

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

VICTOR HENRIQUES DE OLIVEIRA

**PREVISÃO DE VOLATILIDADE A TEMPO DISCRETO: UMA
ABORDAGEM VIA REGRESSÃO QUANTÍLICA**

Porto Alegre

2019

VICTOR HENRIQUES DE OLIVEIRA

**PREVISÃO DE VOLATILIDADE A TEMPO DISCRETO: UMA
ABORDAGEM VIA REGRESSÃO QUANTÍLICA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Oliveira Horta

Porto Alegre

2019

CIP - Catalogação na Publicação

Henriques de Oliveira, Víctor
Previsão de Volatilidade a Tempo Discreto: uma
abordagem via Regressão Quantílica / Víctor Henriques
de Oliveira. -- 2019.

48 f.

Orientador: Eduardo de Oliveira Horta.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2019.

1. previsão de volatilidade. 2. quantil
condicional. 3. regressão quantílica. 4. previsão de
densidade condicional. I. de Oliveira Horta, Eduardo,
orient. II. Título.

VICTOR HENRIQUES DE OLIVEIRA

**PREVISÃO DE VOLATILIDADE A TEMPO DISCRETO: UMA
ABORDAGEM VIA REGRESSÃO QUANTÍLICA**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Eduardo de Oliveira Horta
PPGE/UFRGS

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann
PPGE/UFRGS

Prof. Dr. Marcelo Fernandes
EESP/FGV

Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini
FEA-RP/USP

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço especialmente a meus pais, Miguel e Silvana, por todo apoio durante todos esses anos em que estive em Porto Alegre. Por vezes, vocês disseram que têm orgulho do seu filho, mas na verdade sou eu quem tenho muito orgulho de ser filho de vocês. Sem meus pais, provavelmente eu não teria chegado tão longe.

Agradeço também aos meus amigos Ricardo Barbosa, Ricardo Tavares, Gabriel Sallum, Miguel Caceiro, Leonardo Carneiro, Fábio Raasche, Felipe Bellé e Iuna Scheffler. Cada um de vocês contribuiu à sua maneira para que eu pudesse seguir em frente nessa jornada.

Agradeço também ao meu orientador, Eduardo de Oliveira Horta, pelas sugestões, conselhos e apontamentos no desenvolvimento desse trabalho, aos demais professores do programa de Pós-Graduação em Economia Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul pelos ensinamentos, e a CAPES por me proporcionar os fundos necessários para me tornar um mestre.

RESUMO

Este trabalho propõe o *Heterogeneous Quantile Autoregressive Distributed Lag Realized Volatility, with Jumps and Leverage Effect* (HQADL-RV-JL). A especificação incorpora os principais fatos estilizados da volatilidade, inserindo-se na classe de modelos HAR, sob a estrutura da Regressão Quantílica. Esta abordagem permite a flexibilidade dos coeficientes autoregressivos em cada quantil, onde cada regressor pode ter um impacto sobre a escala, locação e forma da distribuição condicional da resposta. O modelo foi estimado em uma grade equi-espçada percorrendo 91 níveis quantílicos, entre 0,05 e 0,95, utilizando a série de retornos de alta frequência do índice S&P500. Os resultados mostram que as estimativas do componente contínuo da volatilidade são estatisticamente significantes em todos os níveis quantílicos, para as frequências diárias, semanais e mensais. Por sua vez, os coeficientes diário e semanal, associados ao componente de saltos e alavancagem, foram significantes em quase todos os níveis quantílicos, evidenciando não apenas a adequação de ambos os efeitos assimétricos quanto a seu ajuste à especificação semiparamétrica, mas também a sua importância para a formação da volatilidade futura dos retornos. Em termos de performance, os resultados sugerem que a previsão da mediana do modelo proposto é tão boa quanto a previsão da esperança condicional da especificação proposta por Corsi e Renò (2012) para o médio e longo prazo. Em última análise, também foi realizada a previsão da densidade da volatilidade realizada para os últimos quatro dias da amostra. Os aspectos distribucionais das densidades previstas exibem assimetrias em determinado grau, assumindo a forma de uma distribuição bimodal.

Palavras-chave: previsão de volatilidade; quantil condicional; regressão quantílica; previsão da densidade condicional.

ABSTRACT

I propose the *Heterogeneous Quantile Autoregressive Distributed Lag Realized Volatility, with Jumps and Leverage Effect* (HQADL-RV-JL). The specification incorporates the main stylized volatility facts, falling into HAR model class under the Quantile Regression framework. This approach allows for the flexibility of autoregressive coefficients across the quantiles, where each regressor may have an impact on scale, location and shape of conditional response distribution. The model was estimated on an equally spaced grid spanning 91 quantile levels between 0.05 and 0.95, using S&P500 index high-frequency returns. The results shows that the estimates of continuous volatility components are highly significant across the quantile levels, considering the daily, weekly and monthly frequencies. Furthermore, the daily and weekly coefficients for the jumps and leverage components were significant for almost all quantile levels, highlighting not only the adequacy of both asymmetric effects concerning their adjustments to this semiparametric specification, but also its importance for future volatility of returns. Regarding its performance, the results suggests that median forecast of the propose model is as good as the conditional mean prediction of Corsi e Renò (2012) specification in the medium and long term. Lastly, it was also performed the volatility density forecast for the last four days of the sample. The distributional aspects of the predicted densities exhibit asymmetries to a certain degree, taking the form of a bimodal distribution.

Keywords: volatility forecast; conditional quantile; quantile regression; conditional density forecast.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Dispersão dos regressores em relação à resposta	29
Figura 2 – Coeficientes estimados: Componente Contínuo	30
Figura 3 – Coeficientes estimados: Saltos	31
Figura 4 – Coeficientes estimados: Efeito Alavancagem	32
Figura 5 – Comparação entre coeficientes estimados do modelo pela RQ e RQS . .	34
Figura 6 – Previsão da Densidade Condicional da Volatilidade Realizada	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparativo de previsões da volatilidade realizada de modelos selecionados	35
Tabela 2 – Performance relativa das previsões para Volatilidade Realizada	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
3	METODOLOGIA	22
3.1	MODELO TEÓRICO	22
3.2	MODELO ECONOMETRICO	25
4	RESULTADOS EMPÍRICOS	28
4.1	Fonte de dados	28
4.2	Estimação e resultados	28
4.2.1	Previsão fora da amostra	34
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
	REFERÊNCIAS	41
	Apêndice A MODELO HQADL-CJL	45
	Anexo A QUANTIS CONDICIONAIS ESTIMADOS PELO MODELO HQADL-CJL	47

1 INTRODUÇÃO

A volatilidade tem um papel crucial na determinação das decisões de investimento dos participantes do mercado. Definida por Ziegelmann (2002) como qualquer medida de variabilidade¹, o componente de volatilidade do preço de um instrumento financeiro pode ser avaliado empiricamente pelo quadrado dos retornos, onde estes são definidos por $r_t = X_t - X_{t-1}$, e X_t corresponde ao logaritmo do preço no instante t . Outras modelagens para esta variável latente se consagraram na literatura de finanças econométricas no fim do século passado, como foi o caso dos modelos da família ARCH, originalmente propostos por Engle (1982) e Bollerslev (1986), bem como modelos de volatilidade estocástica (SV). Ao considerar a dinâmica da volatilidade, tais abordagens permitem que fatores de mercado – tais como a incerteza e o risco associados ao retorno de um ativo – sejam mensurados, levando em consideração as mudanças de comportamento ao longo do tempo. Ademais, a modelagem da volatilidade dos retornos exibe um certo grau de previsibilidade, em contraposição à taxa de retorno, a qual é essencialmente imprevisível, embora estudos mais recentes, como apresentado por Bollerslev, Xu e Zhou (2015), apontem para o contrário. Em síntese, esta medida se torna fundamental em aplicações financeiras, tais como a avaliação e gerenciamento de risco, alocação de portfólio eficiente e precificação de ativos.

Com o surgimento do mercado eletrônico e provedores de dados, informações sobre a formação dos preços e do volume de transações de diversos instrumentos financeiros começaram a ser acompanhados em tempo real, provocando alterações no modo como os agentes econômicos operam no mercado financeiro. A disponibilidade deste novo conjunto de informações *tick-by-tick* têm originado uma série de questões sobre a natureza dos retornos dentro da literatura de finanças empíricas, o que tem levado a vários avanços na modelagem de séries financeiras (DACOROGNA et al., 2001).

Nesse contexto, a volatilidade realizada (RV_t) surge na literatura em razão da crescente disponibilidade de dados intradiários (ANDERSEN et al., 1999, 1999; ANDERSEN et al., 2000). Andersen et al. (2001) derivam o estimador RV_t através da variação quadrática – processo que converge assintoticamente para a variância integrada, sendo esta, em particular, a medida de interesse para a volatilidade – sob o argumento de Merton (1980), o qual a volatilidade pode ser estimada através da soma do quadrado dos retornos

¹ Segundo o autor, volatilidade refere-se a qualquer medida de dispersão, tais como a variância, desvio-padrão, mediana do quadrado, entre outras medidas.

realizados em um intervalo fixo, desde que os dados sejam amostrados em uma frequência suficientemente alta.

Por sua vez, Guillaume et al. (1997), Andersen e Bollerslev (1998) e Cont (2001) examinaram as propriedades estatísticas das séries de retornos de alta frequência para mercados com alta liquidez. Neste processo de avaliação, apenas suposições qualitativas são feitas sobre as propriedades do processo gerador de dados. Portanto, os principais fatos estilizados que resumem o comportamento do processo de volatilidade para retornos financeiros são a presença de respostas não-lineares, agrupamento de volatilidade e dependência de ordem elevada.

Em geral, respostas não-lineares podem ser atribuídas ao impacto dos saltos e do efeito alavancagem sobre a formação do nível de volatilidade futura. Saltos são definidos como variações bruscas nos preços de um ativo, sendo praticamente imprevisíveis e de baixa ocorrência, enquanto o efeito alavancagem expressa a correlação negativa entre volatilidade e as defasagens do retorno negativo. Quanto ao agrupamento da volatilidade, o fenômeno representa a tendência de aglomeração das variações de mesma magnitude absoluta dos preços de um instrumento financeiro, movimento que resulta também na presença de autocorrelação entre o quadrado de seus retornos (ZIEGELMANN, 2002).

No caso da persistência, observa-se que a volatilidade dos retornos para dados de alta frequência exhibe um lento decaimento na sua função de autocorrelação. Isto significa que os coeficientes da autocorrelação apresentam significância estatística, mesmo para defasagens de ordem muito elevada. Baseado nas observações de Granger e Joyeux (1980), Andersen et al. (2001) argumentam que a dinâmica de dependência da volatilidade é um processo estacionário em covariância, fracionalmente integrado. Desta forma, a dependência autoregressiva entre as defasagens da volatilidade do retorno é frequentemente associada a um processo gerador de dados de memória longa.

De maneira alternativa, Müller et al. (1993) e Müller et al. (1997) interpretam a persistência na volatilidade como a ação de diversos participantes do mercado em termos de volume e frequência de transações nos diferentes horizontes temporais, originando componentes heterogêneos de curto, médio e longo prazo. Do ponto de vista prático, operadores de curto prazo – em geral, especuladores, *daytraders* e formadores de mercado – estão interessados em oportunidades de investimento intradiárias e, portanto, reavaliam regularmente suas posições durante um dia, o que implica em maior frequência de negociações. Por outro lado, operadores de longo prazo – como fundos de multimercado e

pensão – tendem a manter suas posições abertas por um intervalo de tempo mais longo e, por isso, transacionam com uma frequência menor. Portanto, a interação dinâmica dos componentes heterogêneos reproduzem o comportamento do processo gerador de dados de longa dependência, observado nas séries financeiras de alta frequência, a qual os autores atribuem à hipótese dos mercados heterogêneos. Tal hipótese advoga que reações uniformes sobre as decisões de investimento por parte dos participantes do mercado em diferentes escalas não são esperadas no mercado financeiro, uma vez que a percepção do risco, a interpretação das informações e as restrições institucionais são diferentes para cada indivíduo.

Corsi (2009) argumenta que essa característica de persistência em séries financeiras, frequentemente atribuída a um processo gerador de dados de memória longa, pode ser reproduzida pela superposição de frequências de memória curta, como demonstrado no trabalho de LeBaron et al. (2001). Inspirado pela hipótese dos mercados heterogêneos, o autor propõe a modelagem da volatilidade realizada através de uma estrutura Heterogênea Autoregressiva (HAR). Diferentemente dos modelos tradicionais, baseados na combinação de volatilidade realizada e operadores de integração fracional, o HAR é um modelo parcimonioso, de fácil implementação e que pode ser estendido para versões que levam em consideração os efeitos assimétricos da volatilidade. Ademais, o desempenho preditivo do modelo HAR em implementações tem se mostrado satisfatório (ANDERSEN; BOLLERS-LEV; DIEBOLD, 2007; MA et al., 2014; AUDRINO; HU, 2016) e já se estabelece como *benchmark* na literatura sobre previsão de volatilidade (CORSI; RENÒ, 2012; DUONG; SWANSON, 2015; XU; WANG, 2017).

Portanto, este trabalho propõe uma nova especificação para a previsão da volatilidade, incorporando seus principais fatos estilizados no contexto da classe de modelos HAR, sob uma abordagem baseada na Autoregressão Quantílica com Defasagens Distribuídas (QADL), conforme apresentado por Galvao, Montes-Rojas e Park (2013). A grande vantagem desta abordagem é a flexibilidade dos coeficientes autoregressivos em cada quantil, onde choques sobre os regressores podem afetar a escala, localização e forma da distribuição condicional da resposta, descrevendo nuances intrínsecas ao processo de formação da volatilidade. Žikeš e Baruník (2014) propõem uma estrutura semelhante àquela aqui considerada, baseando-se na defasagem da volatilidade realizada que resulta na proposição do modelo HARQ e outras duas extensões: uma delas considera a decomposição do processo de variação quadrática, na qual a variância integrada (IV_t) é obtida pelo esti-

mador proposto por Andersen, Dobrev e Schaumburg (2012), e os saltos (J_t) pela subtração entre RV_t e IV_t , enquanto a outra incorpora volatilidade implícita e semivariâncias, onde esta última medida é obtida pelo estimador de Barndorff-Nielsen, Kinnebrock e Shephard (2010). Embora considerem medidas de volatilidade análogas a um desvio padrão sob a estrutura da Regressão Quantílica, os autores avaliam apenas a mediana e os quantis $\{0, 75; 0, 90; 0, 95\}$, desperdiçando um aspecto crucial dessa abordagem econométrica, a saber, o fato de que, pela função quantílica condicional, é possível recuperar a distribuição condicional da resposta.

Complementarmente, o presente trabalho pretende estimar a distribuição de probabilidade do logaritmo da volatilidade realizada em uma grade equi-espaçada, percorrendo 91 *quantile levels* que compreendem o intervalo $[0, 05; 0, 95]_{\text{grid}}$, onde as covariáveis do problema são as mesmas da especificação LHAR-CJ, de Corsi e Renò (2012). Ao contrário de Žikeš e Baruník (2014), os estimadores da variância integrada e do teste de detecção de saltos serão os mesmos propostos por Corsi, Pirino e Reno (2010). Quanto às previsões do modelo proposto, a acurácia preditiva para a mediana será avaliada juntamente com os principais *benchmarks* utilizados na literatura sobre previsão de volatilidade para dados de alta frequência. Ademais, o presente trabalho propõe utilizar o estimador de Regressão Quantílica Suavizada (RQS) de Fernandes, Guerre e Horta (2019), provendo previsões um passo à frente da função densidade de probabilidade da volatilidade condicional.

De conhecimento do autor, um modelo de Autorregressão Quantílica que considera a log volatilidade realizada, incorpora o efeito alavancagem e explora a previsão da densidade da volatilidade um passo a frente é novo na literatura. Conforme apresentam Barndorff-Nielsen e Shephard (2005) e Gonçalves e Meddahi (2009), a transformação em logaritmo impõe propriedades desejáveis para a medida em amostras finitas, se aproximando de uma distribuição gaussiana. Ademais, este trabalho busca estabelecer uma discussão mais rica para acadêmicos e participantes do mercado ao explorar todos os aspectos distribucionais da volatilidade, não apenas interpretando economicamente os coeficientes variando entre os quantis, mas também pela proposição de uma nova alternativa para avaliar o comportamento futuro da distribuição para uma série de retornos de um instrumento financeiro em $t + 1$.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Frequentemente, modelos paramétricos consagrados de volatilidade estocástica falham em captar os principais fatos estilizados de séries temporais financeiras.

Andersen et al. (2001) apontam as limitações dessas abordagens paramétricas para modelagem do componente de volatilidade. Para contornar esta dificuldade, os autores oferecem uma nova abordagem *model free*, baseada na teoria da variação quadrática para construção de um estimador não-paramétrico *ex-post*, denominado volatilidade realizada que, sob certas condições, converge para a variância quadrática. Ao utilizar retornos de alta frequência do mercado de câmbio, os autores observam que, no aspecto distribucional, a volatilidade realizada diária é leptocúrtica, exhibe assimetria à direita, apresenta clusterização e dependência de ordem elevada entre as defasagens. Ademais, seus resultados indicam que a volatilidade é um processo estacionário em covariância. Nesse sentido, sugerem que a combinação da volatilidade realizada e operadores de integração fracional pode produzir um modelo satisfatório para previsão dos níveis de volatilidade futura.

Barndorff-Nielsen e Shephard (2002) oferecem a conexão teórica entre a volatilidade realizada e os modelos de volatilidade estocástica (SV) por meio da estimação dos incrementos da variação quadrática utilizando os retornos de alta frequência. Sob certas condições, os autores apresentam um teorema central do limite, implicando, em particular, que a volatilidade realizada é um estimador consistente para variância integrada. Assintoticamente, os erros de medida não são correlacionados e seguem uma distribuição normal padronizada. Dessa maneira, o processo de variação quadrática permite a previsão dos níveis de volatilidade futura.

Zhang, Mykland e Ait-Sahalia (2005) demonstram que discretizações em dados de alta frequência provocam ruído microestrutural, resultando em erros de medida e, conseqüentemente, em um estimador enviesado. Nesse sentido, a volatilidade realizada deixa de ser uma escolha apropriada para estimar a variação quadrática. Para construção de um estimador robusto, os autores discutem cinco abordagens: ignorar completamente o ruído; construção da menor frequência por amostragem esparsa; amostragem esparsa com frequência ótima; construção por subamostra tomando a média e correção de viés, sendo esta uma abordagem que adota uma avaliação da variação quadrática em duas frequências distintas por um método *multigrid*. O estimador resultante, conhecido por

two-scaled realized volatility (TSRV), é consistente para estimação da variação quadrática, sendo robusto na presença de saltos e mitigando o problema do ruído microestrutural.

McAleer e Medeiros (2008) apresentam uma rica revisão da literatura sobre a volatilidade realizada, ao discutir as principais abordagens para modelagem e avaliação de estimadores. Os autores examinam as causas do viés em estimativas da volatilidade realizada, ao analisar as diferentes hipóteses sobre a formação dos ruídos microestruturais, onde algumas delas implicam na inconsistência do estimador. Para o caso univariado, são examinados diferentes métodos para mitigar o efeito do ruído, como a seleção da frequência ótima baseada na minimização do erro quadrático para amostragem esparsa (ANDERSEN et al., 2001; ANDERSEN et al., 2003), correção de viés pelo método de subamostra dado pelo estimador TSRV (ZHANG; MYKLAND; AÏT-SAHALIA, 2005), método baseado em *kernel* (HANSEN; LUNDE, 2006), entre outros. Nesse sentido, o interesse dos autores reside na ideia de fornecer aos praticantes do mercado diferentes possibilidades de lidar com o problema de estimação para volatilidade integrada sob o efeito de ruído microestrutural.

Por sua vez, Barndorff-Nielsen e Shephard (2004) propuseram um estimador não paramétrico, consistente e robusto na presença de saltos para a variância integrada, denominada *realized bipower variation* (BPV). A ideia central dos autores fundamenta-se no fato de que a variação quadrática dos saltos pode ser mensurada a partir da subtração entre a volatilidade realizada e o BPV, sob a hipótese de que os saltos são raros e imprevisíveis. Ainda, Barndorff-Nielsen e Shephard (2006b) complementam seu trabalho anterior ao desenvolver a teoria assintótica para distribuição dos estimadores *realized power variation*, em especial o BPV. Por intermédio da teoria, os autores propõem um teste para detecção de saltos, dado pela razão entre BPV e variância realizada. Sob a hipótese de que a razão seja normalmente distribuída na ausência de saltos, o estimador de volatilidade realizada coincide com o BPV. Se a hipótese nula é rejeitada, então define-se BPV como estimador do componente contínuo, enquanto as estimativas para o salto são obtidas da mesma forma que em Barndorff-Nielsen e Shephard (2004). Cabe ressaltar que os autores sugerem a modelagem dos componentes contínuos e discretos de forma separada, pois estes aumentam substancialmente o poder preditivo do modelo.

Ciente das deficiências apresentadas por modelos de integração fracional para estimação e previsão da volatilidade realizada, Corsi (2009) argumenta que a dependência de ordem elevada da volatilidade dos retornos pode ser modelada por meio do uso

da superposição de processos de memória curta, dado pela combinação de processos autoregressivos para diferentes escalas de tempo. Ainda, evidências empíricas apontam que a volatilidade de longo prazo tem forte influência sobre a volatilidade de curto prazo (MÜLLER et al., 1997). Nesse sentido, o autor propõe um modelo aditivo em cascata da volatilidade realizada para diferentes horizontes temporais, resultando em um modelo heterogêneo autoregressivo para volatilidade realizada, denominado *Heterogeneous Autoregressive* (HAR). A título de comparação, o autor analisa a previsão da volatilidade do índice de *equity* S&P500, considerando processos de memória curta, como também o modelo de integração fracional (AFIRMA), para os horizontes diário, semanal e mensal. Os resultados para dentro e fora da amostra evidenciam que ambos os modelos de memória longa, AFIRMA e HAR, se ajustam melhor aos dados em relação aos processos de memória curta, como também têm desempenho superior, no que tange ao poder de previsão. Embora os resultados demonstrem que os modelos HAR e AFIRMA sejam ambos capazes de captar os principais fatos estilizados do volatilidade dos retornos e, portanto, adequados para modelagem da sua dinâmica temporal, o autor ressalta que é mais conveniente lidar com o HAR, por se tratar de um modelo parcimonioso, o qual pode ser estimado pelo método de Mínimos Quadrados Ordinários (OLS), além das interpretações econômicas que seus coeficientes oferecem para caracterizar o processo de volatilidade.

Em vista da potencial relevância da inclusão de saltos para previsão dos níveis de volatilidade futura, Andersen, Bollerslev e Diebold (2007) propuseram uma nova abordagem para estimação da volatilidade dos retornos, ao combinar a especificação do modelo HAR com a metodologia desenvolvida por Barndorff-Nielsen e Shephard (2004), resultando no modelo HAR-CJ. Embora os resultados demonstrem que os saltos sejam pouco persistentes ao longo do tempo, a inclusão do componente discreto no modelo produz uma melhora considerável na precisão das estimativas para a volatilidade futura.

Duong e Swanson (2015), por sua vez, investigam a importância dos saltos para a previsão de volatilidade através de uma série de experimentos para o índice S&P500 e bem como outras ações que compõem o *Dow* 30. Para tanto, estabelecem como *benchmark* a versão HAR-RV-C, e adotam especificações concorrentes que modelam os saltos positivos (HAR-RV-C-UJ), negativos (HAR-RV-C-DJ), ambos (HAR-RV-C-UDJ), saltos assimétricos (HAR-RV-C-APJ) e saltos amplos (HAR-RV-C-LJ), este último mensurado por uma função truncada *alá* Duong e Swanson (2011). Reitera-se que todos esses modelos consideraram a decomposição da volatilidade realizada em componente contínuo e discreto. Os resultados

das previsões para dentro e fora da amostra apontam que a incorporação do componente de saltos melhoram a acurácia preditiva dos modelos em relação ao *benchmark*, evidenciando a sua importância na previsão de volatilidade para dados em alta frequência.

Em geral, a literatura tem considerado o uso do BPV, para estimação do componente contínuo da volatilidade integrada. Contudo, apesar de possuir propriedades assintóticas desejáveis, o BPV_t pode apresentar viés em amostras finitas. Nesse sentido, Corsi, Pirino e Reno (2010) definem o *Threshold Bipower Variation* (TBPV), um estimador baseado em uma função truncada¹, que corrige o viés do BPV em amostras finitas, tornando a estimação da volatilidade integrada mais robusta. Para detecção de saltos, os autores propõem a estatística Ctz , estruturada da mesma forma que o teste de Barndorff-Nielsen e Shephard (2006a).

Para avaliar a confiabilidade da teoria proposta através dos estimadores *realized power variation*, no que se refere à aproximação da distribuição de volatilidade realizada de uma normal, Barndorff-Nielsen e Shephard (2005) demonstram, via simulação de Monte Carlo, que a performance da volatilidade realizada em amostras finitas é superior quando feita sua transformação em logaritmo, em detrimento de sua versão em nível. Segundo os autores, a log distribuição da volatilidade realizada é menos assimétrica e, portanto, tem uma melhor aproximação da distribuição assintótica normal. Nessa mesma linha, Gonçalves e Meddahi (2009) analisam, via expansão de Edgeworth, a volatilidade realizada em nível e sua versão transformada em log. Da mesma forma, seus resultados sugerem que a log volatilidade realizada possui propriedades superiores em amostras finitas, corroborando o estudo anterior.

Em virtude da relevância destes resultados em termos de performance, Corsi e Renò (2012) introduzem em sua análise um modelo na classe HAR que considera o logaritmo da volatilidade dos retornos como a quantidade de interesse a ser modelada. Além disso, os autores observam o caráter persistente do efeito alavancagem, similar ao comportamento da formação do processo de volatilidade, evidenciado pela correlação negativa entre a volatilidade e as defasagens dos retornos negativos do índice S&P500. Dada a importância do efeito alavancagem e da modelagem individual dos saltos e variância integrada, os autores propõem uma extensão da especificação HAR, conhecido por *Leverage Heterogeneous Auto-regressive with Continuous Volatility and Jumps* (LHAR-CJ), ao acrescentar o saltos nos retornos e as defasagens do efeito alavancagem para diferentes frequências. Para mitigar

¹ Para mais detalhes, recomenda-se a leitura do trabalho de Mancini (2009).

possíveis problemas de ruído microestrutural, os autores utilizam o log do estimador TSRV para volatilidade realizada, proposto por Zhang, Mykland e Aït-Sahalia (2005), e para detecção de saltos adotam a metodologia de Corsi, Pirino e Reno (2010). Os resultados *in-sample* sugerem a boa aderência aos dados, onde as defasagens dos saltos e do efeito alavancagem são estatisticamente significantes no processo de formação da volatilidade futura. Quanto aos resultados *out-of-sample*, observa-se que a introdução das defasagens do efeito alavancagem no modelo analítico proporciona uma melhora significativa no poder de previsão da volatilidade futura. Pela avaliação do R^2 ajustado e da raiz do erro quadrático médio, o LHAR-CJ apresenta performance superior em comparação com o HAR-CJ, de Andersen, Bollerslev e Diebold (2007), e a versão simples HAR proposta por Corsi (2009). Portanto, o LHAR-CJ se mostra uma especificação simples e eficiente para previsão dos níveis futuros de volatilidade.

O estudo de Wang, Wu e Xu (2015) se concentra na investigação da formação dos níveis de volatilidade para o mercado de ações chinês, baseado na influência do volume de transações e respostas não-lineares, tais como o efeito alavancagem e os retornos *lunch-break* e *overnight*. Para mitigar os efeitos do ruído microestrutural, analisam a volatilidade realizada pelo método de *kernel* realizado baseado na função ponderada de Parzen (PAV). No que tange à análise dentro da amostra, verifica-se que efeito alavancagem e os retornos *lunch-break* *overnight* são estatisticamente significantes. Ademais, o sinal negativo dos coeficientes das respostas não-lineares evidenciam a relação negativa entre a volatilidade e o volume de transações. Estes resultados são interpretados como a captação do impacto adicional para os retornos negativos. Quanto à análise *out-of-sample*, os autores estendem a especificação do modelo HAR, de Corsi (2009), incluindo estas variáveis para a previsão dos níveis de volatilidade futura. De acordo com os resultados do teste Diebold-Mariano e da avaliação do R^2 , o modelo proposto tem um desempenho superior ao HAR, o que indica que respostas não-lineares têm um forte impacto na volatilidade futura, além de aumentarem o poder de previsão do modelo.

De acordo com Ma et al. (2014), a literatura sobre volatilidade realizada apenas trata a performance dos diferentes modelos para previsão da volatilidade sem realizar a avaliação rigorosa sobre a qualidade do poder de predição. Aspirando preencher este *gap*, os autores propõem a análise de previsão sob a ótica dos testes baseados em função de perdas, em particular através do prodimento denominado por *Model Confidence Set* (HANSEN; LUNDE; NASON, 2011). Considerando retornos intradiários do índice de mercado *Shanghai*

Stock Exchange Composite (SSEC) amostrados esparsamente, analisaram o desempenho dos modelos ARMA e AFIRMA em comparação aos modelos heterogêneos, HAR-RV e HAR-log RV, todos sob uma abordagem de janela rolante. Os resultados apontam que, para seis medidas de previsão, o HAR-RV constitui o melhor desempenho preditivo entre os modelos analisados. Corroborando este resultado, o HAR-RV é o único modelo selecionado, dentre os concorrentes, a integrar o MCS. O mesmo é feito para o HAR-log RV, alcançando os mesmos resultados. Deste modo, todos os testes foram novamente aplicados para comparar a performance das especificações HAR-RV e HAR-log RV, no qual este último se sobressai. Portanto, concluem que o HAR-log RV tem o melhor desempenho na previsão dos níveis de volatilidade futura.

Instigados pelo crescente interesse em mensurar o risco associado à queda de preços (*downside risk*) para dados de alta frequência, Barndorff-Nielsen, Kinnebrock e Shephard (2010) complementam a literatura existente ao propor uma medida truncada para a volatilidade, conhecida por semivariâncias realizadas. Essa medida viabiliza a segmentação da variação quadrática em semivariâncias contínua e discreta de tal maneira que permite captar a dinâmica dos retornos intradiários positivos e negativos, isto é $RV = RV^+ + RV^-$, onde RV^+ e RV^- correspondem a *upside realized semivariance* e *downside realized semivariance*, respectivamente. Do ponto de vista econômico, semivariâncias são de extrema importância para avaliação do impacto assimétrico dos saltos sobre a volatilidade futura, em particular, do componente RV^- . Em razão disso, a informação contida no quadrado dos saltos negativos se mostra valiosa para descrever o *downside risk*, no contexto de modelos de volatilidade estocástica.

Devido à recente atenção dada pela adição de efeitos assimétricos em modelos de previsão, Audrino e Hu (2016) apresentam uma metodologia baseada em técnicas recentes, apresentadas por Barndorff-Nielsen, Kinnebrock e Shephard (2010) e Patton e Sheppard (2015), capaz de replicar os principais fatos estilizados do processo de volatilidade. Este novo método consiste na completa decomposição linear da variância realizada resultando em quatro semivariâncias, isto é, $RV = IV_t + J_t$, em que $IV_t = IV_t^+ + IV_t^-$ e $J_t = J_t^+ + J_t^-$, onde V_t^\pm , IV_t^\pm e J_t^\pm representam as semivariâncias dos componentes contínuos e discreto para a volatilidade do retorno em sinais, respectivamente. Os autores justificam o uso das semivariâncias sob o argumento de que estas captam a dinâmica das respostas não-lineares da volatilidade realizada. Posto isso, a previsão da volatilidade é feita por Mínimos Quadrados Ordinários, sob uma especificação do HAR estendida para acomodar a não-

linearidade do efeito alavancagem e dos saltos, enquanto *downside risk* é dado pelo estimador da variância integrada com sinal negativo. Para análise *out-of-sample*, os autores apresentam diversas especificações da classe de modelos HAR como *benchmark* para a avaliação de performance da previsão de volatilidade futura. Os resultados indicam que modelos com efeito alavancagem têm desempenho superior às demais especificações, indicando ajuste e poder preditivo razoável para o modelo proposto.

Motivados pelos estudos recentes sobre os efeitos dos saltos e da persistência do efeito alavancagem sobre a previsão da volatilidade futura, Xu e Wang (2017) examinam os efeitos da inclusão da correlação entre os retornos positivos e a volatilidade sob a especificação de Corsi e Renò (2012), resultando no modelo PNL-HAR-RV-CJ para o índice de Shanghai. Embora uma das interpretações da literatura para o efeito alavancagem seja a correlação negativa entre as defasagens do retorno negativo e volatilidade para o caso discreto, tendo em vista que choques positivos frequentemente não são significantes, os autores argumentam que a previsão pode alcançar resultados mais satisfatórios quando considerada a adição do termo de dependência linear para todos os horizontes temporais da volatilidade realizada. Os resultados *in-sample* do modelo proposto apresentam um melhor ajuste aos dados em relação ao modelo HAR convencional e suas extensões, indicando a melhor especificação para captura da dinâmica da volatilidade. No caso da previsão *out-of-sample*, o PNL-HAR-RV-CJ exibe performance superior aos outros modelos, quando analisados o erro médio absoluto (MAE), quadrático (MSE) e o desvio médio quadrático (RMSE). Portanto, os autores concluem que esta é a melhor especificação dentre as consideradas para analisar as flutuações do índice do mercado chinês de ações.

Complementando a literatura sobre os modelos para previsão de volatilidade sob a especificação HAR, Souček e Todorova (2014) são pioneiros ao considerar o caso multivariado para examinar os mecanismos de transmissão entre dois mercados distintos, analisando os possíveis efeitos de *spillovers* da volatilidade. Para atenuar o problema microestrutural, seguem a abordagem de Barndorff-Nielsen e Shephard (2004) e Barndorff-Nielsen e Shephard (2006a) para estimar os componentes contínuos e discretos da variação quadrática para a volatilidade dos retornos. Sob esta configuração, os autores examinam a relação entre os retornos do índice futuro *West Texas Intermediate* (WTI), índice de mercado S&P 500 e da paridade de moedas US\$/EUR. Embora os saltos não sejam estatisticamente significantes para explicar o *spillover* entre os mercados, os resultados evidenciam a transmissão dos efeitos da volatilidade realizada para a volatilidade do índice

de *commodity*. Enquanto isso, o efeito alavancagem fornece *insights* sobre os *spillovers* entre os diferentes mercados, pois observa-se que o acréscimo na taxa de câmbio provoca um decréscimo na volatilidade realizada do índice WTI, como também o decréscimo dos preços do SP 500 produz um aumento na volatilidade do índices futuro e da paridade.

Embora se tenha observado um rápido progresso dos métodos de avaliação da volatilidade realizada na direção de técnicas paramétricas, há ainda uma escassez de técnicas semiparamétricas e nãoparamétricas, indicando um *gap* existente na literatura. Em vista disso Žikeš e Baruník (2014) especificaram três modelos derivados da Autoregressão Quantílica, de Koenker e Xiao (2006), sob o contexto da estrutura heterogênea do modelo HAR. Quanto à primeira especificação, o HARQ1 é definido pelas defasagens de curto, médio e longo prazo da volatilidade realizada, enquanto o HARQ2 mantém as duas últimas defasagens, substitui a primeira por semivariâncias e incorpora um termo de volatilidade implícita, e, por último, o HARQ3 é composto pelo termo de volatilidade implícita, porém considera a decomposição da volatilidade realizada em variância integrada e saltos. Apesar de tratarem a previsão volatilidade de uma maneira mais elegante, sob a utilização da função quantílica condicional explorando as estimativas para a mediana e os níveis quantílicos $\{0, 75; 0, 90; 0, 95\}$, os autores consideraram a aplicação da raiz quadrada sobre as medidas de interesse, em um momento onde a literatura sobre previsão de volatilidade já apresentava evidência suficiente de que a transformação em logaritmo assinala melhores performances preditivas.

3 METODOLOGIA

Esta seção é dedicada à especificação do modelo proposto. Primeiro, será definido o modelo teórico, seguido das variáveis de interesse e de seus respectivos estimadores e, por último, será especificado o HQADL-RV-JL. O detalhamento de aspectos técnicos encontram-se no Apêndice deste trabalho.

3.1 MODELO TEÓRICO

Seja X_t o logaritmo do preço de um ativo de risco. Conforme Gatheral, Jaisson e Rosenbaum (2018) e Andersen, Bollerslev e Diebold (2007) observam, X_t é frequentemente representado no universo de derivativos sob a forma de um *semimartingale* de Itô:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + dJ_t, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

onde μ_t é um termo de *drift* localmente limitado e com variação finita; σ_t é um processo estocástico estritamente positivo, que descreve a volatilidade com trajetória amostral contínua à direita e com limites definidos à esquerda; W_t é um movimento browniano padrão; $dJ_t = c_t dN_t$ é um processo que descreve os saltos, onde o termo dN_t é um processo não-explosivo de Poisson com intensidade adaptada ao processo estocástico $\lambda(t)$ e c_t é uma variável aleatória adaptada que mede o tamanho do salto em t e satisfaz a condição $P[\{c_t = 0\}] = 0, \forall t \in [0, T]$.

Para um intervalo fixo de comprimento T , onde, por simplicidade, assume-se que este comprimento represente a duração de um dia ($T = 1$), a **variação quadrática** do processo definido em (1) é dada por

$$QV_t = IV_t + J_t \quad (2)$$

onde $IV_t = \int_t^{t+T} \sigma_s^2 ds$ e $J_t = \sum_{j=N_t}^{N_{t+T}} c_{\tau_j}^2$ denotam, respectivamente, a variância integrada e o processo de saltos de volatilidade, em que τ_j denota o tempo de ocorrência do j -ésimo salto.

Embora a equação (2) expresse uma fórmula conveniente para medir a volatilidade dos retornos, as quantidades IV_t e J_t não são diretamente observáveis, sendo necessária a substituição destes termos por estimadores consistentes. Sob a hipótese de que não há erro

de medida e ruído microestrutural, Andersen et al. (2001) propuseram um estimador não-paramétrico consistente para a volatilidade do retorno *ex-post*, conhecido por volatilidade realizada (RV_t), definida por

$$RV_t = \sum_{j=1}^{N/\delta} (\Delta_j X)^2 \quad (3)$$

onde $\delta = 1/N$ é a frequência de amostragem e $\Delta_{t,j}X$ é o j -ésimo retorno intra-diário, representado por

$$\Delta_{t,j}X = X_{j\delta+t} - X_{(j-1)\delta+t} \quad , j = 1, \dots, N - 1. \quad (4)$$

O RV_t é uma escolha natural para estimação de QV_t . Andersen et al. (2001) demonstram que

$$RV_t \xrightarrow{p} QV_t \quad , \quad \delta \rightarrow 0 \quad (5)$$

Na prática, verifica-se que o uso de todas as observações disponíveis resultam em viés do estimador, causado por diversas fontes de ruído microestrutural de mercado (ZHANG; MYKLAND; AÏT-SAHALIA, 2005; MCALEER; MEDEIROS, 2008). Uma alternativa para atenuar o problema é realizar o procedimento conhecido como amostragem esparsa. Dessa maneira, ao invés do uso de todos os *ticks*, as observações das cotações aqui consideradas serão tomadas a cada 5 minutos.

Por sua vez, a literatura mostra que a modelagem separada do componente contínuo e discreto da volatilidade resultam em maior significância estatística e poder de previsão, pois, embora os saltos sejam eventos esporádicos e imprevisíveis, estes possuem um forte impacto positivo na formação dos níveis de volatilidade futura (ANDERSEN; BOLLERS-LEV; DIEBOLD, 2007; CORSI; PIRINO; RENO, 2010). Nesse sentido, Barndorff-Nielsen e Shephard (2004) desenvolveram uma metodologia para detecção de saltos de tal maneira que se torna factível a estimação da decomposição da variação quadrática em IV_t e J_t . Para obter uma estimativa do componente de saltos, os autores utilizam uma estratégia baseada na subtração entre o estimador de variação quadrática e variância integrada, onde este último é estimado pelo *Realized Bipower Variation* (BPV_t).

Em geral, a literatura tem considerado o uso do BPV_t para estimação da variância integrada. Contudo, apesar de possuir propriedades assintóticas desejáveis, o BPV_t apresenta viés para amostras finitas. Inspirados no trabalho de Mancini (2009), Corsi, Pirino e

Reno (2010) propuseram a estatística CTz: uma versão robusta do teste de detecção de saltos de Barndorff-Nielsen e Shephard (2004). Segundo os autores, ao se basear em uma função truncada que corrige o viés em amostras finitas, o *threshold bipower variation*, ou simplesmente $TBPV_t$, é mais preciso para estimação de IV_t pois, ao contrário do BPV_t , o estimador truncado não confunde retornos amostrais elevados. A estatística segue, sob a hipótese nula de ausência de saltos, uma distribuição Normal. Neste caso, se a hipótese nula da ausência de saltos em $[t, t + 1]$ não é rejeitada, então define-se $\widehat{C}_t = RV_t$ e tem-se $\widehat{J}_t = 0$. Do contrário, define-se o estimador do componente contínuo da variação quadrática por $\widehat{C}_t = TBPV_t$, enquanto o estimador do componente discreto é obtido por:

$$\widehat{J}_t = I_{\{C-Tz > \Phi_\alpha\}} \cdot (RV_t - TBPV_t, 0)^+$$

onde Φ_α é o valor tabelado da distribuição normal padrão para um nível de confiança α e $x^+ = \max(x, 0)$ é uma função truncada que garante que todos as estimativas diárias sejam não-negativas.

Uma vez obtido os estimadores de interesse \widehat{V}_t , \widehat{C}_t e \widehat{J}_t , são introduzidas as seguintes medidas log agregadas para as frequências diárias, semanais e mensais:

$$\log \widehat{V}_t^{(h)} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \log \widehat{V}_{t-j+1} \quad (6)$$

$$\log \widehat{C}_t^{(h)} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \log \widehat{C}_{t-j+1} \quad (7)$$

onde h representa uma janela temporal, tipicamente assumindo os valores $h = 1$, $h = 5$ e $h = 22$. É importante ressaltar que as equações (6) e (7) contêm um abuso de notação: o lado esquerdo de ambas igualdades, isto é, o objeto que está sendo definido, não é efetivamente o logaritmo de uma quantidade.

Levando-se em conta que o teste CTz por vezes indica a não ocorrência de saltos, resultando em um grande número de zeros na série \widehat{J}_t , é usual na literatura agregar o componente de saltos conforme a expressão

$$\widehat{J}_t^{(h)} = \sum_{j=1}^h \widehat{J}_{t-j+1} \quad (8)$$

Por último, em vista das evidências apresentadas por Corsi e Renò (2012), este trabalho incorpora o efeito alavancagem ao considerar a medida

$$r_t^{(h)} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h r_{t-j+1} \quad (9)$$

onde $r_t = X_t - X_{t-1}$ expressa o retorno diário. Note que a equação (9) apenas reflete a média do retorno agregado em h . Para modelagem do efeito alavancagem em diferentes frequências, considera-se a função:

$$r_t^{(h)-} = \min \left(r_t^{(h)}, 0 \right) \quad (10)$$

3.2 MODELO ECONOMETRICO

No contexto de séries temporais, acadêmicos e participantes do mercado geralmente estão interessados no conhecimento da tendência central da distribuição de um determinado conjunto de dados, sendo esta frequentemente modelada pela esperança condicional. Modelos na classe da Regressão Quantílica (RQ), de Koenker e Bassett (1978), não só oferecem uma alternativa para explorar esta mesma característica através da mediana, como também estendem-se ao restante distribuição condicional da resposta, oferecendo uma especificação semiparamétrica para a função quantílica condicional.

Galvao, Montes-Rojas e Park (2013) propuseram um modelo Autoregressivo de Defasagens Distribuídas sob a abordagem da Regressão Quantílica (QADL). Esta estrutura extrapola o universo de dados estruturados em *cross-section*, acomodando termos autoregressivos e também covariáveis exógenas para descrever a dinâmica assimétrica da variável de resposta. Nesse sentido, o QADL especifica a função quantílica condicional da variável de resposta (Y_t) da seguinte maneira

$$Q_{Y_t}(\tau | \mathcal{F}_{t-1}) = \mu_\tau + \sum_{j=1}^p \alpha_\tau^j Y_{t-j} + \sum_{l=1}^q X'_{t-l} \theta_\tau^l, \quad \tau \in (0, 1) \quad (11)$$

onde as séries temporais Y_t e X_t são adaptadas a uma filtragem $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ e $\{\alpha, \theta, \mu\}$ são funções a serem estimadas.

Note que, pela equação (11), a distribuição condicional de Y_t se relaciona de tal maneira a considerar os valores das defasagens da resposta, bem como das covariáveis exógenas ao modelo. Em notação vetorial, a equação (11) pode ser reescrita como

$$Q_{Y_t}(\tau | \mathcal{F}_{t-1}) = Z_t' \beta_\tau \quad (12)$$

onde $Z_t = [1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, X_t, \dots, X_{t-q}]'$ e $\beta_\tau = [\mu_\tau, \alpha_\tau^1, \dots, \alpha_\tau^p, \theta_\tau^0, \dots, \theta_\tau^q]'$.

Koenker e Xiao (2006) apontam que a monotonicidade em τ da função quantílica condicional impõe uma certa disciplina sobre a forma tomada pelos coeficientes autoregressivos, ou requerem uma restrição sobre a imagem das covariáveis e da resposta.

Koenker e Bassett (1978) demonstram que os coeficientes β_τ podem ser estimados pela Regressão Quantílica padrão através do seguinte problema de minimização

$$\widehat{\beta}_\tau \equiv \min_{b \in R^{(1+p+q) \times \dim(x)}} \sum_{t=1}^n \rho_\tau(Y_t - Z_t' b) \quad (13)$$

em que ρ_τ é a *check function*, definida por $\rho_\tau(u) = u(\tau - I_{[u < 0]})$.

Portanto, a estrutura semiparamétrica apresentada por Galvao, Montes-Rojas e Park (2013) é uma alternativa robusta para avaliar os choques assimétricos quanto a dinâmica da volatilidade para uma série de retornos financeiros. Desta maneira, o presente trabalho formaliza a proposição do modelo *Heterogeneous Quantile Autoregressive Distributed Lag Realized Volatility, with Jumps and Leverage effect*, ou simplesmente HQADL-RV-JL, representado por

$$\begin{aligned} Q(\tau | \mathcal{F}_t) = & c + \beta_\tau^{(d)} \log \widehat{C}_t^{(d)} + \beta_\tau^{(w)} \log \widehat{C}_t^{(w)} + \beta_\tau^{(m)} \log \widehat{C}_t^{(m)} \\ & + \alpha_\tau^{(d)} \log(1 + \widehat{J}_t^{(d)}) + \alpha_\tau^{(w)} \log(1 + \widehat{J}_t^{(w)}) \\ & + \alpha_\tau^{(m)} \log(1 + \widehat{J}_t^{(m)}) + \gamma_\tau^{(d)} r_t^{(d)-} + \gamma_\tau^{(w)} r_t^{(w)-} \\ & + \gamma_\tau^{(m)} r_t^{(m)-} \end{aligned} \quad (14)$$

onde Q é a função quantílica condicional de $\log \widehat{V}_{t+1}$, especificada em termos de uma filtragem $\{\mathcal{F}_t \ t \geq 0\}$, e $\{c; \alpha^{(d,w,m)}; \beta^{(d,w,m)}; \gamma^{(d,w,m)}\}$ são os coeficientes autoregressivos os quais pretende-se estimar. Convém ressaltar que a equação (14) está explicitada em termos de quantidades observáveis, embora esta também valha para as contrapartidas populacionais desses estimadores.

É importante destacar ainda que a especificação proposta pertence a classe de modelos HAR, inspirada pela estrutura apresentada por Galvao, Montes-Rojas e Park

(2013). Outro aspecto que diferencia este trabalho é o fato de considerar o logaritmo dos estimadores da variação quadrática, variância integrada, saltos e efeito avalancagem, ao passo que as três especificações propostas por Žikeš e Baruník (2014) consideram medidas de volatilidade análogas a um desvio padrão, isto é, quantidades resultantes da aplicação da raiz quadrada em estimativas previamente obtidas.

Detalhes sobre a construção da especificação HQADL-RV-JL para estimação do quantil condicional da log volatilidade podem ser encontrados no Apêndice deste trabalho.

4 RESULTADOS EMPÍRICOS

4.1 FONTE DE DADOS

O banco de dados utilizado neste trabalho consiste em dados *tick-by-tick* do índice de *equity* S&P500, onde cada *tick* corresponde ao registro da cotação ou preço negociado na *Chicago Mercantile Exchange* (CME). A amostra abrange aproximadamente 28 anos, iniciando em 28 de abril de 1982 e estendendo-se até 5 de fevereiro de 2009. Seguindo o mesmo critério usado em Corsi e Renò (2012), foram eliminados da amostra os dias com menos de 500 negociações e a quarta semana do mês de outubro de 1987, resultando em 6.669 dias efetivamente contemplados na amostra.

4.2 ESTIMAÇÃO E RESULTADOS

Nesta seção, serão discutidos tanto os aspectos distribucionais da série de retornos do índice S&P500, como as estimativas do modelo HQADL-RV-JL e o comportamento interquantil de seus coeficientes.

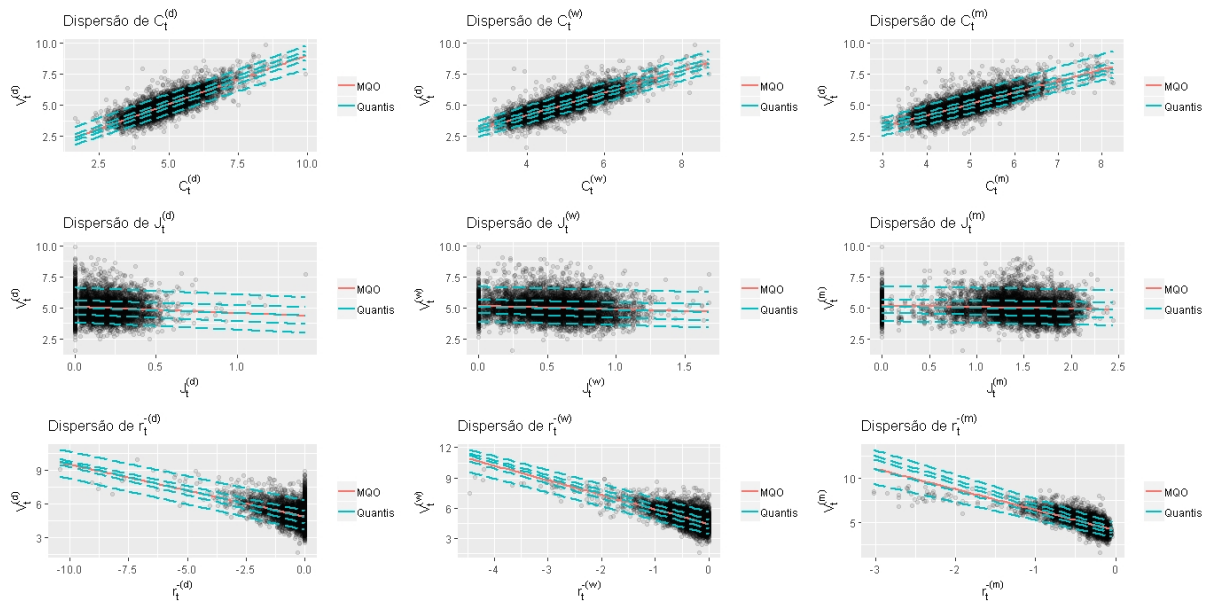
Os gráficos de dispersão a seguir associam as covariáveis do modelo com relação a variável de resposta, onde as linhas tracejadas, em azul, representam as retas de regressão quantílica nos níveis $\{0, 05; 0, 25; 0, 50; 0, 75; 0, 95\}$ e a linha sólida vermelha apresenta o ajuste da reta de regressão, estimada via Mínimos Quadrados Ordinários, sendo ambos os ajustes obtidos considerando-se como regressor cada uma das covariáveis do modelo (14) tomada individualmente. Os três primeiros painéis da Figura (1) apresentam as defasagens de curto, médio e longo prazo do componente contínuo da volatilidade realizada. Quanto a dinâmica temporal dos regressores, observa-se que a soma das estimativas da esperança condicional de \hat{C}_t se aproxima da unidade em valor absoluto, o que evidencia um processo de quase raiz unitária.

Os três painéis da linha central, por sua vez, correspondem às defasagens do componente de saltos (\hat{J}_t). Pela inspeção dos gráficos de dispersão, é possível identificar que existe um grande número de observações com valores iguais a zero. Esse resultado já era esperado, já que o *threshold* do teste de saltos de Corsi, Pirino e Reno (2010) permite que este componente assinale valores nulos na ausência de variações abruptas de preços em um dado período de tempo. A dispersão, por sua vez, não apresenta qualquer associação

linear com a reta de regressão, afastando-se horizontalmente o quanto maior a escala h de tempo da média móvel defasada para $J_t^{(h)}$.

Já na parte inferior da Figura (1) que corresponde ao efeito alavancagem, verifica-se que a dispersão das três defasagens de r_t^- concentram-se na borda direita dos painéis. Isso está relacionado com a própria estrutura da função truncada para obtenção do efeito alavancagem, que toma o mínimo entre zero e qualquer retorno negativo.

Figura 1 – Dispersão dos regressores em relação à resposta

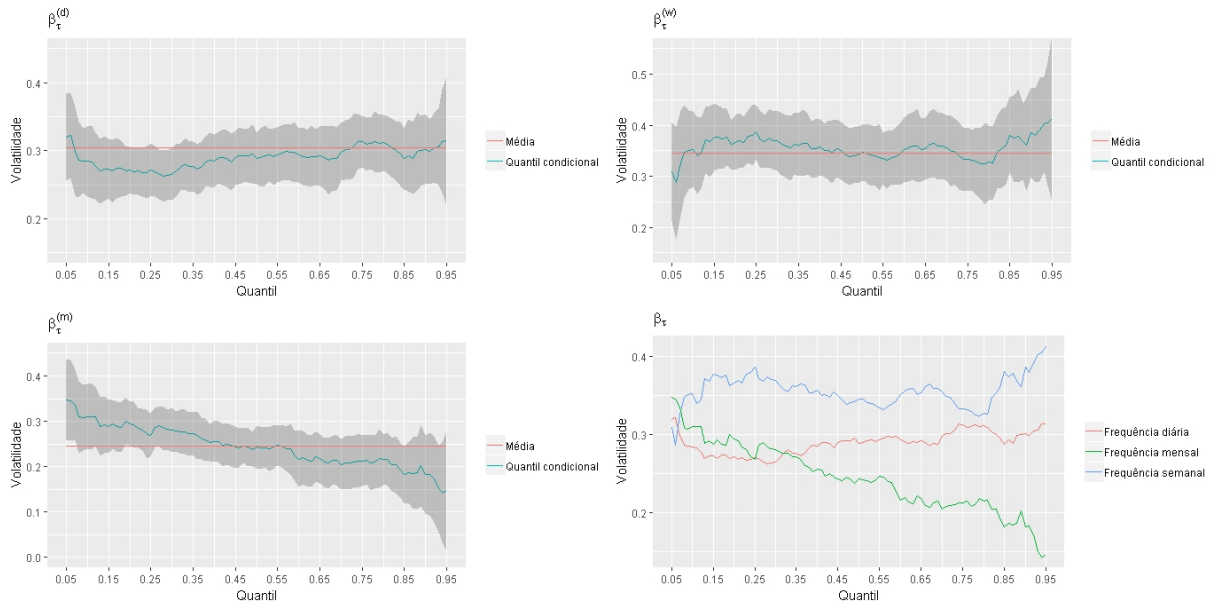


Os gráficos de dispersão relacionam as covariáveis do modelo com a variável resposta, considerando uma amostra de 6.669 observações da volatilidade realizada para a série de retornos do índice S&P500. A linha tracejada, em azul, representa as retas quantílicas estimadas correspondentes aos níveis quantílicos $\{0,05; 0,25; 0,50; 0,75; 0,95\}$, enquanto a linha sólida vermelha apresenta a estimativa da esperança condicional via Mínimos Quadrados Ordinários.

Quanto à regressão, a especificação HQADL-RV-JL, apresentada na equação (14), foi estimada percorrendo-se 91 *quantile levels* entre 0,05 e 0,95 através do algoritmo Frisch-Newton, detalhado em Portnoy e Koenker (1997). As estimativas dos coeficientes associados a cada regressor e seus respectivos desvios-padrão, obtidos via *bootstrap*, encontram-se no Anexo deste trabalho. A Figura (2) apresenta as estimativas dos coeficientes diário, semanal e mensal do componente contínuo da volatilidade realizada, apresentada nos painéis $\beta_\tau^{(d)}$, $\beta_\tau^{(w)}$ e $\beta_\tau^{(m)}$, respectivamente, juntamente com o intervalo de confiança a um nível de 95%, delimitado pela área hachurada em cinza escuro. Sob uma análise estática, estes painéis retratam os aspectos distribucionais dos parâmetros em horizontes distintos, onde

os coeficientes em função de τ são representados em azul, enquanto a média condicional, obtida através da especificação LHAR-CJ, é expressa em vermelho.

Figura 2 – Coeficientes estimados: Componente Contínuo



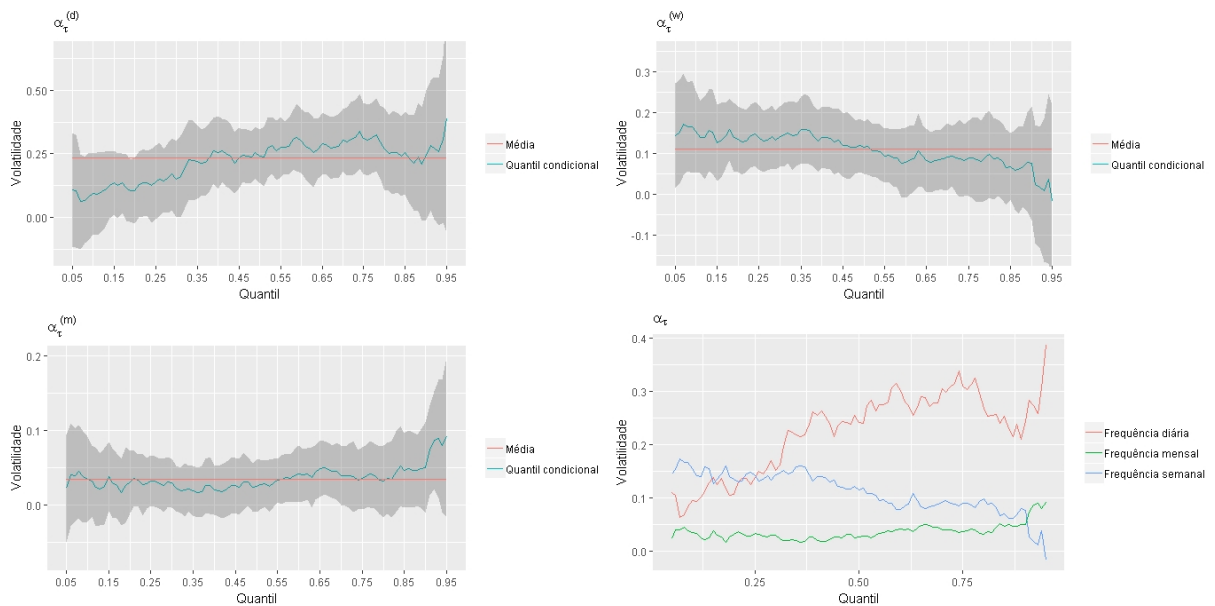
As estimativas para os coeficientes associados ao componente contínuo em três diferentes horizontes se mostraram estatisticamente significantes em todos os níveis quantílicos, considerando um nível de confiança de 95%. Enquanto os impactos de $\hat{\beta}_\tau^{(m)}$ são decrescentes e $\hat{\beta}_\tau^{(d)}$ mantém-se relativamente próximos à média ao longo de toda a distribuição, $\hat{\beta}_\tau^{(w)}$ captura volatilidade adicional do processo, implicando em um efeito parcial superior aos demais parâmetros estimados sobre a volatilidade realizada, a exceção da cauda esquerda.

Observa-se que os coeficientes para as três frequências são estatisticamente significantes em todo o intervalo $\tau \in [0, 05; 0, 95]_{\text{grid}}$. Tudo o mais mantido constante, o impacto $\hat{\beta}_\tau^{(d)}$ sobre a volatilidade realizada assemelha-se, ao longo de essencialmente todos os níveis quantílicos, à estimativa do impacto médio implicado pelo modelo LHAR-CJ, embora seja marginalmente inferior em grande parte do *grid* considerado. Para a defasagem semanal, verifica-se que as estimativas de $\hat{\beta}_\tau^{(w)}$ oscilam ao redor da esperança condicional para grande parte dos níveis quantílicos, a exceção das extremidades: à esquerda, o impacto do parâmetro estimado para a frequência semanal tende a ser menor, diferentemente da cauda direita, quando o valor das estimativas são maiores em comparação a média condicional. Por sua vez, o parâmetro estimado $\hat{\beta}_\tau^{(m)}$ decresce à medida que τ caminha dos níveis quantílicos inferiores em direção à cauda direita, de tal maneira que os quantis que antecedem a mediana assinalam valores superiores à média, em contraposição ao restante da distribuição.

Mais adiante, o painel β_τ coloca em evidência as três estimativas analisadas anteriormente. Enquanto as estimativas para $\hat{\beta}_\tau^{(m)}$ decrescem e $\hat{\beta}_\tau^{(d)}$ mantém-se relativamente estáveis ao longo da distribuição, o coeficiente $\hat{\beta}_\tau^{(m)}$ captura um efeito adicional da volatilidade, aumentando seu valor absoluto no primeiro e no último quartil, efeito ao qual a literatura refere-se como volatilidade da volatilidade (CORSI et al., 2008; BOLLERSLEV et al., 2009). *Esse resultado é particularmente interessante pois sugere que, em dias de baixa volatilidade, os três estimadores da variância integrada contribuem quase na mesma proporção para a volatilidade em $t + 1$. Por outro lado, em dias de intensa volatilidade, a frequência diária e semanal exercem maior influência sobre a formação da volatilidade futura relativamente à mensal.*

Os componentes de saltos, por sua vez, são exibidos na Figura (3), onde as estimativas dos coeficientes de curto, médio e longo prazo, correspondem aos painéis $\alpha_\tau^{(d)}$, $\alpha_\tau^{(w)}$ e $\alpha_\tau^{(m)}$, respectivamente.

Figura 3 – Coeficientes estimados: Saltos



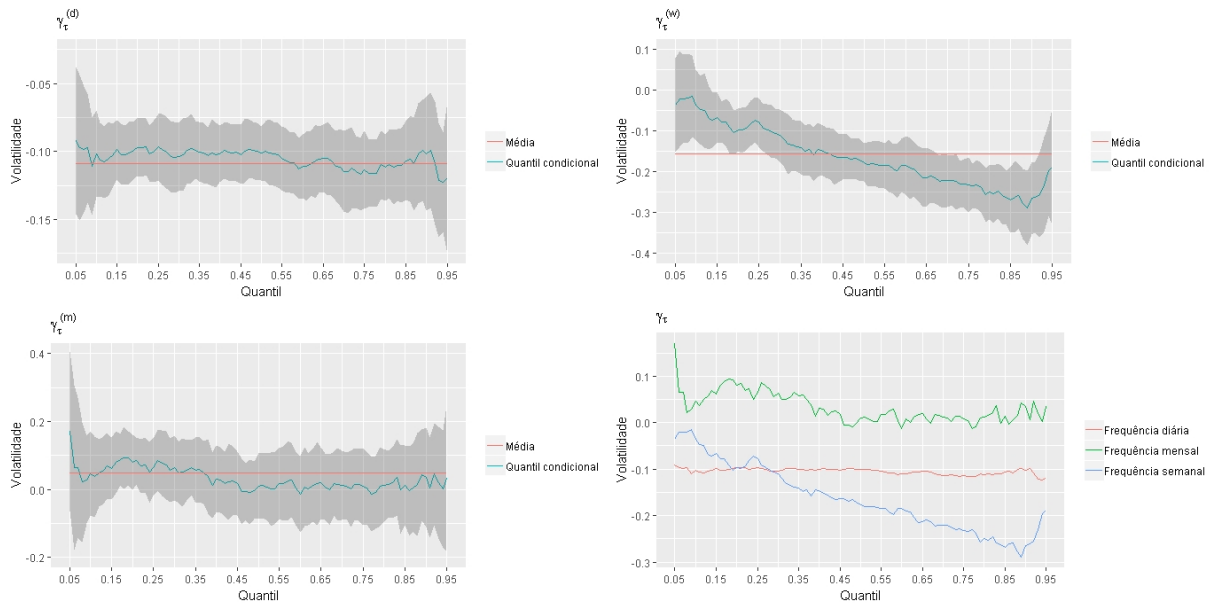
As estimativas de $\hat{\alpha}_\tau^{(d)}$ e $\hat{\alpha}_\tau^{(w)}$ são estatisticamente significantes em quase todos os quantis, revelando a importância dos componentes de saltos sobre a volatilidade futura, resultado oposto ao documentado por Žikeš e Baruník (2014). Por sua vez, enquanto o efeito parcial do coeficiente diário aumenta quanto mais se aproxima da cauda direita, o impacto do componente semanal se mostra cada vez menor, tornando-se irrelevante após o octogésimo percentil.

Embora as estimativas do coeficiente $\hat{\alpha}_\tau^{(d)}$ sejam estatisticamente significantes em todo os níveis quantílicos considerados, este resultado é apenas parcialmente verificado para $\hat{\alpha}_\tau^{(w)}$, ao passo que $\hat{\alpha}_\tau^{(m)}$ se mostra irrelevante para quase toda densidade: enquanto as

estimativas do primeiro deixam de ser significativas após o octagésimo percentil, o segundo não apresenta evidência estatística suficiente para rejeição da hipótese nula em quase todos os quantis avaliados, à exceção dos quantis contidos no intervalo $\tau \in [0, 60; 0, 70]$. Ademais, de acordo com o painel α_τ , é fácil ver que, *ceteris paribus*, o impacto do coeficiente associado ao componente de saltos de curto prazo sobre o logaritmo da volatilidade futura aumenta à medida que τ percorre todos os níveis quantílicos. Já o impacto do coeficiente semanal é superior à sua respectiva média no intervalo compreendido entre a cauda esquerda até a mediana, tornando-se inferior a partir daí. Há evidência, portanto, de que a incorporação dos saltos seja crucial para a determinação da volatilidade realizada em $t + 1$, resultado oposto ao documentado por Žikeš e Baruník (2014) para os quantis analisados sob a especificação HARQ3.

Por último, outro aspecto que também diferencia este trabalho é o fato de introduzir o efeito alavancagem em uma estrutura semiparamétrica. Corsi e Renò (2012) mostram como é pertinente o impacto dos retornos negativos sobre a persistência da volatilidade.

Figura 4 – Coeficientes estimados: Efeito Alavancagem



Apesar da insignificância estatística do coeficiente $\hat{\gamma}_\tau^{(m)}$, as estimativas $\hat{\gamma}_\tau^{(d)}$ e $\hat{\gamma}_\tau^{(w)}$ são estatisticamente significantes para quase todos os níveis quantílicos. Embora ambos os coeficientes diários e semanais exerçam choques sobre a volatilidade futura, $\hat{\gamma}_\tau^{(d)}$ é homogêneo ao longo de todos os níveis quantílicos, enquanto $\hat{\gamma}_\tau^{(w)}$ exerce um impacto superior, em valor absoluto. Estes resultados revelam a correlação negativa entre a volatilidade e os retornos negativos de curto e médio prazo.

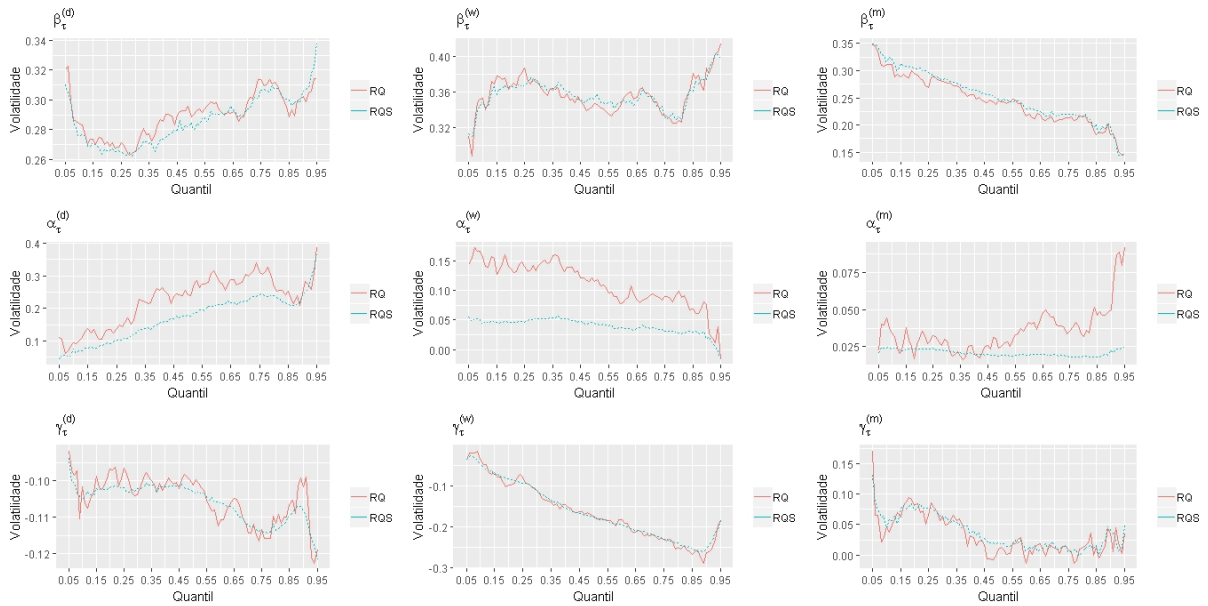
Como mostra o painel $\hat{\gamma}_\tau^{(d)}$, o impacto do componente alavancagem de curto prazo sobre a volatilidade um passo a frente independe de τ , isto é, o efeito parcial de $\hat{\gamma}_\tau^{(d)}$ sobre

$\log V_{t+1}$ é homogêneo ao longo de todos os níveis quantílicos. Em contrapartida, $\hat{\gamma}_\tau^{(w)}$ assinala uma inclinação negativa de tal maneira a indicar que a alavancagem semanal exerce um impacto superior sobre a log volatilidade em $t + 1$, em termos absolutos, quando comparado à defasagem diária, especialmente após o terceiro decil. Isso evidencia que retornos negativos aferidos ao longo de uma semana estão associados com maior volatilidade, deflagrando uma correlação negativa entre os dois, resultado este que corrobora com a observação feita originalmente por Black (1976).

É válido salientar que o fato dos coeficientes estimados da esperança condicional estarem contidos em todo intervalo de confiança, a exceção de $\hat{\gamma}_\tau^{(w)}$, pode ser tomado como um indício de que estes sejam, no fim das contas, constantes e, portanto, que o modelo de Corsi e Renò (2012) esteja corretamente especificado.

Por último, o modelo (14) foi reestimado pela metodologia apresentada por Fernandes, Guerre e Horta (2019), cuja Regressão Quantílica em sua versão suavizada (RQS), obtém estimativas bem comportadas para os coeficientes associados aos regressores. A RQS foi configurada de tal maneira a considerar o emprego da *bandwidth* h_{ROT} , seguindo a mesma "regra de ouro" utilizada por Silverman (1986). Cabe ressaltar que a teoria assintótica uniforme apresentada pelos autores limita-se a um cenário de dados em *cross-section*. Entretanto, é de fácil verificação que a função objetivo por eles proposta se aproxima pontualmente da função objetivo de Koenker e Bassett (1978). Consequentemente, o estimador suavizado é consistente e assintoticamente normal em cada nível quantílico τ fixado. A Figura (5), por sua vez, compara os resultados da Regressão Quantílica padrão (RQ), expressa pela linha sólida em vermelho, e a sua versão Suavizada (RQS), representada pela linha pontilhada em azul. Conforme apresentada nos painéis $\beta^{(d)}$, $\beta^{(w)}$ e $\beta^{(m)}$, as estimativas suavizadas para o componente contínuo da volatilidade apresentam uma aderência satisfatória, seguindo a mesma tendência do processo padrão entre os níveis quantílicos considerados. O mesmo pode ser verificado nos últimos três painéis que remetem ao efeito alavancagem. Entretanto, as estimativas dos componentes de saltos obtidas pelos métodos RQ e RQS são visivelmente distintas no curto, médio e longo prazo. Uma possível explicação para esse descolamento seria o fato do estimador associado à Regressão Quantílica Suavizada possuir um menor erro quadrático médio assintótico, mostrando uma regularidade superior à Regressão Quantílica padrão.

Figura 5 – Comparação entre coeficientes estimados do modelo pela RQ e RQS



Os painéis colocam em evidência as estimativas dos coeficientes do modelo HQADL-RV-JL, obtidas tanto pela Regressão Quantílica padrão, expressa pela linha sólida em vermelho, quanto pela sua versão suavizada (RQS), representada pela linha pontilhada em azul. Enquanto as estimativas suavizadas para o coeficiente associado ao componente contínuo e para o efeito alavancagem apresentam uma aderência satisfatória ao processo padrão, o mesmo não ocorre para os coeficientes dos saltos. Uma possível explicação para esse descolamento seria o menor erro quadrático médio assintótico do estimador associado ao RQS.

4.2.1 Previsão fora da amostra

Para medir a acurácia preditiva da mediana pelo modelo proposto neste trabalho, foram escolhidas outras duas especificações originalmente propostas por Žikeš e Baruník (2014), mas ligeiramente modificadas com a transformação em log dos regressores: a primeira delas (HARQ1) leva em consideração as defasagens da volatilidade realizada, e a segunda (HARQ3) incorpora os saltos no processo de formação da volatilidade. Além disso, foram escolhidos outros três modelos no contexto da esperança condicional, tais como a versão canônica da especificação HAR, de Corsi (2009), e outras duas extensões que acomodam os saltos (ANDERSEN; BOLLERSLEV; DIEBOLD, 2007) e o efeito alavancagem (CORSI; RENÒ, 2012), todas considerando a transformação das variáveis em logaritmo, e as inovações corrigidas pela matriz de covariância de Newey-West.

O exercício foi realizado de tal maneira que 80% da amostra, que conta com 6.669 dias, foi reservada para treino e os 20% restantes foram separados para teste. O ponto de

partida para mensurar o poder preditivo fora da amostra foi a adoção de seis funções de perda, sugeridas por Hansen e Lunde (2005):

$$\begin{aligned} \text{MSE}_1 &= \frac{1}{n-n_0} \sum_{t=n_0+1}^n (\tilde{V}_t - \hat{\varphi}_t)^2 & \text{MSE}_2 &= \frac{1}{n-n_0} \sum_{t=n_0+1}^n (\tilde{V}_t^2 - \hat{\varphi}_t^2)^2 \\ \text{QLIKE} &= \frac{1}{n-n_0} \sum_{t=n_0+1}^n (\log \hat{\varphi}_t^2 + \tilde{V}_t^2 \hat{\varphi}_t^{-2}) & \text{R}^2\text{LOG} &= \frac{1}{n-n_0} \sum_{t=n_0+1}^n [\log(\tilde{V}_t^2 \hat{\varphi}_t^{-2})]^2 \quad (15) \\ \text{MAE}_1 &= \frac{1}{n-n_0} \sum_{t=n_0+1}^n |\tilde{V}_t - \hat{\varphi}_t| & \text{MAE}_2 &= \frac{1}{n-n_0} \sum_{t=n_0+1}^n |\tilde{V}_t^2 - \hat{\varphi}_t^2| \end{aligned}$$

em que $n_0 = 5334$, \tilde{V}_t e $\hat{\varphi}_t$ correspondem a volatilidade realizada separada para o teste e a previsão da volatilidade realizada, respectivamente.

A Tabela (1) reporta os resultados de todas as medidas de perda em relação às previsões realizadas para a média e mediana condicional sob duas abordagens distintas. Pela janela expansiva, a especificação LHAR-CJ é a melhor classificada em cinco das seis métricas de avaliação, indicando que a performance deste modelo seja relativamente superior às demais. No entanto, o HQADL-RV-JL assinala o melhor resultado sob a ótica do QLIKE, ao mesmo tempo em que o valor correspondente as demais medidas para este modelo são, apenas, marginalmente inferiores em comparação ao LHAR-CJ.

Tabela 1 – Comparativo de previsões da volatilidade realizada de modelos selecionados

Janela Expansiva						
	MSE ₁	MSE ₂	QLIKE	R ² LOG	MAE ₁	MAE ₂
HAR	0,189	21,355	4,142	0,034	0,327	3,255
HAR-CJ	0,189	21,570	4,142	0,033	0,326	3,245
LHAR-CJ	0,175*	19,394*	4,141*	0,031*	0,313*	3,109*
HARQ1	0,234 [†]	26,247 [†]	4,148 [†]	0,041 [†]	0,367 [†]	3,618 [†]
HARQ3	0,193	22,230	4,142	0,034	0,328	3,273
HQADL-RV-JL	0,176*	19,631*	4,141*	0,032*	0,314*	3,121*
Janela Rolante						
	MSE ₁	MSE ₂	QLIKE	R ² LOG	MAE ₁	MAE ₂
HAR	0,189	21,353	4,142	0,034	0,327	3,255
HAR-CJ	0,190	21,589	4,142	0,033	0,326	3,246
LHAR-CJ	0,176*	19,548*	4,141*	0,032*	0,313*	3,112*
HARQ1	0,191	21,862	4,142	0,034	0,327	3,261
HARQ3	0,193 [†]	22,229 [†]	4,142 [†]	0,034 [†]	0,328 [†]	3,272 [†]
HQADL-RV-JL	0,177*	19,817*	4,141*	0,032*	0,314*	3,127*

Fonte: elaborado pelo autor. Os símbolos *, * e † denotam a classificação do primeiro, segundo e o último modelo avaliado em cada métrica.

Em análise sobre medidas de poder preditivo, Patton (2011) apresenta evidência de que apenas as métricas MSE_1 e $QLIKE$ satisfazem um determinado conjunto de propriedades, tornando-as robustas e, portanto, adequadas para avaliação do erro de previsão. Nesse sentido, não é possível apontar, *a priori*, qual destes dois modelos seria o mais adequado para previsão de volatilidade. Em vista disso, o exercício foi realizado também sob a abordagem de janela rolante. Desta vez, o LHAR-CJ se mostra relativamente superior em todas as métricas apuradas, apesar de, novamente, a diferença dos resultados observados em comparação ao HQADL-RV-JL serem praticamente desprezíveis.

Cabe ressaltar que sob o contexto da Regressão Quantílica, o modelo proposto neste trabalho mostra-se amplamente superior aos apresentados por Žikeš e Baruník (2014), uma vez que o desempenho dos modelos HARQ1 e HARQ3 são os piores sobre todas as funções de perda selecionadas para a janela expansiva e rolante. Ademais, há um indicativo de que a incorporação do efeito alavancagem contribui significativamente para o aumento do poder preditivo para volatilidade realizada em $t + 1$, corroborando os resultados apresentados por Corsi e Renò (2012) e Audrino e Hu (2016).

Para uma avaliação mais assertiva das previsões da volatilidade realizada, estabeleceu-se o modelo LHAR-CJ como *benchmark* para o teste unicaudal de Diebold e Mariano (2002) (DM), assumindo os horizontes temporais $h = 1$, $h = 5$ e $h = 10$, que denotam um, cinco e dez passos a frente, respectivamente. A rejeição da hipótese nula neste teste, considerando $\alpha = 5\%$, infere que as previsões feitas pelos respectivos modelos são inferiores relativamente ao *benchmark*.

Tabela 2 – Performance relativa das previsões para Volatilidade Realizada

	Janela Expansiva			Janela Rolante		
	$h = 1$	$h = 5$	$h = 10$	$h = 1$	$h = 5$	$h = 10$
HAR	3,406 [†]	3,677 [†]	4,596 [†]	3,012 [†]	3,350 [†]	4,685 [†]
HAR-CJ	3,469 [†]	3,643 [†]	4,183 [†]	3,078 [†]	3,326 [†]	4,162 [†]
HARQ1	9,227 [†]	8,389 [†]	7,924 [†]	3,246 [†]	3,412 [†]	4,274 [†]
HARQ3	3,882 [†]	3,768 [†]	3,905 [†]	3,528 [†]	3,544 [†]	3,977 [†]
HQADL-RV-JL	2,307 [†]	1,738 [†]	1,729 [†]	2,040 [†]	1,600	1,615

Fonte: elaboração do autor. [†] denota as previsões de menor acurácia em relação ao *benchmark*.

De acordo com a Tabela (2), a performance relativa das previsões para a janela expansiva mostra que todas as especificações são inferiores nos horizontes de curto, médio e longo prazo em relação ao *benchmark* perante o teste DM. Por outro lado, a avaliação de desempenho sob a ótica da janela rolante mostra mais uma vez que as previsões de

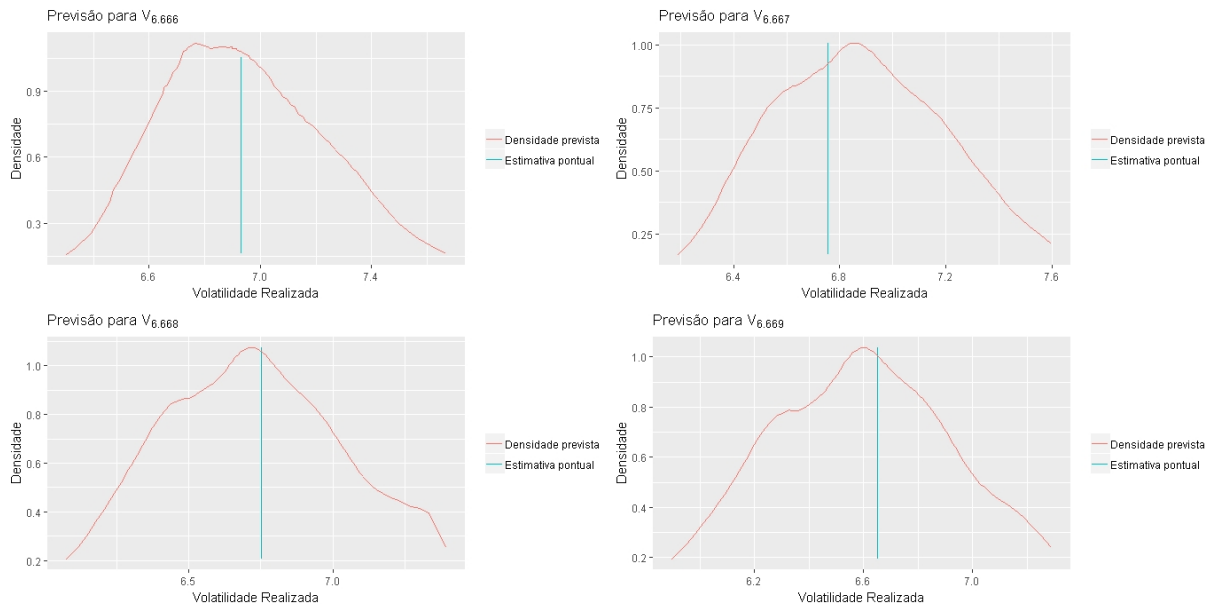
todos os modelos são relativamente inferiores em $h = 1$. Contudo, para os horizontes de médio e longo prazo, não há evidência suficiente para afirmar que a acurácia da previsão da especificação HQADL-RV-JL seja inferior às previsões realizadas pelo LHAR-CJ. Este mesmo resultado também é verificado quando realizado o teste DM bicaudal, já que a hipótese nula de que o desempenho das previsões seja diferente não é rejeitada.

Dessa maneira, é razoável inferir que a previsão do modelo proposto neste trabalho é tão boa quanto a previsão do modelo de Corsi e Renò (2012) para o médio e longo prazo, à exceção do curto prazo, quando LHAR-CJ assinala um desempenho superior. Ademais, quando colocado em perspectiva a previsão dos modelos cuja mediana foi considerada, confirma-se a superioridade do HQADL-RV-JL sobre as especificações HARQ1 e HARQ3, de Žikeš e Baruník (2014).

Em última análise, considerou-se também a previsão da densidade da volatilidade realizada pelo método apresentado por Fernandes, Guerre e Horta (2019). A Figura (6) concatena a previsão para densidade da volatilidade um passo a frente considerando os *quantile levels* $\tau \in [0, 05; 0, 95]_{\text{grid}}$ e a respectiva estimativa pontual da volatilidade realizada para a série de retornos do índice S&P500 referente aos quatro últimos dias da amostra, isto é, considerando $t \in [6.666; 6.669]$. Quanto aos aspectos distribucionais, verifica-se que todas as densidades exibem um certo grau de assimetria: enquanto o primeiro painel mostra uma distribuição assimétrica à direita, as demais parecem assumir o formato de uma distribuição bimodal.

Embora ainda seja exploratório, essa análise oferece uma alternativa para a avaliação do comportamento da distribuição da resposta um passo a frente, complementando a literatura sobre previsão de volatilidade, já que, do conhecimento do autor, não existem estudos similares que contemplem previsões dessa natureza. É importante destacar, no entanto, que os resultados aqui reportados apenas oferecem um esboço da previsão da densidade condicional para a volatilidade realizada, onde não há qualquer tipo de avaliação quanto ao seu ajuste e a acurácia preditiva. Portanto, uma análise mais profunda sobre estes aspectos é deixada trabalhos futuros.

Figura 6 – Previsão da Densidade Condicional da Volatilidade Realizada



Os painéis concatenam a previsão para densidade da volatilidade um passo a frente, considerando os quantis $\tau \in [0.05, 0.95]$ grid, e a respectiva estimativa pontual da volatilidade realizada para a série de retornos do índice S&P500 referente aos quatro últimos dias da amostra. Quanto aos aspectos distribucionais, verifica-se que todas as densidades possuem exibem assimetria em determinado grau: enquanto o primeiro painel mostra uma distribuição assimétrica à direita, as demais parecem assumir o formato de uma distribuição bimodal.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propõe a introdução do modelo *Heterogeneous Quantile Autoregressive Distributed Lag Realized Volatility, with Jumps and Leverage Effect*, ou simplesmente HQADL-RV-JL. A especificação incorpora os principais efeitos assimétricos da volatilidade, inserindo-se na classe de modelos HAR sob a estrutura semiparamétrica da Regressão Quantílica, o que permite a flexibilidade dos coeficientes autoregressivos em cada quantil, onde choques sobre os regressores podem afetar a escala, locação e forma da distribuição condicional da resposta.

Pela exposição empírica para dados de alta frequência da série de retornos do índice S&P500, compreendidos entre 28 de abril de 1982 e 05 de fevereiro de 2009, estimou-se o modelo HQADL-RV-JL de tal maneira que foi viabilizada sua avaliação em uma grade equi-espçada percorrendo 91 *quantile levels* no *grid* $[0, 05; 0, 95]$. Por sua vez, observou-se que as estimativas dos coeficientes de curto, médio e longo prazo associados ao componente contínuo da volatilidade realizada são extremamente significantes para todos os níveis quantílicos considerados. Tudo o mais mantido constante, o impacto do coeficiente mensal sobre a formação de volatilidade futura demonstra um comportamento decrescente ao longo dos níveis quantílicos, ao passo que a frequência diária mantém-se relativamente estável. O coeficiente associado a frequência semanal, por sua vez, parece capturar todo o efeito adicional da volatilidade, aumentando assim o valor absoluto de sua estimativa ao longo dos níveis quantílicos. Esses resultados são particularmente interessantes pois sugerem que, em dias de baixa volatilidade, os três estimadores da variância integrada contribuem quase na mesma proporção para a formação da volatilidade futura. Por outro lado, em dias de intensa volatilidade, a frequência semanal e diária exercem maior influência sobre a volatilidade em $t + 1$.

Quanto ao componente de saltos, os coeficientes de curto e médio prazo se mostraram estatisticamente significantes. Em relação a sua magnitude, observou-se que o impacto do coeficiente de curto prazo ganha cada vez mais participação na formação de volatilidade futura, em comparação ao coeficiente semanal, cuja trajetória das estimativas interquantis é decrescente. Há evidência, portanto, de que a modelagem dos saltos em uma estrutura semiparamétrica é crucial para determinação da volatilidade em $t + 1$, ao contrário do que aponta os resultados de Žikeš e Baruník (2014).

Outro aspecto que diferencia este trabalho é o fato de introduzir o efeito alavancagem em modelos de previsão de volatilidade sob o contexto da Regressão Quantílica. Os resultados mostram que os coeficientes de curto e médio prazo são significantes do ponto de vista estatístico. Por sua vez, o impacto do coeficiente diário sobre a volatilidade é homogêneo ao longo dos níveis quantílicos, enquanto as estimativas do componente semanal exercem um impacto superior, em termos absolutos, sobre a volatilidade futura. Portanto, o modelo proposto ajusta-se adequadamente a este efeito assimétrico, uma vez que há evidência empírica de que os retornos negativos correlacionam-se negativamente com maiores níveis de volatilidade.

Em termos de performance, realizou-se um exercício de previsão para fora da amostra para a mediana do modelo HQADL-RV-JL, considerando os principais *benchmarks* apresentados na literatura sobre previsão de volatilidade. Os resultados observados pela janela expansiva e rolante indicam que o poder preditivo do modelo proposto neste trabalho é tão boa quanto a previsão do modelo de Corsi e Renò (2012) para o médio e longo prazo, à exceção do curto prazo, quando o LHAR-CJ assinala um desempenho superior. Ademais, há um indicativo de que a incorporação do efeito alavancagem contribui significativamente para o aumento do poder preditivo de modelos dessa classe. Isso é confirmado quando o HQADL-RV-JL assinala um poder preditivo superior em comparação às demais especificações concorrentes.

Em última análise, considerou-se também a previsão da densidade da volatilidade realizada pelo método apresentado por Fernandes, Guerre e Horta (2019). Quanto aos aspectos distribucionais, verifica-se que todas as densidades previstas exibem um certo grau de assimetria: enquanto o primeiro painel mostra uma distribuição assimétrica à direita, as demais parecem assumir o formato de uma distribuição bimodal. Embora ainda seja exploratório, essa análise oferece uma alternativa para a avaliação do comportamento da distribuição da resposta um passo a frente, complementando a literatura sobre previsão de volatilidade. Uma análise mais profunda sobre os aspectos empíricos relacionados à esta metodologia é deixada trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- ANDERSEN, T. et al. **The distribution of exchange rate volatility**. [S.l.], 1999.
- ANDERSEN, T. G.; BOLLERSLEV, T. Deutsche mark–dollar volatility: intraday activity patterns, macroeconomic announcements, and longer run dependencies. **the Journal of Finance**, Wiley Online Library, v. 53, n. 1, p. 219–265, 1998.
- ANDERSEN, T. G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F. X. Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling, and forecasting of return volatility. **The review of economics and statistics**, MIT Press, v. 89, n. 4, p. 701–720, 2007.
- ANDERSEN, T. G. et al. **Exchange rate returns standardized by realized volatility are (nearly) Gaussian**. [S.l.], 2000.
- ANDERSEN, T. G. et al. The distribution of realized exchange rate volatility. **Journal of the American statistical association**, Taylor & Francis, v. 96, n. 453, p. 42–55, 2001.
- ANDERSEN, T. G. et al. Modeling and forecasting realized volatility. **Econometrica**, Wiley Online Library, v. 71, n. 2, p. 579–625, 2003.
- ANDERSEN, T. G.; DOBREV, D.; SCHAUMBURG, E. Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 169, n. 1, p. 75–93, 2012.
- AUDRINO, F.; HU, Y. Volatility forecasting: Downside risk, jumps and leverage effect. **Econometrics**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 4, n. 1, p. 8, 2016.
- BARNDORFF-NIELSEN, O.; KINNEBROCK, S.; SHEPHARD, N. **Volatility and time series econometrics: Essays in honor of robert f. engle, chapter measuring downside risk-realised semivariance**. [S.l.]: Oxford University Press, 2010.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, Wiley Online Library, v. 64, n. 2, p. 253–280, 2002.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. **Journal of financial econometrics**, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 1–37, 2004.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. How accurate is the asymptotic approximation to the distribution of realized variance. **Identification and inference for econometric models. A Festschrift in honour of TJ Rothenberg**, p. 306–311, 2005.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation. **Journal of financial Econometrics**, Oxford University Press, v. 4, n. 1, p. 1–30, 2006.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. Impact of jumps on returns and realised variances: econometric analysis of time-deformed lévy processes. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 131, n. 1-2, p. 217–252, 2006.

- BLACK, F. Studies of stock price volatility changes, proceedings of the 1976 meetings of the business and economic statistics section. 177-191. In: SN. **American Statistical association**. [S.l.], 1976.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of econometrics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986.
- BOLLERSLEV, T. et al. A discrete-time model for daily s & p500 returns and realized variations: Jumps and leverage effects. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 150, n. 2, p. 151–166, 2009.
- BOLLERSLEV, T.; XU, L.; ZHOU, H. Stock return and cash flow predictability: The role of volatility risk. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 187, n. 2, p. 458–471, 2015.
- CONT, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Taylor & Francis, 2001.
- CORSI, F. A simple approximate long-memory model of realized volatility. **Journal of Financial Econometrics**, Oxford University Press, v. 7, n. 2, p. 174–196, 2009.
- CORSI, F. et al. The volatility of realized volatility. **Econometric Reviews**, Taylor & Francis, v. 27, n. 1-3, p. 46–78, 2008.
- CORSI, F.; PIRINO, D.; RENO, R. Threshold bipower variation and the impact of jumps on volatility forecasting. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 159, n. 2, p. 276–288, 2010.
- CORSI, F.; RENÒ, R. Discrete-time volatility forecasting with persistent leverage effect and the link with continuous-time volatility modeling. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 30, n. 3, p. 368–380, 2012.
- DACOROGNA, R. et al. **An introduction to high-frequency finance**. [S.l.]: Elsevier, 2001.
- DIEBOLD, F. X.; MARIANO, R. S. Comparing predictive accuracy. **Journal of Business & economic statistics**, Taylor & Francis, v. 20, n. 1, p. 134–144, 2002.
- DUONG, D.; SWANSON, N. R. Volatility in discrete and continuous-time models: A survey with new evidence on large and small jumps. In: **Missing Data Methods: Time-Series Methods and Applications**. [S.l.]: Emerald Group Publishing Limited, 2011. p. 179–233.
- DUONG, D.; SWANSON, N. R. Empirical evidence on the importance of aggregation, asymmetry, and jumps for volatility prediction. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 187, n. 2, p. 606–621, 2015.
- ENGLE, R. F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 987–1007, 1982.
- FERNANDES, M.; GUERRE, E.; HORTA, E. Smoothing quantile regressions. **arXiv preprint arXiv:1905.08535**, 2019.

- GALVAO; MONTES-ROJAS; PARK. Quantile autoregressive distributed lag model with an application to house price returns. **Oxford Bulletin of Economics and Statistics**, Wiley Online Library, v. 75, n. 2, p. 307–321, 2013.
- GATHERAL, J.; JAISSON, T.; ROSENBAUM, M. Volatility is rough. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, p. 1–17, 2018.
- GONÇALVES, S.; MEDDAHI, N. Bootstrapping realized volatility. **Econometrica**, Wiley Online Library, v. 77, n. 1, p. 283–306, 2009.
- GRANGER, C. W.; JOYEUX, R. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. **Journal of time series analysis**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 15–29, 1980.
- GUILLAUME, D. M. et al. From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets. **Finance and stochastics**, Springer, v. 1, n. 2, p. 95–129, 1997.
- HANSEN, P. R.; LUNDE, A. A forecast comparison of volatility models: does anything beat a garch (1, 1)? **Journal of applied econometrics**, Wiley Online Library, v. 20, n. 7, p. 873–889, 2005.
- HANSEN, P. R.; LUNDE, A. Realized variance and market microstructure noise. **Journal of Business & Economic Statistics**, Taylor & Francis, v. 24, n. 2, p. 127–161, 2006.
- HANSEN, P. R.; LUNDE, A.; NASON, J. M. The model confidence set. **Econometrica**, Wiley Online Library, v. 79, n. 2, p. 453–497, 2011.
- KOENKER, R.; BASSETT, G. Regression quantiles. **Econometrica: journal of the Econometric Society**, JSTOR, p. 33–50, 1978.
- KOENKER, R.; XIAO, Z. Quantile autoregression. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 101, n. 475, p. 980–990, 2006.
- LEBARON, B. et al. Stochastic volatility as a simple generator of apparent financial power laws and long memory. **Quantitative Finance**, Taylor & Francis, v. 1, n. 6, p. 621–631, 2001.
- MA, F. et al. Which is the better forecasting model? a comparison between har-rv and multifractality volatility. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 405, p. 171–180, 2014.
- MANCINI, C. Non-parametric threshold estimation for models with stochastic diffusion coefficient and jumps. **Scandinavian Journal of Statistics**, Wiley Online Library, v. 36, n. 2, p. 270–296, 2009.
- MCALEER, M.; MEDEIROS, M. C. Realized volatility: A review. **Econometric Reviews**, Taylor & Francis, v. 27, n. 1-3, p. 10–45, 2008.
- MERTON, R. C. On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. **Journal of financial economics**, Elsevier, v. 8, n. 4, p. 323–361, 1980.
- MÜLLER, U. A. et al. Fractals and intrinsic time: A challenge to econometricians. **Unpublished manuscript, Olsen & Associates, Zürich**, 1993.

- MÜLLER, U. A. et al. Volatilities of different time resolutions—analyzing the dynamics of market components. **Journal of Empirical Finance**, Elsevier, v. 4, n. 2-3, p. 213–239, 1997.
- PATTON, A. J. Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. **Journal of Econometrics**, Elsevier, v. 160, n. 1, p. 246–256, 2011.
- PATTON, A. J.; SHEPPARD, K. Good volatility, bad volatility: Signed jumps and the persistence of volatility. **Review of Economics and Statistics**, MIT Press, v. 97, n. 3, p. 683–697, 2015.
- PORTNOY, S.; KOENKER, R. The gaussian hare and the laplacian tortoise: computability of squared-error versus absolute-error estimators. **Statistical Science**, Institute of Mathematical Statistics, v. 12, n. 4, p. 279–300, 1997.
- SILVERMAN, B. W. Density estimation for statistics and data analysis. CRC/Chapman and Hall, 1986.
- SOUČEK, M.; TODOROVA, N. Realized volatility transmission: The role of jumps and leverage effects. **Economics Letters**, Elsevier, v. 122, n. 2, p. 111–115, 2014.
- WANG, X.; WU, C.; XU, W. Volatility forecasting: The role of lunch-break returns, overnight returns, trading volume and leverage effects. **International Journal of Forecasting**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 609–619, 2015.
- XU, J.; WANG, S. High frequency volatility forecasting considering jump and persistent leverage. **Journal of Statistics and Management Systems**, Taylor & Francis, v. 20, n. 2, p. 275–296, 2017.
- ZHANG, L.; MYKLAND, P. A.; AÏT-SAHALIA, Y. A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data. **Journal of the American Statistical Association**, Taylor & Francis, v. 100, n. 472, p. 1394–1411, 2005.
- ZIEGELMANN, F. A. **Estimation of Volatility Functions: Nonparametric and Semi-Parametric Methods**. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, University of Kent at Canterbury (UK), 2002.
- ŽIKEŠ, F.; BARUNÍK, J. Semi-parametric conditional quantile models for financial returns and realized volatility. **Journal of Financial Econometrics**, Oxford University Press, v. 14, n. 1, p. 185–226, 2014.

Apêndice A – MODELO HQADL-CJL

A construção da especificação HQADL-RV-JL para estimação do quantil condicional da log volatilidade segue, em partes, a heurística adotada por Corsi (2009) para derivação do modelo HAR. No âmbito de modelos para volatilidade de séries financeiras, a variável de interesse e seus componentes são frequentemente atribuídos a fatores latentes. Dessa maneira, suponha que logaritmo da variação quadrática dos retornos amostrais em $t + 1$ seja definido por

$$\log \text{QV}_{t+1} \equiv \log \hat{V}_{t+1}^{(h)} = c^{(h)} + \beta^{(h)} \log \hat{C}_t^{(h)} + \alpha^{(h)} \log (1 + \hat{J}_t^{(h)}) + \gamma^{(h)} r_t^{(h)-} + \omega_{t+1}^{(h)} \quad (16)$$

onde $c^{(h)}$ é uma constante, $\omega_t^{(h)}$ são as inovações e a volatilidade parcial não observada é representada pelo logaritmo da variância integrada ($\log \hat{C}_t^{(h)}$), dos saltos ($\hat{J}_t^{(h)}$) e do efeito alavancagem ($r_t^{(h)-}$), todos observados na mesma escala de tempo h . Assuma agora que a dinâmica de propagação assimétrica da volatilidade seja definida pela superposição de frequências em ordem hierárquica, isto é, h deve satisfazer a seguinte condição: $m > w > d$, onde $d = 1$, $w = 5$ e $m = 22$ representam os componentes observados a nível diário, semanal e mensal, respectivamente. Por último, suponha que o nível de volatilidade de curto prazo não afeta as estratégias de operadores de longo prazo, mas o nível de volatilidade futura de longo-prazo altera as estratégias dos operadores de curto prazo¹. Do ponto de vista econômico, a interpretação deste argumento se baseia na ideia de que agentes que operam no curto prazo são *forward looking* com relação aos a volatilidade de um instrumento financeiro. Sob esta pressuma, o modelo resultante apresenta três equações com diferentes horizontes temporais

$$\begin{aligned} \log \hat{V}_{t+1}^{(m)} = c^{(m)} + \beta^{(m)} \log \hat{C}_t^{(m)} + \alpha^{(m)} \log (1 + \hat{J}_t^{(m)}) \\ + \gamma^{(w)} r_t^{(m)-} + \omega_{t+1}^{(m)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \log \hat{V}_{t+1}^{(w)} = c^{(w)} + \beta^{(w)} \log \hat{C}_t^{(w)} + \alpha^{(w)} \log (1 + \hat{J}_t^{(w)}) \\ + \delta^{(w)} E \left[\log \hat{V}_{t+1}^{(m)} \right] + \gamma^{(w)} r_t^{(w)-} + \omega_{t+1}^{(w)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \log \hat{V}_{t+1}^{(d)} = c^{(d)} + \beta^{(d)} \log \hat{C}_t^{(d)} + \alpha^{(d)} \log (1 + \hat{J}_t^{(d)}) \\ + \delta^{(d)} E \left[\log \hat{V}_{t+1}^{(w)} \right] + \gamma^{(d)} r_t^{(d)-} + \omega_{t+1}^{(d)} \end{aligned} \quad (19)$$

¹ Müller et al. (1997) observam que volatilidade de longo-prazo tem forte influência sobre a volatilidade de curto-prazo, enquanto os efeitos da volatilidade de curto-prazo sobre a de longo-prazo são negligenciáveis.

onde $\{c^{(d,w,m)}; \alpha^{(d,w,m)}; \beta^{(d,w,m)}; \omega^{(d,w,m)}; \gamma^{(d,w,m)}\}$ são parâmetros desconhecidos e $E[\log \hat{V}_{t+1}^{(w,m)}]$ são as expectativas de volatilidade futura semanal e mensal, respectivamente. Ao substituir as equações em cascata, isto é, (23) em (24), e a equação resultante em (25), obtém-se o seguinte modelo reparametrizado

$$\begin{aligned} \log \hat{V}_{t+1} = & c + \beta^{(d)} \log \hat{C}_t^{(d)} + \beta^{(w)} \log \hat{C}_t^{(w)} + \beta^{(m)} \log \hat{C}_t^{(m)} \\ & + \alpha^{(d)} \log (1 + \hat{J}_t^{(d)}) + \alpha^{(w)} \log (1 + \hat{J}_t^{(w)}) \\ & + \alpha^{(m)} \log (1 + \hat{J}_t^{(m)}) + \gamma^{(d)} r_t^{(d)-} + \gamma^{(w)} r_t^{(w)-} \\ & + \gamma^{(m)} r_t^{(m)-} + \varepsilon_{t+1} \end{aligned} \quad (20)$$

em que $c = c^{(d)} + c^{(w)} + c^{(m)}$ e ε_{t+1} são inovações que dependem dos ruídos $\omega_{t+1}^{(d)}$, $\omega_{t+1}^{(w)}$ e $\omega_{t+1}^{(m)}$.

Note que a equação (20) apresenta uma estrutura semelhante a um modelo Autoregressivo de Defasagens Distribuídas (ADL). Conforme demonstrado por Galvao, Montes-Rojas e Park (2013), a função quantil condicional pode ser aplicada sob esta estrutura, resultando na especificação *Heterogeneous Quantile Autoregressive Distributed Lag Realized Volatility, with Jumps and Leverage effect*, ou simplesmente HQADL-RV-JL, representada por

$$\begin{aligned} Q(\tau | \mathcal{F}_t) = & c_\tau + \beta_\tau^{(d)} \log \hat{C}_t^{(d)} + \beta_\tau^{(w)} \log \hat{C}_t^{(w)} + \beta_\tau^{(m)} \log \hat{C}_t^{(m)} \\ & + \alpha_\tau^{(d)} \log (1 + \hat{J}_t^{(d)}) + \alpha_\tau^{(w)} \log (1 + \hat{J}_t^{(w)}) \\ & + \alpha_\tau^{(m)} \log (1 + \hat{J}_t^{(m)}) + \gamma_\tau^{(d)} r_t^{(d)-} + \gamma_\tau^{(w)} r_t^{(w)-} \\ & + \gamma_\tau^{(m)} r_t^{(m)-} \end{aligned} \quad (21)$$

onde Q é a função condicional² ao τ -ésimo quantil especificado em termos de uma filtragem $\{\mathcal{F}_t \ t \in [0, \infty)\}$ e $\{c; \alpha^{(d,w,m)}; \beta^{(d,w,m)}; \gamma^{(d,w,m)}\}$ são os coeficientes autoregressivos aos quais pretende-se estimar.

² O termo do logaritmo da volatilidade realizada em $t + 1$ ($\log \hat{V}_{t+1}$), subscrito à função do quantil condicional, foi omitido.

Anexo A – QUANTIS CONDICIONAIS ESTIMADOS PELO MODELO HQADL-CJL

Quantil	Variável									
	c	$\widehat{C}_t^{(1)}$	$\widehat{C}_t^{(5)}$	$\widehat{C}_t^{(22)}$	$\widehat{J}_t^{(1)}$	$\widehat{J}_t^{(5)}$	$\widehat{J}_t^{(22)}$	$\widehat{\tau}_t^{(1)}$	$\widehat{\tau}_t^{(5)}$	$\widehat{\tau}_t^{(22)}$
$\tau = 0, 05$	-0,51*** (0,10)	0,32*** (0,03)	0,31*** (0,04)	0,35*** (0,04)	0,11 (0,10)	0,14** (0,07)	0,02 (0,03)	-0,09*** (0,02)	-0,04 (0,04)	0,17* (0,09)
$\tau = 0, 10$	-0,29*** (0,08)	0,28*** (0,02)	0,35*** (0,03)	0,31*** (0,03)	0,09 (0,07)	0,16*** (0,05)	0,03 (0,03)	-0,10*** (0,01)	-0,04 (0,03)	0,05* (0,03)
$\tau = 0, 15$	-0,15** (0,07)	0,27*** (0,02)	0,38*** (0,03)	0,29*** (0,03)	0,14* (0,07)	0,13** (0,04)	0,04** (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,07** (0,03)	0,06 (0,04)
$\tau = 0, 20$	-0,05 (0,06)	0,27*** (0,02)	0,37*** (0,03)	0,29*** (0,02)	0,11*** (0,06)	0,14*** (0,04)	0,03* (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,10*** (0,03)	0,08* (0,05)
$\tau = 0, 25$	0,04 (0,06)	0,27*** (0,02)	0,39*** (0,03)	0,27*** (0,02)	0,14** (0,06)	0,14*** (0,04)	0,03* (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,08*** (0,03)	0,07 (0,05)
$\tau = 0, 30$	0,13** (0,06)	0,27*** (0,02)	0,37*** (0,03)	0,28*** (0,02)	0,15** (0,06)	0,14*** (0,04)	0,03* (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,11*** (0,03)	0,06 (0,05)
$\tau = 0, 35$	0,19*** (0,06)	0,28*** (0,02)	0,36*** (0,03)	0,27*** (0,02)	0,22*** (0,06)	0,16*** (0,03)	0,02 (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,14*** (0,03)	0,06 (0,04)
$\tau = 0, 40$	0,28*** (0,06)	0,29*** (0,02)	0,36*** (0,02)	0,26*** (0,02)	0,25*** (0,05)	0,14*** (0,03)	0,02 (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,15*** (0,03)	0,03 (0,04)
$\tau = 0, 45$	0,40*** (0,06)	0,29*** (0,02)	0,35*** (0,02)	0,24*** (0,02)	0,24*** (0,05)	0,12*** (0,03)	0,03 (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,16*** (0,03)	0,02 (0,04)
$\tau = 0, 50$	0,46*** (0,06)	0,29*** (0,02)	0,35*** (0,02)	0,24*** (0,02)	0,24*** (0,06)	0,12*** (0,03)	0,03 (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,18*** (0,03)	0,01 (0,04)

Quantil	Variável									
	\hat{c}	$\hat{C}_t^{(1)}$	$\hat{C}_t^{(5)}$	$\hat{C}_t^{(22)}$	$\hat{J}_t^{(1)}$	$\hat{J}_t^{(5)}$	$\hat{J}_t^{(22)}$	$\hat{r}_t^{(1)}$	$\hat{r}_t^{(5)}$	$\hat{r}_t^{(22)}$
$\tau = 0, 55$	0,52*** (0,06)	0,29*** (0,02)	0,33*** (0,02)	0,25*** (0,02)	0,28*** (0,06)	0,10*** (0,03)	0,03* (0,02)	-0,11*** (0,01)	-0,18*** (0,03)	0,02 (0,04)
$\tau = 0, 60$	0,61*** (0,06)	0,29*** (0,02)	0,35*** (0,03)	0,22*** (0,02)	0,30*** (0,06)	0,08*** (0,04)	0,04** (0,02)	-0,11*** (0,01)	-0,18*** (0,03)	-0,01 (0,04)
$\tau = 0, 65$	0,65*** (0,06)	0,29*** (0,02)	0,35*** (0,03)	0,22*** (0,02)	0,29*** (0,06)	0,08*** (0,04)	0,05*** (0,02)	-0,10*** (0,01)	-0,21*** (0,03)	0,02 (0,04)
$\tau = 0, 70$	0,72*** (0,06)	0,30*** (0,02)	0,36*** (0,03)	0,21*** (0,02)	0,30*** (0,06)	0,09*** (0,04)	0,04** (0,02)	-0,11*** (0,01)	-0,22*** (0,03)	0,01 (0,05)
$\tau = 0, 75$	0,78*** (0,07)	0,31*** (0,02)	0,33*** (0,03)	0,21*** (0,02)	0,31*** (0,06)	0,09*** (0,04)	0,04* (0,02)	-0,11*** (0,01)	-0,23*** (0,03)	0,01 (0,05)
$\tau = 0, 80$	0,87*** (0,07)	0,31*** (0,02)	0,33*** (0,03)	0,22*** (0,02)	0,27*** (0,06)	0,10*** (0,05)	0,03 (0,02)	-0,11*** (0,01)	-0,25*** (0,03)	0,01 (0,03)
$\tau = 0, 85$	0,96*** (0,09)	0,29*** (0,02)	0,38*** (0,04)	0,18*** (0,03)	0,25*** (0,08)	0,07 (0,05)	0,05* (0,03)	-0,11*** (0,01)	-0,27*** (0,04)	0,01 (0,06)
$\tau = 0, 90$	0,98*** (0,09)	0,30*** (0,02)	0,39*** (0,04)	0,18*** (0,03)	0,24*** (0,09)	0,08 (0,06)	0,05* (0,03)	-0,10*** (0,01)	-0,26*** (0,04)	0,04 (0,06)
$\tau = 0, 95$	1,14*** (0,16)	0,31*** (0,04)	0,41*** (0,06)	0,15** (0,06)	0,39*** (0,14)	-0,02 (0,08)	0,09* (0,05)	-0,12*** (0,03)	-0,19*** (0,06)	0,03 (0,09)