

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
BACHARELADO EM FÍSICA: PESQUISA BÁSICA

EDUARDO GRESSLER BROCK

**DINÂMICA QUÂNTICA DISSIPATIVA E O FENÔMENO DE  
CUTOFF**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PORTO ALEGRE  
2019

EDUARDO GRESSLER BROCK

**DINÂMICA QUÂNTICA DISSIPATIVA E O FENÔMENO DE  
CUTOFF**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Bacharelado em Física: Pesquisa Básica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Dr. Carlos Felipe Lardizabal Rodrigues  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

PORTO ALEGRE  
2019

Dedico este trabalho aos meus pais Erly Carlos Brock e Evânia Roselí Gressler, que sonharam com este momento durante muito mais tempo do que eu.

## **Agradecimentos**

Agradeço aos meus pais Erly e Evânia pelo amor, carinho, ensinamentos e por sempre colocarem minha educação como prioridade.

A minha namorada Brenda por todo o amor, apoio e por tornar este momento da minha vida verdadeiramente feliz.

Ao Billy, Daniela e Natália por se tornarem a minha família quando mudei para Porto Alegre.

A eterna amiga Joice por ter estado ao meu lado durante a maior parte desta trajetória.

Ao grande amigo Bruno por me ensinar que só através da ciência combatemos o mundo assombrado pelos demônios.

Ao meu orientador Carlos Felipe pela compreensão e paciência na orientação deste trabalho de pesquisa.

Aos professores e servidores da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em especial ao Walberto pelos ensinamentos sobre a vida.

A OBMEP e ao IMPA pelas oportunidades que me foram ofertadas.

Ao CNPq pelo fomento a pesquisa e aporte financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

*Nature isn't classical, dammit, and if you want to make a simulation of nature, you'd better make it quantum mechanical.*

*(FEYNMAN, Richard, 1981)*

## Resumo

BROCK, Eduardo. Dinâmica Quântica Dissipativa e o Fenômeno de Cutoff. 2019. 27 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Bacharelado em Física: Pesquisa Básica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2019.

O entendimento dos fenômenos associados com a dinâmica de convergência dos estados quânticos é fundamental para o avanço da teoria da informação quântica. Este trabalho apresenta uma introdução ao formalismo matemático necessário para a análise de sistemas quânticos dissipativos, através da álgebra de semigrupos de operadores completamente positivos que preservam traço, e uma breve discussão sobre os princípios da teoria da informação. Posteriormente é introduzido o conceito de cutoff e são expostas algumas definições matemáticas relacionadas a distinguibilidade de estados quânticos e ao próprio fenômeno de cutoff. O comportamento de cutoff é demonstrado para duas classes de semigrupos: de operadores gerados por lindbladianos comutantes e de operadores constituídos de sequências de produtos tensoriais. Por fim, discutem-se direções futuras deste estudo no contexto do modelo de computação quântica dissipativa e de passeios aleatórios quânticos abertos.

**Palavras-chave:** Dinâmica Quântica Dissipativa. Cutoff. Informação quântica. Física-matemática.

## Abstract

BROCK, Eduardo. Dissipative Quantum Dynamics and the Cutoff Phenomenon. 2019. 27 f. Undergraduate Thesis – Bachelors in Physics: Basic Research, Federal University of Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2019.

The understanding of the phenomena associated with the convergence dynamics of quantum states is fundamental for the advancement of quantum information theory. This work presents an introduction to the necessary mathematical formalism for the analysis of dissipative quantum systems, through the algebra of semigroups of completely positive and trace-preserving operators, and a brief discussion about the principles of information theory. Subsequently, we introduce the concept of cutoff, some mathematical definitions related to the distinction of those quantum state and to the cutoff phenomenon itself. The cutoff behavior is proved for two classes of semigroups: operators generated by commuting lindbladians and operators consisting of sequences of tensor products. Finally, we discuss future directions of this study in the context of dissipative quantum computation and open quantum random walks.

**Keywords:** Dissipative Quantum Dynamics. Cutoff. Quantum Information. Mathematical Physics.

# Sumário

<b>Introdução</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1 – Postulados da Mecânica Quântica e Canais Quânticos</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1 Operador Densidade e Postulados da Mecânica Quântica . . . . .	3
1.2 Teoria da Informação e Canais Quânticos . . . . .	5
1.3 Semigrupos Dinâmicos Quânticos . . . . .	6
1.4 Propriedades Espectrais de um Gerador Lindbladiano . . . . .	8
<b>2 – Fenômeno de Cutoff</b> . . . . .	<b>10</b>
2.1 Cutoff Clássico . . . . .	10
2.2 Medidas de Distâncias e Contrações de Estados Quânticos . . . . .	10
2.3 Limites de Contração . . . . .	11
2.4 Definições de Cutoff . . . . .	13
<b>3 – Resultados Principais</b> . . . . .	<b>15</b>
3.1 Lindbladianos Comutantes . . . . .	15
3.2 Distância Entre Produto Tensorial de Estados . . . . .	16
3.3 Pré-cutoff para Produtos Tensoriais . . . . .	18
<b>4 – Aplicações e Direções Futuras</b> . . . . .	<b>21</b>
4.1 Cutoff em Computação Quântica Dissipativa . . . . .	21
4.2 Cutoff em Passeios Aleatórios Quânticos Abertos . . . . .	21
<b>Considerações Finais</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>Apêndices</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>APÊNDICE A – Prova da Desigualdade <math>\eta_{tr}[T \otimes \mathbb{1}_d] \leq 4d\eta_{tr}[T]</math></b> . . . . .	<b>27</b>



## Introdução

Avanços no estudo de sistemas quânticos dissipativos tem sido amplamente discutidos nos últimos anos, principalmente motivados por trabalhos relacionados às teorias da informação e computação quântica tendo em vista o extraordinário potencial destes tópicos. Grande parte destes esforços foram direcionados a compreender a dinâmica de convergência na evolução temporal destes sistemas aos seus estados estacionários.

O fenômeno de cutoff conhecido para cadeias de Markov clássicas [1] foi estabelecido no contexto dos sistemas quânticos abertos por *Kastoryano et al.* [2] como uma ferramenta para analisar o comportamento assintótico de tais processos. Em poucas palavras, o fenômeno de cutoff possibilita quantificar a o instante de tempo em que uma transição abrupta ocorre em determinado processo dissipativo. É dito que ocorre um cutoff se existe um estado inicial que não converge para o estado estacionário por um certo período de tempo, mas que esta transição para o estado estacionário ocorre muito rapidamente após um determinado instante. Tipicamente, tenta-se relacionar este instante de tempo com algum parâmetro dimensional do sistema. No âmbito da teoria da informação e computação quântica, um cutoff está tipicamente associado à uma repentina perda de informação do sistema.

A motivação do estudo do fenômeno de cutoff em sistemas deste gênero pode ser sintetizada na seguinte pergunta: após quanto tempo, em função de algum parâmetro dimensional, o sistema descreve seu comportamento de convergência? Este tempo está diretamente relacionado com a dinâmica de descoerência de sistemas quânticos dissipativos e já foi estudado para diversos casos [3] [4] [5].

Relacionando com o desenvolvimento da computação quântica, o cutoff pode ser utilizado para compreender o intervalo de tempo necessário entre duas aplicações sucessivas de transformações que agem sobre o sistema ou para investigar o número total de operações que podem ser realizadas antes que o mesmo alcance o estado descoerência. A figura 1 apresenta uma sequência de portas lógicas típicas de modelos de computação quântica aplicados sobre um sistema de três qubits. Embora as operações relacionadas às portas lógicas sejam transformações unitárias, em um sistema real tais operações estão sujeitas a interferência do sistema com o ambiente e a evolução temporal é descrita por uma dinâmica dissipativa.

A estrutura deste trabalho está organizada da seguinte maneira: no primeiro capítulo são apresentados alguns conceitos preliminares necessários para o entendimento do trabalho, como fundamentos de mecânica quântica e do formalismo utilizado no tratamento de sistemas quânticos dissipativos. No capítulo 2 são expostas algumas das definições matemáticas associadas com medidas de distinguibilidade de estados quânticos e introduzido formalmente o fenômeno de cutoff segundo o trabalho de *Kastoryano et al.* [2]. No capítulo seguinte serão discutidos os resultados principais por meio da demonstração do comportamento de cutoff para duas classes distintas de canais quânticos. Por último, é exemplificado a aplicação do estudo

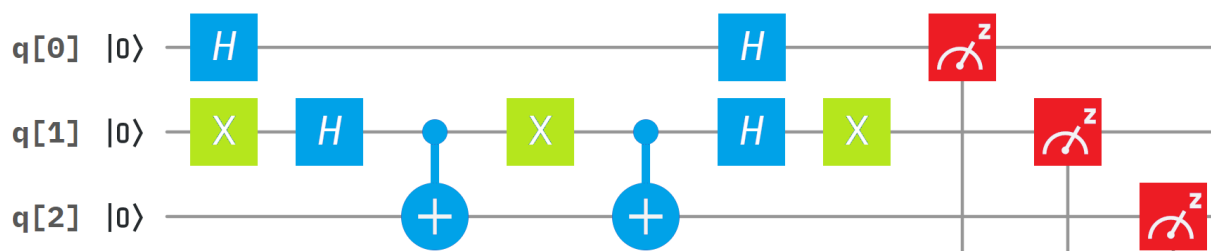


Figura 1 – Circuito de portas quânticas aplicadas sobre três qubits seguidos das operações de medição. Um circuito deste gênero pode ser entendido como um análogo de um código de programação na computação clássica

de cutoff em sistemas quânticos no contexto da computação quântica dissipativa e enunciado um problema em aberto relacionando o fenômeno com passeios aleatórios quânticos abertos.

# 1 Postulados da Mecânica Quântica e Canais Quânticos

## 1.1 Operador Densidade e Postulados da Mecânica Quântica

A descrição do estado físico na mecânica quântica é intrinsecamente probabilística. Em um primeiro contato com a teoria, entende-se o estado a partir de um vetor unitário  $|\psi\rangle$  pertencente ao espaço vetorial de Hilbert  $\mathcal{H}$  e assume-se conhecimento completo acerca do estado do sistema. Entretanto, com frequência, não é possível ter acesso a tal conhecimento e torna-se necessário uma abordagem estatística da mecânica quântica. Para tal, é habitual tratar o sistema como um operador que atua no espaço de estados: o operador densidade. Neste formalismo, supõe-se um sistema que possui probabilidade  $p_i$  de ser encontrado no estado puro  $|\psi_i\rangle$ , de modo que o operador densidade  $\rho$  é escrito em termos de uma combinação convexa das projeções sobre os estados puros:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1)$$

**Teorema 1.1** (Operador Densidade). *Um operador  $\rho$  atuando sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é o operador densidade de um conjunto de estados  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$  com probabilidades  $p_i$  se e somente se:*

1.  $tr(\rho) = 1$  (Normalização)
2.  $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$  (Positividade)

*Demonstração.*

$$tr(\rho) = \sum_i p_i tr(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i = 1 \quad (2)$$

Para qualquer  $\phi \in H$ , é válido que:

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0 \quad (3)$$

Ainda, é válida a recíproca supondo um operador qualquer  $\rho$  que satisfaça as condições de normalização e positividade. Tal operador deve possuir uma decomposição espectral da forma  $\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|$ , onde os vetores  $|j\rangle$  são ortogonais e  $\lambda_j$  são autovalores reais e positivos de  $\rho$ . Pela condição de normalização, tem-se que  $\sum_j \lambda_j = 1$ . Deste modo, o operador  $\rho$  caracteriza um operador densidade para um *ensemble*  $\{\lambda_j, |j\rangle\}$  de estados  $|j\rangle$  com probabilidades  $\lambda_j$ . ■

É interessante expor alguns dos postulados da mecânica quântica no formalismo do operador densidade:

**Postulado 1** (Estado de um Sistema Quântico). Um sistema físico é completamente caracterizado pelo seu operador densidade  $\rho$ , positivo e com traço unitário atuando em um espaço vetorial complexo com produto interno (espaço de Hilbert), chamado de espaço de estados.

**Postulado 2** (Evolução Temporal). A evolução temporal do estado descrito pelo operador densidade é dada pela equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho], \quad (4)$$

onde o operador hermitiano  $H$  é o hamiltoniano do sistema. Desta forma, a relação entre um determinado estado e um estado anterior é dada por uma transformação unitária.

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho U^\dagger(t, t_0) \quad (5)$$

**Postulado 3** (Medição). A medição de um observável é caracterizada por um conjunto de operadores de medição  $\{M_m\}$  que atuam no espaço de estados e satisfazem  $\sum_m M_m^\dagger M_m = 1$ . Se o estado imediatamente antes da medida for  $\rho$ , a probabilidade de o resultado  $m$  ocorrer é dada por:

$$p_m = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) \quad (6)$$

e o sistema, logo após a medição, é descrito por:

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)} \quad (7)$$

**Postulado 4** (Sistema Composto). O espaço de estados de um sistema quântico composto é o produto tensorial dos espaços de estados individuais dos sistemas que o compõe.

$$\mathcal{H}_{1,2,\dots,n} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n \quad (8)$$

Uma ferramenta importante para o estudo de sistemas quânticos compostos, é o operador densidade reduzido:

**Definição 1.1** (Operador Densidade Reduzido). Seja o sistema composto  $AB$ , descrito pelo operador densidade  $\rho$ , pode-se descrever o estado do sistema A, por um operador densidade reduzido  $\rho_A$ :

$$\rho_A \equiv \text{tr}_B(\rho), \quad (9)$$

onde o operador funcional  $\text{tr}_B$  é denominado o traço parcial sobre o sistema B e atuam em  $\rho$  apenas no subsistema dado pelas bases ortogonais de B. Considere um sistema composto AB, de bases ortonormais  $|i_A\rangle$  e  $|j_B\rangle$  e operador densidade

$$\rho = \sum_{i,i',j,j'} p_{i,i',j,j'} |i_A\rangle \langle i'_A| \otimes |j_B\rangle \langle j'_B|, \quad (10)$$

então, o operador densidade reduzido que descreve o estado do sistema A é dado por

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \text{tr}_B(\rho) = \sum_l \langle l_B | \rho | l_B \rangle \\
&= \sum_l \langle l_B | \left( \sum_{i,i',j,j'} p_{i,i',j,j'} |i_A\rangle \langle i'_A| \otimes |j_B\rangle \langle j'_B| \right) | l_B \rangle \\
&= \sum_{i,i'} \sum_l p_{il,i'l} |i_A\rangle \langle i'_A|
\end{aligned} \tag{11}$$

Este formalismo permite descrever medições realizadas nos subsistemas de um sistema composto, de modo que uma medição que envolve apenas o subsistema A é escrita em termos de um operador  $M_{mA} \otimes \mathbb{1}_B$ . A probabilidade de o resultado m ocorrer é dada por:

$$p_m = \text{tr}[(M_{mA}^\dagger M_{mA} \otimes \mathbb{1}_B)\rho] \tag{12}$$

## 1.2 Teoria da Informação e Canais Quânticos

Na teoria clássica da informação é definida a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida: o bit, que pode assumir dois valores distintos, sendo eles 0 ou 1. A transmissão desse bit ocorre através de um canal de comunicação que possui uma limitação no número de bits transportados (capacidade do canal) e pode conter ruído, de modo a prejudicar o fluxo de informação. Exemplos cotidianos de canais clássicos são cabos que transmitem sinais entre componentes eletrônicos ou o ar no caso de conexões como *wi-fi*.

No domínio quântico do estudo da teoria da informação, define-se a quantidade de informação elementar a partir de um sistema quântico de dois níveis: o qubit. Além dos dois estados possíveis em que o sistema pode ser medido, descritos pelos vetores de estados puros  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , o sistema ainda pode se encontrar em uma superposição destes estados. A figura 2 ilustra a distinção entre um bit e um qubit. Sistemas deste gênero podem ser o spin de um elétron, com estados *up* e *down*, ou a polarização de um único fóton, que pode ser vertical ou horizontal.

Um canal quântico de comunicação  $\varepsilon$  é um superoperador que age transformando um estado quântico na forma  $\rho' = \varepsilon(\rho)$ . Por exemplo, a transformação unitária e a medição apresentadas nos Postulados 2 e 3 podem ser escritos em termos dos canais  $\varepsilon_t(\rho) = U_t \rho U_t^\dagger$  e  $\varepsilon_m(\rho) = M_m \rho M_m^\dagger$ , respectivamente. As portas quânticas brevemente apresentadas na introdução compõem um caso particular dos canais quânticos e estão diretamente associados com a noção de portas lógicas (*AND*, *OR*, *NOT*, *etc.*), possibilitando o desenvolvimento de ferramentas computacionais utilizando os qubits. O ruído provocado pela aplicação destes canais está relacionado com o efeito dissipativo do sistema e, conseqüentemente, com uma possível perda da informação na evolução temporal do mesmo.

O estudo sobre interações de sistemas quânticos abertos é baseado no acoplamento de duas partes distintas: o sistema a ser estudado e um ambiente (ou reservatório) com muitos graus de liberdade, em geral descrito por um banho térmico. Pode-se tratar os efeitos destas

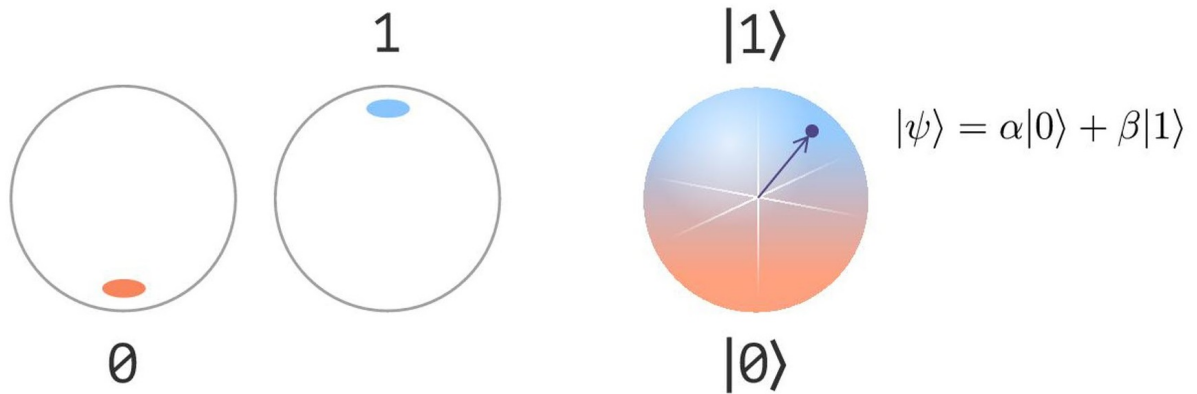


Figura 2 – Representação dos estados de um bit (esquerda) e de um qubit (direita) sobre a superfície da esfera de Bloch, evidenciando a superposição do estado quântico de dois níveis.

interações como um processo semelhante à medição, porém sem o registro de um resultado. Matematicamente, equivale à aplicação de sucessivos mapeamentos, semelhantes aos definidos no parágrafo anterior, antes que seja obtido seu estado final. Pode-se escrever o canal quântico associado a esses mapeamentos em termos do operador densidade reduzido a partir do traço parcial sobre o subsistema associado ao reservatório.

$$\varepsilon(\rho) = \text{tr}_{res} [U(\rho \otimes \rho_{res})U^\dagger] \quad (13)$$

O reservatório pode ser entendido como um grande sistema composto por muitas partículas em estados estacionários interagindo fracamente com o sistema aberto, que por sua vez, é interferido pelas flutuações quânticas em determinados observáveis do reservatório. Essas contribuições são modeladas matematicamente por teoremas de limites [6] [7] e tem seus análogos clássicos nos processos estocásticos de Poisson [8].

### 1.3 Semigrupos Dinâmicos Quânticos

O formalismo de canais quânticos se torna mais conveniente quando representado na forma da soma de operadores completamente positivos e que preservam traço (*CPTP*)

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho) &= \sum_k \langle e_k | U [\rho \otimes |e_0\rangle \langle e_0|] U^\dagger |e_k\rangle \\ &= \sum_k E_k \rho E_k^\dagger, \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $E_k \equiv \langle e_k | U |e_0\rangle$  é um operador *CPTP* e uma família de  $\{E_k\}$  de operadores forma um semigrupo parametrizado em  $k$ . No âmbito da discussão quanto ao fenômeno de cutoff, mais especificamente, em uma família de semigrupos destes operadores parametrizados no tempo:

**Definição 1.2** (Semigrupo a um Parâmetro). Uma família de operadores lineares  $\{T_t\}$ , tal que  $t \geq 0$  e  $T_t : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ , forma um semigrupo a um parâmetro, se:

1.  $T_0 = \hat{I}$
2.  $T_t T_s = T_{t+s} \quad \forall t, s \geq 0$

Diz-se que o semigrupo é uniformemente contínuo se:

3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T_t - I\| = 0$

Ainda, o semigrupo é dito de contração, se:

4.  $\|T_t\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^m} \frac{\|T_t x\|}{\|x\|} \leq 1 \quad \forall t \geq 0, x \neq 0$

Esta classe de semigrupos compõe um caso especial dos  $C_0$ -semigrupos estudados na Teoria de Geradores de E. Hille [9] e K. Yoshida [10] na década de 1940, que demonstrou a existência de geradores infinitesimais destes semigrupos.

De fato, qualquer  $C_0$ -semigrupo pode ser entendido como uma generalização da função exponencial para  $C^*$ -álgebra. Da mesma maneira que a função exponencial fornece soluções de EDOs lineares constantes e escalares, estes semigrupos fornecem soluções para EDOs lineares constantes num espaço vetorial de *Banach*  $\mathcal{B}$ . Conhecendo a existência destes geradores infinitesimais, naturalmente, questiona-se qual a estrutura dos geradores de um semigrupo a 1 parâmetro uniformemente contínuos e de contração. A resposta não é conhecida de um modo geral, mas é conhecida para o caso de sistemas de dimensão finita e é interessante a sua semelhança com a equação mestra de cadeias de Markov clássicas.

Neste trabalho, o interesse está nos geradores de semigrupos completamente positivos, de modo a descrever, a cada instante, a atuação de um canal quântico sobre a densidade dada inicialmente. Para isso, deriva-se a equação de Lindblad [11] (ou *GKSL equation* [12]) a partir da generalização da equação 4 para o caso de uma evolução não unitária, de modo a obter  $\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho]$ . Note que o operador  $\mathcal{L}$ , denominado lindbladiano, gera um superoperador finito para uma evolução temporal dissipativa, analogamente ao que o hamiltoniano  $H$  gera para uma evolução temporal unitária. Decompondo a evolução temporal de  $\rho$  em termos de uma soma de Kraus, tomando a expansão no limite em que  $\delta t \rightarrow 0$  e mantendo apenas os termos de primeira ordem em  $\delta t$ :

$$\rho(t + \delta t) = \sum_k M_k(\delta t) \rho(t) M_k^\dagger(\delta t) \quad (15)$$

Pela expansão dos termos do operador de Kraus, necessariamente há um operador hermitiano  $M_0 = \mathbb{1} + \delta t(-\frac{i}{\hbar}H + K) + O(\delta t^2)$  enquanto todos os demais tem a forma

$M_{k \geq 1} = \sqrt{\delta t} L_k$ , de modo a garantir que a expansão em primeira ordem seja  $\rho(t + \delta t) = \rho(t) + \dot{\rho} \delta t$ . Assim:

$$\begin{aligned} \rho(t + \delta t) &= M_0 \rho(t) M_0^\dagger + \sum_{k \geq 1} M_k \rho(t) M_k^\dagger \\ &= \left[ \mathbb{1} + \delta t \left( -\frac{i}{\hbar} H + K \right) \right] \rho(t) \left[ \mathbb{1} + \delta(iH + K) \right] + \delta t \sum_{k \geq 1} L_k \rho L_k^\dagger \\ &= \rho - \frac{i}{\hbar} \delta t [H, \rho] + \delta t (K \rho + \rho K) + \delta t \sum_{k \geq 1} L_k \rho L_k^\dagger \end{aligned} \quad (16)$$

Finalmente, obtém-se a equação de Lindblad substituindo  $K$  pela condição de normalização da soma de Kraus  $K = -\frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} L_k^\dagger L_k$ :

$$\mathcal{L}[\rho] = \dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \sum_{k \geq 0} \left[ L_k \rho(t) L_k^\dagger - \frac{1}{2} L_k^\dagger L_k \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) L_k^\dagger L_k \right] \quad (17)$$

O primeiro termo é característico da evolução temporal unitária descrita no Postulado 2, enquanto que os termos seguintes descrevem o comportamento do sistema interagindo com o banho térmico. Os operadores  $L_k$  são chamados de operadores de Lindblad. O semigrupo de interesse (denominado semigrupo quântico) é descrito por  $e^{t\mathcal{L}}$  e, dado operador densidade  $\rho \geq 0$ , tem-se que  $e^{t\mathcal{L}}\rho$  é também operador densidade.

#### 1.4 Propriedades Espectrais de um Gerador Lindbladiano

Nas seções anteriores foi apresentado que o estado de um sistema quântico aberto é descrito pelo operador densidade e sua dinâmica é descrita pela equação de Lindblad e governada por operadores *CPTP* gerados por lindbladianos  $\mathcal{L}$ , de modo que  $\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho]$ . Para uma melhor compreensão destes geradores, pode-se investigar os autovalores  $\lambda_j$  correspondentes a equação:

$$T_t \rho = e^{t\mathcal{L}} \rho = e^{t\lambda_j} \rho \quad (18)$$

É conhecido que, para um lindbladiano independente do tempo, existe ao menos um estado estacionário  $\rho_{ss}$  tal que  $e^{t\mathcal{L}} \rho_{ss} = \rho_{ss}$  com autovalor  $\lambda_{ss} = 0$  [13]. O operador gerado por este lindbladiano corresponde ao mapa assintótico  $T_\varphi : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$ , tal que  $T_\varphi \rho = \rho$ . Outra propriedade é de que a parte real destes autovalores está associada com a dinâmica de convergência do sistema para o estado estacionário [14]. Desta forma, pode-se definir o gap espectral de um gerador lindbladiano:

**Definição 1.3** (Gap Espectral de um Operador). Ordenando a parte real dos autovalores de um gerador lindbladiano  $\mathcal{L}$  de forma que

$$|\operatorname{Re}(\lambda_0)| < |\operatorname{Re}(\lambda_1)| < |\operatorname{Re}(\lambda_2)| \leq \dots < |\operatorname{Re}(\lambda_n)|, \quad (19)$$



onde  $\text{Re}(\lambda_0) = 0$ . Então define-se o gap espectral  $\lambda$  deste gerador como sendo o primeiro autovalor com parte real não nula:

$$\lambda = |\text{Re}(\lambda_1)| \quad (20)$$

Uma definição mais formal pode ser escrita por:

$$\lambda = \inf\{|\text{Re}(\lambda_i)| \mid \lambda_i \in \Sigma(\mathcal{L}), |\text{Re}(\lambda_i)| > 0\}. \quad (21)$$

A interpretação desta quantidade é de que o gap espectral determina a mais lenta transição do sistema para o estado estacionário.

## 2 Fenômeno de Cutoff

### 2.1 Cutoff Clássico

Tipicamente, é dito que o fenômeno de cutoff ocorre quando, após um longo período em determinado estado, a transição do sistema para seu estado de convergência acontece em um intervalo de tempo muito pequeno quando comparado ao tempo característico de vida do mesmo. Desta forma, observa-se uma mudança súbita no estado do sistema logo antes dele alcançar seu estado de equilíbrio. Frequentemente, tenta-se relacionar este tempo de transição com algum parâmetro dimensional do sistema. Um modelo clássico conhecido deste fenômeno diz respeito ao embaralhamento de cartas.

Suponha um baralho recém comprado, em que todas as cartas estão ordenadas, compreende-se que após as primeiras embaralhadas a distribuição das cartas ainda permanece parcialmente ordenada. Entretanto, após vários embaralhamentos percebe-se que não há grande alteração em embaralhar uma vez mais. Ainda, é conhecido [1] que ocorre um cutoff na aleatoriedade da distribuição das cartas e que o número necessário de embaralhamentos é proporcional ao logaritmo do número de cartas que constituem o baralho. Após esse número, todas as configurações são possíveis e quase que igualmente prováveis.

Em sistemas quânticos, um cutoff pode estar relacionado com a transição de um estado em que a informação quanto a determinado observável é preservada, para um estado final, em que repentinamente esta informação é perdida.

### 2.2 Medidas de Distâncias e Contrações de Estados Quânticos

Antes de definir matematicamente o cutoff no contexto dos semigrupos de interesse, é necessário apresentar dois conceitos: a distância entre dois estados do sistema e a operação de contração. Para estudar a convergência de determinado estado quântico, deve-se analisar algum parâmetro relacionado com a distinguibilidade entre diferentes estados. Adiante, são apresentadas duas relações de distâncias entre estados distintos e posteriormente as relações de contração que caracterizam esta diferença entre o estado resultante da aplicação de um canal  $T_t$  ou da aplicação do canal assintótico  $T_\varphi$  sobre o estado anterior. Para mais detalhes, pode-se consultar *Nielsen* [15].

**Definição 2.1** (Distância do Traço). Sejam  $\rho, \sigma \in S_d$  operadores densidade, a distância do traço entre estes estados é definida por

$$d_{tr}(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1, \quad (22)$$

onde  $\|x\|_1 = tr \left[ \sqrt{x^\dagger x} \right]$  é a norma do traço.

**Definição 2.2** (Distância de Bures). Analogamente, a distância de Bures é definida por

$$d_B(\rho, \sigma) = \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)}, \quad (23)$$

onde  $F(\rho, \sigma) = \text{tr} \left[ \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}} \right]$  é fidelidade entre os dois estados  $\rho$  e  $\sigma$ .

Ainda, duas propriedades importantes quanto as medidas de distâncias apresentadas são:

1. Ambas as distâncias definidas são monotônicas com respeito à aplicação do mesmo canal quântico sobre os estados:

$$d(T(\rho), T(\sigma)) \leq d(\rho, \sigma) \quad (24)$$

2. As seguintes relações de desigualdade:

$$d_B^2(\rho, \sigma) \leq d_{tr}(\rho, \sigma) \leq d_B(\rho, \sigma) \sqrt{2 - d_B^2(\rho, \sigma)} = \sqrt{1 - F^2(\rho, \sigma)} \quad (25)$$

Em seguida, são definidas as respectivas operações de contração com relação a aplicações de canal  $T$  e do canal assintótico  $T_\varphi$  associadas a estas distâncias. Podem-se interpretar estas operação como medidas de distinguibilidade entre os estados resultantes da aplicação destes canais quânticos.

**Definição 2.3** (Contração do Traço da Norma). Seja o mapa  $T : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$ , a contração do traço da norma é definida por

$$\eta_{tr}[T] = \sup_{\rho \in S_d} d_{tr}(T(\rho), T_\varphi(\rho)), \quad (26)$$

onde  $T_\varphi$  é a projeção de  $T$  com autovalores de módulo 1.

**Definição 2.4** (Contração de Bures). Analogamente, define-se a contração para a distância de Bures por

$$\eta_B[T] = \sup_{\rho \in S_d} d_B(T(\rho), T_\varphi(\rho)), \quad (27)$$

onde  $T_\varphi$  é a projeção de  $T$  com autovalores de módulo 1.

### 2.3 Limites de Contração

É apresentado nesta seção um importante teorema associado aos limites assintóticos na contração de canais quânticos. Este teorema tem papel fundamental nas demonstrações do capítulo seguinte.

**Teorema 2.1** (Limites de Contração [2]). *Seja  $\mathcal{L} : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$ , o lindbladiano gerador de um semigrupo a um parâmetro de canais quânticos  $T_t = e^{t\mathcal{L}}$  tal que  $t \geq 0$  e seja  $\lambda$  o gap espectral deste lindbladiano. Então, existe  $L > 0$  e  $\forall \nu < \lambda$  existe  $R > 0$  tais que:*

$$Le^{-t\lambda} \leq \eta_{tr}[T_t] \leq Re^{-t\nu} \quad (28)$$

*Demonstração.* Decompondo na forma canônica de Jordan a representação matricial  $\hat{\mathcal{L}}$  do gerador lindbladiano  $\mathcal{L}$ , obtêm-se que:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{S} \bigoplus_j \hat{J}_j(\lambda_j) \hat{S}^{-1} \quad (29)$$

onde,  $\hat{S}$  é inversível,  $\lambda_j$  são os autovalores de  $\mathcal{L}$  e  $\hat{J}_j(\lambda_j)$  são os blocos de Jordan da forma

$$\hat{J}_j(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & \lambda_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & \lambda_j & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad (30)$$

então, para os blocos de Jordan de dimensão  $d_j \geq 1$ , pode-se definir que:

$$e^{t\hat{J}_j(\lambda_j)} = e^{t\lambda_j} \sum_{l=1}^{d_j} \sum_{k=1}^l \frac{(t\lambda_j)^{l-k}}{(l-k)!} |k\rangle \langle l|. \quad (31)$$

Deste modo, sabendo que o canal assintótico  $T_\varphi$  é gerado pelo lindbladiano com autovalor  $\lambda_0$ , tal que  $\text{Re}(\lambda_0) = 0$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \|\hat{T} - \hat{T}_\varphi\| &= \|e^{t\hat{\mathcal{L}}} - \hat{T}_\varphi\| = \left\| \hat{S} \bigoplus_j e^{t\hat{J}_j(\lambda_j)} \hat{S}^{-1} - \hat{S} e^{t\hat{J}_0(\lambda_0)} \hat{S}^{-1} \right\| \\ &= \left\| \hat{S} \bigoplus_{j:\text{Re}(\lambda_j) \neq 0} e^{t\hat{J}_j(\lambda_j)} \hat{S}^{-1} \right\| \end{aligned} \quad (32)$$

Utilizando a desigualdade triangular e denotando por  $\kappa(\hat{S}) \equiv \|\hat{S}\| \|\hat{S}^{-1}\|$ , e por  $\lambda$  o gap espectral do lindbladiano  $\mathcal{L}$ , então

$$\begin{aligned} \|\hat{T} - \hat{T}_\varphi\| &\leq \|\hat{S}\| \left\| \bigoplus_{j:\text{Re}(\lambda_j) \neq 0} e^{t\hat{J}_j(\lambda_j)} \right\| \|\hat{S}^{-1}\| \\ &\leq \kappa(\hat{S}) e^{-t\lambda} \max_{j:\text{Re}(\lambda_j) \neq 0} \left\| \sum_{l=1}^{d_j} \sum_{k=1}^l \frac{(t\lambda_j)^{l-k}}{(l-k)!} |k\rangle \langle l| \right\| \\ &\leq \kappa(\hat{S}) e^{-t\lambda} \max_{j:\text{Re}(\lambda_j) \neq 0} \left( \sum_{l=1}^{d_j} \sum_{k=1}^l \frac{(t|\lambda_j|)^{l-k}}{(l-k)!} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Note que para  $k = l$  o elemento do somatório resulta em 1. Ainda, a maior diferença  $l - k$  ocorre para  $l = d_j$  e  $k = 1$ . Deste modo, utilizando a dimensão do maior bloco de Jordan  $\max_j \{d_j\}$ , assumindo  $t \geq 1/\lambda$  e pela Definição 1.3:

$$\begin{aligned} \|\hat{T} - \hat{T}_\varphi\| &\leq C e^{-t\lambda} \max\{(t\lambda)^{\max_j \{d_j\} - 1}, 1\} \\ &\leq R e^{-t\nu} \end{aligned} \quad (34)$$

onde  $C$  e  $R$  são constantes independentes do tempo e o último passo é obtido considerando que para qualquer  $\nu < \lambda$ , existe  $R > 0$  tal que a expressão é satisfeita. Analogamente, denotando por  $\hat{J}_1$  o bloco de Jordan associado ao gerador de autovalor  $\lambda_1$  com parte real dada por  $\text{Re}(\lambda_1) = \lambda$ , é obtido o limite inferior:

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{T} - \hat{T}_\varphi \right\| &\geq \kappa(\hat{S})^{-1} \left\| \bigoplus_{j: \text{Re}(\lambda_j) \neq 0} e^{t\hat{J}_j(\lambda_j)} \right\| \\
&\geq \kappa(\hat{S})^{-1} \max_{j: \text{Re}(\lambda_j) \neq 0} \left\| e^{t\hat{J}_j(\lambda_j)} \right\| \\
&\geq \kappa(\hat{S})^{-1} \left\| e^{t\hat{J}_1(\lambda_1)} \right\| \\
&\geq \kappa(\hat{S})^{-1} e^{-t\lambda} \\
&\geq L e^{-t\lambda}
\end{aligned} \tag{35}$$

A rigor não foi demonstrado a relação para  $\eta_{tr}[T_t]$ , entretanto a partir das equações 34 e 35 e das Definições 2.1 e 2.3 pode-se induzir a equação 28. ■

## 2.4 Definições de Cutoff

O fenômeno de cutoff no contexto de sistemas quânticos abertos pode ser formalmente definido de maneiras distintas, mas neste trabalho são consideradas as definições propostas por *Kastoryano et al.* [2] e evidenciados na Figura 3.

**Definição 2.5** (Cutoff [2]). Seja  $T_t^{(n)}$  uma sequência, de tamanho  $n$ , de semigrupos a um parâmetro. Assume-se que ocorre o cutoff na contração do traço da norma no tempo  $t_n$ , se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{tr} \left[ T_{ct_n}^{(n)} \right] = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < c < 1 \\ 0 & \text{para } c > 1 \end{cases} \tag{36}$$

Ainda, em determinados sistemas em que seja muito difícil provar rigorosamente o fenômeno de cutoff e obter o tempo  $t_n$ , pode-se tentar obter, ao menos, a ordem de magnitude do tempo de convergência do sistema. Para tanto, uma definição menos rigorosa do fenômeno pode ser descrita pelo pré-cutoff:

**Definição 2.6** (Pré-Cutoff [2]). Assume-se que ocorre um pré-cutoff de ordem  $O(k_n)$  se existem tempos  $t_{1,n}$  e  $t_{2,n}$ , ambos de ordem  $O(k_n)$ , tais que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{tr} \left[ T_{ct_{1,n}}^{(n)} \right] = 1 \quad \text{para } 0 < c < 1 \tag{37}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{tr} \left[ T_{ct_{2,n}}^{(n)} \right] = 0 \quad \text{para } c > 1 \tag{38}$$

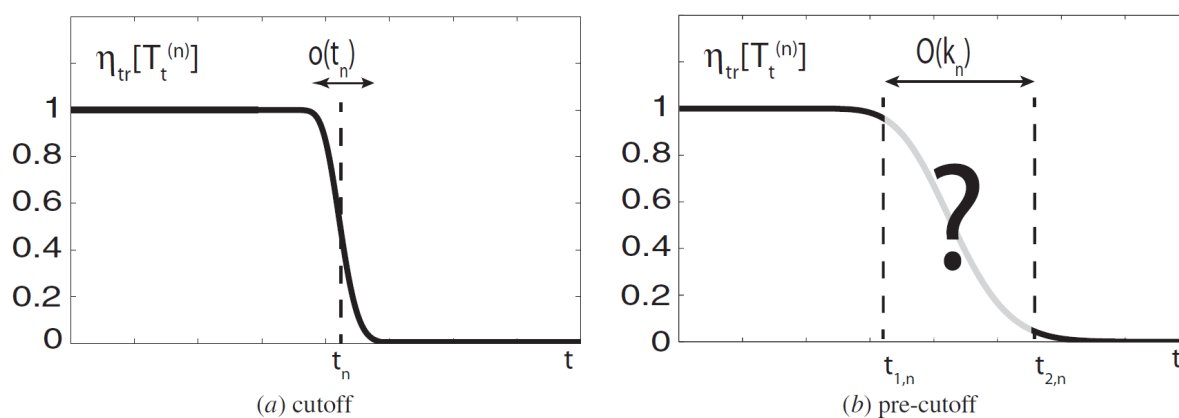


Figura 3 – (a) Comportamento de cutoff na contração do traço da norma  $\eta_{tr}[T_t^{(n)}]$  como função do tempo  $t$  para um semigrupo de tamanho  $n$  de canais quânticos. No tempo  $t_n$  o sistema passa por uma mudança abrupta em seu estado, alcançado o estado de convergência. (b) Analogamente para o pré-cutoff, de modo que a transição entre os estados ocorre no intervalo de tempo entre  $t_{1,n}$  e  $t_{2,n}$ . (Figura de *Kastoryano et al.* [2])

### 3 Resultados Principais

Em seguida, são discutidas duas classes de geradores que exibem o fenômeno de cutoff: sistemas de lindbladianos comutantes e sistemas em que o gerador lindbladiano atua independentemente em subsistemas distintos. Para ambas situações, assume-se que  $\mathcal{L} \equiv \sum_j \mathcal{L}_j$ , onde  $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = 0$  e portanto  $T_t = e^{t\mathcal{L}} = e^{t\sum_j \mathcal{L}_j}$ . Ainda, é definido a notação  $T_{t,j} \equiv e^{t\mathcal{L}_j}$  para designar um operador gerado apenas pelo lindbladiano  $\mathcal{L}_j$ .

O próximo teorema apresenta o limite superior da contração de um canal quântico de um semigrupo de um parâmetro gerado por um lindbladiano composto por partes comutantes.

#### 3.1 Lindbladianos Comutantes

**Teorema 3.1** (Lindbladianos Comutantes [2]). *Seja  $\{\mathcal{L}_j\} : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$  uma família de lindbladianos comutantes. Então:*

$$\eta_{tr}[T_t] \leq \sum_j \eta_{tr}[T_{t,j}] \quad (39)$$

*Demonstração.* Definindo  $T_{t,j \neq 1} \equiv e^{t\sum_{j=2}^n \mathcal{L}_j}$ , tem-se que pela definição da contração  $\eta_{tr}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{tr}[T] &= \sup_{\rho \in S_d} d_{tr}(T_t(\rho), T_\varphi(\rho)) \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\rho \in S_d} \|T_t(\rho) - T_\varphi(\rho)\|_1 \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\rho \in S_d} \|T_{t,1}T_{t,j \neq 1}(\rho) - T_{\varphi,1}T_{\varphi,j \neq 1}(\rho)\|_1 \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\rho \in S_d} \|(T_{t,1} - T_{\varphi,1})(T_{\varphi,j \neq 1})(\rho) + (T_{t,1})(T_{t,j \neq 1} - T_{\varphi,j \neq 1})(\rho)\|_1 \end{aligned} \quad (40)$$

Pela desigualdade triangular, tem-se que  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ .

$$\begin{aligned} \eta_{tr}[T] &\leq \frac{1}{2} \sup_{\rho \in S_d} \|(T_{t,1} - T_{\varphi,1})(T_{\varphi,j \neq 1})(\rho)\|_1 + \frac{1}{2} \sup_{\rho \in S_d} \|T_{t,1}(T_{t,j \neq 1} - T_{\varphi,j \neq 1})(\rho)\|_1 \\ &\leq \sup_{\rho \in S_d} d_{tr}[T_{\varphi,j \neq 1}(T_{t,1}(\rho)), T_{\varphi,j \neq 1}(T_{\varphi,1}(\rho))] + \sup_{\rho \in S_d} d_{tr}[T_{t,1}(T_{t,j \neq 1}(\rho)), T_{t,1}(T_{\varphi,j \neq 1}(\rho))] \end{aligned} \quad (41)$$

Pela monotonicidade da distância do traço com respeito à aplicações de canais quânticos, apresentada na equação 24, tem-se que:

$$\begin{aligned} d_{tr}[T_{\varphi,j \neq 1}(T_{t,1}(\rho)), T_{\varphi,j \neq 1}(T_{\varphi,1}(\rho))] &\leq d_{tr}[T_{t,1}(\rho), T_{\varphi,1}(\rho)] \\ d_{tr}[T_{t,1}(T_{t,j \neq 1}(\rho)), T_{t,1}(T_{\varphi,j \neq 1}(\rho))] &\leq d_{tr}[T_{t,j \neq 1}(\rho), T_{\varphi,j \neq 1}(\rho)] \end{aligned} \quad (42)$$

Substituindo esta desigualdade na Equação 41, obtêm-se a Equação 39.

$$\begin{aligned} \eta_{tr}[T] &\leq \sup_{\rho \in S_d} d_{tr}[T_{t,1}(\rho), T_{\varphi,1}(\rho)] + \sup_{\rho \in S_d} d_{tr}[T_{t,j \neq 1}(\rho), T_{\varphi,j \neq 1}(\rho)] \\ &\leq \eta_{tr}[T_{t,1}] + \eta_{tr}[T_{t,j \neq 1}] = \sum_j \eta_{tr}[T_{t,j}] \end{aligned} \quad (43)$$

■

Considerando a expressão apresentada no Teorema 3.1, o limite superior do Teorema 2.1 e tomando o limite em que  $n \rightarrow \infty$  da contração  $\eta_{tr}[T_{ct_n}^{(n)}]$ , para uma sequência de operadores lineares gerados por  $n$  lindbladianos comutantes, tem-se como consequência que o limite superior do tempo de convergência deste sistema é da ordem de  $O(\ln(n))$ .

*Demonstração.*

$$\eta_{tr}[T_{ct_n}^{(n)}] \leq \sum_j^n \eta_{tr}[T_{ct,j}] \leq \sum_j^n Re^{-ct\nu} = Rne^{-c \ln(n)\nu} = Rn^{1-c\nu} \quad (44)$$

Para  $c > 1$ , é satisfeita a segunda afirmação estabelecida na Definição 2.5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{tr}[T_{ct_n}^{(n)}] = 0 \quad (45)$$

■

### 3.2 Distância Entre Produto Tensorial de Estados

Antes de introduzir o fenômeno de cutoff no segundo contexto, serão apresentadas algumas definições de limites para as distâncias de produtos tensoriais dos estados quânticos:

**Lema 1** (Distância entre Produtos Tensoriais de Estados [2]). *Sejam  $\rho_i, \sigma_i \in S_d$ , onde  $i = 1, \dots, n$ , tais que  $\rho^{(n)} = \bigotimes_{i=1}^n \rho_i$ . Analogamente para  $\sigma^{(n)}$ . Então:*

$$1 - \exp \left[ - \sum_{i=1}^n d_B^2(\rho_i, \sigma_i) \right] \leq d_B^2(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) \leq \sum_{i=1}^n d_B^2(\rho_i, \sigma_i) \quad (46)$$

$$1 - \exp \left[ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_{tr}^2(\rho_i, \sigma_i) \right] \leq d_{tr}(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) \leq \sum_{i=1}^n d_{tr}(\rho_i, \sigma_i) \quad (47)$$

*Demonstração.* A prova consiste na demonstração de quatro desigualdades distintas. Para a distância de Bures, tem-se que a função fidelidade é multiplicativa com relação ao produto tensorial:  $F(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) = \prod_{i=1}^n F(\rho_i, \sigma_i)$ . Pela definição de  $d_B$ :

$$d_B^2(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) = 1 - F(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) = 1 - \prod_{i=1}^n F(\rho_i, \sigma_i) \quad (48)$$



Utilizando a relação:

$$1 - \prod_{i=1}^n x_i \leq \sum_i (1 - x_i) \quad \forall x_i \in [0,1] \quad (49)$$

Portanto, o limite superior da equação 46 é dado por:

$$d_B^2(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) \leq \sum_{i=1}^n (1 - F(\rho_i, \sigma_i)) = \sum_{i=1}^n d_B^2(\rho_i, \sigma_i) \quad (50)$$

Para o limite inferior, note que:

$$\prod_i \exp[x_i - 1] \geq \prod_i x_i \quad \forall x_i \geq 0 \quad (51)$$

Então:

$$d_B^2(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) = 1 - \prod_{i=1}^n F(\rho_i, \sigma_i) \geq 1 - \prod_{i=1}^n \exp[F(\rho_i, \sigma_i) - 1] \quad (52)$$

Utilizando a relação:

$$\prod_i \exp[x_i] = \exp\left[\sum_i x_i\right] \quad \forall x_i \quad (53)$$

Então:

$$1 - \prod_{i=1}^n \exp[F(\rho_i, \sigma_i) - 1] = 1 - \exp\left[\sum_{i=1}^n (F(\rho_i, \sigma_i) - 1)\right] = 1 - \exp\left[-\sum_{i=1}^n d_B^2(\rho_i, \sigma_i)\right] \quad (54)$$

Portanto:

$$d_B^2(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) \geq 1 - \exp\left[-\sum_{i=1}^n d_B^2(\rho_i, \sigma_i)\right] \quad (55)$$

Quanto às desigualdades da equação 47, primeiramente utiliza-se um argumento bastante semelhante ao empregado na prova do Teorema 3.1. Definindo as quantidades  $\rho_{i \neq 1} = \bigotimes_{i=2}^n \rho_i$  e  $\sigma_{i \neq 1} = \bigotimes_{i=2}^n \sigma_i$  e partindo da definição de  $d_{tr}$ :

$$\begin{aligned} d_{tr}(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) &= \frac{1}{2} \|\rho^{(n)} - \sigma^{(n)}\|_1 = \frac{1}{2} \left\| \bigotimes_{i=1}^n \rho_i - \bigotimes_{i=1}^n \sigma_i \right\|_1 \\ &= \frac{1}{2} \|\rho_1 \otimes \rho_{i \neq 1} - \sigma_1 \otimes \sigma_{i \neq 1}\|_1 \\ &= \frac{1}{2} \|(\rho_1 - \sigma_1) \otimes \sigma_{i \neq 1} + \rho_1 \otimes (\rho_{i \neq 1} - \sigma_{i \neq 1})\|_1 \end{aligned} \quad (56)$$

Ainda, utilizando novamente a desigualdade triangular, a relação  $\|a \otimes b\|_1 = \|a\|_1 \cdot \|b\|_1$  e a relação de normalização apresentada no Teorema 1.1 tal que  $\|\rho_1\|_1 = \|\sigma_{i \neq 1}\|_1 = 1$ :

$$\begin{aligned}
 d_{tr}(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) &\leq \frac{1}{2} \|(\rho_1 - \sigma_1) \otimes \sigma_{i \neq 1}\|_1 + \frac{1}{2} \|\rho_1 \otimes (\rho_{i \neq 1} - \sigma_{i \neq 1})\|_1 \\
 &\leq \frac{1}{2} \|(\rho_1 - \sigma_1)\|_1 \cdot \|\sigma_{i \neq 1}\|_1 + \frac{1}{2} \|\rho_1\|_1 \cdot \|(\rho_{i \neq 1} - \sigma_{i \neq 1})\|_1 \\
 &\leq \frac{1}{2} \|(\rho_1 - \sigma_1)\|_1 + \frac{1}{2} \|(\rho_{i \neq 1} - \sigma_{i \neq 1})\|_1 \\
 &\leq d_{tr}(\rho_1, \sigma_1) + d_{tr}(\rho_{i \neq 1}, \sigma_{i \neq 1})
 \end{aligned} \tag{57}$$

Desde modo, pode-se induzir o limite superior da equação 47:

$$d_{tr}(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) \leq \sum_{i=1}^n d_{tr}(\rho_i, \sigma_i) \tag{58}$$

Para a demonstração da última desigualdade, são utilizadas partes das expressões 25 e 46:

$$d_{tr}(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) \geq d_B^2(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) \geq 1 - \exp \left[ - \sum_{i=1}^n d_B^2(\rho_i, \sigma_i) \right] \tag{59}$$

Note que se a quantidade  $d_B^2(\rho_i, \sigma_i)$  no termo a direita da inequação diminui, o valor da função exponencial aumenta e, conseqüentemente, a inequação se mantém válida. Utilizando outra das inequações apresentadas na expressão 25, verifica-se que:

$$\begin{aligned}
 d_{tr}(\rho, \sigma) &\leq d_B(\rho, \sigma) \sqrt{2 - d_B^2(\rho, \sigma)} \\
 d_{tr}^2(\rho, \sigma) &\leq \left[ d_B(\rho, \sigma) \sqrt{2 - d_B^2(\rho, \sigma)} \right]^2 \\
 &\leq d_B^2(\rho, \sigma) (2 - d_B^2(\rho, \sigma)) \\
 &\leq 2d_B^2(\rho, \sigma) - d_B^4(\rho, \sigma) \\
 &\leq 2d_B^2(\rho, \sigma) \\
 \frac{1}{2} d_{tr}^2(\rho, \sigma) &\leq d_B^2(\rho, \sigma)
 \end{aligned} \tag{60}$$

Conforme discutido, pode-se substituir  $d_B^2(\rho_i, \sigma_i)$  na inequação 59 por uma quantidade menor e a mesma mantém-se válida. Portanto é obtida a quarta desigualdade do Lema 1.

$$d_{tr}(\rho^{(n)}, \sigma^{(n)}) \geq 1 - \exp \left[ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_{tr}^2(\rho_i, \sigma_i) \right] \tag{61}$$

■

### 3.3 Pré-cutoff para Produtos Tensoriais

Nesta seção, é demonstrado o comportamento de pré-cutoff para sistemas em que o gerador lindbladiano atua independentemente em subsistemas distintos. Sucintamente, são casos

especiais dos lindbladianos comutantes em que a sequência de semigrupos de um parâmetro é dada em termos de um potência tensorial  $T_t^{(n)} \equiv T_t^{\otimes n}$ .

**Teorema 3.2** (Pré-cutoff para Potências Tensoriais [2]). *Seja  $\mathcal{L} : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$  o Liouvilliano gerador de um semigrupo a um parâmetro de canais quânticos  $T_t \equiv e^{t\mathcal{L}}$ , tal que ( $t \geq 0$ ) e seja  $\lambda$  o gap espectral associado a  $\mathcal{L}$ . Então a sequência de semigrupos de um parâmetro  $T_t^{(n)} \equiv T_t^{\otimes n}$  possui um pré-cutoff na contração do traço da norma nos tempos:*

$$t_{1,n} = \frac{\ln(n)}{2\lambda} \quad (62)$$

$$t_{2,n} = \frac{\ln(n)}{\lambda} \quad (63)$$

*Demonstração.* Obter os tempos apresentados anteriormente envolve encontrar os limites inferior e superior da contração do traço da norma no regime em que  $n$  vai a infinito. Para a prova do limite inferior, partindo da definição de  $\eta_{tr}[T]$  e restringindo o supremo pelo produto tensorial de estados  $\rho = \sigma^{\otimes n}$ , tem-se (para  $c \in (0,1)$ ):

$$\begin{aligned} \eta_{tr} \left[ T_{ct_{1,n}}^{(n)} \right] &= \sup_{\rho \in S_{d^n}} d_{tr} \left( T_{ct_{1,n}}^{(n)}(\rho), T_{\varphi}^{(n)}(\rho) \right) \\ &\geq \sup_{\sigma \in S_d} d_{tr} \left( T_{ct_{1,n}}^{\otimes n}(\sigma^{\otimes n}), T_{\varphi}^{\otimes n}(\sigma^{\otimes n}) \right) \\ &\geq \sup_{\sigma \in S_d} d_{tr} \left( (T_{ct_{1,n}}(\sigma))^{\otimes n}, (T_{\varphi}(\sigma))^{\otimes n} \right) \end{aligned} \quad (64)$$

Em seguida, substitui-se o lado direito da inequação pela relação estabelecida no Lema 1 (eq. 47) e posteriormente utiliza-se o limite inferior apresentado no Teorema 2.1 (para  $L > 0$ ):

$$\begin{aligned} \eta_{tr} \left[ T_{ct_{1,n}}^{(n)} \right] &\geq 1 - \exp \left[ -\frac{n}{2} \sup_{\sigma \in S_d} d_{tr}^2(T_{ct_{1,n}}(\sigma), T_{\varphi}(\sigma)) \right] \\ &\geq 1 - \exp \left[ -\frac{L^2}{2} n e^{-2ct_{1,n}\lambda} \right] \end{aligned} \quad (65)$$

Substituindo  $t_{1,n} = \frac{\ln(n)}{2\lambda}$  e tomando o limite de  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{tr} \left[ T_{ct_{1,n}}^{(n)} \right] &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \exp \left[ -\frac{L^2}{2} n e^{-c \ln(n)} \right] \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \exp \left[ -\frac{L^2}{2} n^{1-c} \right] = 1 \end{aligned} \quad (66)$$

No limite em que  $n \rightarrow \infty$ , é satisfeita a primeira exigência do pré-cutoff (Definição 2.6).

A segunda parte da demonstração consiste na obtenção do limite superior da contração. De maneira muito semelhante ao conduzido na demonstração do Teorema 3.1, pode-se obter a seguinte relação para a contração do traço da norma para a potência tensorial  $T_t^{(n)}$ ,  $\eta_{tr}[T_t^{(n)}] \leq n\eta_{tr}[T_t \otimes \mathbb{1}_{n-1}]$ , onde  $\mathbb{1}_{n-1}$  é o canal identidade de dimensão  $n - 1$ . No Apêndice A é provado a relação  $\eta_{tr}[T_t \otimes \mathbb{1}_{n-1}] \leq 4d\eta_{tr}[T_t]$ , Equação 73. Finalmente, utilizando o limite superior do Teorema 2.1 para qualquer  $\nu < \lambda$  e  $c > 1$ , de modo que  $c\nu/\lambda > 1$ , existe  $R > 0$  tal que:

$$\begin{aligned} \eta_{tr}[T_{ct_2,n}^{(n)}] &\leq n\eta_{tr}[T_{ct_2,n} \otimes \mathbb{1}_{n-1}] \\ &\leq 4dn\eta_{tr}[T_{ct_2,n}] \\ &\leq 4dn(Re^{-ct_2,n\nu}) \end{aligned} \tag{67}$$

A segunda afirmação necessária para o pré-cutoff é satisfeita substituindo  $t_{2,n} = \frac{\ln(n)}{\lambda}$  e tomando o limite de  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{tr}[T_{ct_2,n}^{(n)}] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4Rdn e^{-\frac{c\nu}{\lambda} \ln(n)} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 4Rdn^{1-\frac{c\nu}{\lambda}} = 0 \end{aligned} \tag{68}$$

■

## 4 Aplicações e Direções Futuras

O estudo do fenômeno de cutoff possibilita diversas aplicações no contexto de sistemas quânticos dissipativos e neste capítulo são apresentados dois exemplos: a determinação com precisão do intervalo de tempo entre operações quânticas no modelo de computação quântica dissipativa, estudado por *Kastoryano et al.* [16], e a descrição de um problema ainda não estudado em que o fenômeno de cutoff pode ser utilizado na análise dos efeitos assintóticos de passeios aleatórios quânticos abertos.

### 4.1 Cutoff em Computação Quântica Dissipativa

Diversos modelos de computadores quânticos foram propostos e testados nas últimas décadas e, inevitavelmente, tais modelos apresentaram problemas associados com a descoerência nos estados de seus *qubits*. Os principais avanços na solução destas perturbações foram esforços no desenvolvimento de técnicas a fim de isolar tais sistemas do ambiente, embora outros mecanismos foram propostos envolvendo a manipulação destes fenômenos dissipativos. A computação quântica dissipativa [17] é um modelo de computação baseado nesta dinâmica e utiliza ativamente o ruído gerado pelo acoplamento do sistema principal com o banho térmico como recurso computacional a partir de propriedades dos geradores lindbladianos dos mapas CPTP descritos anteriormente. Entretanto, a independência temporal destes geradores dificulta a aplicação com precisão destas operações quânticas (*channels*) e medições.

Utilizando as mesmas proposições quanto ao fenômeno de cutoff apresentadas neste trabalho, foi proposto [16] um mecanismo para desenvolver a aplicação de sucessivas operações quânticas dissipativas compreendendo com precisão o intervalo de tempo necessário entre uma operação e a seguinte. O parâmetro dimensional que caracteriza este intervalo de tempo é o número de *qubits* envolvidos no processo dissipativo.

### 4.2 Cutoff em Passeios Aleatórios Quânticos Abertos

Passeios aleatórios quânticos abertos [18] consistem em análogos de cadeias de Markov clássicas e estabelecem uma abordagem matemática de mapas CPTP para estudos de diversos sistemas quânticos dissipativos. Ainda, este gênero de passeios aleatórios constituem uma extensão do modelo universal de Feynman [19] para computação quântica [20] e modela matematicamente a computação quântica dissipativa [17].

*Ilya Sinayskiy e Francesco Petruccione* [21] sugeriram um modelo para descrever a evolução temporal destes passeios abertos em uma perspectiva microscópica, propondo a forma dos hamiltonianos envolvidos no acoplamento de um sistema quântico com um banho térmico e discutindo os graus de liberdade interno de cada subsistema. A transição entre os nós do grafo associado com este passeio aleatório é conduzida pela interação com o ambiente e é ilustrada

pela figura 4, onde os operadores  $B_i^j$  descrevem a transformação nos graus de liberdade do caminhante no processo de transição entre os nós  $i$  e  $j$ . Tais operadores estão associados com parâmetros termodinâmicos do ambiente, permitindo a relação destes com a dinâmica de evolução do sistema principal.

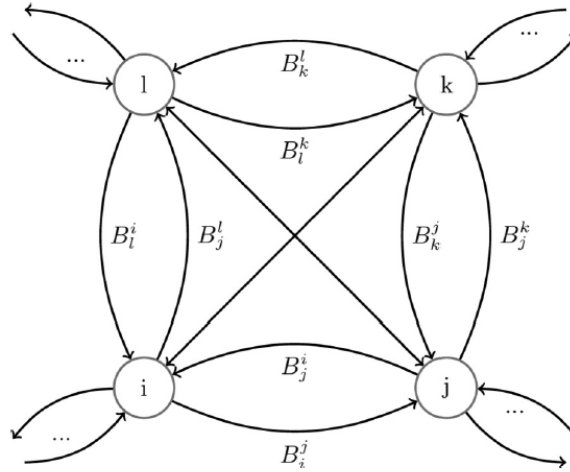


Figura 4 – Grafo do passeio aleatório quântico aberto, onde os operadores  $B_i^j$  descrevem a interferência causada pelo banho térmico no processo de transição entre os nós  $i$  e  $j$ . (Figura de *Sinayskiy e Petruccione* [21]).

Foi demonstrado que a equação master que caracteriza esta evolução, na forma da equação de lindblad (Eq. 17) para a matriz densidade  $\rho$  da distribuição de probabilidade da posição do caminhante, pode ser reduzida a um sistema de equações diferenciais do tipo

$$\frac{d}{dt}\rho_i(t) = \mathcal{L}_i(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n), \tag{69}$$

onde  $i = 1, \dots, n$  indexa os possíveis nós a serem percorridos pelo caminhante,  $\rho_i$  são operadores densidades associado e estes nós tais que  $\rho = \sum_i \rho_i \otimes |i\rangle \langle i|$  e os geradores  $\mathcal{L}_i$  são construídos a partir dos operadores  $B_i^j$

O comportamento assintótico de determinados passeios aleatórios quânticos é conhecido e no caso de passeios sobre a reta  $\{\mathbb{Z}\}$  a distribuição de probabilidade do caminhante depende dos graus de liberdade internos do sistema [22]. Fisicamente, os graus de liberdade podem ser associados com o spin ou a polarização dos sistemas de dois níveis descritos na Seção 1.2. O Teorema 3.2 pode ser generalizado para uma sequência de  $T_t^{(n)}$  de  $n$  produtos tensoriais de operadores distintos  $T_t^i = e^{t\mathcal{L}_i}$  e, desta maneira, seguindo o exemplo do passeio descrito, o formalismo de cutoff para sistemas quânticos abertos pode possibilitar o estudo dos efeitos assintóticos de passeios quânticos sobre grafos com maiores níveis de complexidade.

## Considerações Finais

O robusto avanço da teoria da informação quântica nas últimas três décadas acentuou a necessidade da compreensão de fenômenos dissipativos na formulação da mecânica quântica. Recentemente, vertentes deste desenvolvimento sugerem a utilização de tais efeitos dissipativos a favor dos métodos computacionais. A análise do fenômeno de cutoff no âmbito de sistemas quânticos dissipativos constitui uma conveniente ferramenta para o entendimento da dinâmica de convergência destes sistemas e, conseqüentemente, nos estudos das teorias da informação e da computação quântica. É importante salientar que a formulação matemática de cutoff apresentada neste trabalho não é única e, portanto, uma análise equivalente pode ser feita a partir de outros parâmetros de distinguibilidade entre os estados quânticos em conformidade com o comportamento assintótico do processo estudado.

## Referências

- 1 ALDOUS, D.; DIACONIS, P. Shuffling cards and stopping times. **The American Mathematical Monthly**, JSTOR, v. 93, n. 5, p. 333–348, 1986. Citado 2 vezes nas páginas [1](#) e [10](#).
- 2 KASTORYANO, M. J.; REEB, D.; WOLF, M. M. A cutoff phenomenon for quantum markov chains. **Journal of Physics A**, v. 45, n. 7, p. 075307, 2012. Citado 7 vezes nas páginas [1](#), [11](#), [13](#), [14](#), [15](#), [16](#) e [19](#).
- 3 KRAUS, B. et al. Preparation of entangled states by quantum markov processes. **Physical Review A**, APS, v. 78, n. 4, p. 042307, 2008. Citado na página [1](#).
- 4 VERSTRAETE, F.; WOLF, M. M.; CIRAC, J. I. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. **Nature physics**, Nature Publishing Group, v. 5, n. 9, p. 633, 2009. Citado na página [1](#).
- 5 LINDEN, N. et al. Quantum mechanical evolution towards thermal equilibrium. **Physical Review E**, APS, v. 79, n. 6, p. 061103, 2009. Citado na página [1](#).
- 6 KONNO, N.; YOO, H. J. Limit theorems for open quantum random walks. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 150, n. 2, p. 299–319, 2013. Citado na página [6](#).
- 7 ATTAL, S.; GUILLOTIN-PLANTARD, N.; SABOT, C. Central limit theorems for open quantum random walks and quantum measurement records. **Annales Henri Poincaré**, v. 16, n. 1, p. 15–43, 2015. Citado na página [6](#).
- 8 NORRIS, J. R. **Markov Chains**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics). Citado na página [6](#).
- 9 HILLE, E. **Functional Analysis And Semi Groups**. [S.l.]: American mathematical Society, 1948. Citado na página [7](#).
- 10 YOSIDA, K. On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, Mathematical Society of Japan, v. 1, n. 1, p. 15–21, 1948. Citado na página [7](#).
- 11 LINDBLAD, G. On the generators of quantum dynamical semigroups. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, v. 48, n. 2, p. 119–130, 1976. Citado na página [7](#).
- 12 GORINI, V.; KOSSAKOWSKI, A.; SUDARSHAN, E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. **Journal of Mathematical Physics**, v. 17, n. 5, p. 821–825, 1976. Citado na página [7](#).
- 13 RIVAS, A.; HUELGA, S. F. **Open quantum systems**. [S.l.: s.n.], 2012. ISSN 2191-5423. Citado na página [8](#).
- 14 MINGANTI, F. et al. Spectral theory of liouvillians for dissipative phase transitions. **Physical Review A**, v. 98, n. 4, p. 042118, 2018. Citado na página [8](#).
- 15 NIELSEN, I. L. C. M. A. **Quantum Computation and Quantum Information**. [S.l.]: Cambridge University Pr., 2001. ISBN 1107002176. Citado na página [10](#).



- 16 KASTORYANO, M. J.; WOLF, M. M.; EISERT, J. Precisely timing dissipative quantum information processing. **Physical review letters**, APS, v. 110, n. 11, p. 110501, 2013. Citado na página 21.
- 17 VERSTRAETE, F.; WOLF, M. M.; CIRAC, J. I. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation. **Nature physics**, Nature Publishing Group, v. 5, n. 9, p. 633, 2009. Citado na página 21.
- 18 ATTAL, S. et al. Open quantum random walks. **Journal of Statistical Physics**, v. 147, n. 4, p. 832–852, 2014. Citado na página 21.
- 19 FEYNMAN, R. P. Quantum mechanical computers. **Foundations of Physics**, v. 16, n. 6, p. 507–531, Jun 1986. ISSN 1572-9516. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01886518>>. Citado na página 21.
- 20 CHILDS, A. M. Universal computation by quantum walk. **Physical review letters**, APS, v. 102, n. 18, p. 180501, 2009. Citado na página 21.
- 21 SINAYSKIY, I.; PETRUCCIONE, F. Microscopic derivation of open quantum walks. **Physical Review A**, v. 92, n. 3, p. 032105, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- 22 SINAYSKIY, I.; PETRUCCIONE, F. Properties of open quantum walks on. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 2012, n. T151, p. 014077, 2012. Citado na página 22.
- 23 PAULSEN, V. **Completely Bounded Maps and Operator Algebras**. [S.l.: s.n.], 2003. Citado na página 27.

## Apêndices

## APÊNDICE A – Prova da Desigualdade $\eta_{tr} [T \otimes \mathbf{1}_d] \leq 4d\eta_{tr} [T]$

Previamente a prova da inequação  $\eta_{tr} [T \otimes \mathbf{1}_d] \leq 4d\eta_{tr} [T]$ , são necessárias as seguintes definições: sejam  $X \in \mathcal{M}_d \otimes \mathcal{M}_{d'}$ ,  $A + iB \in \mathcal{M}_d$  e  $P, Q \in \mathcal{M}_d$  matrizes arbitrárias onde  $A$  e  $B$  são hermitianas e  $P$  e  $Q$  são positivas semidefinidas tais que  $PQ = 0$ . Ainda, uma métrica usualmente utilizada na  $C^*$ -álgebra um o produto tensorial de determinado operador linear com o mapa identidade é a norma-cb (*completely bounded norm*).

**Definição A.1** (Norma completamente limitada [23]). Seja  $T$  um operador linear e  $T \otimes \mathbf{1}_n$  o produto tensorial de  $T$  pelo mapa identidade de dimensão  $n$ , a norma  $\|(T \otimes \mathbf{1}_n)(X)\|$ , para  $\|X\| \leq 1$  pode aumentar indefinidamente conforme  $n \rightarrow \infty$ . Então, define-se a norma completamente limitada por:

$$\|T\|_{cb} = \sup_n \|(T \otimes \mathbf{1}_n)(X)\| \quad (70)$$

*Demonstração.* A indução da prova consiste principalmente em limitar o supremo da definição da contração do traço da norma:

$$\begin{aligned} \eta_{tr} [T \otimes \mathbf{1}_d] &= \sup_{\rho \in \mathcal{S}_{dd'}} d_{tr} (T \otimes \mathbf{1}_d(\rho), T_\varphi \otimes \mathbf{1}_d(\rho)) \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\rho \in \mathcal{S}_{dd'}} \|T \otimes \mathbf{1}_d(\rho) - T_\varphi \otimes \mathbf{1}_d(\rho)\|_1 \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\|X\|_1 \leq 1} \|((T - T_\varphi) \otimes \mathbf{1}_d)(X)\|_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \|T - T_\varphi\|_{cb} \leq \frac{d}{2} \sup_{\|A+iB\|_1 \leq 1} \|(T - T_\varphi)(A + iB)\|_1 \end{aligned} \quad (71)$$

Limitando novamente o supremo, utilizando que

$$\|A\|_1 = \frac{1}{2} \|(A + iB) + (A - iB)\|_1 \leq \frac{1}{2} (\|A + iB\|_1 + \|A - iB\|_1) = \|A + iB\|_1, \quad (72)$$

então:

$$\begin{aligned} \eta_{tr} [T \otimes \mathbf{1}_d] &\leq d \sup_{\|A\|_1 \leq 1} \|(T - T_\varphi)(A)\|_1 \\ &\leq d \sup_{\|P-Q\|_1 \leq 1} \|(T - T_\varphi)(P - Q)\|_1 \\ &\leq 2d \sup_{\|P\|_1 \leq 1} \|(T - T_\varphi)(P)\|_1 = 4d\eta_{tr} [T] \end{aligned} \quad (73)$$

■