



Trabalho de Conclusão de Curso

**Máquinas de Vetor de Suporte e Modelos de  
Mudança Markoviana de Regimes para  
classificação de Séries Temporais e Séries  
Temporais Funcionais**

Vitória Maria Martini Wendt

3 de dezembro de 2018

Vitória Maria Martini Wendt

**Máquinas de Vetor de Suporte e Modelos de Mudança  
Markoviana de Regimes para classificação de Séries  
Temporais e Séries Temporais Funcionais**

Trabalho de Conclusão apresentado à comissão de Graduação do Departamento de Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Estatística.

Orientador(a): Prof. Dr. Eduardo de Oliveira Horta

Porto Alegre  
Dezembro de 2018

Vitória Maria Martini Wendt

**Máquinas de Vetor de Suporte e Modelos de Mudança  
Markoviana de Regimes para classificação de Séries  
Temporais e Séries Temporais Funcionais**

Este Trabalho foi julgado adequado para obtenção dos créditos da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso em Estatística e aprovado em sua forma final pela Orientador(a) e pela Banca Examinadora.

Orientador(a): \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Eduardo de Oliveira Horta, UFRGS  
Doutor(a) pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann, UFRGS  
Doutor(a) pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS

Porto Alegre  
Dezembro de 2018

# Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional.

Agradeço ao Professor Eduardo Horta pelo tempo doado a minha aprendizagem e ao suporte neste e em outros trabalhos que desenvolvemos juntos.

Agradeço a todos os professores que agregaram algum tipo de conhecimento à minha formação.

# Resumo

Classificação de séries temporais é um tema importante para as mais diversas áreas da ciência. Neste sentido se destacam aplicações no setor financeiro e também de tecnologia. Porém, classificar dados com correlação temporal não é uma tarefa fácil. Estes processos por sua vez podem apresentar uma estrutura que dificulta a separação em classes de forma direta, tornando-se necessária a utilização de metodologias mais sofisticadas para tanto. Desta forma, este trabalho tem como objetivo introduzir, testar e comparar dois métodos de classificação de séries temporais e também de séries temporais funcionais: Máquinas de Vetor de Suporte e Modelos Markovianos de Mudança de Regimes.

**Palavras-Chave:** Classificação, Séries Temporais, Séries Temporais Funcionais, SVM, Modelos Markovianos.

# Abstract

Time Series classification is an important subject in multiple areas in science. In this sense, applications in the financial and technological sectors are the most prominent. However, classify data with time correlation is not an easy task. Oftentimes, data from different classes can only be assessed through other observable time series. These processes, on the other hand, can present a structure that difficult directly classification, becoming necessary the use of more complex methodologies. Therefore, this work has the objective of introducing, testing and comparing two methods of time series classification and also functional time series classification: Support Vector Machines and Markov Switching Regimes Models.

**Keywords:** Classification, Time Series, Functional Time Series, SVM, Markovian Models.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Referencial Teórico</b>	<b>11</b>
<b>2.1</b>	<b>Séries Temporais</b>	<b>11</b>
2.1.1	Metodologia	11
<b>2.2</b>	<b>Séries Temporais Funcionais</b>	<b>11</b>
2.2.1	Metodologia	12
<b>2.3</b>	<b>Máquinas de Vetor de Suporte</b>	<b>12</b>
2.3.1	Metodologia	12
<b>3</b>	<b>Estudo por simulação</b>	<b>14</b>
<b>3.1</b>	<b>Geração dos dados</b>	<b>14</b>
3.1.1	Geração das Séries Temporais	14
3.1.2	Geração de Séries Temporais Funcionais	15
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>17</b>
<b>4.1</b>	<b>Classificação de Séries Temporais</b>	<b>17</b>
4.1.1	Modelos de Mudança Markoviana de Regimes	17
4.1.2	Máquinas de Vetor de Suporte	21
<b>4.2</b>	<b>Classificação de Séries Temporais Funcionais</b>	<b>22</b>
4.2.1	Modelos de Mudança Markoviana de Regimes	22
4.2.2	Máquinas de Vetor de Suporte	24
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>26</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>26</b>

# Lista de Figuras

Figura 3.1:	Gráfico bivariado dos processos $Z_1$ e $Z_2$ com distinção de regimes (vermelho e azul). $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$ (esquerda); $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ (centro); $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.9$ (direita). . . . .	15
Figura 3.2:	Gráfico de dispersão dos processos $Z_1$ e $Z_2$ com distinção de regimes (vermelho e azul). $\sigma_1 = 0.2$ e $\sigma_2 = 0.9$ (esquerda); $\sigma_1 = 0.4$ e $\sigma_2 = 0.6$ (centro); $\sigma_1 = 0.9$ e $\sigma_2 = 0.2$ (direita). . . . .	15
Figura 3.3:	Primeiras seis observações da Série Temporal Funcional $Y$ . As duas cores indicam os diferentes regimes. . . . .	16
Figura 4.1:	Gráfico de dispersão do processo $Z$ (esquerda); Série temporal $Z_1$ (centro) e $Z_2$ (direita) com respectivos estados originais em cada tempo $t$ ; . . . . .	17
Figura 4.2:	Heatmaps para tamanho de amostra 100 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	18
Figura 4.3:	Heatmaps para tamanho de amostra 500 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	18
Figura 4.4:	Heatmaps para tamanho de amostra 1000 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	18
Figura 4.5:	Gráfico de dispersão do processo $Z$ (direita); Série temporal $Z_1$ (centro) e $Z_2$ (esquerda) com respectivos estados originais em cada tempo $t$ ; . . . . .	19
Figura 4.6:	Heatmaps para tamanho de amostra 100 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	19
Figura 4.7:	Heatmaps para tamanho de amostra 500 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	19
Figura 4.8:	Heatmaps para tamanho de amostra 1000 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	19
Figura 4.9:	Gráfico de dispersão do processo $Z$ (direita); Série temporal $Z_1$ (centro) e $Z_2$ (esquerda) com respectivos estados originais em cada tempo $t$ ; . . . . .	20
Figura 4.10:	Heatmaps para tamanho de amostra 100 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	20
Figura 4.11:	Heatmaps para tamanho de amostra 500 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	20
Figura 4.12:	Heatmaps para tamanho de amostra 1000 e $w = 0.4$ (esquerda), $w = 0.5$ (centro) e $w = 0.6$ (direita) . . . . .	21



Figura 4.13: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo e tamanho de amostra 100 (esquerda), 500 (centro) e 1000 (direita) . . . . .	21
Figura 4.14: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo e tamanho de amostra 100 (esquerda), 500 (centro) e 1000 (direita) . . . . .	22
Figura 4.15: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo e tamanho de amostra 100 (esquerda), 500 (centro) e 1000 (direita) . . . . .	22
Figura 4.16: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	23
Figura 4.17: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	23
Figura 4.18: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	23
Figura 4.19: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 100 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	24
Figura 4.20: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 500 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	24
Figura 4.21: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	24
Figura 4.22: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 100 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	25
Figura 4.23: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 500 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	25
Figura 4.24: Heatmaps para $w = 0.5$ fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e $p = 1$ (esquerda), $p = 6$ (centro) e $p = 20$ (direita) . . . . .	25

# 1 Introdução

Em uma segunda-feira, dia 20 de agosto de 2018, diversos mercados de compra e venda de ativos do mundo acumulavam perdas. Nos Estados Unidos, o índice futuro S&P Dow Jones recuava em 0,06 pontos percentuais e o Ibovespa por sua vez, vinha de uma queda intradiária de 0,04%. No relógio, eram aproximadamente duas horas da tarde no horário de Washinton (capital), quando os índices norte-americanos e globais apresentaram uma abrupta inversão em suas performances. Enquanto isto, do outro lado do mundo, a chamada “Chinese A-shares”, ações de empresas nacionais que são comercializadas, em sua quase totalidade, por cidadãos chineses, apresentava uma acentuada alta em seu valor de mercado. Esse cenário se assemelhava em muito a outros, em que o governo do país asiático agia ativamente em sua economia para manipular os preços de ativos. Pouco tempo depois, os rumores de intervenção da administração chinesa foram confirmados pela imprensa internacional. No entanto, esta ação não era tratada como novidade pelos especialistas financeiros. Desde a turbulência enfrentada no final do ano de 2015 e início de 2016, as medidas estadistas sobre o mercado acionário chinês já eram bastante conhecidas. [Durden \(2018\)](#)

Em [Hamilton \(1988\)](#), mudanças abruptas em políticas governamentais são citadas como possíveis causas de alterações no curso da economia. Desta forma, qualquer investidor atento pode se beneficiar do cenário apresentado no parágrafo anterior para lucrar. Na economia chinesa em particular, modelos de classificação de regimes em séries temporais podem ser uma ferramenta ainda mais útil para embasar estratégias de investimento. Porém, estes tipos de modelos não somente são indicados para análises financeiras, como também podem ser utilizados na classificação de imagens, tendências meteorológicas, entre outros.

Dito isto, este trabalho tem como objetivo analisar e testar modelos para classificação de dados com correlação temporal. Deste modo, algumas metodologias não tão disseminadas entre o público acadêmico serão investigadas, como é o caso de Séries Temporais Funcionais, Máquinas de Vetor de Suporte e Modelos de Mudança Markoviana de Regimes.

## 2 Referencial Teórico

### 2.1 Séries Temporais

Em [Shumway e Stoffer \(2010\)](#), uma série temporal é definida como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas de acordo com a ordem que são obtidas no tempo. Deste modo, dado o conjunto  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $X$  será uma Série Temporal se a seguinte afirmação pode ser feita: o evento  $x_1$  é anterior a  $x_2$ , assim como  $x_2$  é anterior a  $x_3$  e por consequência,  $x_1$  é anterior a  $x_3$ .

Analisar dados que apresentam correlação temporal exige que métodos de estimação e inferência distintos dos métodos clássicos, desenvolvidos para lidar com o cenário iid, sejam utilizados. Alguns modelos que podem ser empregados nestes casos são Ruído Branco, Médias Móveis, Passeio Aleatório, Modelos Autorregressivos, entre outros.

#### 2.1.1 Metodologia

Um modelo autoregressivo de ordem  $k$  é definido como

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_k x_{t-k} + w_t, \quad (2.1)$$

onde  $x_t$  é estacionário e  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$  são constantes diferentes de zero. Nós assumiremos ainda que  $w_t$  é um processo Gaussiano com média zero e variância  $\sigma^2$  (Ruído Branco). Neste trabalho em particular, o valor esperado da Série Temporal  $X$  será zero. Esta definição é dada por conveniência já que posteriormente, é necessário um processo com média zero para aplicar o método de Séries Temporais Funcionais.

### 2.2 Séries Temporais Funcionais

O método de séries temporais funcionais tem recebido crescente atenção na literatura estatística. Ver, por exemplo, [Bosq \(2000\)](#). Com o aumento da capacidade computacional e de armazenamento ocorrida nas últimas décadas, dados funcionais tornaram-se ubíquos nas mais diversas áreas da ciência: medicina computadorizada, meteorologia, finanças, entre outros. Dados funcionais são dados cuja representação tipicamente é dada por uma curva ou superfície; nesse contexto, uma série temporal funcional é uma sequência de observações de dados funcionais ordenados no tempo.

## 2.2.1 Metodologia

O método de análise de componentes principais funcionais é central no contexto de dados funcionais e séries temporais funcionais. Em suma, dado um conjunto de observações de dados funcionais (que podem ser uma série temporal)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a representação de Karhunen–Loève garante que, sob certas condições de regularidade, a seguinte representação é válida:

$$x_t(u) = \mathbb{E}x_1(u) + \sum_{j=1}^d Z_{t,j} \varphi_j(u), \quad (2.2)$$

onde  $Z_{t,j}$  são variáveis aleatórias reais de média zero e variância  $\lambda_j$ , e onde  $\varphi_j$  são funções determinísticas que satisfazem a equação

$$\varphi_j(u) = (1/\lambda_j) \int \text{Cov}(y_0(u), y_0(v)) \varphi_j(v) dv.$$

Assim, por exemplo, a dinâmica dos dados funcionais  $x_1, \dots, x_n$  se resume à dinâmica do vetor aleatório  $\mathbf{Z}_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})$ . Esse fato é importante pois permite ao analista modelar e prever os dados funcionais através de métodos usuais de séries temporais multivariadas, como o modelo VAR.

Nesse contexto, uma importante contribuição foi dada por [Bathia et al. \(2010\)](#). Em muitos casos, os dados funcionais de interesse,  $x_t$ , são mensurados na presença de ruído  $\varepsilon_t$ , de forma que o estatístico tem acesso somente aos dados  $(y_t)$ , onde

$$y_t(u) = x_t(u) + \varepsilon_t(u), \quad \mathbb{E}(\varepsilon_t(u)) = 0.$$

Em um cenário desse tipo, torna-se impossível estimar a estrutura de componentes principais funcionais. Os autores propõem uma representação alternativa,

$$x_t = \mathbb{E}x_1(u) + \sum_{j=1}^d W_{t,j} \psi_j(u),$$

a qual pode ser recuperada a partir das funções de autocovariância defasadas amostrais (ver [Bathia et al. \(2010\)](#) para detalhes).

O procedimento de estimação baseia-se no cômputo das quantidades  $\int y_t(u) y_s(u) du$ , com  $t, s = 1, \dots, n$ , a partir das quais é possível recuperar os demais estimadores da teoria. Esse fato mostra que a metodologia pode rapidamente demandar um elevado custo computacional.

## 2.3 Máquinas de Vetor de Suporte

Máquinas de Vetor de Suporte é um algoritmo de Redes Neurais utilizado para classificação de dados. Esta metodologia é mais conhecida na área de Ciência da Computação e será introduzida de forma sucinta abaixo.

### 2.3.1 Metodologia

Considere uma matriz de dados  $Z$ . Em particular, esta matriz pode ser formada de  $k$  séries temporais distintas. O objetivo então, é separar cada observação

multivariada  $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  em grupos distintos. Em SVM, esta classificação é feita através da construção de um hiperplano em que dados não lineares podem ser classificados através de modelos lineares. Desta forma, SVM é conhecido como o algoritmo que encontra a margem máxima do hiperplano. Esta margem é calculada pela distância máxima entre os vetores de suporte no novo plano. O hiperplano de margem máxima pode ser acessado através da equação a seguir:

$$y = b + \sum \alpha_i y_i K(x(i), x), \quad (2.3)$$

onde  $y_i$  é a classe de treinamento dos dados  $x(i)$ , os dados  $x(i)$  são os vetores de suporte,  $b$  e  $\alpha_i$  são parâmetros que determinam o hiperplano, e a função  $K(x(i), x)$  é a função Kernel do modelo.

Particularmente neste trabalho, a metodologia de Máquinas de Vetor de Suporte será utilizada de forma não supervisionada, ou seja, o vetor  $y_i$  não será acessado para a construção do hiperplano ótimo. Desta forma, a parte de treinamento do modelo será ignorada, partindo-se direto para a fase de implementação e classificação dos dados. Da mesma forma, fixaremos o kernel e o custo do modelo em valores fixos para que estes não influam nos resultados finais. Porém, para aplicação prática desta metodologia, é importante que ambos sejam definidos minuciosamente pelo usuário já que influem diretamente na construção do hiperplano ótimo e consequentemente na classificação dos dados.

## 3 Estudo por simulação

### 3.1 Geração dos dados

Antes da apresentação dos dados, é importante que seja retomado o objetivo principal deste trabalho: introduzir e comparar métodos de classificações de séries temporais (funcionais ou não). Deste modo, nas próximas subseções, é explorada a geração de Séries Temporais e Séries Temporais Funcionais segundo esta perspectiva.

#### 3.1.1 Geração das Séries Temporais

Dado o espaço de estados  $S = \{0, 1\}$ ,  $\sigma_1 > 0$  e  $\sigma_2 > 0$  e a matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 1 - p_{12} & p_{12} \\ p_{21} & 1 - p_{21} \end{bmatrix},$$

com  $0 < p_{12} < 1$  e  $0 < p_{21} < 1$ , o processo estocástico latente é dado por

$$\mu_t \sim \text{Markov}(P, \Lambda), \quad (3.1)$$

onde  $\Lambda$  é a distribuição invariante para  $P$ . Note que  $p$  é igual à probabilidade de o processo permanecer no mesmo estado  $s \in S$  em que estava no tempo  $t - 1$ . Da mesma forma,  $q$  é igual à probabilidade de o processo trocar de estado.

A partir da Série Temporal latente  $\mu$ , assumimos que os dados observáveis sejam gerados por

$$Z_{t,1} | \mu_t \sim N(0, \sigma_1 + \mu_t), \quad (3.2)$$

$$Z_{t,2} | \mu_t \sim N(0, \sigma_2 + |\mu_t - 1|). \quad (3.3)$$

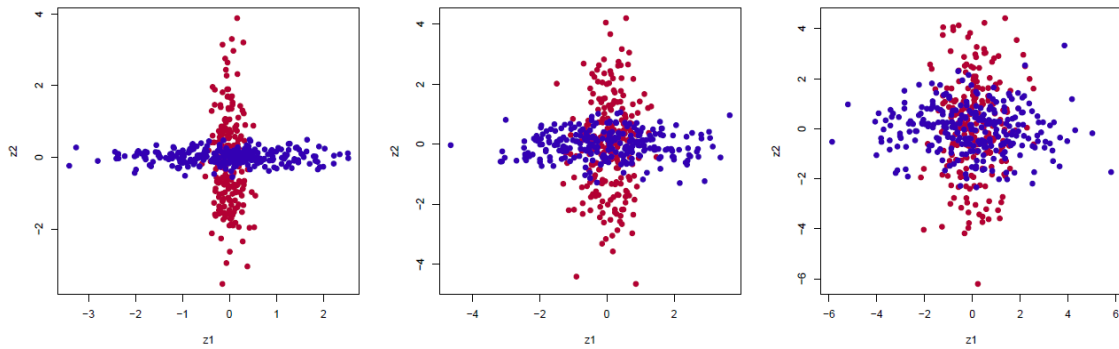


Figura 3.1: Gráfico bivariado dos processos  $Z_1$  e  $Z_2$  com distinção de regimes (vermelho e azul).  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$  (esquerda);  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$  (centro);  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.9$  (direita).

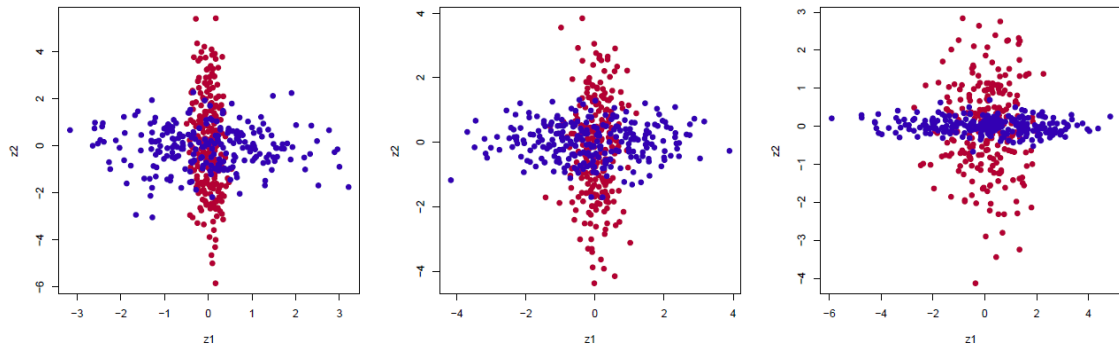


Figura 3.2: Gráfico de dispersão dos processos  $Z_1$  e  $Z_2$  com distinção de regimes (vermelho e azul).  $\sigma_1 = 0.2$  e  $\sigma_2 = 0.9$  (esquerda);  $\sigma_1 = 0.4$  e  $\sigma_2 = 0.6$  (centro);  $\sigma_1 = 0.9$  e  $\sigma_2 = 0.2$  (direita).

### 3.1.2 Geração de Séries Temporais Funcionais

Para gerar as Séries Temporais Funcionais, os processos criados na subseção anterior serão retomados. Sejam os processos estocásticos  $Z_1$  e  $Z_2$ , a Série Temporal Funcional que consideraremos é definida por

$$Y_t(x) = Z_{t,1} \sin(2\pi x) + Z_{t,2} \cos(2\pi x) + B_t(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Na prática, cada observação  $t$  é vetor formada por  $m$  pontos, sendo  $m$  o tamanho da grade de pontos  $\{x_1, \dots, x_m\}$  em  $[0, 1]$  na qual são feitas as mensurações de  $Y_t(x_j)$ .

Por fim,  $(B_t(x) : x \in [0, 1])$  é uma Brownian Bridge, isto é, um processo Gaussiano com estrutura de covariância  $s \times (\min(x, y) - xy)$ , onde  $s$  é um parâmetro de escala. Além disso, assumimos que  $B_t$  e  $B_s$  são independentes se  $t \neq s$ , e que  $B_t$  e  $(Z_{s,1}, Z_{s,2})$  são também independentes, para todo par  $t, s$ .

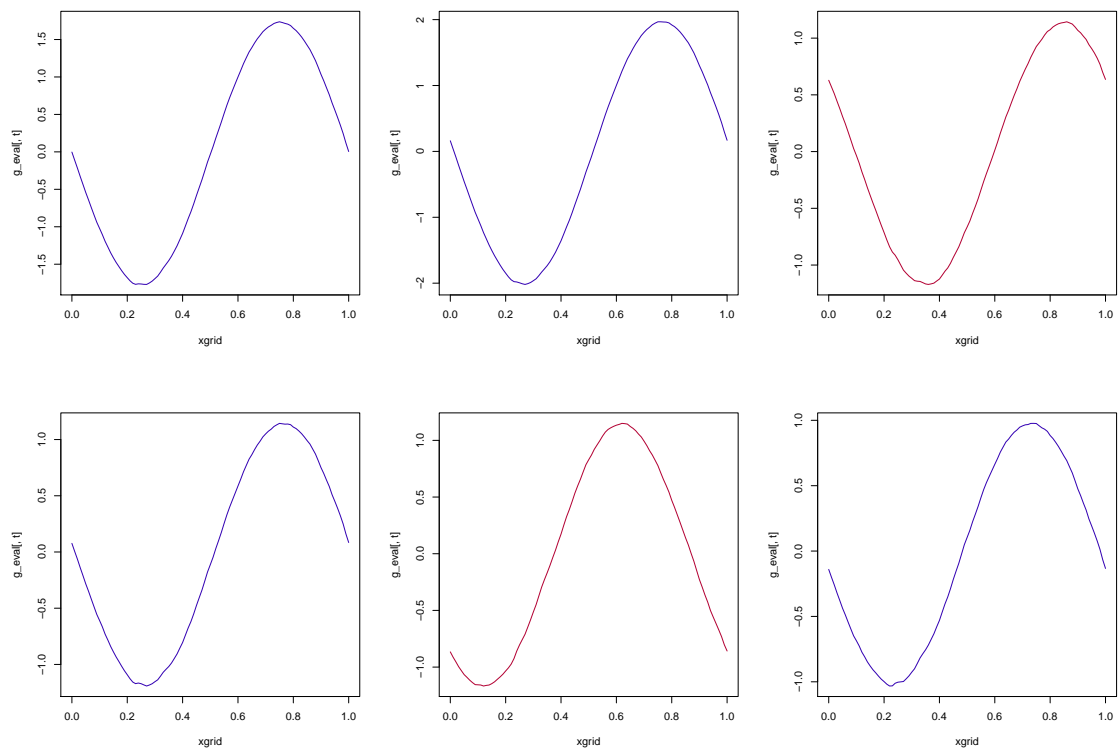


Figura 3.3: Primeiras seis observações da Série Temporal Funcional  $Y$ . As duas cores indicam os diferentes regimes.



## 4 Resultados

Este capítulo será dividido entre duas seções, a saber “Classificação de Séries Temporais” e “Classificação de Séries Temporais Funcionais”. Estas por sua vez, serão subdivididas entre “Modelos de Mudança Markoviana de Regimes” e “Máquinas de Vetor de Suporte”, onde a performance de cada metodologia será explorada para ambos os cenários de classificação. Os resultados de performances serão acessados através de heatmaps, onde o score será representado pelo percentual de acertos do modelo considerando um específico conjunto de parâmetros.

### 4.1 Classificação de Séries Temporais

#### 4.1.1 Modelos de Mudança Markoviana de Regimes

Dado o processo estocástico latente construído em 3.1, o objetivo desta subseção é apresentar os resultados da estimação deste processo pelo método de Modelos de Mudança Markoviana de Regimes a partir dos dados observáveis construídos em 3.2 e 3.3.

No primeiro cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição baixa entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.8, contra 0.2 a probabilidade de mudança de estado.

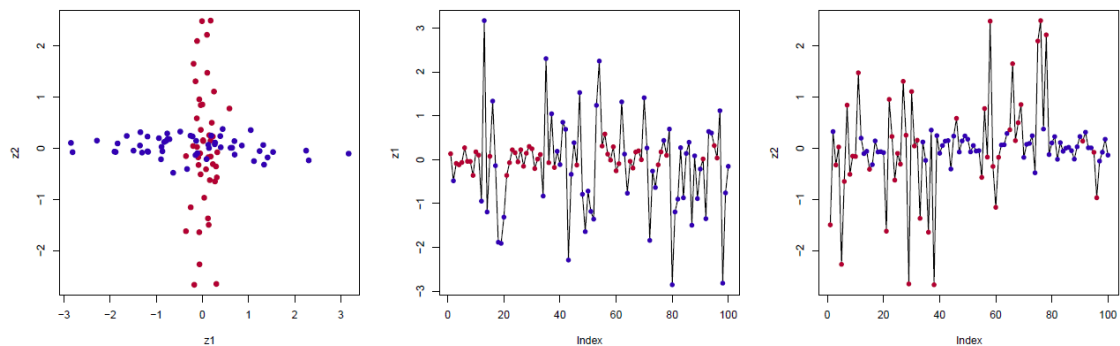


Figura 4.1: Gráfico de dispersão do processo  $Z$  (esquerda); Série temporal  $Z_1$  (centro) e  $Z_2$  (direita) com respectivos estados originais em cada tempo  $t$ ;

Seja  $w$  o threshold utilizado para classificação das probabilidades do Modelo de Mudança Markoviana em regimes, os resultados obtidos estão descritos nos heatmaps a seguir.

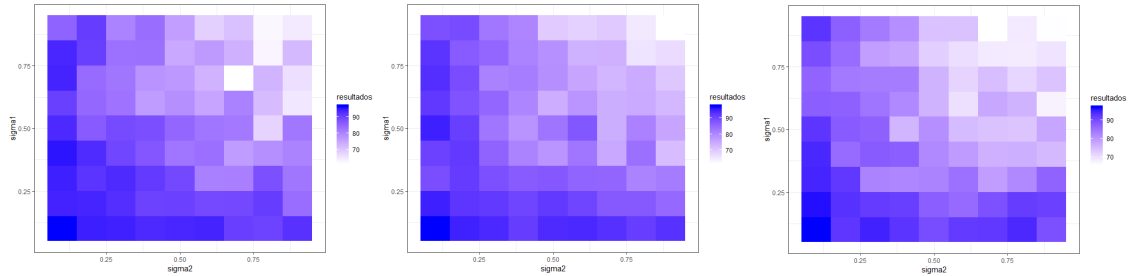


Figura 4.2: Heatmaps para tamanho de amostra 100 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

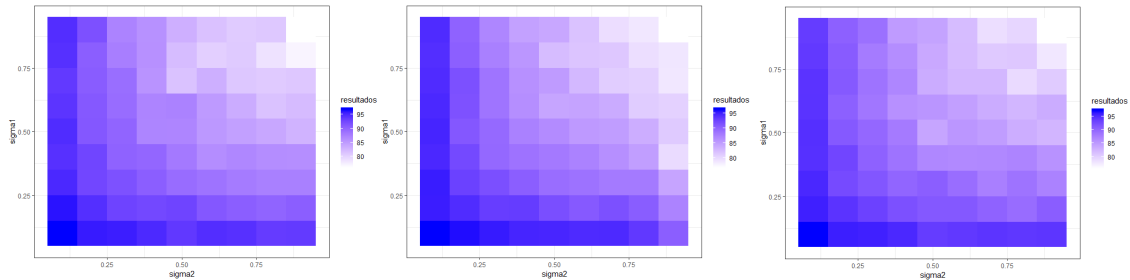


Figura 4.3: Heatmaps para tamanho de amostra 500 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

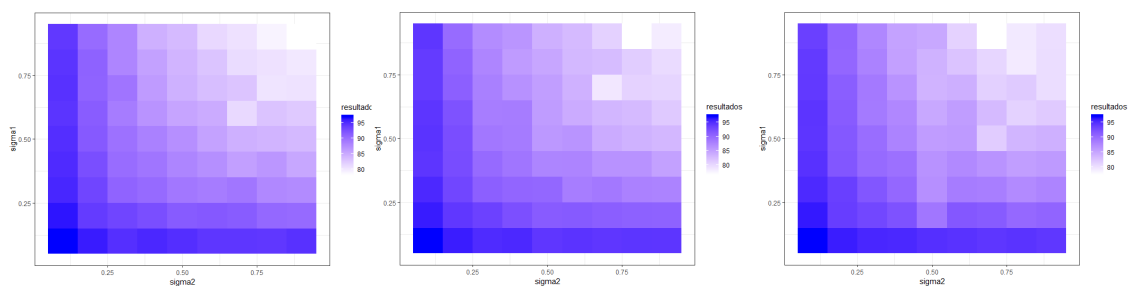


Figura 4.4: Heatmaps para tamanho de amostra 1000 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

No segundo cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição 0.5 entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.5, contra 0.5 a probabilidade de mudança de estado.

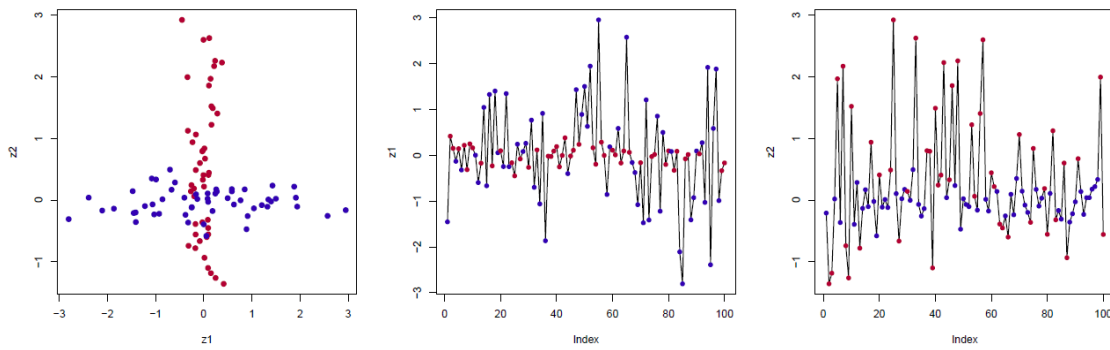


Figura 4.5: Gráfico de dispersão do processo  $Z$  (direita); Série temporal  $Z_1$  (centro) e  $Z_2$  (esquerda) com respectivos estados originais em cada tempo  $t$ ;

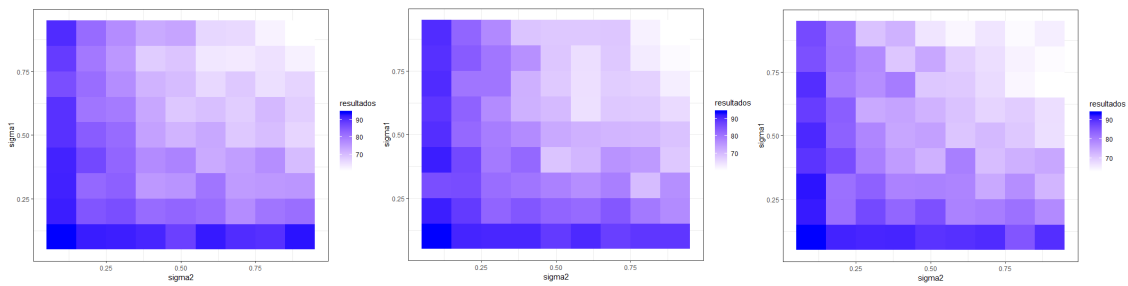


Figura 4.6: Heatmaps para tamanho de amostra 100 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

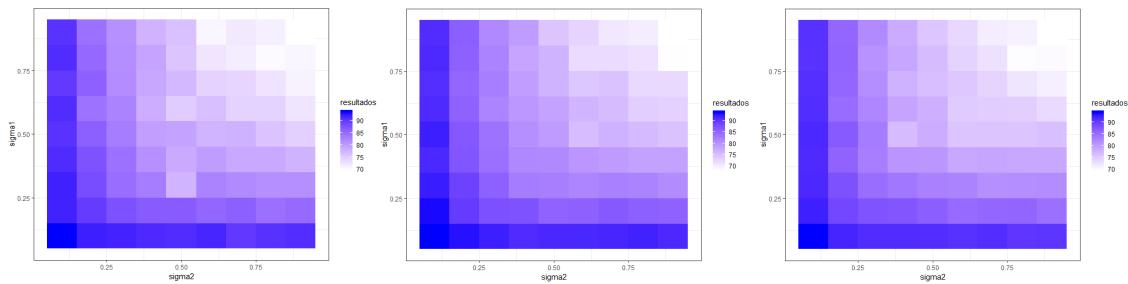


Figura 4.7: Heatmaps para tamanho de amostra 500 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

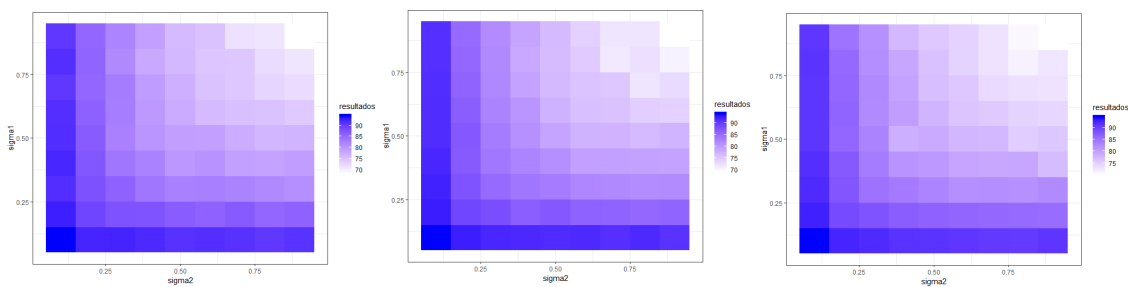


Figura 4.8: Heatmaps para tamanho de amostra 1000 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

No terceiro cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição 0.7 entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade do processo permanecer no estado corrente era de 0.7, contra 0.3 a probabilidade de mudança de estado.

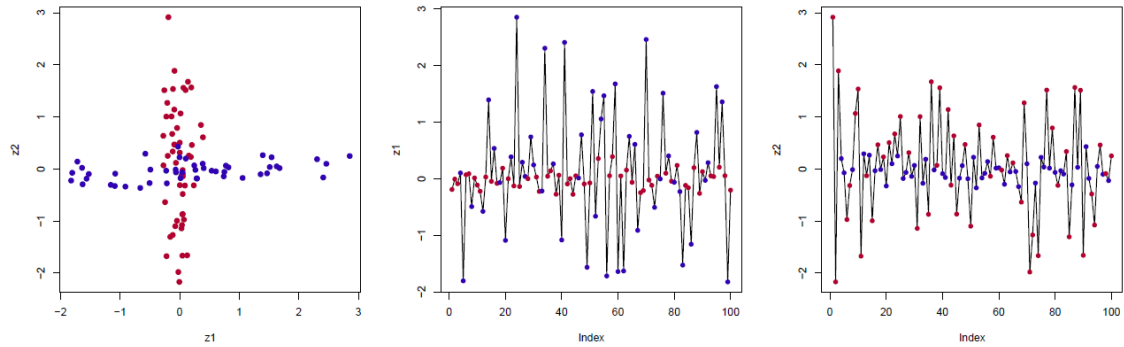


Figura 4.9: Gráfico de dispersão do processo  $Z$  (direita); Série temporal  $Z_1$  (centro) e  $Z_2$  (esquerda) com respectivos estados originais em cada tempo  $t$ ;

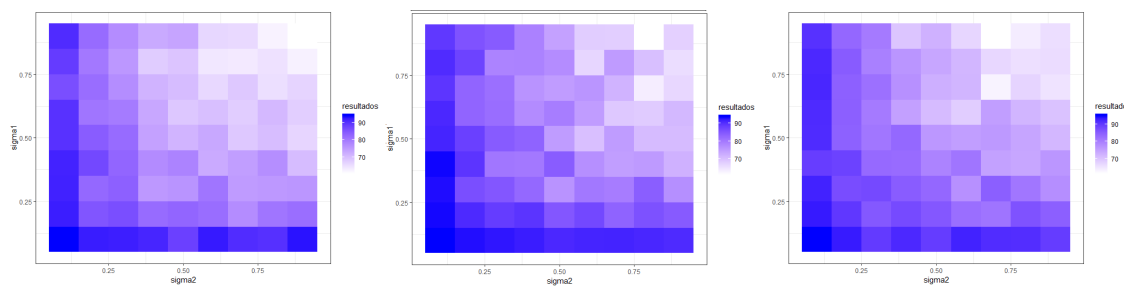


Figura 4.10: Heatmaps para tamanho de amostra 100 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

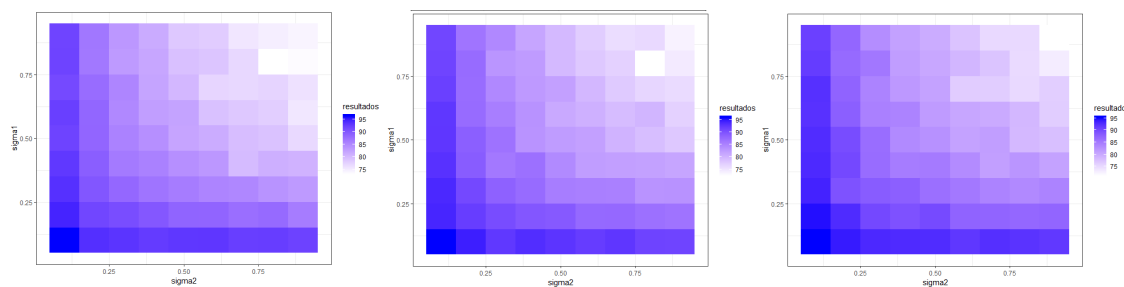


Figura 4.11: Heatmaps para tamanho de amostra 500 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

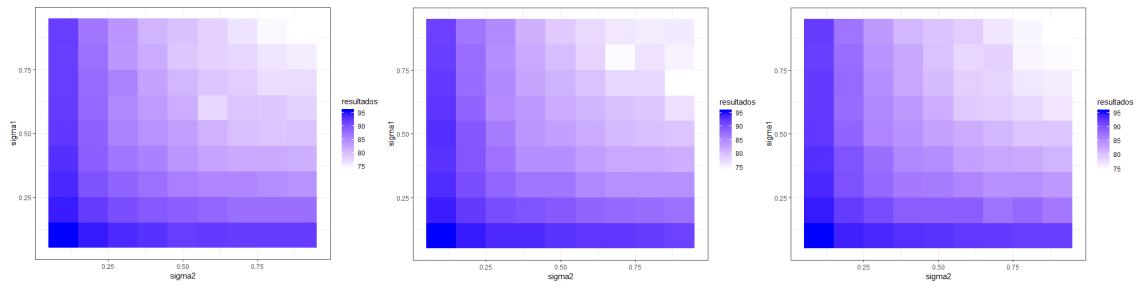


Figura 4.12: Heatmaps para tamanho de amostra 1000 e  $w = 0.4$  (esquerda),  $w = 0.5$  (centro) e  $w = 0.6$  (direita)

### 4.1.2 Máquinas de Vetor de Suporte

Dado o processo estocástico latente construído em 3.1, o objetivo desta subsecção é apresentar os resultados da estimação deste processo pelo método de Máquinas de Vetor de Suporte Não Supervisionadas a partir dos dados observáveis construídos em 3.2 e 3.3.

No primeiro cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição baixa entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.8, contra 0.2 a probabilidade de mudança de estado. Este processo se assemelha ao processo em descrito na Figura 5.1 em 4.1.1.

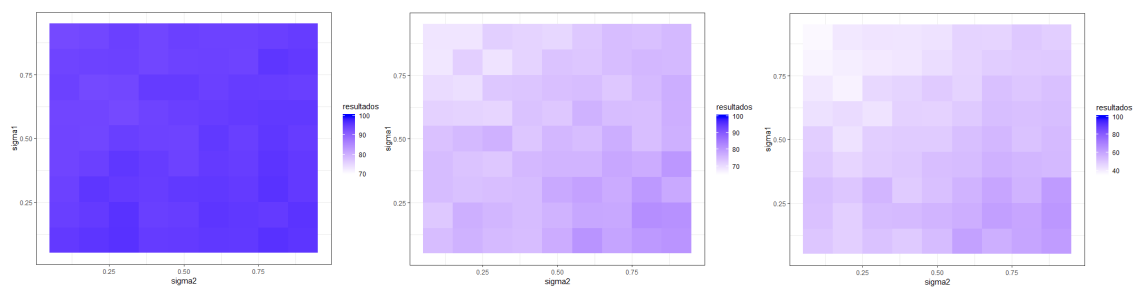


Figura 4.13: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo e tamanho de amostra 100 (esquerda), 500 (centro) e 1000 (direita)

No segundo cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição de 0.5 entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.5, contra 0.5 a probabilidade de mudança de estado. Este processo se assemelha ao processo em descrito na Figura 5.2 em 4.1.1.

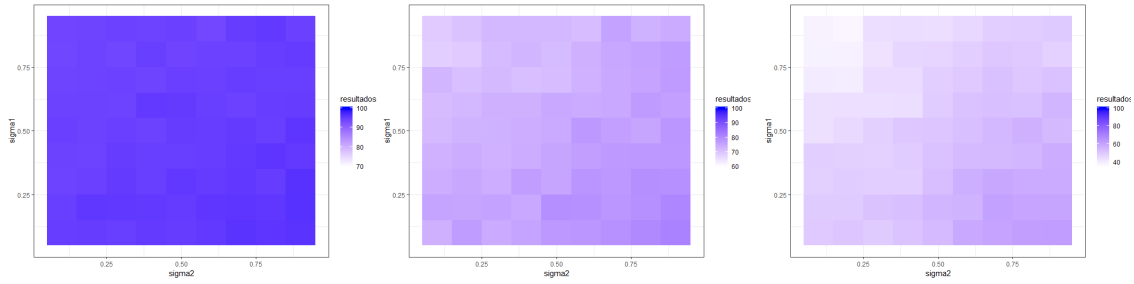


Figura 4.14: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo e tamanho de amostra 100 (esquerda), 500 (centro) e 1000 (direita)

No terceiro cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição de 0.7 entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.7, contra 0.3 a probabilidade de mudança de estado. Este processo se assemelha ao processo em descrito na Figura 5.3 em 4.1.1.

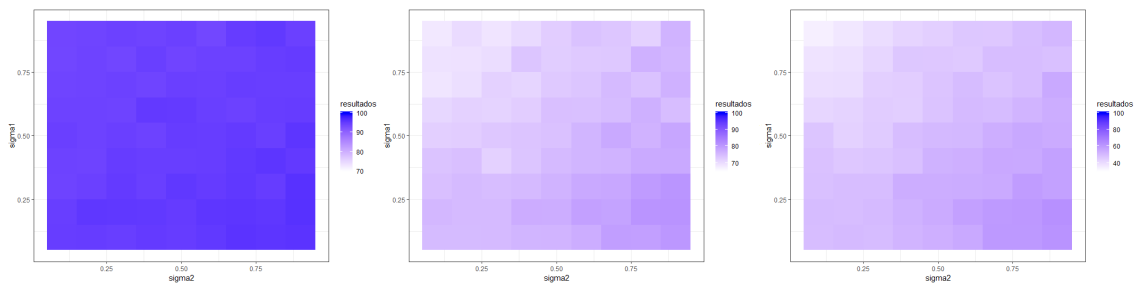


Figura 4.15: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo e tamanho de amostra 100 (esquerda), 500 (centro) e 1000 (direita)

## 4.2 Classificação de Séries Temporais Funcionais

Para a classificação de Séries Temporais Funcionais, foi adicionado um novo parâmetro de investigação à performance dos modelos. O parâmetro  $p$ , utilizado para gerar  $\hat{Z}_1$  e  $\hat{Z}_2$ , ver 2.2.

### 4.2.1 Modelos de Mudança Markoviana de Regimes

Dado o processo estocástico latente construído em 3.1, o objetivo desta subseção é apresentar os resultados da estimação deste processo pelo método de Modelos de Mudança Markoviana de Regimes a partir dos dados funcionais observáveis construídos em 3.4.

No primeiro cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição baixa entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.8, contra 0.2 a probabilidade de mudança de estado.

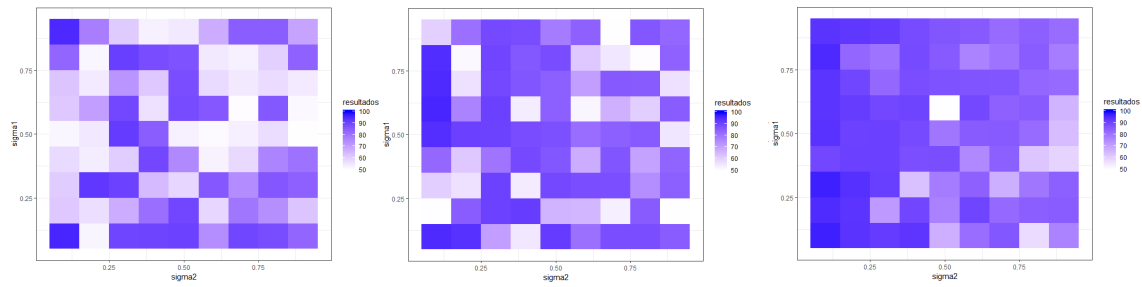


Figura 4.16: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

No segundo cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição de 0.5 entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.5, contra 0.5 a probabilidade de mudança de estado. Este processo se assemelha ao processo em descrito na Figura 5.2 em 4.1.1.

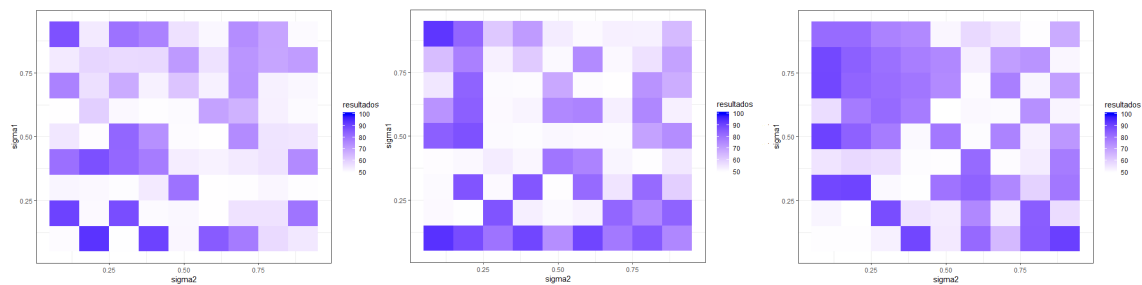


Figura 4.17: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

No terceiro cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição de 0.7 entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.7, contra 0.3 a probabilidade de mudança de estado. Este processo se assemelha ao processo em descrito na Figura 5.3 em 4.1.1.

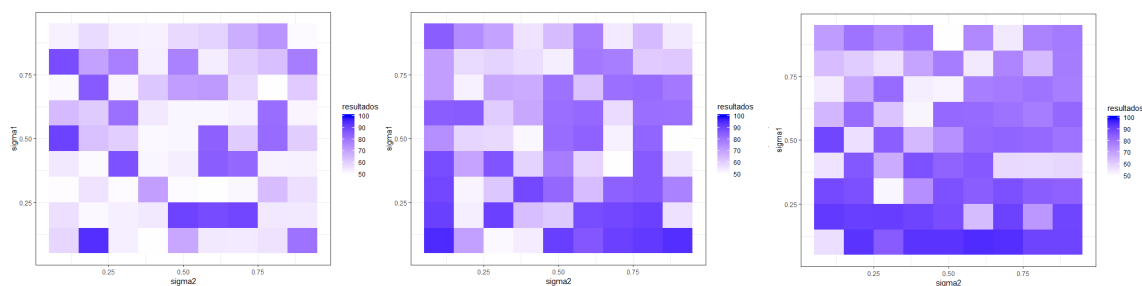


Figura 4.18: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

## 4.2.2 Máquinas de Vetor de Suporte

Dado o processo estocástico latente construído em 3.1, o objetivo desta subseção é apresentar os resultados da estimação deste processo pelo método de Máquinas de Vetor de Suporte a partir dos dados funcionais observáveis construídos em 3.4.

No primeiro cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição baixa entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo permanecer no estado corrente era de 0.8, contra 0.2 a probabilidade de mudança de estado.

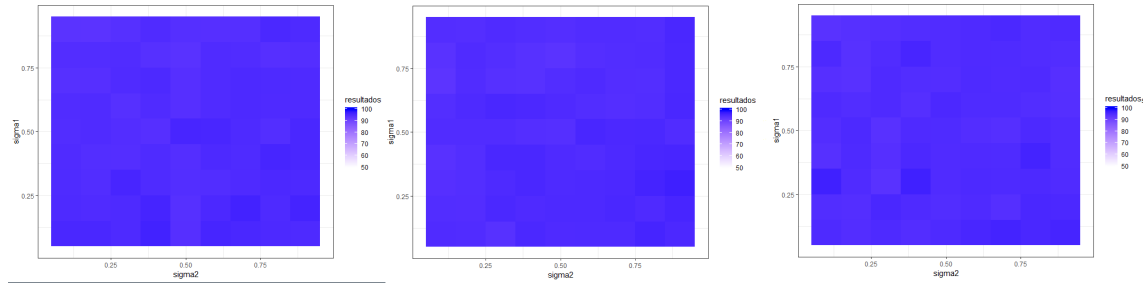


Figura 4.19: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 100 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

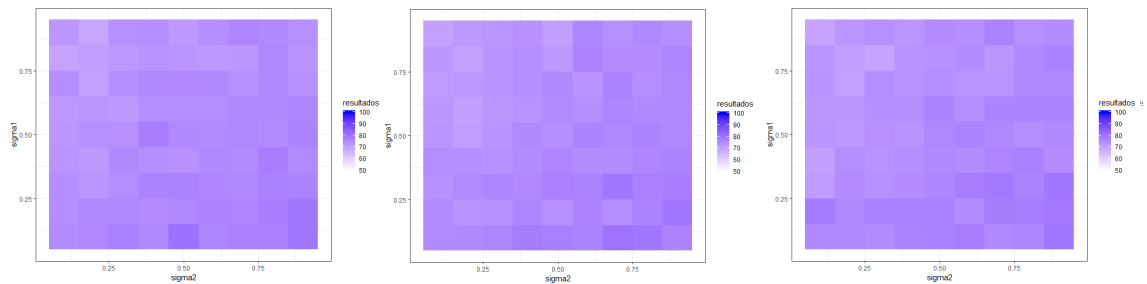


Figura 4.20: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 500 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

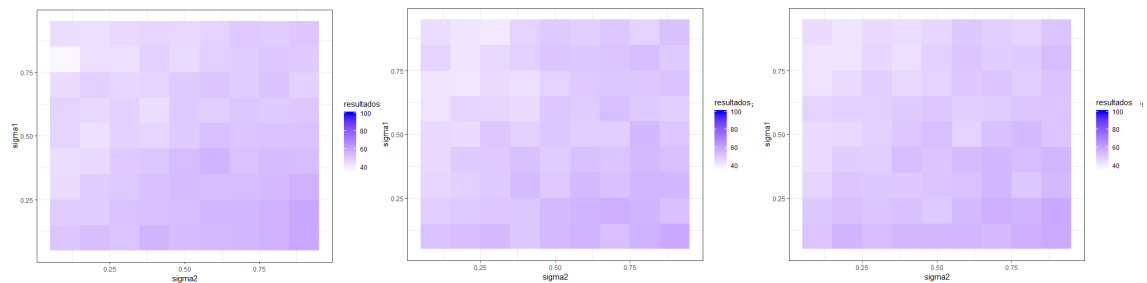


Figura 4.21: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

No segundo cenário explorado, considerou-se uma probabilidade de transição de 0.5 entre os estados do processo 3.1. Ou seja, a probabilidade de o processo



permanecer no estado corrente era de 0.5, contra 0.5 a probabilidade de mudança de estado. Este processo se assemelha ao processo em descrito na Figura 5.2 em 4.1.1.

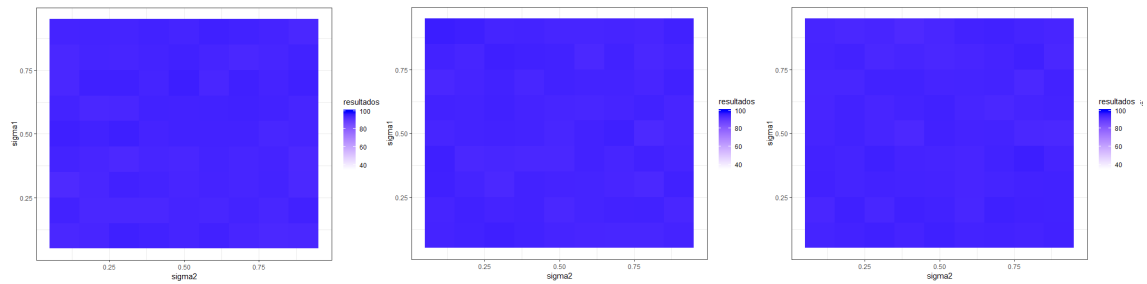


Figura 4.22: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 100 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

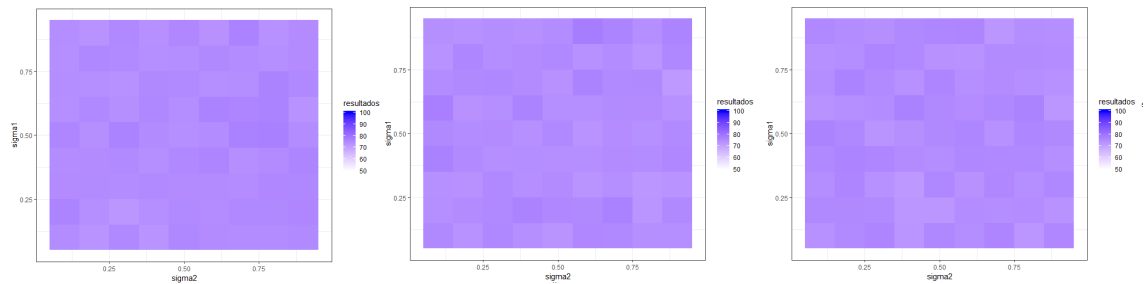


Figura 4.23: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 500 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

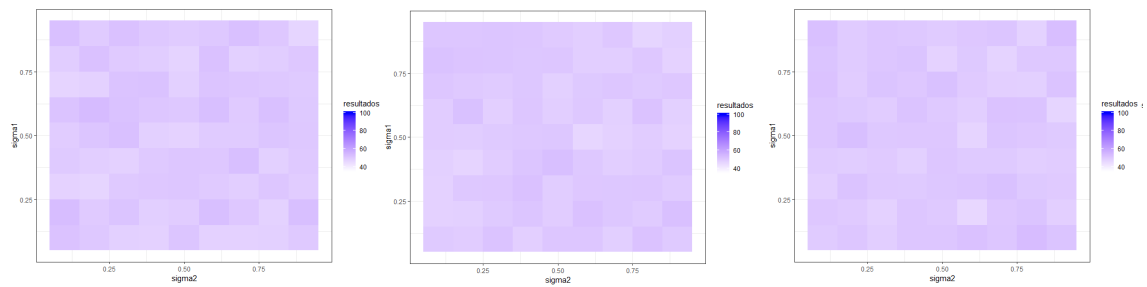


Figura 4.24: Heatmaps para  $w = 0.5$  fixo, tamanho de amostra 1000 fixa e  $p = 1$  (esquerda),  $p = 6$  (centro) e  $p = 20$  (direita)

## 5 Considerações Finais

Finalmente é possível inferir sobre os métodos de classificação testados neste trabalho. Primeiramente, quanto a séries temporais, Modelos Markovianos de Mudanças de Regimes apresentam um melhor desempenho quando pelo menos um dos processos não apresenta grande variabilidade. O tamanho amostral e a probabilidade de transição utilizada também influem na performance do modelo, porém em menor escala. Para o tamanho amostral, vale a máxima de quanto maior  $n$  melhor. E no caso da variação da probabilidade de transição, o modelo tem melhor performance em processos cuja probabilidade de permanência em certo estado é superior a probabilidade de troca de estado. Por outro lado, o valor escolhido como threshold para classificação das probabilidades retornadas pelo modelo em classes, não aparenta ter grande influência nos resultados.

Na sequência do capítulo anterior, são dispostos resultados da classificação feita através do método de Máquina de Vetor de Suporte. Neste cenário, para as mesmas variações de parâmetros feitas para o modelo markoviano de regimes, obteve-se que quanto menor o tamanho amostral, melhor a classificação pelo método. Comparando os dois métodos para classificação de Séries Temporais, o Modelo Markoviano de Mudança de Regimes tem melhor performance em quase todos cenários, perdendo apenas em casos aonde o tamanho amostral é igual a 100.

Já para classificação de séries temporais funcionais, o Modelo Markoviano de Mudança de Regimes tem um desempenho pífio quando o valor de  $p$  é pequeno. O modelo apenas apresenta resultados satisfatórios em casos cuja probabilidade de permanência nos estados é superior a probabilidade de troca de estado.

Por fim, ao classificar séries temporais funcionais utilizando a metodologia de Máquinas de Vetor de Suporte, os resultados obtidos são bastante semelhantes aos encontrados quando utilizado o mesmo modelo para classificação de séries temporais. A metodologia apresenta uma taxa de acerto na classificação de séries temporais muito próximas a 100% quando o tamanho amostral é 100. Decaindo em performance com o aumento do tamanho amostral.

## Referências Bibliográficas

- Bathia, N., Yao, Q., e Ziegelmann, F. (2010). Identifying the finite dimensionality of curve time series. *Annals of Statistics*, 38(6):3352–3386.
- Bosq, D. (2000). *Linear Processes in Function Spaces*. Springer.
- Durden, T. (2018). Rational-chinese stocks jump after government intervention, sending global markets higher.
- Hamilton, J. D. (1988). Rational-expectations econometric analysis of changes in regime: An investigation of the term structure of interest rates. *Journal of Economic Dynamics and Control*, pages 385–426.
- Shumway, R. H. e Stoffer, D. S. (2010). *Time Series Analysis and its Applications*, volume 3. Springer Science.