UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CENTRO INTERDISCIPLINAR DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MÍDIAS NA EDUCAÇÃO

FRANCIELE LORENÇO

GEOGEBRA: propostas de aulas para o ensino de Funções Matemáticas

Porto Alegre
2018

FRANCIELE LORENÇO

GEOGEBRA: propostas de aulas para o ensino de Funções Matemáticas

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau de Especialista em Mídias na Educação, pelo Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – CINTED/UFRGS.

Orientador (a): Gilse Morgental Falkembach

Porto Alegre
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Reitor: Prof. Carlos Alexandre Netto
Vice-Reitor: Prof. Rui Vicente Oppermann
Pró-Reitor de Pós-Graduação: Prof. Vladimir Pinheiro do Nascimento
Diretor do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação: Prof. José Valdeni de Lima
Coordenadora do Curso de Especialização em Mídias na Educação: Profa. Liane Margarida Rockenbach Tarouco

RESUMO

Observa-se no cotidiano a utilização de diferentes ferramentas tecnológicas pelos estudantes bem como em atividades do cotidiano. Nas diferentes tarefas que se realiza, algum tipo de tecnologia está presente, infelizmente, as salas de aula nem sempre tem acompanhado este avanço. Desta forma, surge o questionamento sobre a necessidade de aproximar as TICs das práticas pedagógicas em salas de aula, pois nem sempre estão presentes. Neste contexto o propósito deste trabalho é abordar a temática de propostas de aulas utilizando o *software* GeoGebra . Como contribuição pretende-se apresentar planos de aula com atividades de Matemática sobre funções utilizando o *software* GeoGebra, como forma de superar esta situação de distanciamento justificando a importância deste trabalho. Não só como também constituir propostas de aulas para o ensino de funções matemáticas, a fim de servir de modelo aos professores interessados em utilizar o *software* GeoGebra em suas práticas pedagógicas. Com isso àqueles que têm interesse em fazer uso das TICs em suas aulas, podem usufruir de exemplos e materiais que podem contribuir com seus objetivos no processo de ensino e aprendizagem de funções. O trabalho inclui propostas de atividades buscadas no repositório de trabalhos acadêmicos da UFRGS, mas também são apresentados planos de aula utilizados pela autora em suas aulas. Sobre estes últimos é feita uma reflexão em torno das diferentes aplicações já feitas.

Palavras-chave: Funções, GeoGebra, Propostas de atividades.

GEOGEBRA: proposals of classes for the teaching of Mathematical Functions

ABSTRACT

The daily use of different technological tools by the students as well as in daily activities is observed. In the different tasks that are performed, some kind of technology is present, unfortunately, classrooms have not always accompanied this breakthrough. Thus, the question arises about the need to bring ICTs closer to pedagogical practices in classrooms, since they are not always present. In this context the purpose of this work is to approach the theme of class proposals using GeoGebra software. As a contribution we intend to present lesson plans with mathematical activities about functions using GeoGebra software, as a way to overcome this situation of distance, justifying the importance of this work. Not only do they also constitute proposals for teaching mathematical functions, in order to serve as a model for teachers interested in using GeoGebra software in their pedagogical practices. With this, those who are interested in using ICT in their classes can benefit from examples and materials that can contribute to their objectives in the process of teaching and learning functions. The work includes proposals for activities sought in the repository of academic works of UFRGS, but also presented classes plans used by the author in her classes. On the latter, a reflection is made on the different applications already made.

Keywords: Functions, GeoGebra, Proposals of activities.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Borba (2007, p.17) “o acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma ‘alfabetização tecnológica’”.

Este é o caminho que deve ser buscado seguir, aproximar as TIC das salas de aula e permitir um aprendizado que contemple a utilização de outros recursos. Posto isso, Borba (2007, p. 15) alerta, “o computador, portanto, pode ser um problema a mais na vida atribulado do professor, mas pode também desencadear o surgimento de novas possibilidades para o seu desenvolvimento como um profissional da educação”.

Neste trabalho, as palavras possibilidades, potencialidades e alternativas estão muito presentes. Isso, pois se acredita que trazer o uso de novas ferramentas, como um *software*, por exemplo, é justamente uma nova possibilidade para as práticas, apresenta uma potencialidade diferente do que se faz sem seu uso e é uma alternativa que pode ser buscada.

O objetivo deste trabalho é contribuir com propostas de aulas de Matemática sobre Funções que utilizem o *software* GeoGebra. Os leitores podem utilizar este material como subsídio para suas propostas, adequando, melhorando e reorganizando de modo a poderem levar para suas salas de aula. A reflexão sobre a necessidade de haver essa busca é bastante presente, justamente pelo fato de o cotidiano estar permeado de tecnologias, as escolas também devem se tornar referência no uso adequado para o processo de ensino e aprendizagem.

Borba (2007, p. 25) traz à tona um ponto importante a cerca dessa aproximação das TIC das salas de aula. “Reconhecemos que a complexidade da rede de escolas brasileiras impõe muitos desafios para a área de informática educativa e que é preciso o empenho de diferentes setores para encontrar formas de enfrentamento e superação de alguns deles.”. Diante disso, é preciso dar conta de cada um dos desafios. Este trabalho busca suprir a questão de falta de material, propostas, ideias, sequências de atividades, enfim, algo que sirva ao professor como mobilizador. Essa proposta surge, pois é sabido que as escolas, em muitos casos, têm laboratórios de informática, há problemas com acesso à *internet* precário, entretanto também existem possibilidades que não exigem o uso da *internet*. Como é o caso do *software* GeoGebra.

Esta é uma alternativa de fácil utilização e gratuita. Está disponível no Apêndice 1, o tutorial para *download*. Muitos trabalhos têm sido publicados relatando as aplicações feitas em sala de aula, como Ballejo (2009), Pedroso (2012) e Reis (2015).

Esta ferramenta oferece recursos para diferentes tópicos de Matemática justamente por reunir a parte Algébrica e a parte Geométrica.

Para este trabalho em questão, foram pesquisados os trabalhos disponíveis no repositório de trabalhos acadêmicos da UFRGS, o Lume. Diante de todas as propostas com o uso do GeoGebra aplicadas em Ensino Médio, foram selecionadas aquelas que abordam a temática de Funções e algumas delas foram comentadas disponibilizando-as na íntegra nos Anexos. Além disso, a autora expõe por meio de planos de aula, três práticas que faz uso em sua docência. É importante ressaltar que justamente o que se pretende refletir neste trabalho foi a motivação que levou a construção destes planos de aula.

Ouve-se muito falar sobre a necessidade de utilizar tecnologias e desta forma, ainda que timidamente, os três planos de aula foram surgindo. A cada nova aplicação um olhar crítico era lançado e adequações eram feitas, estas reflexões também estão presentes no decorrer do trabalho.

Este é o movimento que se espera que a leitura deste material suscite. Que cada professor, ainda que resista um pouco, olhe para estas possibilidades com a mente aberta de que nada é fechado, tudo pode ser adequado e as aulas não devem deixar de ser “quadro-giz” em um dia e tornem-se totalmente tecnológicas no outro.

Esse é um cuidado muito importante, os discursos em prol do uso de TIC em sala de aula buscam sempre motivar, mas isso não significa contrapor às aulas chamadas de tradicionais. Ambas podem complementar-se e o objetivo maior deve ser sempre o processo de ensino e aprendizagem.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A seguir estão apresentados os tópicos que embasam esta pesquisa. Inicialmente, uma reflexão sobre a importância do uso de tecnologias, na sequência, uma apresentação do que é o *software* GeoGebra, ferramenta presente nas propostas de atividades sobre funções em aulas de Matemática, tema do terceiro capítulo. Após, a autora apresenta por meio de planos de aula as práticas já realizadas em diferentes turmas e ao final se discutem alguns resultados.

2.1 A importância do uso de tecnologias em práticas pedagógicas

O advento da tecnologia, ora mais gradual, ora mais rápido não é surpresa para ninguém. De acordo com o conteúdo do curso de Especialização Mídias na Educação na disciplina de Integração de Mídias na Educação[1], está-se deixando para trás uma vida extremamente manual e analógica para facilidades dos recursos cada vez mais digitais, programáveis, que já substituem o próprio ser humano ainda que de forma parcial.

Atualmente as rotinas são permeadas por mídias, por tecnologia e causa certo estranhamento quando se percebem atividades sendo realizadas quase que totalmente manuais, ou um comércio que não esteja informatizado, ou ainda uma pessoa que não possua telefone celular. Estas tecnologias já se tornaram parte da sociedade, foram capazes de mudar as atitudes, e estão ao alcance de todos cada vez mais cedo.

Segundo Lopes (2013, p. 632):

> A presença da linguagem digital, expressa em múltiplas TIC, vem impondo mudanças no modo como obtemos informação e nos comunicamos, e a chegada desses recursos na escola nos faz refletir sobre seu uso em sala de aula, analisando de que forma essas ferramentas podem contribuir para uma formação do aluno compatível com os avanços proporcionados pela sociedade da informação.

Desde a mais tenra idade, aparentemente um *smartphone* se tornou indispensável. Esta realidade, precoce ou não, adentra as escolas e com isso os desafios aumentam. Se uma aula de qualquer disciplina, já precisava competir com tudo o que é mais interessante na vida dos alunos, com os avanços da tecnologia, cada vez é mais trabalhoso manter o foco naquilo que deveria ser o centro das atenções.

[1] Curso disponível na plataforma Moodle composto de fragmentos de materiais desenvolvidos para o curso Mídias na Educação, disponibilizados no endereço: http://webeduc.mec.gov.br/midiaseducacao/

De acordo com, Lieban (2012, p.40):

> [...] o uso de recursos tecnológicos no ensino incentiva a participação ativa do aluno, bem como faz do professor o seu parceiro, diferentemente daquele ser detentor do conhecimento, como era visto há tempos atrás. Porém, a transição do método tradicional de ensino para o ensino auxiliado por computador requer adaptação tanto por parte do professor como do aluno, que precisa abandonar o comportamento passivo, buscar constantemente desafios e interagir com colegas e professores.

O desafio maior é caminhar para um ensino e educação de qualidade, que integre todas as dimensões do ser humano. Banir as tecnologias por receio da "concorrência" não é o caminho. Assim como o dia a dia passou a contar com as facilidades do uso de todo esse aparato tecnológico, as aulas devem começar a ser pensadas com este apoio.

Na área de Matemática, atualmente o número de *softwares* vem crescendo, (WolframAlplha, disponível *on-line,* Winplot, *software* livre disponível em diversos *sites* para *download*, Graphequation, Graphmatica, *softwares* livres disponíveis em páginas próprias para *download*). O que antes era feito manualmente, hoje conta com os recursos das TICs que permitem reduzir e muito o trabalho, para isso é necessária uma mudança de hábitos. Borba e Penteado (2007) sugerem que ao se adentrar um ambiente informático, é preciso estar disposto a lidar com situações imprevisíveis, haja vista que trazer a mídia informática para a sala de aula também abre a possibilidade de os alunos falarem sobre suas experiências e curiosidades da área.

Pensar em uma aula de Matemática que acompanhe os avanços da tecnologia é pensar em diferentes possibilidades que permitam um dinamismo maior, uma resposta visual mais rápida e uma interação mais produtiva. Isso pode colaborar com o processo de ensino e aprendizagem. Os autores Borba e Penteado (2007, p. 58) colocam que:

> Nem sempre é possível conhecer de antemão as possíveis respostas que aparecem na tela. É preciso entender as relações que estão sendo estabelecidas pelo *software*. Numa sala de aula, isso constitui um ambiente de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor.

Se, por exemplo, for tomado o conteúdo de funções, (afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica), tem-se, atualmente, a disponibilidade de páginas na *internet* que constroem gráficos. Na ausência de *internet*, têm-se *softwares* livres e acessíveis e, além disso, aplicativos para *smartphone*. Todos permitem mais do que construir um simples gráfico, permitem que sejam feitas outras construções, simultâneas ou não, que venham a servir de pano de fundo para elencar características de cada função, comparações e discussões. Segundo o Borba e Penteado (2007, p. 32), "[...] conhecer sobre funções passa a significar saber coordenar representações. Essa nova abordagem só ganha força com ambientes computacionais que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas.”.

Uma aula com esta proposta é factível com o básico, “quadro e giz”, mas demandaria tempo e por vezes a discussão torna-se menos rica em função de perder-se muito da aula com todo o conteúdo que deve ser apresentado, com o auxílio de *softwares*, gráficos são gerados em segundos enriquecendo a explicação. Pode-se pensar que um dos responsáveis pelo advento tão grande da tecnologia, é o ganho de tempo que permite. Segundo Moreira et. al (2009, p.39):

> [...] o processo de ensino e aprendizagem de Matemática não pode ir na contramão das necessidades atuais e permanecer estagnado, imutável, pelo contrário, deve ser mais acessível, de forma a se tornar menos excludente. São inúmeros os recursos que podem ser utilizados para favorecer a compreensão de conceitos matemáticos. Dentre estes, destacam-se as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), que podem colaborar para a criação de situações de aprendizagem estimulantes em Matemática e diversificar as possibilidades de aprendizagem.

Outra possibilidade, diz respeito à Geometria, algumas figuras são perfeitamente encontradas no dia a dia, porém, atendendo um objetivo de explorar e aprofundar, alguns poliedros não são tão comuns. Para dar uma dimensão de como são compostos, é possível encontrar animações de planificação e construção, e de rotação, como pode ser encontrado nos *softwares* Poly ou Great Stella. Na impossibilidade de manipulação, há a exploração gráfica, em que a tecnologia é fundamental. Estes exemplos são possibilidades estanques nos conteúdos. Todavia, ainda é possível explanar sobre o modo como diferentes tópicos em Matemática se interligam. Dependendo do caso, o apelo visual é imprescindível e a tecnologia é o que permite, por vezes, esse raciocínio rápido.

Corroborando com o que já foi exposto, Lopes (2013, p. 635) conclui que:

> [...] o que difere numa atividade com o recurso do *software* é a possibilidade de movimentação dos objetos e, a partir desses movimentos, o aluno investigar o que acontece com a sua construção, levantando hipóteses como: a construção permanece com as mesmas características? Um simples movimento muda todas as características originais? Entre várias hipóteses que são possíveis levantar diante das próprias tomadas de decisão, percebendo assim as suas regularidades.

Seguindo a mesma ideia, Borba e Penteado (2007, p. 37) enfatizam que:

> As atividades, além de trazer a visualização para o centro da aprendizagem matemática, enfatizam um aspecto fundamental na proposta pedagógica da disciplina: a experimentação. As novas mídias, como os computadores com *softwares* gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de Biologia ou Física. [...] Em um dado momento, o professor coordena uma socialização dos resultados obtidos. É nesse momento que “conjecturas locais”, levantadas em sala de aula, são debatidas.

Outro fator importante sobre o uso de *softwares* em aulas de Matemática é sem dúvida o novo formato que a aula passa a ter. As aulas baseiam-se na maioria das vezes em exposição de conteúdo, resolução de exemplos e aplicação em atividades. Com o uso de novas tecnologias pode-se pensar em uma nova sequência, assim como Borba e Penteado (2007, p.41) colocam, "A experimentação se torna algo fundamental, invertendo a ordem de exposição oral da teoria, exemplos e exercícios bastante usuais no ensino tradicional, e permitindo uma nova ordem: investigação e, então, a teorização.".

Além disso, vale ressaltar que o uso de tecnologias torna-se um momento a mais para refletir e ressignificar os saberes que estão sendo construídos, seja como atividade mobilizadora ou com objetivo de finalizar os conceitos. Os mesmos autores citam que ao utilizar as tecnologias de modo a fomentar discussões, formular conjecturas e coordenar diferentes representações, um conceito pode ser revisto mesmo que já fosse considerado "estável".

Diante de tudo o que foi colocado, e sabendo-se que é possível ensinar e também aprender de diferentes formas, e também aprender de diferentes formas, pode-se pensar que uma das funções do professor para este momento é ser capaz de aproximar o conhecimento às novas mudanças, integrá-las, dar uma nova roupagem para que a sala de aula não fique para trás. Penteado e Borba (2007, p. 17) afirmam que:

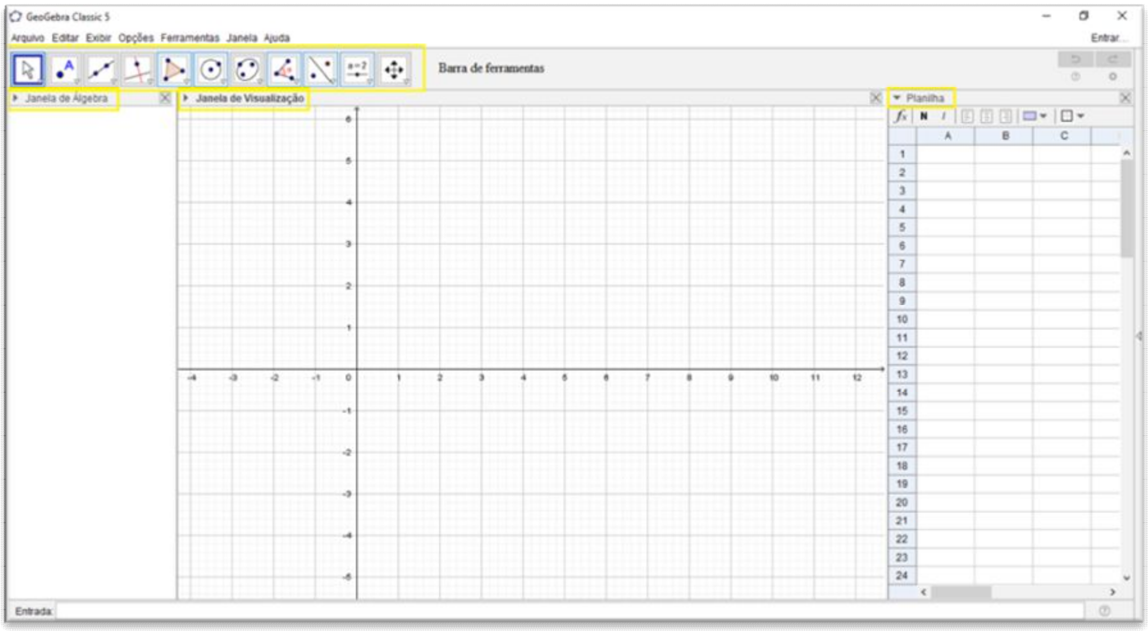
> O computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. E, nesse sentido, a informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania.

Não se pode encarar com normalidade que velhos hábitos permaneçam pelo simples fato de que eram bons. A mudança causa estranheza, mas se faz necessária, cabe salientar que o objetivo não é abandonar as práticas que o professor julga serem eficazes, mas sim passar a aliar novas possibilidades buscando alcançar sempre resultados positivos e que o conhecimento possa ser construído de modo significativo. Uma dessas possibilidades surge, por exemplo, com o apoio do *software* GeoGebra, uma ferramenta que pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

2.2 O *software* GeoGebra

De acordo com o Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro[2], o matemático Markus Hohenwarter natural de Salzburg, Áustria é o criador do GeoGebra, um *software* gratuito de Matemática dinâmica pensado para o ensino e aprendizagem da Matemática em diferentes tópicos da disciplina. O GeoGebra reúne recursos de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Este ambiente possui uma interface simples com barra de ferramentas, janela de álgebra, janela de visualização e possibilidade de que seja acrescentada uma planilha para utilização com diferentes objetivos. A seguir, pode ser observada na Figura 1, a interface do *software* GeoGebra.

Figura 1: Interface do GeoGebra.

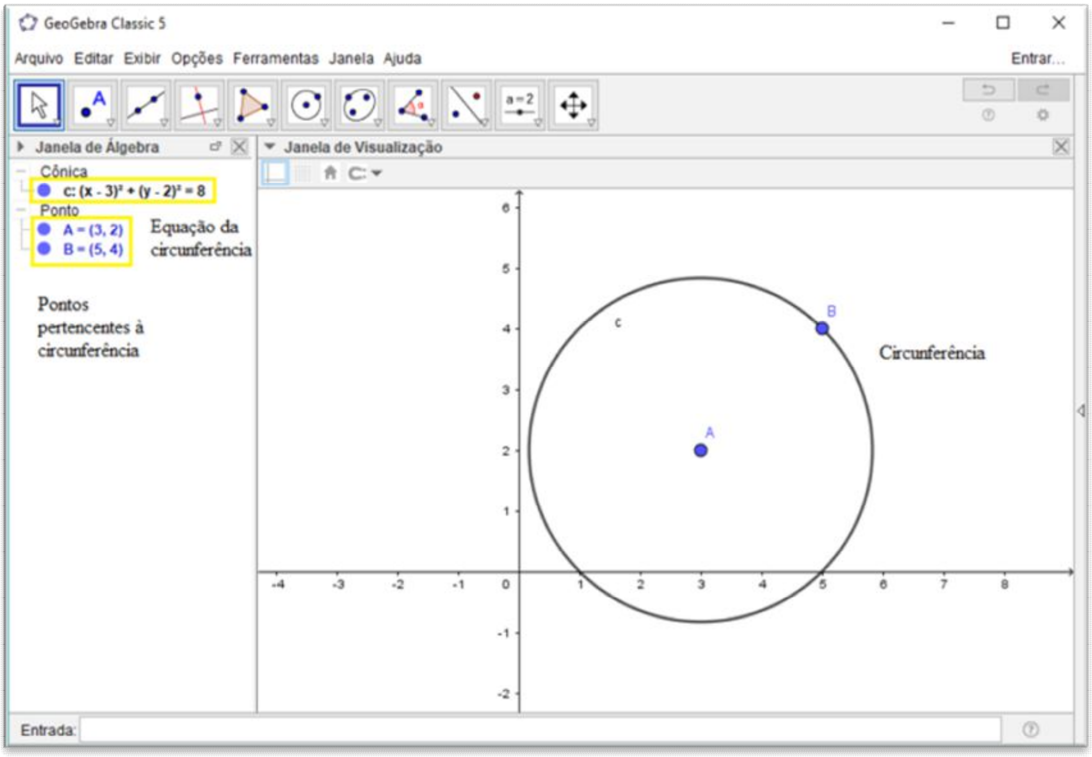


Fonte: Arquivo da autora.

Todos os recursos disponíveis garantem ao mesmo tempo representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Ao se inserir um objeto na janela de visualização o mesmo também tem sua representação na janela de álgebra, como pode ser observado na Figura 2.

[2] http://www.geogebra.im-uff.mat.br/ página do Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro.

Figura 2: Diferentes representações de uma circunferência.



Fonte: Arquivo da autora.

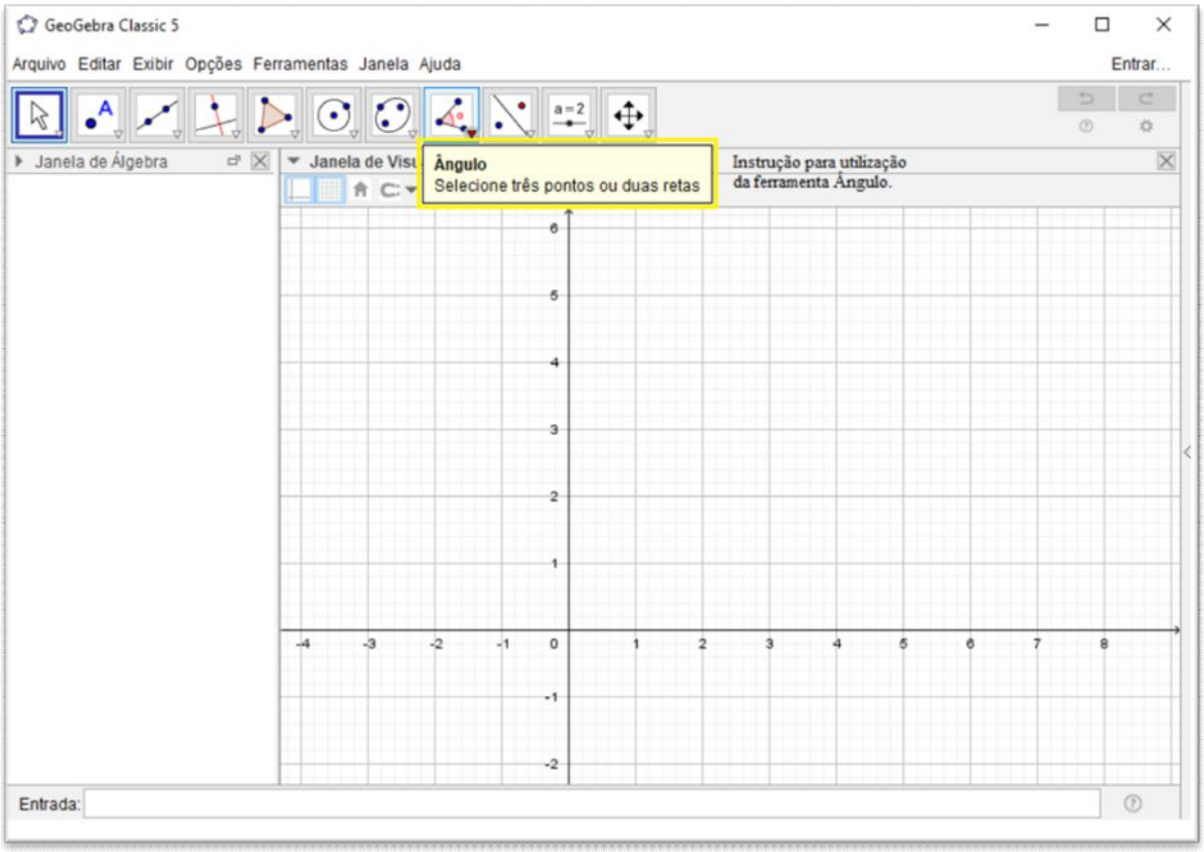
Desta forma é possível explorar os conceitos matemáticos de forma interligada, apresentando, por exemplo, um elemento geométrico como a circunferência associada à equação que a descreve.

Segundo Lieban, Pertile e Pierozan (2012, p. 47):

> O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente. Equações e coordenadas também podem ser inseridas através de sua barra de comandos.

Por não utilizar linguagem de programação, torna-se um *software* de simples manuseio. Cada ferramenta apresenta uma breve instrução de como utilizá-la, basta parar o cursor do *mouse* sob a mesma por alguns instantes, como é possível observar na Figura 3.

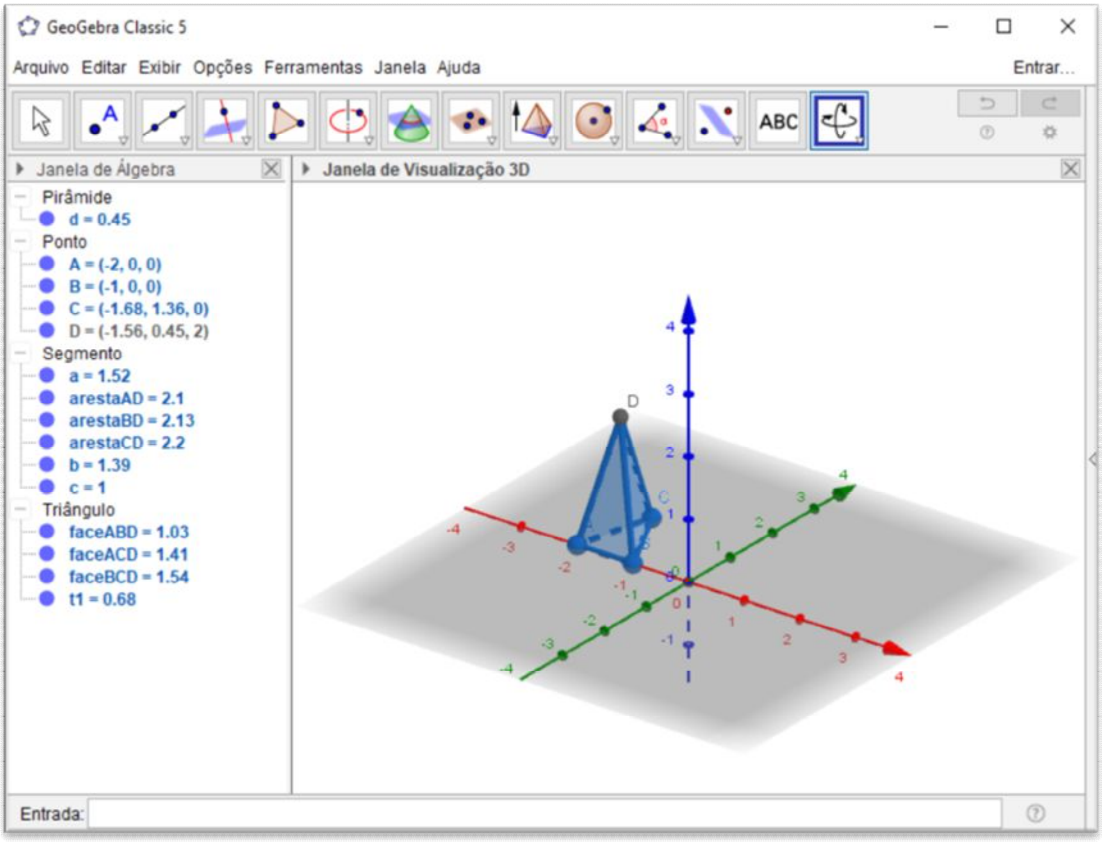
Figura 3: Instrução para utilização da ferramenta Ângulo.



Fonte: Arquivo da autora.

Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais. Cabe ressaltar que estas podem ser feitas em versão tridimensional, um dos recursos disponíveis do *software*, que está representado na Figura 4 a seguir.

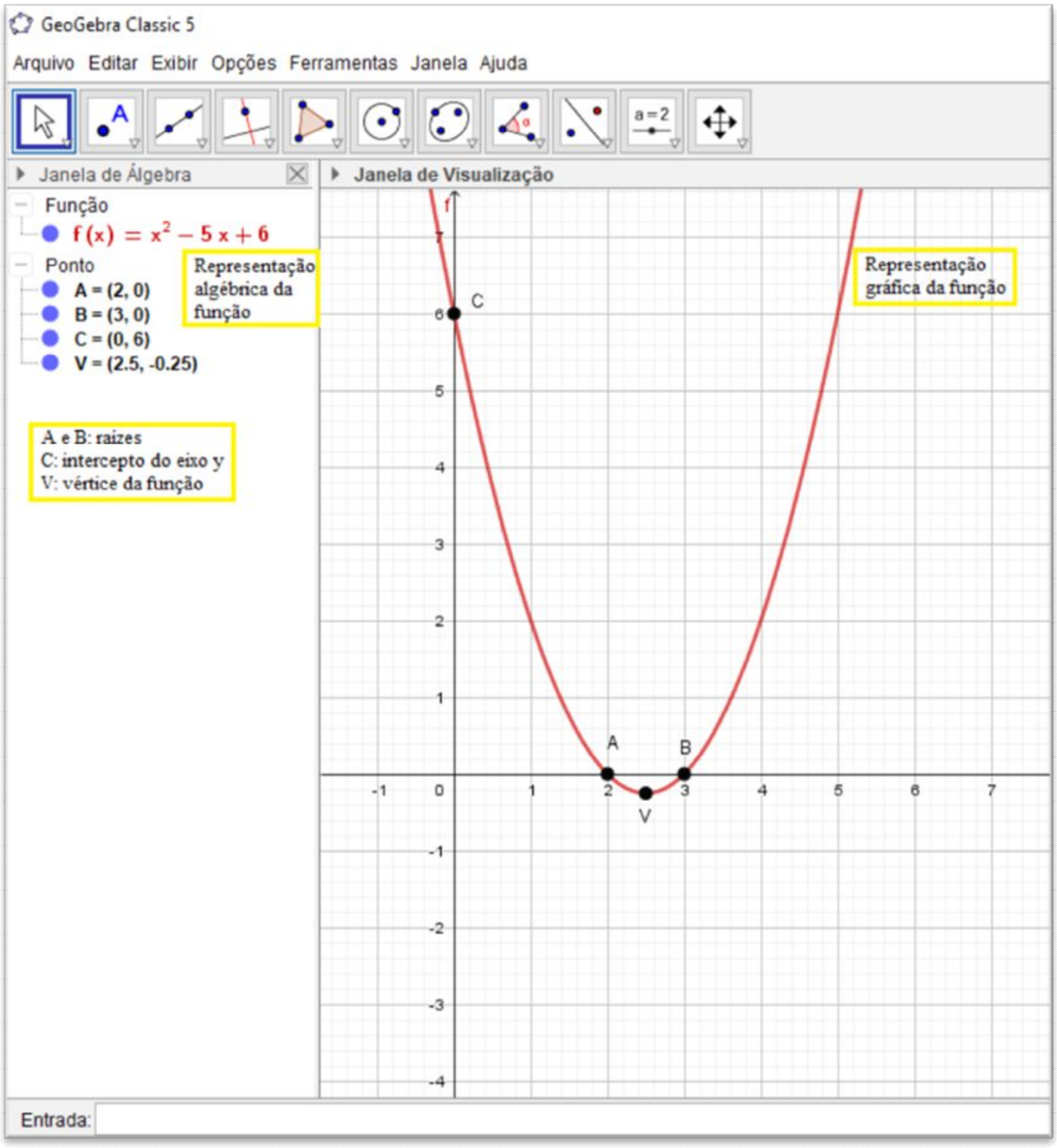
Figura 4: Ilustração tridimensional.



Fonte: Arquivo da autora.

O *software* permite muitas outras propostas, seja para visualização ou exploração por parte dos alunos em uma sequência didática, por exemplo, no caso de funções quadráticas, é possível explorar elementos como vértice, pontos de intersecção e raízes, como podem ser observados na Figura 5.

Figura 5: Representação de diferentes elementos da função Quadrática.



Fonte: Arquivo da autora.

Ainda, de acordo com o Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro, os diferentes usos são cada vez mais desenvolvidos e divulgados por meio do sítio eletrônico do *software*, www.geogebra.org. O *site* além de ser um espaço de compartilhamento, também é onde se encontram os arquivos para *download*, bem como a ferramenta *on-line*. Está disponível no Apêndice 1 um tutorial com instruções e orientações para o *download* do *software*.

Por ser um *software* gratuito, este tem sido aperfeiçoado e assim permite cada vez mais ser uma ferramenta pedagógica eficaz no sentido de permitir investigação, construção e exploração de diferentes conceitos matemáticos.

2.3 Exemplos de sequências didáticas utilizando o *software* Geogebra

É sabido que existem diferentes motivos para que as aulas não contem com uso de tecnologias ou *softwares*, temática deste trabalho. Entre todos os motivos, a falta de propostas nas quais os professores possam se basear é justamente uma das justificativas deste capítulo.

Acredita-se que uma boa forma de divulgar inovações tecnológicas e pedagógicas é compartilhá-las, para tanto se deseja neste espaço oferecer algumas propostas de atividades desenvolvidas em aulas de Matemática utilizando o *software* GeoGebra. As propostas foram buscadas no portal Lume, que é o repositório de trabalhos acadêmicos da UFRGS. Estas serão aqui apresentadas de modo que possam auxiliar àqueles cujo impedimento seja apenas a falta de uma ideia organizada de como inserir em suas aulas uma nova tecnologia ou um *software* diferente, dando um passo em direção a uma mudança na prática de sala de aula.

As pesquisas se concentraram em sequências didáticas ou atividades com aplicação em turmas de Ensino Médio que fizeram uso do *software*. Ao todo, foram 52 trabalhos que atenderam aos requisitos, estes trabalhos são oriundos de Trabalhos de Conclusão de Curso de licenciatura ou especialização, Dissertações de Mestrado, Teses de Doutorado e publicações em revistas.

Dentre os 52 trabalhos, percebe-se que os conteúdos explorados por meio do GeoGebra são variados, reafirmando a versatilidade do *software*. São 20 os trabalhos que abordam o conteúdo de Funções (Afim, Quadrática, Exponencial e Trigonométricas), 16 sobre Geometria, plana ou espacial, e dos 16 restantes tem-se assuntos de Geometria Analítica, Matrizes, Trigonometria na Circunferência e Geometrias não-Euclidianas.

A seguir são apresentados ao leitor alguns exemplos de atividades propostas nos trabalhos pesquisados, em específico para o tópico de Funções (Afim, Quadrática, Exponencial e Trigonométricas). Foram organizados dessa forma para priorizar uma das várias potencialidades do *software*, bem como para manter o foco em um dos temas da Matemática no Ensino Médio. Assim, são apresentadas algumas propostas que surgiram no levantamento realizado no Lume.

Inicialmente, todo gráfico de Função é esboçado em um plano cartesiano, e este, por vezes causa confusão em como são representados os pontos. Sendo assim, partir de uma atividade que reforce o modo correto de leitura e representação é bastante válido.

Em um dos trabalhos pesquisados, Reis (2015) demonstrou esta preocupação incluindo em sua sequência uma atividade que visa este tópico inicial.

1) FUNÇÕES: o *software* pode ser utilizado para explorar a representação de pontos no plano cartesiano. É importante ressaltar que é preciso ter um cuidado com

conceitos básicos como este em vista de que este é fundamental para o esboço de todo gráfico de qualquer função. Uma atividade como esta, é prevista na sequência elaborada por Reis (2015), como pode ser observada no Anexo1. A atividade baseia-se em representar alguns pontos, alterar suas características e após reposicioná-los observando sempre a posição de cada um na janela de visualização bem como, a representação na janela de Álgebra. Essa dupla representação colabora para reforçar as diferentes formas que uma função assume, geométrica e algebricamente.

A exploração de comandos básicos é importante por que irá colaborar com a apropriação do *software* e posterior aprofundamento no seu uso. Este aprofundamento se dá quando observa-se que um dos tópicos da sequência do estudo de Funções é a Função Afim. Desta forma, destaca-se a proposta que Ballejo (2009) expõe.

2) FUNÇÃO AFIM: é explorada de forma a evidenciar um dos aspectos positivos do *software*, a possibilidade de representar diferentes gráficos de forma rápida, possibilitando assim a comparação a fim de estabelecer conjecturas. Ballejo (2009) propõe esta atividade como inicial com o objetivo de estudar os zeros da função e as constantes a e b de uma função de 1º grau $y = ax + b$, como pode ser observado no Anexo 2.

Atividades assim permitem que o aluno observe diferentes construções e discuta sobre padrões, mudanças, comportamentos e assim estabeleça conjecturas. Destaca-se que o papel do aluno passa a ser mais ativo, pois não precisa esperar a exposição normalmente feita pelo professor.

3) FUNÇÃO QUADRÁTICA: para o estudo desta função ($y = ax^2 + bx + c$), o mesmo autor, Ballejo (2009), propõe que sejam analisados inicialmente os polinômios de 1º grau que surgem da decomposição do polinômio de 2º grau. Assim, se pode observar os zeros da função e o ponto de interseção do eixo y, por meio da ferramenta interseção de dois objetos, como pode ser observado no Anexo 2.

4) FUNÇÕES DE GRAU TRÊS/CÚBICAS: seguindo o mesmo processo, o estudo de funções do 3º grau, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, parte da decomposição do polinômio de grau três em 3 polinômios de grau 1. Esta estratégia proposta tem um objetivo maior pontuado por Ballejo (2009, p. 29):

> [...] pensamos em elaborar atividades que não reduzissem o estudo de polinômios a fórmulas e regras para o estudo de algumas propriedades, mas sim utilizando o GeoGebra como ferramenta principal desse trabalho. Nossa finalidade seria evitar a situação em que o professor apresenta sua aula pronta e os alunos “absorvem” a matéria.

É importante salientar que esta atividade foi proposta a alunos do terceiro ano do ensino médio no conteúdo de Polinômios. A mesma não contemplou o estudo de raízes complexas, entretanto o autor pontua esta como uma possível melhoria para a sequência de atividades. Além desta sugestão, é possível explorar a decomposição do polinômio de grau três em um polinômio de grau um e um polinômio de grau dois.

Cabe ressaltar, em vista de que o próprio autor pontua estas situações, de que a cada aplicação de uma atividade, seja qual for o professor pode e deve avaliar os pontos positivos e negativos da proposta buscando potencializar e repensar estas ocorrências. Pode-se pensar que este tipo de atividade permeia a carreira de um professor, e não será diferente no caso do uso de um *software*.

Continuando com os exemplos de atividades utilizando o *software* GeoGebra, é possível explorar a Função Exponencial, Haselein (2013), expõem uma sequência em que em um dos encontros, o *software* é utilizado como ferramenta. O intuito é analisar o comportamento do gráfico da Função. A atividade está disponível no Anexo 3.

5) FUNÇÃO EXPONENCIAL: para analisar possíveis comportamentos do gráfico, o autor constrói inicialmente o gráfico da função $y = 2^x$, ponto a ponto, para que os alunos percebam o modo como a curva se ajusta. Em seguida, a função a ser analisada é $y = ab^{x-c} + d$, assim, a cada etapa uma das constantes a,b,c e d, afetam no comportamento do gráfico. O autor separa em casos, inicialmente varia a constante b para que os alunos observem que se obtêm duas situações, uma para $0 < b < 1$ e outra para $b > 1$, pois isto interfere diretamente nas possibilidades do gráfico ser crescente ou decrescente. Para o caso da constante c, as variações evidenciam um deslocamento horizontal no gráfico. A constante a, indica se o crescimento ou decrescimento da função será mais ou menos acentuado. E, por fim, a constante d, indica um deslocamento vertical no gráfico.

Em virtude de não terem sido encontrados trabalhos envolvendo o estudo da Função Logarítmica, nem da Função Modular, presentes nos currículos do Ensino Médio, salienta-se que esta é uma oportunidade para desenvolvimento. Desta forma, a sequência conduz para apresentar uma proposta que envolva as Funções Trigonométricas Seno e Cosseno.

Assim, Pedroso (2012), construiu uma sequência para Trigonometria baseada na utilização do GeoGebra, e em uma das atividades contemplou o tópico de Funções Seno e Cosseno, como pode ser observado no Anexo 4. É um trabalho muito interessante, pois, abusa do uso do *software*, entretanto, devido ao objetivo do trabalho a exposição se concentrará nas atividades envolvendo as Funções.

6) FUNÇÕES SENO E COSSENO: a atividade explora a comparação entre os gráficos $y = sin\ (x)$ e $y = cos\ (x)$ e suas respectivas alterações. Assim, após a representação da função seno, são construídas também as funções $y = -1 + sin\ (x)$ e $y = 1 + sin\ (x)$. O mesmo processo se aplica para a função cosseno com a diferença do tipo de mudança, não mais soma ou subtração, mas multiplicação de um número inteiro positivo. Na sequência, a multiplicação de números racionais com a função seno novamente. As alterações na lei da função podem ocorrer também junto ao parâmetro. Desta forma são indicados para construção, funções como $y = sin\ (2x)$, $y = sin\ (1/4\ x)$, $y = sin\ (x - \pi)$, entre outras. Ao longo de todos os grupos de construção, são feitos questionamentos para que os alunos comparem a função original com as funções com alterações. Ao final, é esperado que o aluno consiga generalizar as possibilidades de gráficos de funções seno e cosseno.

Dentre os diferentes exemplos, é possível perceber que o objetivo é analisar os comportamentos dos gráficos das diferentes funções, para que justamente o aluno possa reconhecer de qual função se trata de acordo com o comportamento da curva. Esta é uma habilidade importante para interpretar situações e associá-las com o melhor formato de representação.

Além disso, é sabido que além do comportamento mais genérico, são possíveis adequações para situações pontuais, por isso também a análise de casos específicos de alterações em gráficos primitivos. O termo primitivo faz alusão à função quando na sua definição, como por exemplo, $y = ax + b$ no caso da Afim e $y = ax^2 + bx + c$ no caso da Quadrática e assim por diante. Os alunos também devem ser capazes de conjecturar a partir do estudo de diferentes casos, desta forma, o exercício de investigação pode propiciar alcançar este objetivo.

Os exemplos expostos são pontuais, e foram explanados sobre a aplicação, resultados e possíveis melhorias nos trabalhos na íntegra disponíveis no Lume. É importante destacar que a leitura destas propostas deve ser feita de modo a adequar à realidade com que trabalha, sabendo que algumas situações podem surgir diferentes do que o autor apresentou e sobretudo que não será a atividade por si só garantidora de sucesso.

Nos casos apresentados, o conteúdo havia sido explanado e a proposta com o *software* GeoGebra vinha como elemento extra de consolidação, ou de reforço, ou como uma possibilidade de aprendizado. Além disso, pode-se pensar em trazer o *software* por meio de uma atividade mobilizadora e assim dar um novo caráter à ferramenta.

O movimento deve ser feito no sentido de buscar informação, referência ou formação, estudar as possibilidades da escola, em termos de infraestrutura, analisar o grupo de alunos, e assim planejar uma atividade, por simples que seja de incluir às aulas de Matemática o uso de uma tecnologia. Além disso, é importante que o professor compartilhe suas ações e propostas permitindo assim realizar uma troca com demais professores e a ascensão de novas práticas em que as tecnologias também façam parte das salas de aula.

2.4 Propostas de aulas utilizando o *software* GeoGebra

Como resposta ao que se lê e ao que se recomenda, apresenta-se neste capítulo as propostas de aulas utilizando o *software* GeoGebra da qual a autora faz uso. Não houve um rigor no modo de registro em vista de que foram aulas de Matemática em que se buscou inserir o *software* como complemento ao que já havia sido estudado.

Entretanto, compartilhar é o grande objetivo, assim as atividades estão organizadas em planos de aula para que o leitor possa melhor se apropriar. Estas atividades serviram de retomada dos tópicos estudados e como possibilidade de estudo por meio de um novo formato.

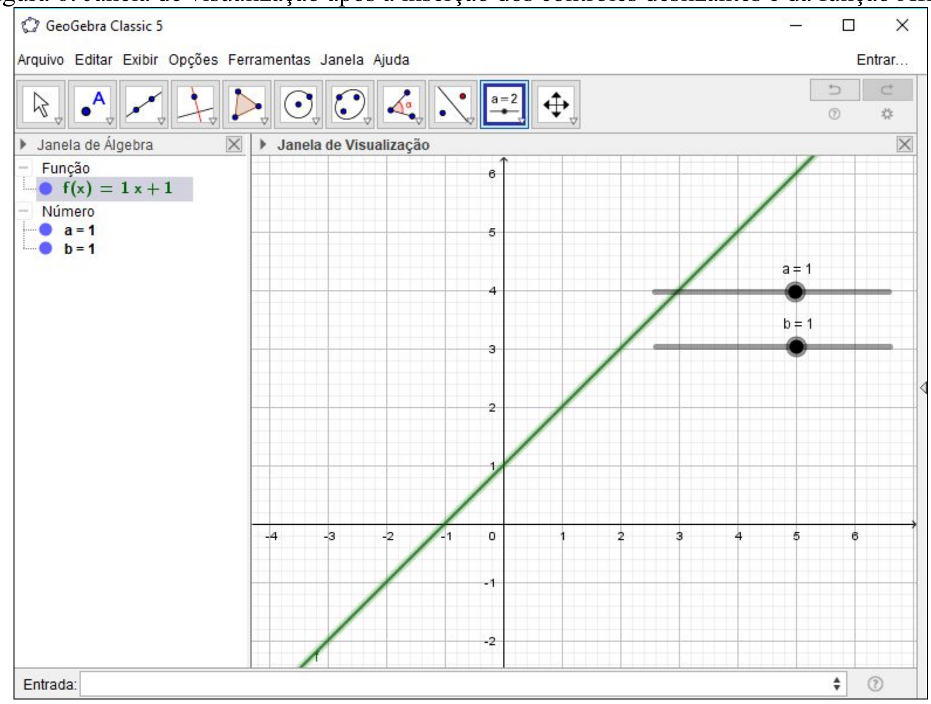
Assim, inicialmente foram estudadas Funções Afim, definição, cálculo de zeros, construção de gráficos, análise de gráficos e associação às leis de correspondência e resolução de situações problema, por fim, a atividade utilizando o *software*. E o mesmo foi feito para Função Quadrática e Funções Seno e Cosseno.

Plano de Aula 1 – Utilizando o *software* GeoGebra no estudo da Função Afim:

1. Identificação:
    a. Componente curricular: Matemática
    b. Etapa: 1º ano do ensino médio
    c. Duração: 2 aulas (50 min)
2. Objetivos:
    a. Reforçar o comportamento do gráfico da Função Afim;
    b. Generalizar o efeito de cada coeficiente no gráfico da função;
3. Conteúdos trabalhados:
    a. Construção de gráficos da Função Afim;
    b. Análise dos efeitos no gráfico devido à alteração dos valores dos coeficientes a e b na função $f(x) = ax + b$.
4. Recursos: *software* GeoGebra;
5. Apresentação:

Para a realização da atividade, os alunos deverão utilizar no *software* GeoGebra a ferramenta Controle Deslizante, criando dois, *a* e *b*, na sequência serão abertas duas caixas de diálogo onde podem ser feitas alterações nos comandos, de acordo com a proposta. Para este caso, as configurações apresentadas são suficientes. Após, por meio da Caixa de Entrada, digitar a função $f(x) = a*x + b$, que associará os controles deslizantes à função. Desta forma, surgirá na janela de visualização uma reta, conforme os valores que estão selecionados no controle deslizante. Como pode ser observada na Figura 6, abaixo. A ideia é que os alunos alterem para diferentes valores os controles deslizantes e observem as mudanças no gráfico.

Figura 6: Janela de visualização após a inserção dos controles deslizantes e da função Afim.



Fonte: Arquivo da autora.

Como forma de pontuar algumas situações, podem ser feitos os seguintes questionamentos:

a) O que ocorre quando o valor do coeficiente *a* é zero e *b* assume qualquer outro valor diferente de zero?

b) O que ocorre quando o valor do coeficiente *b* é zero e *a* assume qualquer outro valor?

c) O que ocorre quando o valor de *a* é 1 e o valor de *b* varia nas diferentes possibilidades do controle deslizante?

d) O que ocorre quando o valor de *b* é -1 e o valor de *a* varia a varia nas diferentes possibilidades do controle deslizante?

e) Diante do que foi visto, o coeficiente *a* é responsável por qual alteração no gráfico?

f) E o coeficiente *b*, é responsável por qual alteração no gráfico?

Para reforçar a definição de zero da função/raiz da função, pode ser explorada a ferramenta Raiz, esta indica o ponto que é o zero ou raiz da função. Também pode ser utilizada a ferramenta Interseção de Dois Objetos na segunda caixa de ferramentas, para destacar a interseção do eixo *y* da função em questão, assim, podem ser esboçados gráficos e após o questionamento realizar a verificação por meio do *software*. Espera-se assim atingir os objetivos propostos.

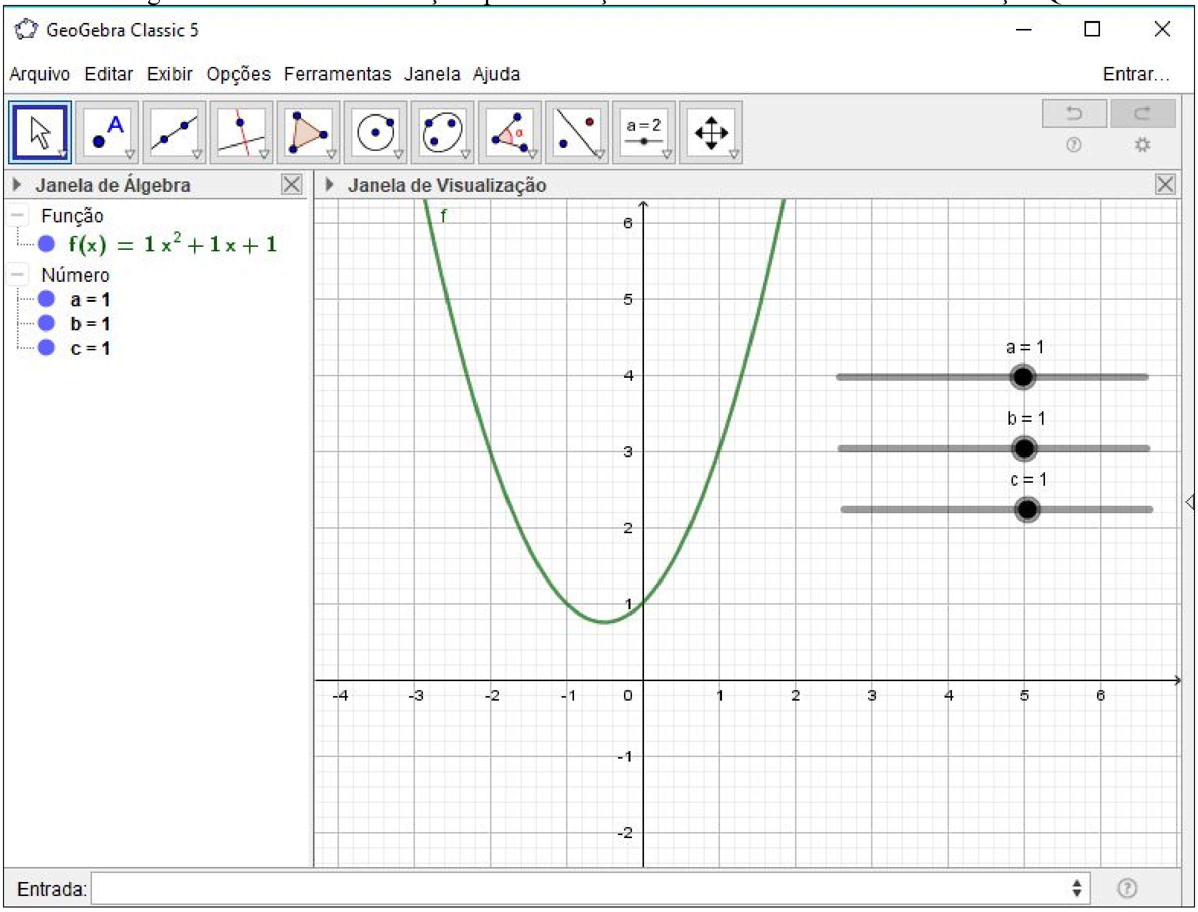
Plano de Aula 2 – Utilizando o *software* GeoGebra no estudo da Função Quadrática:

1. Identificação:
    a. Componente curricular: Matemática
    b. Etapa: 1º ano do ensino médio
    c. Duração: 2 aulas (50 min)
2. Objetivos:
    a. Reforçar o comportamento do gráfico da Função Quadrática;
    b. Generalizar o efeito de cada coeficiente no gráfico da função;
3. Conteúdos trabalhados:
    a. Construção de gráficos da Função Quadrática;
    b. Análise dos efeitos no gráfico devido à alteração dos valores dos coeficientes a, b e c na função $f(x) = ax^2 + bx + c$;
    c. Análise de raízes, vértice e interseção do eixo y.
4. Recursos: *software* GeoGebra;
5. Apresentação:

Para explorar o comportamento da Função Quadrática, bem como analisar o efeito de cada coeficiente, a ferramenta a ser utilizada inicialmente no GeoGebra é o Controle Deslizante. Esta ferramenta está localizada no décimo quadrado das ferramentas do *software*. Para a Função Quadrática, são necessários três controles deslizantes, a, b e c. A cada criação, uma caixa de diálogo surgirá solicitando que sejam alterados nome, intervalo e formato, para esta atividade, as informações que já estão preenchidas são suficientes.

Após a criação dos três controles, deve ser digitado na Caixa de Entrada a função f(x) = a*x^2 + b*x + c, e neste caso os controles estarão associados à função. A seguir surgirá uma parábola na janela de visualização de acordo com os valores que estão selecionados em cada controle deslizante, como pode ser observado na Figura 7 abaixo. Diante disso, a proposta é que os alunos alterem estes valores e observem as respectivas mudanças no gráfico.

Figura 7: Janela de visualização após a inserção dos controles deslizantes e da função Quadrática.



Fonte: Arquivo da autora.

Alguns questionamentos podem ser feitos de modo a organizar a elaboração de conjecturas:

a) O que ocorre com a parábola, se for escolhidos os valores $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$? Por quê?

b) O que ocorre com a parábola, se o valor do coeficiente a for variado entre valores negativos ou positivos, mantendo $b = 1$ e $c = 1$?

c) Mantendo $a = 1$ e $b = 1$, o que ocorre com a parábola ao variar o valor de c, por exemplo, $c = 3$ e $c = -3$? E se este for selecionado zero? Se o valor de a, for -1, o efeito do coeficiente c é alterado?

d) Selecionando $a = 1$ e $c = 2$, por exemplo, o que ocorre se for variado o valor de b? De que forma o gráfico intercepta o eixo y, em seu trecho de parábola crescente ou decrescente? E se o valor de b for zero?

e) O que ocorre com a parábola se o valor de $b = c = 0$ e a for variado, exceto para zero?

f) Como você resume os efeitos de cada coeficiente nas alterações do gráfico?

g) Altere os coeficientes para $a = 1$, $b = -5$ e $c = 5$ e a seguir digite na Caixa de Entrada o comando Raiz[<polinômio>] substituindo a palavra <polinômio> por *f*, que é o "nome" da função criada, e tecle *Enter*. Surgirá no gráfico, dois pontos, *A* e *B*, o que estes pontos representam?

h) Altere os coeficientes para $a = -1$, $b = 2$ e $c = -1$, o que ocorreu com os pontos *A* e *B*? Por que isso ocorre?

i) Altere os coeficientes para $a = -1$, $b = 2$ e $c = -5$, o que ocorreu com os pontos *A* e *B*? Por que isso ocorre?

j) Qual a relação do discriminante Δ (delta) com o número de raízes, com os pontos *A* e *B*?

k) Altere os coeficientes para $a = 1$, $b = 2$ e $c = -1$, digite na Caixa de Entrada o comando Extremo[<polinômio>] substituindo a palavra <polinômio> por *f*, e tecle *Enter*. Surgirá no gráfico o ponto *C*, o que este ponto representa?

l) Altere os coeficientes para $a = 1$, $b = 0$ e $c = -2$, o que ocorreu com o ponto *C*? E, se o valor do coeficiente *c* for variado, mantendo os outros dois, o que ocorre com o ponto *C*?

m) Por fim, altere os coeficientes para $a = 2$, $b = 4$ e $c = -1$, e busque no segundo quadrado de ferramentas a ferramenta Interseção de Dois Objetos, selecionando a parábola e o eixo y, surgirá no gráfico o ponto *D*, o que este ponto representa? E se o valor do coeficiente *c* for variado, o que ocorre com o ponto *D*?

Por serem diversos questionamentos, podem ser entregues impressos aos alunos, ou projetados para que cada um no seu tempo realize suas investigações. Espera-se com todas estas orientações e indicações que os objetivos de reforçar o comportamento do gráfico da Função Quadrática e generalizar o efeito de cada coeficiente no gráfico da função sejam alcançados.

Plano de Aula 3 – Utilizando o *software* GeoGebra no estudo da Função Trigonométrica Seno/Cosseno:

1. Identificação:
    a. Componente curricular: Matemática
    b. Etapa: 2º ano do ensino médio
    c. Duração: 2 aulas (50 min)
2. Objetivos:
    a. Reforçar o comportamento do gráfico da Função Trigonométrica Seno/Cosseno;
    b. Generalizar o efeito de cada coeficiente no gráfico da função;

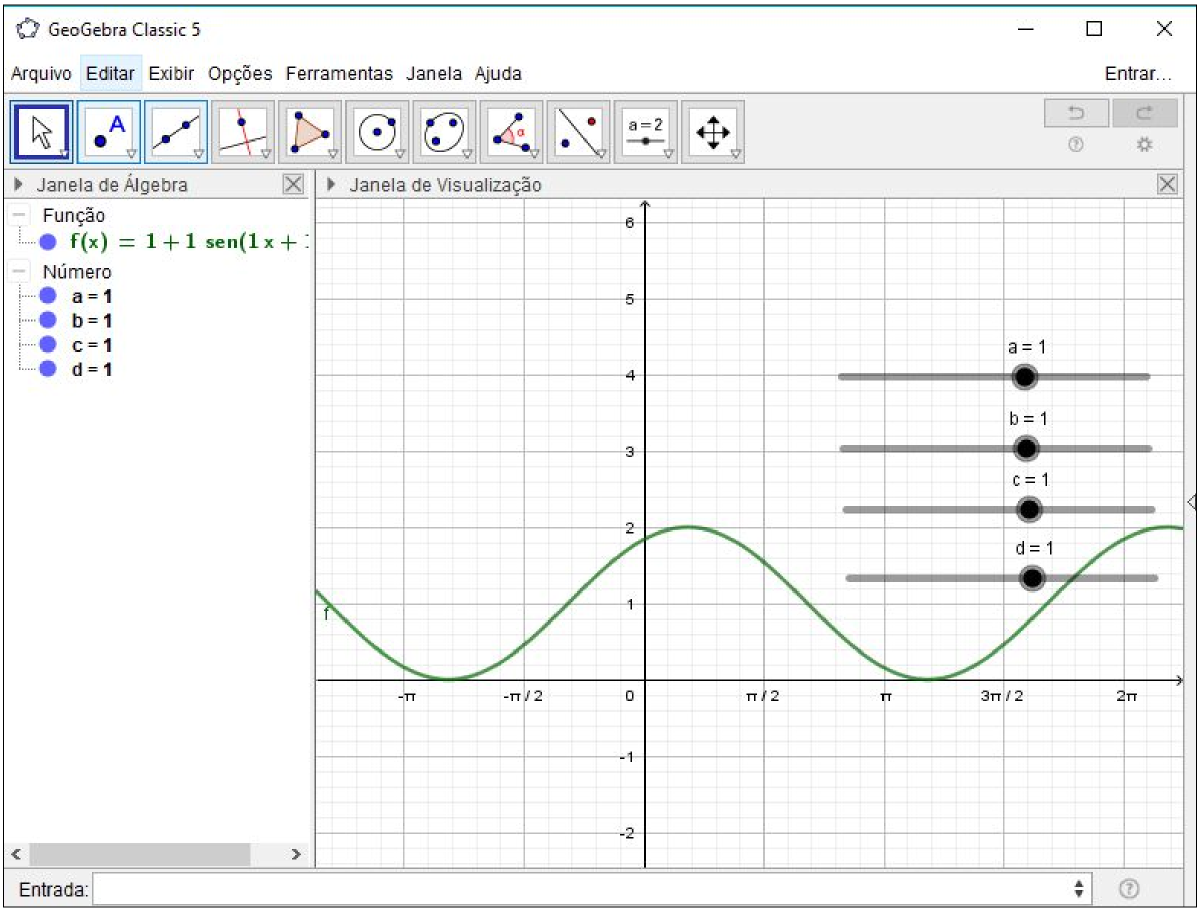
3. Conteúdos trabalhados:
    a. Construção de gráficos da Função Trigonométrica Seno/Cosseno;
    b. Análise dos efeitos no gráfico devido à alteração dos valores dos coeficientes *a, b, c* e *d* na função *f(x) = a+b*sin(c*x + d).*
4. Recursos: *software* GeoGebra;
5. Apresentação:

Primeiramente é importante ressaltar que as funções Seno e Cosseno apresentam comportamento semelhante, por isso, a atividade pode utilizar a função seno, *f(x) = a+b*sin(c*x + d)*, como também a função cosseno, *f(x) = a+b*cos(c*x + d)*. Os efeitos de cada coeficiente no gráfico serão os mesmos.

Para esta atividade é necessário utilizar quatro Controles Deslizantes, esta ferramenta se encontra no décimo quadrado de ferramentas do *software*. A cada vez que a ferramenta for selecionada, surgirá uma caixa de diálogo sugerindo alterações a serem feitas. Para esta atividade, os valores que já constam são suficientes, assim, deverão surgir na janela de visualização 4 controles deslizantes *a*, *b*, *c* e *d* variando de – 5 a 5. O próximo passo é inserir na Caixa de Entrada a função *f(x) = a+b*sin(c*x + d)*, deste modo os coeficientes criados por meio dos controles deslizantes estarão associados à função.

Para aproximar a atividade do formato como se trabalham as funções trigonométricas nos livros didáticos, é possível alterar o eixo do x para intervalos de π/2 em π/2. Para isso, é necessário acessar no menu Opções, Avançado, e buscar o ícone com um desenho de círculo e triângulo referente à Preferências – Janela de visualização. Nesta opção há uma aba específica para o Eixo x. Neste item há a opção Distância que deve ser marcada e selecionada a opção π/2. Assim o eixo do x passará a ter intervalos de π/2 em π/2 ao invés de 1 em 1, como pode ser observado na Figura 8 abaixo.

Figura 8: Janela de visualização após a inserção dos controles deslizantes, da função Trigonométrica Seno e da alteração no eixo das abcissas.



Fonte: Arquivo da autora.

A partir disso, podem ser feitos questionamentos que guiem os alunos para estabelecer conjecturas com relação aos efeitos de cada coeficiente no comportamento do gráfico:

a) Posicione os controles deslizantes em *a = 0*, *b = 1*, *c = 1* e *d = 0*, assim obtém-se a função *f(x) = sin (x)*, qual a imagem e o período desta função?
b) Alterando apenas o valor de *b* para zero, o que ocorre com o gráfico? E se o valor de *b* for 5 ou -5? Ocorrem alterações na imagem ou período?
c) Retorne o valor de *b* para 1 e altere o valor de *a* para 3 e em seguida -3, o que ocorre com o gráfico? Ocorrem alterações na imagem ou período?
d) Retorne o valor de *a* e de *c* para zero, o que ocorre com o gráfico? E se o valor de c for 2 ou -2? Ocorrem alterações na imagem ou período?
e) Retorne o valor de *c* para 1 e altere o valor de *d* para 1,5, o que ocorreu com o gráfico? Digite na caixa de entrada *g(x) = cos (x)*, o gráfico *f(x) = 1sen (1x+1,5)* é parecido com *g(x) = cos (x)*? Qual sua conclusão sobre isso?

f) Exclua ou esconda o gráfico *g(x)* e altere o valor de d para outros valores, como por exemplo, 4 ou -4. Ocorreram alterações na imagem ou período?

g) Como você resume os efeitos dos coeficientes *a*, *b*, *c* e *d* no gráfico?

h) Diante de tudo, como você imagina que seja o gráfico $f(x) = 2 \sin (2x)$? Confira se o que você pensou realmente acontece alterando os coeficientes para os valores correspondentes, $a = 0$, $b = 2$, $c = 2$ e $d = 0$. Determine a imagem e o período da função.

i) E para a função $f(x) = 1 + 2\sin (x)$? Imagine e confira com o *software* e determine a imagem e o período da função.

j) Por fim, imagine como é o gráfico da função $f(x) = -2 + \sin (x + 2)$? Confira com o *software* e determine a imagem e o período da função.

A partir destes questionamentos espera-se que os alunos consigam explorar novas possibilidades de gráficos da função seno, reforcem o comportamento da mesma e sejam capazes de relacionar os efeitos de cada coeficiente às transformações de um gráfico.

2.5 Reflexões sobre as aplicações dos Planos de Aula

Estas atividades foram desenvolvidas pela autora em diferentes turmas, porém sem registro formal, como forma de aproximar a utilização das TIC nas aulas de Matemática. Para tanto, a cada estudo, seja função Afim, Quadrática ou Trigonométrica Seno/Cosseno, a proposta de utilização do *software* GeoGebra foi inserida nas aulas após os conteúdos já terem sido trabalhados.

Pode-se dizer que os alunos costumam apreciar as aulas que contam com alguma novidade, e isso vale para jogos, saídas da sala de aula, passeios, e a motivação é grande com o uso de tecnologias. Por isso a busca por utilizar o GeoGebra como retomada de conceitos ainda que de maneira informal foi feita.

As atividades eram executadas seguindo as orientações iniciais apresentadas nos planos de aula do capítulo anterior. De modo geral, os alunos têm dificuldade de entender inicialmente onde buscam as ferramentas, como alteram as características de cada objeto ou do eixo, mas são bastante pontuais e entre eles procuram se ajudar, privilegiando o trabalho cooperativo. Como alguns processos são repetitivos, basta que sejam feitos duas ou três vezes para realizarem de forma autônoma.

Alguns problemas também surgem em decorrência da digitação, por exemplo, construir os controles deslizantes com letras minúsculas e após digitar a função com letras maiúsculas. Para o *software* trata-se de duas coisas diferentes e isso acarreta em algum tipo de erro. Além disso, algumas versões exigem que seja utilizado o asterisco (*) como sinal de multiplicação, outras não, por isso é interessante exibir o que deve ser digitado, seja no quadro, em apresentação ou impresso.

Todas estas colocações são detalhes que não impedem a realização das atividades nem ocupam muito tempo da aula. O importante é reforçar que são situações que acontecem e só precisam ser resolvidas para que todos realizem o trabalho proposto.

As movimentações dos controles deslizantes permitem uma criação instantânea de diferentes gráficos, seja qual for a função e esta possibilidade realizada em sala de aula com “quadro-giz” demanda muito tempo. Além disso, ao questionar os alunos sobre o efeito de cada coeficiente no gráfico, os mesmos ainda permanecem olhando para a tela, reflexo do que ocorre em sala. Assim é necessário instigá-los a manipular e assim perceber o que ocorre. Desta forma não demoram a responder, por vezes utilizando gírias ou expressões que dão a entender o comportamento. Cabe ao professor acrescentar ao vocabulário deles os termos corretos.

Este trabalho é um relato da utilização do *software* GeoGebra nas aulas de Matemática que mostrou a aprovação dos alunos. Vale ressaltar a motivação e interesse observado na elaboração das atividades utilizando os recursos providos pelas TIC. Verificou-se que estas atividades podem ser mobilizadoras para a introdução de um novo conteúdo, apenas devem ser feitas as adequações necessárias.

O professor pode determinar se todos devem trabalhar juntos ou as atividades podem ser disponibilizadas impressos para cada um ou cada dupla se guiar é fundamental. Assim é possível otimizar o tempo, e melhorar o rendimento da aula.

De modo geral, são atividades que foram bem aceitas, são simples de colocar em prática, quando o *software* já estiver instalado e permitem retomar conceitos por meio de uma nova estratégia. Sobretudo, é um passo na direção de inserir as TIC em sala de aula.

3 METODOLOGIA

Abordar a temática de propostas de aulas envolve a subjetividade dos professores que as propõem, assim como os objetivos que se pretendem alcançar. Para tanto, a pesquisa a ser desenvolvida é a qualitativa, pois segundo Gerhardts (2009, p. 32): “A pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais.”.

Além disso, a pesquisa qualitativa possui, entre outros, o caráter exploratório, em que o propósito maior é, segundo Gil (2010, p. 27): “proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torna-lo mais explícito ou a construir hipóteses.”.

Ao desenvolver este trabalho, os objetivos presentes giraram em torno de colaborar com professores que buscam aproximar suas aulas de Matemática do uso de TICs. Assim, espera-se que este trabalho sirva como material de consulta para aqueles que ainda resistem, pelos diversos motivos, a utilizar, por exemplo, *softwares* em suas atividades.

Inicialmente, foi realizada uma pesquisa no repositório digital da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o Lume. Neste repositório, estão disponíveis os trabalhos desenvolvidos como Trabalhos de Conclusão de Curso, de graduação e especialização, dissertações de Mestrado e teses de Doutorado. Para a proposta deste trabalho, foram pesquisados trabalhos cuja temática envolvesse atividades com uso do *software* GeoGebra sobre Funções aplicadas no Ensino Médio.

Dentre as muitas propostas encontradas alguns autores foram selecionados por explorarem atividades que trabalham com Plano Cartesiano, Função Afim, Quadrática, Exponenciais e Trigonométricas, Seno e Cosseno. Foram expostas as ideias de modo a contemplar cada um dos conteúdos citados, sem desmerecer outras propostas, apenas buscando construir um material de consulta ao leitor.

Além disso, são apresentados três planos de aula dos quais a autora faz uso em suas aulas, abordando as Funções Afim, Quadrática e Trigonométrica Seno/Cosseno. O relato na sequência versa sobre as impressões da autora nas diferentes aplicações das atividades. Em todas as aplicações não houve um registro formal, e sim uma análise dos pontos positivos e dos pontos negativos da sequência. Afinal, é imprescindível um olhar crítico que busque a melhora contínua.

Acima de tudo, se tem a clareza de que expor as propostas é um incentivo para a utilização das mesmas, e que adequações podem ser feitas para cada realidade e cada modo de abordar os conteúdos.

Justamente na pesquisa qualitativa, de acordo com Gerhardts (2009) o pesquisador deve ter cuidado com excesso de confiança no modo de coletar os dados, ou controle na própria influência ao analisar os dados, sensação de domínio do assunto, enfim questões que podem diminuir o rigor da pesquisa.

Com tudo isso, é importante reforçar que neste trabalho não se buscou atestar a eficácia de algumas atividades em detrimento de outras, muito menos ao apresentar os planos de aula da autora. O objetivo maior é construir um trabalho que sirva de subsídio para propostas de aulas de Matemática sobre Funções com a utilização do *software* GeoGebra.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho buscou colaborar com propostas de aulas sobre funções utilizando o *software* GeoGebra. Esse objetivo surgiu observando a realidade educacional. Hoje a sociedade faz uso de tecnologias constantemente, a escola é uma entidade que faz parte da sociedade, porém o processo educacional nem sempre acompanha essa realidade. Atualmente as pessoas têm mais facilidades, rapidez, possibilidade de comunicação em tempo real por meio de chamada de vídeo, acesso à informação e conteúdos produzidos em diferentes mídias. Em contrapartida, o processo educacional e a sala de aula continuam os mesmos. Uso de "quadro-giz", exposição de conteúdos, resolução de exemplos e exercícios é a sequência que costuma ser o padrão da escola ainda hoje.

Entre os motivos pelos quais não há uma mudança nas posturas, é a falta de propostas nas quais os professores possam se basear isso justifica este trabalho. Portanto, atendendo a expectativa do trabalho é abordado a temática de propostas de aulas utilizando o *software* GeoGebra. Logo, as propostas de aulas permitem superar esta situação de distanciamento, pois trazer uma proposta que apresenta atividades, ainda que complementares, já é uma forma de caminhar no sentido de aproximar as TIC da sala de aula. O *software* GeoGebra foi escolhido por ser uma ferramenta gratuita e muito utilizada. É de fácil acesso e utilização, e, por ser gratuita, tem sido usada tanto no ensino básico e superior na esfera pública ou privada.

Nas atividades trazidas, tanto dos exemplos como das propostas, todas abordam a temática de Funções. Elas são extremamente importantes, pois descrevem situações do dia a dia, permitindo ao aluno perceber uma aplicabilidade do que estuda e todas tem sua representação tanto Algébrica quanto Geométrica. Em geral as atividades colaboram para que a partir da manipulação do aluno, este possa estabelecer conjecturas, debater com os colegas e investigar situações. Isto permite aos alunos serem mais autônomos e menos dependentes do professor no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, todas as atividades são propostas buscando colaborar com o que já é feito pelo professor, sejam elas como mobilizadoras, ou de forma a desenvolver um tópico ou ainda como retomada do que foi estudado. Dessa forma, as propostas de aulas podem ser utilizadas como modelo aos professores interessados em utilizar o *software* GeoGebra em suas práticas pedagógicas.

Entretanto, é importante ressaltar que não se está tirando o mérito de outras estratégias utilizadas, mas trazendo como alternativas ao que já se conhece. Também, não se deve criar a ilusão de que ao utilizar um *software*, como aqui se propõe as dificuldades deixam de existir, que as dúvidas não surgirão e todos irão aprender da mesma forma e de forma efetiva. O GeoGebra é uma ferramenta que precisa ter seu uso planejado com objetivos claros, para realmente contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Por fim, este trabalho contribui para uma aproximação das tecnologias às aulas de Matemática, ainda que sutil e focada em um tópico apenas. É necessário incentivar tanto a produção de propostas de atividades para aulas de Matemática como de outras disciplinas utilizando tecnologias. Essa é uma forma de contribuir com os professores para incentivar inovações pedagógicas no processo de ensino e aprendizagem fornecendo subsídios para seus planejamentos.

REFERÊNCIAS

BALLEJO. C. C. **O uso de *software* no ensino de funções polinomiais no Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/18209 acesso em 18 de setembro de 2018.

BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

GEOGEBRA – Aplicativos Matemáticos. Sítio da *internet*. Disponível em: https://www.geogebra.org/ acesso em 30 de setembro de 2018.

GERHARDT. T. E. SILVEIRA, D. T., orgs. **Métodos de Pesquisa**. 120 p. Porto Alegre, Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf acesso em 12 de outubro de 2018.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5 ed. São Paulo, Atlas, 2010.

LIEBAN, D. PERTILE, D., PIEROZAN, A. **Tutoria Guiada: uma proposta de utilização do *software* GeoGebra para exploração de problemas de geometria plana com pressupostos na autonomia do aluno**. Revista Didácticas Específicas, nº 7, p. 45-60, 2012. Disponível em: https://revistas.uam.es/didacticasespecificas/article/view/7702/7978 acesso em 31 de agosto de 2018.

LIEBAN, D. MÜLLER, T J. **Construção de utilitários com o *software* GeoGebra: uma proposta de divulgação da geometria dinâmica entre professores e alunos**. Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo (IGISP), v. 1, nº 1, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8359 acesso em 30 de agosto de 2018.

HASELEIN. W. M. **Explorando modelos que envolvem funções exponenciais no Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/88268 acesso em 30 de setembro de 2018.

INSTITUTO GEOGEBRA NO RIO DE JANEIRO. Apresentação/ **O que é o GeoGebra**. Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br acesso em: 31 de agosto de 2018.

LOPES, M. M. **Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria, Usando o *Software* GeoGebra**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 631-644, ago. 2013. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2013000300019&script=sci_abstract&tlng=pt acesso em 01 de agosto de 2018.

MOREIRA, L. S. BATISTA, S. C. F. BARCELOS, G. T. PASSERINO, L. M. **Trigonometria Dinâmica: unidade de aprendizagem *online* para estudo de Trigonometria**. Revista Brasileira de Informática na Educação, Volume 17, Número 3, 2009. Disponível em: http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/view/1025 acesso em 01 de agosto de 2018.

PEDROSO, L. W. **Uma proposta de ensino de trigonometria com uso do *software* GeoGebra**. Dissertação (Mestrado profissionalizante em Ensino de Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/49284 acesso em 30 de setembro de 2018.

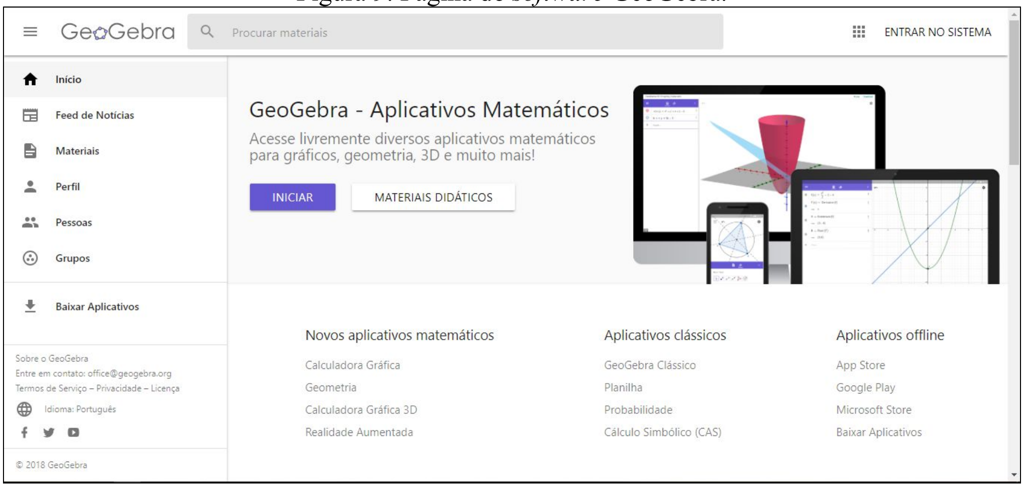
REIS, F. P.. **Introdução ao estudo das funções de 1º grau com o uso do *software* GeoGebra**. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática para a Educação Básica) Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/134091 acesso em 18 de setembro de 2018.

APÊNDICE 1 – TUTORIAL DE INSTALAÇÃO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Para realizar a instalação do *software* GeoGebra, basta seguir os seguintes passos:

1) Acessar a página do *software*: https://www.geogebra.org/ você irá encontrar a seguinte página, conforme a Figura 9:

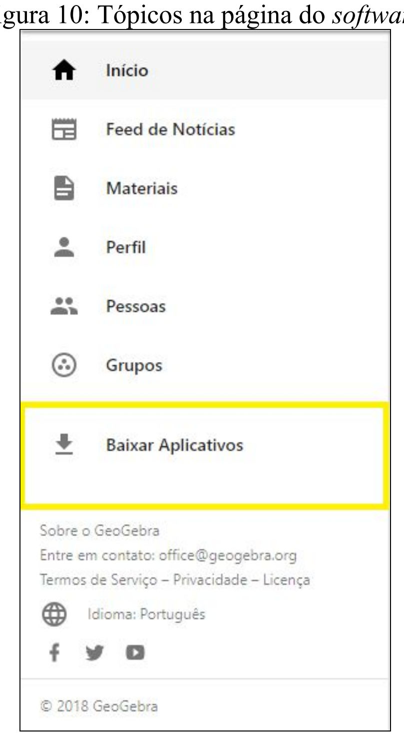
Figura 9: Página do *software* GeoGebra.



Fonte: https://www.geogebra.org/

2) Haverá uma guia à esquerda da página, assim como a Figura 10, com diferentes tópicos, o sétimo tópico chama-se Baixar Aplicativos, acesse-o:

Figura 10: Tópicos na página do *software*.



Fonte: https://www.geogebra.org/

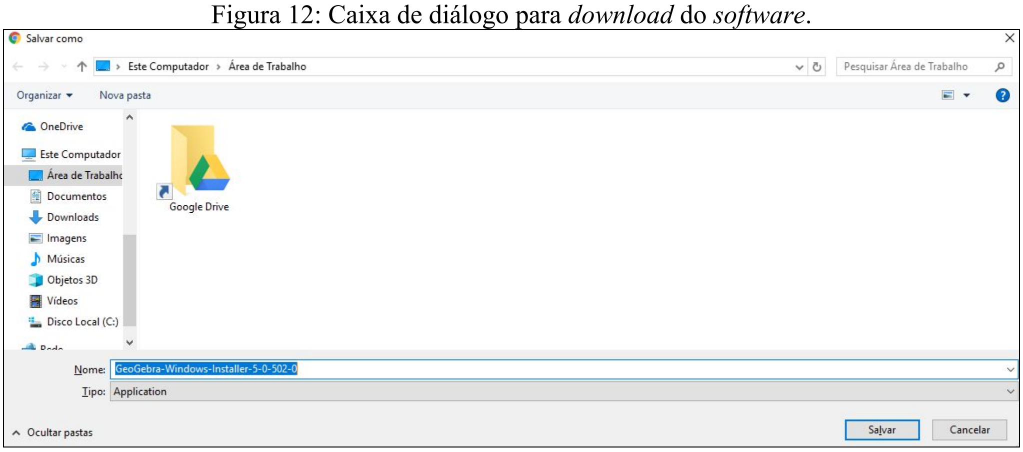
3) Ao acessar o tópico Baixar Aplicativos, você irá encontrar as seguintes opções, Figura 11:

Figura 11: Aplicativos disponíveis para *download*.

Fonte: https://www.geogebra.org/

4) Nos itens que possuem a indicação INÍCIO, podem ser utilizados *on-line* pela página. Entretanto se seu objetivo é obter o *software* com todas as funcionalidades, basta realizar o *DOWNLOAD* nos itens GeoGebra Clássico 6 ou GeoGebra Clássico 5. Estes são duas versões que apresentam todos os recursos do *software*.
5) Ao solicitar o *download* de um destes, surge uma caixa de diálogo semelhante à Figura 12, solicitando que seja salvo o arquivo do *software*.

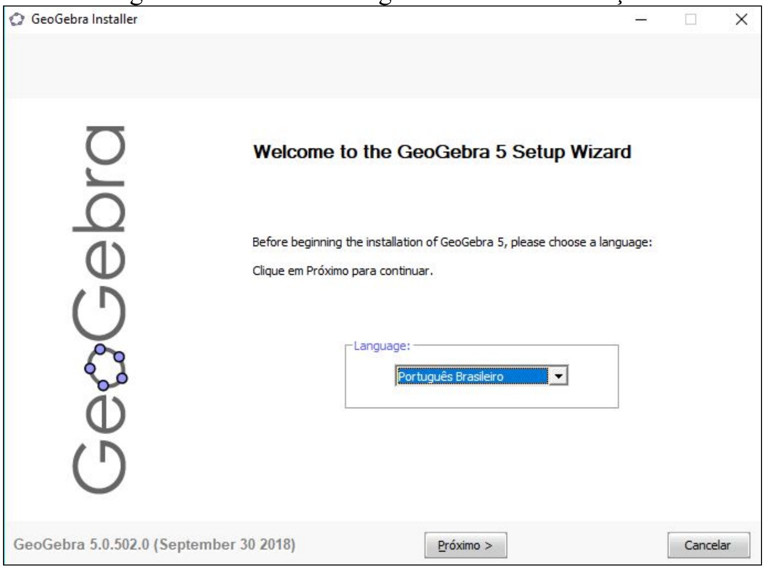
Figura 12: Caixa de diálogo para *download* do *software*.



Fonte: Arquivo da autora.

6) Ao salvar, você deverá abrir o arquivo e permitir que seu computador realize as ações necessárias para iniciar a instalação. Novamente surgirá uma caixa de diálogo, conforme a Figura 13, do *software* solicitando o idioma de instalação.

Figura 13: Caixa de diálogo do início da instalação.



Fonte: Arquivo da autora.

7) Na sequência, deverá concordar com os termos da licença, e selecionar o tipo de instalação. Em instantes será criado um ícone de atalho para abrir o *software* em seu computador.

ANEXO 1 – SEQUÊNCIA: INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES DE 1º GRAU COM O USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA, AUTORA: FERNANDA PACHECO DOS REIS.

Atividades para o estudo das Funções

OBSERVAÇÕES E DICAS:

- Para facilitar o desenvolvimento de nossas atividades, usaremos um código para ajudar na localização da ferramenta necessária: o número romano representa a localização da Caixa de Ferramentas e o algarismo indo-arábico representa a localização da ferramenta dentro dessa caixa. Assim, o código (VII/3) indica que a ferramenta necessária é a terceira da sétima Caixa de Ferramentas.
- Usamos frequentemente as ferramentas Mover e Deslocar Eixo. Estas podem ser acionadas na Barra de Ferramentas ou pressionando ESC para ativar a ferramenta Mover e segurando a tecla Ctrl pressionada para ativar a ferramenta Deslocar Eixos.
- Para deixar nosso trabalho mais bonito usamos a caixa Propriedades. Para ativá-la podemos dar um duplo clique sobre o Objeto desejado, desde que a ferramenta Mover esteja acionada.

AULA 1 – 1 período

O aluno deverá:

1) Conhecer a interface do *software* Geogebra. Com o mouse clique nas janelas do *software* e em seguida na área de trabalho para visualizar o que ocorre. Para desfazer qualquer ação, clique nesta figura , que fica no canto direito da tela.

2) Salvando seus arquivos: Clique no menu **Arquivo** e selecione **Gravar como**. Digite o nome do arquivo: ***PONTOS NO PLANO (Nome do Aluno)***. Salve o arquivo na pasta da sua turma, que se encontra na área de trabalho.

3) Nomeando seus trabalhos:

- ✓ Selecione a ferramenta **Inserir texto** (X/1) e clique sobre a área de trabalho, onde deseja que o texto apareça. Digite: ***Nome aluno***. Dê um Enter no teclado. Digite a ***Data***. Clique em Ok.
- ✓ Selecione a ferramenta **Inserir texto** (X/1) e clique sobre a área de trabalho, onde deseja que o título da atividade, apareça. Digite: **PONTOS NO PLANO CARTESIANO**. Clique em Ok.
- ✓ Clique com o botão direito do mouse sobre o título da atividade e selecione **Propriedades**. Selecione a guia **Cor** e escolha a cor que desejar. Escolha a guia **Texto** e mude o tamanho da fonte (letra) para 18 e clique em N para que o texto fique em negrito. Depois clique em fechar.

4) Traçando pontos no plano cartesiano:

- ✓ No menu **Exibir** clique em **Malhas** para que esta fique visível.
- ✓ Selecione a ferramenta **Mover janela de visualização** (XII/1). Clique sobre a janela de geometria, segure o mouse pressionado e posicione a origem dos eixos no centro área de trabalho.

✓ Selecione a ferramenta **Mover** (I/1). Clique sobre os textos (data e nome e título), segure o mouse pressionado e arraste-os para posicioná-los melhor, caso não tenham ficado no lugar desejado.

✓ Selecione a ferramenta **Novo ponto** (II/1). Construa os seguintes pontos sobre o plano cartesiano: A=(3,4) B=(6,-3) C=(-10,7) D=(0,2) E=(2,-8) F=(-7,6) G=(1,-1) H = (9, 0)

✓ Clique com o botão direito do mouse sobre o **Ponto A** e selecione **Propriedades**. Selecione a guia **cor** e escolha a cor que desejar. Selecione a guia estilo e aumente o **tamanho do ponto** para **9** (nove). Feche a caixa. Use o mesmo procedimento para pintar os outros pontos do plano cartesiano.

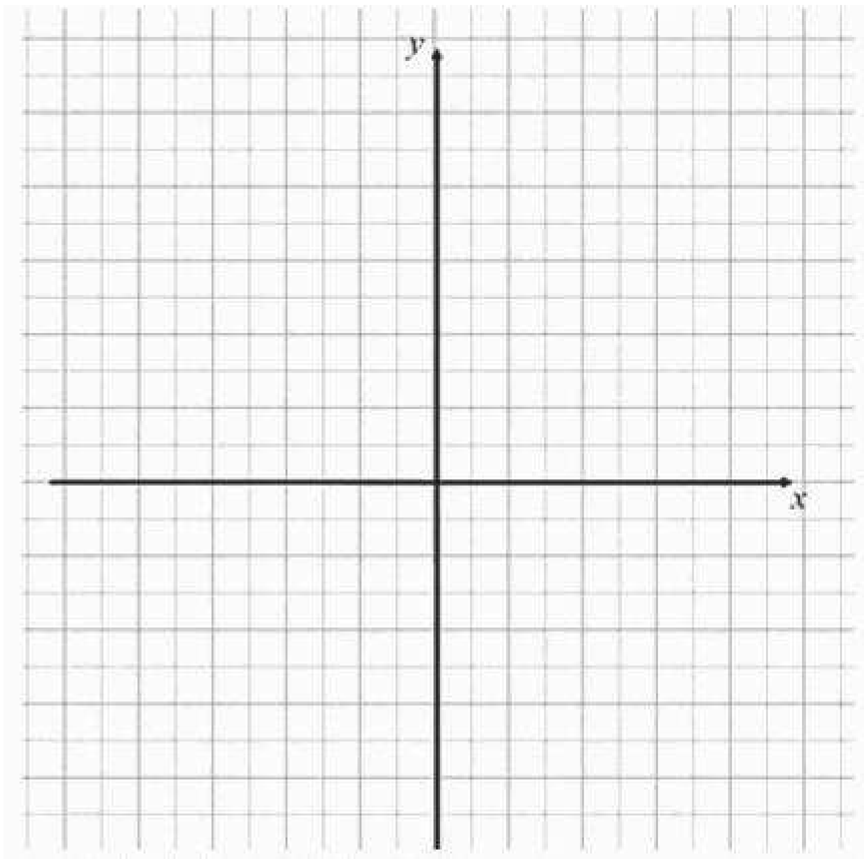
✓ Selecione a ferramenta **Mover** (I/1). Movimente os pontos construídos e observe na janela de álgebra o que ocorre.

✓ Movimente os pontos feitos no Geogebra e os posicione nas seguintes coordenadas: A=(-2,3) B=(5,-6) C=(7,8) D=(0,7) E=(-2,2) F=(6,1) G = (0, -4) H = (0, 0)

✓ Feche o arquivo e salve as alterações.

1.1 Exercitando...

1) Localize os pontos A (-4,-2); B (-2,6); C (1,4); D (-2,-4); E (-3,-3); F (4,0); G (0,-5); H (2,5); I (0,3) no plano cartesiano.



E agora responda:

a) Quais pontos pertencem ao 1° quadrante?

b) Quais pontos pertencem ao 2° quadrante?

c) Quais pontos pertencem ao 3° quadrante?

d) Quais pontos pertencem ao 4° quadrante?
e) Quais pontos pertencem ao eixo x?
f) E ao eixo y?

1.2 2) No plano cartesiano abaixo, escreva os pares ordenados de cada ponto:

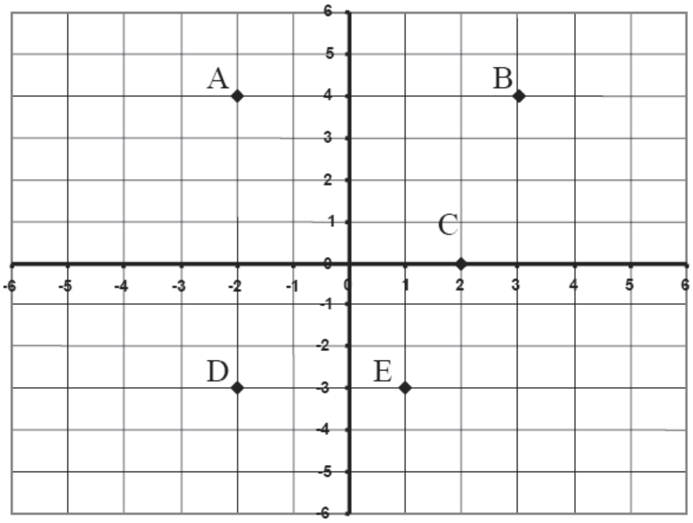
A_______________

B_______________

C_______________

D_______________

E _______________



<u>**AULA 2 – 3 períodos**</u>
O aluno deverá:

1) Abrir o arquivo na área de trabalho denominado: **Arquivo problema 1_1 ano_2015.**

✓ Clicar no botão "reproduzir" e responder as seguintes questões:
<u>Considere a seguinte situação</u>: O carrinho A está no ponto (-10, 0) e o carrinho B está no ponto (0, -6). A partir de um certo momento t = 0 o carrinho A começa a andar para a direita com uma velocidade de 2 cm/s e o carrinho B começa a andar para cima numa velocidade (menor) de 1 cm/s. A distância entre eles, que inicialmente é a hipotenusa do triângulo retângulo, começa a diminuir. Eles não coincidem pois o carrinho A passa pela origem antes do carrinho
B. A e B continuam seus movimentos e agora a distância entre eles aumenta outra vez.

Pergunta-se:

a) Como é o comportamento da distância entre os carrinhos? Existe um instante em que a distância entre eles é a menor possível? Qual é este instante? Em algum instante a distância entre A e B fica menor do que 1cm ?

b) Como seria o comportamento da distância entre os carrinhos se suas velocidades fossem variáveis?

2) Abrir o arquivo na área de trabalho denominado: **Arquivo 1_1 ano_2015.**

✓ Responder a questões que aparecem na tela do arquivo:
<u>**Questão do arquivo:**</u> A reta cor de rosa indica o deslocamento de um móvel num dado intervalo de tempo. Movimentando o ponto MOVER, responda:

a) Qual é o deslocamento do móvel num intervalo de 4 segundos?

b) Qual é o intervalo de tempo correspondente a um deslocamento de 21 cm?

c) Construa uma tabela com os valores do tempo em 1, 2, 3, 4, e 5s e os valores correspondentes ao deslocamento.

d)O deslocamento está em função do intervalo de tempo? Justificar a resposta.

d) Podemos escrever uma fórmula matemática que generalize esse deslocamento em função do tempo? Se sim, qual seria?

3) Abrir o arquivo na área de trabalho denominado: **Arquivo 2_1 ano_2015.**

✓ Responder a questões que aparecem na tela do arquivo:

Questão do arquivo: Movimentando o ponto MOVER, verifique o que ocorre com os valores de y, quando modificamos os valores de x:

a) Quando x=1? ____________

b) Quando x=-1? ____________

c) Quando x=4? ____________

d) Quando x=-5? ____________

e) Qual a relação que podemos estabelecer entre x e y?

4) Abrir o arquivo na área de trabalho denominado: **Arquivo 3_1 ano_2015.**

✓ Responder a questões que aparecem na tela do arquivo:

Questão do arquivo: Movimentando o ponto MOVER sobre a reta, responda:

a) O que ocorre com os valores de y quando aumentamos os valores de x?

b) E quando diminuímos?

c) Construa uma tabela com os valores de x=-2, -1, 0, 1 e 2 e seus valores correspondentes a y:

d) Existe uma relação entre esses valores? Represente essa relação através de uma fórmula matemática, utilizando as letras x e y.

5) Abrir o arquivo na área de trabalho denominado: **Arquivo 4_1 ano_2015.**

✓ **Questão do arquivo:** Agora, movimente os controles **a** e **b** e responda:

a) O que ocorre com a função quando aumentamos ou diminuímos o valor de a? Justifique.

b) O que ocorre com a função quando aumentamos ou diminuímos o valor de b? Justifique.

6) Faça agora um breve relato sobre o uso do Geogebra nas aulas. Conseguiu compreender bem o conceito de função do 1° grau? Você achou significativo? Melhorou seu desempenho? Tornou mais fácil a compreensão? Gostaria de trabalhar com o *software* novamente?

ANEXO 2 - SEQUÊNCIA: *SOFTWARE* NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POLINOMIAIS E GRÁFICOS NO ENSINO MÉDIO, AUTORA: CLARISSA CORAGEM BALLEJO

Plano de Ensino

Objetivo principal

Fazer o estudo de funções polinomiais no Ensino Médio com a utilização do *software* GeoGebra e estabelecer conexões entre as equações polinomiais e seus respectivos gráficos. Essa atividade é sugerida para qualquer série do Ensino médio.

Conteúdos matemáticos envolvidos

Funções polinomiais de 1º, 2º e 3º graus.

Recursos utilizados

Software matemático gratuito GeoGebra.

Base teórica

A elaboração e desenvolvimento deste plano têm por base os artigos *A qualitative study of polynomials in high school* (O estudo qualitativo de polinômios no Ensino Médio, escrito por Nitsa Movshovitz-Hadar e Alla Shmukler, do Instituto de Tecnologia de Israel), *Engenharia Didáctica* (de Michelle Artigue) e *Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática* (de Vera Clotilde Garcia Carneiro).

O primeiro apresenta uma proposta de uso de *software* para o estudo de polinômios no Ensino Médio e sugere o computador como um método facilitador na introdução do estudo de polinômios no Ensino Médio. A principal proposta do artigo é a de considerar os polinômios como produtos de funções lineares e quadráticas e, assim, obter suas propriedades a partir da observação e análise de gráficos.

O texto de Artigue apresenta a Engenharia Didática como uma metodologia de investigação. No texto, a autora faz uma abordagem histórica, explicando a origem dessa metodologia e destaca ainda as características gerais da Engenharia Didática.

Por fim, o último artigo apresenta uma proposta para o ensino da geometria orientada pelos princípios da Engenharia Didática. Ele traz um mapa dessa metodologia, servindo de roteiro para que o leitor compreenda as etapas necessárias.

Atividades

A dinâmica de trabalho em sala se dará de maneira que os alunos poderão realizar as atividades sozinhos ou em duplas. Para tanto, serão dados exercícios a serem realizados com o auxílio do GeoGebra, *software* de Matemática gratuito que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. A seguir está a sequência de atividades entregue aos alunos.

Nome(s): .... Dupla:	
Data:___/_/_____	Turma: ....
Disciplina: Matemática – 3º ano	Professora: ....

***Software* na Aprendizagem de Funções Polinomiais e Gráficos no Ensino Médio**

Etapa 1

Um estudo sobre os zeros e as constantes a e b da função de 1º grau $y = ax + b$ **.**

Dada a função $y = ax + b$, esboce os gráficos abaixo com o auxílio do GeoGebra, quando:

a) $a = 1$ *e* $b = 3$
b) $a = 2$ *e* $b = -4$

c) $a = ½$ *e* $b = 7$

d) $a = 1/5$ *e* $b = -2$

e) $a = -2$ *e* $b = 1$

f) $a = -3$ *e* $b = -5$

g) $a = -1/3$ *e* $b = -3$

h) $a = -1/4$ *e* $b = 2$

Responda às questões que seguem:

1. Quais são as conclusões que você tira após observar os gráficos desenhados?

2. Qual a influência dos valores de **a** nos desenhos dos gráficos?

3. O que os valores de **b** da equação representam nos gráficos?

4. Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a primeira reta desenhada ($y = x + 3$) e o eixo das abscissas. Qual foi o ponto encontrado?

5. Repita a operação acima para cada uma das outras retas desenhadas e responda: o que os valores de **x** de cada ponto encontrado representam?

Salve o arquivo na área de trabalho com a identificação da dupla e da etapa. Exemplo: duplaA_1

Etapa 2

Um estudo sobre os zeros e as constantes a e c da função de 2º grau $y = ax^2 + bx + c$ **.**

Inicie um novo arquivo.
Utilizando as funções de 1º grau da etapa anterior, esboce o gráfico no GeoGebra das seguintes funções e responda às perguntas:

1. $y_1 = x + 3$, $y_2 = x/5 – 2$ e $y_3 = (x + 3). (x/5 – 2)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das abscissas. O que você observa?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) As retas são crescentes ou decrescentes?

d) A parábola desenhada possui concavidade voltada para cima ou para baixo?

e) Desenvolva o produto notável na equação $y = (x + 3).(x/5 - 2)$ e então aplique a fórmula de Bhaskara.

i) Quais foram os números encontrados?

ii) Qual a relação desses números com seus respectivos gráficos?

iii) Como chamamos esses números encontrados?

2. $y_1 = 2x - 4$, $y_2 = -3x - 5$ e $y_3 = (2x - 4).(-3x - 5)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das abscissas. O que você observa?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) As retas são crescentes ou decrescentes?

d) A parábola desenhada possui concavidade voltada para cima ou para baixo? Desenvolva o produto notável na equação de Bhaskara.

i) Quais foram os números encontrados?

ii) Qual a relação desses números com seus respectivos gráficos?

iii) Como chamamos esses números encontrados?

3. $y_1 = - x/3 - 3$, $y_2 = - x/4 + 2$ e $y_3 = (-x/3 - 3) (-x/4 + 2)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das abscissas. O que você observa?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) As retas são crescentes ou decrescentes?

d) A parábola desenhada possui concavidade voltada para cima ou para baixo?

e) Desenvolva o produto notável na equação $y = (-x/3 - 3) (-x/4 + 2)$ e então aplique a fórmula de Bháskara.

i) Quais foram os números encontrados?

ii) Qual a relação desses números com seus respectivos gráficos?

iii) Como chamamos esses números encontrados?

4. $y_1 = x + 3$, $y_2 = x + 3$ e $y_3 = (x + 3)(x + 3)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das abscissas. O que você observa?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre a parábola desenhada e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) As retas são crescentes ou decrescentes?

d) A parábola desenhada possui concavidade voltada para cima ou para baixo?

e) Desenvolva o produto notável na equação $y= (x + 3)(x + 3)$ e então aplique a fórmula de Bháskara.

i) Quais foram os números encontrados?

ii) Qual a relação desses números com seus respectivos gráficos?

iii) Como chamamos esses números encontrados?

Salve o arquivo na área de trabalho com a identificação da dupla e da etapa. Exemplo: duplaA_2

Etapa 3

Um estudo sobre os zeros e a constante d da função de 3º grau $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **.**

Inicie um novo arquivo.

Utilizando as funções de 1º grau da primeira etapa, esboce os gráficos no GeoGebra das seguintes funções e responda às perguntas:

1. $y_1 = - x/3 - 3$, $y_2 = 2x - 4$, $y_3 = - x/4 + 2$ e $y_4 = (-x/3 - 3).(2x - 4).(-x/4 + 2)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das abscissas. O que você observa? Quais foram os pontos encontrados?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) Quais são os zeros da função $y = (-x/3 - 3).(2x - 4).(-x/4 + 2)$?

2. $y_1 = x/5 - 2$, $y_2 = - 2x +1$, $y_3 = - 3x - 5$ e $y_4 = (x/5 - 2).(-2x + 1).(-3x - 5)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das abscissas. O que você observa? Quais foram os pontos encontrados?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) Quais os zeros da função $y = (x/5 - 2).(-2x + 1).(-3x - 5)$?

3. $y_1 = x + 3$, $y_2 = x/2 + 7$, $y_3 = (x + 3) (x + 3) (x/2 + 7)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das abscissas. O que você observa? Quais foram os pontos encontrados?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) Quais são os zeros da função $y = (x + 3) (x + 3) (x/2 + 7)$?

4. $y_1 = -x/3 - 3$, $y_2 = (-x/3 - 3).(-x/3 - 3)(-x/3 - 3)$

a) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das abscissas. O que você observa? Quais foram os pontos encontrados?

b) Utilize a opção *interseção de dois objetos* e então clique sobre o gráfico da função de terceiro grau desenhado e o eixo das ordenadas. Qual foi o ponto encontrado?

Qual a relação entre o valor de **y** desse ponto com os valores do **b** das equações de 1º grau?

c) Quais são os zeros da função = (-x/3 - 3).(-x/3 – 3)(-x/3 – 3)?

5. Esboce o gráfico das funções abaixo no mesmo plano cartesiano:
$y_1 = (x + 1)(- 2x + 6)(x/2 + 7)$
$y_2 = (x + 1)(x + 1)(- 2x + 6)$
$y_3 = (x + 1)(x + 1)(x + 1)$

Considere também os gráficos referentes às funções dos exercícios 1, 2, 3 e 4 anteriores.
No que diz respeito aos **zeros** das funções, quais são as conclusões que você tira após observar os gráficos desenhados?

Salve o arquivo na área de trabalho com a identificação da dupla e da etapa. Exemplo: duplaA_3

ANEXO 3 – SEQUÊNCIA: EXPLORANDO MODELOS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO (PRIMEIRO ENCONTRO), AUTOR: WALTER MENDES HASELEIN.

4.1 Planejamentos

Foram elaborados quatro planos de aula, um para cada encontro do experimento. As atividades envolveram exposição de conteúdos e realização de exercícios, além da exibição de algumas pesquisas no campo da Matemática Aplicada que envolve o conteúdo abordado.

4.1.1 Primeiro Encontro Tema: Funções exponenciais

Objetivos: Analisar e compreender os conceitos que estão envolvidos no estudo de funções exponenciais, considerando a construção do seu gráfico de acordo com os parâmetros envolvidos.

Conteúdos Envolvidos: Potenciação, equações de uma variável e construção de gráficos no plano cartesiano.

Metodologia: Para introduzir o estudo de funções exponenciais, será analisada com os alunos a diferença entre uma variação que ocorre a uma taxa constante, como no caso das funções lineares, e uma que ocorre a uma taxa percentual constante, que é o caso das funções exponenciais. Para ilustrar a diferença, utilizar-se-á o seguinte exemplo:

1º Caso: Variação constante: Um trabalhador recebe uma oferta de trabalho, na qual receberá, inicialmente, um salário de R$ 15.000,00 por ano. Para reforçar a proposta, a empresa promete um aumento de R$ 1.000,00 ao final de cada ano trabalhado. Vamos calcular o seu salário nos primeiros anos:

A variação do salário deste trabalhador ocorre a uma taxa constante de R$ 1.000,00 por ano. Então, temos:

Após o 1º ano de trabalho: $S(1) = 15000 + 1000 = 16000$

Após o 2º ano de trabalho: $S(2) = 16000 + 1000 = 17000$

Após o 3º ano de trabalho: $S(3) = 17000 + 1000 = 18000$

Após o 4º ano de trabalho: $S(4) = 18000 + 1000 = 19000$

Assim, o trabalhador receberá, a cada ano, o mesmo aumento que recebera no ano anterior, o que mostra uma função que varia a uma taxa constante.

A partir dos cálculos acima, é fácil ver que a expressão que nos fornece o salário, $S(t)$, em reais, após t anos de trabalho, sabendo que o salário inicial é de R$ 15.000,00 e que a taxa de variação é de R$ 1.000,00 por ano, é dada por $S(t) = 15000 + 1000\,t$.

Em uma tabela, estes dados estariam visualizados como segue:

Salário Inicial	Após 1 ano $t = 1$	Após 2 anos $t = 2$	Após 3 anos $t = 3$	Após 4 anos $t = 4$
R$ 15.000,00	R$ 16.000,00	R$ 17.000,00	R$ 18.000,00	R$ 19.000,00

Tabela 4 – Variação do Salário a uma taxa constante

$t = 0$

A partir de quaisquer dois pares da tabela acima, verifica-se que a taxa de variação (razão entre a variação do salário e a variação do número de anos) é, em reais por ano, constante, isto é:

$\Delta S/\Delta t = 1000$

Por exemplo:
com os valores em $t = 1$ e em $t = 3$, obtemos:

$\Delta S/\Delta t = 18000 – 16000 / 3 - 1 = 2000/2 = 1000$

com os valores em em $t = 0$ e em $t = 3$, obtemos:

$\Delta S/\Delta t = 18000 – 15000 / 3 - 0 = 3000/3 = 1000$

e assim por diante.

Agora, analisaremos o outro caso.

2º Caso: Variação a uma taxa percentual constante: Consideremos agora que o mesmo trabalhador receba uma segunda proposta, na qual partindo do mesmo salário de R$ 15.000 anuais, seu salário seja aumentado a cada ano em 6% do salário anterior. Vejamos qual será o salário deste trabalhador nos primeiros anos.

$S(1) = 15000 + 6\%$ de $15000 = 15000 + 900 = 15900$;

Este é o salário que o trabalhador receberá ao longo do seu 2º ano de trabalho, após o qual, receberá um novo aumento e seu salário após dois anos de trabalho será:

$S(2) = 15900 + 6\%$ de $15900 = 15900 + 954 = 16854$;

Após três anos de trabalho, ele recebe um novo aumento, passando a receber:

$S(3) = 16854 + 6\%$ de $16854 = 16854 + 1011{,}24 = 17865{,}24$;

Repara-se, neste caso, que o aumento que, após o primeiro ano foi de R$ 900,00, passou para R$ 954,00 após o segundo ano, e R$ 1011,24 após o terceiro ano de trabalho.

Dos resultados acima, se quisermos escrever uma fórmula que forneça o salário, em reais, após anos de trabalho, conhecidos o salário inicial e a taxa de variação de 6% ao ano, temos que:

$S(1) = 15000 + 0,06 . 15000 = 15000 . (1 + 0,06) = 15000 . (1,06)$
$S(2) = S(1) + 0,06 . S(1) = S(1) . (1 + 0,06) = S(1) . (1,06) = 15000 . (1,06)^2$
$S(3) = S(2) + 0,06 . S(2) = S(2) . (1 + 0,06) = S(2) . (1,06) = 15000 . (1,06)^3$

Ou seja, após anos de trabalho, temos:

$S(t) = 15000. (1,06)^t$

A função que expressa o salário neste segundo caso é um exemplo de função exponencial.

Em uma tabela, estes dados estariam visualizados como segue:

Tabela 5 – Variação do salário a uma taxa percentual constante

Inicialmente t=0	Após 1 ano t=1	Após 2 anos t=2	Após 3 anos t=3	Após 4 anos t=4
R$ 15.000,00	R$ 15.900,00	R$ 16.854,00	R$ 17.865,24	R$ 18.937,15

A partir de quaisquer dois pares (t,S) desta tabela, verifica-se que a taxa de variação percentual (razão entre a variação percentual $\Delta S / s$ no salário e a variação Δt do número de anos) é, em % ao ano, constante, isto é:

$$\Delta S/S.\Delta t = 0,06$$

indicando uma taxa de variação percentual de 6% ao ano. Na expressão acima, a variação percentual do salário é representada por $\Delta S / s$, sendo que o ΔS no numerador indica a variação no salário, e o S no denominador representa o salário no início do intervalo de tempo Δt.

Por exemplo:

com os valores em t = 1 e em t = 3, obtemos:

$$\Delta S/S.\Delta t = 17865,24 - 15900 / 15900 . (3 - 1) = 0,06$$

com os valores em t = 0 e em t = 3, obtemos:

$$\Delta S/S.\Delta t = 17865,24 - 15000 / 1500 . (3 - 0) = 0,06$$

e assim por diante.

Após, um questionamento será levantado. Qual proposta será mais vantajosa ao longo dos anos? Espera-se que os alunos percebam que no segundo caso, o salário irá aumentar cada vez mais, enquanto que no primeiro esta variação manter-se-á constante.

A seguir, será generalizada a expressão que representa uma função exponencial:

$$f(x) = ab^{x-c} + d, \text{ com } b > 0$$

A próxima etapa será analisar o papel de cada um dos parâmetros envolvidos na expressão de uma função exponencial, a partir da mais simples, com os valores de $a = 1$ e $c = d = 0$.

Consideraremos, portanto, a função $f(x) = b^x$. Os alunos deverão atribuir valores ao parâmetro b, para esboçar o gráfico da função acima. Eles devem notar que a função assume um comportamento crescente se $b > 1$ e decrescente se $b < 1$.

Para ilustrar o comportamento dos gráficos, utilizei o *software* GeoGebra, que pode ser baixado gratuitamente no site http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/

Figura 1. Gráfico de $f(x) = b^x$, com $b > 1$

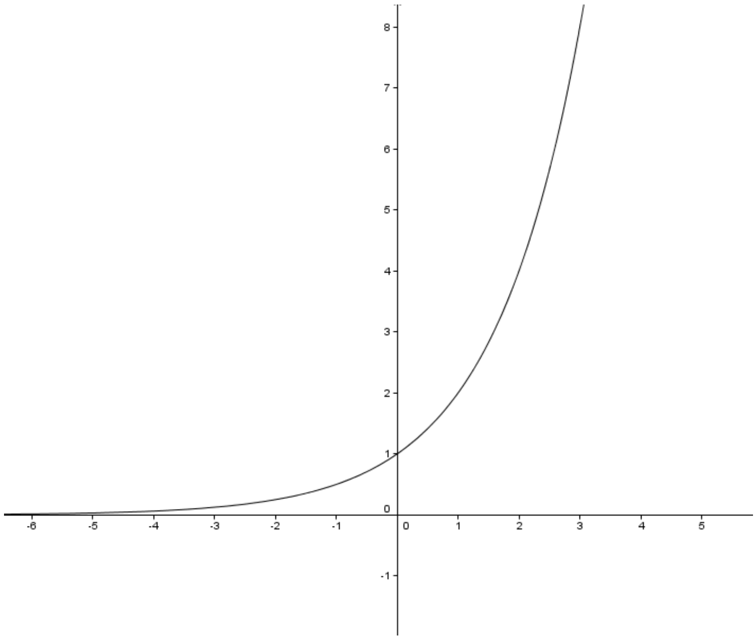
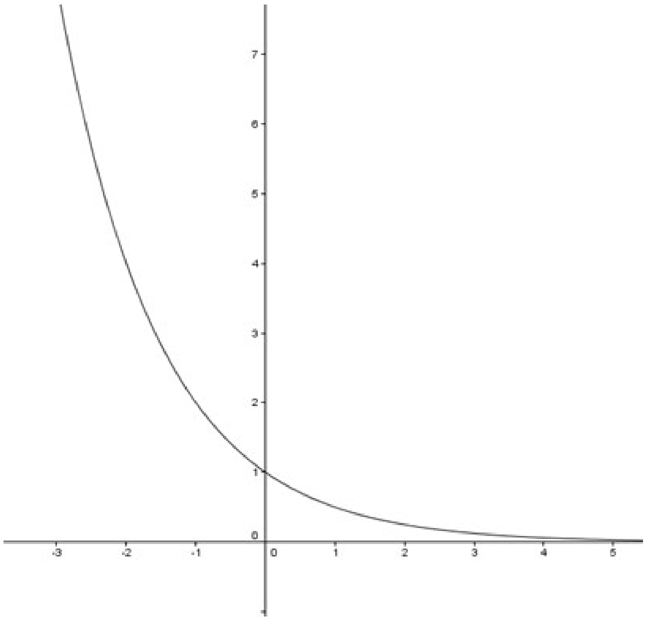


Figura 2. Gráfico de $f(x) = b^x$, com $0 < b < 1$



A partir dos gráficos acima, será estudado o papel dos demais parâmetros. Começando pelos valores de *c*. Os estudantes deverão atribuir valores positivos e negativos a esse parâmetro para detectar seu papel no gráfico. Deverão verificar que esses valores indicarão um deslocamento horizontal da função original (no caso, b^x). Caso c > 0, o gráfico irá deslocar-se para a direita em c unidades. Para c < 0, o deslocamento será de *c* unidades para a esquerda.

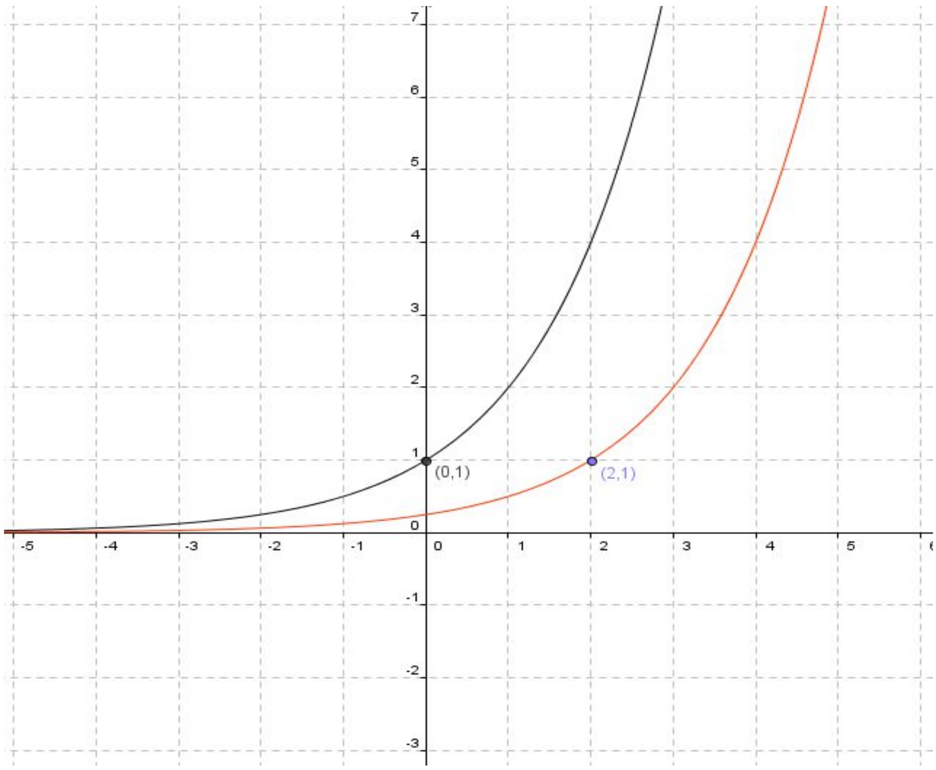
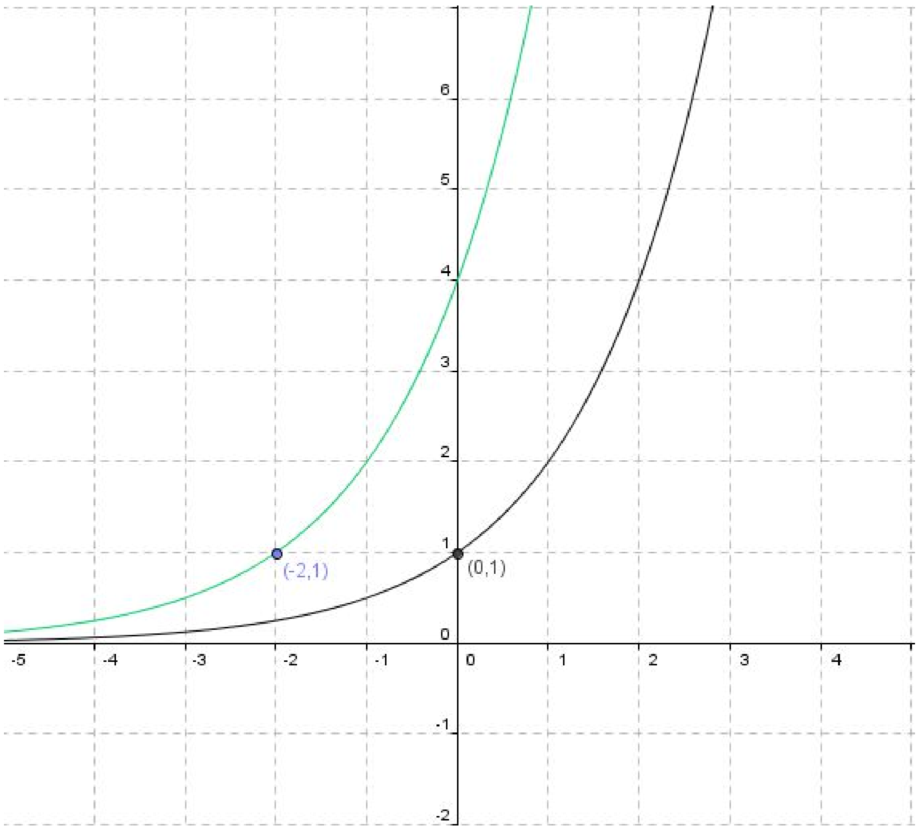


Figura 3. Gráficos de $f(x) = 2^x$ e de $f(x) = 2^{x-2}$.

Figura 4. Gráficos de $f(x) = 2^x$ e de $f(x) = 2^{x+2}$

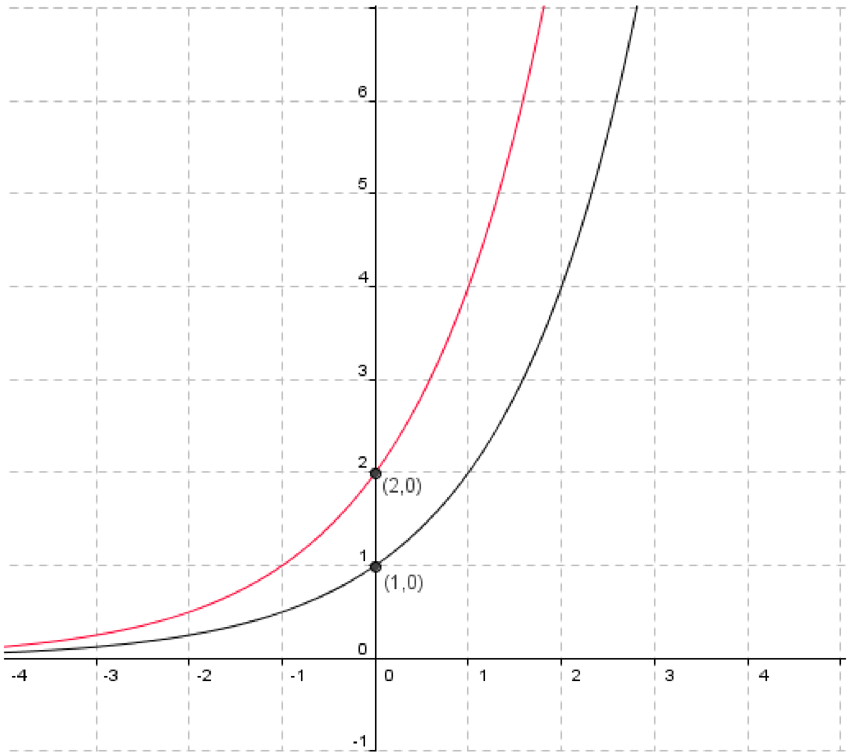


A próxima análise a ser feita refere-se ao papel do *a*. Esse parâmetro indicará um crescimento ou decrescimento mais ou menos acentuado da função, dependendo do valor atribuído. Podemos considerar quatro casos:

i. $a > 1$: crescimento mais acentuado;
ii. $0 < a < 1$: crescimento menos acentuado;
iii. $-1 < a < 0$: decrescimento menos acentuado;
iv. $a < -1$: decrescimento mais acentuado;

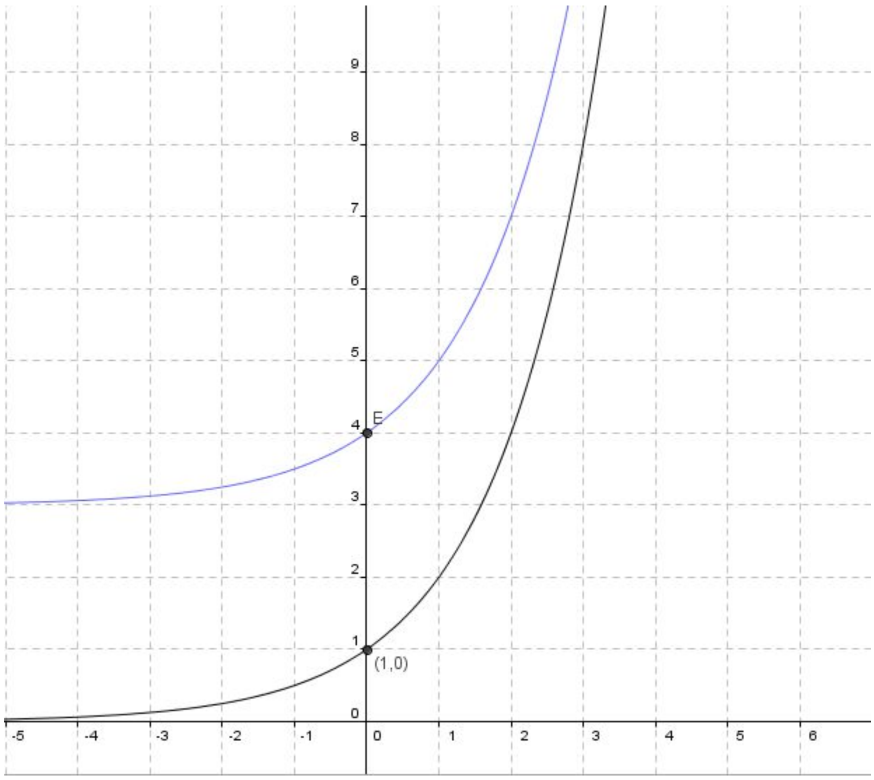
No entanto, o principal papel desse parâmetro é informar em que ponto da função a curva "corta" o eixo dos y. Essa informação será importante quando explorarmos os modelos em encontros posteriores. Outro aspecto importante desse parâmetro é a indicação de uma reflexão sobre o eixo dos x. Se o valor for negativo, o gráfico sofre uma reflexão sobre o eixo das abscissas.

Figura 5. Gráficos de $f(x) = b^X$ e de $f(x) = 2b^X$, para $b = 2$



Para finalizar, estudaremos qual o comportamento do gráfico de uma exponencial quando atribuímos diferentes valores ao parâmetro *d*. Será visto que esse valor representa um deslocamento vertical da função original. Além disso, as assíntotas horizontais também sofrerão um deslocamento, de acordo com o valor dado ao parâmetro. Se $d > 0$ a curva sofrerá um deslocamento vertical para cima, e caso contrário, para baixo.

Figura 6. Gráficos de $f(x) = b^X$ e de $f(x) = b^X + 3$, para $b = 2$



Avaliação: Participação dos alunos nas atividades; Interação com o professor.

ANEXO 4 – SEQUÊNCIA: UMA PROPOSTA DE ENSINO DE TRIGONOMETRIA COM USO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA (ATIVIDADE 9), AUTOR: LEONOR WIERZYNSKI PEDROSO.

Roteiro da atividade 9

Nome:______________________________	**2º ano do E.M.**	Data:__/__/
Matemát		**Professora**: Leonor W.

Explorando transformações nos gráficos das funções seno e cosseno.

1. Abra o *software* Geogebra.
2. Inicialmente, iremos ajustar a unidade utilizada no eixo x. Para isso, clique com o botão direito do mouse sobre o eixo x. Em propriedades, selecione "distância" e escolha • /2.

Observação: O gráfico da função inicial f(x)=sen(x) não deverá ser "escondido" em nenhum dos itens abaixo.

1. Em "entrada", digite a função: f(x) = sin (x) e tecle "enter".

a) Quais são a altura máxima e mínima atingidas pelo gráfico da função?

....

b) Em notação de intervalo, dê a imagem da função f(x) = sen x.

....

c) Obtenha, pelo gráfico, cinco raízes (valores de corte no eixo horizontal) da função sen x.

....

2. Sem apagar o gráfico inicial, digite f_1(x)= 1+ sin(x) (clique com o botão direito do mouse sobre o gráfico, em propriedades, escolha cor vermelha) e f_2(x) = -1 +sin(x) (cor azul).

a) Compare os gráficos dessas funções com o gráfico da função f(x) = sen x, qual é a diferença entre esses gráficos?...

b) Qual é a imagem da função f_1(x) = 1 + sen (x) e da função f_2(x) = -1 + sen (x)?...... ....

c) O que aconteceria se, ao invés de somarmos à função 1 e –1, somássemos os valores 2 ou -2? Qual seria a imagem de cada uma dessas funções?..

3. Na janela de Álgebra, clique sobre as funções f_1 e f_2 para esconder seus gráficos.

a) Digite g_1(x) = 2sin(x) (amarelo) e g_2(x)= 3sin(x) (verde). Compare os gráficos com a função f(x) = sen x. O que aconteceu com as alturas atingidas pela função?

....

b) Os pontos de corte com o eixo x (raízes) modificaram ou não? ....

c) Qual é a imagem de cada uma das funções do item a? ....

4. Repita o item 3, mas agora com as funções g_3(x) = ½ sin x (rosa) e g_4(x) = 1/3 sin (x) (roxo).

a)..

b)..

c)..

5. Esconda os gráficos g1, g2, g3 e g4. Digite h(x) = -sin x (cinza).

a) O que acontece com o gráfico da função ao multiplicarmos a função por –1?

....

6. Esconda o gráfico da função h. Digite i_1(x) = sin (2x) (vermelho) e i_2(x) = sin (4x) (azul).

a) Compare os gráficos. O que mudou entre eles?

....

....

b) Os conjuntos imagem das funções são iguais ou diferentes? ....

c) Observe agora que a função f(x) = sen x completa um período, ou ciclo, no intervalo [0, 2π] e que o comprimento desse intervalo é 2π. Escreva um intervalo em que a função i_1(x) = sin (2x) completa um período, ou ciclo. Escreva um intervalo em que a função i_2(x) = sin (4x) completa um período. Qual o comprimento desses intervalos?

Intervalo:...Comprimento: ....

Intervalo:...Comprimento: ....

7. Esconda os gráficos das funções i1 e i2. Faça o que foi pedido no item 6, mas agora com as funções:

i_3(x) = sin [(1/2)x] (rosa) e i_4(x) = sin [(1/4)x] (verde).

a) ....

b) ....

c)Intervalo:..................................... Comprimento: ....

Intervalo: .... Comprimento: ....

8. Esconda os gráficos das funções i_3 e i_4. Digite as funções j_1(x) = sin (x-(pi/2)) (laranja) e j_2(x) = sin (x - pi) (roxo).

a) Compare os gráficos das funções. Qual a diferença entre eles? .... b) Escreva um intervalo em que j_1(x) = sin (x-(• /2)) completa um período e escreva o comprimento desse intervalo. Faça o mesmo para a função j_2(x) = sin (x - π).

Intervalo: ....Comprimento: ....

Intervalo: ....Comprimento: ....

9. Esconda apenas a função j2. Digite a função j_3 = sin (x +(pi/2)) (verde) e compare com a função j1. Quais diferenças e/ou semelhanças você percebe entre eles?

....

....

10. Abra o arquivo “transformações nos gráficos_variação”. Complete as lacunas abaixo utilizando as expressões:

- deslocamento para cima/para baixo;
- deslocamento para direita /para esquerda;
- alongamento vertical;
- compressão vertical;
- alongamento horizontal;
- compressão horizontal;
- reflexão do gráfico em torno do eixo x;

y = A + Bsen[C (x + D)]

a) A provoca um________________no gráfico da função f(x)=senx. Se A for positivo será para_________________e se A for negativo será para________________.

b) Se B for um número positivo maior do que 1 (um), irá provocar um _________no gráfico da função f(x) = senx e se B for um número positivo e estiver entre 0 (zero) e 1 (um) irá provocar uma ______________.

c) Se B for negativo, irá provocar uma ____________________no gráfico da função f (x) = sen x.

d) Se C for um número maior que 1 (um), irá provocar uma ___________no gráfico de f(x) = senx e o período será dado por: P = _____________(verifique isso nas funções do item 6).

e) Se C for um número entre 0 (zero) e 1 (um), irá provocar um __________________no gráfico de f(x) = senx e o período também será dado por P = _____________(verifique isso nas funções do item 7).

f) Considere D>0, se somarmos D ao x da função, teremos um _______________para ____________________.Se diminuirmos D, teremos um____para________________.

11. Construa os gráficos das funções abaixo e indique as transformações feitas em cada um a partir do gráfico de f(x) = cos x.

a) f_1(x) = 2 + (1/2) cos x

....

b) f_2(x) = -1 + cos 2x

....

c) f_3(x)= -3cosx

....

d) f_4(x)= 2cos (x + pi)

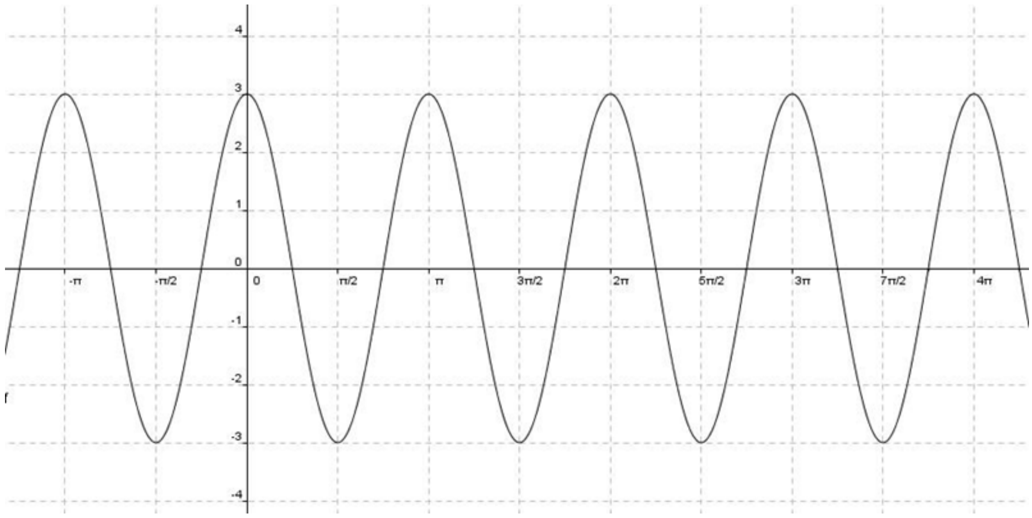
....

e) f_5(x)= cos [(1/3)x]

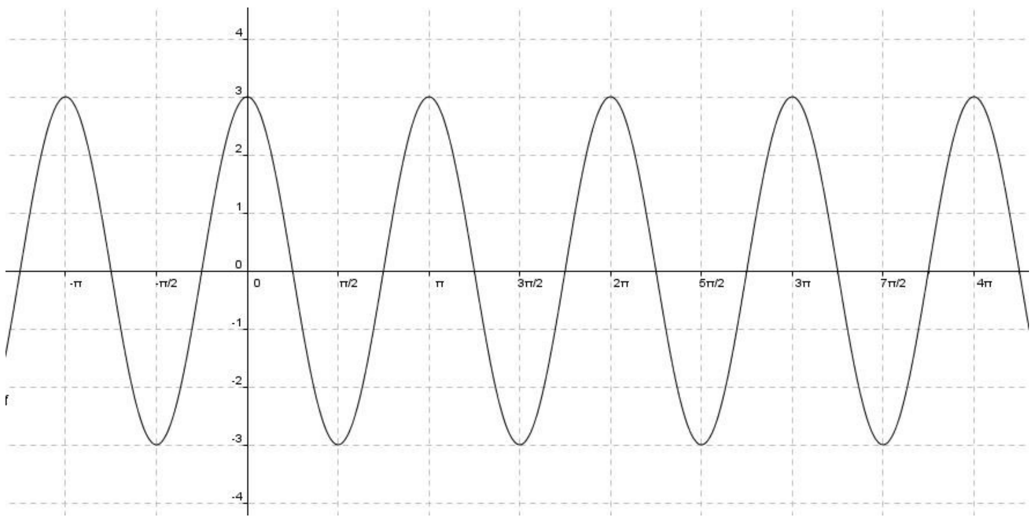
....

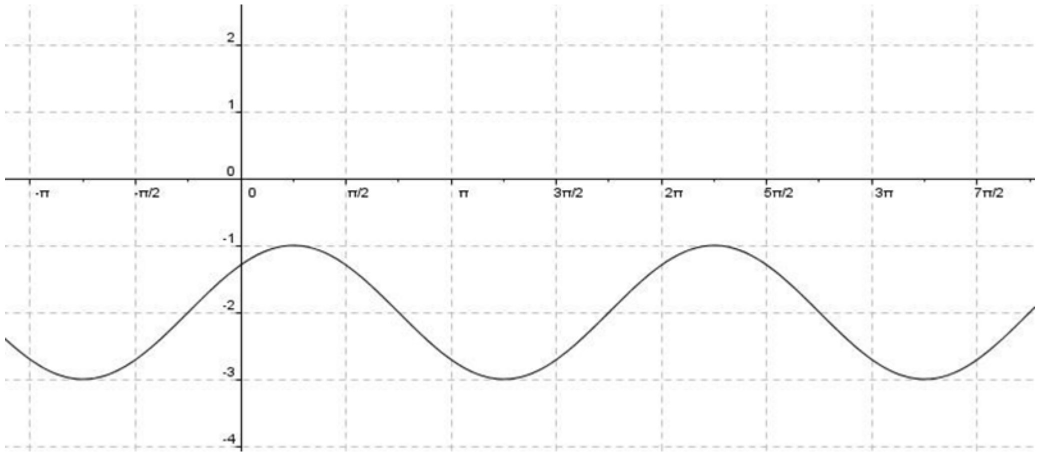
12. Observe os gráficos dados e descubra a função correspondente (sugestão: utilize o arquivo “transformações nos gráficos_variação” para tentar reproduzir o gráfico dado e observar os valores de A, B, C e D).

a) f(x) = ...

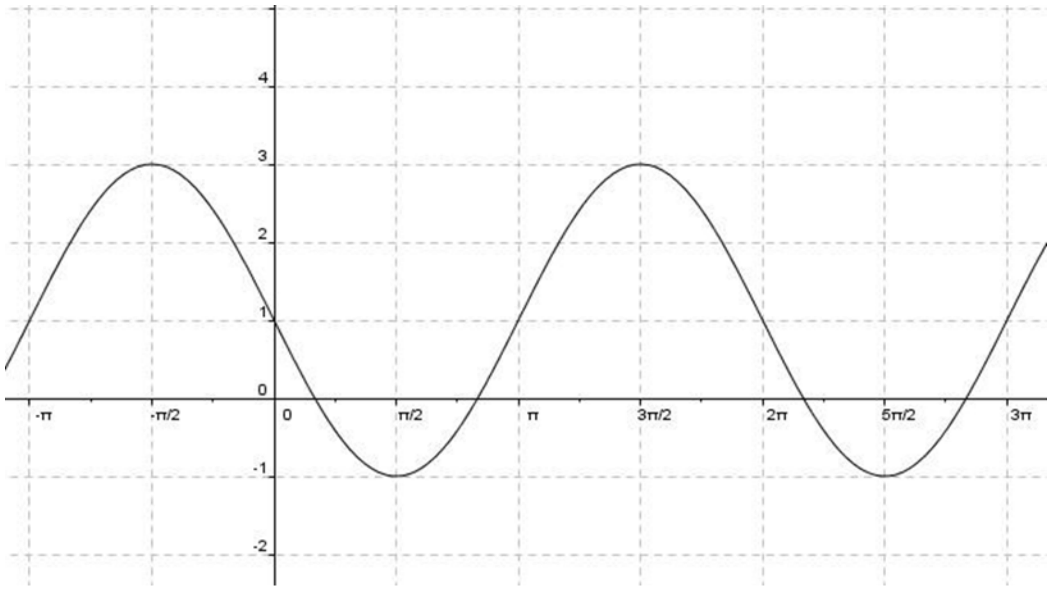

4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π
f

b) g(x) = ...


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-π
-π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π
f



c) h(x) = ...



Aplicações das funções trigonométricas

1. (Vunesp) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura h em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11{,}5 + 10\text{sen}\,[(\pi/12).(t - 26)]$, onde o tempo t é dado em segundos e a medida angular em radianos.

a) determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar (t = 0). R:...................................

b) Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa.

R:...

Importante:

- para responder a questão, obtenha o gráfico que representa a situação descrita acima digitando, no geogebra: f(x) = 11.5+10sin[(π/12)*(x-26)]
- para facilitar a visualização dos valores, crie um ponto sobre o gráfico e movimente-o observando suas coordenadas. [no segundo botão, selecione: novo ponto; clique com o botão direito do mouse e selecione: exibir rótulo : valor].

Desafio 1: sem ter o gráfico da função dado pelo geogebra, como você faria para calcular a altura inicial do seu amigo?

....

....

....

....

2. (FGV - SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz a contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800\text{sen}(x.\pi/12)$ onde f(x) é o número de clientes e x, a hora da observação (x é um inteiro tal que $0 < x < 24$). Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo é igual a:

a) 600. b) 800. c) 900. d) 1500. e) 1600.

Importante: ajuste a janela de visualização!

- Clique com o botão direito do mouse sobre o eixo x. Selecione janela de visualização. Em eixos, digite -2 para valor mínimo e 28 para máximo. Selecione a aba Eixo Y. Digite -100 para valor mínimo e 2000 para máximo. Clique em fechar.

Desafio2: sem ter o gráfico da função dado pelo geogebra, como você faria para calcular o número máximo e mínimo de clientes dentro do supermercado?

....

....

....