

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS ANISOTRÓPICAS

por

Felipe Luiz Lorenzi

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Agosto de 2019

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS ELÁSTICAS ANISOTRÓPICAS

por

Felipe Luiz Lorenzi
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério José Marczak

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Milbrath De LeonDEMEC / UFRGS

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira RochaPROMEC / UFRGS

Prof^a. Dr^a. Carla Tatiana Mota Anflor FGA / UnB

Prof. Dr. Fernando Marcelo Pereira
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 16 de Agosto de 2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério José Marczak pela confiança, pelo acompanhamento e por todos os ensinamentos durante o decorrer deste trabalho e durante a graduação.

Agradeço aos meus pais e meu irmão por todo o amor, carinho e suporte dados durante todos os anos da minha vida. Vocês também são merecedores desta conquista.

À banca avaliadora desta dissertação, Prof. Dr. Daniel M. de Leon, Prof. Dr. Luiz Antonio Oliveira Rocha e Prof^a. Dr^a. Carla Tatiana Mota Anflor pela orientação e contribuição no enriquecimento deste trabalho.

Agradeço aos professores do GMAp/PROMECC, pela dedicação e excelência na transmissão do conhecimento, bem como os ensinamentos e experiências de vida.

À minha amada, Olivia, pelo apoio, carinho e pela compreensão durante esta importante etapa.

Agradeço a todos meus amigos, que foram parte importante e contribuíram no meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta a implementação numérica da solução fundamental anisotrópica no Método dos Elementos de Contorno (MEC) para problemas da elasticidade linear bidimensional e a utilização do MEC em processos de otimização topológica que utilizam como estratégia de remoção de material a avaliação de sensibilidades utilizando a derivada topológica. A implementação segue a formulação tradicional do MEC e a discretização do contorno do problema é realizada por elementos de contorno descontínuos. A derivada topológica é utilizada para avaliar os pontos internos que apresentam menor sensibilidade à criação de um furo. Para diminuir a irregularidade do contorno criado pela geração de furos, uma rotina de suavização por Curvas de Bézier é utilizada no processo de otimização topológica. Alguns casos comuns são analisados para validar a implementação da solução fundamental no código do MEC e para validar a implementação da derivada topológica na otimização topológica de estruturas planas anisotrópicas. Os resultados obtidos provam que a estratégia de remoção de material pela criação de furos e utilização de rotinas de suavização pode gerar topologias ótimas sem a geração de densidades intermediárias ou contornos irregulares obtidos em outros métodos.

Palavras-chave: Otimização Topológica; Método dos Elementos de Contorno; Derivada Topológica; Curvas de Bézier.

ABSTRACT

This work presents the numerical implementation of the anisotropic fundamental solution for fully anisotropic plane stress problems in a standard Boundary Element Method (BEM) code and its application in topology optimization processes using the topological-shape sensitivity approach. The numerical implementation follows the standard BEM formulation and the contour discretization is carried out with discontinuous elements. The topological derivative is used to evaluate the internal points showing the lowest sensitivities to the creation of a hole. To overcome the irregular boundary generated by opening holes, a smoothing routine with Bézier Curves is added to the topology optimization scheme. Several benchmarks are presented to evaluate the implementation of the fundamental solution in the BEM code and the topological derivative in topology optimization processes. The obtained results showed the punching holes strategy and boundary smoothing technique generates optimal topologies without the generation of intermediary densities and irregular contours obtained through other methods.

Keywords: Topology Optimization; Boundary Element Method; Topological Derivative; Bézier Curves.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	3
1.2	Organização do Trabalho	4
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DE ELASTICIDADE LINEAR	6
2.1	Estado de Tensões	6
2.2	Estado de Deformações	8
2.3	Relações Constitutivas	9
2.4	Estado Plano de Tensões	11
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	15
3.1	Integral Básica	15
3.2	Solução Fundamental Anisotrópica	18
3.3	Implementação Numérica	21
3.3.1	Deslocamentos em Pontos Internos	23
3.4	Elementos de Contorno Descontínuos	24
3.4.1	Funções de Interpolação	24
3.5	Cálculo de Tensões	26
3.5.1	Tensões no Domínio	27
3.5.2	Tensões no Contorno	28
4	DERIVADA TOPOLÓGICA	30
5	METODOLOGIA	34
6	RESULTADOS	36
6.1	Placa quadrada sob tração	36
6.2	Membrana de Cook	37
6.3	Placa retangular com furo circular sob tração uniforme	41
6.4	Viga em balanço	46

6.5	Otimização Topológica	48
6.5.1	Caso 1A - Viga retangular ortotrópica	49
6.5.2	Caso 1B - Viga retangular anisotrópica	49
6.5.3	Caso 2A - Viga retangular ortotrópica - Eixos do material coincidentes com os eixos geométricos	53
6.5.4	Caso 2B - Viga retangular ortotrópica - Eixos do material perpendiculares aos eixos geométricos	53
6.5.5	Caso 2C - Viga retangular ortotrópica - Eixos do material rotacionados em relação aos eixos geométricos	54
7	CONCLUSÕES	59
7.1	Sugestões para Trabalho Futuros	59
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	60
	APÊNDICE A Resultados Gráficos do Caso 2A	64
ANEXO I	Curvas de Bézier	66

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Notação para tensões (a) e forças de superfície (b).	7
Figura 2.2	Representação de um corpo no Estado Plano de Tensões.	12
Figura 2.3	Rotação dos eixos do material em relação aos eixos geométricos do corpo.	13
Figura 3.1	Exemplos de malhas com o (a) MEF e (b) MEC.	15
Figura 3.2	Elemento descontínuo linear e funções de interpolação modificadas.	25
Figura 3.3	Sistema de coordenadas local para um ponto do contorno.	28
Figura 5.1	Procedimento de otimização topológica pelo MEC e derivada topológica com suavização de contornos.	35
Figura 6.1	Teste de tração: geometria e condições de contorno.	37
Figura 6.2	Membrana de Cook: geometria e condições de contorno.	38
Figura 6.3	Membrana de Cook: deslocamentos u_1 pelo (a) MEC e (b) MEF. .	39
Figura 6.4	Membrana de Cook: deslocamentos u_2 pelo (a) MEC e (b) MEF. .	39
Figura 6.5	Membrana de Cook: tensões σ_{11} pelo (a) MEC e (b) MEF.	40
Figura 6.6	Membrana de Cook: tensões σ_{22} pelo (a) MEC e (b) MEF.	40
Figura 6.7	Membrana de Cook: tensões σ_{12} pelo (a) MEC e (b) MEF.	41
Figura 6.8	Placa com furo: geometria e condições de contorno.	42
Figura 6.9	Placa com furo: deslocamentos u_1 pelo (a) MEC e (b) MEF.	43
Figura 6.10	Placa com furo: deslocamentos u_2 pelo (a) MEC e (b) MEF.	44
Figura 6.11	Placa com furo: tensões σ_{11} pelo (a) MEC e (b) MEF.	44
Figura 6.12	Placa com furo: tensões σ_{22} pelo (a) MEC e (b) MEF.	45
Figura 6.13	Placa com furo: tensões σ_{12} pelo (a) MEC e (b) MEF.	45
Figura 6.14	Viga em balanço: geometria e condições de carregamento.	46
Figura 6.15	Viga em balanço: deslocamentos u_1 pelo (a) MEC e (b) MEF.	47
Figura 6.16	Viga em balanço: deslocamentos u_2 pelo (a) MEC e (b) MEF.	47
Figura 6.17	Viga em balanço: tensões σ_{11} pelo (a) MEC e (b) MEF.	47
Figura 6.18	Viga em balanço: tensões σ_{22} pelo (a) MEC e (b) MEF.	48
Figura 6.19	Viga em balanço: tensões σ_{12} pelo (a) MEC e (b) MEF.	48

Figura 6.20	Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 1A - Ortotropia.	50
Figura 6.21	Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 1B - Anisotropia.	51
Figura 6.22	Comparação de resultados entre o MEC e o MEF.	52
Figura 6.23	Comparação de resultados entre o MEC e o MEF para o caso isotrópico.	52
Figura 6.24	Caso 2: geometria e condições de carregamento.	53
Figura 6.25	Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 2A.	55
Figura 6.26	Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 2B.	56
Figura 6.27	Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 2C.	57
Figura 6.28	Comparação entre os resultados de otimização para as diferentes orientações do material.	58
Figura A.1	Caso 2A: deslocamentos u_1 pelo MEC e MEF.	64
Figura A.2	Caso 2A: deslocamentos u_2 pelo MEC e MEF.	64
Figura A.3	Caso 2A: tensões σ_{11} pelo MEC e MEF.	65
Figura A.4	Caso 2A: tensões σ_{22} pelo MEC e MEF.	65
Figura A.5	Caso 2A: tensões σ_{12} pelo MEC e MEF.	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Notação para Tensões e Deformações	10
Tabela 6.1	Parâmetros do material ortotrópico. [Fonte: Wu e Mu, 2002] . . .	36
Tabela 6.2	Resultados do teste de tração.	37
Tabela 6.3	Resultados da análise da Membrana de Cook.	38
Tabela 6.4	Resultados da análise da placa com furo de razão $r/L = 0,15$	42
Tabela 6.5	Resultados da análise da placa com furo de razão $r/L = 0,30$	42
Tabela 6.6	Resultados da análise da placa com furo de razão $r/L = 0,50$	43
Tabela 6.7	Resultados da análise da placa com furo de razão $r/L = 0,75$	43

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

EPT	Estado Plano de Tensões
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a, b	Deslocamentos dos nós externos em um elemento descontínuo
\mathbf{A}	Vetor de condições de contorno conhecidas no MEC
A	Constantes da solução fundamental anisotrópica
b_i	Força na corpo na direção i
\mathbf{b}	Vetor de forças de corpo
B_{jli}	Tensor de terceira ordem utilizado no cálculo das tensões no domínio
\mathbf{c}^i	Matriz de coeficientes que depende da geometria do contorno
c_{lk}^i	Coefficiente dependente da geometria do contorno
C	Tensor constitutivo do material
D_T^*	Derivada Topológica
D_{jli}	Tensor de terceira ordem utilizado no cálculo das tensões no domínio
E_i	Módulo de elasticidade na direção i
$f(\chi)$	Restrição de volume
\mathbf{F}	Vetor de condições de contorno
$F(x_1, x_2)$	Função de Tensão de Airy
G_{ij}	Módulo de cisalhamento no plano ij
\mathbf{G}^{ij}	Matriz resultante na integração da solução fundamental de deslocamentos sobre o elemento j em relação ao ponto fonte i
\mathbf{G}	Matriz resultante na sobreposição de \mathbf{G}^{ij}
$\hat{\mathbf{H}}^{ij}$	Matriz resultante na integração da solução fundamental de força de superfície sobre o elemento j em relação ao ponto fonte i
\mathbf{H}^{ij}	Matriz resultante na integração da solução fundamental de força de superfície sobre o elemento j em relação ao ponto fonte i adicionada de \mathbf{c}^i no caso singular
\mathbf{H}	Matriz resultante na sobreposição de \mathbf{H}^{ij}
J	Jacobiano da transformação
\mathcal{J}	Função custo
l	Número de pontos de integração utilizados na quadratura
n_i	Cosseno diretor do vetor normal em relação ao eixo x_i

p_k, q_k	Parâmetros complexos do material
\mathbb{P}	Tensor Polarizador de Pólya Szegő
Q	Tensor constitutivo reduzido do material
\bar{Q}	Tensor constitutivo reduzido transformado do material
S	Tensor de flexibilidade do material
t_i	Força de superfície na direção i
\bar{t}_i	Força de superfície prescrita
\mathbf{t}	Vetor de forças de superfície
t_{lk}^*	Solução fundamental de forças de superfície
T	Matriz de transformação de coordenadas no sistema cartesiano
\mathbf{Q}	Matriz de correção de posição dos nós físicos
u_i	Deslocamento na direção i
\bar{u}	Deslocamento prescrito
u_{lk}^*	Solução fundamental de deslocamento
\mathbf{u}	Vetor de deslocamentos
V	Volume final da estrutura
w_k	Coeficiente peso utilizado na integração numérica para o ponto k
x_i	Sistema de coordenadas cartesiano global
\hat{x}	Ponto do domínio
\mathbf{X}	Vetor de variáveis desconhecidas no MEC
z_k	Direção característica

Símbolos Gregos

α	Ângulo entre o sistema de coordenadas local e o sistema global
β	Parâmetro de contraste
γ	Deformação cisalhante de engenharia Γ
Γ_1	Parcela do contorno sobre a qual são prescritos deslocamentos
Γ_2	Parcela do contorno sobre a qual são prescritos as forças de superfície
Γ_j	Contorno de um elemento j
Δ^i	Função Delta de Dirac
ε_{ij}	Deformação na direção j em um plano perpendicular ao eixo i
$\eta_{ij,i}$	Coeficiente de influência mútua de segundo tipo
μ_i	Raízes da equação característica do material

ν_{ij}	Coefficiente de Poisson no plano ij
ξ	Espaço normalizado σ_{ij}
ϕ	Função de interpolação
$\bar{\phi}$	Função de interpolação para os nós deslocados
Φ	Matriz de funções de interpolação
$\bar{\Phi}$	Matriz de funções de interpolação para nós deslocados
χ	Função característica da distribuição de material no domínio
Ψ	Derivada da Função de Tensão de Airy
Ω	Domínio do problema
∇^s	Parte simétrica do gradiente

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico e o aumento da capacidade de processamento de computadores e dispositivos móveis têm permitido diversos avanços científicos e a solução de problemas cada vez mais complexos na Engenharia. Esses avanços permitem que diversos programas de simulação consigam executar análises numéricas com um número considerável de graus de liberdade em computadores portáteis, tornando o processo de engenharia de produto muito mais rápido e dinâmico.

Encontrar a solução ótima para a geometria de um componente com diversas condições de carregamento e fixações é uma necessidade constante e engenheiros têm, cada vez mais, utilizado métodos de otimização para buscar a geometria que garanta a segurança no uso do componente sem comprometer a viabilidade econômica da fabricação.

Os processos de otimização topológica se tornaram campos de investigação muito promissores, com potencial para substituir os métodos convencionais de projeto. A eficácia da geometria dos componentes gerados pela otimização topológica é, geralmente, superior, reduzindo peso e os custos de produção, aumentando a segurança e contribuindo para um planeta mais sustentável. Entender o funcionamento dessas tecnologias e processos é um fator muito importante para qualquer engenheiro projetista da atualidade.

A otimização topológica de estruturas é uma ferramenta de engenharia utilizada durante a fase de projeto para definir a melhor distribuição de material de um componente em um domínio previamente determinado, sem comprometer a sua capacidade de resistir às condições de serviço impostas. A utilização do método de homogeneização, proposta por Bendsøe e Kikuchi, 1988, para distribuir de forma ótima o material e microvazios, e da formulação da teoria do Material Sólido Isotrópico com Penalização, por Bendsøe, 1989, onde a densidade do material no domínio pode ser alterada para atender os critérios da otimização, impulsionaram o uso da otimização topológica por permitirem a evolução do processo sem constantes reconstruções na malha utilizada. Desde então, diversos autores propuseram técnicas e métodos de otimização e vários outros processos continuam sendo estudados e aprimorados, conforme demonstrado por Bendsøe e Soares, 1992 e Bendsøe e Sigmund, 2003.

Paralelamente aos métodos de homogeneização, o método de *level-set* tem sido utilizado tanto em processos de otimização topológica pelo método dos elementos finitos

(MEF), como demonstrado por Wang et al., 2003 e Allaire e Jouve, 2005, quanto pelo método dos elementos de contorno (MEC), como em Vitorio Junior, 2007 e Oliveira e Leonel, 2019. Nesse método, o processo de otimização inicia com um domínio perfurado, e os furos são deformados continuamente, podendo desaparecer ou unir-se com outros furos, até que a topologia final seja obtida. Porém, o método não é capaz de criar novos furos, de modo que a distribuição inicial dos furos pode influenciar a forma final da peça [Allaire et al., 2004].

Como alternativa aos métodos de otimização citados, o conceito de derivada topológica vem sendo amplamente estudado desde trabalhos de Sokolowski e Zochowski, 1997 e Cea et al., 2000, que determinam a derivada topológica a partir da Análise de Sensibilidade à Mudança de Forma, analisando a sensibilidade do domínio à criação de um furo a partir da variação infinitesimal de uma função custo. Entretanto, essa abordagem não contemplava todas as condições de contorno comuns em problemas de engenharia e apenas a partir dos trabalhos de Novotny et al., 2002 e Novotny, 2003 que a formulação completa para a derivada topológica foi apresentada, permitindo o mapeamento entre o domínio original e o domínio onde o furo é criado, estendendo o conceito de derivada topológica para diversas aplicações de engenharia.

O trabalho desenvolvido por Giusti et al., 2016 apresentou a expressão analítica para a derivada topológica anisotrópica, ampliando o trabalho desenvolvido por Novotny e Sokolowski, 2013, onde a expressão da derivada topológica é apresentada na forma abstrata. A partir desse trabalho, é possível calcular o valor da derivada topológica anisotrópica em um ponto do domínio a partir de um tensor polarizador, cuja técnica para a avaliação numérica é demonstrada por Bonnet e Delgado, 2013, das tensões e deformações no ponto.

Apesar dos processos de otimização topológica serem dominados pelo MEF [Macklerle, 2003], a utilização do método dos elementos de contorno para calcular as tensões e deformações do domínio em processos que exigem constante reconstrução da malha apresenta algumas vantagens em relação ao método dos elementos finitos. Pode-se destacar a menor dimensão da malha, que facilita o processo de reconstrução durante a otimização, bem como a maior capacidade do método em captar singularidades, como em problemas de concentração de tensões ou de domínio infinito [Aliabadi, 2002].

Marczak, 2007 introduziu a utilização do MEC aliado à derivada topológica em

processos de otimização topológica em problemas de condução de calor, a partir da criação de furos nos pontos de menor sensibilidade do domínio. A metodologia proposta apresentou bons resultados, gerando topologias ótimas semelhantes às obtidas por outros métodos, com custo computacional relativamente baixo.

Anflor e Marczak, 2009 estenderam a metodologia para a aplicação em problemas ortotrópicos com múltiplas fontes de calor, enquanto problemas da elasticidade linear foram estudados por Marczak, 2008, demonstrando ser uma alternativa viável a outros métodos de otimização.

Para contornar problemas comuns em processos de otimização topológica, como a irregularidade do contorno gerada pela forma como o material é removido, Anflor e Marczak, 2011 propuseram a implementação de um método de suavização de contornos durante o processo de otimização topológica em problemas de transferência de calor, obtendo resultados positivos na convergência dos resultados e eliminando a necessidade de pós-processamento.

Além disso, a utilização de curvas polinomiais, como NURBS e B-Splines, na otimização topológica também é demonstrada por Oliveira e Leonel, 2019 e Wang e Qian, 2014 tanto em processos de otimização topológica pelo MEC quanto pelo MEF, apresentando diversas melhorias na reconstrução das geometrias, substituindo a utilização de filtros em problemas de homogeneização, e diminuindo o custo computacional do procedimento.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é implementar o conceito de derivada topológica anisotrópica e as soluções fundamentais anisotrópicas de deslocamentos e forças de superfície em problemas planos bidimensionais de otimização topológica pelo método dos elementos de contorno.

Como objetivo secundário, pretende-se utilizar técnicas de suavização através de Curvas de Bézier no processo de otimização topológica.

Para cumprir esses objetivos, faz-se necessário o entendimento de fundamentos teóricos básicos da mecânica dos sólidos, do método dos elementos de contorno e de otimização topológica, além dos conceitos de Curvas de Bézier, utilizadas para a suavização dos contornos. Dessa forma, os seguintes objetivos foram estabelecidos:

- Realizar um estudo dos fundamentos de mecânica dos sólidos, elementos de contorno

e Curvas de Bézier;

- Alterar o programa básico de elementos de contorno para implementar a solução fundamental anisotrópica;
- Avaliar a implementação da solução fundamental anisotrópica através de alguns problemas clássicos;
- Alterar o programa básico de otimização topológica para implementar o conceito de derivada topológica anisotrópica e a técnica de suavização de resultados;
- Avaliar a implementação através da otimização topológica de alguns problemas clássicos, comprovando a eficiência da metodologia utilizada.

1.2 Organização do Trabalho

Apresenta-se aqui a organização do texto com uma breve descrição de cada capítulo, para um melhor entendimento do trabalho.

No Capítulo 1 é feita uma intrução dos métodos numéricos no contexto da otimização topológica nos problemas de engenharia. Além disso, apresenta-se os objetivos e uma breve descrição deste trabalho.

O Capítulo 2 apresenta alguns fundamentos teóricos de elasticidade linear, como os estados de tensões e deformações de um corpo, bem como as relações constitutivas relacionando esses estados. Além disso, algumas relações de transformação de coordenadas para problemas planos são apresentadas.

No Capítulo 3, uma revisão básica dos principais conceitos do método dos elementos de contorno é feita, apresentando a solução fundamental anisotrópica para problemas planos e a formulação necessária para a representação numérica do método por meio de elementos de contorno descontínuos.

O Capítulo 4 apresenta sucintamente o conceito de derivada topológica e a expressão para a derivada topológica em problemas da elasticidade linear anisotrópica.

No Capítulo 5, descreve-se a organização dos resultados e a metodologia utilizada na rotina de otimização topológica. Nos capítulos seguintes, apresentam-se diversos resultados numéricos utilizados para validar a implementação da solução fundamental no programa de elementos de contorno, os resultados obtidos em alguns casos comuns de

otimização topológica, além das considerações finais, conclusões e sugestões para a continuidade do trabalho.

O Apêndice A apresenta resultados gráficos para tensões e deslocamentos obtidos pelo programa de elementos de contorno e por um programa de elementos finitos, para complementar os resultados apresentados no Capítulo 6.

Por fim, no Anexo I, apresenta-se brevemente a formulação matemática para Curvas de Bézier.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DE ELASTICIDADE LINEAR

A solução analítica ou numérica de qualquer problema na Mecânica dos Sólidos em regime linear e elástico necessita da solução das equações de equilíbrio, que consideram em sua formulação o estado de tensões ou deformações no corpo e estão relacionadas pelas equações constitutivas.

Neste capítulo, são apresentadas as equações básicas da elasticidade linear infinitesimal, onde se assume o comportamento linear do material e relações lineares de deformação, pois as mudanças na orientação do corpo deformado são negligenciadas.

2.1 Estado de Tensões

O estado de tensões em um ponto pode ser definido em termos dos componentes de tensão (Figura 2.1(a)). Em princípio, temos 9 componentes de tensão σ_{ij} , que definem a tensão na direção j em um plano perpendicular à direção i e que podem ser agrupados no tensor tensão, ou seja [Reddy, 2010]:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O equilíbrio das forças nas direções x_1 , x_2 e x_3 resulta nas conhecidas equações de equilíbrio de forças, que necessitam ser satisfeitas em todo o domínio, isto é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde b_i são as componentes das forças de corpo.

Em notação indicial, o conjunto de Equações 2.2 pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad (2.3)$$

onde i e j variam de 1 a 3. Pode-se provar pelo equilíbrio de momentos que o tensor de tensões é simétrico, ou seja $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

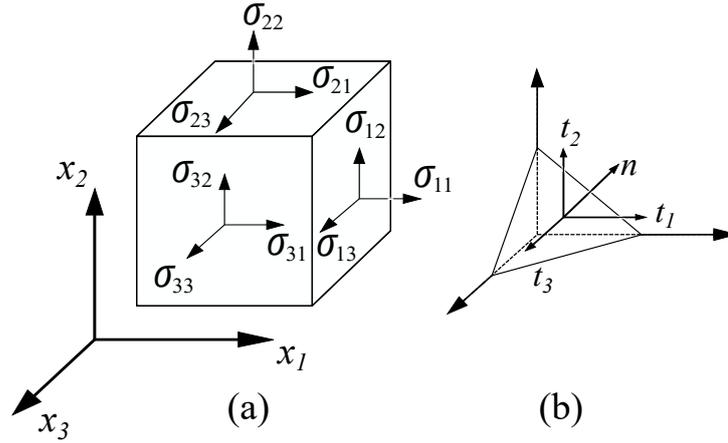


Figura 2.1 – Notação para tensões (a) e forças de superfície (b).

Os componentes de tensão podem ser projetados em um elemento diferencial do contorno $d\Gamma$ (Figura 2.1(b)) quando um corte fictício é realizado no corpo, produzindo forças de superfície, ou trações, uma vez que o corpo está em equilíbrio [Atkin e Fox, 1980]. As trações t_i são definidas por:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ t_2 &= \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ t_3 &= \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde n_1, n_2 e n_3 são os componentes do vetor normal à superfície n em relação aos eixos x_1, x_2 e x_3 .

Em notação indicial, o conjunto de Equações 2.4 pode ser escrito como:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{sobre } \Gamma \quad (2.5)$$

onde i e j variam de 1 a 3.

As forças de superfície são definidas como condições de contorno naturais do problema e são assumidas como dadas em uma determinada porção Γ_2 do contorno, ou seja:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \bar{t}_1 \\ t_2 &= \bar{t}_2 \\ t_3 &= \bar{t}_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (2.6)$$

Conforme Brebbia e Dominguez, 1992 essas condições implicam que as forças de superfície aplicadas devem estar em equilíbrio com as componentes das forças de superfície

obtidas a partir das tensões internas no contorno, ou seja:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (2.7)$$

2.2 Estado de Deformações

Na elasticidade linear, as variações nos campos deslocamentos com componentes u_1 , u_2 e u_3 produzem deformações infinitesimais em todos os pontos do domínio analisado e podem ser definidas como [Reddy, 2010]:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \quad (2.8)$$

para o conjunto de deformações normais. Para o conjunto de deformações cisalhantes, tem-se:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right); \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (2.9)$$

Estas expressões também podem ser escritas em notação indicial como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

onde i e j variam de 1 a 3.

Como as deformações são definidas em termos dos deslocamentos, é mais simples aplicar as condições de contorno em termos dos deslocamentos do que das deformações [Brebbia e Dominguez, 1992]. Dessa forma, em uma parcela do contorno Γ_1 , as condições de contorno essenciais podem ser definidas como:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = \bar{u}_1 \\ u_2 = \bar{u}_2 \\ u_3 = \bar{u}_3 \end{array} \right\} \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (2.11)$$

ou ainda:

$$u_j = \bar{u}_j \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (2.12)$$

onde \bar{u}_j são as condições de contorno prescritas e a superfície total Γ do contorno é dada

por $\Gamma_1 + \Gamma_2$.

2.3 Relações Constitutivas

Na teoria da elasticidade linear, os estados de tensões e deformações estão relacionados pela Lei de Hooke Generalizada, por meio de equações denominadas relações constitutivas, que podem ser escritas na forma generalizada como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.13)$$

onde C_{ijkl} é o tensor de quarta ordem de propriedades constitutivas do material, com 81 componentes. Devido às condições de simetria, apenas 21 componentes são necessárias para a caracterização do tensor de quarta ordem [Vannucci, 2018], ou seja:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2.14)$$

Introduzindo a notação proposta por Voigt, 1910, pode-se transformar os tensores de segunda ordem em vetores, e o tensor de quarta ordem em uma matriz 6×6 , de modo que a Equação 2.13 pode ser escrita, na forma expandida, como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

onde as contrações dos índices na notação de Voigt são dadas por:

$$11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 13 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6 \quad (2.16)$$

A notação utilizada neste trabalho é demonstrada na Tabela 2.1.

A relação inversa Equação 2.13 pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.17)$$

onde S_{ijkl} é o tensor de flexibilidade. Na forma expandida, tem-se:

Tabela 2.1 – Notação para Tensões e Deformações

Tensões		Deformações	
Notação Tensorial	Notação de Voigt	Notação Tensorial	Notação de Voigt
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
σ_{23}	σ_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}^*$	ε_4
σ_{13}	σ_5	$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}^*$	ε_5
σ_{12}	σ_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}^*$	ε_6

* A adição do coeficiente 2 é necessária devido à simetria dos tensores σ e ε na Lei de Hooke.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

O tensor constitutivo pode ser simplificado de acordo com a existência de planos de simetria no material [Jones, 1999]. Para um material ortotrópico, dois planos ortogonais de simetria possibilitam a redução para 9 termos independentes no tensor, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

É importante verificar que a adição de um plano de simetria, mutuamente ortogonal aos dois planos já existentes, não altera as relações constitutivas do material, uma vez que as componentes cisalhantes não estão acopladas, ou seja, não há relação entre as tensões normais e as deformações cisalhantes [Jones, 1999].

Para um material ortotrópico, o tensor de flexibilidade podem ser escrito como:

$$S_{ijkl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde E_i é o módulo de Elasticidade na direção i , ν_{ij} é o coeficiente de Poisson definido pela deformação transversal negativa na direção j devido à uma deformação na direção i causada por uma tensão na direção i , ou seja $\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$, e G_{ij} é o módulo de Cisalhamento no plano $i - j$.

Pela simetria do tensor de flexibilidade, tem-se:

$$\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (2.21)$$

2.4 Estado Plano de Tensões

Em diversas situações, a geometria e as condições de carregamento de diversos problemas na elasticidade linear podem reduzir um problema tridimensional a um problema plano. Considera-se um corpo em Estado Plano de Tensões (EPT) quando as tensões fora do plano no qual o problema é definido forem nulas. Neste caso, as seguintes hipóteses devem ser satisfeitas: (i) o corpo é fino, ou seja, tem uma das dimensões menor do que as demais, as quais formam um plano; (ii) as condições de carregamento (forças concentradas f , forças distribuídas w , etc.) atuam apenas no plano de simetria do corpo ou apresentam intensidade constante ao longo da espessura [Dym e Shames, 2013]. Definindo um problema no plano $x_1 - x_2$, Figura 2.2, pela hipótese (ii), tem-se:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (2.22)$$

Dessa forma, o problema pode ser reduzido e as relações constitutivas podem ser reescritas como [Vannucci, 2018]:

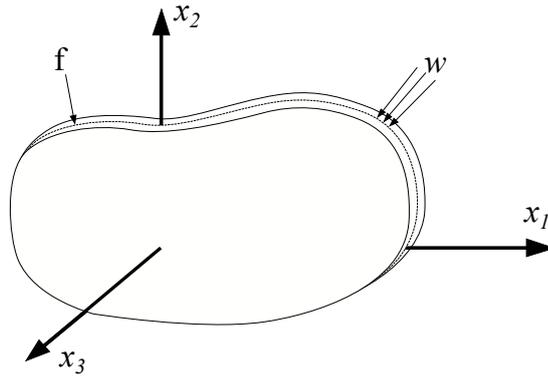


Figura 2.2 – Representação de um corpo no Estado Plano de Tensões.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

onde Q_{ij} são os componentes do tensor constitutivo reduzido, dados por:

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6. \quad (2.24)$$

A relação inversa da Equação 2.23 é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

onde:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \\ S_{16} &= \frac{\eta_{12,1}}{E_1} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \\ S_{26} &= \frac{\eta_{12,2}}{E_2} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $\eta_{ij,i} = \varepsilon_{ij}/\varepsilon_{ii}$ é o coeficiente de influência mútua de segundo tipo, que caracteriza o cisalhamento no plano $i - j$ causado pela tensão normal na direção i quando as demais

tensões são zero e $\eta_{i,ij} = \varepsilon_{ii}/\varepsilon_{ij}$ é o coeficiente de influência mútua de primeiro tipo que caracteriza a deformação na direção i causada pela tensão cisalhante no plano $i-j$ quando as demais tensões são zero [Jones, 1999].

Para um material ortotrópico, a relação tensão deformação pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Na maioria das situações práticas, no entanto, as direções principais de ortotropia não coincidem com o sistema de coordenadas adotado para análise, como em materiais laminados onde a direção das fibras não coincide com um dos eixos geométricos do corpo (Figura 2.3). Nestes casos, as relações constitutivas são transformadas utilizando uma matriz de transformação T dada por [Jones, 1999]:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

onde θ é o ângulo entre o sistema de coordenadas do corpo ($x_1 - x_2$) e o sistema de coordenadas do material ($x'_1 - x'_2$).

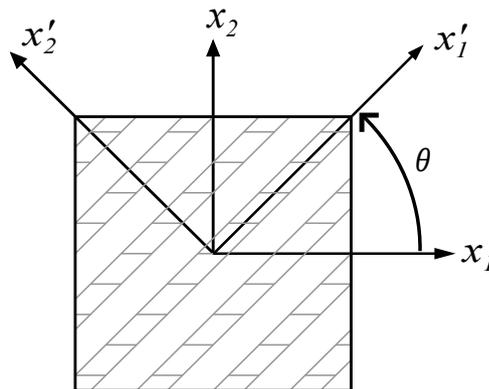


Figura 2.3 – Rotação dos eixos do material em relação aos eixos geométricos do corpo.

As relações de transformação podem ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \gamma'_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

onde σ' e ε' são as tensões e deformações no sistema de coordenadas da direção de ortotropia do material. Reescrevendo a Equação 2.23 transformando a matriz constitutiva do material, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][T]^{-T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

onde $\bar{Q} = [T]^{-1}[Q][T]^{-T}$ é a matriz de rigidez reduzida transformada.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é uma poderosa ferramenta para solução de problemas numéricos, alternativa a outros métodos, especialmente em casos onde maior precisão é requerida, como em problemas de domínio infinito ou em análises de concentrações de tensões. O MEC transforma equações diferenciais parciais que governam o domínio do problema em equações integrais envolvendo valores de contorno, resultando na redução da dimensão do problema em uma unidade [Brebbia e Dominguez, 1992]. Dessa forma, apenas o contorno (superfície) precisa ser discretizado, facilitando a geração de malha e favorecendo processos como os problemas de otimização, que exigem constantes alterações na geometria em análise (Figura 3.1).

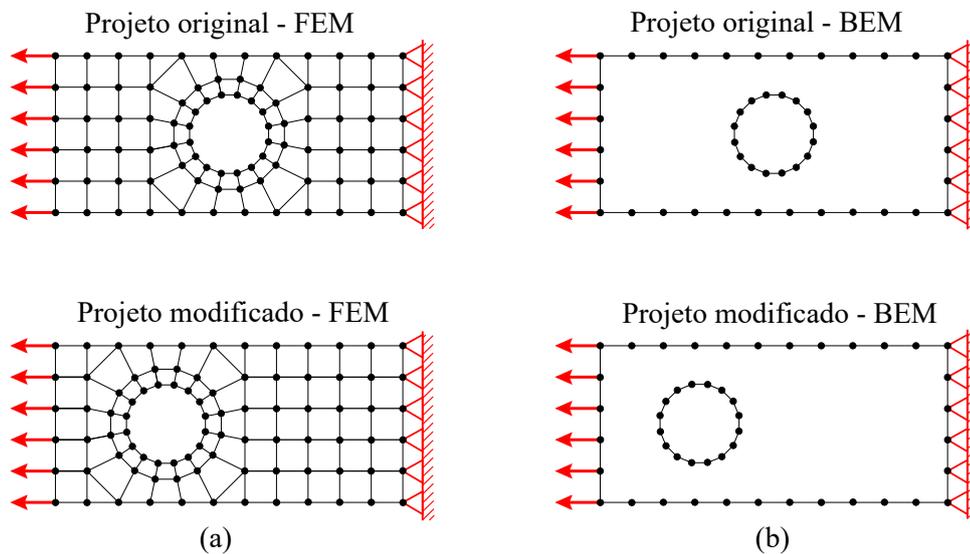


Figura 3.1 – Exemplos de malhas com o (a) MEF e (b) MEC.

3.1 Integral Básica

Pode-se começar considerando que se deseja minimizar os erros envolvidos em uma aproximação numérica das equações governantes de elasticidade, ou seja, as equações de equilíbrio [Brebbia e Dominguez, 1992]:

$$\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} + b_k = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1)$$

que normalmente devem satisfazer as seguintes condições de contorno:

(i) Condições de contorno essenciais ou deslocamentos:

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (3.2)$$

(ii) Condições de contorno naturais ou forças de superfície:

$$t_k = \sigma_{kj} n_j = \bar{t}_k \quad \text{sobre } \Gamma_2 \quad (3.3)$$

Para minimizar os erros da aproximação, pode-se ponderar cada uma das Equações 3.1 em relação a funções peso do tipo deslocamento u_k^* , ortogonalizando o produto das duas, ou seja [Brebbia e Dominguez, 1992]:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} + b_k \right) u_k^* d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

Integrando por partes duas vezes e agrupando os termos correspondentes, chega-se a forma adjunta da Equação 3.1:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{kj}^*}{\partial x_j} u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} t_k^* u_k d\Gamma \quad (3.5)$$

onde t_k^* é uma função peso do tipo força de superfície. Observa-se que os dois termos no lado direito da equação são integrais sobre o contorno. Dividindo o contorno em duas partes Γ_1 e Γ_2 , e aplicando as condições de contorno 3.2 e 3.3, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{kj}^*}{\partial x_j} u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} t_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{t}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k t_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k t_k^* d\Gamma \quad (3.6)$$

onde os termos \bar{t}_k e \bar{u}_k são condições de contorno conhecidas. Integrando novamente por partes a primeira integral em 3.6, obtém-se uma equação que se diferencia da Equação 3.4 apenas pela imposição das condições de contorno, ou seja:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_j} u_k + b_k \right) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} (t_k - \bar{t}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} (\bar{u}_k - u_k) t_k^* d\Gamma \quad (3.7)$$

Esta expressão é uma declaração generalizada de uma forma do método dos resíduos ponderados, que pode ser utilizada para obter as equações integrais no contorno [Brebbia e Dominguez, 1992]. Utilizando como função peso uma solução fundamental obtida para uma carga pontual $b_l = \Delta^i$ ao longo da direção do vetor unitário e_l , ou seja:

$$\frac{\partial \sigma_{lj}^*}{\partial x_j} + \Delta^i e_i = 0 \quad (3.8)$$

A solução fundamental pode ser escrita como:

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l t_k^* = t_{lk}^* e_l \quad (3.9)$$

onde u_k^* e t_k^* são os componentes k dos deslocamentos e trações devido a uma carga unitária na direção l . Para uma direção e_l , a primeira integral da Equação 3.6 pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{kj}^*}{\partial x_j} u_k d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{lj}^*}{\partial x_j} u_l d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^i u_l e_l d\Omega = -u_l^i e_l \quad (3.10)$$

onde u_l^i representa o componente de deslocamento l no ponto de aplicação de carga i .

Pode-se reescrever a Equação 3.6 utilizando a expressão obtida na Equação 3.10 e considerando os componentes das soluções fundamentais nas três direções, de modo que:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (3.11)$$

Conhecida como Identidade Somigliana, esta equação permite obter o valor do deslocamento em qualquer ponto interno i a partir dos valores dos deslocamentos u_k e forças de superfície t_k no contorno, das forças de corpo no domínio e das soluções fundamentais u_{lk}^* e t_{lk}^* . Dessa forma, para obter os valores de deslocamentos nos pontos internos é necessário conhecer os valores de deslocamentos e forças de superfície no contorno. Como a Identidade Somigliana é válida em todo o domínio, incluindo o contorno, ela pode ser aplicada no contorno para produzir um sistema de equações que, uma vez resolvido, fornece os valores de deslocamentos e trações no contorno.

Conforme Brebbia e Dominguez, 1992, singularidades surgem quando as integrais na Equação 3.11 são avaliadas no contorno. Avaliando o comportamento das integrais por meio de um processo de limite, pode-se obter a equação geral que permite a solução de problemas de valores de contorno para elasticidade, dada por:

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega \quad (3.12)$$

onde $c_{lk}^i = \delta_{lk}/2$ para um contorno suave em i , ou seja, quando o contorno não é um canto. Quando o contorno não é suave, valores diferentes para o termo c_{lk}^i são obtidos

dependentes do ângulo do canto. É importante destacar que o contorno é sempre suave em elementos de contorno descontínuos, utilizados no desenvolvimento deste trabalho [Brebbia e Dominguez, 1992].

3.2 Solução Fundamental Anisotrópica

A formulação das equações integrais do contorno descritas na Seção 3.1 requer o conhecimento da solução fundamental para uma força pontual unitária em um plano anisotrópico infinito, que pode ser obtida utilizando as equações básicas do equilíbrio em um domínio mapeado como um domínio complexo [Cruse e Swedlow, 1971].

Os componentes de deformação, apresentados na Equação 2.10, são determinados a partir dos deslocamentos u nas direções 1 e 2 para o EPT. Para garantir a validade das deformações, introduz-se a equação de compatibilidade para os componentes de deformação, que garante a existência de um campo de deslocamentos único e válido, ou seja:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.13)$$

No Estado Plano de Tensões e na ausência de forças de corpo, as Equações de equilíbrio 2.2 podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

As equações de equilíbrio para problemas planos são satisfeitas quando as tensões forem derivadas de uma função escalar $F(x_1, x_2)$ [Lekhnitskii, 1981], denominada Função de Tensão de Airy, que satisfaz as seguintes condições:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.15)$$

Substituindo a Equação 3.15 na Equação 2.25 e, então, na Equação 3.13, obtém-se a equação diferencial governante para a função de tensão $F(x_1, x_2)$:

$$S_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} - 2S_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1 \partial x_2^3} + (2S_{12} + S_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2S_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^3 \partial x_2} + S_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} = 0 \quad (3.16)$$

Introduzindo a notação $z = x_1 + \mu x_2$, denominada direção característica, onde $\mu = a + ib$ e $i = \sqrt{-1}$, e substituindo na Equação 3.16, obtém-se:

$$\frac{d^4 F}{dz^4} [S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22}] = 0 \quad (3.17)$$

A Equação 3.17 terá resultados não-triviais quando $d^4 F/dz^4$ for diferente de zero, de modo que

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0 \quad (3.18)$$

é definida como a equação característica do material, cujas raízes são dadas por $\mu_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2$, e seus pares conjugados. A direção característica pode, então, ser escrita como:

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2, \quad k = 1, 2 \quad (3.19)$$

Definindo $F(x_1, x_2)$ como uma função real, a forma geral da função de tensão pode ser escrita como:

$$F(x_1, x_2) = 2\Re\{F_1 z_1 + F_2 z_2\} \quad (3.20)$$

onde $\Re\{\cdot\}$ indica a parcela real de $\{\cdot\}$. Utilizando a notação $dF(x_1, x_2)/dz_k = \Psi_k(z_k)$ (sem somar o índice k) e substituindo a Equação 3.19 nas Equações 3.15, os componentes do tensor de tensões podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\Re\{\mu_1^2 \Psi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2'(z_2)\} \\ \sigma_{22} &= 2\Re\{\Psi_1'(z_1) + \Psi_2'(z_2)\} \\ \sigma_{12} &= -2\Re\{\mu_1 \Psi_1'(z_1) + \mu_2 \Psi_2'(z_2)\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde Ψ_k' é a derivada de Ψ_k em relação à z_k .

As deformações podem ser, então, obtidas e integradas, para obter os deslocamentos:

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= 2\Re\{p_1 \Psi_1(z_1) + p_2 \Psi_2(z_2)\} \\ u_{x_2} &= 2\Re\{q_1 \Psi_1(z_1) + q_2 \Psi_2(z_2)\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned}
p_k &= S_{11}\mu_k^2 + S_{12} - S_{16}\mu_k \\
q_k &= S_{12}\mu_k + S_{22}/\mu_k - S_{26}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Substituindo as expressões para as tensões definidas nas Equações 3.21 nas forças de superfície definidas pela Equação 2.5, a soma das forças de superfície para um domínio fechado podem ser definidas como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= \int_{\Gamma} (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2) d\Gamma = 2\Re[\mu_1\Psi_1 + \mu_2\Psi_2] = -\delta_{j1} \\
\int_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= \int_{\Gamma} (\sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2) d\Gamma = 2\Re[\Psi_1 + \Psi_2] = -\delta_{j2}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde δ_{jk} representa uma carga pontual na direção j e o índice k não é somado. Para satisfazer as Equações 3.24, a função de tensão é dada por:

$$\Psi_{jk} = A_{jk} \ln(z_k - z'_k) \tag{3.25}$$

onde z_k representa as coordenadas do ponto campo (ponto analisado) e z'_k representa as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga pontual).

Substituindo a função de tensão dada pela Equação 3.25 na Equação 3.22, considerando que $\ln(z_k - z'_k) = 2\pi i$ e que os campos de deslocamentos tenham valores únicos, obtém-se duas equações necessárias para encontrar os valores das constantes desconhecidas A_{jk} [Cruse e Swedlow, 1971]. Acoplando os valores das constantes A_{jk} na Equação de deslocamentos 3.22, obtém-se a solução fundamental de deslocamentos no estado plano de tensões anisotrópico u_{ji}^* :

$$u_{ji}^* = 2\Re\{P_{i1}A_{j1}\ln(z_1 - z'_1) + P_{i2}A_{j2}\ln(z_2 - z'_2)\} \tag{3.26}$$

onde $P_{1k} = p_k$ e $P_{2k} = q_k$. Derivando a Equação 3.22 e substituindo na Equação 2.5, obtém-se a solução fundamental de forças de superfície para o estado plano de tensões anisotrópico t_{ji}^* , dada por:

$$t_{ji}^* = 2\Re\left\{\frac{g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2)A_{j1}}{z_1 - z'_1} + \frac{g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2)A_{j2}}{z_2 - z'_2}\right\} \tag{3.27}$$

onde:

$$[g_{ik}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.3 Implementação Numérica

Para resolver numericamente a equação integral do contorno, o contorno Γ é dividido em um conjunto de elementos *nelem* nos quais os valores dos deslocamentos e forças de superfície são dados em função dos valores nodais. Quando a Equação 3.12 é escrita para cada um dos pontos nodais e as condições, obtém-se um sistema de equações lineares que, após a aplicação das condições de contorno, pode ser resolvido para se obter uma solução aproximada dos valores desconhecidos de deslocamentos e forças de superfície.

Para trabalhar com o sistema discretizado, por conveniência, utilizam-se matrizes em substituição à notação indicial. Para realizar esta transformação, definem-se as funções de deslocamento \mathbf{u} e forças de superfície \mathbf{t} para um ponto do contorno como:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j \quad \text{e} \quad \mathbf{t} = \Phi \mathbf{t}^j \quad (3.29)$$

onde Φ são as funções de interpolação, \mathbf{u}^j e \mathbf{t}^j são os deslocamentos e forças de superfície nodais do elemento j , respectivamente.

Os deslocamentos e as forças de superfície, para um problema bidimensional, são definidos como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Da mesma forma, os coeficientes das soluções fundamentais de deslocamentos \mathbf{u}^* e de forças de superfície \mathbf{t}^* são escritos como:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{t}^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

onde u_{lk}^* e t_{lk}^* definem o deslocamento e a tração na direção k devido a uma força unitária aplicada em i atuando na direção l .

Assim, pode-se reescrever a Equação do contorno 3.12 para cada ponto nodal i como:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{t}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{t}^j \quad (3.32)$$

Assim, para avaliar o deslocamento \mathbf{u}^i , realiza-se o somatório de $j = 1$ até o número de elementos $nelem$ dos deslocamentos \mathbf{u}^j e forças de superfície \mathbf{t}^j que são integrados para cada elemento j do contorno Γ_j . As integrais presentes na Equação 3.32 podem ser avaliadas numericamente, uma vez que a integração analítica é mais complicada, principalmente em elementos de maior ordem, que são curvados.

Além disso, faz-se necessário a transformação de coordenadas das integrais do contorno para um sistema local pelo uso do Jacobiano J , uma vez que as funções de interpolação são expressas em um sistema de coordenadas local $\xi = [-1, 1]$ [Aliabadi, 2002]. De uma forma geral, o Jacobiano pode ser expresso como:

$$J = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (3.33)$$

Pode-se perceber que para calcular o valor do Jacobiano é necessário o conhecimento das variação das coordenadas x_1 e x_2 em função do sistema normalizado ξ . Para isso, as coordenadas do contorno \mathbf{x} podem ser aproximadas utilizando as funções de interpolação Φ utilizadas nos deslocamentos e forças de superfície e os valores nodais \mathbf{x}^j do elemento considerado, de modo que:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j \quad (3.34)$$

Assim, a Equação 3.32 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{t}^* \Phi J d\xi \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{nelem} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi J d\xi \right\} \mathbf{t}^j \quad (3.35)$$

Utilizando a quadratura de Gauss para avaliar numericamente as integrais da Equação 3.35 [Aliabadi, 2002], obtém-se:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{nelem} \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{t}^* \Phi J)_k \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{nelem} \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{u}^* \Phi J)_k \right\} \mathbf{t}^j \quad (3.36)$$

onde l é o número de pontos de integração no elemento e w_k é o valor da função peso da integração numérica.

É importante destacar que as singularidades presentes nas soluções fundamentais

devem ser analisadas separadamente quando o elemento integrado contém o ponto fonte, uma vez que a quadratura de Gauss não apresenta resultados satisfatórios nestes casos [Silveira, 2007]. Para a solução fundamental de força de superfície, pode-se utilizar a técnica de movimento de corpo rígido, descrita por Brebbia e Dominguez, 1992. Já para a solução fundamental de deslocamentos, a integração é realizada utilizando a quadratura proposta por Telles, 1987.

Utilizando a notação:

$$\hat{\mathbf{H}}^{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{t}^* \Phi J)_k \right\} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}^{ij} = \left\{ \sum_{k=1}^l w_k (\mathbf{u}^* \Phi J)_k \right\} \quad (3.37)$$

e chamando

$$\mathbf{H}^{ij} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{ij} & \text{se } i \neq j \\ \hat{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{c}^i & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.38)$$

pode-se reescrever a Equação 3.36 para o nó i como:

$$\sum_{j=1}^{nelem} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{nelem} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{t}^j \quad (3.39)$$

Repetindo a Equação 3.38 para cada ponto fonte do problema e agrupando em forma matricial, obtém-se um sistema global de equações dado por:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{T} \quad (3.40)$$

onde os vetores \mathbf{U} e \mathbf{T} representam os valores de deslocamentos e forças de superfície antes da aplicação das condições de contorno. Rearranjando as colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} após a aplicação das condições de contorno, deixando as variáveis desconhecidas do lado esquerdo em um vetor \mathbf{X} , obtém-se um sistema de equações final

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (3.41)$$

que pode ser resolvido para determinar os valores desconhecidos do contorno.

3.3.1 Deslocamentos em Pontos Internos

O procedimento utilizado na obtenção da formulação discretizada demonstrada na Equação 3.36 também pode ser aproveitado para o cálculo dos deslocamentos nos pontos

internos. Dessa forma, a Identidade Somigliana, descrita na Equação 3.11 pode ser escrita para um ponto interno i como:

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^{nelem} \left\{ \sum_{k=1}^l w_k(\mathbf{u}^* \Phi J)_k \right\} \mathbf{t}^j - \sum_{j=1}^{nelem} \left\{ \sum_{k=1}^l w_k(\mathbf{t}^* \Phi J)_k \right\} \mathbf{u}^j \quad (3.42)$$

onde Γ_j é a parcela do contorno correspondente ao elemento j .

3.4 Elementos de Contorno Descontínuos

Nas parcelas onde o contorno não é suave, como em cantos, a existência de duas normais em um mesmo ponto nodal resulta em uma descontinuidade nas forças de superfície naquele nó, de modo que o número de equações é menor do que o número de incógnitas quando as forças de superfície nodais são desconhecidas.

Para contornar esse problema, diversas soluções podem ser utilizadas, como a utilização de um nó duplo, ou um elemento bem pequeno para fazer a transição entre as normais. Embora populares, algumas dessas técnicas podem ser complexas de se implementar e estão sujeitas a erros numéricos de integração [Brebbia e Dominguez, 1992].

Uma prática comum e de fácil implementação é a utilização de elementos descontínuos, que possuem os nós físicos em posições deslocadas para dentro do elemento, em relação aos seus nós geométricos [Figura 3.2]. Além da facilidade na implementação, essa técnica é vantajosa em situações de concentrações de tensões e na modelagem de singularidades, como em problemas da mecânica da fratura.

Neste trabalho optou-se por trabalhar com elementos descontínuos lineares, ou seja, cujas funções de interpolação são lineares, de modo que a variação nos campos de deslocamentos e forças de superfície dos elementos será linear.

3.4.1 Funções de Interpolação

Os deslocamentos u_i e forças de superfície t_i em um elemento linear são representados por funções lineares em termos dos seus valores nodais. Para qualquer ponto no elemento os valores de u_i e t_i são dados por:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{u}^j \quad (3.43)$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_1^2 \\ t_2^2 \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{t}^j \quad (3.44)$$

onde u_k^l é o deslocamento do nó l na direção k , t_k^l é a força de superfície no nó l na direção k e as funções de interpolação ϕ_1 e ϕ_2 são dados por [Aliabadi, 2002]:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad \text{e} \quad \phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.45)$$

Como nos elementos lineares descontínuos os nós físicos são deslocados pelas distâncias a e b para dentro do elemento em relação aos nós geométricos, como demonstrado na Figura 3.2, as funções de interpolação devem ser transformadas para os nós deslocados, de modo que:

$$\begin{Bmatrix} u_1^a \\ u_2^a \\ u_1^b \\ u_2^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_a) & 0 & \phi_2(\xi_a) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi_a) & 0 & \phi_2(\xi_a) \\ \phi_1(\xi_b) & 0 & \phi_2(\xi_b) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi_b) & 0 & \phi_2(\xi_b) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

onde $\xi_a = (2a/l) - 1$ e $\xi_b = 1 - (2b/l)$ são as coordenadas dos nós físicos no sistema de coordenadas parametrizado.

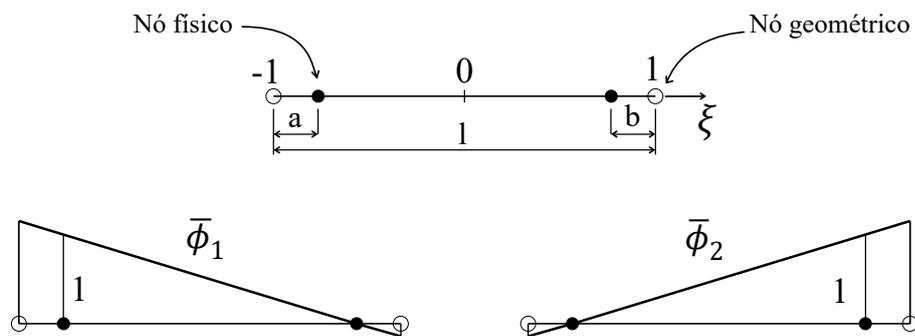


Figura 3.2 – Elemento descontínuo linear e funções de interpolação modificadas.

A Equação 3.46 pode ser invertida e substituída na Equação 3.43, para se obter o valor de \mathbf{u} em qualquer ponto do elemento em termos dos valores nodais, ou seja:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

onde

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{l-a-b} \begin{bmatrix} l-b & 0 & -a & 0 \\ 0 & l-b & 0 & -a \\ -b & 0 & l-a & 0 \\ 0 & -b & 0 & l-a \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

O mesmo procedimento pode ser utilizado para as forças de superfície \mathbf{t} .

As funções de interpolação modificadas $\bar{\phi}_1$ e $\bar{\phi}_2$ podem ser obtidas multiplicando as matrizes Φ e \mathbf{Q} , de modo que:

$$\bar{\phi}_1 = \frac{-1+b+\xi}{-2+a+b}; \quad \bar{\phi}_2 = \frac{-1+a-\xi}{-2+a+b} \quad (3.49)$$

3.5 Cálculo de Tensões

Em diversas aplicações de Engenharia, como em problemas de otimização topológica, o conhecimento das tensões no corpo é necessário para a solução do problema.

A equação integral do Método dos Elementos de Contorno pode fornecer o tensor de tensões em um ponto a partir da diferenciação das equações de deslocamentos e substituição das deformações na Lei de Hooke. Porém, quando esse processo é avaliado no contorno, as expressões derivadas apresentam forte singularidade, apresentando um alto custo computacional para serem avaliadas [Brebbia e Dominguez, 1992].

Uma alternativa muito comum é a utilização das forças de superfície e das deformações do contorno para calcular as tensões pela Lei de Hooke. É importante destacar que como as deformações do contorno são obtidas por um processo de diferenciação numérica, erros podem ser gerados quando há descontinuidades ou malhas grosseiras são utilizadas [Silveira, 2007].

3.5.1 Tensões no Domínio

A Identidade Somigliana demonstrada na Equação 3.11 fornece os deslocamentos em qualquer ponto interno em função dos deslocamentos e forças de superfície no contorno. Ignorando as forças de corpo e diferenciando em relação ao ponto interno x_k [Cruse e Swedlow, 1971]:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_l} = \int_{\Gamma} \frac{\partial t_{ji}^*}{\partial x_l} u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ji}^*}{\partial x_l} t_i d\Gamma \quad (3.50)$$

Lembrando a notação tensorial para as deformações dada pela Equação 2.10

$$\varepsilon_{jl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right) \quad (3.51)$$

pode-se reescrever a Equação 3.50 como:

$$2\varepsilon_{jl} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial t_{ji}^*}{\partial x_l} + \frac{\partial t_{li}^*}{\partial x_j} \right] u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u_{ji}^*}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{li}^*}{\partial x_j} \right] t_i d\Gamma \quad (3.52)$$

Chamando

$$B_{jli} = \frac{\partial t_{ji}^*}{\partial x_l} + \frac{\partial t_{li}^*}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad D_{jli} = \frac{\partial u_{ji}^*}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{li}^*}{\partial x_j} \quad (3.53)$$

obté-m-se

$$2\varepsilon_{jl} = \int_{\Gamma} B_{jli} u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} D_{jli} t_i d\Gamma \quad (3.54)$$

onde os tensores B_{jli} e D_{jli} são dados por:

$$B_{jli} = -2\Re \left\{ \frac{R_{l1} Q_{i1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1}}{(z_1 - z'_1)^2} + \frac{R_{l2} Q_{i2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2}}{(z_2 - z'_2)^2} \right\} \\ - 2\Re \left\{ \frac{R_{j1} Q_{i1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{l1}}{(z_1 - z'_1)^2} + \frac{R_{j2} Q_{i2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{l2}}{(z_2 - z'_2)^2} \right\} \quad (3.55)$$

e

$$D_{jli} = -2\Re \left\{ \frac{R_{l1} P_{i1} A_{j1}}{z_1 - z'_1} + \frac{R_{l2} P_{i2} A_{j2}}{z_2 - z'_2} \right\} \\ - 2\Re \left\{ \frac{R_{j1} P_{i1} A_{l1}}{z_1 - z'_1} + \frac{R_{j2} P_{i2} A_{l2}}{z_2 - z'_2} \right\} \quad (3.56)$$

A Equação 3.54 fornece a componente de deformação ε_{jl} de um ponto interno x_k a partir dos valores dos deslocamentos u_i e forças de superfície t_i do contorno e pode

ser utilizada para obter as tensões nos pontos internos pela Lei de Hooke. Na forma discretizada, pode ser reescrita seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente, para *pgauss* pontos de Gauss, como:

$$2\varepsilon_{jl} = \sum_{i=1}^{nelem} \left\{ \sum_{k=1}^{pgauss} w_k (B_{jli} \mathbf{u}_i \Phi J)_k \right\} - \sum_{i=1}^{nelem} \left\{ \sum_{k=1}^{pgauss} w_k (D_{jli} \mathbf{t}_i \Phi J)_k \right\} \quad (3.57)$$

3.5.2 Tensões no Contorno

O procedimento utilizado para a avaliação das tensões nos pontos internos pode ser utilizado para avaliar as tensões no contorno, mas esse processo produz singularidades de alta ordem nos tensores B_{jli} e D_{jli} , demandando um alto custo computacional para o processo.

Uma alternativa para determinar as tensões no contorno é a partir das forças de superfície e dos deslocamentos do contorno, de modo que as componentes normais σ_{11} e cisalhantes σ_{12} são iguais as forças de superfície no sistema local de coordenadas do elemento [Brebbia e Dominguez, 1992]. Para um elemento no sistema de coordenadas local (x'_1, x'_2) , conforme demonstrado na Figura 3.3, as componentes normais e tangenciais podem ser encontradas pela rotação das forças de superfície globais t_1 e t_2 , de modo que:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

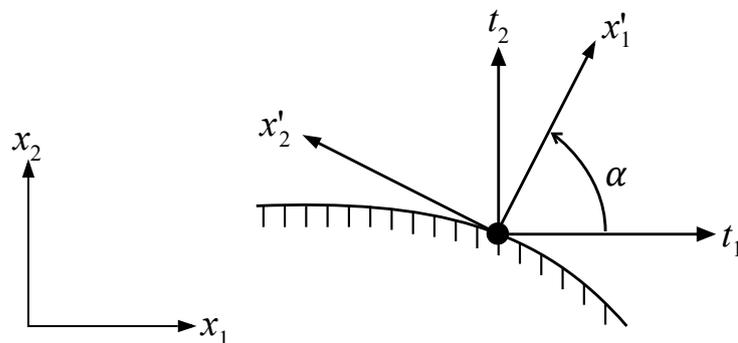


Figura 3.3 – Sistema de coordenadas local para um ponto do contorno.

A componente tangencial de tensão pode ser obtido pela Lei de Hooke para o Estado Plano de Tensões. Como o sistema local do elemento não está alinhado como o

sistema global, e por isso, também não está alinhado com o sistema de coordenadas do material, utiliza-se, neste caso, a matriz constitutiva transformada $\bar{Q} = [T]^{-1}[Q][T]^{-T}$ e a Lei de Hooke dada pela Equação 2.30:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Escrevendo as três equações para as tensões e isolando a componente tangencial de tensão σ_{22} , obtém-se a seguinte expressão para a tensão tangencial:

$$\sigma_{22} = \bar{Q}_{12}\varepsilon_{11} + \bar{Q}_{22}\varepsilon_{22} + \bar{Q}_{26}\gamma_{12} \quad (3.60)$$

onde

$$\varepsilon_{11} = \frac{-\bar{Q}_{16}\sigma_{12} + (\bar{Q}_{16}\bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{66}\bar{Q}_{12})\varepsilon_{22} + \bar{Q}_{66}\sigma_{11}}{-\bar{Q}_{16}^2 + \bar{Q}_{66}\bar{Q}_{11}} \quad (3.61)$$

e

$$\gamma_{12} = \frac{\sigma_{12} - \bar{Q}_{16}\varepsilon_{11} - \bar{Q}_{26}\varepsilon_{22}}{\bar{Q}_{66}} \quad (3.62)$$

Como σ_{11} e σ_{12} são conhecidos pela Equação 3.58, para calcular a tensão tangencial é necessário determinar a deformação tangencial ε_{22} . Como os deslocamentos são aproximados pelas funções de interpolação deslocadas $\bar{\phi}$, de modo que:

$$u_i = \bar{\phi}_1 u_i^1 + \bar{\phi}_2 u_i^2 = \sum_{j=1}^2 \bar{\phi}_j u_i^j \quad (3.63)$$

então

$$\frac{du}{dx} = \sum_{j=1}^2 \frac{d\bar{\phi}_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} u_i^j = \sum_{j=1}^2 \frac{d\bar{\phi}_j}{d\xi} \frac{1}{J} u_i^j \quad (3.64)$$

onde $J = d\Gamma/d\xi = dx/d\xi$. Assim, pode-se escrever a deformação tangencial como:

$$\varepsilon_{22} = \frac{du}{dx} = \frac{d\bar{\phi}_1}{d\xi} \frac{1}{J} u_2^1 + \frac{d\bar{\phi}_2}{d\xi} \frac{1}{J} u_2^2 = \frac{1}{J} \left(\frac{u_2^1 - u_2^2}{-2 + a + b} \right) \quad (3.65)$$

onde u_j^i é o deslocamento na direção j do nó i do elemento no sistema de coordenadas local.

4 DERIVADA TOPOLÓGICA

A derivada topológica é uma função utilizada para avaliar a sensibilidade da topologia de um domínio Ω a ser modificado, por meio de uma função custo \mathcal{J} [Sokolowski e Zochowski, 1997]. Em outras palavras, ela permite avaliar a sensibilidade do problema quando uma inclusão de raio ϵ com diferentes propriedades de material é gerada em uma determinada posição \hat{x} do domínio [Feijóo et al., 2002].

Matematicamente, a derivada topológica pode ser representada da seguinte forma [Novotny e Sokolowski, 2013]:

$$D_T^*(\hat{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega_\epsilon) - \mathcal{J}(\Omega)}{f(\epsilon)} \quad (4.1)$$

onde $D_T^*(\hat{x})$ é o valor da derivada topológica no ponto \hat{x} , $\mathcal{J}(\Omega)$ e $\mathcal{J}(\Omega_\epsilon)$ são, respectivamente, os valores da função custo no domínio original e no domínio perturbado e $f(\epsilon)$ é uma função regularizadora, que depende do problema analisado.

Segundo Novotny et al., 2002, a capacidade de se obter automaticamente a melhor topologia de um componente mecânico após a identificação das variáveis do projeto que o caracterizam é de grande importância uma vez que agiliza a etapa de projeto dos componentes, fornecendo como resultado peças de elevada resistência com o uso da menor quantidade possível de material.

A utilização da Energia Potencial Total como função custo é comum na otimização topológica, uma vez que a minimização da energia interna, além de simplificar os cálculos, fornece como resultado componentes de elevada rigidez, ou seja, de alta resistência mecânica.

Na elasticidade linear, a Energia Potencial Total pode ser definida em função do campo de tensões σ , deslocamentos u e das forças de superfície conhecidas \bar{t} como [Oliver et al., 2018]:

$$\mathcal{J}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \nabla^s u - \int_{\Gamma_2} \bar{t} \cdot u \quad (4.2)$$

onde $\nabla^s u$ é a parte simétrica do gradiente de deslocamentos.

Definindo a função custo para o domínio perturbado, a diferença entre as funções custo $\mathcal{J}(\Omega_\epsilon) - \mathcal{J}(\Omega)$ pode ser definida como [Giusti et al., 2016]:

$$\mathcal{J}(\Omega_\epsilon) - \mathcal{J}(\Omega) = \pi\epsilon^2 \mathbb{P}\sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla^s u(\hat{x}) + o(\epsilon^2) \quad (4.3)$$

onde $o(\epsilon^2)$ é o valor da integral na expansão assintótica do campo de deslocamentos do domínio perturbado u_ϵ [Novotny e Sokolowski, 2013] e \mathbb{P} é o tensor polarizador de Pólya-Szegö, dado por:

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2} \Delta C(\hat{x}) [C(\hat{x})^{-1} + (C^*)^{-1} \mathbb{T}] \quad (4.4)$$

onde $\Delta C(\hat{x}) = C^* - C(\hat{x})$, C^* é o tensor constitutivo da inclusão, $C(\hat{x})$ é o tensor constitutivo do ponto \hat{x} e \mathbb{T} é um tensor de quarta ordem, conforme demonstrado por Oliver et al., 2018, definido como:

$$\mathbb{T} = A_i \mathbb{S} \quad (4.5)$$

onde o tensor \mathbb{S} é dado por

$$\mathbb{S} = \mathbb{I} - C^* C^{-1} \quad (4.6)$$

e \mathbb{I} é o tensor Identidade, C^* é o tensor constitutivo da inclusão e C é o tensor constitutivo do material. A matriz A_i , o problema de valores no contorno deve ser resolvido usando variáveis complexas [Giusti et al., 2016], de modo que:

$$A_i = I_2 (K_G^I)^{-1} K_G^m I_2^T \quad (4.7)$$

onde as matrizes lógicas I_1 , I_2 e I_3 são:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

e as matrizes complexas K_G^I e K_G^m :

$$K_G^I = K_u K_\sigma^{-1} M_\sigma - M_u (\tilde{\alpha}_I + I_3) \quad \text{e} \quad K_G^m = K_u K_\sigma^{-1} M_\sigma \quad (4.9)$$

O termo $\tilde{\alpha}_I$ é definido como a matriz constitutiva inversa modificada, de modo que:

$$\tilde{\alpha}_I = I_1 \alpha_I I_2 \quad (4.10)$$

onde α_I é o inverso do tensor constitutivo da inclusão, ou seja $\alpha_I = (C^*)^{-1}$. As matrizes M_u e M_σ são dadas por:

$$M_u = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad M_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde a e b são os semi-eixos da inclusão elíptica. Como a inclusão considerada é circular, $a = b = 1$.

O produto $K_u K_\sigma^{-1}$ pode ser escrito como:

$$K_u K_\sigma^{-1} = \Re(K_{u_0} K_{\sigma_0}^{-1}) - \Im(K_{u_0} K_{\sigma_0}^{-1}) \quad (4.12)$$

onde $\Re\{\cdot\}$ e $\Im\{\cdot\}$ indicam, respectivamente, a parcela real e a parcela imaginária de $\{\cdot\}$ e

$$K_{u_0} K_{\sigma_0}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -\kappa \\ \rho & 0 & -\eta & 0 \\ 0 & \rho & 0 & -\eta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Os parâmetros λ , κ , ρ e η são dados por:

$$\lambda = \frac{p_1 \mu_2 - p_2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \quad \kappa = \frac{p_1 - p_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad \rho = \frac{q_1 \mu_2 - q_2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \quad \eta = \frac{q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2} \quad (4.14)$$

onde os termos μ_1 e μ_2 são as raízes da equação característica do material dada na Equação 3.18 e os parâmetros complexos p_i e q_i são dados na Equação 3.23.

Substituindo a Equação 4.3 na definição da derivada topológica dada na Equação 4.1 e considerando $f(\epsilon) = \pi \epsilon^2$, a expressão para a derivada topológica pode ser escrita como [Giusti et al., 2016]:

$$D_T^*(\hat{x}) = \mathbb{P}\sigma(u(\hat{x})) \cdot \nabla^s u(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in \Omega \quad (4.15)$$

A Equação 4.4 é a expressão geral para a derivada topológica em um ponto e mede a sensibilidade da Energia Potencial Total quando dois materiais com diferentes

propriedades são considerados.

O problema de otimização topológica a ser resolvido consiste em encontrar a função característica χ , que representa a distribuição de material no domínio Ω , sujeito à uma certa restrição de volume, de modo que:

$$\begin{aligned} & \underset{\chi}{\text{minimizar}} \quad \mathcal{J}(\Omega_\chi) \\ & \text{sujeito à} \quad f(\chi) = \int_{\Omega} \chi - V = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde $\mathcal{J}(\Omega_\chi)$ é a Energia Potencial Total do problema em equilíbrio elástico em função de χ , Ω_χ representa a dependência geométrica do domínio na função característica, $f(\chi)$ é a restrição de volume e V é o volume final desejado.

A derivada topológica é, então, utilizada para minimizar a função custo $\mathcal{J}(\Omega_\chi)$ [Giusti et al., 2016].

Dessa forma, como o cálculo dos valores das tensões e deformações do domínio é uma etapa de pós-processamento no MEC, os valores da derivada topológica podem ser facilmente encontrados a partir da definição do tensor polarizador.

5 METODOLOGIA

A primeira etapa do trabalho consiste na implementação da solução fundamental de deslocamentos e de forças de superfície em um programa de elementos de contorno, seguido da implementação do cálculo de tensões e deformações no contorno e no domínio, conforme descrito no Capítulo 3.

Nessa etapa, serão avaliados deslocamentos e tensões obtidos no código de elementos de contorno e por um programa de elementos finitos, comparando-se os resultados. Para validar a implementação, problemas como uma placa quadrada sob tração, Membrana de Cook, placa retangular com furo circular sob tração uniforme e viga em balanço são analisados.

Após a validação, faz-se a implementação da formulação para o cálculo da derivada topológica na rotina de otimização topológica. A estratégia de otimização topológica utilizada, proposta por Marczak, 2008, é baseada na retirada de material pela criação de furos. Nessa técnica a derivada topológica é avaliada em uma grade de pontos do domínio, a partir do cálculo das tensões e deformações pelo código de elementos de contorno, e furos circulares são gerados centrados nos pontos que apresentarem as menores sensibilidades. A geometria é, então, reconstruída e o processo se repete até que o critério de parada seja satisfeito.

Durante o processo de otimização, uma rotina de suavização por Curvas de Bézier [Anexo I] é utilizada na reconstrução do contorno, após a criação dos furos. A rotina é desenvolvida de modo a garantir que as parcelas corretas do contorno sejam suavizadas, utilizando como pontos de controle o número de pontos da parcela do contorno a ser suavizada. O algoritmo é capaz de identificar automaticamente as parcelas que foram modificadas daquelas que fazem parte do contorno original, assim como as parcelas que possuem condições de contorno, seguindo o procedimento demonstrado na Figura 5.1.

Conforme demonstrado por Anflor e Marczak, 2011 e por Lorenzi, 2017, a utilização desta técnica é benéfica para o processo, uma vez que diminuindo as irregularidades do contorno geradas pela criação de furos, diminuem-se os gradientes de tensões e melhora-se a distribuição dos valores da derivada topológica, acelerando a convergência do resultado. Além disso, diversos autores, como Oliveira e Leonel, 2019 e Wang e Qian, 2014 por exemplo, têm utilizado curvas polinomiais, como NURBS e B-Splines, tanto em processos

de otimização topológica pelo MEC quanto pelo MEF, apresentando diversas melhorias na reconstrução das geometrias, na convergência do processo e, conseqüentemente, no custo computacional do procedimento.

Assim, o processo de otimização é organizado da seguinte forma:

- Etapa 1: Solução do problema pelo MEC e cálculo da derivada topológica nos pontos internos;
- Etapa 2: Seleção dos pontos com os menores valores de derivada topológica;
- Etapa 3: Criação de furos centrados nos pontos selecionados na Etapa 2;
- Etapa 4: Identificação dos segmentos de contorno a serem suavizados;
- Etapa 5: Suavização do contorno;
- Etapa 6: Reconstrução da geometria e retomada ao passo inicial.

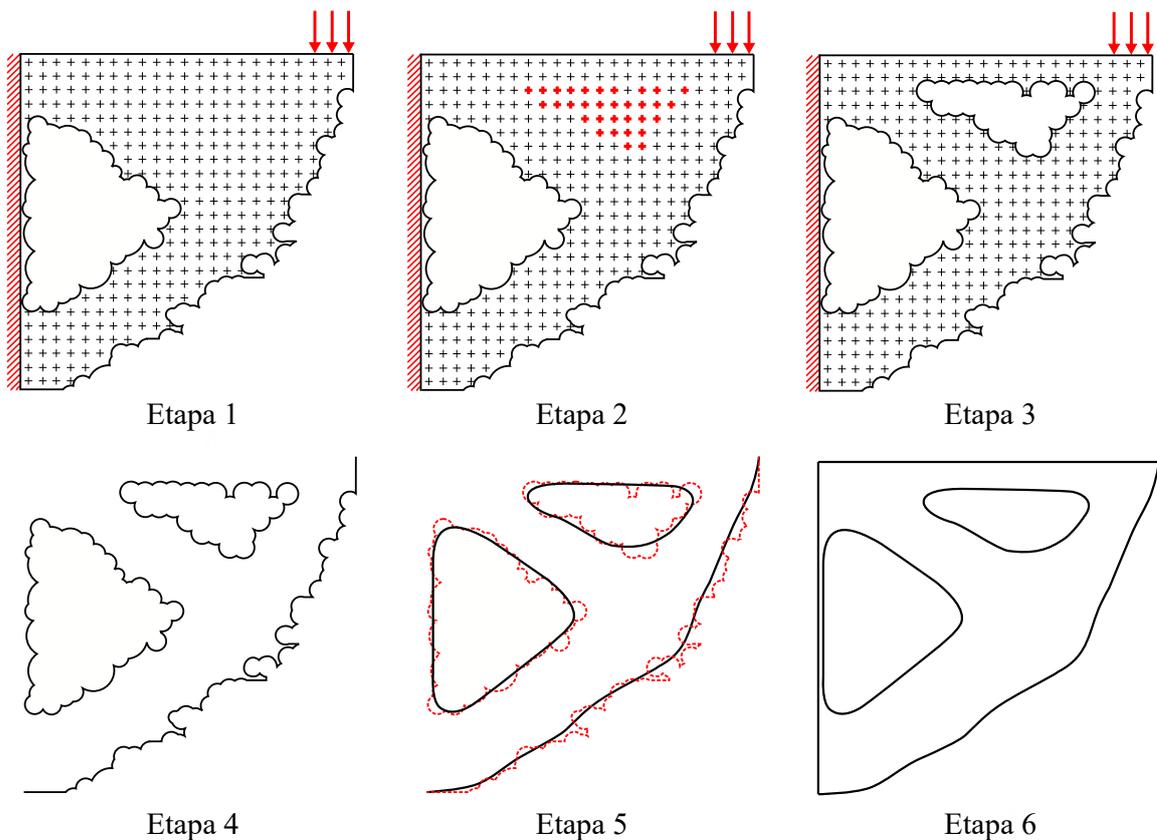


Figura 5.1 – Procedimento de otimização topológica pelo MEC e derivada topológica com suavização de contornos.

6 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos na implementação das soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície e do cálculo de tensões no contorno e no domínio, a fim de validar a implementação numérica no código de Elementos de Contorno. Após, os resultados obtidos na otimização topológica de alguns problemas comuns na literatura são demonstrados.

A implementação foi realizada em um código de elementos de contorno para problemas planos desenvolvido em Matlab. Em todos os casos analisados, o valor para os recuos a e b dos nós físicos, demonstrados na Figura 3.2, é igual a 10% do tamanho do elemento, em todos elementos. As características geométricas, propriedades dos materiais e carregamentos dos problemas são indicadas sem unidades, porém definidas de forma compatível a qualquer sistema de unidades. O número de elementos e o tipo de elemento utilizado na simulação são dados para cada caso. Ilustrações sobre as malhas utilizadas não são apresentadas devido à dificuldade de visualização pelo refino das malhas. Os exemplos foram simulados em um microcomputador com processador Intel® Core™ i5-3230M CPU @ 2,6GHz e memória RAM instalada de 16,0 GB.

6.1 Placa quadrada sob tração

Para simular um estado de tração uniaxial a placa quadrada de lado $L = 10$ demonstrada na Figura 6.1 é analisada. A placa está sujeita à um carregamento unitário distribuído na aresta direita, possui restrição de deslocamento em x_2 por um apoio deslizante na aresta inferior e restrição de deslocamento em x_1 na aresta esquerda, para simular uma condição de simetria. As constantes do material utilizadas são demonstradas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Parâmetros do material ortotrópico. [Fonte: Wu e Mu, 2002]

Propriedade	Grandeza
Módulo de Elasticidade (E_1)	20E9
Módulo de Elasticidade (E_2)	9,2E9
Módulo de Cisalhamento (G_{12})	5E9
Coefficiente de Poisson (ν_{12})	0,341

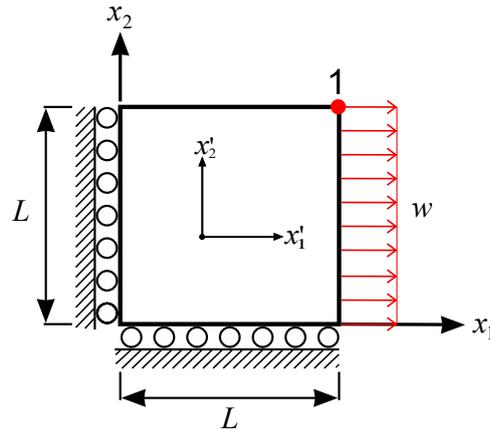


Figura 6.1 – Teste de tração: geometria e condições de contorno.

Cada aresta da placa é modelada como 20 elementos de contorno de mesmo comprimento, totalizando 80 elementos. O mesmo caso é simulado em um programa de elementos finitos, em uma placa modelada por 400 elementos bilineares de 4 nós. Ambos os modelos são construídos de modo que o módulo de elasticidade E_1 esteja alinhado com o eixo horizontal x_1 . Os resultados para os deslocamentos no ponto 1, no canto superior direito, são demonstrados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Resultados do teste de tração.

Parâmetro	MEC	MEF	Diferença [%]
Deslocamento horizontal (u_1)	5,013E-10	5,000E-10	0,26
Deslocamento vertical (u_2)	-1,759E-10	-1,705E-10	3,08

Pode-se perceber que os resultados obtidos estão semelhantes a apresentam diferença na ordem de 3% em relação ao método dos elementos finitos, validando a implementação numérica da solução fundamental de deslocamentos.

6.2 Membrana de Cook

O problema da Membrana de Cook, desenvolvido por Cook, 1974, é frequentemente utilizado para testar modelos de elementos em programas de elementos finitos por acoplar flexão e cisalhamento em um mesmo problema com moderada distorção, simulando a flexão de uma viga com geometria não-convencional.

Neste problema, a geometria demonstrada na Figura 6.2 está sujeita à um carrega-

mento unitário vertical, distribuído na aresta direita e possui restrições de deslocamento nos eixos x_1 e x_2 na aresta esquerda. As constantes do material utilizadas são demonstradas na Tabela 6.1.

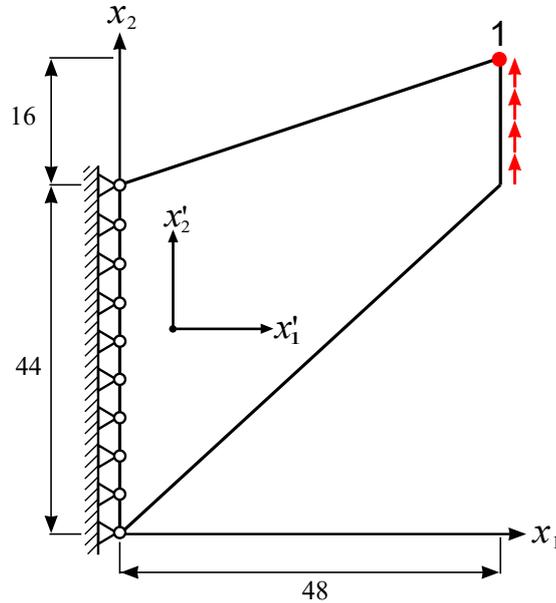


Figura 6.2 – Membrana de Cook: geometria e condições de contorno.

Nesta análise, o modelo é discretizado em 546 elementos de contorno, enquanto a análise por elementos finitos é realizada em um modelo composto por 6900 elementos biquadráticos de 8 nós. Os modelos são construídos de modo que o módulo de elasticidade E_1 esteja alinhado com o eixo horizontal x_1 . Os resultados numéricos dos deslocamentos no Ponto 1 e tensões máximas e mínimas no domínio são demonstrados na Tabela 6.3, enquanto resultados gráficos podem ser encontrados nas Figuras 6.3 à 6.7.

Tabela 6.3 – Resultados da análise da Membrana de Cook.

Parâmetro	MEC	MEF	Diferença [%]
u_1 Ponto 1	-1,903E-8	-1,975E-8	-3,78
u_2 Ponto 1	2,741E-8	2,812E-8	-2,59
$\sigma_{11_{max}}$	2,075	2,116	-1,97
$\sigma_{11_{min}}$	-15,751	-15,310	2,79
$\sigma_{22_{max}}$	2,132	2,341	-9,80
$\sigma_{22_{min}}$	-2,471	-2,449	0,89
$\sigma_{12_{max}}$	1,902	1,939	-1,95
$\sigma_{12_{min}}$	-2,644	-2,751	-4,04

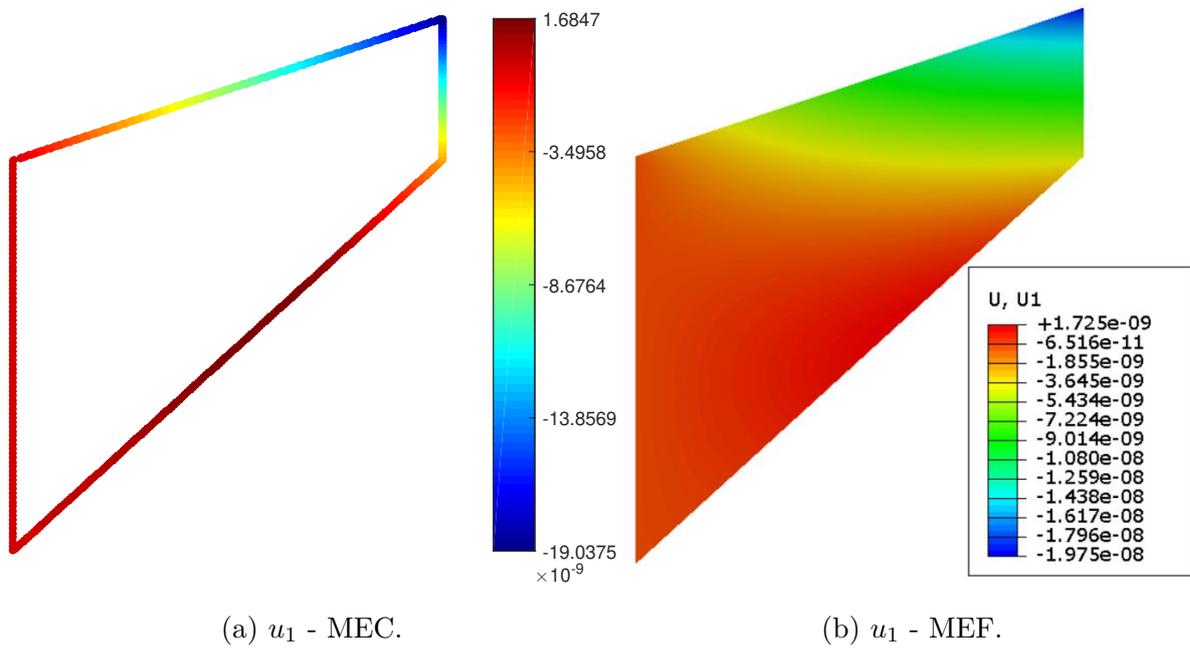


Figura 6.3 – Membrana de Cook: deslocamentos u_1 pelo (a) MEC e (b) MEF.

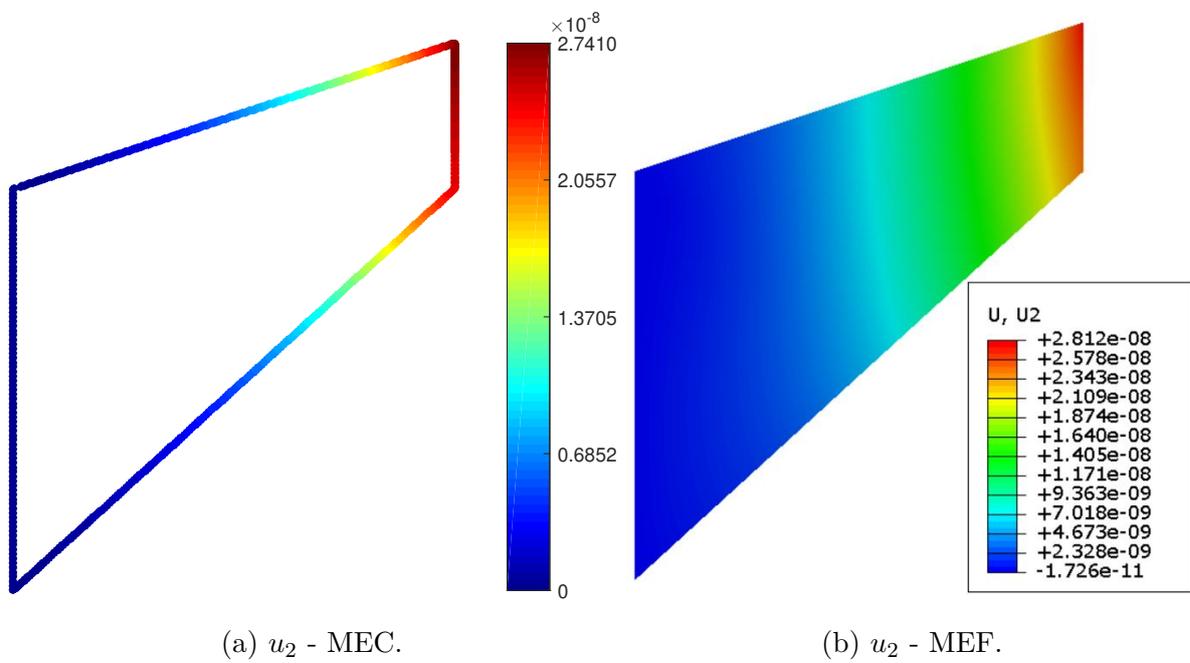


Figura 6.4 – Membrana de Cook: deslocamentos u_2 pelo (a) MEC e (b) MEF.

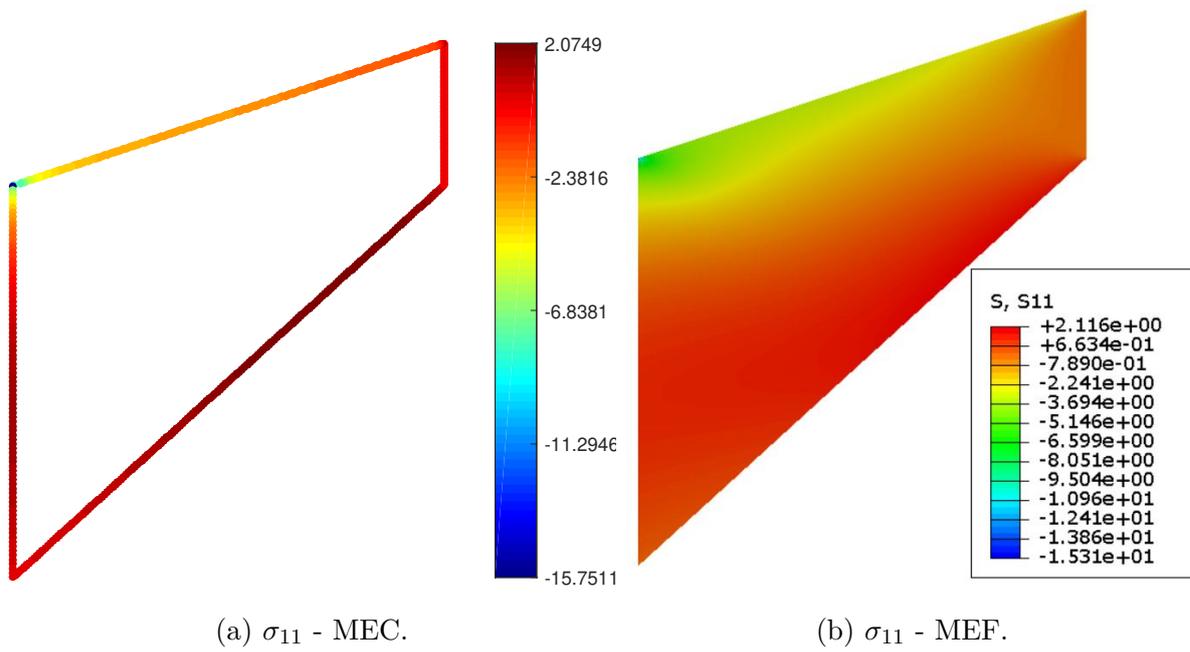


Figura 6.5 – Membrana de Cook: tensões σ_{11} pelo (a) MEC e (b) MEF.

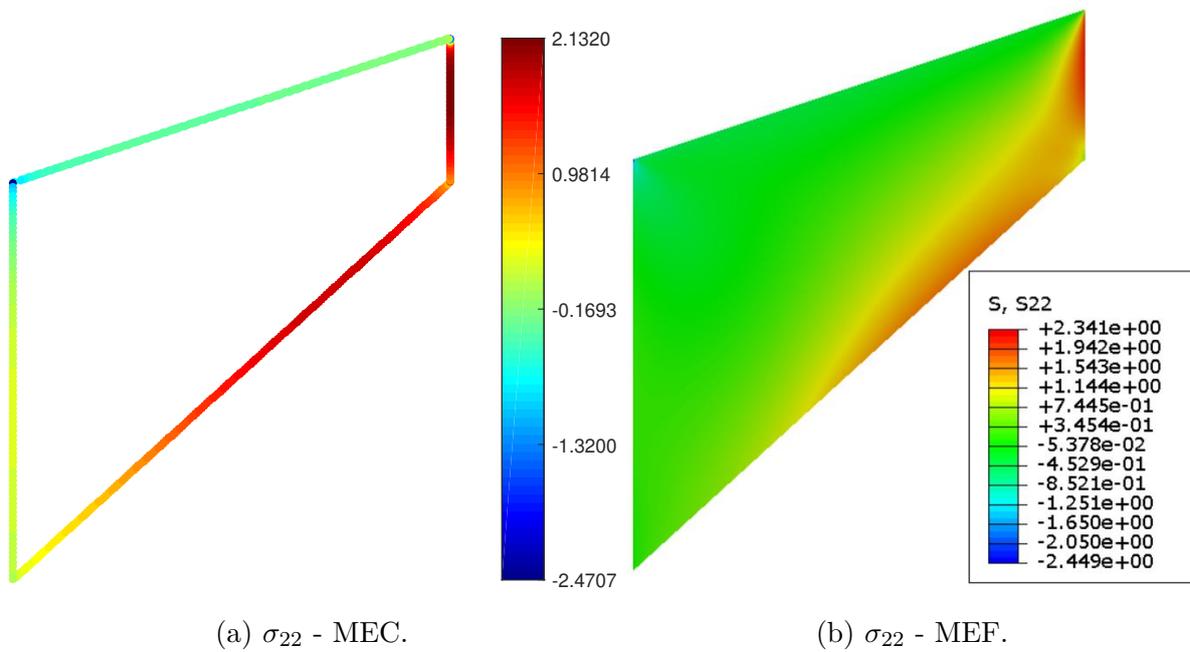


Figura 6.6 – Membrana de Cook: tensões σ_{22} pelo (a) MEC e (b) MEF.

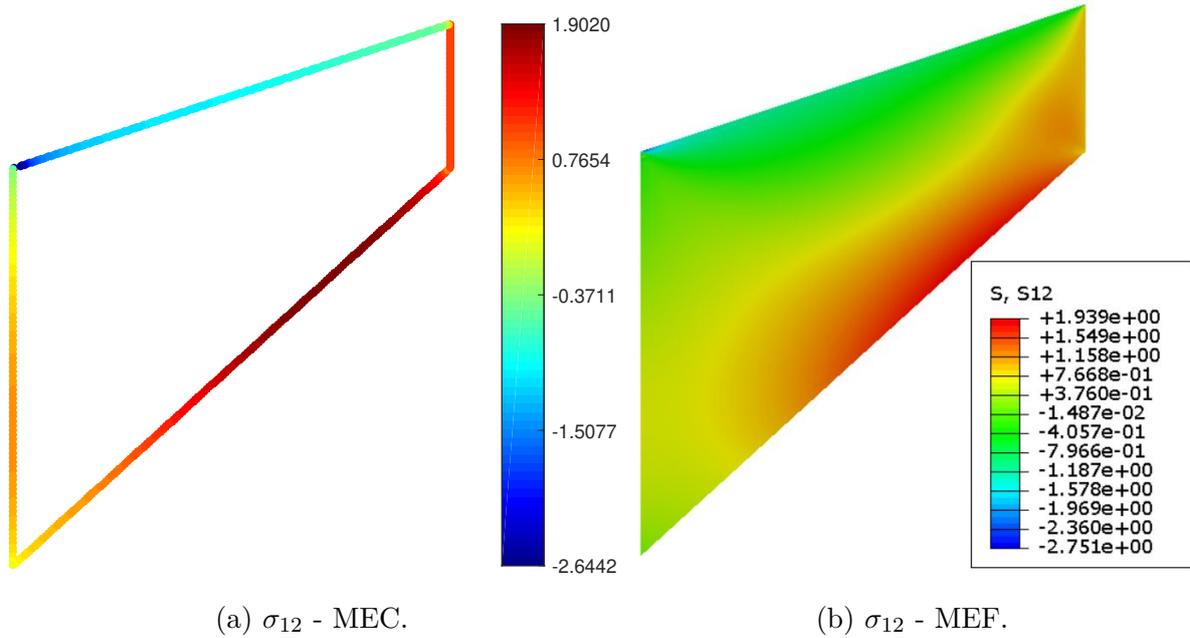


Figura 6.7 – Membrana de Cook: tensões σ_{12} pelo (a) MEC e (b) MEF.

Pode-se perceber uma diferença da ordem de 3% nos deslocamentos e tensões entre o MEC e o MEF, com excessão da tensão $\sigma_{22_{max}}$, que apresentou uma diferença maior na região de aplicação do carregamento.

6.3 Placa retangular com furo circular sob tração uniforme

O terceiro problema utilizado para validar a implementação é a análise de concentração de tensões em uma placa com furo ortotrópica. Neste problema, uma placa de comprimento $2c = 254$ e largura $2L = 101.6$ com um furo central de raio r é submetida a uma força unitária distribuída na aresta direita. Fazendo com que o módulo de elasticidade E_1 esteja alinhado com o eixo horizontal x_1 , condições de simetria podem ser utilizadas e apenas 1/4 da placa é modelado, conforme demonstrado na Figura 6.8.

Para analisar o efeito de concentração de tensões, diferentes razões r/L são testadas. Para cada razão r/L , faz-se o refino das malhas de elementos finitos de 8 nós até a convergência dos resultados ser atingida. Os resultados obtidos pelo MEC e pelo MEF para a tensão no ponto 1, bem como o deslocamento vertical u_2 do ponto 2 e o deslocamento horizontal u_1 do ponto 3 são demonstrados nas Tabelas 6.4 à 6.7.

Os resultados gráficos para as distribuições de tensões e deslocamentos obtidos pelo MEC e pelo MEF para uma razão $r/L = 0,3$ podem ser conferidos nas Figuras 6.9 à 6.13.

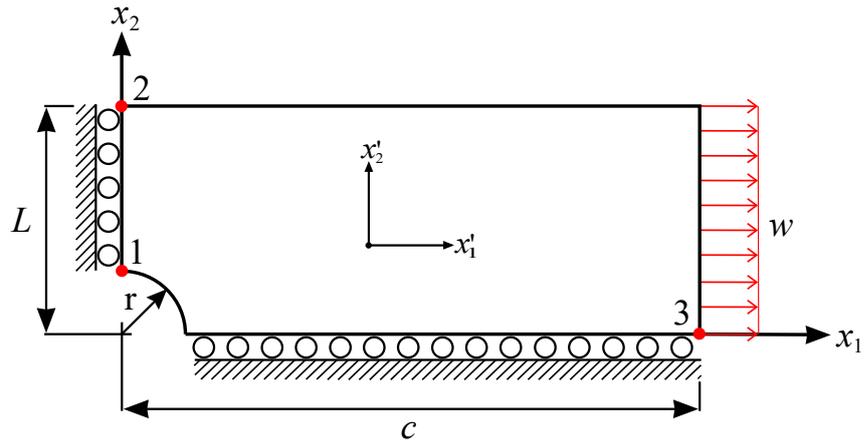


Figura 6.8 – Placa com furo: geometria e condições de contorno.

Como a utilização de elementos de dimensão pequena dificulta a visualização gráfica das malhas utilizadas, as colunas 3 e 4 das Tabelas 6.4 à 6.7 apresentam, respectivamente, o tamanho dos elementos nas arestas de simetria e o número de elementos ao longo do furo para cada uma das malhas.

Tabela 6.4 – Resultados da análise da placa com furo de razão $r/L = 0,15$.

Método	Elementos na malha	Tamanho dos elementos	Elementos no furo	σ_{11}	u_1	u_2
MEF	6448	1	12	3,536	6,53E-09	-1,07E-09
	25789	0,5	24	3,572	6,53E-09	-1,07E-09
	102575	0,25	48	3,584	6,53E-09	-1,07E-09
MEC	187	2	15	3,514	6,53E-09	-1,08E-09
Diferença [%]				-1,98	-0,02	0,65

Tabela 6.5 – Resultados da análise da placa com furo de razão $r/L = 0,30$.

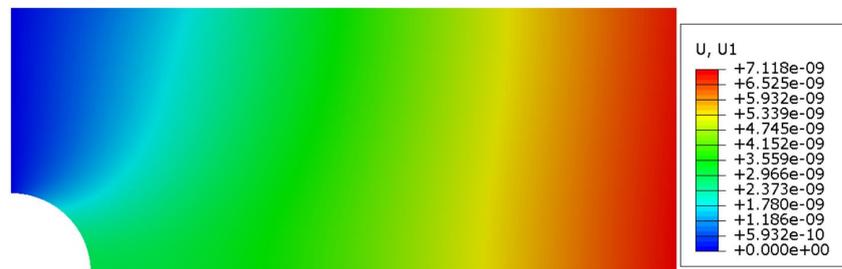
Método	Elementos na malha	Tamanho dos elementos	Elementos no furo	σ_{11}	u_1	u_2
MEF	6334	1	25	3,869	7,12E-09	-1,77E-09
	24361	0,5	49	3,881	7,12E-09	-1,77E-09
	100749	0,25	95	3,886	7,12E-09	-1,77E-09
MEC	188	2	25	3,818	7,11E-09	-1,76E-09
Diferença [%]				-1,78	-0,12	-0,59

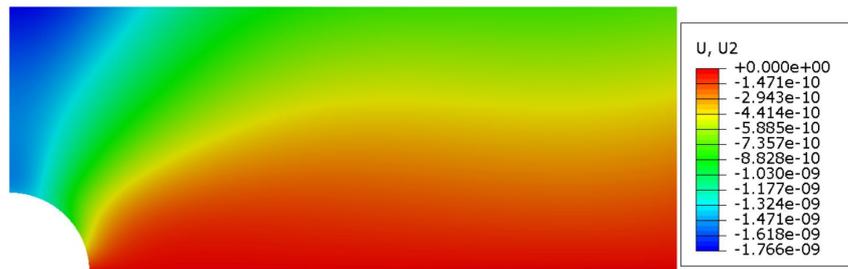
Tabela 6.6 – Resultados da análise da placa com furo de razão $r/L = 0,50$.

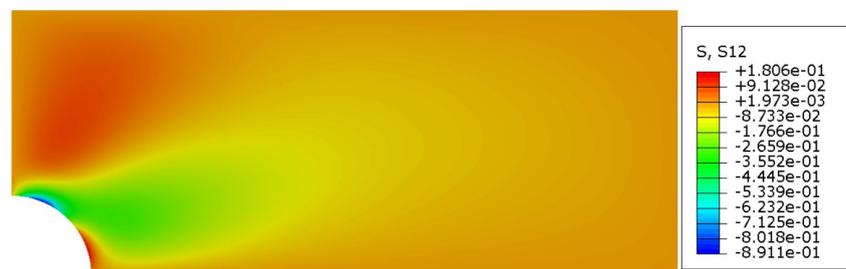
Método	Elementos na malha	Tamanho dos elementos	Elementos no furo	σ_{11}	u_1	u_2
MEF	6041	1	42	4,862	8,92E-09	-4,08E-09
	24161	0,5	82	4,870	8,92E-09	-4,08E-09
	96057	0,25	156	4,873	8,92E-09	-4,08E-09
MEC	179	2	25	4,935	8,89E-09	-4,0E-09
Diferença [%]				1,26	-0,40	-2,10

Tabela 6.7 – Resultados da análise da placa com furo de razão $r/L = 0,75$.

Método	Elementos na malha	Tamanho dos elementos	Elementos no furo	σ_{11}	u_1	u_2
MEF	5428	1	62	8,941	1,55E-09	-1,45E-09
	21675	0,5	126	8,949	1,55E-09	-1,45E-09
	86160	0,25	250	8,952	1,55E-09	-1,45E-09
MEC	179	2	30	8,884	1,52E-09	-1,37E-09
Diferença [%]				-0,77	-1,49	-5,67

(a) u_1 - MEC.(b) u_1 - MEF.Figura 6.9 – Placa com furo: deslocamentos u_1 pelo (a) MEC e (b) MEF.

(a) u_2 - MEC.(b) u_2 - MEF.Figura 6.10 – Placa com furo: deslocamentos u_2 pelo (a) MEC e (b) MEF.(a) σ_{11} - MEC.(b) σ_{11} - MEF.Figura 6.11 – Placa com furo: tensões σ_{11} pelo (a) MEC e (b) MEF.

(a) σ_{22} - MEC.(b) σ_{22} - MEF.Figura 6.12 – Placa com furo: tensões σ_{22} pelo (a) MEC e (b) MEF.(a) σ_{12} - MEC.(b) σ_{12} - MEF.Figura 6.13 – Placa com furo: tensões σ_{12} pelo (a) MEC e (b) MEF.

Pode-se observar, pelos resultados obtidos, que a variação da concentração de tensões para diferentes razões r/L apresenta comportamento semelhante ao encontrado na literatura, como no trabalho de Wu e Mu, 2002, cumprindo um dos objetivos iniciais do trabalho de implementar o cálculo de tensões e deslocamentos no contorno. Os valores numéricos obtidos no MEC apresentam pouca diferença em relação ao MEF, apesar das diferenças de refino de malha, e pela tensão no MEC ser calculada nos nós físicos.

6.4 Viga em balanço

Para validar a implementação do cálculo de deslocamentos e tensões no domínio, o problema da viga em balanço é analisado. Neste problema plano, uma viga de comprimento $2L$ e altura L , demonstrada na Figura 6.14, é submetida a uma carga vertical de magnitude $1E-4$, apontando para baixo, no centro da aresta direita, enquanto a aresta esquerda possui restrições de deslocamento nos eixos x_1 e x_2 . O tensor constitutivo do material é dado por:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,3400 & 0,1689 & 0 \\ 0,1689 & 0,3400 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1401 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Para a análise pelo método dos elementos finitos utiliza-se uma malha composta por 20000 elementos de 8 nós. Para a análise pelo método dos elementos de contorno, o contorno é discretizado em 300 elementos de igual comprimento e 4851 pontos são analisados no domínio. Os resultados gráficos podem ser conferidos nas Figuras 6.15 à 6.19.

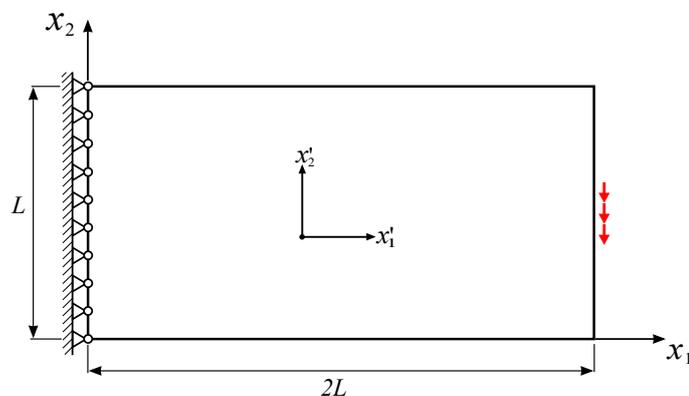


Figura 6.14 – Viga em balanço: geometria e condições de carregamento.

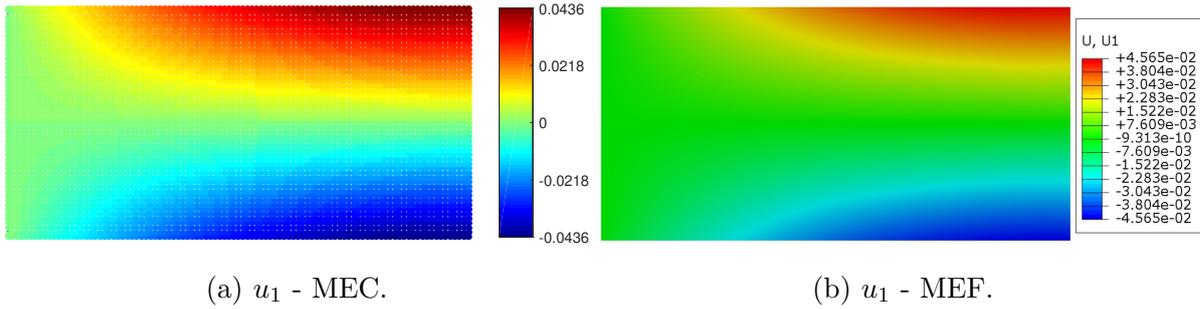


Figura 6.15 – Viga em balanço: deslocamentos u_1 pelo (a) MEC e (b) MEF.

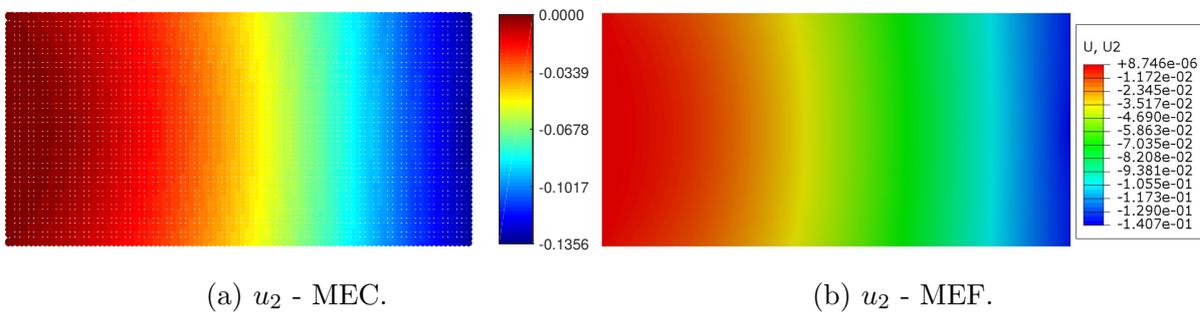


Figura 6.16 – Viga em balanço: deslocamentos u_2 pelo (a) MEC e (b) MEF.

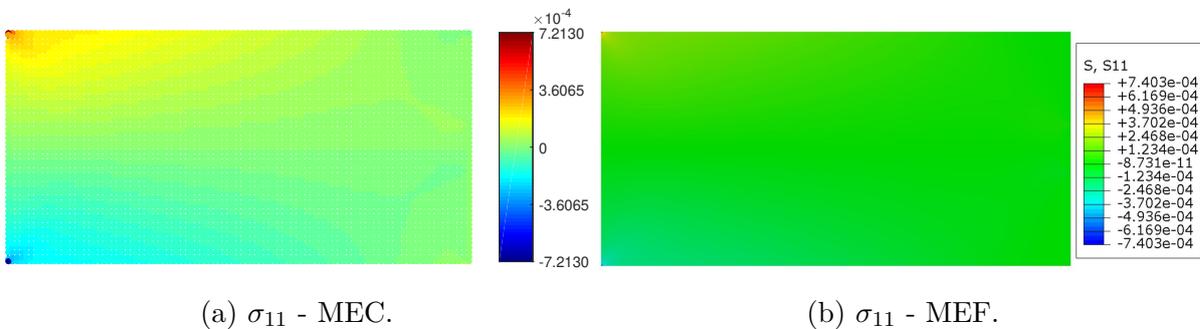


Figura 6.17 – Viga em balanço: tensões σ_{11} pelo (a) MEC e (b) MEF.

Os resultados obtidos pelo MEC apresentam distribuição de tensões e deslocamentos no domínio semelhante aos resultados pelo MEF, cumprindo o objetivo de implementar o cálculo de tensões e deslocamentos no domínio. Pode-se perceber pouca diferença entre os valores das tensões no contorno obtidas pelo MEC e pelo MEF, apesar da diferença nos refinamentos das malhas entre os dois métodos.

É importante destacar que essa diferença não interfere de forma significativa nos resultados do processo de otimização topológica, pois a metodologia empregada utiliza

uma análise qualitativa dos resultados da derivada topológica. Dessa forma, pequenas diferenças nos resultados de tensões por refino de malha do contorno são toleráveis, desde que não interfiram no campo de tensões no domínio. Além do refino de malha, pode-se melhorar a apresentação das tensões por meio de técnicas de suavização de resultados em elementos de contorno descontínuos, como a proposta por Silveira, 2007, recuperando os valores de tensões nos nós geométricos. Essa abordagem porém, não é adicionada ao trabalho, ficando como sugestão para implementação futura.

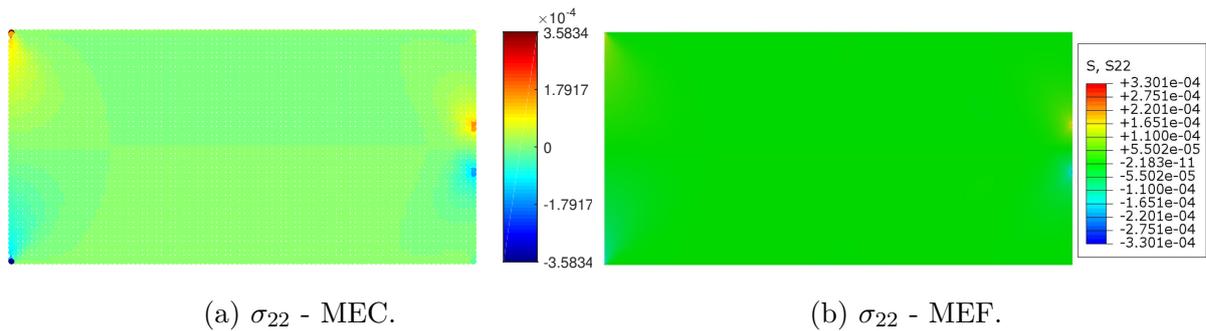


Figura 6.18 – Viga em balanço: tensões σ_{22} pelo (a) MEC e (b) MEF.

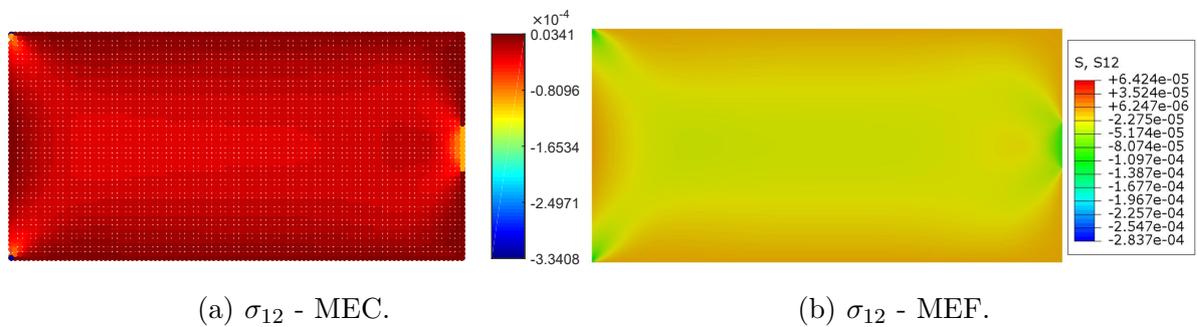


Figura 6.19 – Viga em balanço: tensões σ_{12} pelo (a) MEC e (b) MEF.

6.5 Otimização Topológica

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos na otimização topológica de alguns casos clássicos. As características geométricas, condições de carregamento e condições de simulação são apresentados para cada caso.

Para calcular a derivada topológica, o tensor constitutivo das inclusões pode ser definido através de um parâmetro de contraste β e do tensor constitutivo do material, de

modo que $C^* = \beta C$. Nos exemplos aqui demonstrados, utiliza-se $\beta = 10^{-4}$, representando uma rigidez tão pequena que pode caracterizar um furo [Giusti et al., 2016].

Em todos os casos, os furos criados a cada iteração são simplificados e representados por hexágonos, evitando a criação de elementos muito pequenos e excessivo refino da malha, o que resultaria em aumento no custo computacional. Além disso, trinta e dois pontos de integração são utilizados na integração numérica.

6.5.1 Caso 1A - Viga retangular ortotrópica

Neste problema ortotrópico de domínio retangular, demonstrado na Figura 6.14, uma carga vertical de magnitude $1E-4$, apontando para baixo, é aplicada no centro da aresta direita, enquanto a aresta esquerda possui restrições de deslocamento horizontal e vertical. O tensor constitutivo do material é dado pela Equação 6.1. O raio dos furos utilizados para remover material é 3% da menor aresta do domínio (L) e 40 furos são criados a cada iteração. A grade interna possui 4851 pontos e a rotina de suavização é aplicada a cada 5 iterações. O processo é interrompido quando a área final A_f atinge 45% da área inicial A_0 . A evolução do processo de otimização topológica é demonstrado na Figura 6.20.

6.5.2 Caso 1B - Viga retangular anisotrópica

Utilizando a mesma geometria e condições de carregamento do Caso 1A, um problema anisotrópico é analisado. O tensor constitutivo do material é dado por:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,2782 & 0,1250 & 0,0728 \\ 0,1250 & 0,2184 & 0,0120 \\ 0,0728 & 0,0120 & 0,1401 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

O raio dos furos utilizados para remover material é $r = 0.03L$ e a grade interna possui 4851 pontos. No início do processo, 30 furos são criados a cada iteração e a rotina de suavização é aplicada a cada 5 iterações. Entre as iterações 25 e 60, a taxa de criação de furos é diminuída para 10 furos por iteração e a suavização é aplicada a cada 10 iterações. Após a iteração 60, 6 furos são criados a cada iteração. O processo é interrompido quando $A_f = 0.5A_0$. A evolução do processo de otimização topológica é demonstrado na Figura 6.21.

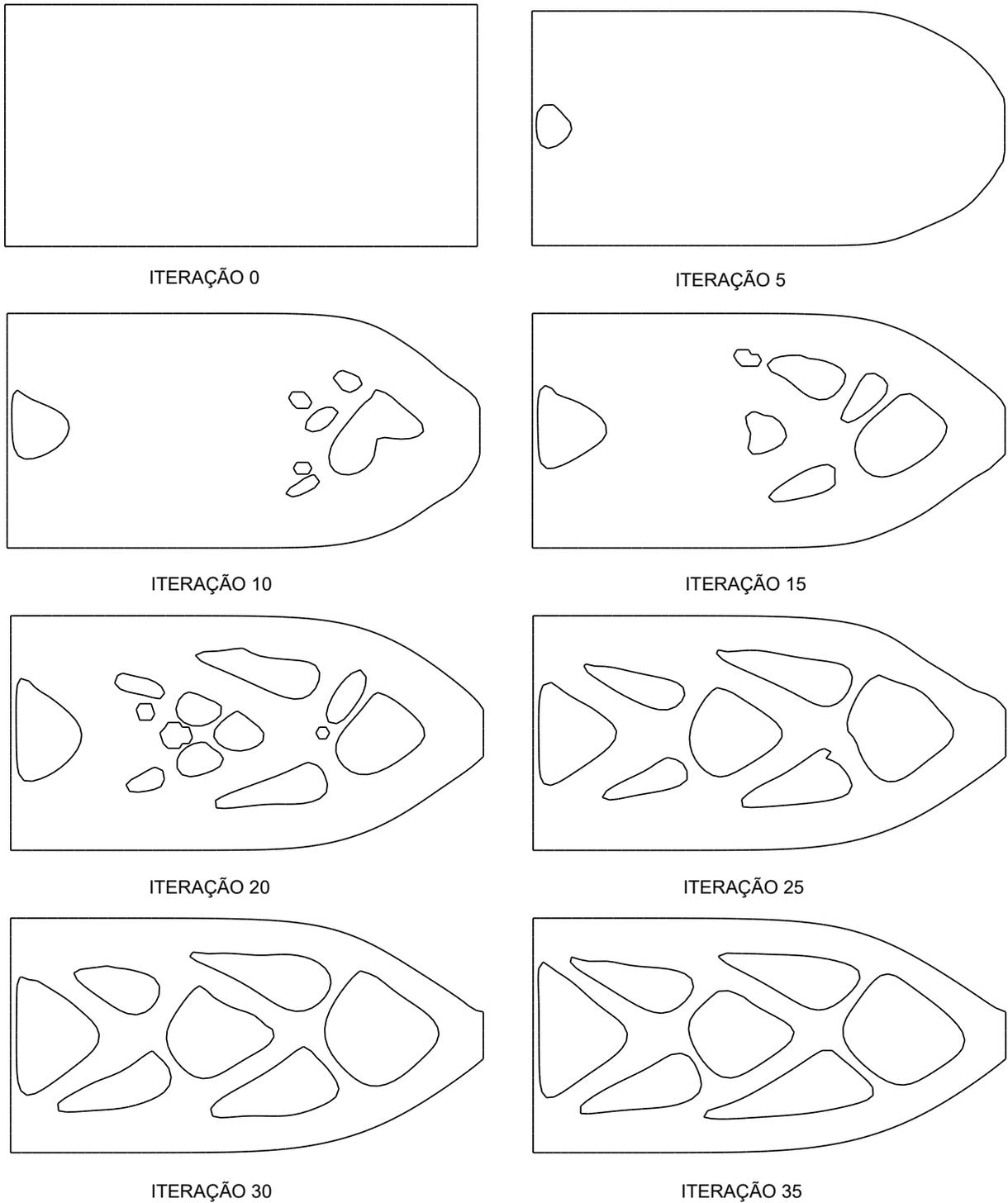


Figura 6.20 – Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 1A - Ortotropia.

Pode-se observar que as geometrias obtidas nas otimizações são compatíveis com os resultados obtidos por Giusti et al., 2016, Figura 6.22, em um processo de otimização topológica utilizando a derivada topológica, cumprindo o objetivo da implementação da derivada topológica no código de otimização topológica. Em ambos os casos apresenta-

dos por Giusti et al., 2016, a área final da estrutura representa 40% da área inicial. A Figura 6.23 apresenta os resultados obtidos por Giusti et al., 2016 no MEF e Marczak, 2008 no MEC para o caso isotrópico.

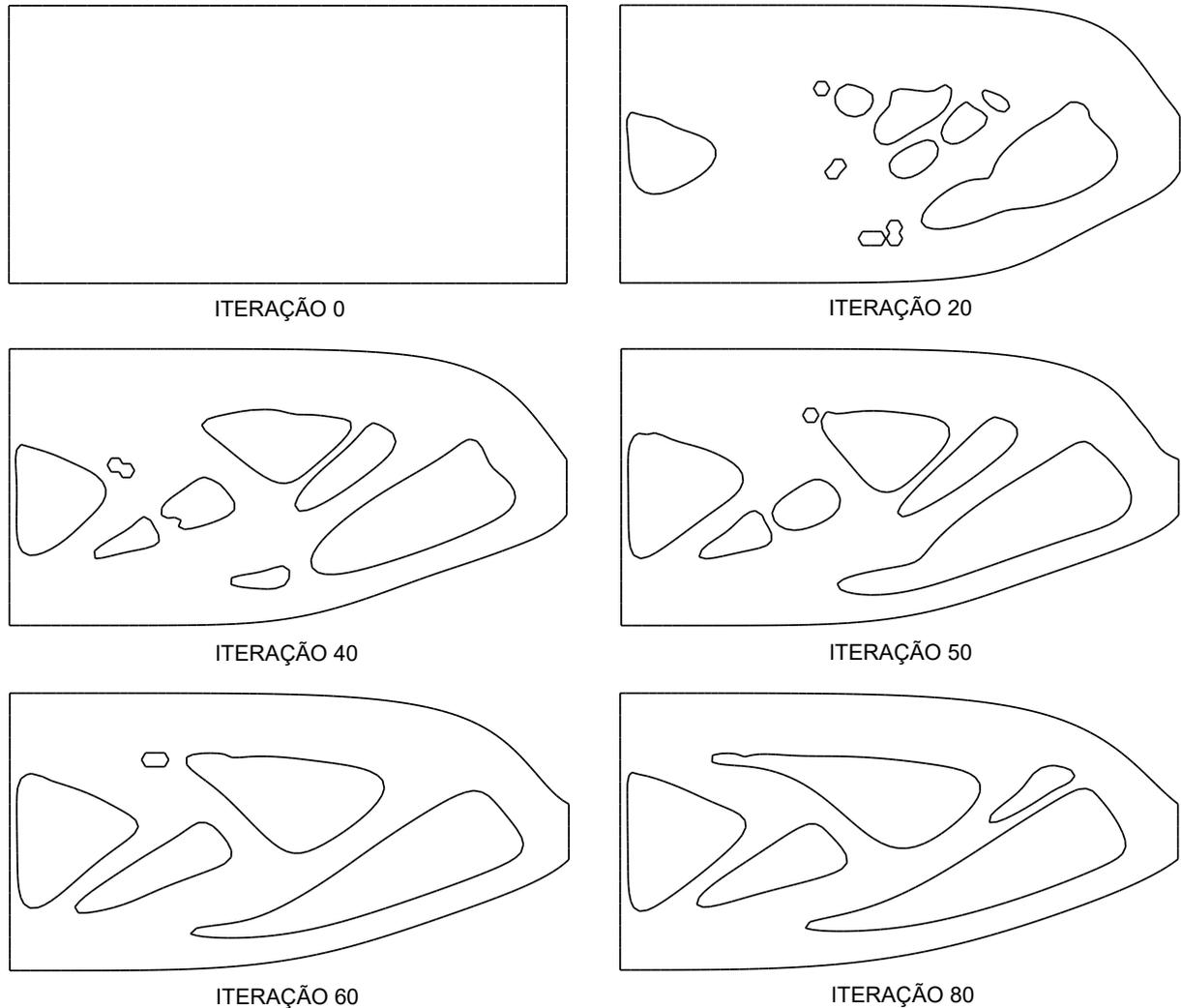


Figura 6.21 – Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 1B - Anisotropia.

Percebe-se o maior refino nos reforços internos no Caso 1A, em comparação com os resultados obtidos na literatura, com padrão semelhante ao resultado da otimização do caso isotrópico, Figura 6.23. Esses resultados foram obtidos utilizando uma taxa de remoção de material pouco agressiva, com furos de raio pequeno, e pela constante aplicação da rotina de suavização no processo, a qual retarda o processo de união entre os furos internos, gerando um padrão de refinamento maior nos reforços da estrutura.

Uma diferença que pode ser observada entre os dois métodos é a existência de material em toda a extensão da região de fixação da estrutura, na simulação realizada

pelo MEC. Isto ocorre devido à uma restrição na implementação do código, que não permite retirar material em regiões próximas às condições de contorno.

É importante destacar a dificuldade em manter a simetria durante a otimização topológica em problemas originalmente simétricos, como o primeiro caso. Essa dificuldade está relacionada com a validação numérica da sensibilidade da função custo, que está sujeita à erros de arredondamento [Marczak, 2007]. Além disso, a remoção de material ocorre pela criação de furos nos pontos com menores valores de derivada topológica do domínio, sem nenhuma imposição de simetria na estratégia.

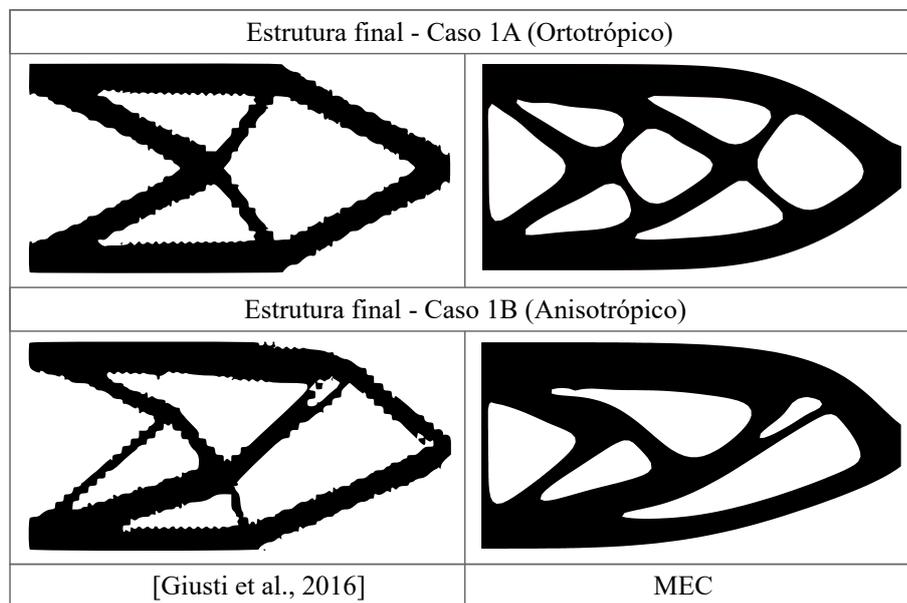


Figura 6.22 – Comparação de resultados entre o MEC e o MEF.

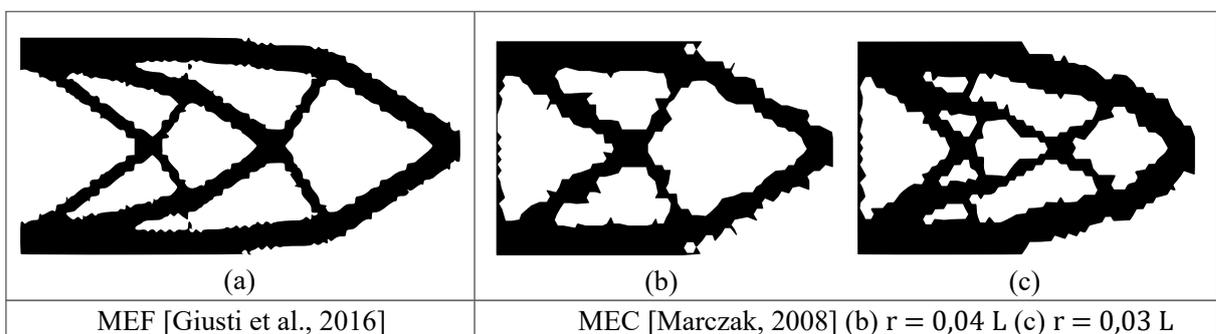


Figura 6.23 – Comparação de resultados entre o MEC e o MEF para o caso isotrópico.

6.5.3 Caso 2A - Viga retangular ortotrópica - Eixos do material coincidentes com os eixos geométricos

Para estudar os efeitos da orientação do material na geração da topologia ótima de uma estrutura, uma viga retangular ortotrópica é analisada. O processo de otimização é executado para três diferentes orientações do material e os resultados são demonstrados a seguir.

No primeiro caso, o problema ortotrópico de domínio retangular demonstrado na Figura 6.24, uma carga unitária distribuída é aplicada no canto direito da aresta superior, enquanto a aresta esquerda possui restrições de deslocamento horizontal e vertical. O raio dos furos utilizados para remover material é 3% da menor aresta do domínio (L) e a grade interna possui 4851 pontos. No início do processo, 30 furos são criados a cada iteração e a rotina de suavização é aplicada a cada 5 iterações. Após 30 iterações, a taxa de criação de furos é diminuída para 10 furos por iteração e a suavização é aplicada a cada 7 iterações. As propriedades do material são dadas na Tabela 6.1 e o módulo de elasticidade E_1 está orientado horizontalmente, paralelo ao eixo x_1 . A evolução do processo de otimização topológica é demonstrado na Figura 6.25 e é interrompido quando $A_f = 0.5A_0$.

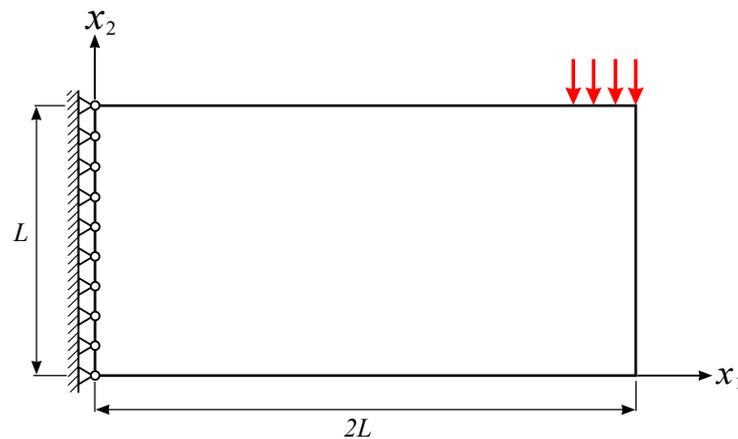


Figura 6.24 – Caso 2: geometria e condições de carregamento.

6.5.4 Caso 2B - Viga retangular ortotrópica - Eixos do material perpendiculares aos eixos geométricos

Utilizando a mesma geometria e condições de carregamento do Caso 2A, a otimização topológica agora é realizada considerando-se que módulo de elasticidade E_1 está

orientado verticalmente, paralelo ao eixo x_2 . O raio dos furos utilizados para remover material é $r = 0.03L$ e a grade interna possui 4851 pontos. O processo inicia com 24 furos criados a cada iteração e após 32 iterações, a taxa de criação de furos é diminuída para 12 furos por iteração. A rotina de suavização é aplicada a cada 5 iterações e o processo termina quando $A_f = 0.5A_0$. A evolução do processo de otimização topológica é demonstrado na Figura 6.26.

6.5.5 Caso 2C - Viga retangular ortotrópica - Eixos do material rotacionados em relação aos eixos geométricos

Utilizando a mesma geometria e condições de carregamento do Caso 2A, a otimização topológica é realizada considerando-se que módulo de elasticidade E_1 está orientado a 30 graus com o eixo x_1 , no sentido anti-horário. O raio dos furos utilizados para remover material é $r = 0.03L$ e a grade interna possui 4851 pontos. O processo inicia com 30 furos criados a cada iteração e após 10 iterações, a taxa de criação de furos é diminuída para 20 furos por iteração. A rotina de suavização é aplicada a cada 5 iterações e o processo termina quando $A_f = 0.5A_0$. A evolução do processo de otimização topológica é demonstrado na Figura 6.27.

Os resultados obtidos pela otimização topológica no Caso 2, Figura 6.28, permitem observar as diferenças na estrutura final quando a direção de ortotropia é alterada para uma mesma condição de carregamento, demonstrando o potencial do método como ferramenta de engenharia.

Um fator importante no processo é a escolha da taxa de remoção de material, dada pelo raio dos furos e da quantidade de furos criados a cada iteração. Utilizar uma taxa muito alta pode gerar respostas incorretas na geometria, já que furos podem ser criados em posições cuja derivada topológica já não apresenta valores tão baixos quanto os primeiros furos criados na iteração e a estratégia de otimização topológica por criação de furos não permite reverter um furo criado. Os valores utilizados neste trabalho foram escolhidos após testes iniciais no programa de otimização, baseados nas simulações descritas na literatura por Marczak, 2008. Conforme o autor, bons resultados na topologia final são gerados criando de oito a doze furos por iteração. Porém, dependendo da grade interna de pontos e do raio dos furos, o processo demanda mais tempo para ser executado. Dessa forma, optou-se por iniciar a simulação retirando uma quantidade maior de furos,

diminuindo esse valor ao longo do processo.

A utilização da rotina de suavização ajuda a minimizar esse problema, pois diminui o tamanho dos contornos internos, ocasionando um aumento instantâneo na área total quando a rotina é executada.

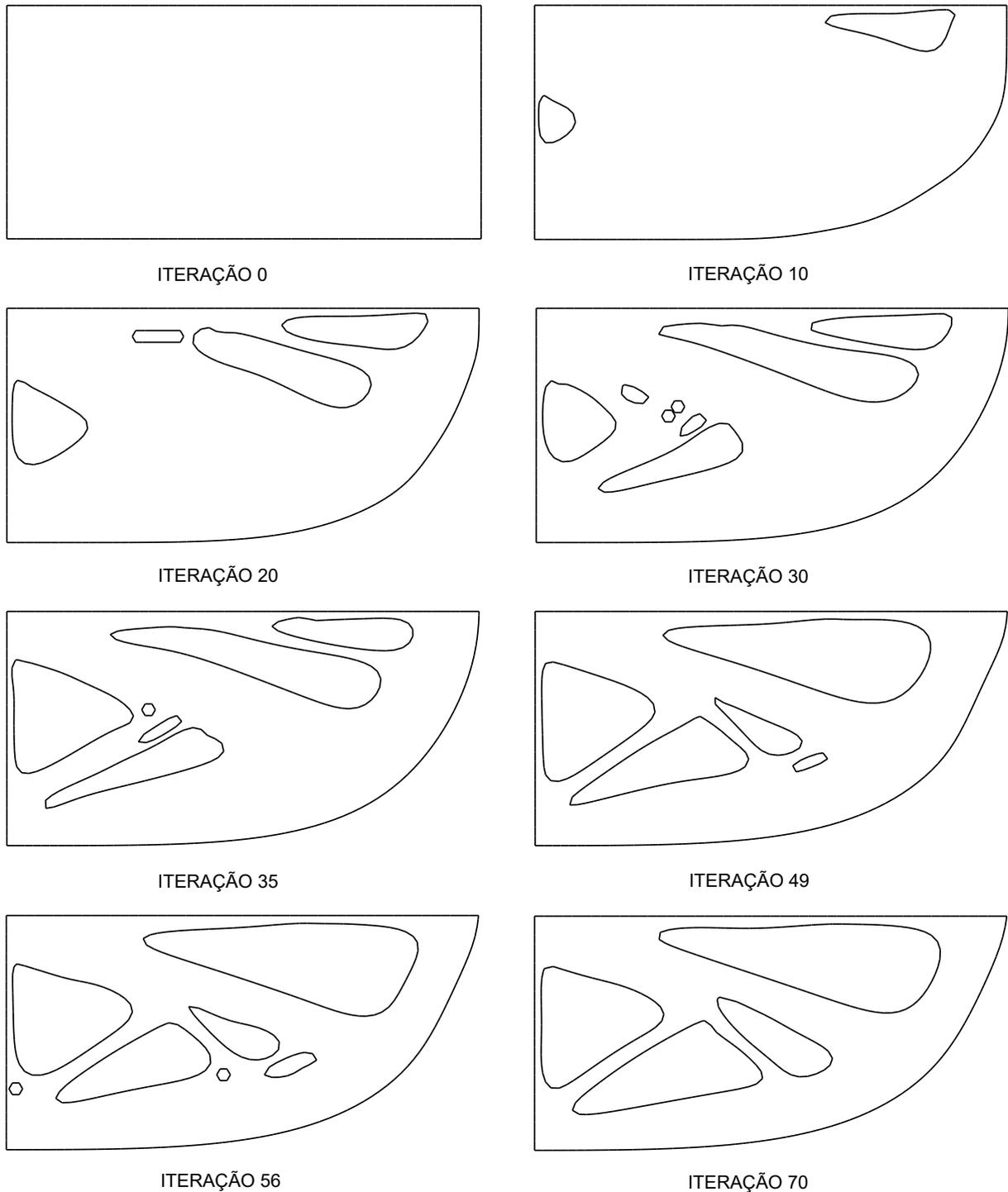


Figura 6.25 – Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 2A.

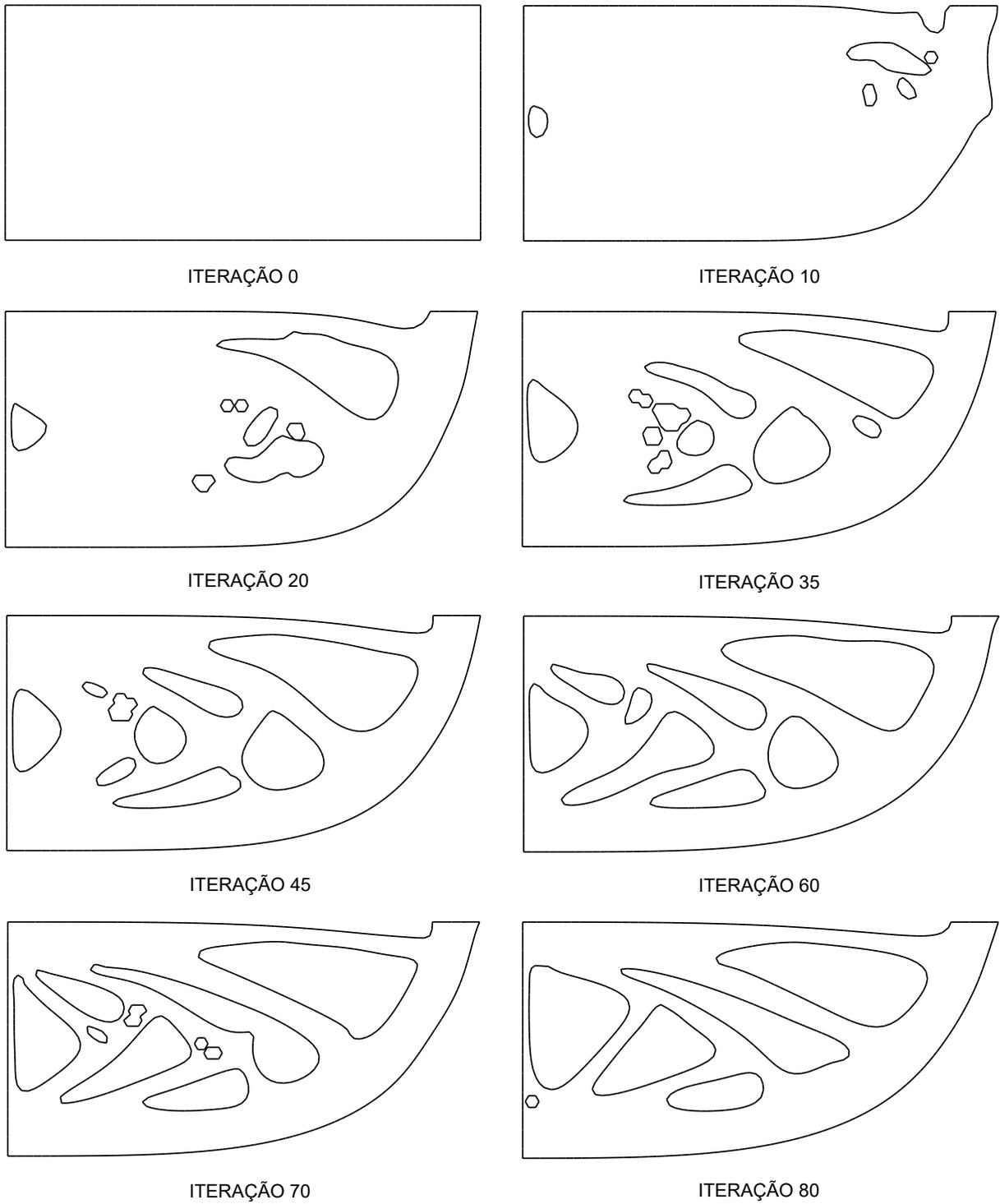


Figura 6.26 – Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 2B.

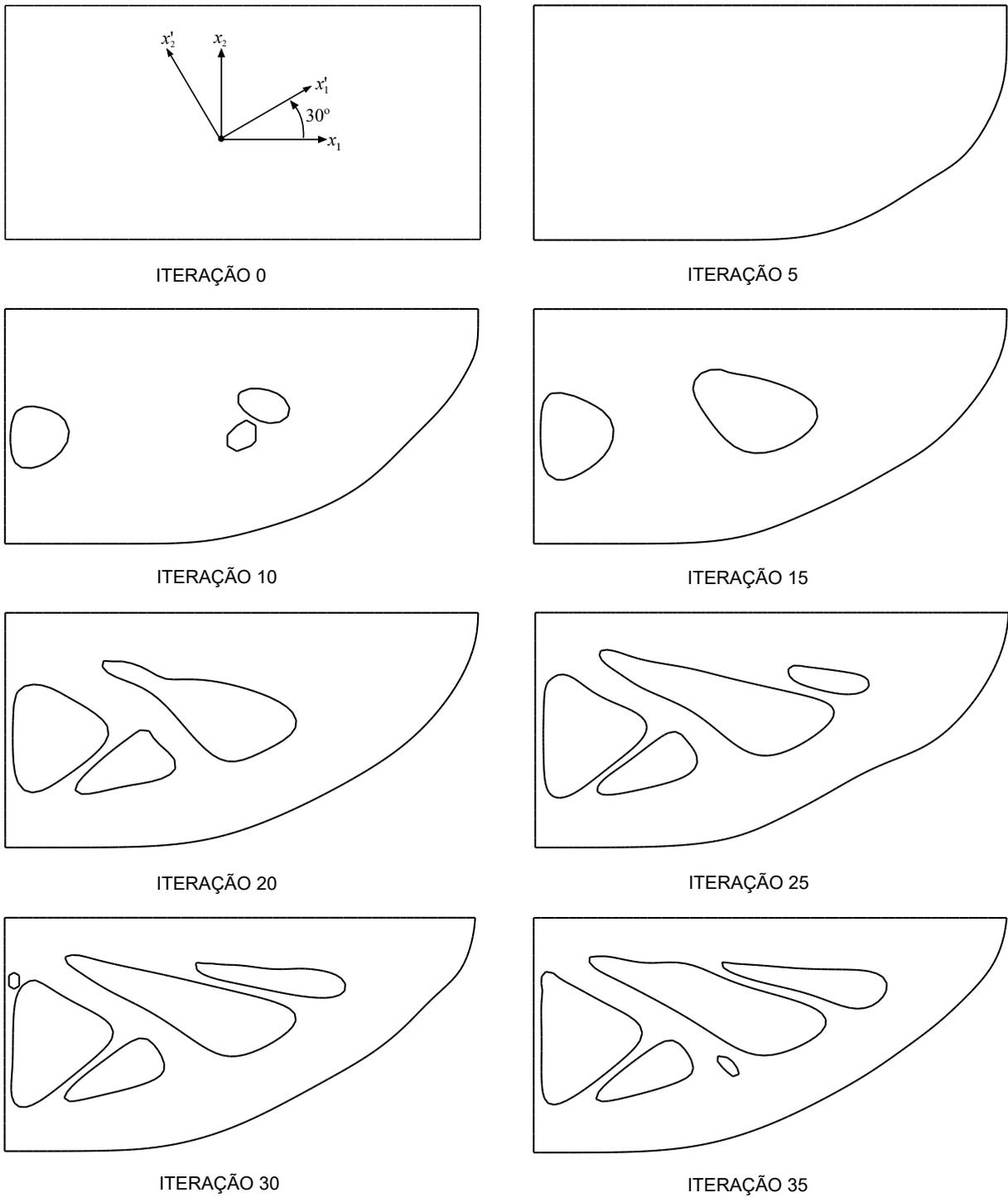


Figura 6.27 – Histórico de evolução na otimização topológica do Caso 2C.

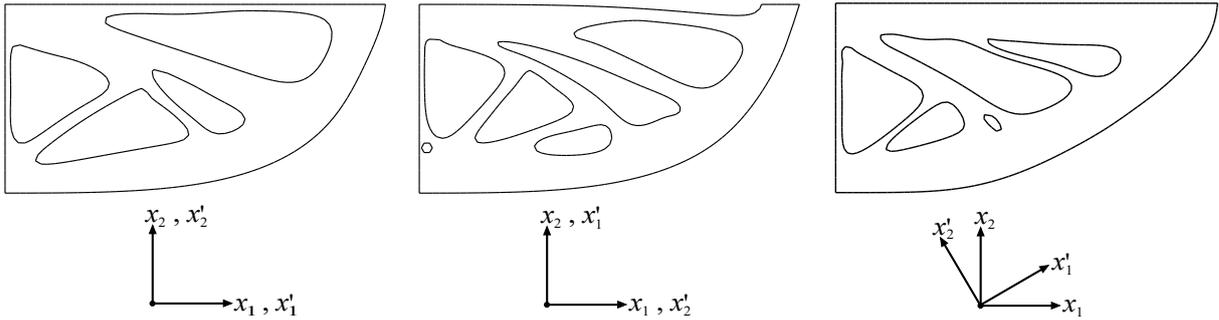


Figura 6.28 – Comparação entre os resultados de otimização para as diferentes orientações do material.

A quantidade de cantos vivos nos contornos internos, problema resultante da suavização, relatado por Lorenzi, 2017, foi diminuída através da aplicação da suavização na parcela inicial de cada contorno interno após a primeira suavização.

Pode-se melhorar o refinamento dos reforços alterando a densidade de pontos internos no domínio e variando a taxa de remoção de material, conforme demonstrado por Marczak, 2008 na Figura 6.23 (b) e (c). Percebe-se a diferença na topologia final da estrutura alterando o tamanho dos furos criados. Porém, diminuir a taxa de remoção de material e aumentar o número interno pode aumentar consideravelmente o custo computacional do processo.

Para diminuir os erros numéricos durante o processo, um número elevado de pontos de gauss foi utilizado. Apesar do custo computacional maior, percebeu-se que a utilização de menos pontos de integração gerava resultados incorretos para tensões no domínio a medida que a irregularidade do contorno aumentava e pontos do domínio ficavam muito próximos ao contorno. Pode-se modificar a performance do código variando o número de pontos de integração de acordo com a distância entre o ponto fonte e o ponto de colocação, deixando um número maior de pontos de integração apenas para os pontos mais próximos ao contorno ou singularidades. Porém esse estudo não é realizado e a modificação não é realizada nesse trabalho, ficando como sugestão para implementação futura.

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou a implementação da solução fundamental anisotrópica de deslocamentos e forças de superfície, em um programa de elementos de contorno, e a implementação da derivada topológica anisotrópica em uma rotina de otimização topológica.

Para cumprir os objetivos do trabalho, foram apresentados conceitos básicos da mecânica dos sólidos, do MEC, da solução fundamental anisotrópica. A implementação da solução fundamental anisotrópica exigiu o entendimento da discretização numérica do MEC, e os casos avaliados comprovaram a correta implementação no programa de elementos de contorno.

Os resultados obtidos na otimização demonstram grande potencial de aplicação e desenvolvimento em processos de otimização topológica de estruturas anisotrópicas pelo método dos elementos de contorno e derivada topológica. A utilização da derivada topológica para problemas de elasticidade linear ainda é recente e os resultados obtidos ajudam a difundir essa ferramenta.

A estratégia de retirada de material, proposta por Marczak, 2007, demonstrou-se eficiente na geração de topologias ótimas e foi capaz, inclusive, de manter a simetria em problemas originalmente simétricos, sem imposições ou restrições forçadas. Os resultados gerados são semelhantes aos da literatura e podem ser comparados aos modelos isotrópicos.

A utilização da rotina de suavização durante o processo de otimização, técnica proposta por Anflor e Marczak, 2011, apresentou estabilidade e facilidade de implementação, ajudando a diminuir o custo computacional do processo na reconstrução da malha, além de permitir a obtenção de padrões de reforços mais refinados na estrutura.

Pode-se concluir que a combinação do MEC com a derivada topológica e a suavização de contornos é promissora no campo da otimização topológica também para materiais anisotrópicos, cumprindo o objetivo inicial do trabalho.

7.1 Sugestões para Trabalho Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se:

- Implementar uma técnica de suavização de resultados, para eliminar as discontinuidades nas tensões geradas pela utilização de elementos de contorno descontínuos;

- Aplicar o Método de Dupla Reciprocidade de Elementos de Contorno, permitindo a consideração das forças de corpo;
- Implementar a verificação da derivada topológica em pontos vizinhos durante a criação do furo, de modo a evitar a retirada de material de uma região com valores elevados de sensibilidade caso o raio do furo escolhido seja muito grande;
- Implementar a utilização de subregiões, possibilitando a otimização topológica de estruturas compostas por diferentes materiais;
- Implementar a formulação para outras classes de problemas, como problemas magnetoeletrostáticos e placas;
- Testar a estratégia de remoção de material por regiões, removendo toda a parcela do domínio cuja derivada topológica esteja abaixo de um determinado nível a cada iteração, em substituição a furos individuais, buscando acelerar o processo de otimização;
- Estender a formulação para problemas tridimensionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aliabadi, M. H. **The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures**. vol. 2. Wiley, Chichester, 2002.

Allaire, G. e Jouve, F. A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization, **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 194, p. 3269–3290, 2005.

Allaire, G., Jouve, F., e Toader, A. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, **Journal of Computational Physics**, vol. 194, p. 363–393, 2004.

Anflor, C. T. M. e Marczak, R. J. A Boundary Element Approach for Topology Design in Diffusive Problems Containing Heat Sources, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 52, p. 4604–4611, 2009.

Anflor, C. T. M. e Marczak, R. J. Topological Optimization of Anisotropic Heat Conducting Devices using Bezier-Smoothed Boundary Representation, **Computer Modeling in Engineering & Sciences (Print)**, vol. 78, p. 151–168, 2011.

Atkin, R. J. e Fox, N. **An Introduction to the Theory of Elasticity**. Longman, London, New York, 1980.

Bendsøe, M. Optimal shape design as a material distribution problem, **Structural Optimization**, vol. 1, p. 193–202, 1989.

Bendsøe, M. **Optimization of Structural Topology, Shape and Material**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1995.

Bendsøe, M. e Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 71, p. 197–224, 1988.

Bendsøe, M. e Sigmund, O. **Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications**. Springer-Verlag, New York, 2003.

Bendsøe, M. e Soares, C. A. M. **Topology Design of Structures**. Kluwer Academic Press, Dordrecht, The Netherlands, 1992.

Bonnet, M. e Delgado, G. The Topological Derivative in Anisotropic Elasticity, **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, vol. 66, p. 557–586, 2013.

Brebbia, C. A. e Dominguez, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**. WITPress/Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992.

Céa, J., Garreau, S., Guillaume, P., e Masmoudi, M. The shape and topological optimization connection, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 188, p. 713–726, 2000.

Cook, R. D. Improved two-dimensional finite element, **Journal of the Structural Division**, vol. 100, p. 1851–1863, 1974.

Cruse, T. A. e Swedlow, J. L. **Interactive Program for Analysis and Design Problems in Advanced Composites Technology**. NASA, 1971.

Dym, C. L. e Shames, I. H. **Solid Mechanics - A Variational Approach**. Springer Science+Business Media New York 2013, 2013.

Farouki, R. T. **The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective**. vol. 29. Elsevier, 2012.

Feijóo, R. A., Novotny, A. A., Padra, C., e Taroco, E. O. The Topological-Shape Sensitivity Analysis and Its Applications in Optimal Design, **Mecánica Computacional**, vol. XXI, p. 2687–2711, 2002.

Giusti, S. M., Ferrer, A., e Oliver, J. Topological sensitivity analysis in heterogeneous anisotropic elasticity problem. Theoretical and Computational Aspects., **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 311, p. 134–150, 2016.

Jones, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. Taylor Francis, Inc., 1999.

Lekhnitskii, S. G. **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**. Mir Publishers, 1981.

Lorenzi, F. L. **Implementação de um algoritmo de suavização de contornos em otimização topológica pelo Método dos Elementos de Contorno**. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica), 2017.

Mackerle, J. Topology and shape optimization of structures using FEM and BEM: A bibliography (1999-2001), **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 39, p. 243–253, 2003.

Marczak, R. J. Topology Optimization and Boundary Elements - A Preliminary Implementation for Linear Heat Transfer, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 31, p. 793–802, 2007.

Marczak, R. J. Optimization of Elastic Structures using Boundary Elements and a Topological-Shape Sensitivity Formulation, **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 5, p. 99–117, 2008.

Novotny, A., Feijóo, R., e Taroco, E. Derivada topológica via análise de sensibilidade à mudança de forma na otimização topológica, **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, vol. 18,4, p. 499–519, 2002.

Novotny, A. e Sokolowski, J. **Topological Derivatives in Shape Optimization. Interaction of Mechanics and Mathematics**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

Novotny, A. A. **Análise de Sensibilidade Topológica**. Tese de Doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica, 2003.

Oliveira, H. L. e Leonel, E. D. Boundary element method applied to topology optimization using the level set method and an alternative velocity regularization, **An International Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, vol. 54, p. 549–563, 2019.

Oliver, J., Ferrer, A., Cante, J. C., Giusti, S. M., e Lloberas-Valls, O. On Multi-scale Computational Design of Structural Materials Using the Topological Derivative, **Advances in Computational Plasticity, Computational Methods in Applied Sciences**, vol. 46, p. 289–309, 2018.

Reddy, J. N. **Principles of Continuum Mechanics**. Cambridge University Press, 2010.

Sethian, J. A. e Wiegmann, A. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods, **Journal of Computational Physics**, vol. 163, p. 489–528, 2000.

Silveira, O. A. A. **Implementação de técnicas de suavização de resultados para elemento de contorno descontínuos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

Sokolowski, J. e Zochowski, A. **On Topological Derivative in Shape Optimization**. Research Report RR-3170, 1997.

Telles, J. C. F. **A Self-Adaptative Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Elements Integral**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987.

Vannucci, P. **Anisotropic Elasticity**. Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2018.

Vitorio Junior, P. **Análise Level Set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.

Voigt, W. **Lehrbuch der Kristallphysik**. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1910.

Wang, M. e Qian, X. Efficient Filtering in Topology Optimization via B-Splines, **ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**, vol. 34, p. 127–134, 2014.

Wang, M. Y., Wang, X., e Guo, D. A level set method for structural topology optimization, **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 192, p. 227–246, 2003.

Wu, H. e Mu, B. On stress concentrations for isotropic/orthotropic plates and cylinders with a circular hole, **Composites Part B: Engineering**, vol. 34, p. 127–134, 2002.

APÊNDICE A – Resultados Gráficos do Caso 2A

Neste Apêndice são demonstrados os resultados gráficos das tensões e deslocamentos obtidos pelas análises pelo Método dos Elementos de Contorno e pelo Método dos Elementos Finitos da viga em balanço do Caso 2A, para testar a implementação da solução fundamental anisotrópica de deslocamentos e forças de superfície e a implementação do cálculo de tensões no domínio e no contorno.

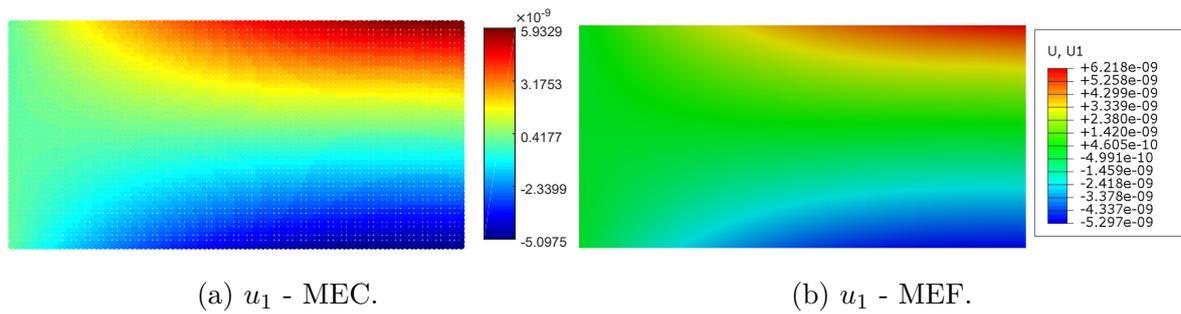


Figura A.1 – Caso 2A: deslocamentos u_1 pelo MEC e MEF.

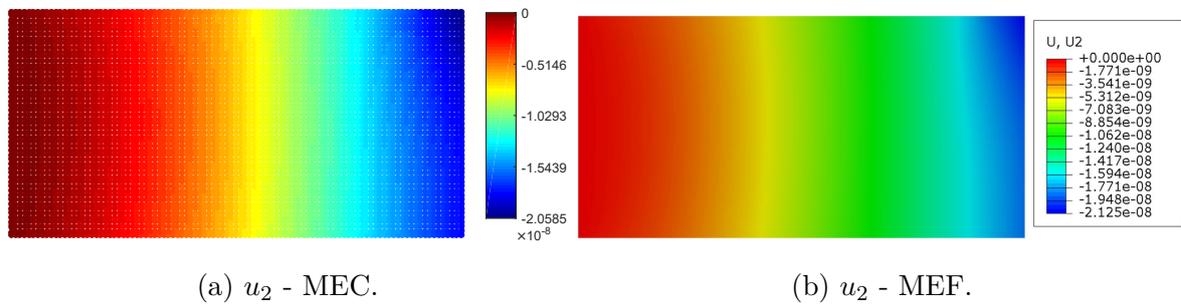


Figura A.2 – Caso 2A: deslocamentos u_2 pelo MEC e MEF.

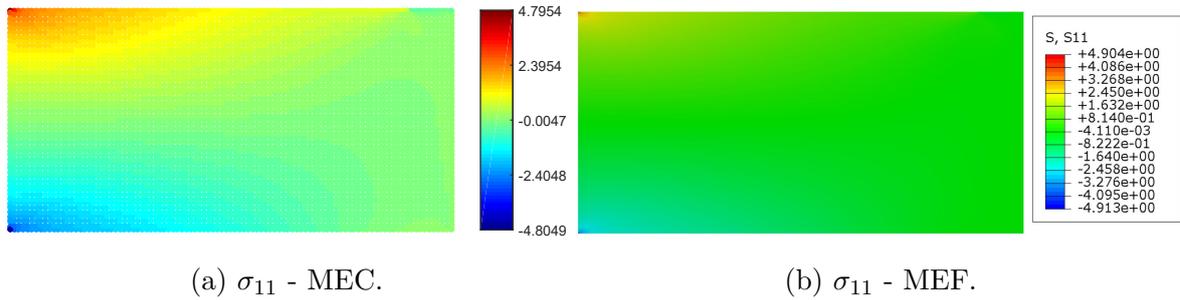


Figura A.3 – Caso 2A: tensões σ_{11} pelo MEC e MEF.

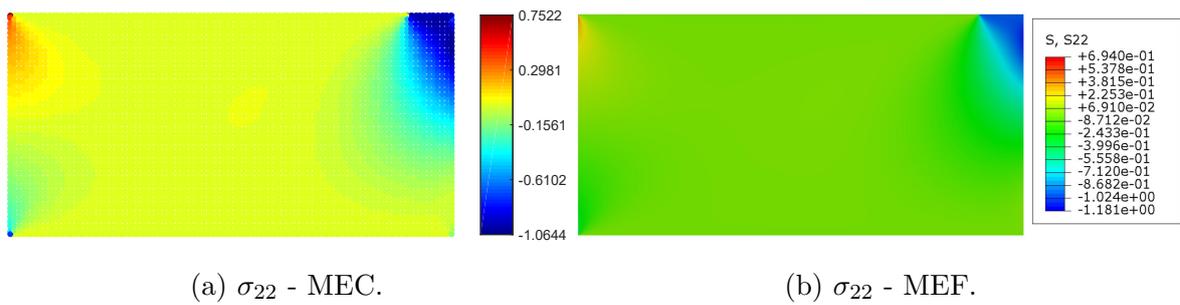


Figura A.4 – Caso 2A: tensões σ_{22} pelo MEC e MEF.

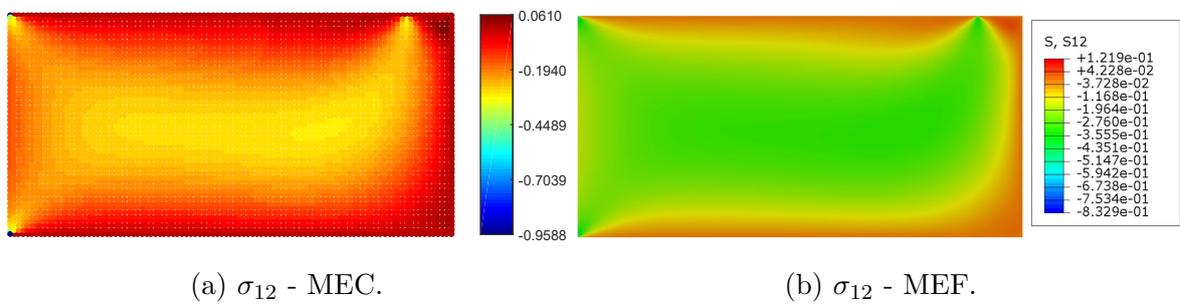


Figura A.5 – Caso 2A: tensões σ_{12} pelo MEC e MEF.

ANEXO I – Curvas de Bézier

Curvas de Bézier são curvas polinomiais amplamente utilizadas em em diversos programas computacionais que trabalham com animação ou manipulação de imagens. O primeiro trabalho publicado sobre as curvas é datado de 1962 de autoria do engenheiro francês Pierre Étienne Bézier, que foi responsável por diversas contribuições nas tecnologias de CAD (Computer-Aided Design) e CAM (Computer-Aided Manufacturing). A função de interpolação $P(t)$ da curva de Bézier é definida por $n + 1$ pontos de controle p_i como [Farouki, 2012]:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n p_i B_{i,n}(t) \quad (\text{I.1})$$

onde os coeficientes $B_{n,i}$ são polinômios de Bernstein dados por:

$$B_{i,n} = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (\text{I.2})$$

e

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (\text{I.3})$$

são coeficientes binomiais.

Chamando o eixo x_1 de x e o eixo x_2 de y , a função de interpolação pode ser expressa na forma paramétrica em termos dos valores de x e y como:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n x_i B_{i,n}(t) \quad (\text{I.4})$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^n y_i B_{i,n}(t) \quad (\text{I.5})$$

O parâmetro t varia de 0 a 1 pois as funções base do Polinômio de Bernstein formam uma partição da unidade. Assim, os polinômios de Bernstein fornecem um valor percentual de como cada ponto de controle contribui para o formato da curva suavizada [Farouki, 2012].