementos da natureza, em uma imagem no espelho, em reflexos na água, as quais são originadas e/ou compostas de conceitos matemáticos.

Esta pesquisa aborda as transformações geométricas, em particular, isometrias aplicadas em construções de ilusões de óptica. Para isso, apresenta-se uma breve discussão sobre as definições das isometrias do tipo: reflexão, rotação e translação.

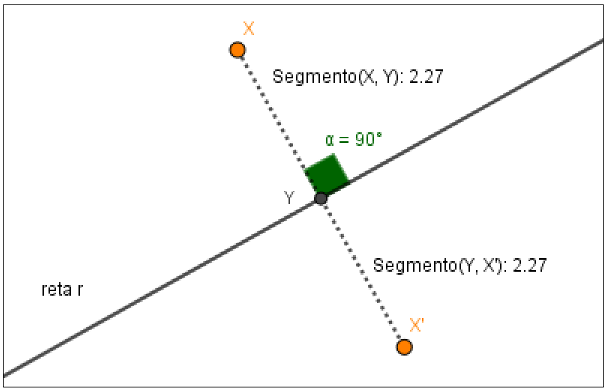
As isometrias são transformações geométricas que preservam distâncias e amplitudes. Segundo Lima (2007), toda isometria $T: r \to s$, é uma função bijetiva, cuja inversa $T^{-1}: s \to r$ é ainda uma isometria, onde uma isometria da reta r na reta s é uma função $T: r \to s$ que preserva a distância entre os pontos.

As definições das isometrias reflexão, translação e rotação serão definidas a seguir segundo Lima (2007).

2.3.1. Reflexão

Seja r uma reta no plano Π. A reflexão em torno da reta r é a função $R_r : \ \Pi \to \Pi$, definida por: $R_r(X) = \ X$, para todo seja $X \ \in \ r$ e, para $X \not\ni \ r$, $R_r(X) = \ X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r. Em outras palavras, seja Y o pé da perpendicular baixada de X sobre r. Então Y é o ponto médio do segmento XX'. A Figura 5 representa tal situação.

Figura 5: Reflexão em torno de uma reta

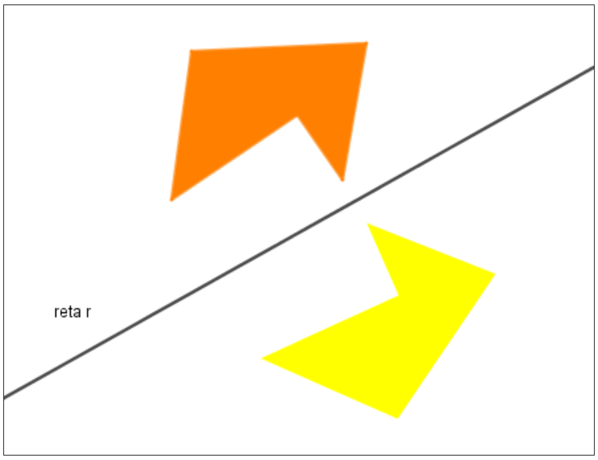


Fonte: Imagem elaborada no GeoGebra pela autora.

A reflexão $R_r : \ \Pi \to \ \Pi$ é uma isometria.

Em uma reflexão, a reta r acima referida é considerada o eixo de simetria, que divide a figura em duas partes que coincidem por sobreposição, ou seja, a reflexão, como mostra a Figura 6.

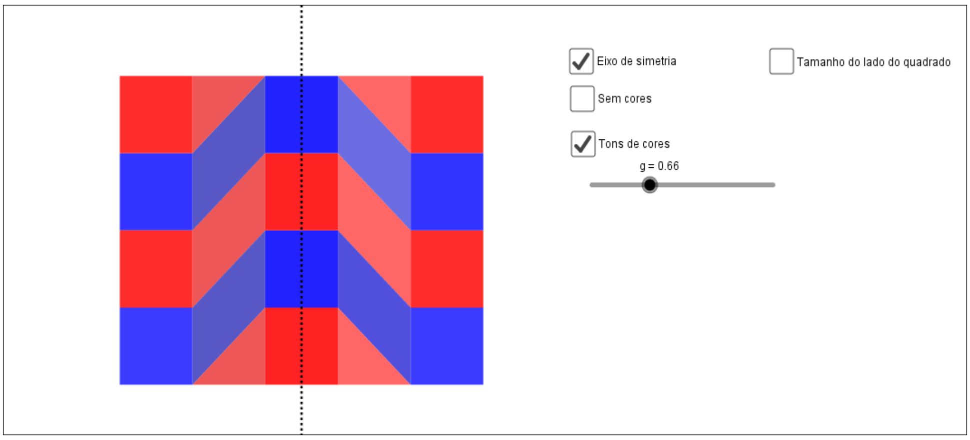
Figura 6: Reflexão de um polígono em torno de uma reta



Fonte: Imagem elaborada no GeoGebra pela autora.

Destaca-se, também que, ao se refletir uma figura em torno de uma reta, distâncias e amplitudes são preservadas, tornando as figuras congruentes, no entanto estas não mantêm a mesma orientação no plano como é possível visualizar na Figura 6. Em imagens e obras de artes com o uso de ilusões de óptica a reflexão pode aparecer como no exemplo da Figura 7.

Figura 7: Réplica da obra “Concreção 9216”.

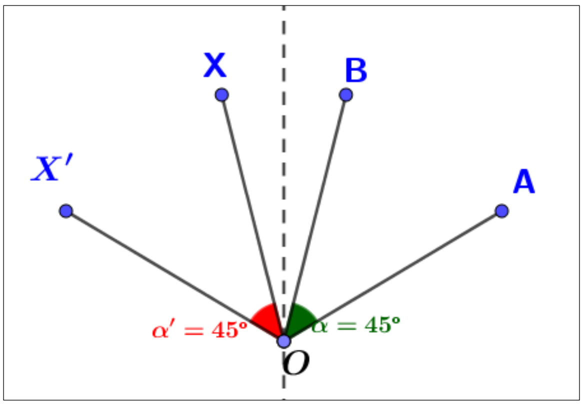


Fonte: Dickel, 2015

2.3.2 Rotação

Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo de vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função ρo_{α}: $\Pi \rightarrow \Pi$ definida da seguinte forma: ρo_{α} *(O)*= *O* e para todo ponto $X \neq O$ em Π, ρo_{α} *(X)*= *X’*, é o ponto do plano Π tal que $d(X, O) = d(X', O)$, $X\hat{O}X' = \alpha$ e o “sentido da rotação” de A para B é o mesmo de X para X'. A Figura 8 representa tal situação.

Figura 8: Rotação de ângulo α em torno do ponto O



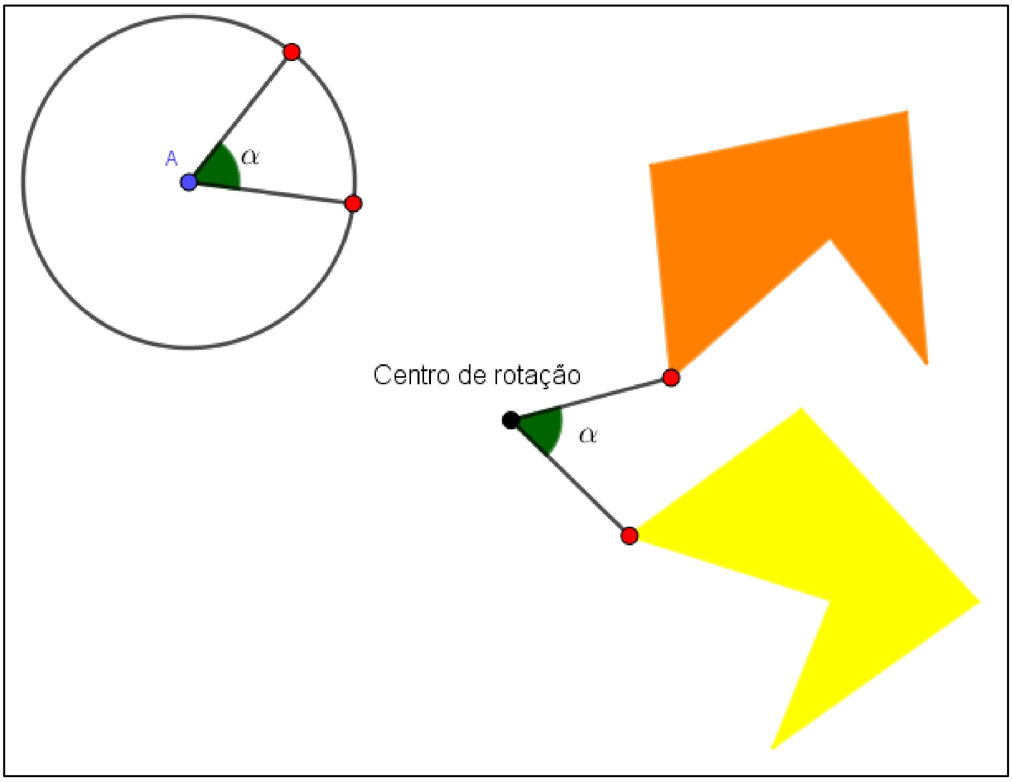
Fonte: Imagem elaborada no GeoGebra pela autora.

A rotação ρo_{α}: $\Pi \rightarrow \Pi$ é uma isometria.

A condição $X\hat{O}X' = \alpha$ significa, em termos geométricos, que se tomarmos os pontos A e B tais que $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OX} = \overline{OX'}$ então $\overline{AB} = \overline{XX'}$. A exigência de que o sentido de rotação de X para X' seja o mesmo que o sentido de A para B é clara intuitivamente e pode ser formulada em termos precisos dizendo-se que os ângulos $B\hat{O}X$ e $A\hat{O}X'$ tem a mesma bissetriz.

A Figura 9 ressalta a rotação do polígono laranja por um ângulo α em torno do Centro de rotação, resultando no polígono amarelo.

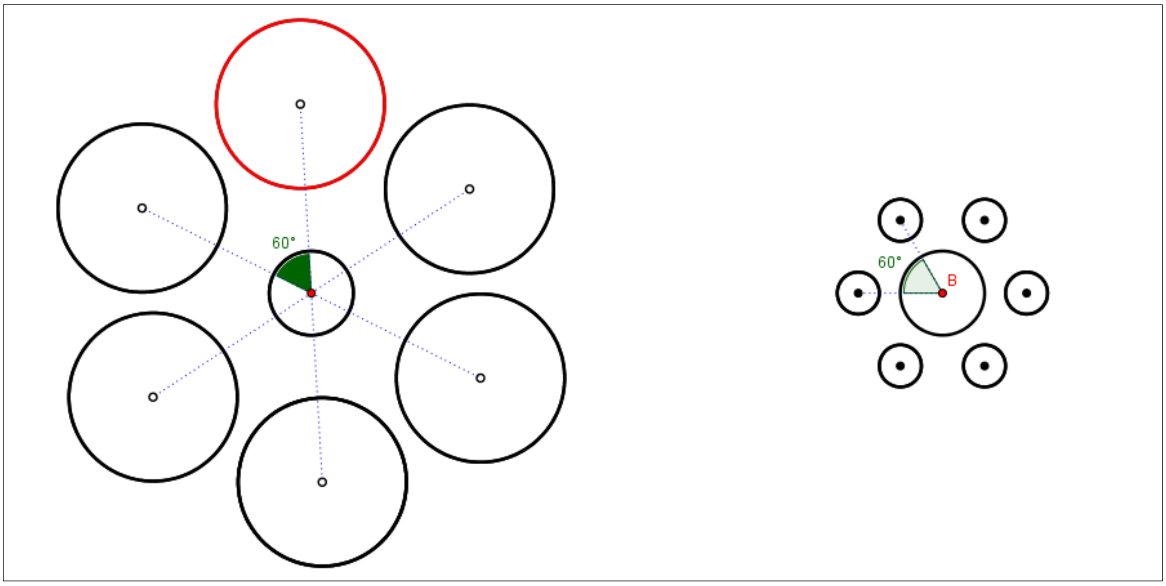
Figura 9: Rotação de um polígono



Fonte: Imagem elaborada no GeoGebra pela autora.

Na imagem de ilusão de óptica de Ebbinghaus, retratada na Figura 10, pode-se considerar a rotação de 60º de cada circunferência em torno do centro da circunferência central.

Figura 10: Réplica da ilusão de óptica de Ebbinghaus

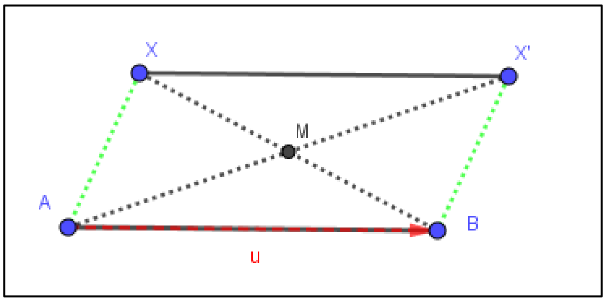


Fonte: Dickel, 2015

2.3.3 Translação

Sejam A e B pontos distintos do plano Π. A translação $T_{AB} : \Pi \rightarrow \Pi$ é a função assim definida: dado $X \in \Pi$, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados. Essa definição de T_{AB} se aplica quando os pontos A, B e X não são colineares. Qualquer que seja a posição de X no plano Π, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ fica inteiramente caraterizada pelo fato de que os segmentos de reta $\overline{AX'}$ e $\overline{BX}$ têm o mesmo ponto médio M. Assim, ao se construir X', geometricamente, a partir de A, B e X, toma-se o ponto médio M do segmento $\overline{BX}$ e prolongamos o segmento $\overline{AM}$ até X' de modo que $\overline{MX'} = \overline{AM}$. A Figura 11 ilustra a translação do ponto X por $\overrightarrow{AB}$, resultando em X'.

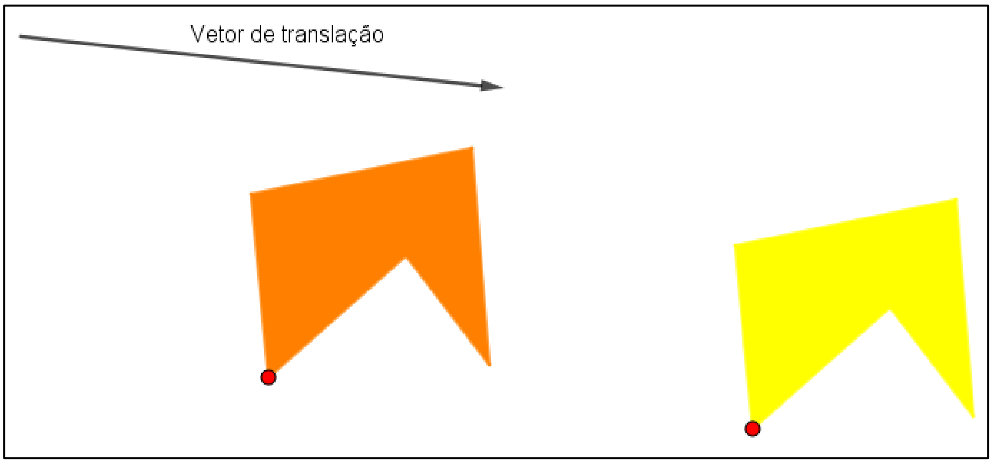
Figura 11: Translação



Fonte: Imagem elaborada no GeoGebra pela autora.

A Translação $T_{AB} : \Pi \rightarrow \Pi$ é uma isometria. Portanto, uma translação é caracterizada pelo deslocamento de uma distância ao longo de uma direção e de um sentido, ou seja de um vetor. A Figura 12 ressalta a translação do polígono em laranja por meio do vetor de translação gerando o polígono amarelo.

Figura 12: Translação de polígonos

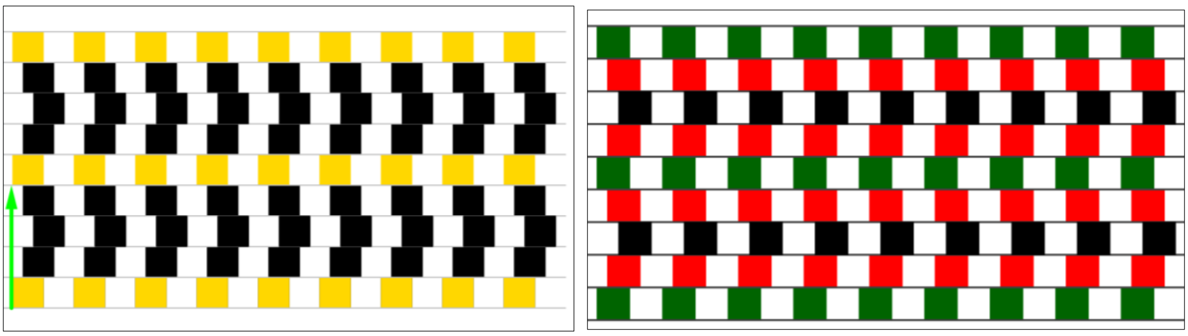


Fonte: Imagem elaborada no GeoGebra pela autora.

Nas imagens da Figura 13 são apresentadas imagens das réplicas da ilusão denominada "Cafe wall", a qual foi, primeiramente, descrita em um artigo dos pesquisadores Gregory e Heard (1979) por fazer parte de uma fachada de um café na Inglaterra, evidenciando, por exemplo, as translações verticais.

Figura 13: Réplica da ilusão de óptica Cafe wall

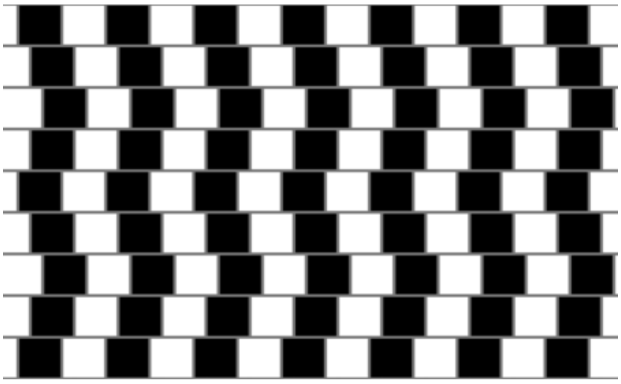
(a) (b)



Fonte: Dickel, 2015

Outras translações poderiam ser observadas e destacadas nessa imagem, porém optou-se por um exemplo para ilustrar a isometria. A Figura 14, apresenta a imagem original.

Figura 14: Ilusão de óptica Cafe wall



Fonte: http://www.richardgregory.org/papers/cafe_wall/cafe-wall.pdf.

O conceito de isometria é amplamente utilizado em ilusões de ópticas e obras de arte, bem como no ensino de Geometria. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), o estudo das isometrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de *softwares* de geometria dinâmica nos anos finais do Ensino Fundamental, sob o seguinte objetivo:

> (EF07MA17) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (BNCC, pg. 260, 2017)

Desta forma, compreende-se que a integração das tecnologias digitais nas aulas de Matemática, em particular no estudo de isometrias, pode tornar o aluno mais investigativo e interessado, aprimorando o pensamento matemático na resolução de problemas e na descoberta de conceitos.

Portanto, sob estas bases teóricas foi planejada a aplicação de uma sequência de atividades voltadas às isometrias no GeoGebra, utilizando as ilusões de óptica como pano de fundo e a ação de arrastar como componente cognitivo importante no processo de exploração e construção dos conceitos matemáticos envolvidos.

O capítulo a seguir apresenta uma revisão bibliográfica de estudos sobre o tema da pesquisa, a metodologia utilizada, as questões que nortearam a investigação e os objetivos do trabalho, bem como, a apresentação do contexto da pesquisa, ou seja, onde, como e com quem foi feita a proposta.

3 CAMINHOS METODOLÓGICOS

Considerando-se as possibilidades pedagógicas oportunizadas e favorecidas tanto pelas tecnologias quanto pelas artes no ensino de Matemática, nesse trabalho espera-se possibilitar ao aluno uma visão dinâmica sobre as isometrias, em especial no que se refere a sua utilização em imagens de ilusão de óptica.

Desta forma, nesse capítulo, apresenta-se inicialmente uma revisão bibliográfica quanto a estudos realizados sobre as isometrias com a utilização do GeoGebra. Na sequência, fazem-se considerações sobre a metodologia de pesquisa que inspirou a concepção do experimento.

3.1 Pesquisas relacionadas a Isometrias e GeoGebra

Existem diversos estudos no meio acadêmico sobre Geometria e o uso do GeoGebra, assim realizou-se um levantamento bibliográfico a respeito do uso do GeoGebra relacionado as isometrias, no qual selecionou-se dissertações em meio digital. Para fazer este levantamento, recorreu-se ao Banco de Teses e Dissertações da Capes, utilizando como palavras chaves isometrias, geometria dinâmica, ilusões de óptica e GeoGebra, destacando apenas as publicações registradas nos últimos seis anos.

Neste sentido, verificou-se que existem trabalhos com a utilização do software, como também com materiais concretos aliados à tecnologia. Dentre os trabalhos encontrados, destacam-se os mencionados a seguir.

“Isometrias no plano: uma proposta de atividades para Educação Básica com uso do GeoGebra”, Cerqueira (2016), que se refere ao estudo de isometrias no plano. Durante o desenvolvimento desse estudo, realizou-se exposição de algumas aplicações do tema em outras áreas: na Arte, na Música, na Engenharia, entre outras. Esse trabalho teve como objetivo mostrar a importância da Geometria Plana, em particular: Isometrias no Plano, na contribuição das ciências e no avanço da Matemática. Isso foi possível, quando se relacionou isometrias com aplicações em outras áreas.

O autor apresentou uma proposta de sequência de atividades sobre o tema para alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, porém não foi aplicada, além disso este não utilizou a tecnologia para proporcionar interação com os alunos, pois mostrava o passo a passo da construção, distanciando do objetivo central desta pesquisa.

“Uma sequência didática para o ensino de Transformações Geométricas com o GeoGebra”, Pimentel (2016) ressalta uma investigação acerca da importância da utilização de computadores e outras tecnologias de informação e comunicação (as TIC’s) no ensino de Matemática. Nesse intuito, o autor idealizou e aplicou uma sequência didática com o uso do GeoGebra para o desenvolvimento de Transformações Geométricas em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental.

A sequência didática foi estruturada dentro das perspectivas da Engenharia Didática e seguiu uma metodologia qualitativa. As atividades desenvolvidas tiveram como pano de fundo os mosaicos e estas foram incialmente instrucionais para a compreensão dos conceitos de isometrias, mas posteriormente os alunos foram incentivados a criarem seus próprios mosaicos utilizando o *software* como ferramenta de criação, o que vai ao encontro do trabalho aqui desenvolvido, no que refere à utilização das artes para a conceitualização de conceitos matemáticos, no entanto se difere no que se diz respeito a instruir os alunos na utilização da tecnologia.

“Geometria Dinâmica no ensino de transformações no plano – uma experiência com professores de Educação Básica”, Medeiros (2012), apresenta a concepção, implementação e validação de uma proposta para o ensino de transformações geométricas no plano usando o ambiente de geometria dinâmica. A dissertação utiliza os mosaicos de Escher para a construção dos conceitos de transformações geométricas, resultando em uma aplicação de atividades junto a professores da Rede Municipal de Sombrio-SC. O trabalho utilizou o movimento de arrastar para a construção de conceitos de isometrias, no qual a tecnologia serviu como ferramenta para pensar matemática, vindo ao encontro da presente pesquisa.

“Isometrias e congruência: Uma investigação no Ensino Fundamental”, Brocker (2016), apresenta uma experiência de abordagem do conceito de congruência de figuras planas, no Ensino Fundamental, por meio de estudo das transformações isométricas.

O estudo foi realizado em uma turma de alunos do nono ano do Ensino Fundamental, na qual foram desenvolvidas atividades de natureza exploratória e investigativa com questões abertas ao diálogo entre os participantes da pesquisa e uso de materiais manipulativos e de um software de geometria dinâmica. As soluções propostas pelos alunos e as discussões realizadas durante o desenvolvimento das atividades foram registradas por meio das produções escritas dos alunos, de gravações em áudio e vídeo e de arquivos elaborados no ambiente do software GeoGebra.

Portanto, pode-se observar que esses trabalhos, assim como o que se desenvolve na presente pesquisa, apresentam uma característica em comum: propor uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem de isometrias com o uso de tecnologias digitais, em particular o GeoGebra. No entanto, esta pesquisa avança no que diz respeito à análise da construção dos conceitos de isometrias por meio da exploração e do arrastamento em ambiente de geometria dinâmica, ou seja, a pesquisa busca estabelecer relações teóricas entre a ação de arrastar no GeoGebra e a construção dos conceitos matemáticos, à luz da teoria das tecnologias cognitivas e do entendimento do *software* como uma *ferramentaparapensamentos,* na qual o aluno investiga e interage com o software por meio do arrastar.

Desta forma, apresenta-se a análise de uma sequência de atividades que busca evidenciar novos aspectos sobre o processo de compreensão de conceitos sobre isometrias a partir das potencialidades de interação entre alunos e s*oftware* de geometria dinâmica, o GeoGebra. Sob estas perspectivas, na próxima seção serão descritas as bases metodológicas da pesquisa, para o desenvolvimento da sequência de atividades.

3.2 Metodologia de Pesquisa

Essa pesquisa consistiu em uma investigação sobre a utilização do GeoGebra e suas contribuições no estudo das transformações geométricas, em específico, no estudo das isometrias, no qual procurou-se responder: **Como o recurso de arrastar em ambiente de geometria dinâmica contribui para a construção de conceitos de isometrias por meio do trabalho com imagens de ilusão de óptica?**

A ideia central é, por meio do recurso de arrastar, desenvolver conceitos geométricos inerentes às isometrias de rotação, translação e reflexão investigadas e construídas no software GeoGebra a partir do trabalho com imagens de ilusão de óptica e analisar o processo de construção desses conceitos pelos alunos sujeitos da pesquisa.

Como forma de responder a este problema, foi elaborada, aplicada e analisada uma sequência de atividades em ambiente dinâmico com o seguinte objetivo geral: investigar, a partir da manipulação, construção e exploração de réplicas de imagens de ilusão de óptica no GeoGebra, como os alunos constroem e compreendem conceitos matemáticos de isometrias. Por outro lado, teve-se como objetivo investigar se a construção desses conceitos pode auxiliar no entendimento e na construção das imagens de ilusão de óptica. Ou seja, observou-se o movimento do pensamento em dois sentidos: as imagens de ilusão de óptica para desencadear a construção e compreensão de conceitos das isometrias; e os conceitos matemáticos sendo impostos nas construções de imagens de ilusão de óptica.

Como objetivos específicos, tem-se:

- Investigar os conceitos de isometrias, sob o arrastar dinâmico do *software* GeoGebra.
- Identificar ferramentas necessárias para cada uma das isometrias, a partir da manipulação dinâmica.
- Construir conceitos das isometrias, indicando suas características e definições.
- Observar diferenças entre análise estática e dinâmica, na visualização e exploração da ilusão de óptica.
- Identificar diferentes conceitos matemáticos nas construções de imagens de ilusão de óptica, por meio da análise detalhada da imagem original das mesmas.
- Retomar e desenvolver os conceitos matemáticos que emergem a partir da elaboração das réplicas no s*oftware* GeoGebra.
- Analisar as estratégias da construção e desconstrução de uma ilusão de óptica, a partir de conceitos matemáticos, para compreender a matemática "oculta" que pode provocar a ilusão.

Assim, as atividades práticas deste trabalho foram aplicadas na Escola Estadual de Ensino Médio Gomes Freire de Andrade, uma escola do município de Teutônia. A escola está situada no bairro Languiru, bairro central do município, o que a torna de fácil acesso para os alunos moradores do município e para os que vem dos municípios vizinhos.

A escola possui espaços interno e externo amplos e suas instalações estão bem estruturadas, sempre estando em modificações. Como o laboratório de informática estava sendo reformado, as práticas foram desenvolvidas na sala de aula, com a utilização de *netbook's* e *pendrives*, uma vez que não se tinha acesso à internet. A escola atende alunos nas três etapas da Educação Básica, a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, atendendo as etapas nos três turnos.

A turma em que se desenvolveu a pesquisa é a única turma do 3º ano do Ensino Médio da escola no turno da noite e foi escolhida para o desenvolvimento deste trabalho por já ter estudado o conteúdo de Geometria Plana, bem como, já terem realizado atividade no GeoGebra. A turma contava com vinte e três alunos e, no decorrer da pesquisa, chegaram mais dois alunos nesta turma. Os alunos eram bem animados e conversavam bastante durante as aulas. Os alunos da turma eram de classe média, tinham acesso à informação e a recursos tecnológicos e gostavam de atividades propostas em aula que envolvessem tecnologia. A coleta de dados se deu por meio de gravações de vídeo coletivo das atividades que estavam sendo trabalhadas no GeoGebra, registros escritos feitos pelos alunos, observações da pesquisadora e arquivos do GeoGebra produzidos pelos alunos.

Para o desenvolvimento da pesquisa, foi utilizada a pesquisa qualitativa de cunho investigativa embasada em Bogdan e Biklen (1994), bem como na estratégia de estudo observação participante, uma das mais representativas da investigação qualitativa.

Sob estas perspectivas, foram utilizadas as seguintes ferramentas para a construção dos dados qualitativos: notas de campo da pesquisadora, gravações em áudio e/ou vídeo coletivos, anotações escritas pelos alunos e suas produções no software GeoGebra.

3.2.1 Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática

Nas duas últimas décadas, assistiu-se a uma utilização crescente de abordagens de natureza qualitativa na investigação em Educação Matemática. A investigação qualitativa tem na sua essência, segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50), cinco características:

- A fonte direta dos dados é o ambiente natural, onde o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados, frequentando os locais de estudos pois se preocupam com o contexto;
- A investigação qualitativa é descritiva, ou seja, os dados recolhidos são sempre em palavras ou imagens;
- Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelo resultado ou produto final;
- A análise dos dados é feita de forma indutiva, isto é, não recolhem os dados ou provas como forma de confirmar ou infirmar hipóteses;

Desta forma, em uma pesquisa qualitativa, os investigadores estão interessados em um contexto mais amplo do sujeito da pesquisa, observando características mais profundas. Segundo Bogdan e Biklen (1994):

> Os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber “aquilo que *eles* experimentam, o modo como *eles* interpretam as suas experiências e o modo como *eles* próprios estruturam o mundo social em que vivem. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.51).

Sob estas perspectivas, dentro da pesquisa qualitativa, desenvolve-se uma estratégia de investigação, cujo investigador se insere dentro do ambiente natural, especificando as características do local e os resultados obtidos nestes sujeitos, ou seja, uma investigação que se assume como particular.

Assim, levando em consideração tais concepções teóricas e metodológicas que a presente pesquisa busca experimentar, explorar e compreender conceitos a partir da investigação qualitativa de alunos da Escola Estadual de Educação Básica Gomes Freire.

No capítulo a seguir será feita uma descrição da sequência de atividades propostas, apresentando o objetivo e a forma de desenvolvimento.

4 O EXPERIMENTO

Neste capítulo será apresentada a sequência de atividades[3] compostas para a aplicação na turma selecionada previamente pela escola em conjunto com a pesquisadora.

Essa sequência de atividades ocorreu nos meses de abril e maio do ano de 2018, com o grupo de alunos já caracterizado no terceiro capítulo. A turma contava com quatro horas semanais de aulas de Matemática, sendo que a primeira atividade teve início no dia seis de abril e a última atividade no dia dois de maio, totalizando uma carga horária de doze horas.

Apresentamos no Quadro 1 a lista das atividades desenvolvidas nessa pesquisa em ambiente dinâmico e implementadas no experimento prático, seguidas com a classe de tarefa, a modalidade do arrastar na resolução da tarefa e do objetivo matemático, segundo as colocações de Restrepo (2008) e Arzarello (2002).

Quadro 1: Atividades desenvolvidas no GeoGebra segundo as modalidades e tarefas do arrastar

Atividade	**Tipo de tarefa**	**Modalidade do arrastar**	**Construção desenvolvida**
Atividade 0	Exploração	Sem rumo	Construção de ferramentas, relembrando noções básicas de Geometria
Atividade 1	Exploração Identificação de Variação Identificação de invariante	Sem rumo Limitado Lugar geométrico ou locus	Investigação e manipulação de pontos em um *applet*, construído a partir de isometrias
Atividade 2	Exploração Identificação de Variação Identificação de invariante	Alinhado Teste	Investigação e relação das ferramentas utilizadas para a construção de cada isometria. Descrição e criação de definições sobre cada isometria
Atividade 4	Reprodução "tipo caixa preta" Construção	Sem rumo Guiado Teste	Construção de réplicas das ilusões, utilizando isometrias

[3] As atividades estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/mbbddjm5.

Atividade 7	Identificação de Variação Identificação de invariante Reprodução "tipo caixa preta" Construção	Sem rumo Guiado Teste	Escolha de uma imagem de ilusão para a construção de sua réplica
Atividade 8	Reprodução "tipo caixa preta" Construção	Sem rumo Guiado Teste	Construção de uma ilusão de óptica criada/inventada pelos alunos
Atividade 9	Identificação de Variação Identificação de invariante	Teste	Apresentação de conceitos que tornam a imagem uma ilusão e quando esta ilusão se perde

Fonte: Acervo pessoal.

É possível verificar que as ações de arrastar descritas anteriormente podem ser utilizadas tanto para explorar e conjecturar propriedades matemáticas, quanto para validar uma conjectura ou prova. As atividades que não constam no Quadro 1 referem-se às tarefas de registro escrito em folha estática, sem o auxílio do ambiente de geometria dinâmica, mas também importantes na construção dos conceitos.

As atividades foram desenvolvidas a partir de uma apresentação em slides, pois a sala de aula utilizada não possuía internet. No Quadro 2 estão apresentadas as dez atividades propostas nos slides, descritas no Apêndice 1.

Quadro 2: Atividades Realizadas

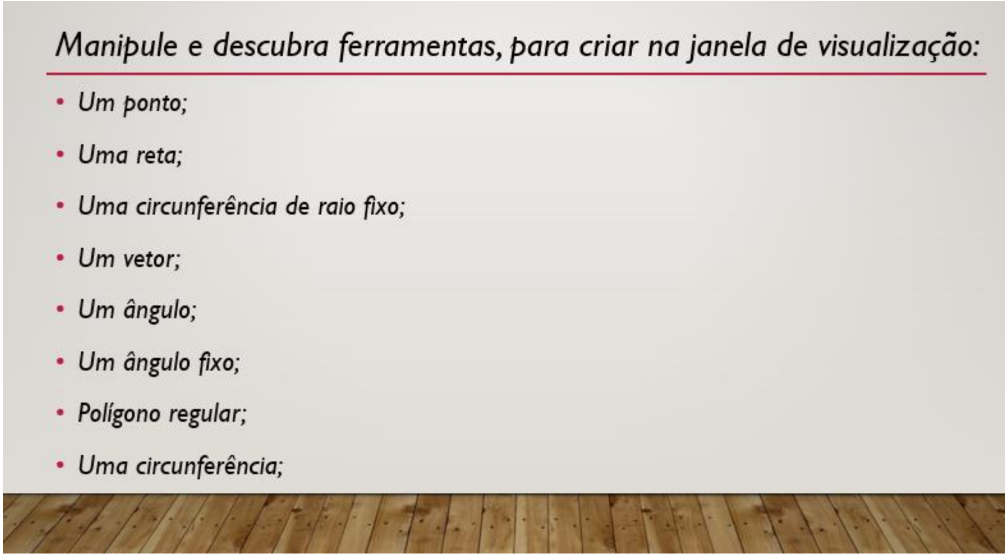
Aulas/ Data[4]	**Atividades**	**Breve descrição da atividade**
1ª Aula/ 06/04/2018	Atividade 0	Apresentação do GeoGebra, utilização de ferramentas e construções básicas, relembrando noções básicas de Geometria.
	Atividade 1	Investigação e manipulação de pontos em um *applet*, construído a partir de isometrias.
2ª Aula/ 11/04/2018	Atividade 2	Investigação e relação das ferramentas utilizadas para a construção de cada isometria. Descrição e criação de definições cada uma das isometrias.

[4] Cada encontro ocorreu em 2 horas/aula, cada uma com a duração de 45 minutos.

	Atividade 3	Apresentação das ilusões de óptica. Investigação das isometrias e verificação das ilusões.
3ª Aula/ 18/04/2018	Atividade 4	Construção das réplicas das ilusões verificadas anteriormente, utilizando as isometrias identificadas.
	Atividade 5	Análise de imagens de ilusão de óptica.
4ª Aula/ 25/04/2018	Atividade 5	Análise de imagens de ilusão de óptica.
	Atividade 6	Apresentação das definições das isometrias, de forma formal.
5ª Aula/ 27/04/2018	Atividade 7	Escolha de uma imagem de ilusão para a construção de sua réplica.
6ª Aula/ 02/05/2018	Atividade 8	Construção de uma ilusão de óptica criada/inventada pelos alunos.
	Atividade 9	Apresentação de conceitos que tornam a imagem uma ilusão e quando esta ilusão se perde.

A **atividade 0** tinha por objetivo recordar noções básicas de Geometria no GeoGebra, pois tais ferramentas subsidiariam as construções subsequentes, como mostra a Figura 15.

Figura 15: Recordando ferramentas no GeoGebra



Fonte: Imagem do *slide* 3.

Nas atividades 1 e 2, os estudantes, em duplas, deveriam utilizar o *software* GeoGebra para explorar, por meio do movimento de arrastar, pontos construídos sobre objetos geométricos que provocavam em outros pontos, deles dependentes, as transformações de isometrias. A partir da ação de arrastar, as propriedades geométricas e os elementos que definem cada uma das isometrias poderiam ser observados pelos estudantes. As duas atividades foram criadas para explorar o potencial do GeoGebra para promover o pensar em matemática, nas quais a tecnologia torna-se um instrumento matemático importante. A característica principal que difere os dois problemas está centrada na ação de arrastar proporcionada pelo GeoGebra.

A **atividade 1** foi apresentada aos alunos com o seguinte enunciado:

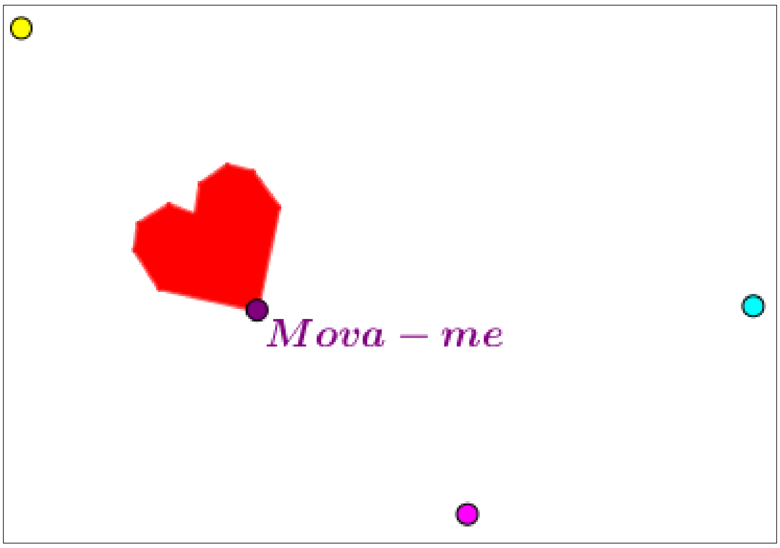
*Mova o ponto **mova-me** e responda os seguintes questionamentos:*

1. *Ao movimentar o ponto **mova-me**, o que você observa?*
2. *Como é possível obter os outros corações "iguais", a partir do ponto **mova-me**?*
3. *Qual a diferença entre os corações construídos?*
4. *Qual a relação destes corações construídos com o inicial?*

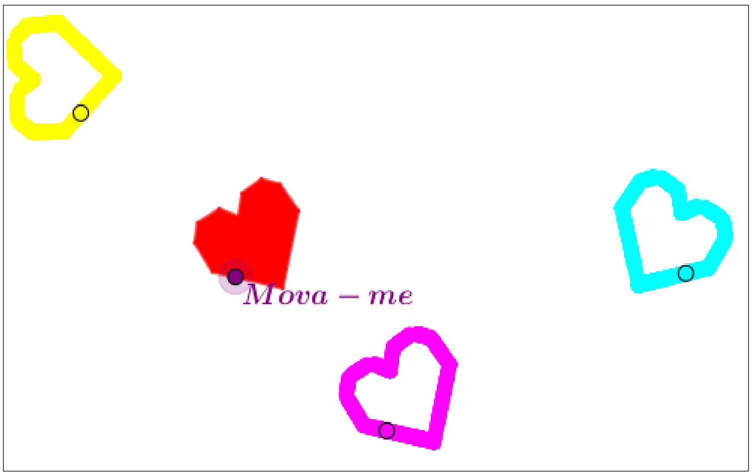
O objetivo da atividade 1 foi proporcionar um ambiente para descobrir propriedades básicas das isometrias e descrevê-las, por meio da ação de arrastar o ponto principal mova-me, conforme as imagens na Figura 16. Destaca-se que, ao movimentar o ponto mova-me construído sobre o coração vermelho (único ponto com liberdade de movimento nessa atividade), os pontos amarelo, azul e rosa também movimentavam, de forma simultânea, traçando por meio do recurso de rastro os corações nas respectivas cores (Figura 16 b).

Figura 16: Tela inicial da atividade 1

(a)



(b)



Fonte: Construção feita pela autora.

A **atividade 2** foi construída levando em consideração o recurso de arrastar para explorar e realizar conjecturas, reconhecendo os três tipos de isometrias: reflexão, rotação e translação, onde a tecnologia revela-se importante no desenvolvimento do pensamento matemático, como um recurso que amplia as capacidades de pensar dos estudantes.

A atividade foi apresentada com o seguinte enunciado:

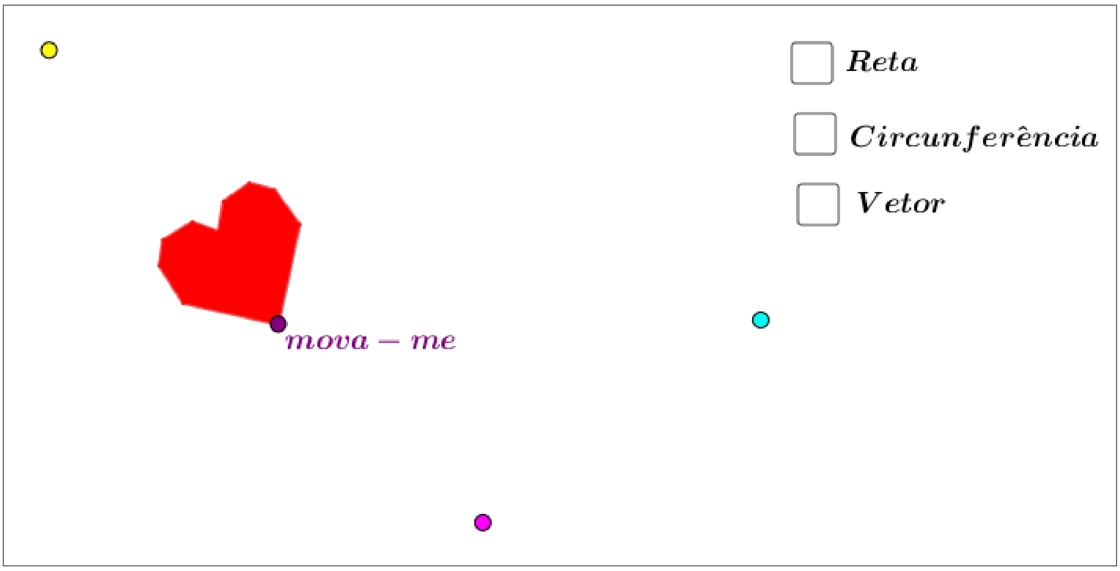
*Mova o ponto **mova-me** e responda os seguintes questionamentos:*

1. *Ao movimentar o ponto **mova-me**, o que você observa?*
2. *O que você percebe ao movimentar o ponto **mova-me** em relação à reta?*
3. *O que você percebe ao movimentar o ponto **mova-me** em relação ao círculo e ângulo?*
4. *O que você percebe ao movimentar o ponto **mova-me** em relação ao vetor?*

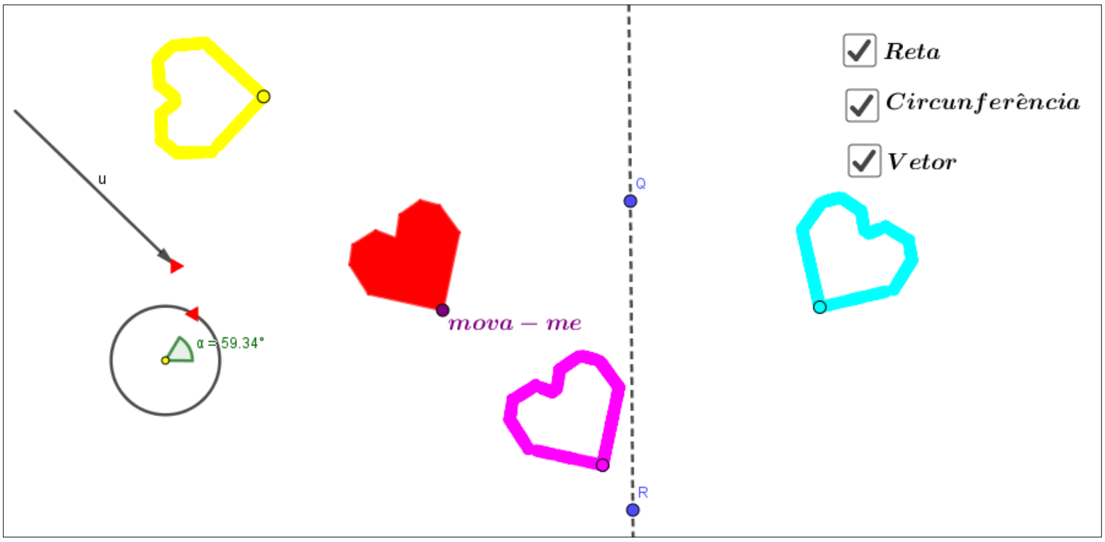
O objetivo desta atividade foi fornecer mais elementos para que os estudantes pudessem explorar, descobrir e descrever as isometrias, por meio do arrastar do ponto principal mova-me, identificando qual elemento geométrico foi utilizado para construir cada um dos corações. Assim, nessa atividade, o estudante teve a possibilidade de colocar em evidência os três elementos principais que definem as isometrias: reta de reflexão, ângulo de rotação e vetor de translação, como ilustra a Figura 17. Destaca-se que os três elementos eram dinâmicos, ou seja, poderiam ser arrastados livremente nesse processo exploratório.

Figura 17: Tela inicial da atividade 2.

(a)



(b)



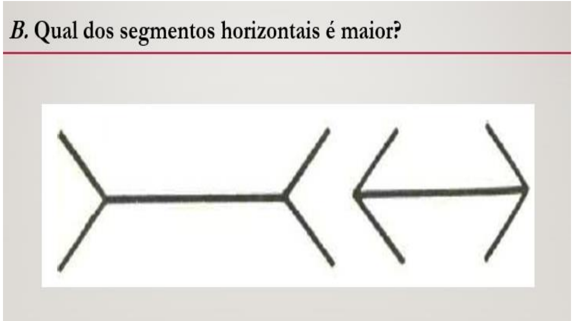
Fonte: Construção feita pela autora.

A partir do reconhecimento dos elementos na atividade 2, os alunos estabeleceram uma relação entre as ferramentas e a ação definida para os três tipos de movimentações, ou seja, as propriedades das isometrias.

Na **atividade 3**, foi feita a apresentação das ilusões de óptica e suas respectivas características. Nesta atividade, os alunos deveriam investigar, verificar e descrever as ilusões ocorridas nas Figuras 18 (a) e (b), 19 (a) e (b). Caracterizou-se como uma atividade introdutória para discutir o tema ilusões de óptica.

Figura 18: Slides para a atividade 3 - Enunciados

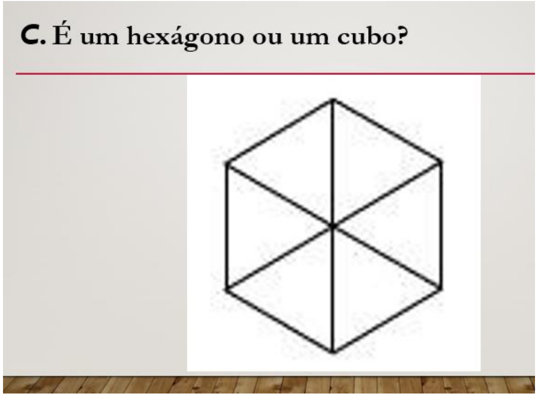
(a) (b)

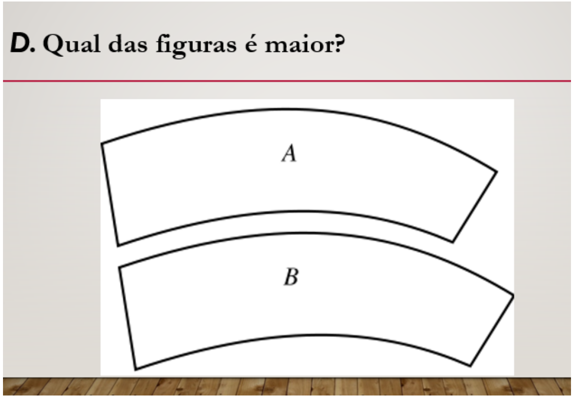


Fonte: Imagens dos *slides* 7 e 8.

Figura 19: Slides para a atividade 3

(a) (b)



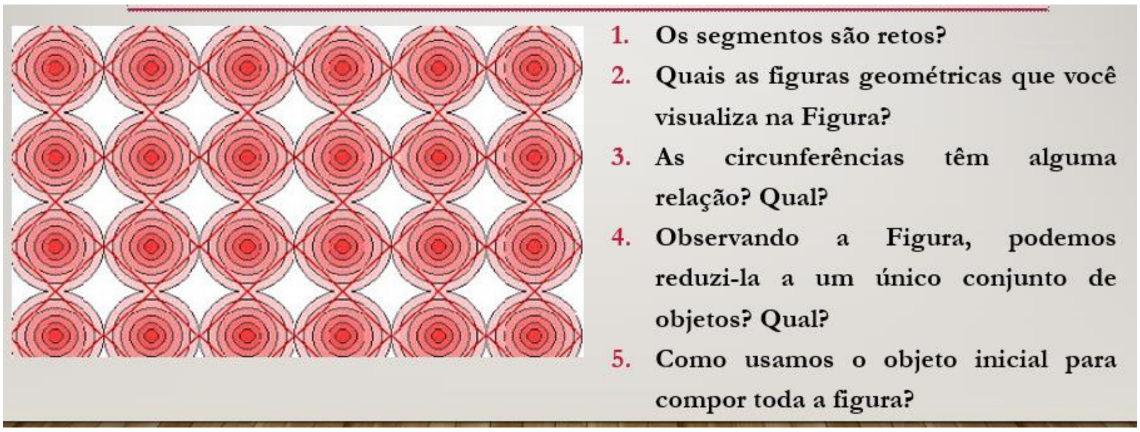


Fonte: Imagens dos *slides* 9 e 10.

A **atividade 4** envolvia a exploração de construções de imagens de ilusões de óptica no GeoGebra, propondo aos alunos identificar ao menos um dos movimentos explorados nas atividades 1 e 2. A característica central desta atividade é o potencial do GeoGebra para promover o pensar em matemática, nas quais a tecnologia torna-se um instrumento matemático importante, pois o aluno junto com o software, deve recriar as imagens sem que ela perca suas propriedades, ao ser movimentada. As imagens que deveriam ser reconstruídas estão apresentadas nas Figuras 18 (b), 19 (a) e (b).

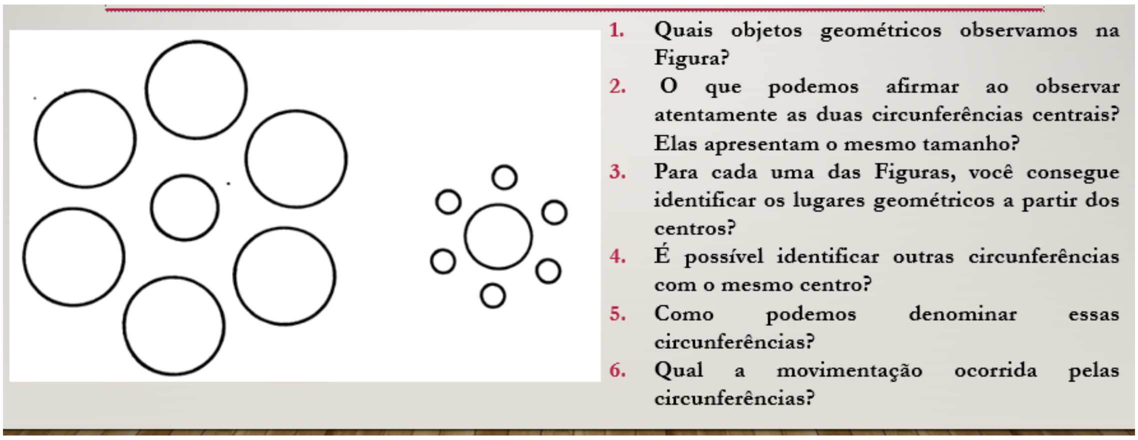
Na **atividade 5** o objetivo era investigar conceitos geométricos, principalmente as isometrias que compunham a imagem de ilusão de óptica, descrevendo suas descobertas em registro escrito. As imagens selecionadas para essa atividade foram apresentadas aos alunos de forma estática. As Figuras 20, 21 e 22 apresentam as respectivas imagens.

Figura 20: Atividade 5 - Círculos Vermelhos



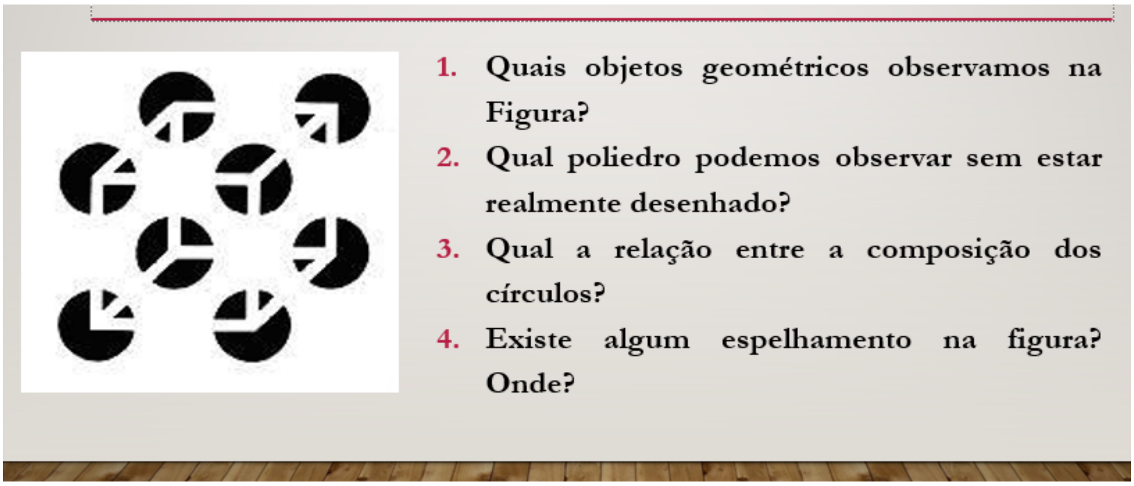
Fonte: Imagem do *slide* 14.

Figura 21: Atividade 5 - Ilusão de Ebbinghaus



Fonte: Imagem do *slide* 15.

Figura 22: Atividade 5 - Cubo Vazado



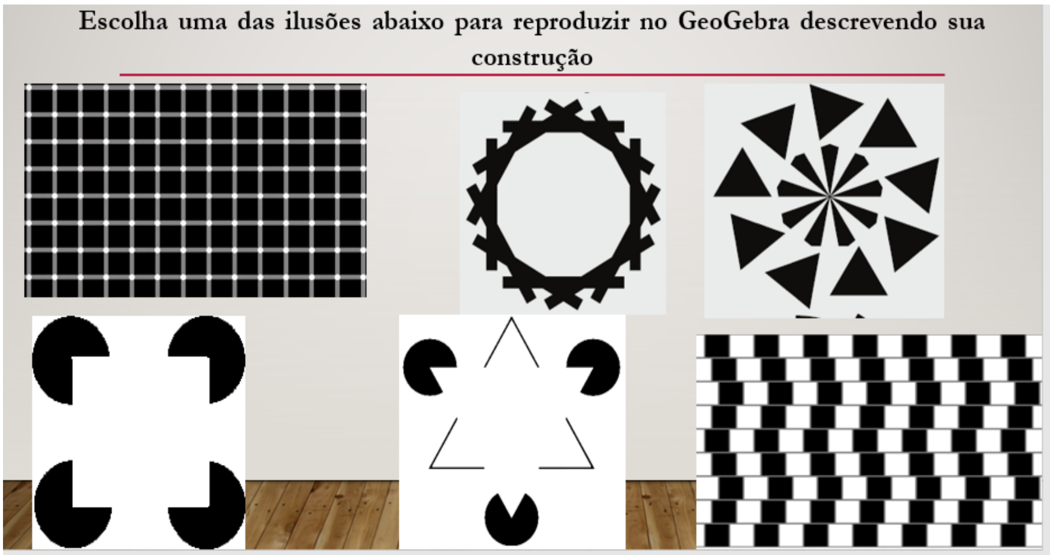
Fonte: Imagem do *slide* 16.

Ao final das investigações, fez-se um debate sobre as movimentações até então descobertas e como essas influenciam nas imagens de ilusão de óptica.

A **atividade 6** foi desenvolvida para a discussão e apresentação das definições formais das isometrias, até então não conhecidas pelos alunos. As definições foram apresentadas conforme a descrição no capítulo 2, seção 2.3.

Na **atividade 7**, os alunos deveriam escolher uma das imagens de ilusão de óptica, como mostra a Figura 23, para a construção da réplica no GeoGebra. Novamente, os alunos deveriam cuidar para que as propriedades da construção se mantivessem ao movimentá-la.

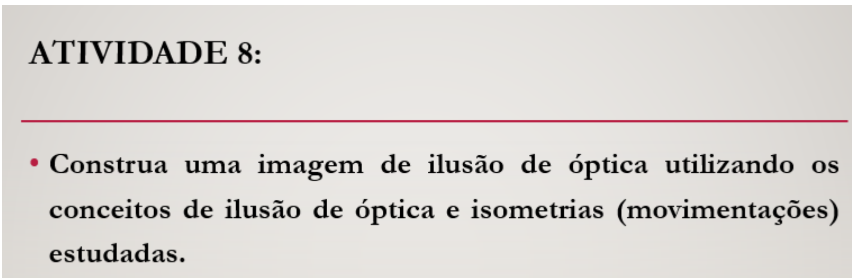
Figura 23: Atividade 7 - Escolha das imagens de ilusão de óptica



Fonte: Imagem do *slide* 20.

Após as diversas construções de réplicas no GeoGebra, na **atividade 8** os alunos deveriam criar uma ilusão de óptica no GeoGebra feita por eles, utilizando os conceitos de isometrias e artísticos envolvidos nas mesmas.

Figura 24: Atividade 8 - Enunciado

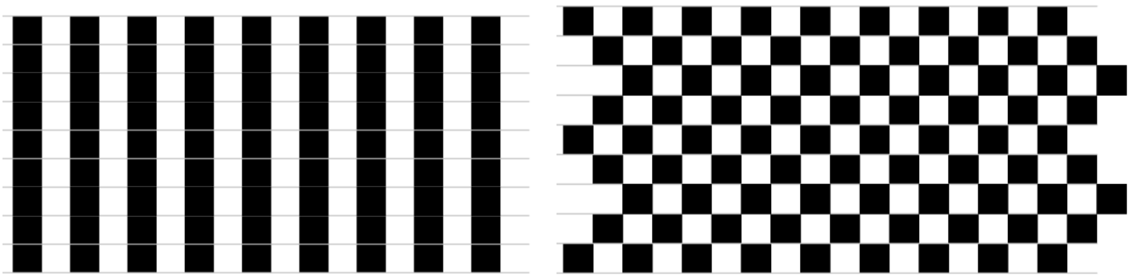


Fonte: Imagem do *slide* 21.

A **atividade 9** tinha como objetivo, ilustrar que nem todas as construções realizadas se tornam uma ilusão de óptica, apresentando assim três imagens de ilusão de óptica que perdem seu efeito em certas condições, como mostra a Figura 25.

Figura 25: Desconstrução da ilusão Café Wall

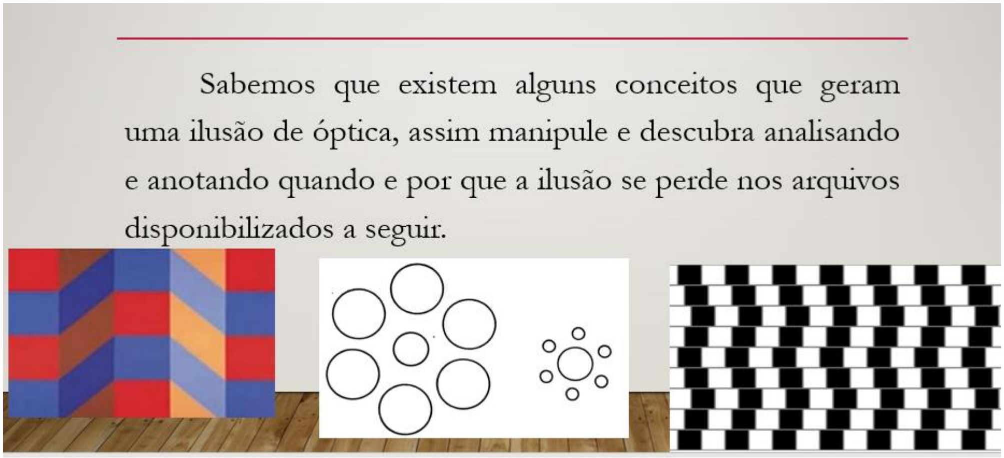
(a) (b)



Fonte: Construção feita no GeoGebra pela autora.

As imagens de ilusão que foram utilizadas podem ser visualizadas na Figura 26, que ilustra o slide apresentado.

Figura 26: Atividade 9: Enunciado



Fonte: Imagem do *slide* 22.

No capítulo a seguir serão descritos os resultados obtidos no desenvolvimento da sequência de atividades, apresentada anteriormente.

5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste capítulo, são apresentados o relato e comentários acerca do desenvolvimento das atividades propostas aos alunos. Para desenvolver as atividades, a turma foi dividida em dez grupos, que foram nomeados pelas cores AZUL, VERMELHO, VERDE, ROSA, AMARELO, ROXO, LARANJA, BRANCO, PRETO e CINZA, conforme o Quadro 3.

Quadro 3: Relação de grupos

Grupo	**Estudantes (*estudantes novos)**
AZUL	E1, E18, E5
VERMELHO	E8, E16
VERDE	E6, E20, E3*
ROSA	E4, E14, E11
AMARELO	E23, E15, E22
ROXO	E12, E17
LARANJA	E13, E21
BRANCO	E2, E19
PRETO	E7, E24, E25*
CINZA	E9, E10

Fonte: Acervo pessoal.

O Quadro 4 representa as atividades desenvolvidas por cada um dos grupos, logo as análises serão feitas sobre os grupos que realizaram as respectivas atividades. Os alunos estão referenciados por códigos, para preservar suas identidades, sendo utilizada E para estudante e os numerais seguindo a lista de presença. Bem como simbologia A (numeral) para a sequência de atividades.

Quadro 4: Relação de atividades desenvolvidas por grupo de alunos

Grupo/Atividade	A0	A1	A2	A3	A4	A4B	A4C	A4D	A5	A6	A7	A8	A9
AZUL	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
VERMELHO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
VERDE	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ROSA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓
AMARELO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	X	✓	✓
ROXO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓
LARANJA	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓
BRANCO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓
PRETO	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓
CINZA	✓	✓	✓	X	X	X	✓	X	✓	✓	X	✓	✓

Fonte: Acervo pessoal.

A **atividade 0** transcorreu tranquilamente, na qual foi perceptível a rapidez dos alunos em localizar as ferramentas no *software*. No entanto, algumas construções foram feitas a partir de mais de uma tentativa, nas quais os mesmos buscavam testar a construção dos objetos geométricos para identificar suas propriedades e respectivas utilizações, onde as manipulações dos objetos construídos pelos discentes se tornaram uma *ferramentaparapensamentos*, que proporcionaram aos alunos o desenvolver tal pensamento matemático. Por exemplo, a construção de circunferência com raio fixo, foi testada por meio de dois pontos sobre a malha, por meio de raio definido por segmento/valor e por meio de raio a partir de controle deslizante.

Nesta atividade, também, discutiu-se coletivamente alguns conceitos, relembrando definições e propriedades referentes aos seguintes objetos geométricos: reta, segmento, polígono e vetor. Foi possível observar a modalidade descrita por Arzarello (2002) como **arrastar "sem rumo"**, na qual os estudantes moviam pontos e criavam elementos na tela aleatoriamente, sem um plano, a fim de descobrir configurações interessantes ou regularidades de cada objeto geométrico construído.

Portanto, destaca-se que a atividade se configurou como uma tarefa de exploração, na qual os alunos exploraram suas construções, movendo os pontos dos objetos, no qual buscaram identificar as particularidades do objeto, usando o arrastar para identificar as invariantes do objeto construído.

A **atividade 1** teve como objetivo proporcionar um ambiente para descobrir propriedades básicas das isometrias e descrevê-las, por meio da ação de arrastar o ponto principal mova-me construído sobre a figura do coração. Destaca-se que, ao movimentar o ponto mova-me construído sobre o coração vermelho (único ponto com liberdade de movimento nessa atividade), os pontos amarelo, azul e rosa também movimentavam, de forma simultânea, traçando por meio do recurso de rastro os corações nas respectivas cores (Figura 19b). Assim, a tarefa classifica-se como uma atividade de identificação de variação, na qual os alunos foram convidados a mover e observar as variações durante o movimento, ver o que muda e o que se mantém, quais são as regularidades que surgem na variação.

Os alunos, ao manipularem o ponto para solucionar a atividade, apresentaram três comportamentos distintos, no que diz respeito à ação de arrastar. Primeiro, foi possível perceber que suas ações se configuravam como a modalidade de arrastar livre por toda a janela visualização, ou seja, um arrastar sem rumo, segundo a modalidade descrita por Arzarello (2002), na qual a intenção dos estudantes era explorar, para descobrir o que acontecia com os corações. Para tanto, os grupos VERMELHO, VERDE, ROSA, AMARELO, ROXO, LARANJA, BRANCO e CINZA, movimentavam os pontos de forma a criar os corações em diferentes espaços da tela. Nesse processo, perceberam que o ponto azul fazia o “andar do ponto ao contrário” do ponto mova-me, conjecturando que os corações azul e vermelho estavam “espelhados”. A ação de arrastar e observar o que acontece permitiu aos estudantes a realização dessa conjectura, no qual a ferramenta arrastar tornou-se uma *ferramentoparapensamentos*, conforme mostra o diálogo entre o grupo LARANJA e o grupo BRANCO, seguida da Figura 27 que ilustra tal situação.

Grupo LARANJA- Tá não olha aqui, esse (ponto do coração azul em relação ao vermelho) vai anti-horário, ao contrário, né?

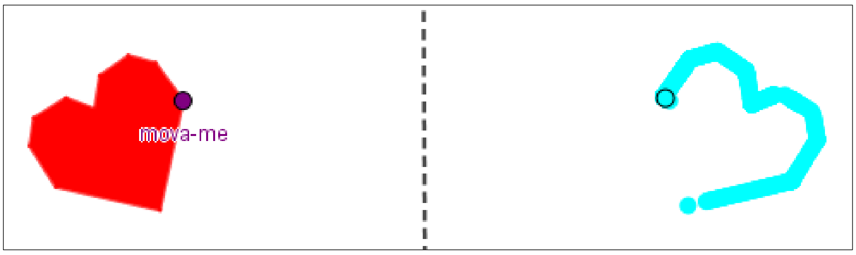
Grupo BRANCO- Todos estão indo anti-horário!

Grupo LARANJA- Não mano esses estão sentido horário! Ó como esse vai pra cá e esse vai pra lá!

Grupo BRANCO- Parece um espelho.

Grupo LARANJA- Sora acho que nós descobrimos, esse tá espelhado!

Figura 27: Pontos ao contrário



Fonte: Construção feita pela autora.

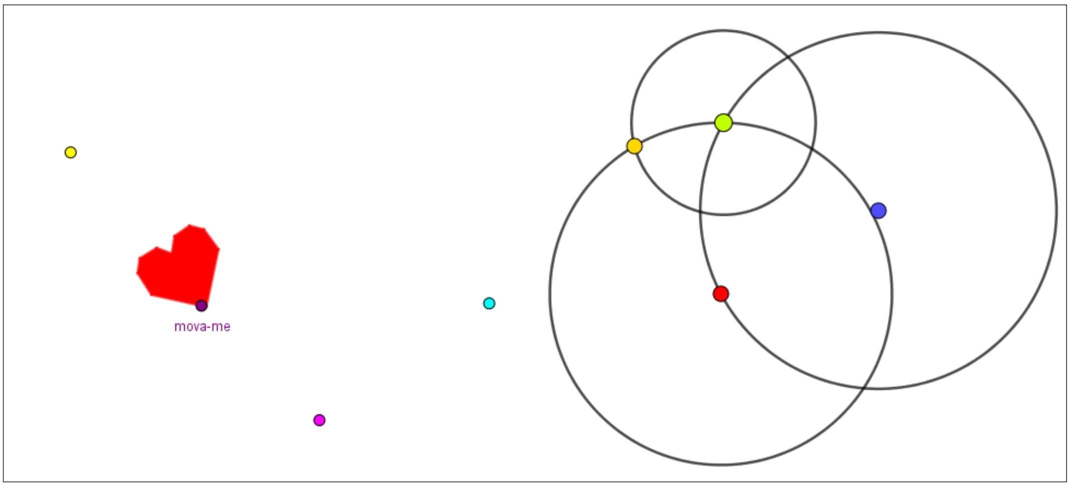
A ação de retirar o coração vermelho do lugar, colocando-o em diferentes posições da tela do computador, permitiu que a conjectura “passasse no teste”, ou seja, o coração azul continuava espelhado. Destaca-se, nesta situação a ferramenta dinâmica e a ação de arrastar como elemento importante para a validação das invariantes do objeto. Aqui, a ação de arrastar em ambiente dinâmico torna-se uma ferramenta cognitiva para o desenvolvimento da ideia de reflexão, ou seja, para a compreensão de um conceito matemático.

O segundo comportamento observado foi caracterizado pelo grupo AZUL, que teve a ideia de, além de arrastar o ponto mova-me sem rumo, arrastar testando propriedades a partir de novas construções realizadas por eles que permitiam verificar suas conjecturas. Analisando a construção e observando seus diálogos, percebeu-se que foram construídas circunferências para investigar o que possivelmente estava ocorrendo com os corações. Para esse grupo de alunos, o movimento que estava sendo observado era o de giro (rotação), no qual cada ponto girava a partir do principal (na construção deles o ponto vermelho) com ângulos distintos.

E5- Tá calma, vamo vê se não conseguimos fazer algo parecido.
E1- Tá, achei que dava pra fazer assim! (Construiu circunferência a partir de dois pontos quais quer).
E18- Tá tem o círculo e daí?
E1- Tá vendo, vamos dizer que esse círculo é o coração vermelho. Ai vamos girar outros círculos, tipo isso aqui?
E5- Não, tem que pegar esse aqui. (criação de circunferências a partir dos pontos vermelho e amarelo da Figura 28).
E1- Pode ser.
E18- Tá vendo, também mexe aqui.
E1- Mexem com o vermelho.
E1- Sora é mais ou menos isso aqui?

Observa-se nos extratos de diálogo acima que os estudantes se apoiam nos recursos dinâmicos do GeoGebra para buscar compreensão sobre a situação apresentada (neste caso, o movimento de rotação). As ações de arrastar e construir objetos dinâmicos são formas de expressão do pensamento dos estudantes, que concretizam o que só poderia ocorrer por meio de uma animação mental, conforme destaca Leung (2008). A Figura 28 mostra a construção utilizada pelos alunos do grupo AZUL, discutida anteriormente.

Figura 28: Modelo construído pelo grupo AZUL



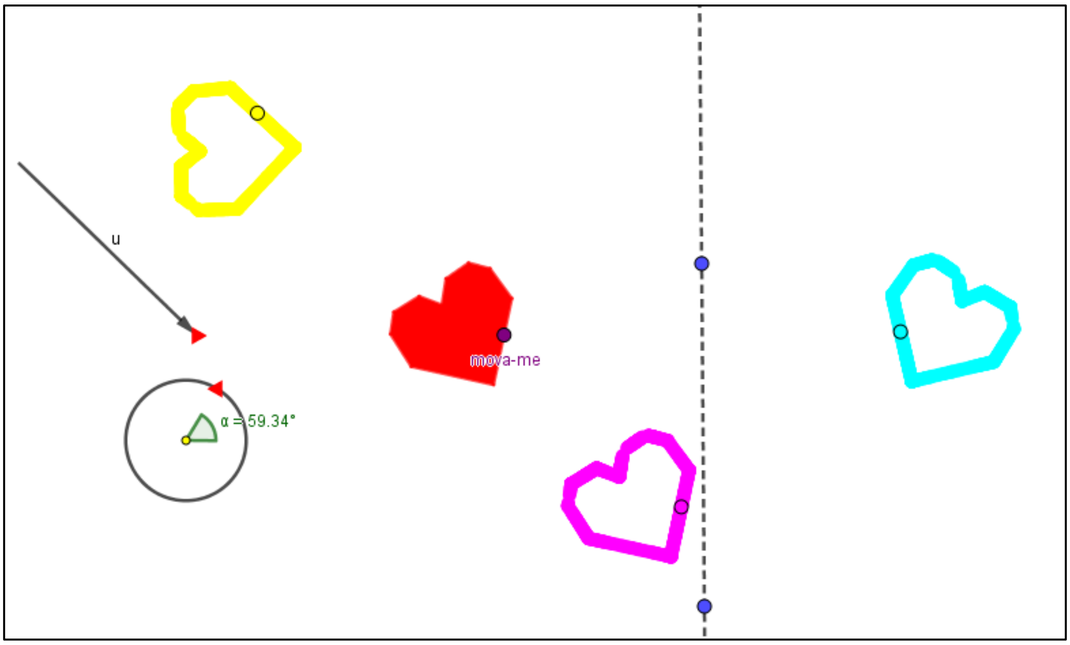
Fonte: Construção feita pelos alunos

Neste momento, o grupo AZUL utilizou a tecnologia como ferramenta para pensar na situação apresentada e tentar compreende-la, fazendo uso dos recursos do software para elaborar formas e meios de descobrir o que estava acontecendo com os corações, utilizando novos objetos geométricos para explorar e exemplificar a relação que existia entre os pontos: ao movimentar um deles, os demais movimentavam automaticamente a partir das propriedades impostas. Percebe-se a ação de arrastar como forma de observar as variações durante o movimento, identificando o que muda e o que se mantém, quais são as regularidades que se destacam na variação do objeto geométrico.

O terceiro comportamento observado foi a utilização de recursos do software não propostos pela atividade, indo além do arrastar o ponto mova-me e buscando entender as situações a partir da análise da janela de álgebra, disponível no programa.

Os grupos LARANJA, BRANCO e PRETO além do arrastar utilizaram, também, as abas de propriedades e a janela de álgebra para exibir objetos que estavam ocultos, como o vetor de translação, o ângulo de rotação e a reta de reflexão para auxiliar na compreensão do que estava acontecendo com os pontos que construíam os demais corações, como mostra a Figura 29.

Figura 29: Condições das isometrias – objetos ocultos na construção



Fonte: Construção feita pela autora.

Dessa forma, estes alunos já foram estabelecendo conjecturas, indicando quais ferramentas criavam os respectivos corações: por exemplo, o vetor comandava o movimento da construção do coração rosa; o círculo com o ângulo dinâmico movimentava a posição do coração amarelo; e a movimentação da posição da reta provocava movimento no coração azul, apontando, assim, primitivos das isometrias, indo além do objetivo da atividade, procurando encontrar mais ferramentas para explicar as variações ocorridas no decorrer da movimentação. Assim, todos os objetos ocultados na atividade ficaram visíveis, fazendo com que os alunos movimentassem livremente os objetos na tela, para observar o que ocorria com os pontos principais para a construção dos corações.

A **atividade 2** teve como objetivo fornecer mais elementos para que os estudantes pudessem explorar, descobrir e descrever as isometrias, por meio do arrastar do ponto principal *mova-me*, identificando qual elemento geométrico foi utilizado para construir cada um dos corações. Assim, nessa atividade, o estudante teve a possibilidade de colocar em evidência os três elementos principais que definem as isometrias: reta de reflexão, ângulo de rotação e vetor de translação, como ilustra a Figura 20(b). Destaca-se que os três elementos eram dinâmicos, ou seja, poderiam ser arrastados livremente nesse processo exploratório, estimulando atividades mentais dos alunos.

Ao iniciar a exploração da atividade 2, os alunos logo partiram para a utilização das ferramentas reta, vetor e ângulo, arrastando-as pela tela do computador de forma a descobrir qual ferramenta era utilizada no traçado de cada um dos corações, indo ao encontro das modalidades de Arzarello (2002), em particular, o arrastar teste e o arrastar vinculado.

A primeira ferramenta movimentada foi a reta, pois já haviam concluído, na atividade 1, que o coração azul era espelhado, validando suas conjecturas. Nesse caso, a movimentação da reta possibilitou que os alunos validassem uma conjectura que já havia sido elaborada, ou seja, o arrastar da reta de reflexão entrou como teste para a conjectura de que os corações vermelho e azul estavam espelhados (refletidos). O movimento do vetor levou os estudantes a perceberem que o coração rosa também se movimentava de acordo com a direção, comprimento e sentido do vetor.

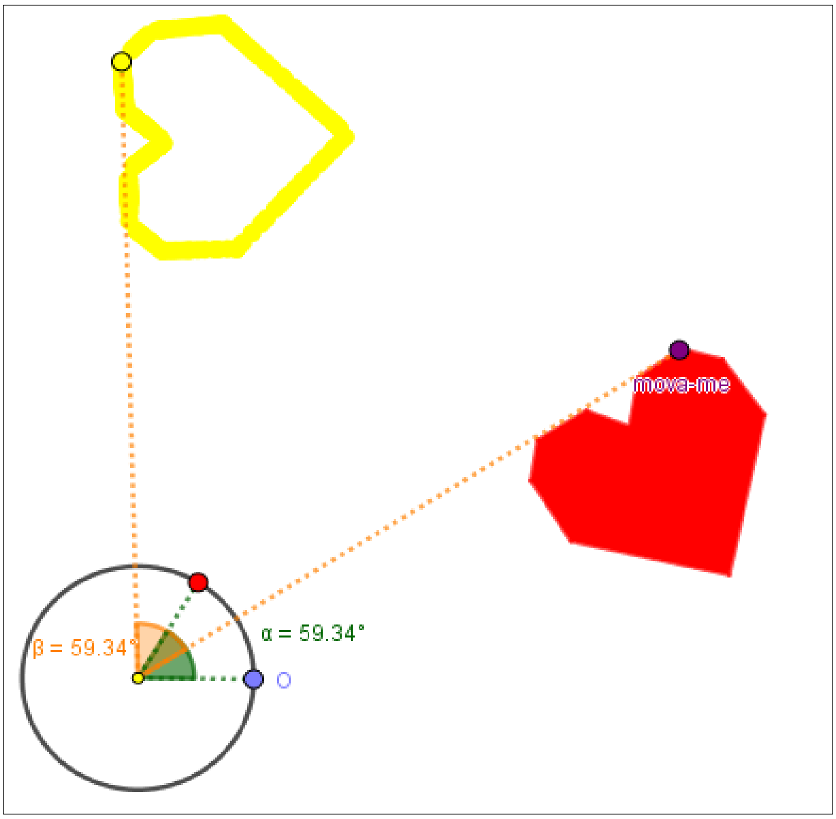
Nesse caso, pela forma como os alunos arrastaram o vetor, verificou-se que ainda não haviam compreendido a transformação de translação, sendo crucial essa etapa de exploração, pois os alunos aumentavam e diminuíam seu tamanho, o movimentavam livremente na tela para todos os lados, para descobrir que o coração estava se movimentando de acordo com o caminho percorrido pelo vetor. Tem-se aqui uma situação em que ferramenta e pensamento operam conjuntamente na elaboração da ideia de translação.

Assim, segundo Leung (2008) e Arzarello (2002), o movimento de arrastar no GeoGebra tornou-se uma ferramenta que promoveu a produção de conjecturas, no qual os alunos exploraram os desenhos movendo-os, identificando se as formas mudam (ou não mudam), buscando padrões e permitindo descobrir suas propriedades, onde a ferramenta arrastar torna-se uma *ferramentaparapensamentos*.

Neste sentido, a possibilidade de arrastar oferece um feedback para a fase de descoberta, na esperança de "ver" padrões ou propriedades invariantes da construção, e desta forma fornecer apoio para as "explicações" de conjecturas ou propriedades. Alunos e tecnologia operam conjuntamente, com a intenção de compreender o conceito matemático implícito na construção.

O movimento que exigiu mais exploração dos alunos para a compreensão foi o de rotação. Foi necessária a intervenção da pesquisadora para identificar, juntamente com os alunos, o ângulo de rotação, destacando de forma explícita o ângulo entre os corações vermelho e amarelo, como mostra a Figura 30, validando que os ângulos apresentados são iguais, isto é, $\alpha = \beta$. Desta forma, a compreensão emerge da interação entre alunos e tecnologia, que amplia as possibilidades de pensar dos alunos, proporcionando, de maneira dinâmica, a observação sobre o que está ocorrendo por meio da construção de novos elementos geométricos, que levaram à validação de conjecturas e hipóteses sobre a congruência dos ângulos apresentados, para a compreensão do movimento de rotação. Neste caso, a atividade mental dos alunos precisou apoiar-se em mais elementos “concretos” para trazer à tona os elementos e conceitos matemáticos envolvidos no movimento de rotação. A regularidade de congruência dos ângulos α e β não foi identificada sem que esses objetos fossem evidenciados explicitamente e passassem no teste de arrastar. Ainda assim, o espaço dinâmico tornou possível essa atividade mental, ampliando as formas de pensamento dos alunos e possibilitando a observação dessas invariâncias.

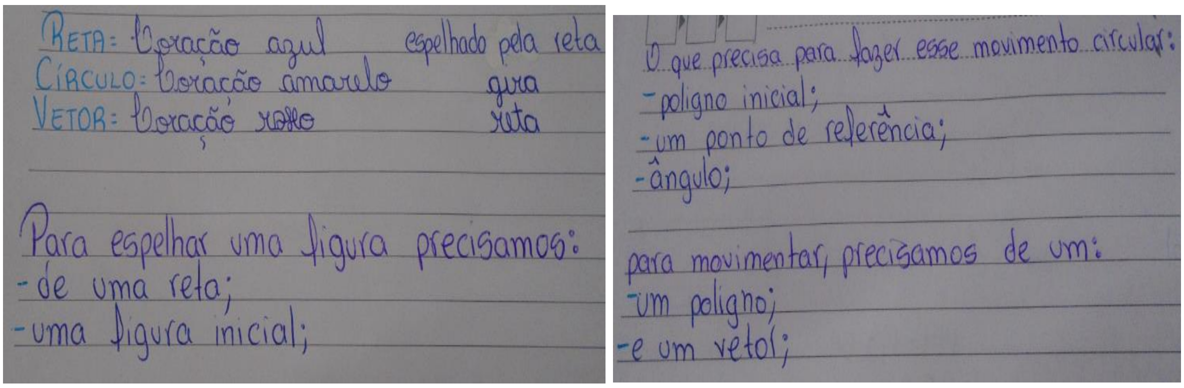
Figura 30: Ângulo de rotação.



Fonte: Construção feita pela autora.

Após a oportunidade de exploração em ambiente de geometria dinâmica, os alunos registraram observações sobre os três tipos de movimentos, conforme ilustra Figura 31.

Figura 31: Escrita do E4, grupo ROSA


RETA: Coração azul espelhado pela reta
CÍRCULO: Coração amarelo gira
VETOR: Coração roxo reta

Para espelhar uma figura precisamos:
- de uma reta;
- uma figura inicial;

O que precisa para fazer esse movimento circular:
- poligno inicial;
- um ponto de referência;
- ângulo;

para movimentar, precisamos de um:
- um poligno;
- e um vetor;

Fonte: Cópia de caderno de aluno grupo ROSA.

O registro escrito dos alunos quanto aos movimentos indica, de forma ainda embrionária, conceitos-chaves das isometrias, relacionando o movimento espelhado com a reflexão, o movimento circular com a rotação e o movimento livre com a translação, reconhecendo em cada uma das isometrias suas propriedades básicas. Isso revela que os estudantes, a partir da interação com os recursos do GeoGebra, da ação contínua de arrastar para explorar e descobrir, compreenderam as propriedades das isometrias.

A **atividade 3** teve como objetivo conhecer as ilusões de óptica a partir de uma apresentação de imagens e obras, nas quais os alunos deveriam utilizar seus conhecimentos matemáticos para verificar as ilusões presentes nas respectivas imagens. A atividade foi realizada coletivamente, onde todos os alunos foram colocando suas conjecturas, as quais foram apontadas e relatadas em debates abertos, tendo a participação da maioria dos alunos.

Para o item (a), os alunos utilizaram a estratégia de esconder e identificar aspectos da velha ou da moça no slide exposto no quadro branco, como mostra a Figura 32, na qual os alunos primeiro identificaram o queixo da moça, e após o nariz da velha. Além disso, relacionaram a gargantilha e a boca, o ouvido e o olho respectivamente da moça e da velha.

Figura 32: Conjecturas dos alunos

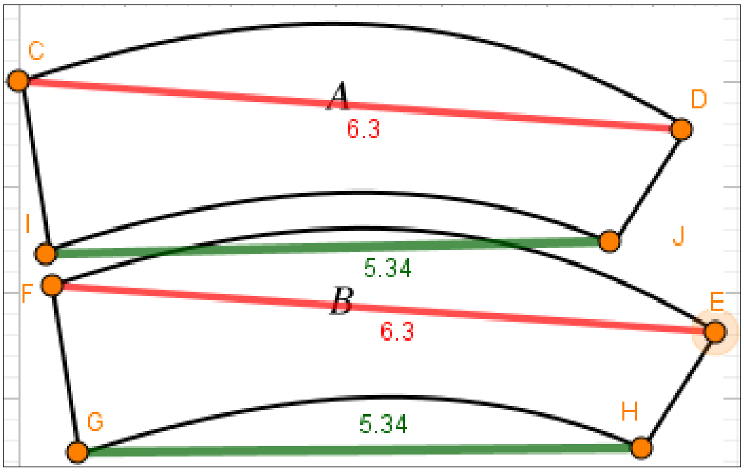
Fonte: Cópia do slide rabiscado.

No item (b), os alunos de imediato afirmaram que os segmentos tinham tamanhos iguais, pelo fato de terem relacionado com a primeira situação apresentada, que parecia ser diferente. Logo concluíram que os segmentos eram iguais (congruentes) e, para confirmar a conjectura, utilizaram inicialmente o braço para medir e, em seguida, pela orientação de alguns alunos, utilizaram a ferramenta régua, e fizeram as medições.

No item (c), inicialmente os alunos ficaram em dúvidas quanto à visualização do cubo, mas alguns alunos vieram frente ao quadro para explicar onde ele se encontrava, da mesma forma como fizeram com a imagem do item (a), para solucionar a conjectura (de que a imagem realmente poderia representar um hexágono e um cubo), as ferramentas utilizadas para a verificação da conjectura foram o transferidor e a régua.

O item (d) foi resolvido com um pouco mais de debate, pois os alunos estavam se contradizendo: enquanto uns apresentavam a hipótese de que ambos eram iguais, outros não concordavam. Logo a pesquisadora sugeriu a ambos que criassem justificativas e argumentos para suas hipóteses. Assim os alunos dos grupos AZUL e ROXO, entre observações e discussões, mostraram, utilizando novamente a régua, que as distâncias entre os pontos era a mesma, como mostra a Figura 33. Os demais alunos então perceberam que sua hipótese estava incorreta, concordando com os grupos AZUL e ROXO.

Figura 33: Exemplo de medição

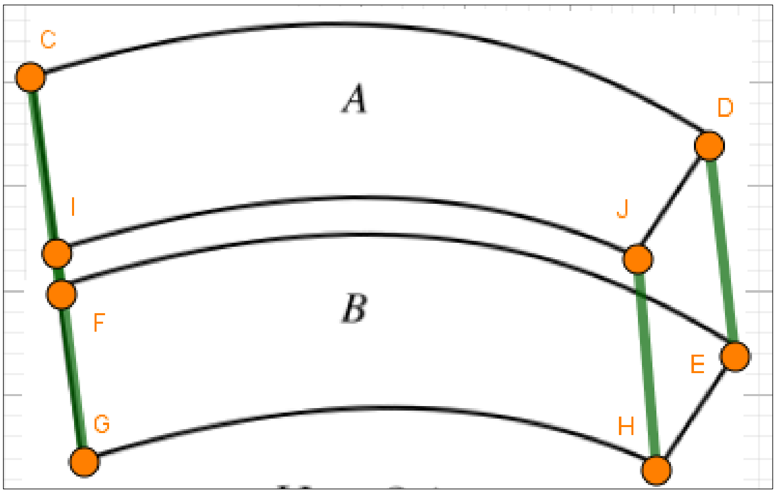


Fonte: Exemplo feito pela autora no GeoGebra, da medição dos alunos ao quadro.

Ao final da atividade com as ilusões de óptica, os alunos foram indagados quanto às possíveis "movimentações" apresentadas nos itens (b), (c), e (d). Para os itens (b) e (c), as conclusões foram rapidamente expostas, "espelhamento" e "circular", respectivamente. Porém, o item (d) novamente não foi resolvido sem o auxílio da pesquisadora, que os questionou destacando as ferramentas e propriedades apresentadas e utilizadas na atividade 2.

Assim, logo perceberam que a reta e o ângulo não ajudariam muito, destacando então o vetor. O grupo AZUL, então, percebeu que, se em vez de utilizar os segmentos horizontais como na Figura 33, fossem construídos segmentos oblíquos (exemplo CF, IG, DE, JH), poderiam identificar os vetores, como mostra a Figura 34.

Figura 34: Vetores de translação



Fonte: Exemplo feito pela autora no GeoGebra, da demonstração dos alunos ao quadro.

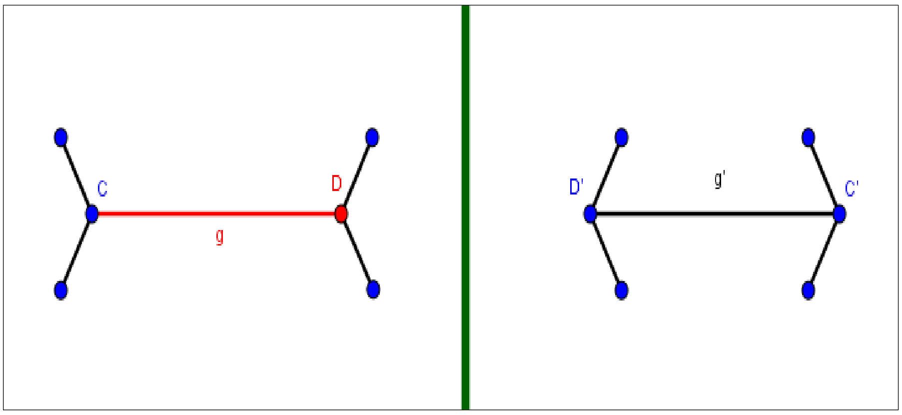
A **atividade 4** teve como objetivo contruir réplicas das imagens apresentadas nos itens (b), (c), e (d) da atividade 3, a fim de ampliar os conhecimentos sobre os movimentos (isometrias), manipulando ferramentas no *software* GeoGebra. Os alunos deveriam recriar as imagens sem que elas perdessem suas propriedades ao serem movimentadas, indo ao encontro do que afirmam Gravina e Contiero (2011) quanto à estabilidade sob ação do movimento nos *softwares* de geometria dinâmica.

Para o item (b), os grupos AZUL, VERDE, AMARELO e LARANJA desenvolveram a mesma construção, pois como estavam próximos acabaram desenvolvendo a réplica através da utilização a reta de reflexão (localizada na Figura 35(a), na cor verde), no qual o segmento CD era dinâmico, isto é, poderia se deslocar pela tela. Além disso, os alunos criaram um controle deslizante para determinar os ângulos formados pelos segmentos das setas com uma reta perpendicular ao segmento CD passando por suas extremidades. Os ângulos foram criados segundo o sentido horário ou anti-horário.

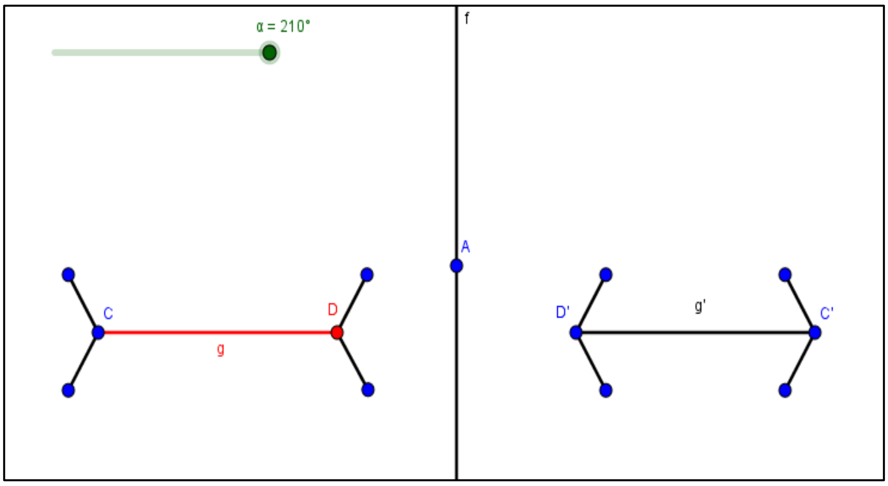
Sob estas perspectivas, a tecnologia revela-se importante no desenvolvimento do pensamento matemático, como um recurso que amplia as capacidades de pensar dos estudantes, pois estes utilizaram diferentes ferramentas dinâmicas para a construção da réplica. A tecnologia se tornou uma ferramenta importante para exteriorizar o pensamento, no qual o estudante pode colocar em prática, concretizar e testar suas conjecturas e ideias matemáticas desenvolvidas no decorrer da construção das isometrias.

Figura 35: Construção da réplica: grupos AZUL, VERDE, AMARELO e LARANJA

(a)



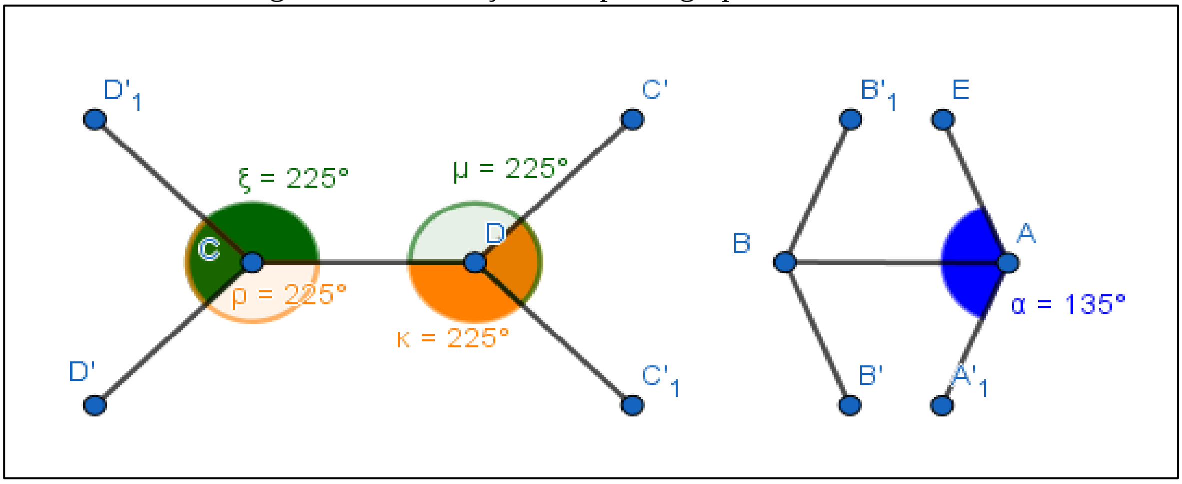
(b)



Fonte: Construção dos alunos no GeoGebra.

Por outro lado, o grupo VERMELHO não utilizou a reta para a reflexão, pois construiu os segmentos a partir da ferramenta segmento de comprimento fixo, podendo então movimentá-los por toda a janela livremente, indo ao encontro das modalidades de arrastar guiado e arrastar limitado de Arzarello (2002). Já os ângulos foram construídos por meio da rotação, como mostra a Figura 36.

Figura 36: Construção da réplica: grupo VERMELHO



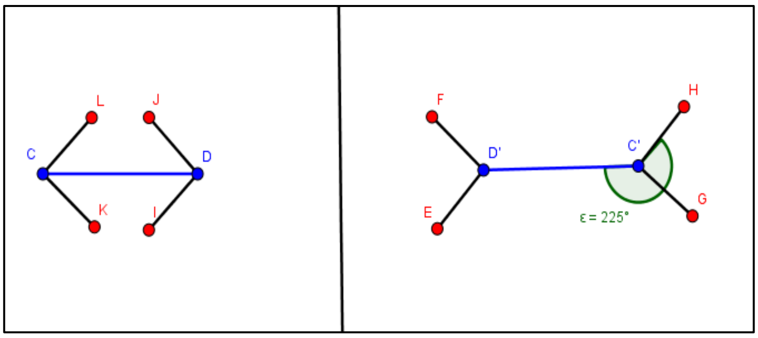
Fonte: Construção dos alunos no GeoGebra

Os demais grupos BRANCO, PRETO, ROSA e ROXO apresentaram mais dificuldade para construir a réplica, pois não conseguiram realizar a construção de modo que as propriedades se mantivessem. Na construção, utilizaram a reta, indicada pela cor verde na Figura 37(b) e cor preta na Figura 37(a), como eixo de reflexão, mantendo os segmentos CD e C’D’ congruentes.

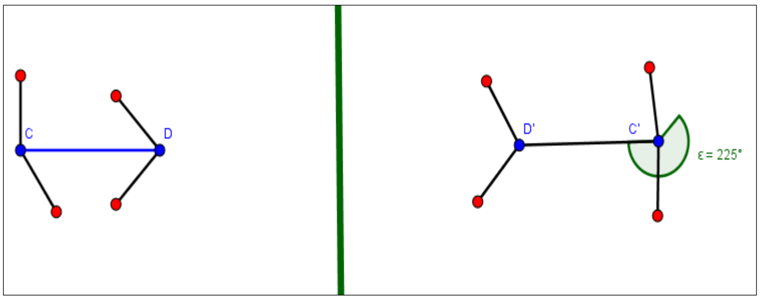
No entanto, os ângulos foram construídos aleatoriamente na tela, podendo ser arrastados livremente pela janela de visualização, conforme a Figura 37(b). O grupo ROSA, porém, se difere na construção, pois em vez de construir segmentos de reta, construíram os segmentos com uma das extremidades sobre uma circunferência de raio fixo, o que delimitou a medida do segmento, mas não o ângulo, assim percebe-se a modalidade arrastar teste: movimenta os pontos arrastáveis ou semiarrastáveis, a fim de verificar se a figura mantém propriedades iniciais. Se sim, então a figura passa no “teste”; caso contrário, a figura não foi construída de acordo com as propriedades geométricas que a definem.

Figura 37: Construção da réplica: grupos BRANCO, PRETO, ROSA e ROXO

(a)



(b)

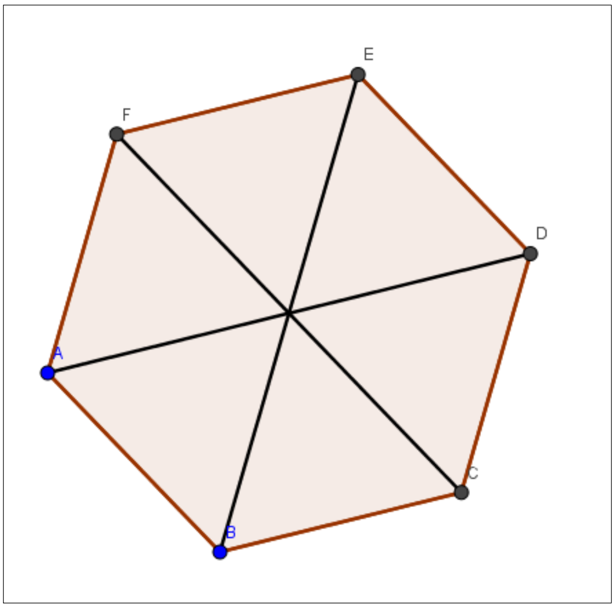


Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

Analisando as construções realizadas para a réplica do item (b), identificamos diferentes formas de pensamentos, assim como diferentes formas de interações com o GeoGebra, entendendo esse recurso como uma tecnologia cognitiva, em que a interação entre o *software* e o aluno resultou no desenvolvimento de diversas construções, as quais puderam ser testadas após sua finalização, proporcionando atividades mentais e ideias matemáticas.

O Item (c) foi construído da mesma forma por todos os alunos. A construção foi feita a partir de um hexágono regular, por meio da ferramenta polígono regular. No entanto, quando indagados pela pesquisadora: - Qual o tipo de movimentação que poderia ser utilizada para a construção desta réplica? Todos os alunos responderam que seria o "rotatório" (rotação) do triângulo equilátero. A Figura 38 retrata a construção do grupo AZUL.

Figura 38: Construção da réplica: grupo AZUL



Fonte: Construção dos alunos no GeoGebra.

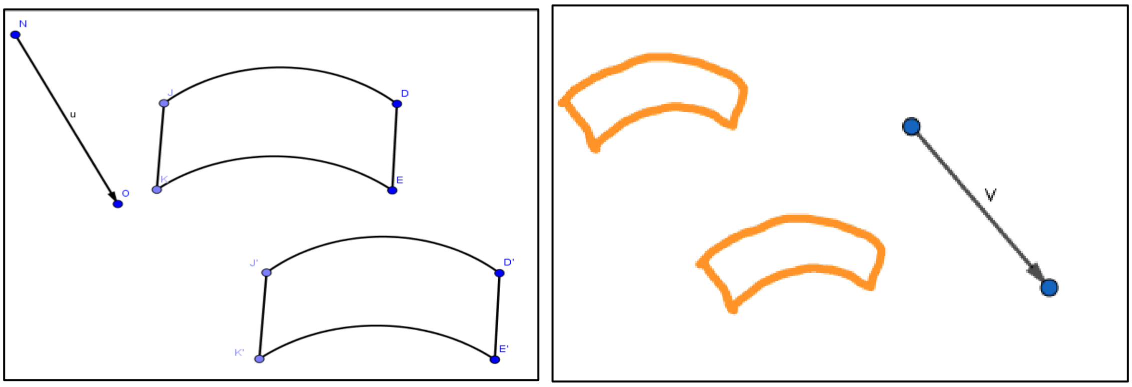
Nesta construção, percebeu-se pouca utilização de ferramentas e tentativas de arrastar, optando somente pela ferramenta polígono regular disponibiliada pelo GeoGebra, indicando o número de lados e medida. Nesta situação, percebeu-se que o pensamento matemático surgiu de forma diferenciada, no qual os alunos precisaram pensar sobre quais as possibilidades de lados para então organizar a construção, apontando para a tarefa de identificação de invariantes, sugerida por Restrepo (2008), na qual os alunos exploraram a construção da réplica e identificaram quais propriedades geométricas o objeto apresentava.

O Item (d) foi desenvolvido por apenas quatro grupos, pois a ferramenta vetor ainda era um objeto matemático não compreendido pelos alunos. Acredita-se que isso esteja relacionado ao fato dos alunos não estarem habituados a trabalhar com tal conceito nas aulas regulares de matemática.

Os grupos AZUL e LARANJA desenvolveram a construção a partir de arcos e segmentos, interligando os pontos extremos dos arcos para a construção dos segmentos, logo em seguida, transladaram todas as partes da imagem inicial pelo vetor "u", construído inicialmente. A Figura 39(a) retrata tal construção.

Figura 39: Réplica do Item (d): (a) Grupo AZUL e LARANJA; (b) Grupo VERMELHO

(a) (b)

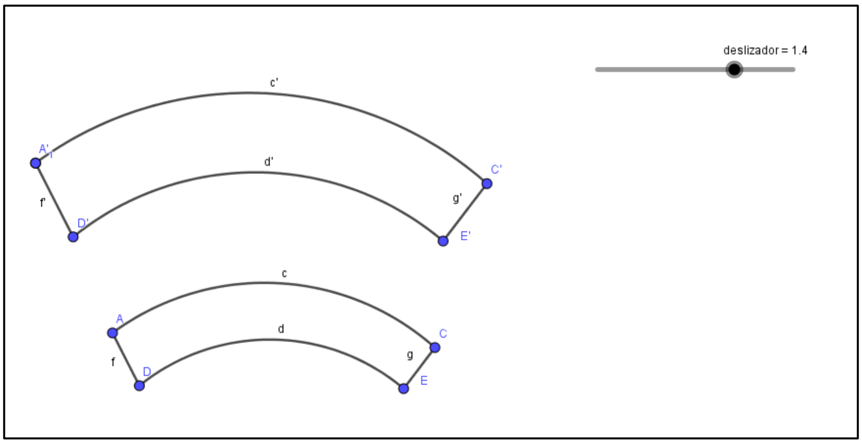


Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

O grupo VERMELHO, colocou a imagem de ilusão de óptica no GeoGebra, para então utilizar a ferramenta caneta para desenhar e construir a imagem inicial, logo em seguida construiram o vetor "v" para transladá-la, coforme a Figura 39(b). Assim, a descoberta de novas *ferramentasparapensamentos* foram utilizadas para que a réplica mantivesse as variáveis e invariáveis indicadas inicialmente.

Por outro lado, o grupo VERDE também criou a imagem inicial utilizando arcos e segmentos construídos a partir dos pontos extremos. Tal construção também poderia ser arrastada pela janela de visualização sem perder suas propriedades. No entanto em vez de utilizar um vetor para transladar a imagem, as alunas construíram uma homotetia, indo além das isometrias previstas pela professora, conforme a Figura 40, indicando a razão 1 para a homotetia. No entanto, como a razão não está fixada ressalta-se que a construção não está correta, pelo fato de que as figuras criadas, neste caso, não serem congruentes, mas detaca-se o empenho dos estudantes em utilizar o GeoGebra como espaço de exploração matemática.

Figura 40: Homotetia criada pelas alunas do grupo VERDE.

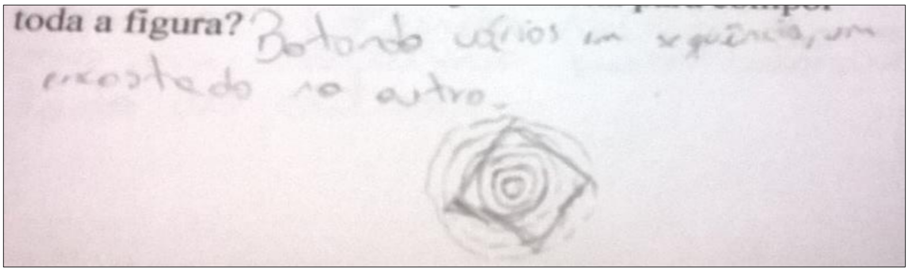


Fonte: Construções dos alunas no GeoGebra

A **atividade 5** teve como objetivo investigar conceitos geométricos, principalmente as isometrias que compunham a imagem de ilusão de óptica, descrevendo suas descobertas em registro escrito. As imagens selecionadas para essa atividade foram apresentadas aos alunos de forma estática. Para a análise, destacam-se as perguntas referentes às isometrias e utilizar-se-á a Figura 20 como Item (a), a Figura 21 como Item (b) e a Figura 22 como Item (c).

No Item (a), todos os grupos de alunos identificaram as circunferências e os quadrados que compunham a imagem inicial, alguns grupos fizeram desenho para representar tal situação, conforme a Figura 41. No entanto, no momento de refletir sobre a isometria que poderia ser aplicada à figura básica para construir a coleção de figuras iguais, obteve-se diferentes soluções. Os grupos AZUL e LARANJA têm relatos que apontam para a utilização de translação, como podemos observar no registro do grupo AZUL "*Botando vários do mesmo em sequência, um encostado com o outro*".

Figura 41: Respostas referentes ao Item (a) do grupo AZUL

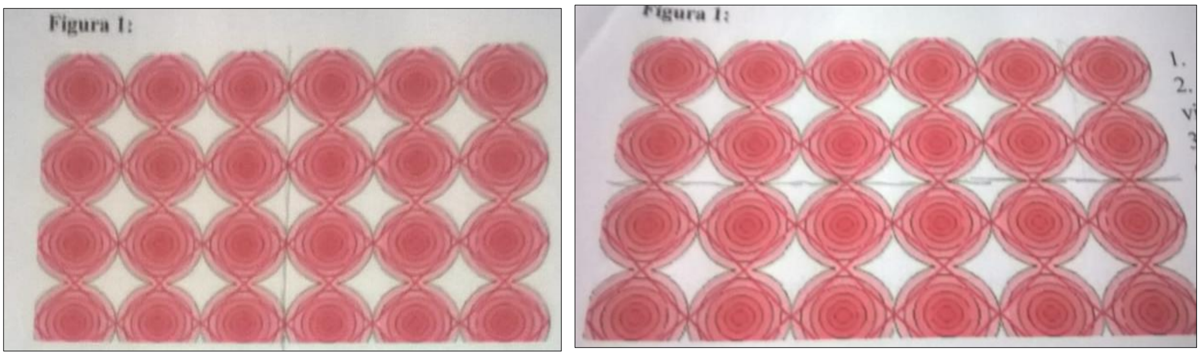


Fonte: Resposta do Grupo AZUL

Os grupos VERMELHO e VERDE apontam a reflexão a partir de uma reta perpendicular, que divide a imagem ao meio, como observa-se no registro do grupo VERDE "*Se espelhando na reta*", tais como na Figura 42(a). Os grupos identificaram diferentes possibilidades para as retas de reflexão, uma na vertical e outra na horizontal, conforme a Figura 42(b).

Figura 42: Respostas referentes ao Item (a) do grupo VERMELHO e VERDE

(a) (b)

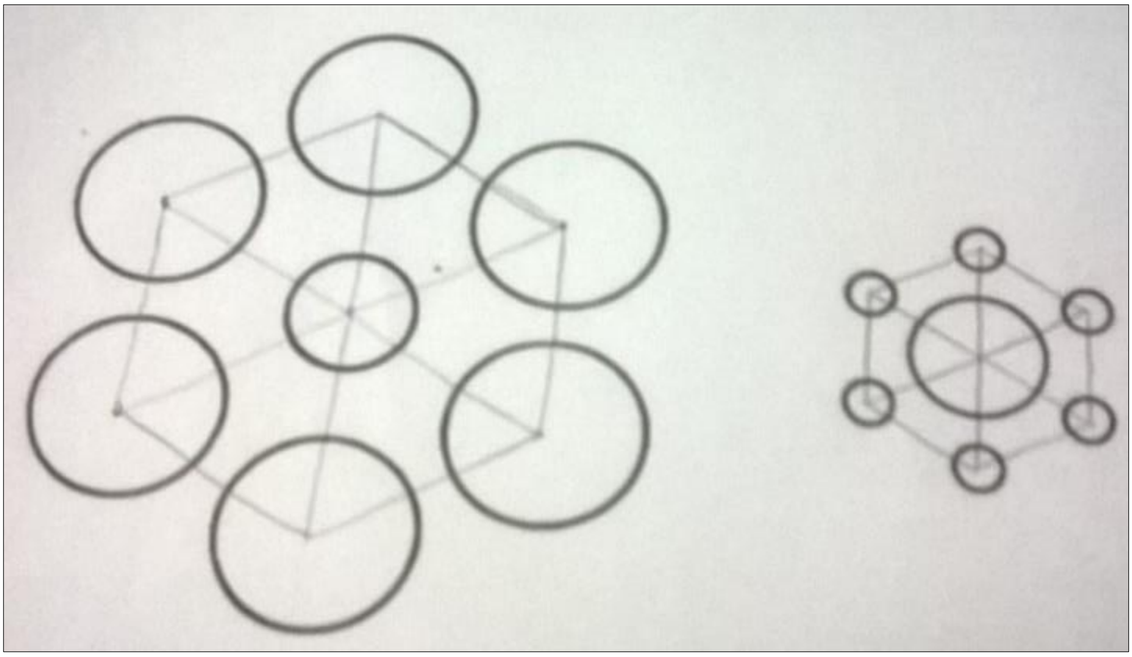


Fonte: (a) Resposta do Grupo VERDE; (b) Resposta do Grupo VERMELHO.

Os grupos ROSA, ROXO, CINZA, BRANCO e PRETO apresentaram respostas com ideias diferentes, como: "*conjunto de círculos*" para representar a imagem final, e "*círculo, vetor, reta, espelhado*", identificando as retas da imagem como reta de reflexão.

No Item (b), os objetos geométricos identificados na figura pelos alunos foram circunferências e hexágonos, que são determinados ao interligar-se os centros das circunferências externas por segmentos de reta, como mostra a Figura 43. Quanto à isometria, quatro grupos identificaram o movimento "rotatório" (grupos AZUL e LARANJA) e "circular" (grupos ROXO e CINZA). Os grupos VERMELHO, VERDE, ROSA, BRANCO e PRETO apresentaram outras ideias, como “*distanciamento e a aproximação*” das circunferências externas com a central.

Figura 43: Desenho do hexágono grupo VERMELHO

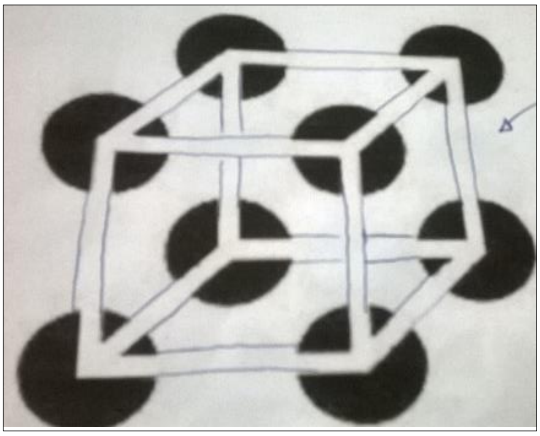


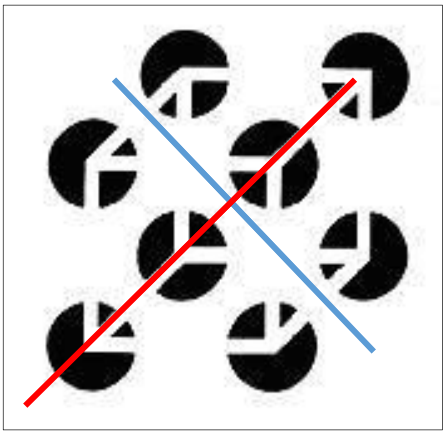
Fonte: Respostas dos alunos do grupo VERMELHO.

No Item (c), todos os grupos identificaram os círculos e o cubo como objetos geométricos presentes na imagem. Alguns grupos (AZUL, VERDE, LARANJA, CINZA, BRANCO e PRETO) sentiram a necessidade de desenhar o cubo para evidenciá-lo, conforme Figura 44(a). Para a identificação da isometria, todos os grupos apontaram a reflexão, mas, novamente, houveram distintas respostas na escolha da reta de simetria. O grupo VERMELHO identificou a reflexão, utilizando como eixo de simetria a diagonal visualizada na Figura 45(b), como vermelha. Já os grupos AZUL e LARANJA encontraram ambas as retas de reflexão, azul e vermelha. Por outro lado, os grupos VERDE, ROSA, ROXO, BRANCO, PRETO e CINZA apresentaram a reta de reflexão como sendo a diagonal vermelha. As retas de reflexão destacadas anteriormente podem ser visualizadas na Figura 44(b), de forma que a autora utilizou o recurso para a explicação e análise das respostas coletadas no registro escrito dos estudantes.

Figura 44: (a) Desenho do Cubo; (b) Retas de reflexão

(a) (b)





Fonte: Respostas dos alunos e construção da autora sobre a resposta dos alunos quanto às retas de reflexão.

Ao analisar as respostas da atividade 5, observa-se compreensão da isometria reflexão, compreensão em processo de construção da rotação e ainda pouca compreensão da translação. Essas ideias matemáticas ainda não estão apoiadas em propriedades e definições formais, mas no reconhecimento (ou não) das transformações nas imagens de ilusão de óptica trabalhadas. Acredita-se que a reflexão é a isometria mais reconhecida pelos alunos pelo fato de utilizarem e vivenciarem mais a ideia de espelhamento no seu cotidiano; as ideias de ângulo e centro de rotação, assim como de vetor, não costumam ser rotineiras no dia-a-dia dos alunos.

A **atividade 6** teve como objetivo a apresentação formal das definições das isometrias, até então conhecidas e nomeadas pelos alunos como movimentações de deslizamento, espelhamento e circular/rotatório.

No decorrer da apresentação, os alunos, juntamente com a pesquisadora, foram estabelecendo relações entre a linguagem coloquial e a linguagem formal:

- *No espelhamento temos a reflexão em torno de uma reta;*
- *Na circular temos a rotação com centro e ângulo de rotação;*
- *Na movimentação temos a translação com o vetor;*

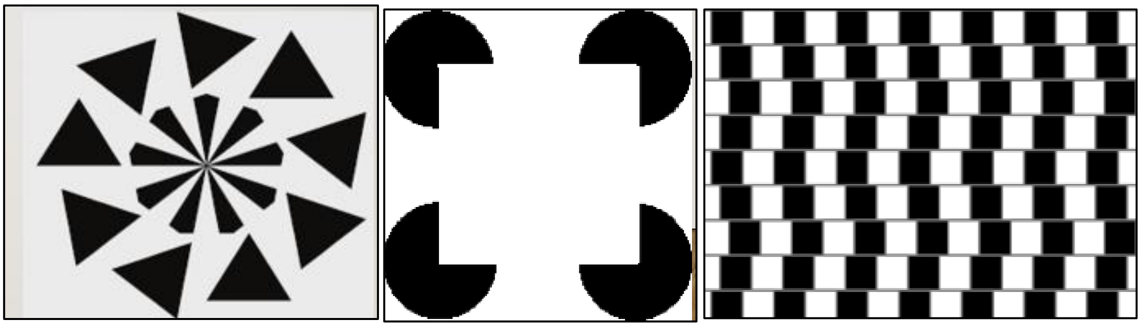
A relação entre os conceitos coloquiais e formais foi registrada a partir das construções e atividades realizadas anteriormente, por meio da investigação e da exploração no ambiente de geometria dinâmica.

A **atividade 7** teve como objetivo a construção de uma réplica no GeoGebra, podendo escolher uma das imagens de ilusão de óptica apresentadas na Figura 21, tendo o cuidado para que as propriedades da construção se mantivessem ao ser movimentada, ressaltando a importância do arrastar para a identificação e utilização das propriedades necessárias na réplica da imagem de ilusão de óptica, destacando assim as modalidades de Arzarello (2002) sem rumo, guiado e teste.

A imagem de ilusão escolhida pelos grupos para a construção da réplica foi diversificada inicialmente, das quais os grupos escolheram três imagens, apresentadas na Figura 45.

Figura 45: Imagens escolhidas inicialmente

(a) (b) (c)



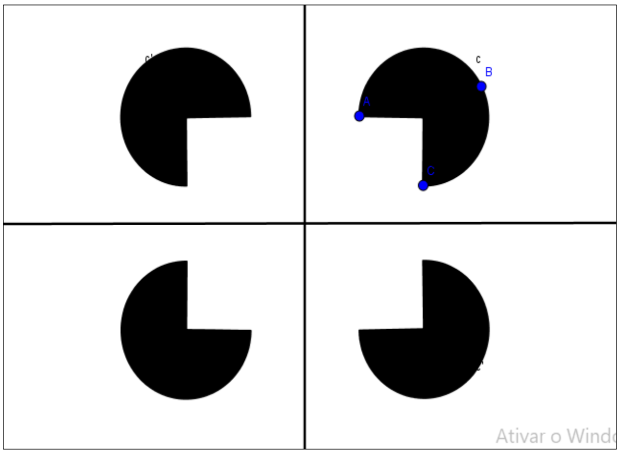
Fonte: (a) Escolha dos grupos VERMELHO, VERDE, BRANCO e PRETO; (b) Escolha dos grupos AZUL, ROXO, LARANJA e CINZA; (c) Escolha dos grupos ROSA e AMARELO.

No entanto, quando um dos grupos que escolheu a imagem (b) finalizou sua construção e comentou que era "fácil fazer" utilizando a reflexão, os demais grupos acabaram abandonando suas construções iniciais e escolhendo a mesma imagem. Porém, destacamos que as construções foram feitas de formas distintas.

Os grupos AZUL, VERDE e LARANJA construíram suas réplicas criando setores circulares e refletindo-os horizontalmente e verticalmente, segundo retas perpendiculares e paralelas aos eixos coordenados, como mostra a Figura 46. Além disso, percebeu-se que os alunos estavam desenvolvendo a réplica a partir de uma exploração de ferramentas que dessem suporte às propriedades identificadas, arrastando sem rumo e em teste.

Estes grupos fizeram suas construções utilizando os mesmos recursos, pelo fato de estarem um perto do outro na sala de aula, logo acabavam dialogando e montando o mesmo arquivo. No entanto, a construção apresenta problema: o ângulo do setor circular não é fixo, ou seja, altera ao ser movimentado. Com isso, percebe-se que os alunos ainda se mostram pouco apropriados ao papel dinâmico na realização de construções, conseguindo apenas visualizar a figura estaticamente, pois para estes grupos o ângulo estava estático.

Figura 46: Construção dos grupos AZUL, VERDE e LARANJA

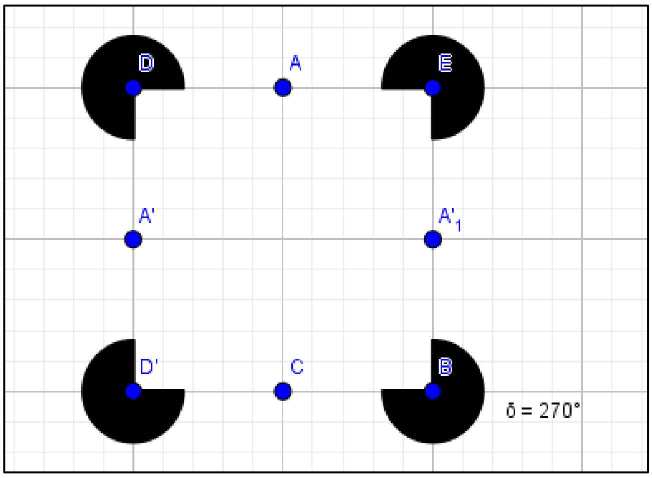


Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

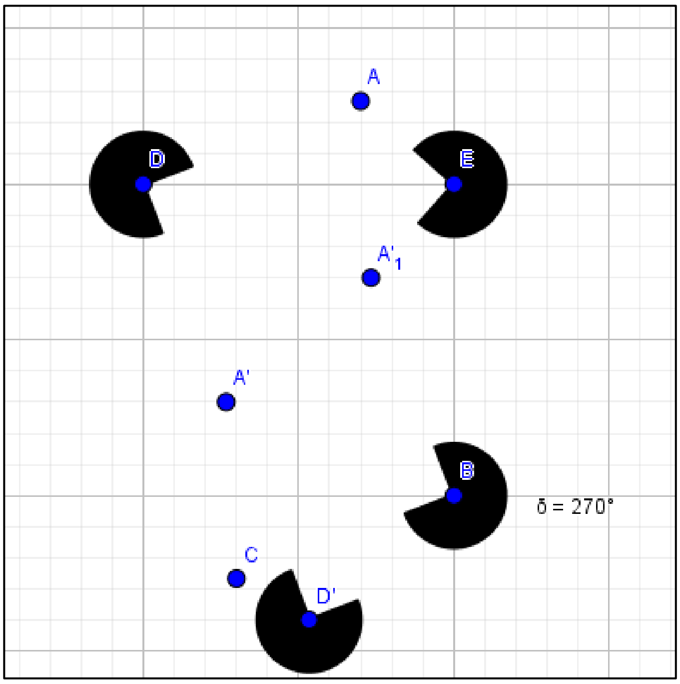
Por outro lado, os grupos VERMELHO, ROXO, BRANCO, PRETO e CINZA construíram a réplica utilizando setores circulares de ângulos de 270º refletidos pelos pontos indicados como pontos médios entre os vértices do suposto quadrado, utilizando o arrastar sem ruma para construir as variáveis identificadas da imagem. No entanto, ao movimentar os pontos iniciais, a imagem se deforma, conforme Figura 47(b). Isto ocorreu pelo fato de que nesta construção os alunos exploraram a reflexão em torno de um ponto gerando assim um equívoco, pois cada ponto ficou isolado, logo ao movimentar os pontos cada setor se movimenta de forma diferenciada. Porém os alunos não perceberam seu erro, pois não testaram sua construção com a ação de arrastar.

Figura 47: Construção dos grupos VERMELHO, ROXO, BRANCO, PRETO e CINZA

(a)



(b)

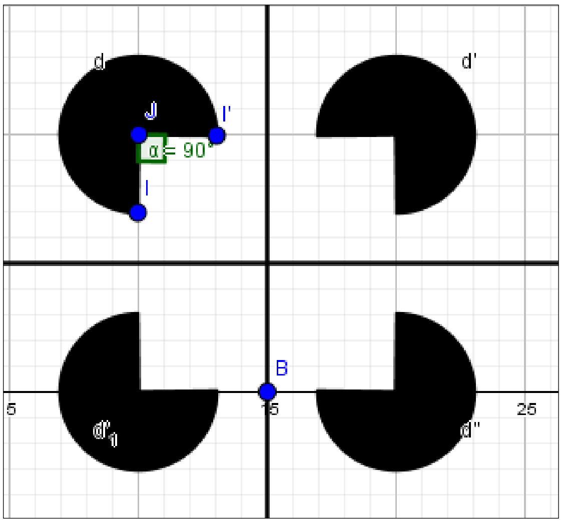


Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

As construções que não se deformaram pelo movimento dos pontos foram elaboradas pelos grupos ROSA e AMARELO, que utilizaram o recurso de ângulo com amplitude fixa e, a partir desse ângulo, construíram o primeiro setor circular. Em seguida, construíram retas paralelas e perpendiculares aos eixos coordenados passando por pontos livres, para utilização como eixo de reflexão do setor circular inicial, conforme Figura 48. Além disso, foi perceptível no decorrer da construção que estes grupos movimentavam (arrastavam) os pontos para testar suas réplicas, identificando as propriedades de cada objeto geométrico, modificando sua construção de acordo com a interação, utilizando-se da ferramenta arrastar para construir e testar suas hipóteses.

No desenvolvimento desta atividade, nenhum dos grupos observou o quadrado sugerido na imagem de ilusão de óptica e, portanto, não utilizaram os pontos médios para a construção das retas de reflexão.

Figura 48: Construção dos grupos ROSA e AMARELO



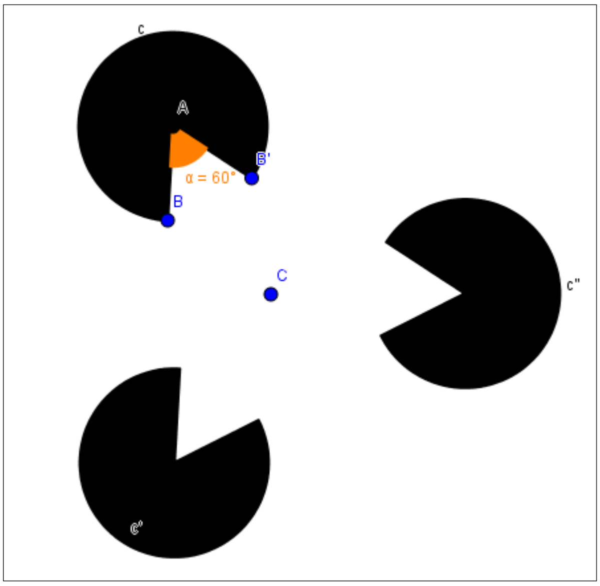
Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

A **atividade 8** teve como objetivo a contrução, no GeoGebra, de uma ilusão de óptica, na qual os alunos deveriam utilizar alguma isometria, bem como atentar aos princípios das ilusões de óptica.

No decorrer desta atividade, a maioria dos grupos se apoiou em réplicas que já haviam sido construídas, utilizando-se das ilusões já apresentadas como inspiração para suas construções, como fizeram os grupos VERMELHO, ROSA, AMARELO, LARANJA, BRANCO e PRETO.

Os grupos ROSA, AMARELO, LARANJA, BRANCO e CINZA reutilizaram a construção já realizada da réplica, criando uma ilusão de óptica, a qual tinha como princípio Gestáltico o acabamento, no qual tende-se a acabar ou completar perceptivamente os objetos que não estão, de fato, completos (FILHO, 2004). Tais grupos construíram setores circulares a partir de um ângulo fixo de 60º e, em seguida, rotacionaram o setor circular, pelo ponto central C, formando um triângulo, como mostra a Figura 49.

Figura 49: Ilusão: Há um triângulo?

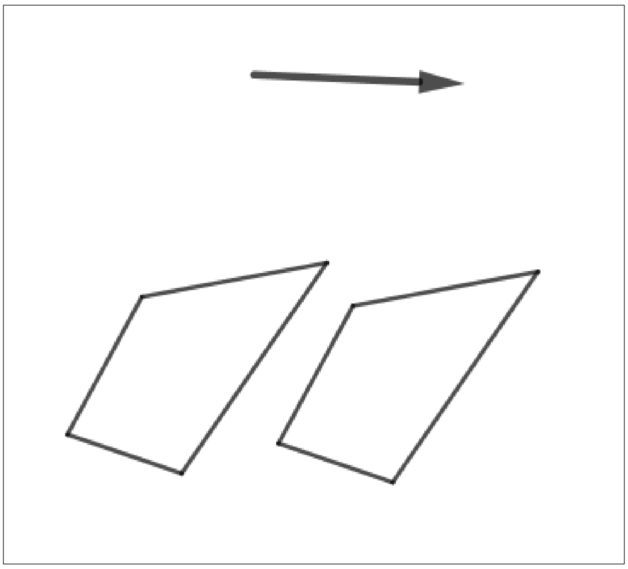


Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

Nesta construção, tem-se o recurso de arrastar sem rumo e arrastar teste sendo usado pelos alunos para investigar e descobrir propriedades impostas pelas ilusões de ópticas desenvolvidas por eles, que são mantidas sob ação do movimento, ou seja, perceberam, a partir de diferentes testes, que deveriam colocar um ângulo fixo, para que a construção não se deformasse, ao ser movimentada, apresentando assim, uma construção na qual nota-se que os estudantes compreenderam o conceito de rotação, pois identificaram o centro de rotação e o seu ângulo, exteriorizando os conceitos aprendidos no decorrer das atividades. O GeoGebra e o recurso de arrastar tornam-se uma ferramenta com potencial para expressar o pensamento matemático, conforme aponta Leung (2008).

O grupo VERMELHO, por outro lado, utilizou a translação para construir sua ilusão de óptica, no qual escolheram construir um quadrilátero qualquer para então transladá-lo por um vetor, posicionando-o de forma a "distorcer" as dimensões da imagem, fazendo com que se perceba que a segunda figura é menor do que a primeira, como mostra a Figura 50. Isso vai ao encontro do princípio Gestáltico, no qual linhas retas podem parecer inclinadas, assim como traços do mesmo tamanho podem dar a impressão de que são diferentes, tudo depende da maneira como essas composições estão organizadas. (FILHO, 2004).

Figura 50: Ilusão do grupo VERMELHO



Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

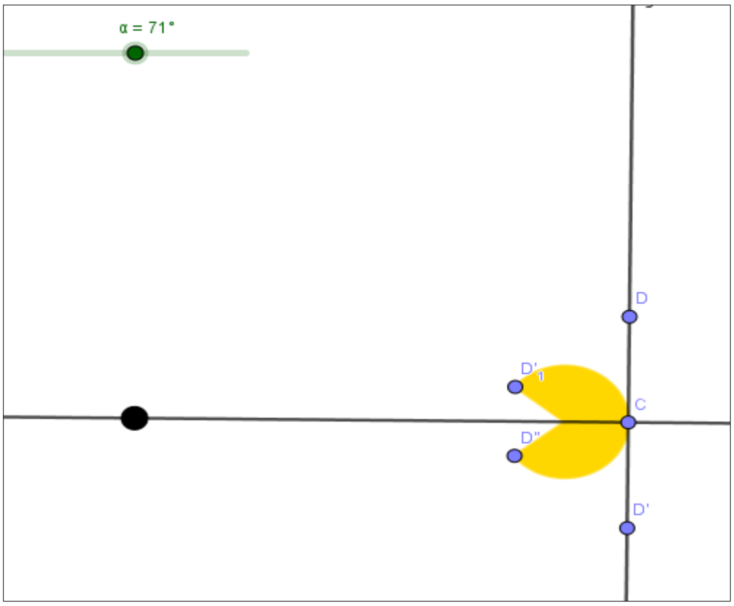
Na construção, os alunos utilizaram a modalidade de arrastar limitado, guiado e alinhado, descritas por Arzarello (2002). Além disso, percebeu-se que os alunos deste grupo buscaram uma forma simplificada para realizar sua construção, de forma a construir polígonos rígidos, a partir de uma ferramenta pouca explorada no experimento. Assim, reconheceram possibilidades do *software* quanto suas ferramentas, bem como a relação das isometrias de modo dinâmico. Percebe-se que os alunos compreenderam o papel do vetor na translação das figuras.

O Grupo AZUL, inicialmente, também pensou em recriar uma das réplicas já construídas anteriormente, desenvolvendo a criação de uma ilusão que utiliza a translação. No entanto, ao longo do desenvolvimento da mesma, o grupo perguntou se poderia realizar uma construção utilizando isometrias, mas que não fosse uma ilusão de óptica. Conversando com o grupo, ficou decidido que terminassem a ilusão e então poderiam desenvolver a construção que queriam. Desta forma, após a construção da ilusão de óptica, os alunos construíram uma réplica do jogo PAC-MAN, utilizando os conceitos de reflexão, rotação e translação. Neste momento, percebeu-se que a tecnologia se tornou um instrumento tanto matemático importante quanto divertido para construção e exteriorização de suas ideias.

O PAC-MAN foi desenvolvido a partir de um setor circular, no qual o ângulo varia de acordo com um controle deslizante, para abrir e fechar a “boca”. Na construção, foram utilizados conceitos de rotação e reflexão. A ideia de translação foi utilizada para fazer o PAC-MAN se deslocar na tela. Nesta etapa, os alunos pediram auxílio para a pesquisadora, definindo assim, coletivamente, como estabelecer a translação para que a animação funcionasse. A Figura 51 (a) e (b) retrata a construção.

Figura 51: PAC-MAN

(a)



(b)

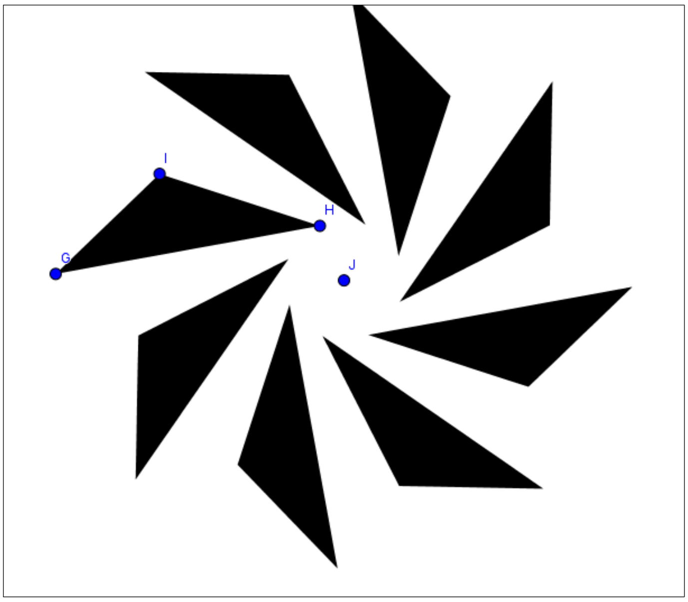
Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

Na construção do jogo, os alunos utilizaram a tecnologia para pensar, testando e descobrindo formas de dinamizar e reproduzir o movimento feito pelo PAC-MAN no jogo. Neste caso, foram utilizadas as modalidades arrastar teste, arrastar vinculado e arrastar guiado. Ainda, foram empregados conceitos matemáticos, principalmente geométricos, de retas e ângulos, além das isometrias desenvolvidas anteriormente.

Os grupos ROXO e CINZA construíram uma ilusão de óptica que utilizava conceito de rotação e o princípio Gestáltico da boa forma ou pregnância das formas que ressalta qualidade que determina a facilidade com que se percebem figuras. A percepção ocorre de forma mais fácil para as boas formas, ou seja, as formas simples, regulares, simétricas e equilibradas (FILHO, 2004).

Os grupos construíram uma sequência de rotações de triângulos, sempre rotacionando o triângulo anterior, com centro de rotação no ponto J e tendo 45º como ângulo de rotação. Os grupos, inicialmente, foram dialogando e testando diversos ângulos, para ver quais os resultados, indo ao encontro da modalidade arrastar teste, Arzarello (2002), até encontrarem o melhor, neste caso o 45º. O grupo ROXO tentou construir um controle deslizante, mas como não conseguiu relacioná-lo muito bem com a rotação, preferiu deixar somente com um único ângulo. A Figura 52 ilustra essa construção, na qual é possível verificar os únicos pontos que podem ser movimentados na ilusão. Nesta construção, percebe-se que os estudantes compreenderam e identificaram o ângulo e o centro de rotação, expondo suas aprendizagens quanto aos conceitos de isometrias.

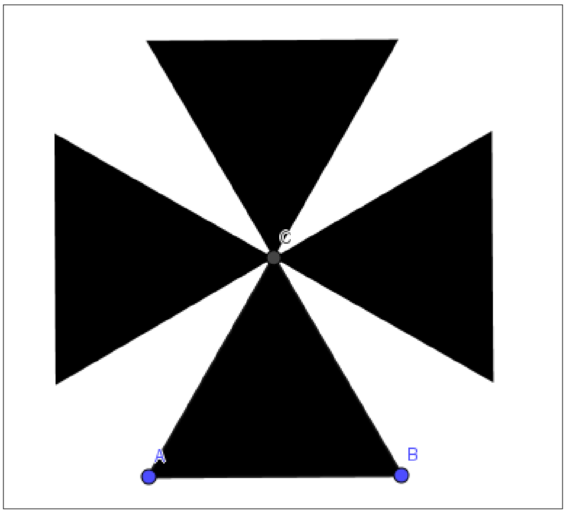
Figura 52: Cata-vento espiral feito pelos grupos ROXO e CINZA



Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

O grupo VERDE foi o único grupo que não conseguiu criar uma ilusão de óptica. Porém, o grupo construiu uma figura que envolve isometria, utilizando o conceito de rotação em sua construção. A imagem desenvolvida foi a construção de um “cata-vento”, criado a partir de um triângulo equilátero, construído com o recurso polígono regular, que foi rotacionado três vezes, utilizando o centro em O (um dos pontos extremos do triângulo equilátero) e 90º como ângulo de rotação, como mostra a Figura 53.

Figura 53: “Cata – vento”



Fonte: Construções dos alunos no GeoGebra.

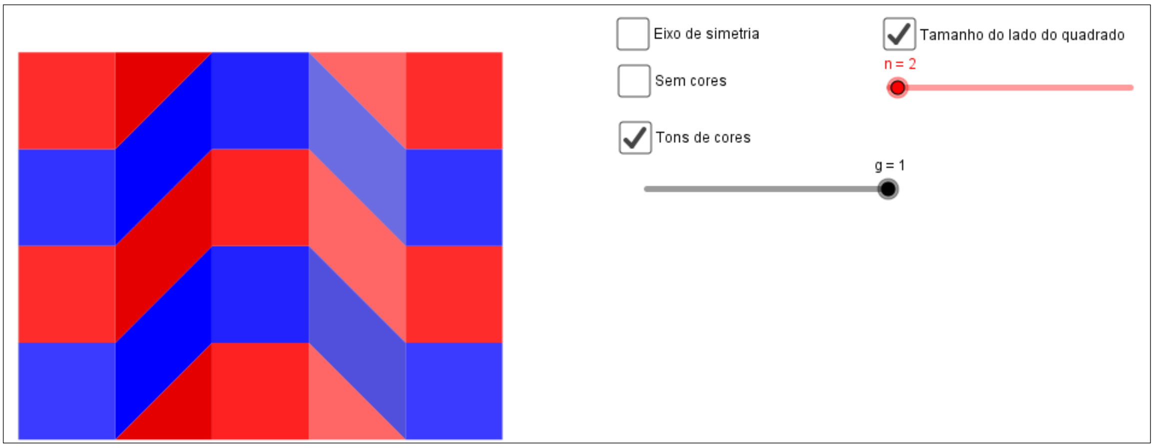
O grupo utilizou de forma simplificada os recursos dinâmicos do GeoGebra, apresentando um cata-vento de forma estática, utilizando apenas algumas ferramentas, como polígono regular, ângulo fixo e rotação em torno de um ponto.. No entanto, reconhece os objetos de acordo com suas propriedades e variações, bem como compreende o giro de rotação e identifica o centro de rotação.

Analisando as produções dos alunos, percebemos que a tecnologia tornou-se um instrumento matemático importante para representar ideias e ampliar o pensamento. Além disso, observamos que os alunos reconheceram os três tipos de isometrias: reflexão, rotação e translação.

A **atividade 9** tinha como objetivo ilustrar que nem todas as construções realizadas se tornam uma ilusão de óptica, apresentando as três imagens de ilusão de óptica ilustradas na Figura 26, que perdem seu efeito de ilusão de óptica em certas condições.

No decorrer da apresentação, os alunos, juntamente com a pesquisadora, foram estabelecendo relações entre as isometrias e os aspectos geométricos que resultam na perda da ilusão. A primeira imagem discutida foi a Concreção 9216 apresentada pela réplica na Figura 54. A obra de arte foi desenvolvida pelo artista plástico Luiz Sacilotto em 1992, utilizando tinta têmpera acrílica em uma tela de 120 x 150 cm. Neste trabalho, Sacilotto consegue criar uma ilusão de óptica gerando na superfície plana uma ilusão de profundidade por meio da mudança de cores, variando-as em claras e escuras.

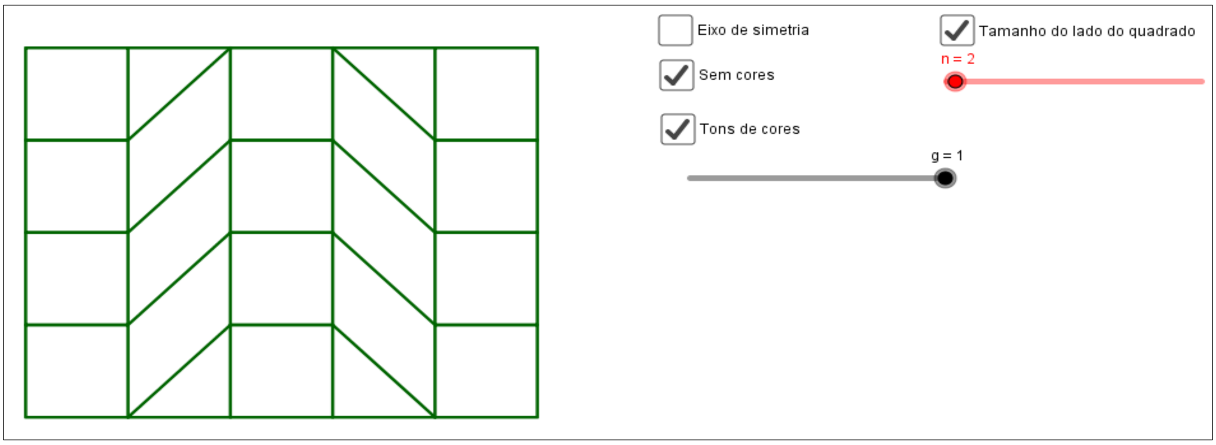
Figura 54: Réplica da Concreção 9216



Fonte: Construção da autora no GeoGebra, disponível em
https://www.geogebra.org/m/mbbddjm5#material/qQl9G6dR.

A ilusão da obra foi identificada facilmente pelos alunos, que logo indicaram a cor como forma de perda de ilusão. Desta forma, a pesquisadora apresentou de modo dinâmico o que os alunos estavam indicando, bem como identificaram a reflexão e indicaram os elementos geométricos da imagem (quadrados e paralelogramos), o que ficou ainda mais visível quando a pesquisadora apresentou a Figura 55, assim nesta réplica o ambiente dinâmico proporcionou a visualização da mudança de cores, bem como seu desaparecimento.

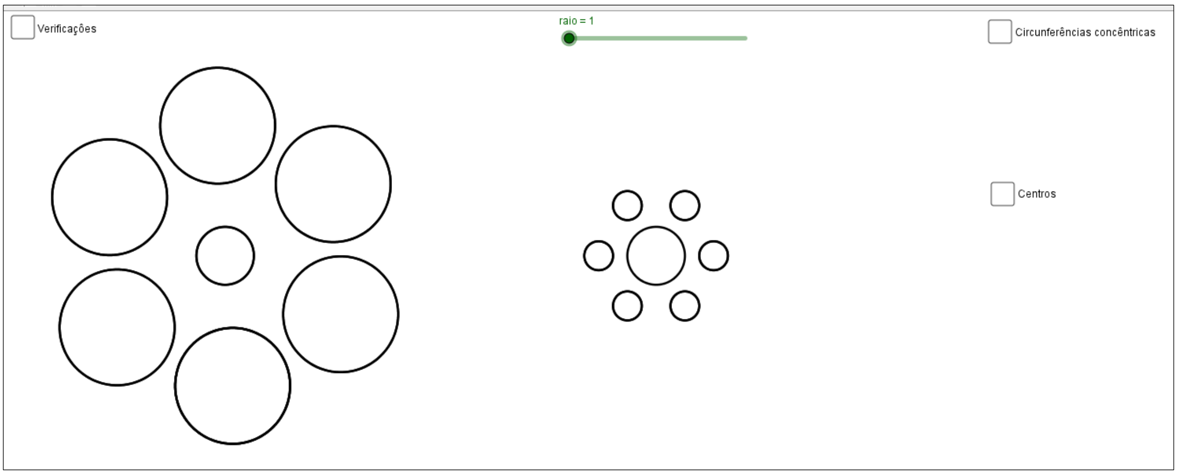
Figura 55: Réplica sem as cores



Fonte: Construção da autora no GeoGebra, disponível em
https://www.geogebra.org/m/mbbddjm5#material/qQl9G6dR.

A segunda imagem de ilusão de óptica foi a ilusão de Ebbinghaus, também conhecida como os círculos titchener, a qual provoca a pergunta “Os círculos centrais são congruentes?”. A ilusão de óptica é a percepção de tamanho relativo, como mostra a Figura 56. Além disso, segundo Rose (2002), ela é considerada tradicionalmente, como sendo uma ilusão cognitiva, pelo fato desta imagem ter sido vista pela primeira vez em um livro de psicologia experimental, a qual fora usada em experimentos de testes de inteligência.

Figura 56: Réplica da ilusão de Ebbinghaus



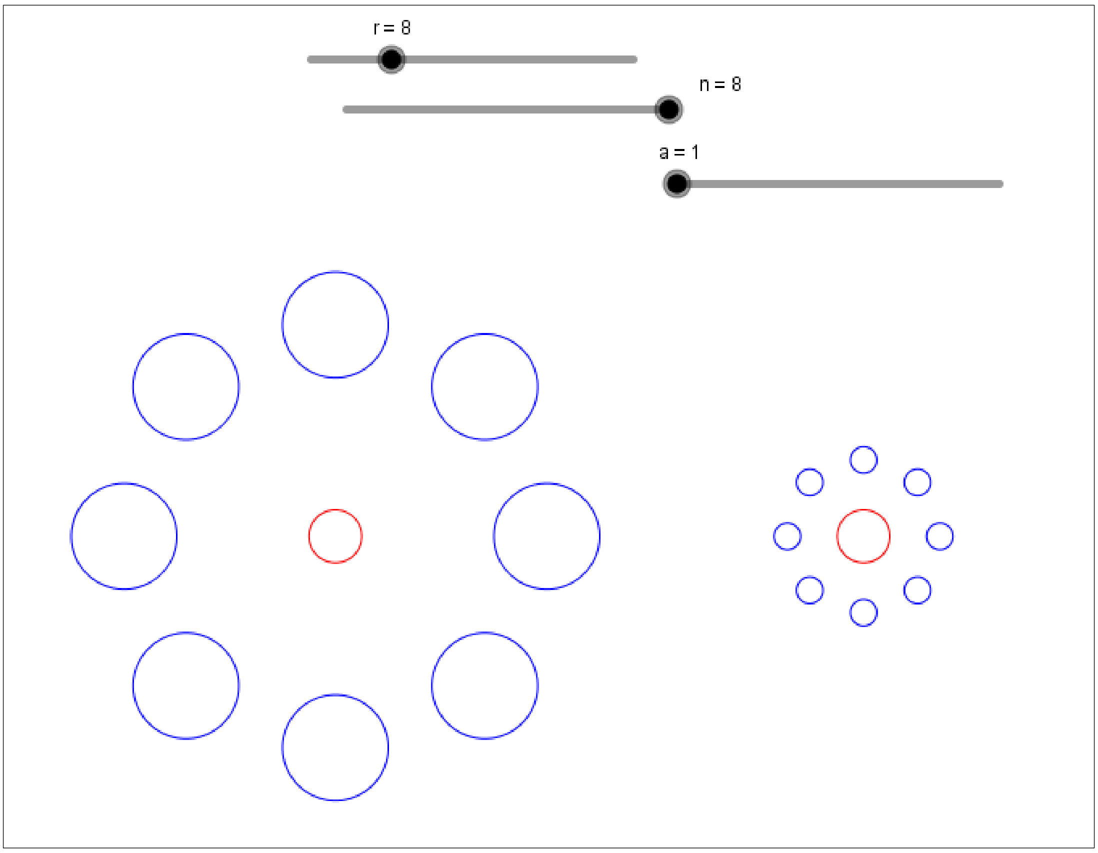
Fonte: Construção da autora no GeoGebra, disponível em https://www.geogebra.org/m/mbbddjm5#material/eapt9Ed2.

Neste momento, foram apresentados os centros das circunferências, já identificados anteriormente pelos alunos, bem como o hexágono. A pesquisadora exibiu a verificação da ilusão, de modo que comprovassem suas conjecturas quanto à ilusão apresentada. Consequentemente, foram identificando os elementos, tanto os que compõem a imagem, bem como os ocultos, tais como as circunferências concêntricas, os centros e hexágonos.

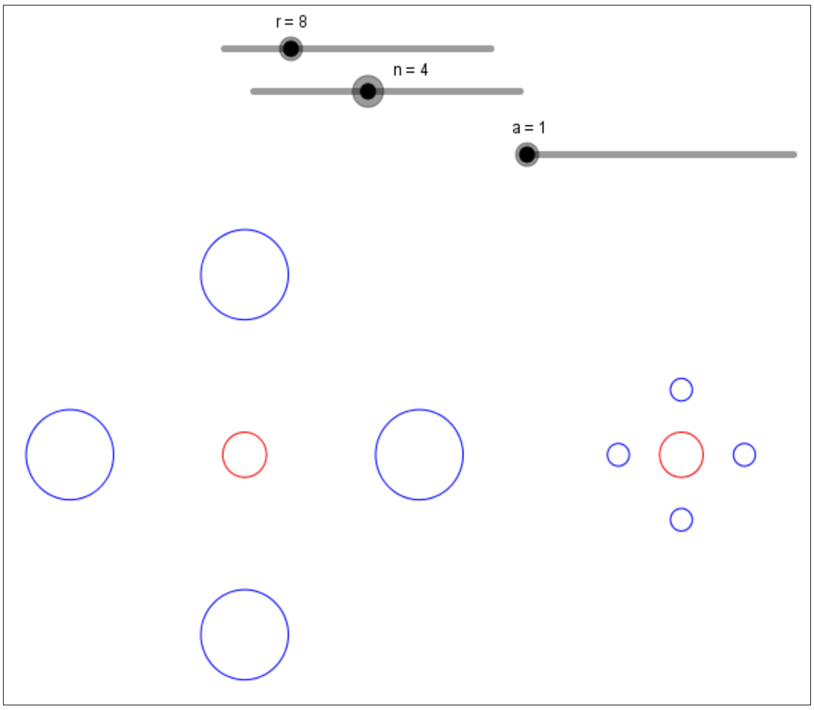
Desta forma, prosseguiu-se a apresentação, indagando os alunos quanto ao que induz a ilusão, resultando na quantidade de circunferências. Assim surgiu o questionamento na turma: *A ilusão se perde pela quantidade das circunferências?* A partir disto, a pesquisadora exibiu o arquivo da réplica, conforme a Figura 57 (a) e (b), movimentando a quantidade de circunferências, chegando à conclusão de que quanto menos circunferências, menos identificamos a ilusão.

Figura 57: Quantidade de Circunferências

(a)



(b)



Fonte: Construção da autora no GeoGebra, disponível em https://www.geogebra.org/m/mbbddjm5#material/w5pHsRzo.

Por fim, foi apresentada a imagem de ilusão de óptica “Café Wall”, que foi primeiramente descrita em um artigo dos pesquisadores Gregory e Heard (1979), intitulada assim por fazer parte de uma fachada de um café na Inglaterra. Eles observaram este efeito curioso nas linhas da parede de um café, conforme mostra a Figura 58 (a).

Esta ilusão de óptica provoca a pergunta “As retas horizontais são paralelas?”, pois as linhas horizontais paralelas pareçam levemente “tortas”. É essencial para a ilusão que os “tijolos” estejam envoltos por uma camada de “cimento”, representados pelos quadrados pretos e pelas linhas cinzas, conforme a Figura 58 (b).

Figura 58: Café Wall

(a) (b)

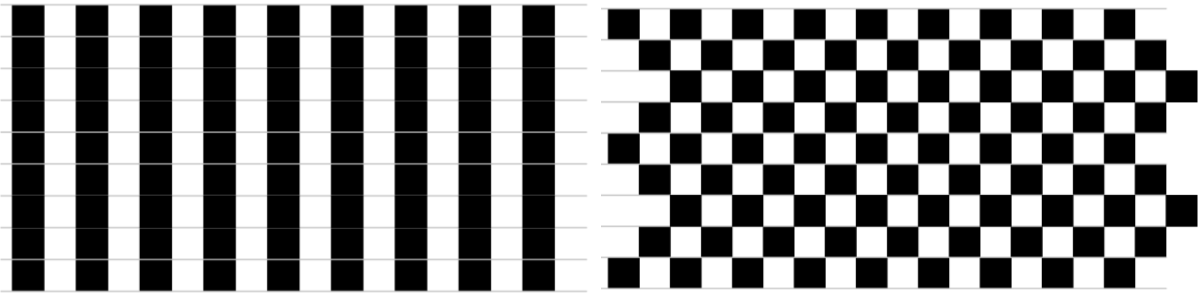
Fonte: (a) Gregory e Heard, 1979; (b) http://www.richardgregory.org/papers/cafe_wall/cafe-wall.pdf.

Essa imagem foi explorada mais rapidamente, pois os alunos já haviam explorado a mesma no decorrer das atividades, no qual já haviam identificado que as linhas eram paralelas a partir da medição com régua. No entanto, foram indagados quanto à perda da ilusão, respondendo que seria decorrente da posição dos quadrados pretos e brancos.

Desta forma, a pesquisadora apresentou o arquivo dinâmico, no qual era possível movimentar os quadrados para concluir suas ideias e conjecturas. Ao movimentar os quadrados, os alunos identificaram os dois momentos em que a ilusão se perde, conforme a Figura 59 (a) e (b). Nesse momento, a ação de arrastar tornou-se uma *ferramentoparapensamentos*, permitindo aos alunos a observação do que acontece e a identificação das variáveis e propriedades presentes.

Figura 59: Observação na construção: (a) com deslocamento igual 0 ou 1; (b) com deslocamento igual a 0,5.

(a) (b)



Fonte: Construção feita pela autora no GeoGebra, disponível em https://www.geogebra.org/m/mbbddjm5#material/KQkgBgir.

Infelizmente, não foi possível explorar com mais profundidade o motivo da ilusão se perder nestes dois pontos específicos, pois a aula finalizou e não havia mais tempo.

Em suma, pôde-se constatar que os alunos, por meio da interação com a tecnologia reconheceram as isometrias e os elementos geométricos que as definem, identificando-as nas imagens de ilusão de óptica, bem como nas demais construções e situações propostas nesse experimento.

No capítulo a seguir, faz-se uma síntese reflexiva das aprendizagens e resultados apresentados pela pesquisa, retomando a pergunta norteadora.

6 REFLEXÕES FINAIS

Pautando-se nos aspectos já mencionados e observados no desenvolvimento desta pesquisa, e que foram relatados no capítulo de descrição e análise das atividades, pode-se concluir que, a partir de diferentes momentos, sejam eles nas explorações, análises e observações das imagens dinâmicas e/ou na elaboração das réplicas das imagens selecionadas envolvendo a ilusão de óptica, houve a apropriação dos conceitos de isometrias.

Considera-se que os resultados obtidos nessa pesquisa reforçam o papel tecnologias cognitivas quanto às atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjeturas; e testam propriedades matemáticas. A partir de manipulação concreta de pontos na tela do computador, que colocam a construção em movimento, os alunos observam, conjecturam e testam, para elaborar conceitos e ideias. Em uma etapa seguinte é possível passar para a manipulação abstrata dos elementos geométricos, atingindo níveis mentais superiores.

Nessa análise da experiência, observa-se a ferramenta tecnológica propiciando uma abordagem experimental da matemática. A partir de experimentos dinâmicos, proporcionados pela ação de arrastar, regularidades vão aparecendo, conduzindo à formação do pensamento matemático. Tais considerações apontam para as respostas da questão central da pesquisa: **Como o recurso de arrastar em ambiente de geometria dinâmica contribui para a construção de conceitos de isometrias por meio do trabalho com imagens de ilusão de óptica?**

Portanto, os resultados obtidos nestas atividades apontam para um avanço satisfatório dos alunos na compreensão das isometrias, pois observando os diálogos, respostas e construções, foi possível identificar uma base conceitual das isometrias apresentadas na forma de linguagem coloquial.

Ao analisar o processo de construção das isometrias, por meio do *software* GeoGebra, percebe-se que os alunos mobilizaram o pensamento matemático e o arrastar durante o processo de construção das réplicas, bem como na manipulação de construções prontas, identificando as variáveis e propriedades das isometrias essenciais na imagem.

Quanto às contribuições do recurso de arrastar do GeoGebra (ambiente de geometria dinâmica) para a compreensão dos conceitos de isometria, notou-se que, a partir da manipulação e exploração do arrastar, os alunos identificaram os elementos que estavam variando, proporcionando a apropriação das isometrias. Além disso, o recurso de arrastar possibilitou aos alunos testar suas conjecturas e ideias matemáticas, desenvolvendo o pensamento matemático.

A utilização do software GeoGebra nesta sequência de atividades foi importante no processo de aprendizagem dos alunos, ao proporcionar o pensar matematicamente diante das atividades propostas sendo, portanto, uma *ferramentaparapensamentos* (SHAFFER e CLINTON, 2006). Ao ver a compreensão do objeto de estudo por parte dos alunos, constatou-se o quanto foi gratificante desenvolver esta atividade e ver a satisfação dos alunos ao compreenderem as isometrias sob o arrastar dinâmico no ambiente do GeoGebra. Ver o envolvimento dos alunos nas atividades, desempenhando-as com esmero, faz acreditar, cada vez mais, que os alunos precisam de atividades envolvendo a tecnologia que estimulem o pensamento matemático acerca do objeto de estudo.

No decorrer das investigações e explorações sobre as isometrias e suas respectivas propriedades geométricas, notou-se que os discentes se sentiram, inicialmente, receosos quanto à utilização do ambiente de geometria dinâmica, tendo que interagir somente com o recurso para resolver as atividades, sem ter respostas imediatas ou resolvidas mecanicamente.

Na elaboração das construções, percebeu-se dificuldade em identificar as variáveis, utilizando em grande parte a ação do arrastar para explorar sem rumo e, após, arrastar para testar suas conjecturas, tornando assim a ação de arrastar uma *ferramentoparapensamentos*, permitindo aos alunos a observação do que acontece e a identificação das variáveis e propriedades presentes.

Esta pesquisa, a partir dos estudos teóricos realizados e da experiência implementada, proporcionou momentos de reflexão e análise importantes para a formação da pesquisadora, sobretudo quanto ao entendimento do processo de aprendizagem a partir da utilização do recurso de arrastar em ambientes de geometria dinâmica.

Por outro lado, percebeu-se que muitas dificuldades são enfrentadas para a implementação de práticas com o uso do recurso tecnológico, pois para tal pesquisa tiveram que ser instalados em cada aula os *netbook's,* ocupando parte do tempo disponível. Para solucionar tais dificuldades, alguns estudantes fizeram o *download* do *software* GeoGebra em seus *smartphones*, mostrando a participação ativa dos alunos na pesquisa, criando e articulando formas de solução para os problemas.

Além disso, o trabalho em grupos superou as expectativas, no qual se percebeu a troca de diálogos e formas de arrastar na construção dos conceitos. No entanto, identifica-se que tal sequência de atividades poderia ter sido desenvolvida com mais rapidez por meio da utilização de arquivos e construções *onlines*. Outro aspecto a ser destacado e modificado seria o desenvolvimento mais focado no arrastar, com a ênfase na construção dinâmica, identificando as variáveis para que a réplica não se deformasse.

Sob estas perspectivas, consolida-se de que na educação é preciso ter-se espaços onde o aluno possa criar, articular, construir, conjecturar e validar suas ideias, competências indispensáveis nos tempos atuais.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARZARELLO, F. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. **ZDM**. Torino, vol. 34, 2002.

BACALHAU, F. M. **Isometrias do plano e Simetria**. Universidade de Lisboa, 2012. Dissertação de Mestrado em Matemática para professores.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOGDAN, R; TAYLOR, S (1975). **Introduction to qualitative research methods: a phenomenological approach to the social sciences**. New York. J. Wiley.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc>. Acesso em: 1 mai. 2018.

BROCKE, M. J. **Isometrias e congruência: uma investigação no Ensino Fundamental**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016. Dissertação de Mestrado em Matemática.

CAETANO, P. **Papel assinado:** Luiz Sacilloto. Disponível em: < http://www.papelassinado.com.br/art_rsm.asp?art_cod=53 >. Acesso: 12 nov. 2015.

CERQUEIRA, L. S. **Isometrias no plano: uma proposta de atividades para Educação Básica com uso do geogebra**. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, 2016. Dissertação de Mestrado em Matemática.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Fazendo arte com a matemática**. 1ª. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Tecendo matemática com arte**. 1ª. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

FILHO, J. G. **Gestalt ao objeto:** sistema de leitura visual da forma. 6ª ed. Esculturas Editora. São Paulo, 2004.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. - São Paulo : Atlas, 2008.

GOLDENBERG, P. Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms. In: Education Development Center, 2000. Disponível em: http://www2.edc.org/mcc/PDF/iss_tech.pdf. Acesso: 18 out. 2017.

GULLAR, F. **Etapas da Arte Contemporânea:** do Cubismo a Arte Neoconcreta. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora Revan, 2006.

GRAVINA, M. A.; CONTIERO, L. O. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? **Revista Novas Tecnologias na Educação - RENOTE**, Porto Alegre: UFRGS, v.9, n.1, 2011.

GREGORY, R.; HEARD, P. **Border locking and the Café Wall illusion**. Journal Perception, v. 8, Bristol: Thomson Reuters, 1979. p. 365-380.

LAPASSADE, G. (2001). **L'Observation participante**. Revista Europeia de Etnografia de Educação,1, 9-26.

LEUNG, A. Dragging in a Dynamic Geometry Environment Through the Lens of Variation. **Springer Science+Business Media B.V**. 2 July 2008.

LIMA, E. L. **Isometrias**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2007.

MEDEIROS, M. F. **Geometria Dinâmica no ensino de transformações no plano – uma experiência com professores de Educação Básica**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012. Dissertação de Mestrado em Matemática.

PAPERT, S. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

PEA, R. (1987). **Cognitive technologies for mathematics education**. In A.H. Schoenfeld (Ed.),Cognitive Science and Mathematics Education (pp. 89–122). Hillsdale: Lawrence Erlbaum. Disponível em: http://web.stanford.edu/~roypea/RoyPDF%20folder/A41_Pea_87b.pdf. Acesso: 18 out. 2017.

PIMENTEL, L. F. G. **Uma sequência didática para o ensino de transformações geométricas com o geogebra**. Universidade Federal de São Carlos, 2016. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática.

RESTREPO, A. M. **Genese instrumentale du deplacement en geometrie dynamique chez des eleves de 6eme**. Mathematics. Universit_e Joseph-Fourier- Grenoble I, 2008. French.

ROSE, D.; BRESSAN, P. **Going round in circles: shape effects in the Ebbinghaus illusion.** Department of Psychology. University of Surrey, Surrey, 2001.

SHAFFER, D. W., CLINTON, K. **Toolforthoughts: Reexamining Thinking in the Digital Age.** MIND, CULTURE AND ACTIVITY. Regents of the University of California on behalf of the Laboratory of Comparative Hum"n Cognition, 2006. Disponível em: http://lchc.ucsd.edu/mca/Journal/pdfs/13-4-williamson.pdf . Acesso: 18 out. 2017.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva.** Trad. Maria Regina Osório. Porto Alegre: ArtMed, 2000. Cap. 4, p. 109-148.

TAHAN, M. **As maravilhas da matemática**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Bloch Editores 1973.

APÊNDICE A: Carta de apresentação para a escola e professora titular

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, 05 de maio de 2018.

Prezada Professora

Diretora da Escola Estadual de Ensino Médio Gomes Freire de Andrade

A professora Marlei Tais Dickel, atualmente é mestranda regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMat) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do PPGEMat, a mestranda está desenvolvendo uma dissertação que necessite a prática em sala de aula, com a utilização de notas de campo, áudios e vídeos mediante autorização de termos de consentimentos. Tendo ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para a pesquisa.

Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisadores e professores reiteramos nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte contato: de telefone (51) XXXX-XXXX ou e-mail marcia.notare@ufrgs.br da coordenada/orientada por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

Márcia Notare

Professora do PPGEMat

CARTA DE APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Cara Direção e Professor (a),

Vimos, por meio desta, apresentar a pesquisa intitulada **Transformações Geométricas e Ilusão De Óptica: Do Papel ao Geogebra**, desenvolvida pela pesquisadora **Marlei Tais Dickel**. A pesquisa é coordenada/orientada por **Márcia Rodrigues Notare Meneghetti**, podendo ser contatada a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) 3308-6198 ou e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Os objetivos do projeto de pesquisa são estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, buscam responder ao problema de pesquisa: Como os alunos constroem conceitos matemáticos relacionados às isometrias por meio do trabalho com imagens de ilusão de óptica em ambiente de geometria dinâmica?

A ideia central do projeto é desenvolver conceitos geométricos inerentes às transformações geométricas de rotação, translação e reflexão a partir do trabalho com imagens de ilusão de óptica no software GeoGebra.

Os usos das informações oferecidas pelos (as) alunos (as) serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito, bem como pela participação em aula, em que ele (ela) será observado (a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Para tanto será necessária a aplicação de 10 horas/aula sobre o tema. Para maiores informações, segue em anexo o projeto de pesquisa a ser desenvolvido.

Em qualquer dúvida contatar a pesquisadora responsável no endereço Linha Frank - Interior – Westfália sob o telefone (51) XXXXXXXX e pelo e-mail ninadickel@hotmail.com.

Porto Alegre, 5 de março de 2018.

Assinatura da pesquisadora:

APÊNDICE B: Termo de consentimento informado

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo (a) aluno (a) ____, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **Transformações Geométricas e Ilusão de Óptica: do Papel ao GeoGebra**, desenvolvida pela pesquisadora **Marlei Tais Dickel**. Fui informado (a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por **Márcia Rodrigues Notare Meneghetti**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do telefone (51) XXXX-XXXX ou e-mail marcia.notare@ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do (a) aluno (a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para a pesquisa. Fui informado (a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, buscam responder ao problema de pesquisa: Como os alunos constroem conceitos matemáticos relacionados às isometrias por meio do trabalho com imagens de ilusão de óptica em ambiente de geometria dinâmica?

A ideia central do projeto é desenvolver conceitos geométricos inerentes às transformações geométricas de rotação, translação e reflexão a partir do trabalho com imagens de ilusão de óptica no software GeoGebra.

Fui também esclarecido (a) de que os usos das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do (a) aluno (a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito, bem como pela participação em aula, em que ele (ela) será observado (a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do (a) aluno (a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do (a) aluno (a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar a pesquisadora responsável no endereço Linha Frank - Interior – Westfália sob o telefone (51) XXXXXXXX e pelo e-mail ninadickel@hotmail.com.

Fui ainda informado (a) de que o (a) aluno (a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

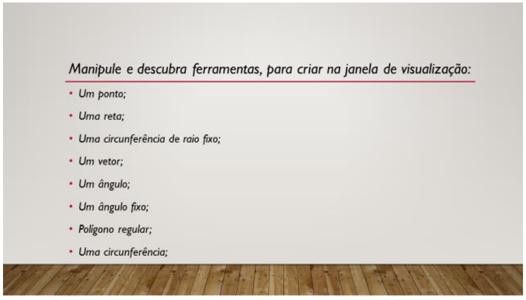
Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

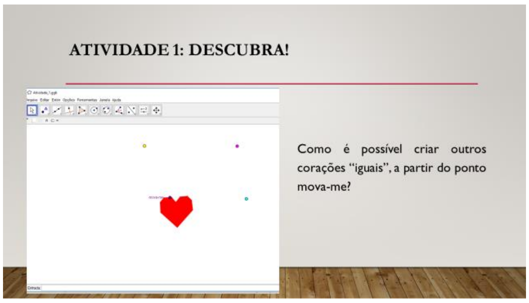
Assinatura do Responsável:

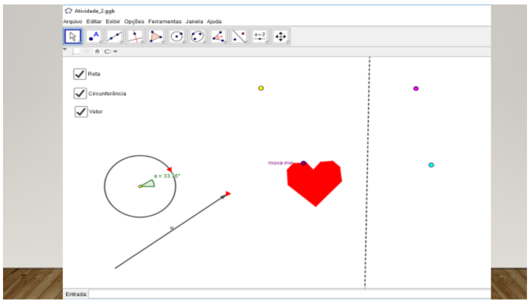
Assinatura da pesquisadora:

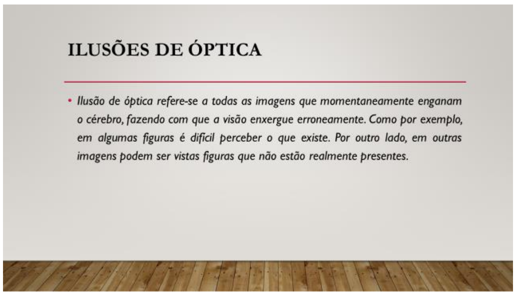
Assinatura do Orientador da pesquisa:

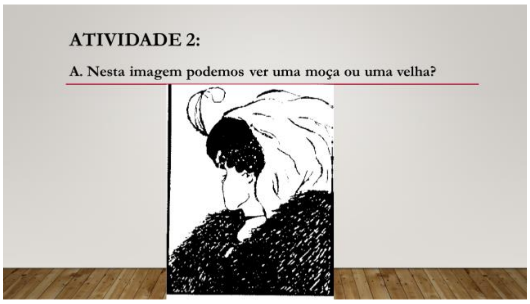
APÊNDICE C: Slides utilizados no decorrer da coleta de dados

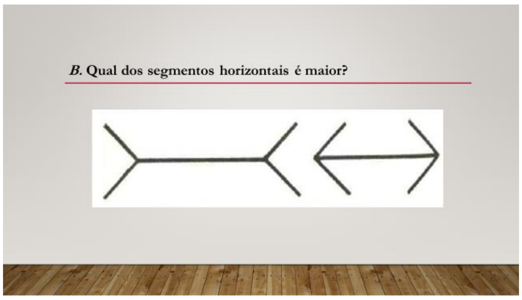


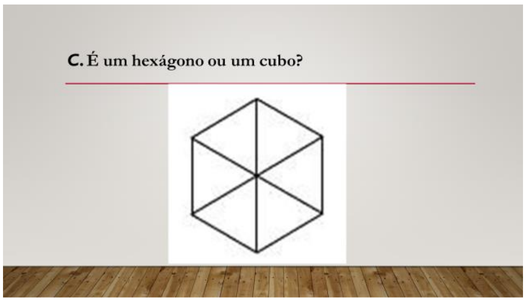


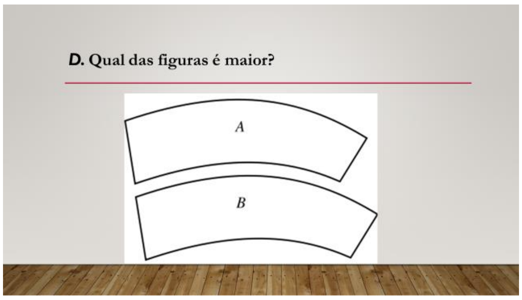


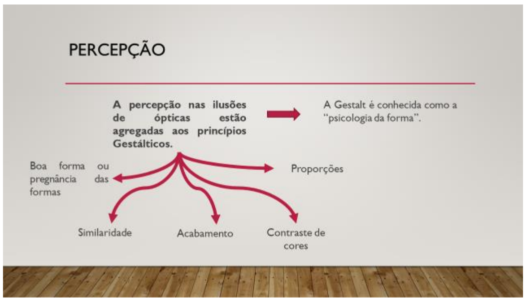


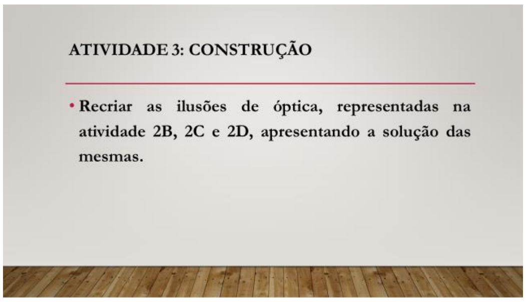


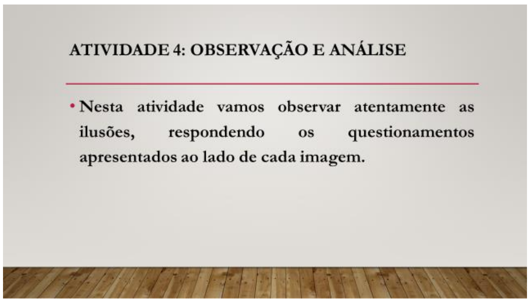




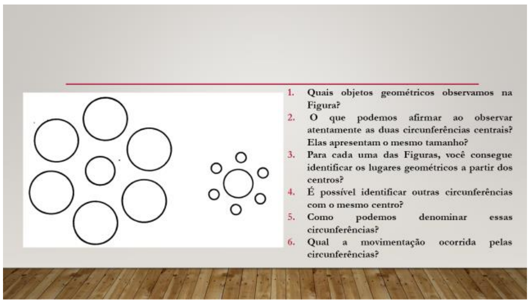


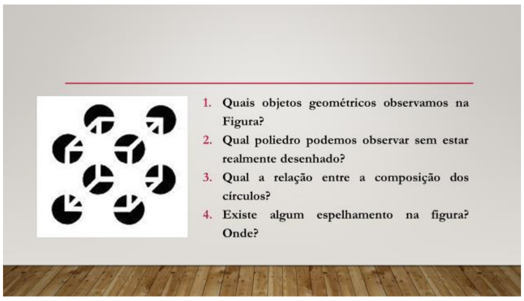

PERCEPÇÃO
A percepção nas ilusões de ópticas estão agregadas aos princípios Gestálticos.
A Gestalt é conhecida como a "psicologia da forma".
Boa forma ou pregnância das formas
Proporções
Similaridade
Acabamento
Contraste de cores


ATIVIDADE 3: CONSTRUÇÃO
• Recriar as ilusões de óptica, representadas na atividade 2B, 2C e 2D, apresentando a solução das mesmas.

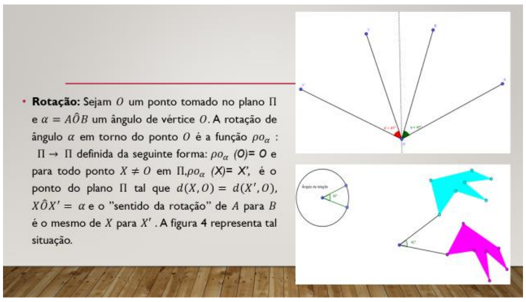

ATIVIDADE 4: OBSERVAÇÃO E ANÁLISE
• Nesta atividade vamos observar atentamente as ilusões, respondendo os questionamentos apresentados ao lado de cada imagem.

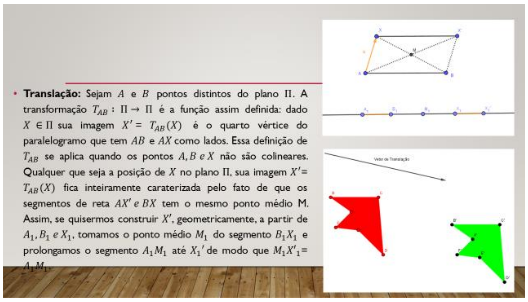

1. Os segmentos são retos?
2. Quais as figuras geométricas que você visualiza na Figura?
3. As circunferências têm alguma relação? Qual?
4. Observando a Figura, podemos reduzi-la a um único conjunto de objetos? Qual?
5. Como usamos o objeto inicial para compor toda a figura?


1. Quais objetos geométricos observamos na Figura?
2. O que podemos afirmar ao observar atentamente as duas circunferências centrais? Elas apresentam o mesmo tamanho?
3. Para cada uma das Figuras, você consegue identificar os lugares geométricos a partir dos centros?
4. É possível identificar outras circunferências com o mesmo centro?
5. Como podemos denominar essas circunferências?
6. Qual a movimentação ocorrida pelas circunferências?

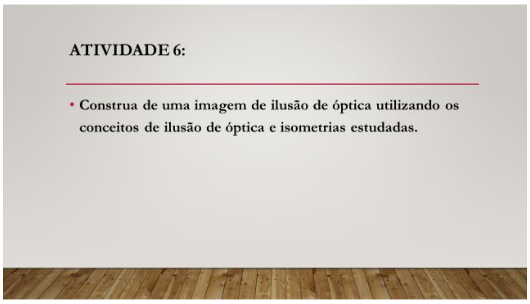

1. Quais objetos geométricos observamos na Figura?
2. Qual poliedro podemos observar sem estar realmente desenhado?
3. Qual a relação entre a composição dos círculos?
4. Existe algum espelhamento na figura? Onde?

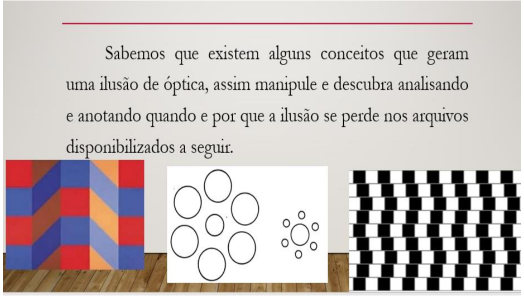

MOVIMENTAÇÕES = ISOMETRIAS
• Reflexão: Seja r uma reta no plano Π. A reflexão em torno da reta r é a função R_r : $\Pi \rightarrow \Pi$, definida por: $R_r(X) = X$, para todo seja $X \in r$ e, para $X \not\ni r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r. Em outras palavras, seja Y o pé da perpendicular baixada de X sobre r. Então Y é o ponto médio do segmento XX'. A figura 1 representa tal situação.
X
Y
r
X'


• Rotação: Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo de vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função ρo_α : $\Pi \rightarrow \Pi$ definida da seguinte forma: ρo_α (O)= O e para todo ponto $X \neq O$ em Π, ρo_α (X)= X', é o ponto do plano Π tal que $d(X,O) = d(X',O)$, $X\hat{O}X' = \alpha$ e o "sentido da rotação" de A para B é o mesmo de X para X'. A figura 4 representa tal situação.


• Translação: Sejam A e B pontos distintos do plano Π. A transformação $T_{AB} : \Pi \rightarrow \Pi$ é a função assim definida: dado $X \in \Pi$ sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados. Essa definição de T_{AB} se aplica quando os pontos A, B e X não são colineares. Qualquer que seja a posição de X no plano Π, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ fica inteiramente caraterizada pelo fato de que os segmentos de reta AX' e BX tem o mesmo ponto médio M. Assim, se quisermos construir X', geometricamente, a partir de A_1, B_1 e X_1, tomamos o ponto médio M_1 do segmento B_1X_1 e prolongamos o segmento A_1M_1 até X_1' de modo que $M_1X'_1 = A_1M_1$.


ATIVIDADE 5: MÃOS À OBRA
Escolha uma das ilusões abaixo para reproduzir no GeoGebra descrevendo sua construção


ATIVIDADE 6:
Construa de uma imagem de ilusão de óptica utilizando os conceitos de ilusão de óptica e isometrias estudadas.


Sabemos que existem alguns conceitos que geram uma ilusão de óptica, assim manipule e descubra analisando e anotando quando e por que a ilusão se perde nos arquivos disponibilizados a seguir.