

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**CHARLES LORENZINI**

**MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA  
PARA SINTONIA DE CONTROLADORES  
PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO E  
PROPORCIONAL-MÚLTIPLOS-RESSONANTES**

Porto Alegre  
2019

**CHARLES LORENZINI**

**MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA  
PARA SINTONIA DE CONTROLADORES  
PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO E  
PROPORCIONAL-MÚLTIPLOS-RESSONANTES**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Porto Alegre  
2019

**CHARLES LORENZINI**

**MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA  
PARA SINTONIA DE CONTROLADORES  
PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO E  
PROPORCIONAL-MÚLTIPLOS-RESSONANTES**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, PPGEE - UFRGS  
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Takashi Yoneyama, PG/EEC - ITA  
PhD by University of London – London, England

Prof. Dr. Hilton Abílio Gründling, PPGEE - UFSM  
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., PPGEE - UFRGS  
Docteur de l'Université Paul Sabatier – Toulouse, France

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores, PPGEE - UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Aurélio Tergolina Salton, PPGEE - UFRGS  
PhD by The University of Newcastle Australia – Newcastle, Australia

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre, Agosto de 2019.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos meus pais, meus exemplos de vida.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu pai Antonino Lorenzini e à minha mãe Rosa Bernardete Lorenzini, por todo amor e apoio dedicados a mim durante toda a minha vida, e também à minha irmã Rafaela Lorenzini, pela ajuda e pelo companheirismo.

Aos amigos e às pessoas especiais que fizeram parte deste desafio.

Aos professores Luís Fernando Alves Pereira e Alexandre Sanfelice Bazanella pela orientação, disponibilidade, conselhos e conhecimento transmitido.

Aos amigos Luciano Moreira e Gustavo R. Gonçalves da Silva, alunos de doutorado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (PPGEE-UFRGS), pelo auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas e amigos Marcos, Renan, Rodrigo, Guilherme e Chrystian.

À CP Eletrônica, uma afiliada da Schneider Electric, que disponibilizou o estágio de saída de uma *UPS* comercial monofásica no qual foram realizados partes dos testes experimentais apresentados neste trabalho.

Ao povo brasileiro que, através de seus impostos e das agências de fomento, torna possível a existência deste tipo de trabalho. Em particular, este trabalho foi desenvolvido junto ao PPGEE-UFRGS e recebeu o apoio de bolsa de doutorado da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) durante a sua execução.

## RESUMO

Este trabalho propõe o método generalizado da oscilação forçada para sintonia de controladores proporcional-integral-derivativo, proporcional-ressonante e proporcional-múltiplos-ressonantes, utilizando a filosofia de projeto do método da oscilação forçada de Ziegler-Nichols. A metodologia é aplicada a processos causais, lineares e invariantes no tempo cuja resposta em frequência não necessariamente cruza a linha de  $-180^\circ$  de fase. Esse método é baseado no experimento do relé com fase ajustável, que possibilita a identificação do ponto mais apropriado da resposta em frequência de cada classe de processos em um único tipo de experimento. A etapa de projeto é realizada por meio dos conjuntos de fórmulas de sintonia, os quais foram desenvolvidos para cada classe de processos e para cada topologia de controle, considerando o ponto da resposta em frequência identificado e a obtenção de adequadas margens de estabilidade. A aplicação do método proposto, o qual inclui o experimento de identificação e os conjuntos de fórmulas de sintonia desenvolvidos, é realizada por meio de exemplos numéricos e também através da implementação prática dos controladores em processos reais, mostrando sua ampla aplicabilidade.

**Palavras-chave:** Seguimento de referências, rejeição de perturbações, métodos de Ziegler-Nichols, método generalizado da oscilação forçada, experimento do relé com fase ajustável, controladores proporcional-integral-derivativo, controlador proporcional-ressonante, controlador proporcional-múltiplos-ressonantes.

## ABSTRACT

This work proposes the generalized forced oscillation method for tuning proportional-integral-derivative, proportional-resonant, and proportional-multi-resonant controllers using the Ziegler-Nichols's forced oscillation method philosophy. The methodology applies to causal linear time-invariant plants whose frequency response does not necessarily cross the  $-180^\circ$  phase line. This method is based on the relay with adjustable phase experiment, which enables the identification of the most appropriate point of the frequency response for each class of plants in a single type of experiment. The design procedure is performed through sets of tuning formulas that were developed for each class of plants and each control topology, considering the identified frequency response point and aiming at obtaining appropriate stability margins. The application of the proposed methodology, which includes the identification experiment and the developed tuning formulas, is performed by means of numerical examples and implementation of the designed controllers into actual physical plants, showing its wide applicability.

**Keywords:** Reference tracking, disturbance rejection, Ziegler-Nichols tuning methods, generalized forced oscillation method, relay with adjustable phase experiment, proportional-integral-derivative controller, proportional-resonant controller, proportional-multi-resonant controller.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Diagrama em blocos de um sistema em malha fechada. . . . .	26
Figura 2 –	Contorno de Nyquist para $L(s)$ com polos sobre o eixo imaginário. . .	29
Figura 3 –	Resposta em frequência da função de transferência apresentada em (39) com $N_c(s) = \omega_r^2$ e $\omega_r = 1$ rad/s. . . . .	38
Figura 4 –	Magnitude da função de transferência $C(s)$ apresentada em (43). . . .	40
Figura 5 –	Determinação das variáveis $a$ e $L$ a partir da resposta ao salto de um processo. . . . .	41
Figura 6 –	Diagrama em blocos do sistema em malha fechada com controle proporcional para obtenção do ponto crítico de $G(s)$ . . . . .	43
Figura 7 –	Saída de um sistema em malha fechada com oscilação sustentada. . . .	43
Figura 8 –	Diagrama em blocos do sistema realimentado com um relé para identificação do período crítico e do ganho crítico de $G(s)$ . . . . .	44
Figura 9 –	Resposta em frequência do modelo do ângulo de arfagem de um avião. . . .	48
Figura 10 –	Saída dos experimentos de Ziegler-Nichols em malha aberta e malha fechada para o processo do modelo do ângulo de arfagem de um avião. . . .	48
Figura 11 –	Resposta em frequência do sistema de posicionamento do cabeçote de leitura e de gravação de um disco rígido. . . . .	49
Figura 12 –	Saída dos experimentos de Ziegler-Nichols em malha aberta e malha fechada para o sistema de posicionamento do cabeçote de leitura e de gravação de um disco rígido. . . . .	49
Figura 13 –	Resposta em frequência do sistema de direção ativa de um carro de quatro rodas. . . . .	50
Figura 14 –	Saída dos experimentos de Ziegler-Nichols em malha aberta e malha fechada para o sistema de direção ativa de um carro de quatro rodas. . .	50
Figura 15 –	Resposta em frequência de $\hat{F}(j\omega)$ na faixa de frequências de $10^{-4}$ até $10^4$ rad/s. . . . .	53
Figura 16 –	Diagrama em blocos do experimento do relé para identificação do ponto crítico de $F(s)G(s)$ . . . . .	66
Figura 17 –	Resposta em frequência de $F(j\omega)$ com fase constante na faixa de frequência de $10^{-4}$ até $10^4$ rad/s. . . . .	67
Figura 18 –	Diagrama em blocos do experimento do RFA. . . . .	68
Figura 19 –	Respostas em frequência de $G_{b1}(j\omega)$ e de $F(j\omega)G_{b1}(j\omega)$ com $\gamma = -60^\circ$ . . . . .	70
Figura 20 –	Resposta do sistema em malha fechada para o experimento do RFA aplicado no processo representado por $G_{b1}(s)$ . . . . .	71
Figura 21 –	Respostas em frequência do processo, $G_{b1}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta, $C_{pi}(j\omega)G_{b1}(j\omega)$ e $C_{pid}(j\omega)G_{b1}(j\omega)$ . . . . .	72



Figura 22 – Diagramas de Nyquist do processo, $G_{b1}(s)$ , e das funções de transferência de malha aberta, $C_{pi}(s)G_{b1}(s)$ e $C_{pid}(s)G_{b1}(s)$ . . . . .	73
Figura 23 – Respostas do sistema em malha fechada para um degrau unitário considerando o processo representado por $G_{b1}(s)$ operando com os controladores PI e PID. . . . .	73
Figura 24 – Respostas em frequência de $G_{b2}(j\omega)$ e de $F(j\omega)G_{b2}(j\omega)$ com $\gamma = -60^\circ$ . . . . .	74
Figura 25 – Resposta do sistema em malha fechada para o experimento do RFA aplicado no processo representado por $G_{b2}(s)$ . . . . .	74
Figura 26 – Respostas em frequência do processo, $G_{b2}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta, $C_{pi}(j\omega)G_{b2}(j\omega)$ e $C_{pid}(j\omega)G_{b2}(j\omega)$ . . . . .	75
Figura 27 – Diagramas de Nyquist do processo, $G_{b2}(s)$ , e das funções de transferência de malha aberta, $C_{pi}(s)G_{b2}(s)$ e $C_{pid}(s)G_{b2}(s)$ . . . . .	76
Figura 28 – Respostas do sistema em malha fechada para um degrau unitário considerando o processo representado por $G_{b2}(s)$ operando com os controladores PI e PID. . . . .	76
Figura 29 – Respostas em frequência de $G_{c1}(j\omega)$ e de $F(j\omega)G_{c1}(j\omega)$ com $\gamma = -60^\circ$ e com $-120^\circ$ . . . . .	77
Figura 30 – Resposta do sistema em malha fechada para o experimento do RFA aplicado no processo representado por $G_{c1}(s)$ . . . . .	78
Figura 31 – Respostas em frequência do processo, $G_{c1}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta, $C_{pi}(j\omega)G_{c1}(j\omega)$ e $C_{pid}(j\omega)G_{c1}(j\omega)$ . . . . .	79
Figura 32 – Diagramas de Nyquist de $G_{c1}(s)/5$ e das funções de transferência de malha aberta, $C_{pi}(s)G_{c1}(s)$ e $C_{pid}(s)G_{c1}(s)$ . . . . .	79
Figura 33 – Respostas do sistema em malha fechada para um degrau unitário considerando o processo representado por $G_{c1}(s)$ operando com os controladores PI e PID. . . . .	80
Figura 34 – Processo de controle de nível composto de equipamentos industriais.	81
Figura 35 – Experimento do RFA aplicado no controle de nível do tanque 2. . . . .	82
Figura 36 – Respostas do nível do tanque 2 com os controladores PID sintonizados através do experimento do RFA com $0^\circ$ (método COF). . . . .	84
Figura 37 – Respostas do nível do tanque 2 com os controladores PID sintonizados através do experimento do RFA com $-60^\circ$ . . . . .	84
Figura 38 – Diagramas de Nyquist dos processos $G_{ab}(s)$ e $G_b(s)$ . . . . .	85
Figura 39 – Diagramas de Nyquist do processo, $G_{ab}(s)$ , e da função de transferência de malha aberta, $C_{pi}(s)G_{ab}(s)$ . . . . .	86
Figura 40 – Experimento do RFA aplicado no controle de nível do tanque 1. . . . .	87
Figura 41 – Respostas do nível do tanque 1 com os controladores PID sintonizados através do experimento do RFA com $-60^\circ$ . . . . .	89
Figura 42 – Respostas do nível do tanque 1 com os controladores PID sintonizados através do experimento do RFA com $-120^\circ$ . . . . .	89
Figura 43 – Diagramas de Nyquist dos processos $G_{bc}(s)$ e $G_c(s)$ . . . . .	91
Figura 44 – Diagramas de Nyquist do processo, $G_{bc}(s)$ , e da função de transferência de malha aberta, $C_{pi}(s)G_{bc}(s)$ . . . . .	92
Figura 45 – Resposta do sistema em malha fechada para um degrau unitário considerando o processo representado por $G_{bc}(s)$ operando com os controladores PI. . . . .	92

Figura 46 – Diagramas de Nyquist da função de transferência de malha aberta, $C_{pr}(s)G_a(s)$ , considerando diferentes valores de $p$ . . . . .	100
Figura 47 – Resposta em frequência da função de malha aberta, $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$ , para análise do parâmetro $\eta$ . . . . .	102
Figura 48 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta, $C_{pr}(s)G_a(s)$ , para análise do parâmetro $\eta$ . . . . .	103
Figura 49 – Resposta em frequência da função de malha aberta, $C_{pr}(j\omega)G_b(j\omega)$ , para análise do parâmetro $\eta$ . . . . .	104
Figura 50 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta, $C_{pr}(s)G_b(s)$ , para análise do parâmetro $\eta$ . . . . .	105
Figura 51 – Resposta em frequência da função de malha aberta, $C_{pr}(j\omega)G_c(j\omega)$ , para análise do parâmetro $\eta$ . . . . .	106
Figura 52 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta, $C_{pr}(s)G_c(s)$ , para análise do parâmetro $\eta$ . . . . .	107
Figura 53 – Respostas em frequência do processo, $G_a(j\omega)$ , e da função de malha aberta, $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$ . . . . .	111
Figura 54 – Resposta em frequência da função de malha aberta, $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$ , para análise do parâmetro $\xi$ . . . . .	112
Figura 55 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta, $C_{pr}(s)G_a(s)$ , para análise do parâmetro $\xi$ . . . . .	113
Figura 56 – Respostas em frequência do processo, $G_b(j\omega)$ , e da função de malha aberta, $C_{pr}(j\omega)G_b(j\omega)$ . . . . .	114
Figura 57 – Respostas em frequência do processo, $G_c(j\omega)$ , e da função de malha aberta, $C_{pr}(j\omega)G_c(j\omega)$ . . . . .	114
Figura 58 – Respostas em frequência do bloco em avanço de fase com $\omega_m = 1$ rad/s considerando diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	116
Figura 59 – Resposta em frequência da função de malha aberta, $C_{pra}(j\omega)G_a(j\omega)$ , para análise do parâmetro $\alpha$ . . . . .	117
Figura 60 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta, $C_{pra}(s)G_a(s)$ , para análise do parâmetro $\alpha$ . . . . .	118
Figura 61 – Respostas em frequência do processo, $G_a(j\omega)$ , e da função de malha aberta, $C_{pra}(j\omega)G_a(j\omega)$ . . . . .	119
Figura 62 – Sinal de referência senoidal e resposta do sistema em malha fechada considerando o processo $G_a(s)$ com os controladores PR e PRA. . . . .	121
Figura 63 – Respostas em frequência do processo, $G_a(j\omega)$ , e das funções de malha aberta, $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$ e $C_{pra}(j\omega)G_a(j\omega)$ . . . . .	122
Figura 64 – Diagramas de Nyquist do processo, $G_a(s)$ , e das funções de transferência de malha aberta, $C_{pr}(s)G_a(s)$ e $C_{pra}(s)G_a(s)$ . . . . .	123
Figura 65 – Sinal de referência senoidal e resposta do sistema em malha fechada considerando o processo $G_b(s)$ com o controlador PR. . . . .	124
Figura 66 – Diagramas de Nyquist do processo, $G_b(s)$ , e da função de transferência de malha aberta, $C_{pr}(s)G_b(s)$ . . . . .	125
Figura 67 – Sinal de referência senoidal e resposta do sistema em malha fechada considerando o processo $G_c(s)$ com o controlador PR. . . . .	126
Figura 68 – Diagramas de Nyquist do processo, $G_c(s)$ , e da função de transferência de malha aberta, $C_{pr}(s)G_c(s)$ . . . . .	127
Figura 69 – Representação esquemática do estágio de saída de uma UPS monofásica com carga. . . . .	128

Figura 70 – Cargas conectadas à saída de uma <i>UPS</i> monofásica para testes. . . . .	129
Figura 71 – Configuração experimental do estágio de saída de uma <i>UPS</i> monofásica com carga. . . . .	130
Figura 72 – Diagrama em blocos dos sistemas de controle aplicados ao estágio de saída de uma <i>UPS</i> . . . . .	131
Figura 73 – Diagrama em blocos do experimento do RFA para a identificação de um ponto da resposta em frequência de $G_v(j\omega)$ . . . . .	132
Figura 74 – Saída do experimento do RFA com $-60^\circ$ realizado na malha $G_v(s)$ . . . . .	132
Figura 75 – Diagrama em blocos do experimento do RFA para a identificação de um ponto da resposta em frequência de $G_i(j\omega)$ . . . . .	133
Figura 76 – Saída do experimento do RFA com $-120^\circ$ realizado na malha $G_i(s)$ . . . . .	133
Figura 77 – Diagrama em blocos do experimento do RFA para a identificação de um ponto da resposta em frequência de $G_v(j\omega)$ . . . . .	134
Figura 78 – Saída do experimento do RFA com $-60^\circ$ realizado na malha $G_v(s)$ . . . . .	134
Figura 79 – Tensão e corrente de saída obtidas com o controlador PR no laço de tensão. . . . .	136
Figura 80 – Tensão e corrente de saída obtidas através da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão. . . . .	136
Figura 81 – Sinal de controle com 100% de carga não linear. . . . .	136
Figura 82 – Valores de <i>THD</i> e de <i>RMS</i> da tensão de saída obtidas com o controlador PR no laço de tensão. . . . .	137
Figura 83 – Valores de <i>THD</i> e de <i>RMS</i> da tensão de saída obtidas através da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão. . . . .	137
Figura 84 – Perfil de tolerância do desvio da tensão de saída para degraus de carga e estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão. . . . .	138
Figura 85 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_a(s)$ e controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	153
Figura 86 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_a(s)$ e controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	153
Figura 87 – Respostas em frequência de $G_a(j\omega)$ e de $C_{pmra}(j\omega)G_a(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	154
Figura 88 – Diagramas de Nyquist de $G_a(s)$ e de $C_{pmra}(s)G_a(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	154
Figura 89 – Respostas em frequência de $G_a(j\omega)$ e de $C_{pmra}(j\omega)G_a(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	155
Figura 90 – Diagramas de Nyquist de $G_a(s)$ e de $C_{pmra}(s)G_a(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	155
Figura 91 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_a(s)$ e controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	157
Figura 92 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_a(s)$ e controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	157

Figura 93 – Respostas em frequência de $G_a(j\omega)$ e de $C_{pmra}(j\omega)G_a(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	158
Figura 94 – Diagramas de Nyquist de $G_a(s)$ e de $C_{pmra}(s)G_a(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	158
Figura 95 – Respostas em frequência de $G_a(j\omega)$ e de $C_{pmra}(j\omega)G_a(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	159
Figura 96 – Diagramas de Nyquist de $G_a(s)$ e de $C_{pmra}(s)G_a(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	159
Figura 97 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_b(s)$ e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	161
Figura 98 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_b(s)$ e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	161
Figura 99 – Respostas em frequência de $G_b(j\omega)$ e de $C_{pmr}(j\omega)G_b(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	162
Figura 100 – Diagramas de Nyquist de $G_b(s)$ e de $C_{pmr}(s)G_b(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	162
Figura 101 – Respostas em frequência de $G_b(j\omega)$ e de $C_{pmr}(j\omega)G_b(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	163
Figura 102 – Diagramas de Nyquist de $G_b(s)$ e de $C_{pmr}(s)G_b(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	163
Figura 103 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_b(s)$ e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	165
Figura 104 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_b(s)$ e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	165
Figura 105 – Respostas em frequência de $G_b(j\omega)$ e de $C_{pmr}(j\omega)G_b(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	166
Figura 106 – Diagramas de Nyquist de $G_b(s)$ e $C_{pmr}(s)G_b(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	166
Figura 107 – Respostas em frequência de $G_b(j\omega)$ e de $C_{pmr}(j\omega)G_b(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	167
Figura 108 – Diagramas de Nyquist de $G_b(s)$ e de $C_{pmr}(s)G_b(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	167
Figura 109 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_c(s)$ e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	169
Figura 110 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_c(s)$ e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	169
Figura 111 – Respostas em frequência de $G_c(j\omega)$ e de $C_{pmr}(j\omega)G_c(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	170
Figura 112 – Diagramas de Nyquist de $G_c(s)$ e de $C_{pmr}(s)G_c(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ . . . . .	170
Figura 113 – Respostas em frequência de $G_c(j\omega)$ e de $C_{pmr}(j\omega)G_c(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	171

Figura 114 – Diagramas de Nyquist de $G_c(s)$ e de $C_{pmr}(s)G_c(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	171
Figura 115 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_c(s)$ e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	173
Figura 116 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo $G_c(s)$ e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	173
Figura 117 – Respostas em frequência de $G_c(j\omega)$ e de $C_{pmr}(j\omega)G_c(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	174
Figura 118 – Diagramas de Nyquist de $G_c(s)$ e de $C_{pmr}(s)G_c(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ . . . . .	174
Figura 119 – Respostas em frequência de $G_c(j\omega)$ e de $C_{pmr}(j\omega)G_c(j\omega)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	175
Figura 120 – Diagramas de Nyquist de $G_c(s)$ e de $C_{pmr}(s)G_c(s)$ com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ . . . . .	175
Figura 121 – Diagrama em blocos do sistema de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PMR no laço de tensão aplicado ao estágio de saída de uma <i>UPS</i> . . . . .	176
Figura 122 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle $K_c + PMR_2$ . . . . .	179
Figura 123 – Sinal de controle com 100% de carga não linear obtido através da estrutura de controle $K_c + PMR_2$ . . . . .	179
Figura 124 – Valores de <i>THD</i> e de <i>RMS</i> da tensão de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle $K_c + PMR_2$ . . . . .	180
Figura 125 – Perfil de tolerância do desvio da tensão de saída para degraus de carga obtidos com a estrutura de controle $K_c + PMR_2$ . . . . .	180
Figura 126 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle $K_c + PMR_3$ . . . . .	181
Figura 127 – Sinal de controle com 100% de carga não linear obtido através da estrutura de controle $K_c + PMR_3$ . . . . .	181
Figura 128 – Valores de <i>THD</i> e de <i>RMS</i> da tensão de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle $K_c + PMR_3$ . . . . .	182
Figura 129 – Perfil de tolerância do desvio da tensão de saída para degraus de carga obtidos com a estrutura de controle $K_c + PMR_3$ . . . . .	182
Figura 130 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle $K_c + PMR_4$ . . . . .	183
Figura 131 – Sinal de controle com 100% de carga não linear obtido através da estrutura de controle $K_c + PMR_4$ . . . . .	183
Figura 132 – Valores de <i>THD</i> e de <i>RMS</i> da tensão de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle $K_c + PMR_4$ . . . . .	184
Figura 133 – Perfil de tolerância do desvio da tensão de saída para degraus de carga obtidos com estrutura de controle $K_c + PMR_4$ . . . . .	184

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Fórmulas de Ziegler-Nichols para sintonia pelo método da resposta ao salto. . . . .	42
Tabela 2 –	Fórmulas de Ziegler-Nichols para sintonia pelo método da oscilação forçada. . . . .	43
Tabela 3 –	Fórmulas de Tyreus-Luyben para sintonia pelo método da oscilação forçada. . . . .	43
Tabela 4 –	Fórmulas de sintonia dos controladores P, PI e PID pelo método GOF.	65
Tabela 5 –	Dados do experimento do RFA para o processo $G_{b1}(s)$ . . . . .	71
Tabela 6 –	Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho para o processo $G_{b1}(s)$ . . . . .	71
Tabela 7 –	Dados do experimento do RFA para o processo $G_{b2}(s)$ . . . . .	75
Tabela 8 –	Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho para o processo $G_{b2}(s)$ . . . . .	75
Tabela 9 –	Dados do experimento do RFA para o processo $G_{c1}(s)$ . . . . .	78
Tabela 10 –	Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho para o processo $G_{c1}(s)$ . . . . .	78
Tabela 11 –	Parâmetros do experimento do RFA no controle de nível do tanque 2.	83
Tabela 12 –	Parâmetros dos controladores PID no controle de nível do tanque 2. .	83
Tabela 13 –	Medidas de desempenho no controle de nível do tanque 2. . . . .	83
Tabela 14 –	Parâmetros do experimento do RFA no controle de nível do tanque 1.	88
Tabela 15 –	Parâmetros dos controladores PID no controle de nível do tanque 1. .	88
Tabela 16 –	Medidas de desempenho no controle de nível do tanque 1. . . . .	90
Tabela 17 –	Magnitude da função de malha aberta com controlador PR avaliada em $\omega_r$ , $C_{pr}(j\omega_r)G_a(j\omega_r)$ , e medidas de desempenho do sistema em malha fechada. . . . .	113
Tabela 18 –	Dados do experimento do RFA para o processo $G_a(s)$ . . . . .	120
Tabela 19 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo $G_a(s)$ . . . . .	121
Tabela 20 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo $G_a(s)$ . . . . .	121
Tabela 21 –	Dados do experimento do RFA para o processo $G_b(s)$ . . . . .	124
Tabela 22 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo $G_b(s)$ . . . . .	124
Tabela 23 –	Dados do experimento do RFA para o processo $G_c(s)$ . . . . .	126
Tabela 24 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo $G_c(s)$ . . . . .	126
Tabela 25 –	Parâmetros da configuração experimental. . . . .	131

Tabela 26 –	Dados do experimento do RFA realizado na malha $G_v(s)$ . . . . .	132
Tabela 27 –	Dados do experimento do RFA realizado na malha $G_i(s)$ . . . . .	134
Tabela 28 –	Dados do experimento do RFA realizado na malha $G_v(s)$ com realimentação da corrente no indutor. . . . .	134
Tabela 29 –	Parâmetros da estrutura de controle. . . . .	135
Tabela 30 –	Resumo dos resultados experimentais. . . . .	137
Tabela 31 –	Variáveis utilizadas na equação geral de sintonia do método GOF para as estruturas PRs. . . . .	147
Tabela 32 –	Variáveis de sintonia do método GOF para os controladores PMR e PMRA. . . . .	147
Tabela 33 –	Parâmetros de sintonia de $C_{pr_n}(s)$ com $n = 1$ . . . . .	150
Tabela 34 –	Parâmetros de sintonia de $C_{pr_n}(s)$ com $n > 1$ . . . . .	151
Tabela 35 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ e medidas de desempenho para o processo $G_a(s)$ . . . . .	152
Tabela 36 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ e medidas de desempenho para o processo $G_a(s)$ . . . . .	152
Tabela 37 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ para o processo $G_a(s)$ . . . . .	156
Tabela 38 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ para o processo $G_a(s)$ . . . . .	156
Tabela 39 –	Medidas de desempenho para o processo $G_a(s)$ considerando controladores PMRAs com três modos ressonantes. . . . .	156
Tabela 40 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ e medidas de desempenho para o processo $G_b(s)$ . . . . .	160
Tabela 41 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ e medidas de desempenho para o processo $G_b(s)$ . . . . .	160
Tabela 42 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ para o processo $G_b(s)$ . . . . .	164
Tabela 43 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ para o processo $G_b(s)$ . . . . .	164
Tabela 44 –	Medidas de desempenho para o processo $G_b(s)$ considerando controladores PMRs com três modos ressonantes. . . . .	164
Tabela 45 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $2\omega_r$ e medidas de desempenho para o processo $G_c(s)$ . . . . .	168
Tabela 46 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ e $3\omega_r$ e medidas de desempenho para o processo $G_c(s)$ . . . . .	168
Tabela 47 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $2\omega_r$ e $3\omega_r$ para o processo $G_c(s)$ . . . . .	172
Tabela 48 –	Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências $\omega_r$ , $3\omega_r$ e $5\omega_r$ para o processo $G_c(s)$ . . . . .	172
Tabela 49 –	Medidas de desempenho para o processo $G_c(s)$ considerando controladores PMRs com três modos ressonantes. . . . .	172

Tabela 50 –	Parâmetros da estrutura de controle considerando $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ .	177
Tabela 51 –	Parâmetros da estrutura de controle considerando $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ .	178
Tabela 52 –	Resumo dos resultados experimentais obtidos pelo método GOF com $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ .	185
Tabela 53 –	Resumo dos resultados experimentais obtidos pelo método GOF com $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ .	185
Tabela 54 –	Resumo dos resultados experimentais obtidos pela SPOC-LMI com $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ .	186
Tabela 55 –	Resumo dos resultados experimentais obtidos pela SPOC-LMI com $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ .	186



## LISTA DE ABREVIATURAS

<i>BIBO</i>	<i>Bounded-Input Bounded-Output</i>
CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
COF	Clássico da Oscilação Forçada
<i>CTFS</i>	<i>Continuous-Time Fourier Series</i>
EOF	Estendido da Oscilação Forçada
<i>FOI</i>	<i>Fractional Order Integrator</i>
GOF	Generalizado da Oscilação Forçada
<i>IEC</i>	<i>International Electrotechnical Commission</i>
<i>IHD</i>	<i>Individual Harmonic Distortion</i>
<i>IGBT</i>	<i>Insulated Gate Bipolar Transistor</i>
<i>LIC</i>	<i>Level indicator controller</i>
<i>LMI</i>	<i>Linear Matrix Inequality</i>
<i>LTIC</i>	<i>Linear Time Invariant Causal</i>
<i>MIMO</i>	<i>Multiple-Input, Multiple-Output</i>
PI	Proporcional-Integral
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
PMI	Princípio do Modelo interno
PR	Proporcional-Ressonante
PRA	Proporcional-Ressonante com bloco de avanço de fase
PMR	Proporcional-Múltiplos-Ressonantes
PMRA	Proporcional-Múltiplos-Ressonantes com bloco de avanço de fase
<i>PWM</i>	<i>Pulse-Width Modulation</i>
RFA	Relé com fase ajustável
<i>RMS</i>	<i>Root Mean Square</i>
SPD	Semiplano direito

<b>SPE</b>	Semiplano izquierdo
<b>SI</b>	Sistema Internacional de Unidades
<b><i>SISO</i></b>	<i>Single-Input, Single-Output</i>
<b><i>THD</i></b>	<i>Total Harmonic Distortion</i>
<b><i>UPS</i></b>	<i>Uninterruptible Power Supply</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$t_s$	Tempo de acomodação
$M_o$	Máximo sobrepasso percentual
$n_s$	Tempo de acomodação dado em períodos do sinal de referência
$T_u$	Período crítico de um processo
$\omega_u$	Frequência crítica de um processo
$K_u$	Ganho crítico de um processo
$M_u$	Magnitude da resposta em frequência do processo em seu ponto crítico
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais maiores que zero
$p$	Localização no plano complexo
$\text{Re}\{a\}$	Parte real do número complexo $a$
$\text{Im}\{a\}$	Parte imaginária do número complexo $a$
$\omega_{120}$	Menor frequência em que a fase da resposta em frequência do processo é $-120^\circ$
$M_{120}$	Magnitude da resposta em frequência do processo no ponto de fase $-120^\circ$
$\omega_{60}$	Menor frequência em que a fase da resposta em frequência do processo é $-60^\circ$
$M_{60}$	Magnitude da resposta em frequência do processo no ponto de fase $-60^\circ$
$\gamma$	Fase do integrador de ordem fracionária e do relé com fase ajustável dada em graus

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	23
<b>2</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS</b>	26
<b>2.1</b>	<b>Sistemas realimentados</b>	26
2.1.1	Estabilidade de sistemas realimentados	27
2.1.2	Desempenho de sistemas realimentados	30
<b>2.2</b>	<b>Seguimento de referências e rejeição de perturbações</b>	32
2.2.1	Princípio do modelo interno	32
2.2.2	Controladores baseados no princípio do modelo interno	35
2.2.3	Métodos de sintonia de Ziegler-Nichols	40
<b>2.3</b>	<b>Integrador de ordem fracionária</b>	51
<b>2.4</b>	<b>Conclusões do capítulo</b>	53
<b>3</b>	<b>MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PID</b>	55
<b>3.1</b>	<b>Motivação</b>	55
<b>3.2</b>	<b>Método generalizado da oscilação forçada</b>	56
3.2.1	Definição de $\nu$ e $p$	58
3.2.2	Sintonia do controlador P	61
3.2.3	Sintonia do controlador PI	62
3.2.4	Sintonia do controlador PID	63
<b>3.3</b>	<b>Experimento do relé com fase ajustável</b>	65
<b>3.4</b>	<b>Estudos de caso</b>	70
3.4.1	Modelo linearizado da dinâmica do ângulo de arfagem de uma aeronave	70
3.4.2	Sistema de posicionamento do cabeçote de leitura e de gravação de um disco rígido	72
3.4.3	Modelo linearizado de um sistema de direção ativa de um carro	77
<b>3.5</b>	<b>Aplicação experimental</b>	80
3.5.1	Descrição do processo e da configuração experimental	80
3.5.2	Controle de nível do tanque 2	81
3.5.3	Controle de nível do tanque 1	86
3.5.4	Análise dos resultados	92
<b>3.6</b>	<b>Passos para implementação do método GOF: realização do experimento do RFA e sintonia dos controladores PID</b>	93
<b>3.7</b>	<b>Conclusões do capítulo</b>	94

<b>4</b>	<b>MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA PARA SINTONIA DO CONTROLADOR PROPORCIONAL-RESSONANTE . . . .</b>	<b>95</b>
<b>4.1</b>	<b>Motivação . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>4.2</b>	<b>Método generalizado da oscilação forçada . . . . .</b>	<b>97</b>
4.2.1	Controlador proporcional-ressonante . . . . .	97
4.2.2	Definição de $\nu$ e $p$ . . . . .	98
4.2.3	Sintonia do controlador proporcional-ressonante . . . . .	107
4.2.4	Controlador proporcional-ressonante com bloco de avanço de fase . . . .	115
<b>4.3</b>	<b>Estudos de caso . . . . .</b>	<b>119</b>
4.3.1	Processo da Classe A . . . . .	120
4.3.2	Processo da Classe B . . . . .	124
4.3.3	Processo da Classe C . . . . .	125
<b>4.4</b>	<b>Aplicação experimental . . . . .</b>	<b>127</b>
4.4.1	Descrição do processo e da configuração experimental . . . . .	128
4.4.2	Projeto do sistema de controle . . . . .	129
4.4.3	Resultados experimentais . . . . .	135
4.4.4	Análise dos resultados . . . . .	138
<b>4.5</b>	<b>Passos para implementação do método GOF: realização do experimento do RFA com sintonia de controladores PRs e PRAs . . . . .</b>	<b>139</b>
<b>4.6</b>	<b>Conclusões do capítulo . . . . .</b>	<b>140</b>
<b>5</b>	<b>MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA PARA SINTONIA DO CONTROLADOR PROPORCIONAL-MÚLTIPLOS-RESSONANTES . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>5.1</b>	<b>Motivação . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>5.2</b>	<b>Método generalizado da oscilação forçada . . . . .</b>	<b>143</b>
5.2.1	Controladores proporcional-múltiplos-ressonantes e proporcional-múltiplos-ressonantes com bloco de avanço de fase . . . . .	143
5.2.2	Definição de $\nu$ , $p$ e $\eta$ . . . . .	144
5.2.3	Sintonia dos controladores PMR e PMRA . . . . .	148
<b>5.3</b>	<b>Estudos de caso . . . . .</b>	<b>149</b>
5.3.1	Processo da Classe A . . . . .	151
5.3.2	Processo da Classe B . . . . .	160
5.3.3	Processo da Classe C . . . . .	168
<b>5.4</b>	<b>Aplicação experimental . . . . .</b>	<b>176</b>
5.4.1	Projeto do sistema de controle . . . . .	176
5.4.2	Resultados experimentais . . . . .	178
5.4.3	Análise dos resultados . . . . .	182
<b>5.5</b>	<b>Passos para implementação do método GOF: realização do experimento do RFA com sintonia de controladores PMRs e PMRAs . . . . .</b>	<b>187</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusões do capítulo . . . . .</b>	<b>188</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>190</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>192</b>

<b>APÊNDICE A</b>	<b>INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES PARA O DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO GOF</b>	200
A.1	Aproximações dos <i>FOIs</i>	200
A.2	Famílias de processos da bateria de testes	201
A.3	Determinação do controlador P para a Classe C de processos	202
<b>APÊNDICE B</b>	<b>RESULTADOS DO EXPERIMENTO DO RELÉ COM FASE AJUSTÁVEL</b>	204
B.1	Processos de primeira ordem	204
B.2	Processos de segunda ordem	204
B.2.1	Com grau relativo igual a dois e com polos reais	204
B.2.2	Com grau relativo igual a um e com polos reais	205
B.2.3	Com grau relativo igual a dois e com polos complexos	205
B.2.4	Com grau relativo igual a um e com polos complexos	207
B.2.5	Com um polo no SPE e com um polo na origem	207
B.3	Processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais	208
B.4	Processos de enésima ordem	209
B.5	Processos de terceira ordem com grau relativo igual a três	209
B.5.1	Com três polos reais	209
B.5.2	Com um polo real e com dois polos complexos	210
B.6	Processos de quarta ordem com polos diferentes	210
B.7	Processos de primeira ordem com atraso de transporte	211
B.8	Processos de segunda ordem com atraso de transporte	211
B.9	Processos de primeira e segunda ordem com um polo na origem e com atraso de transporte	212
B.10	Processos de primeira e segunda ordem com polos diferentes e com atraso de transporte	212
B.11	Processos com um zero de fase não-mínima	214
<b>APÊNDICE C</b>	<b>RESULTADOS DO MÉTODO GOF PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PID</b>	216
C.1	Processos de primeira ordem	216
C.2	Processos de segunda ordem	217
C.2.1	Com grau relativo igual a dois e com polos reais	217
C.2.2	Com grau relativo igual a um e com polos reais	217
C.2.3	Com grau relativo igual a dois e com polos complexos	221
C.2.4	Com grau relativo igual a um e com polos complexos	223
C.2.5	Com um polo no SPE e com um polo na origem	223
C.3	Processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais	226
<b>APÊNDICE D</b>	<b>RESULTADOS DO MÉTODO GOF PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PR E PRA</b>	229
D.1	Processos de primeira ordem	229
D.2	Processos de segunda ordem	229
D.2.1	Com grau relativo igual a dois e com polos reais	229
D.2.2	Com grau relativo igual a um e com polos reais	230

D.2.3	Com grau relativo igual a dois e com polos complexos . . . . .	234
D.2.4	Com grau relativo igual a um e com polos complexos . . . . .	234
D.2.5	Com um polo no SPE e com um polo na origem . . . . .	236
<b>D.3</b>	<b>Processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais . . . . .</b>	<b>237</b>
<b>D.4</b>	<b>Processos de enésima ordem . . . . .</b>	<b>239</b>
<b>D.5</b>	<b>Processos de terceira ordem com grau relativo igual a três . . . . .</b>	<b>239</b>
D.5.1	Com três polos reais . . . . .	239
D.5.2	Com um polo real e com dois polos complexos . . . . .	242
<b>D.6</b>	<b>Processos de quarta ordem com polos diferentes . . . . .</b>	<b>242</b>
<b>D.7</b>	<b>Processos de primeira ordem com atraso de transporte . . . . .</b>	<b>245</b>
<b>D.8</b>	<b>Processos de segunda ordem com atraso de transporte . . . . .</b>	<b>245</b>
<b>D.9</b>	<b>Processos de primeira e segunda ordem com um polo na origem e com atraso de transporte . . . . .</b>	<b>247</b>
<b>D.10</b>	<b>Processos de primeira e segunda ordem com polos diferentes e com atraso de transporte . . . . .</b>	<b>249</b>
<b>D.11</b>	<b>Processos com um zero de fase não-mínima . . . . .</b>	<b>254</b>
<b>APÊNDICE E INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES SOBRE O MÉTODO GOF PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PMR E PMRA . . . . .</b>		
<b>E.1</b>	<b>Sinais de referência . . . . .</b>	<b>258</b>
<b>E.2</b>	<b>Funções de transferência dos controladores PMR e PMRA . . . . .</b>	<b>258</b>
E.2.1	Controladores PMR e PMRA com dois modos ressonantes . . . . .	258
E.2.2	Controladores PMR e PMRA com três modos ressonantes . . . . .	259
E.2.3	Controladores PMR e PMRA com quatro modos ressonantes . . . . .	260
E.2.4	Controladores PMR e PMRA com cinco modos ressonantes . . . . .	260
<b>E.3</b>	<b>Complemento dos resultados experimentais . . . . .</b>	<b>261</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Um dos motivos pelos quais os controladores proporcional-integral-derivativo (PID) são utilizados nas mais diversas aplicações é a existência de regras de sintonia simples baseadas em experimentos realizados com o próprio processo a ser controlado. Dentre essas regras podem ser citados os métodos de Ziegler-Nichols da resposta ao salto e da oscilação forçada propostos em ZIEGLER; NICHOLS (1942).

O método da resposta ao salto (ou da curva de reação) necessita de um ensaio em malha aberta e é aplicável a processos cuja curva de reação apresenta a forma de um  $S$ . Por outro lado, o método da oscilação forçada requer um ensaio em malha fechada, o qual normalmente é realizado através do experimento do relé (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984) para obtenção da oscilação sustentada, e somente pode ser utilizado em processos que possuem ponto crítico<sup>1</sup>. Nesse último experimento são identificadas a magnitude e a frequência do ponto crítico do processo, com as quais, por meio de fórmulas tabeladas, são calculados os parâmetros dos controladores PID. Uma análise teórica do método da oscilação forçada permite interpretá-lo como sendo um procedimento de sintonia em que o ponto crítico do processo é identificado e posicionado em uma localização desejada no plano complexo, resultando, desta forma, em apropriadas margens de estabilidade.

O princípio do modelo interno (PMI) é um conceito básico em sistemas de controle que é abordado na maioria dos livros dedicados a esta área. Segundo o PMI, um sistema estável em malha fechada segue um sinal de referência com erro nulo em regime permanente e rejeita perturbações assintoticamente quando o controlador apresenta o modelo capaz de gerar um sinal com as mesmas características frequenciais dos sinais a serem seguidos e rejeitados (FRANCIS; WONHAM, 1975). Quando é considerado o seguimento de referência e/ou a rejeição de perturbação de sinais constantes, o modelo interno deve conter um integrador, como é o caso dos controladores PID.

Por outro lado, quando são considerados sinais periódicos, o modelo interno deve possuir modos de ressonância nas frequências que compõem os sinais de referência e de perturbação. Controladores que apresentam tal característica são chamados de controladores ressonantes e são aplicados, por exemplo, em fontes ininterruptas de energia ou *UPSs* (do termo em inglês *Uninterruptible Power Supply* — *UPS*) (TEODORESCU *et al.*, 2006), (PEREIRA *et al.*, 2014), em filtros ativos (FUKUDA; YODA, 2001), (YEPES *et al.*, 2011), (RODRIGUEZ-DIAZ *et al.*, 2019), em geração distribuída (SEIFI; MOALLEM, 2019), (ROJAS *et al.*, 2019), no controle de vibração em estruturas flexíveis (MOHEIMANI; VAUTIER, 2005), (PEREIRA *et al.*, 2011), em sistemas de posicionamento de alta precisão (DAS; POTA; PETERSEN, 2014), (HABIBULLAH; POTA; PETERSEN,

---

<sup>1</sup>O ponto crítico de um processo é definido como o ponto de menor frequência no qual seu diagrama de resposta em frequência traçado na forma polar cruza o eixo real negativo.



2017), na redução das oscilações de torque em máquinas síncronas de ímãs permanentes acionadas por inversores (GAO *et al.*, 2017), (ABOSH; ZHU; REN, 2017), e em motores de indução de cinco fases operando em condições de falta (GUZMAN *et al.*, 2016), (KONG *et al.*, 2018). Nestas referências, entre outras, pode ser verificado que, na maior parte dos casos, os controladores ressonantes são projetados através do conhecimento do modelo do processo e da utilização de métodos específicos de projeto de sistemas de controle, ao passo que a sintonia dos controladores PID é facilitada pela existência de métodos que não necessitam do modelo do processo e que utilizam conjuntos de regras simples baseadas em dados experimentais, tais como os métodos de Ziegler-Nichols.

Apesar dos controladores baseados no PMI, nos quais estão incluídos os controladores ressonantes, serem amplamente conhecidos e utilizados pelas comunidades acadêmica e científica, o mesmo não necessariamente acontece nas atividades industriais. Conforme apontado em PEREIRA; BAZANELLA (2015), não são incomuns as aplicações práticas nas quais controladores PID são utilizados quando o PMI sugere o emprego de controladores ressonantes. Normalmente essa escolha não tem justificativa e acaba resultando em erro de seguimento. Em outras situações, a utilização dos controladores PID ao invés dos controladores ressonantes é explicada pela reformulação do problema de controle para que os sinais de referência ou de perturbação sejam constantes. Nesse caso pode ser citado o exemplo de aplicações envolvendo *UPSs* (WILLMANN *et al.*, 2007), nas quais o problema de controle do seguimento de referência senoidal é transformado em seguimento de sinal constante através do cálculo do valor eficaz da tensão de saída da *UPS*, que deve ser constante ao longo do tempo, sendo então utilizados controladores do tipo PID. Esse modo de tratar o problema não só dificulta a implementação como também causa atraso na malha de controle devido ao cálculo do valor eficaz da senoide, deteriorando o desempenho transitório e reduzindo as margens de estabilidade.

Visando contribuir com a aplicação dos controladores ressonantes, em PEREIRA; BAZANELLA (2015) é proposta a sintonia dos parâmetros de um controlador com um modo ressonante através de uma extensão do método da oscilação forçada adequada para essa estrutura de controle. Através do conhecimento do ponto crítico do processo e da frequência do sinal de referência senoidal a ser seguido/rejeitado são obtidas fórmulas de sintonia desse controlador utilizando a mesma justificativa teórica do método da oscilação forçada. Assim, por meio de um conjunto de fórmulas simples, o projeto desse controlador ressonante aplicado à classe de processos que possuem ponto crítico pode ser realizado com a mesma simplicidade dos controladores PID.

Como existem classes de processos nas quais não é possível a aplicação de nenhum dos métodos de sintonia de Ziegler-Nichols, ou seja, classes de processos que não apresentam a curva de reação com forma em *S* nem resultam na oscilação sustentada, em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017) é apresentada uma modificação no experimento do relé que permite sua aplicação em processos causais, lineares e invariantes no tempo (em inglês, *linear time invariant causal — LTIC*) com grau relativo maior que um e que não possuem ponto crítico. Essa modificação consiste em incluir na saída do relé uma função de transferência conhecida com fase constante em uma larga faixa de frequências, o que torna possível a obtenção da oscilação sustentada e a identificação de um ponto predeterminado da resposta em frequência desta classe de processos. Então, seguindo a abordagem teórica do método da oscilação forçada, em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017) são desenvolvidas fórmulas de sintonia de controladores PID tendo em vista o posicionamento deste ponto em uma localização predeterminada no plano complexo.

Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo principal a proposição de uma metodologia de sintonia para os seguintes controladores baseados no PMI: PID, proporcional-ressonante (PR), proporcional-ressonante com bloco de avanço de fase (PRA), proporcional-múltiplos-ressonantes (PMR) e proporcional-múltiplos-ressonantes com bloco de avanço de fase (PMRA), utilizando a filosofia de projeto do método da oscilação forçada aplicada a processos *LTIC* genéricos, independentemente da forma da resposta ao salto e da existência de uma frequência crítica, de ordem ou de grau relativo. Para esse fim, será proposto o *método generalizado da oscilação forçada (método GOF)*, no qual serão desenvolvidos conjuntos de fórmulas de sintonia para cada uma das topologias de controle consideradas com base no conhecimento de um ponto predeterminado da resposta em frequência do processo, visando a obtenção de adequadas margens de estabilidade e apropriado desempenho em malha fechada. Para a identificação desse ponto da resposta em frequência de uma maior classe de processos (com e sem ponto crítico) em um único tipo de experimento, a modificação no experimento do relé apresentada em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017) será explorada e, com isso, será proposto o *experimento do relé com fase ajustável (RFA)*. A avaliação do método GOF, o qual inclui o experimento do RFA e os conjuntos de fórmulas de sintonia desenvolvidos para cada topologia de controle, se dará por meio de exemplos numéricos e através da implementação prática dos controladores projetados aplicados em um processo real de controle de nível e no controle do estágio de saída de uma *UPS* monofásica.

Este trabalho está organizado na seguinte maneira: o Capítulo 2 apresenta alguns conceitos básicos utilizados ao longo deste trabalho. Neste capítulo, destacam-se alguns pontos sobre sistemas realimentados, o problema do seguimento de referência e da rejeição de perturbação sob o posto de vista do PMI, análise dos métodos de sintonia de Ziegler-Nichols e apresentação do integrador de ordem fracionária.

O Capítulo 3 trata do problema de seguimento e de rejeição de sinais constantes através da sintonia de controladores PID. Primeiramente será proposto o método GOF, no qual serão desenvolvidas fórmulas de sintonia de controladores PID com base no conhecimento de um ponto específico da resposta em frequência do processo. Então, será apresentado o experimento do RFA que possibilitará, em um único tipo de experimento, a identificação de um ponto da resposta em frequência tanto de processos que possuem ponto crítico quanto de processos que não o possuem. Em seguida, após uma análise através de exemplos numéricos, o método proposto será avaliado por meio de sua aplicação em um processo real de controle de nível.

Seguindo esta mesma abordagem, no Capítulo 4 será desenvolvido o método GOF para sintonia dos controladores PR e PRA visando o seguimento e a rejeição de sinais senoidais. De forma semelhante, visando o seguimento e a rejeição de sinais periódicos, no Capítulo 5 será desenvolvido o método GOF para sintonia dos controladores PMR e PMRA considerando até cinco modos de ressonância localizados nas cinco primeiras frequências que compõem o sinal periódico de interesse. Nestes dois capítulos, para cada topologia de controle, serão propostos conjuntos de fórmulas de sintonia dependentes do ponto identificado da resposta em frequência do processo, da frequência fundamental e da ordem das harmônicas do sinal periódico de interesse, e também do fator de amortecimento dos polos do controlador. Após, em cada um destes capítulos, será realizada uma análise por meio de exemplos numéricos e, então, o método GOF será aplicado na sintonia da estrutura de controle do estágio de saída de uma *UPS* monofásica.

Este trabalho é finalizado com o Capítulo 6, no qual são apresentadas as conclusões e algumas perspectivas de trabalhos futuros, e com os apêndices.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho. Inicialmente são abordados os sistemas realimentados, onde são avaliados alguns pontos acerca de sua estabilidade e são definidas algumas características para a análise de desempenho em função da resposta temporal para entradas padrão. Em seguida é tratado o problema do seguimento de referência e da rejeição de perturbação sob o ponto de vista do princípio do modelo interno, sendo também apresentados e analisados dois métodos de sintonia para controladores baseados nesse princípio. Este capítulo é finalizado com a apresentação do integrador de ordem fracionária.

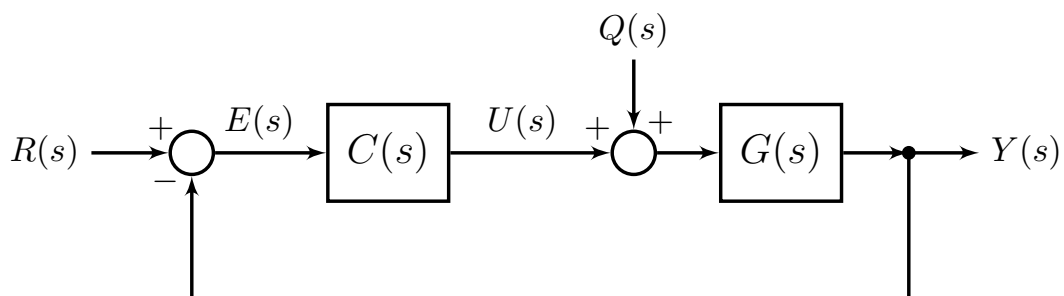
### 2.1 Sistemas realimentados

O objetivo de um sistema de controle é fazer com que um dado processo tenha um comportamento predeterminado, seja mantendo a variável de saída próxima ou igual a uma referência, seja minimizando ou eliminando completamente a ação de perturbações na variável de saída, por exemplo. Muitas vezes, esses objetivos podem ser alcançados através de um sistema em malha fechada com realimentação negativa, conforme apresentado no diagrama em blocos da Figura 1, e utilização de um controlador adequado para o problema a ser tratado.

Neste trabalho são considerados processos *LTIC SISO* (do inglês *Single-Input, Single-Output — SISO*), cuja função de transferência é  $G(s)$ , e controladores representados pela função de transferência  $C(s)$ . Ainda no diagrama em blocos apresentado na Figura 1,  $R(s)$ ,  $E(s)$ ,  $U(s)$ ,  $Q(s)$  e  $Y(s)$  correspondem respectivamente às transformadas de Laplace dos sinais de referência, de erro, de controle, de perturbação e de saída do sistema.

A função de transferência entre a referência e a saída do sistema em malha fechada, a

Figura 1 – Diagrama em blocos de um sistema em malha fechada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

qual é obtida considerando  $Q(s) = 0$ , é dada por:

$$T_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}, \quad (1)$$

a qual é denominada função de transferência de malha fechada. A função de transferência de malha aberta é definida como

$$L(s) = C(s)G(s) \quad (2)$$

e pode ser apresentada na seguinte forma genérica:

$$L(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} e^{-T_d s}, \quad (3)$$

onde  $k$  é um número real,  $z_i$  e  $p_i$  são respectivamente os zeros e os polos do processo e do controlador, para os quais assume-se que  $m < n$ , e  $T_d$  é um número real que representa um atraso temporal.

A função de transferência entre a perturbação e a saída do sistema, a qual é obtida considerando  $R(s) = 0$ , é dada por:

$$T_q(s) = \frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}. \quad (4)$$

A saída do sistema em malha fechada para os sinais de referência e de perturbação, obtida através dos princípios da linearidade e da superposição, é dada por:

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_q(s), = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}Q(s). \quad (5)$$

Para esse sistema em malha fechada sem perturbação, ou seja, com  $Q(s) = 0$ , o sinal de erro é dado por:

$$E(s) = R(s) - T_r(s)R(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s), \quad (6)$$

e

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \quad (7)$$

é denominada como a função de sensibilidade do sistema.

Na sequência esses conceitos iniciais serão utilizados na análise da estabilidade de sistemas realimentados.

### 2.1.1 Estabilidade de sistemas realimentados

A análise das características de estabilidade de um sistema em malha fechada, com o processo e com o controlador atuando em conjunto, é de extrema importância no projeto de um sistema de controle. Neste trabalho será utilizado o conceito de *BIBO* (do termo em inglês, *Bounded-Input, Bounded-Output*) estabilidade. Um sistema é dito *BIBO*-estável se para todo sinal com amplitude limitada aplicado em sua entrada é gerado um sinal de saída com amplitude limitada (CHEN, 2013). No caso de existir ao menos um sinal com amplitude limitada que, quando aplicado à entrada desse sistema, origina um sinal de saída que diverge com o passar do tempo, então esse sistema não é *BIBO*-estável.

Neste trabalho, para analisar a estabilidade de sistemas realimentados, escolheu-se por utilizar o critério de estabilidade de Nyquist, o qual tem a vantagem que a estabilidade de um sistema em malha fechada pode ser avaliada através da resposta em frequência e a localização dos polos desse sistema em malha aberta, não existindo a necessidade da determinação explícita dos polos de malha fechada. O critério de estabilidade de Nyquist é baseado no Princípio do Argumento (DORF; BISHOP, 2008), (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 2002) e será brevemente abordado a seguir.

### 2.1.1.1 Critério de estabilidade de Nyquist

No critério de estabilidade de Nyquist, a estabilidade de um sistema em malha fechada é determinada com base na resposta em frequência e na localização dos polos desse sistema em malha aberta. Para esta análise, considera-se inicialmente processos sem atraso, isto é, processos cuja função de transferência assume a forma apresentada em (3) com  $T_d = 0$  s. Neste critério, aplica-se diretamente o princípio do argumento considerando o mapeamento do contorno fechado  $\Gamma_s$ , o qual é denominado de contorno ou caminho de Nyquist, na função de transferência de malha aberta do sistema  $L(s)$ . O contorno de Nyquist é convencionado no sentido horário e envolvendo todo o semiplano direito (SPD) do plano  $s$ , sem passar pelas singularidades de  $L(s)$  sobre o eixo imaginário, como exemplificado na Figura 2. Então, utilizando o número de polos de  $L(s)$  que possuem parte real positiva e o número líquido de envoltimentos<sup>1</sup> do ponto  $-1 + j0$  pelo contorno  $\Gamma_L$ —que é o resultado deste mapeamento— no plano  $L(s)$ , a *BIBO* estabilidade de um sistema em malha fechada é determinada conforme anuncia o próximo teorema.

**Teorema 1. (Critério de estabilidade de Nyquist) (DORF; BISHOP, 2008)** *Um dado sistema realimentado com função de transferência de malha aberta  $L(s)$  é BIBO-estável em malha fechada se o número líquido de envoltimentos no sentido anti-horário do ponto  $-1 + j0$  pelo contorno  $\Gamma_L$  no plano  $L(s)$  é igual ao número de polos de  $L(s)$  que possuem parte real positiva.*

Segundo o critério de estabilidade de Nyquist, a *BIBO* estabilidade de um sistema linear realimentado é verificada quando:

- $L(s)$  não tem polos com parte real positiva e número líquido de envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  pelo contorno  $\Gamma_L$  é igual a zero;
- $L(s)$  tem  $P$  polos com parte real positiva e o número líquido de envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  pelo contorno  $\Gamma_L$  é  $P$  vezes no sentido anti-horário.

O número de polos de malha fechada com parte real positiva pode ser calculado utilizando a seguinte relação:

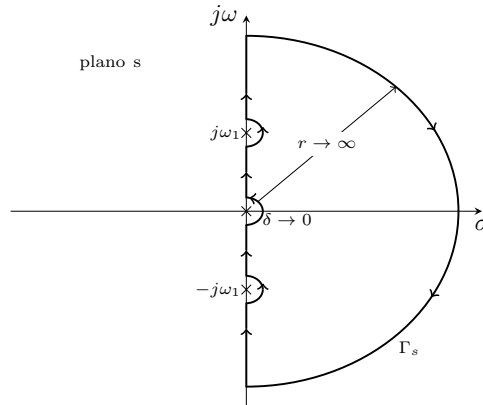
$$Z = P + N,$$

em que  $Z$  é o número de polos do sistema em malha fechada no SPD do plano  $s$ ;  $N$  é o número líquido de envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  por  $\Gamma_L$  no plano  $L(s)$ ,  $N$  é positivo se o número líquido de envoltimentos é no sentido horário e  $N$  é negativo se o número líquido de envoltimentos é no sentido anti-horário; e  $P$  é o número de polos de  $L(s)$  no SPD do plano  $s$ .

Como o contorno de Nyquist não deve passar pelas singularidades da função de transferência de malha aberta do sistema, o contorno fechado  $\Gamma_s$  que envolve o SPD do plano

<sup>1</sup>O número líquido de envoltimentos é definido como o número de envoltimentos em um sentido menos o número de envoltimentos no sentido contrário.

Figura 2 – Contorno de Nyquist para  $L(s)$  com polos sobre o eixo imaginário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$s$  deve desviar dos polos e dos zeros de  $L(s)$  localizados sobre o eixo  $j\omega$ . Neste caso, usualmente é adotado o contorno indicado na Figura 2, onde semicircunferências de raio infinitesimal  $\delta$  foram utilizadas para desviar dos polos situados na origem e em  $\pm j\omega_1$ . A área que o contorno fechado evita na parte desviada tende a zero à medida que  $\delta$  tende a zero, logo todas as singularidades de  $L(s)$  existentes no SPD do plano  $s$  são envolvidas por  $\Gamma_s$ , permitindo a aplicação do critério de estabilidade de Nyquist.

O critério de estabilidade de Nyquist também pode ser aplicado à processos com atraso ( $T_d \neq 0$ ), cuja função de transferência de malha aberta apresentada em (3) é dada por:

$$L(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} e^{-T_d s},$$

em que  $m < n$  e que representa sistemas físicos cuja resposta para frequência infinita é zero em conjunto com um controlador causal (controlador com número de zeros menor ou igual ao número de polos). Para esses processos, desconsiderando o conceito de polos de malha fechada, a análise da estabilidade do sistema em malha malha fechada é realizada através do número de polos de  $L(s)$  e do número líquido de envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  pelo contorno  $\Gamma_L$  no plano  $L(s)$ , conforme descrito anteriormente. Nesta função de transferência de malha aberta verifica-se que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L(s) = 0.$$

Isto significa que a parte do contorno de Nyquist referente à semicircunferência de raio infinito é mapeada em um ponto na origem do plano  $L(s)$ . Nesta situação, os possíveis envoltimentos do ponto crítico no plano  $L(s)$  podem ser analisados levando-se em conta apenas a parte do contorno de Nyquist sobre o eixo  $j\omega$  de  $-j\infty$  até  $j\infty$ , considerando os desvios das singularidades sobre o eixo imaginário caso necessário.

A parte do contorno de Nyquist sobre o eixo ordenado mapeada no plano  $F(s)$  nada mais é do que a resposta em frequência de  $F(j\omega)$ , sendo que essa curva tanto pode ser obtida analiticamente quanto experimentalmente para um dado sistema. Como  $L(-j\omega)$  é o complexo conjugado de  $L(j\omega)$ , a parte do contorno de Nyquist de  $-\infty < \omega \leq 0$  mapeada no plano  $L(s)$  pode ser obtida pela reflexão em relação ao eixo real da parte do contorno obtida com  $0 \leq \omega < \infty$  mapeada no plano  $L(s)$ . Assim, a estabilidade em malha fechada de processos físicos em conjunto com controladores causais pode ser analisada através dos envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  pela resposta em frequência de  $L(j\omega)$  representada em coordenadas polares considerando  $-\infty < \omega < \infty$ .

### 2.1.1.2 Margens de estabilidade

O critério de estabilidade de Nyquist é definido em termos do ponto  $-1 + j0$  quando o diagrama de resposta em frequência de  $L(j\omega)$  é traçado na forma polar ou, equivalentemente, em termos do ponto de magnitude 0 dB e de fase  $-180^\circ$  quando analisado através do diagrama de Bode. Além disto, a proximidade da curva de  $L(j\omega)$  em relação a esse ponto específico fornece informações referentes à estabilidade relativa de um sistema, as margens de estabilidade: margem de ganho e margem de fase, as quais são definidas na sequência para  $L(j\omega)$  de fase mínima, isto é, sem polos e sem zeros no SPD do plano  $s$ .

**Definição 1.** (DORF; BISHOP, 2008) A margem de ganho,  $G_M$ , é o ganho a ser aplicado na função de malha aberta do sistema para que a curva de resposta em frequência de  $G_M L(j\omega)$  traçada na forma polar cruze o eixo real negativo no ponto  $-1 + j0$  ou, equivalentemente, para que a curva de  $G_M L(j\omega)$  tenha módulo unitário (0 dB) na frequência cuja fase é  $-180^\circ$ . A margem de ganho pode ser calculada por:

$$G_M |L(j\omega_u)| = 1, \quad (8)$$

onde  $\omega_u$  é a menor frequência em que a fase de  $L(j\omega)$  é igual a  $-180^\circ$  e pode ser expressa em decibéis como:

$$G_{MdB} = -20 \log (|L(j\omega_u)|). \quad (9)$$

**Definição 2.** (DORF; BISHOP, 2008) A margem de fase,  $M_\phi$ , é o valor angular em graus que a curva da resposta em frequência de  $L(j\omega)$  traçada na forma polar deve ser rotacionada em torno da origem para que o ponto de módulo unitário,  $|L(j\omega)| = 1$ , cruze o eixo real negativo no ponto  $-1 + j0$  ou, equivalentemente, o valor angular em que a curva de fase da resposta em frequência de  $L(j\omega)$  deve ser deslocada para que o ponto de módulo unitário (0 dB) tenha  $-180^\circ$  de fase. A margem de fase pode ser calculada por:

$$M_\phi = 180^\circ + \angle L(j\omega_{0dB}) \quad (10)$$

em que  $\angle L(j\omega_{0dB})$  é a fase de  $L(j\omega)$  na frequência em que sua magnitude é unitária.

Um sistema BIBO-estável possui  $G_M > 1$  (ou  $G_M > 0$  em dB) e  $M_\phi > 0$ . Note que, juntas, estas duas medidas referentes à estabilidade determinam o quão longe a resposta em frequência de  $L(j\omega)$  passa do ponto  $-1 + j0$ . Estes conceitos serão utilizados na etapa de desenvolvimento do método de sintonia proposto neste trabalho. A seguir, são definidos alguns requisitos de desempenho de sistemas realimentados.

### 2.1.2 Desempenho de sistemas realimentados

O desempenho de um sistema de controle pode ser especificado e analisado através de grandezas obtidas a partir de sua resposta temporal a uma dada entrada. A resposta temporal de um sistema de controle estável para uma dada entrada pode ser dividida em duas partes: a resposta transitória e a resposta em regime permanente (OGATA, 1997).

A resposta transitória inicia-se imediatamente após a aplicação (ou variação) de um sinal de entrada no sistema, a qual dá origem a alterações nas variáveis do processo. A resposta transitória é considerada finalizada quando o sistema se acomoda à aplicação (variação) deste sinal. Como a resposta transitória depende das condições iniciais do sistema, costuma-se utilizar como padrão a condição inicial nula, com o estado do sistema igual a zero. Por outro lado, a resposta em regime permanente é caracterizada pela saída do sistema após um longo tempo da aplicação (variação) do sinal de entrada e é simplesmente a resposta que permanece após a parte transitória tornar-se desprezível.

Neste trabalho será realizado o projeto de controladores visando o seguimento e/ou rejeição com erro nulo em regime permanente de sinais constantes, senoidais e periódicos genéricos. Por esse motivo, a análise da resposta temporal de sistemas realimentados será avaliada em termos das características de desempenho transitórias considerando entradas padrão compatíveis com cada classe de sinais.

### 2.1.2.1 Referência constante

A caracterização do desempenho em relação a uma referência constante normalmente é realizada através da resposta do sistema para um sinal de entrada do tipo degrau ou salto,

$$r(t) = 0 \quad \forall t < 0, \quad r(t) = a_r \quad \forall t \geq 0 \quad (11)$$

onde  $a_r$  é uma constante real não nula.

O tempo de acomodação,  $t_s$ , é definido como o menor tempo necessário para que o erro de seguimento seja suficientemente pequeno e permaneça dentro de uma determinada faixa, ou seja,

$$t_s = \min_{t_1} : \left| \frac{e(t)}{a_r} \right| < \epsilon \quad \forall t > t_1, \quad (12)$$

em que  $e(t) = r(t) - y(t)$  e  $\epsilon$  é uma tolerância normalmente definida entre  $\{0,02; 0,05\}$ .

O máximo sobrepasso é a medida de quanto a saída do sistema ultrapassa o valor do sinal de referência. Considerando o máximo valor absoluto de  $y(t)$  durante a resposta transitória provocada por um degrau,

$$y_{max} = \max_t |y(t)|,$$

então define-se o máximo sobrepasso percentual:

$$M_o = \max \left\{ \frac{y_{max} - |a_r|}{|a_r|}, 0 \right\} \times 100\%. \quad (13)$$

### 2.1.2.2 Referências senoidais e periódicas genéricas

Para avaliar sistematicamente os controladores projetados para o seguimento de sinais de referência senoidais e sinais de referência periódicos genéricos serão estabelecidos critérios de desempenho compatíveis com essas classes de sinais. Para tal, por meio da representação por Série de Fourier de Tempo Contínuo (do inglês, *Continuous-Time Fourier Series — CTFS*) (HAYKIN; VAN VEEN, 2001), considera-se um sinal de referência senoidal ou periódico genérico como

$$r(t) = 0 \quad \forall t < 0, \quad r(t) = \sum_{k=-M}^{+M} a_{r(k)} e^{jk\omega_r t} \quad \forall t \geq 0, \quad (14)$$

em que  $\omega_r \in \mathbb{R}$  é a frequência fundamental desse sinal para  $t \geq 0$ , enquanto os termos  $a_{r(k)}$  são os coeficientes da *CTFS* obtidos quando assume-se  $M$  tendendo ao infinito e que esse sinal é diferente de zero, possui extensão periódica, para  $-\infty < t < \infty$ . Os controladores PMRs sintonizados no Capítulo 5 foram avaliados considerando sinais de referência periódicos formados pela soma de duas até cinco primeiras componentes frequenciais (truncados com  $M = 2$  a  $M = 5$ ) da onda dente de serra e da onda quadrada.

Para estas classes de sinais, o tempo de acomodação é calculado utilizando (12) com  $a_r = r_{max}$ , em que

$$r_{max} = \max_t |r(t)|.$$



Além disto, também é oportuno representar o tempo de acomodação sem a dependência temporal, através do número de períodos do sinal de referência,

$$n_s = \frac{\omega_r t_s}{2\pi}. \quad (15)$$

Para a obtenção do máximo sobrepasso, calcula-se o máximo valor absoluto de  $y(t)$ ,

$$y_{max} = \max_t |y(t)|,$$

e define-se o máximo sobrepasso percentual como

$$M_o = \max \left\{ \frac{y_{max} - r_{max}}{r_{max}}, 0 \right\} \times 100\%. \quad (16)$$

Neste trabalho, salvo mencionado o contrário, os parâmetros dos processos, dos controladores e das medidas de desempenho serão apresentadas no Sistema Internacional de Unidades (SI). Na sequência são abordadas as questões acerca do seguimento de sinais de referência e da rejeição de perturbações.

## 2.2 Seguimento de referências e rejeição de perturbações

Nesta seção é abordado o problema do seguimento de um sinal de referência e da rejeição de perturbação através da análise do princípio do modelo interno (PMI). Também são apresentados os controladores baseados no PMI mais indicados para o seguimento de referência e/ou para a rejeição de perturbação quando consideradas as classes de sinais constantes, de sinais senoidais e de sinais periódicos genéricos. Em seguida são apresentados e analisados dois métodos de sintonia que utilizam procedimentos experimentais para determinação dos parâmetros dos controladores.

### 2.2.1 Princípio do modelo interno

De acordo com o PMI, um sistema estável em malha fechada segue um sinal de referência com erro nulo em regime permanente e rejeita perturbações assintoticamente quando o controlador apresenta o modelo capaz de gerar um sinal com as mesmas características frequenciais dos sinais a serem seguidos e rejeitados (FRANCIS; WONHAM, 1975). Conforme CHEN (2013), o sistema em malha fechada deve ser estável e o controlador deve conter todos os modos instáveis (com parte real igual a zero ou positiva) dos sinais de referência e de perturbação para garantir o seguimento e a rejeição assintóticos.

Desse modo, seguindo desenvolvimento semelhante ao apresentado em CHEN (2013) e em FLORES (2012), considera-se o sistema em malha fechada representado na Figura 1 com sinais de referência e perturbação descritos por:

$$R(s) \triangleq \frac{N_r(s)}{\phi(s)\phi_{e_r}(s)}, \quad Q(s) \triangleq \frac{N_q(s)}{\phi(s)\phi_{e_q}(s)}, \quad (17)$$

em que  $\phi(s)$  é o polinômio mínimo múltiplo comum dos modos instáveis de  $R(s)$  e  $Q(s)$ , enquanto  $\phi_{e_r}(s)$  e  $\phi_{e_q}(s)$  são formados pelos seus modos estáveis (com parte real negativa),  $N_r(s)$  e  $N_q(s)$  são polinômios dos seus numeradores. Assim, contanto que o sistema seja estável em malha fechada, nenhum zero de  $G(s)$  seja raiz de  $\phi(s)$  e o denominador de  $C(s)$  contenha o polinômio  $\phi(s)$ , então, o seguimento com erro nulo em regime permanente e a rejeição assintótica da perturbação são garantidos pelo PMI.

Representando as funções de transferência do controlador e do processo através de polinômios em  $s$  no seu numerador e denominador:

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{\phi(s)D_c(s)}, \quad G(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad (18)$$

caso todas as raízes de  $F(s) = \phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)$  tenham parte real negativa, então esse sistema é estável em malha fechada. Dessa forma, além de conter os modos instáveis dos sinais a serem seguidos e rejeitados, o controlador  $C(s)$  deve garantir a estabilidade do sistema em malha fechada e, eventualmente, assegurar alguma característica desejada ou alguma especificação de desempenho transitório.

Para mostrar que, em tais condições, a saída do sistema em malha fechada segue assintoticamente um sinal de referência substitui-se as funções de transferência apresentadas em (18) na equação do sinal de erro (6), o que permite escrever

$$E(s) = \frac{\phi(s)D_c(s)D_p(s)}{\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}R(s). \quad (19)$$

Então, utilizando o sinal  $R(s)$  definido em (17) na equação anterior verifica-se que os modos instáveis de  $R(s)$  são cancelados com  $\phi(s)$ , com isso o sinal de erro é dado por:

$$E(s) = \frac{D_c(s)D_p(s)}{F(s)} \frac{N_r(s)}{\phi_{e_r}(s)}. \quad (20)$$

Assim, como as raízes de  $F(s)$  e  $\phi_{e_r}(s)$  têm parte real negativa, é possível aplicar o teorema do valor final (HAYKIN; VAN VEEN, 2001) em (20) e obter o valor do erro em regime permanente para essa entrada considerando o sistema em malha fechada:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{D_c(s)D_p(s)}{F(s)} \frac{N_r(s)}{\phi_{e_r}(s)} = 0. \quad (21)$$

A fim de comprovar a rejeição assintótica de um sinal de perturbação, substitui-se as funções de transferência apresentadas em (18) na equação da saída do sistema para a perturbação  $Q(s)$ , a qual foi apresentada em (5), resultando na relação

$$Y_q(s) = \frac{\phi(s)D_c(s)N_p(s)}{\phi(s)D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}Q(s). \quad (22)$$

Verificando que em (22) ocorre o cancelamento dos modos instáveis de  $Q(s)$ , definida em (17), com  $\phi(s)$  pode-se escrever a saída do sistema em malha fechada devido à perturbação:

$$Y_q(s) = \frac{D_c(s)N_p(s)}{F(s)} \frac{N_q(s)}{\phi_{e_q}(s)}. \quad (23)$$

Visto que as raízes de  $F(s)$  e  $\phi_{e_q}(s)$  têm parte real negativa, aplica-se o teorema do valor final em (23) e chega-se no valor em regime permanente da saída do sistema em malha fechada devido a essa perturbação:

$$y_q(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_q(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{D_c(s)N_p(s)}{F(s)} \frac{N_q(s)}{\phi_{e_q}(s)} = 0. \quad (24)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado levando-se em conta a variação dos parâmetros do processo e a inexistência de raízes em comum entre  $N_p(s)$  e  $\phi(s)$ . Nessa

situação, caso o denominador do controlador  $C(s)$  apresente o termo  $\phi(s)$  e for garantida a estabilidade do sistema em malha fechada para todos os valores admissíveis de  $N_p(s)$  e  $D_p(s)$ , então verifica-se o seguimento com erro nulo em regime permanente do sinal de referência e a rejeição assintótica da perturbação de maneira robusta (CHEN, 2013).

Um exemplo de aplicação do PMI é apresentado a seguir.

**Exemplo 1.** *Considera-se um processo a ser controlado  $G(s)$  que não apresenta zeros na origem nem em  $\pm j\omega_r$ , onde  $\omega_r$  é uma frequência de interesse. Inicialmente deseja-se que o sistema em malha fechada deva seguir assintoticamente um sinal de referência dado por*

$$r(t) = 0 \quad \forall t < 0, \quad r(t) = a_r \quad \forall t \geq 0,$$

onde  $a_r$  é uma constante real não nula. Então, como  $R(s) = a_r/s$  verifica-se que  $\phi(s) = s$ ,  $N_r(s) = a_r$  e  $\phi_{e_r}(s) = 1$ . Assim, o controlador que garante o seguimento assintótico dessa referência tem a forma

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{s}.$$

Se esse mesmo sistema em malha fechada também for sujeito a um sinal de perturbação cuja transformada de Laplace é

$$Q(s) = \frac{1}{(s^2 + \omega_r^2)(s + 1)},$$

constata-se que  $\phi(s) = s(s^2 + \omega_r^2)$ . Dessa forma, o controlador que garante o seguimento com erro nulo e a rejeição assintótica deve ter a forma

$$C(s) = \frac{\hat{N}_c(s)}{s(s^2 + \omega_r^2)}.$$

Sendo que  $N_c(s)$  e  $\hat{N}_c(s)$  são polinômios em  $s$ , calculados para que o sistema em malha fechada seja estável e, se necessário, também atenda alguma especificação de desempenho transitório.

A análise do PMI também pode ser realizada através das funções de transferência da referência para a saída do sistema,  $T_r(s)$ , e da perturbação para a saída do sistema,  $T_q(s)$ , quando o sinal a ser seguido e/ou rejeitado é puramente senoidal com frequência  $\omega_r$ . Em tal situação, assumindo que  $C(s)$  tem polos em  $\pm j\omega_r$  que não são cancelados pelos zeros de  $G(s)$  verifica-se que  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_r} |C(j\omega)G(j\omega)| = \infty$ , o que permite escrever:

$$|T_r(j\omega_r)| = \left| \frac{C(j\omega_r)G(j\omega_r)}{1 + C(j\omega_r)G(j\omega_r)} \right| = 1, \quad \angle T_r(j\omega_r) = 0^\circ, \quad (25)$$

$$|T_q(j\omega_r)| = \left| \frac{G(j\omega_r)}{1 + C(j\omega_r)G(j\omega_r)} \right| = 0, \quad \angle T_q(j\omega_r) = 0^\circ. \quad (26)$$

Assim, por meio de (25) verifica-se o seguimento com erro nulo de um sinal senoidal com frequência  $\omega_r$  e através de (26) constata-se a rejeição de perturbação de um sinal senoidal com frequência  $\omega_r$ .

Ainda nesta análise, assume-se variações nos parâmetros do processo, cuja função de transferência pode ser representada por uma parte nominal,  $G_0(s)$ , somada a uma parte

variável  $\Delta G(s)$ , resultando em  $G(s) = G_0(s) + \Delta G(s)$ . Admitindo que os polos de  $C(s)$  relativos ao modelo interno não são cancelados pelos zeros do processo constata-se que:

$$|T_r(j\omega_r)| = \left| \frac{C(j\omega_r)(G_0(j\omega_r) + \Delta G(j\omega_r))}{1 + C(j\omega_r)(G_0(j\omega_r) + \Delta G(j\omega_r))} \right| = 1, \quad \angle T_r(j\omega_r) = 0^\circ, \quad (27)$$

$$|T_d(j\omega_r)| = \left| \frac{G_0(j\omega_r) + \Delta G(j\omega_r)}{1 + C(j\omega_r)(G_0(j\omega_r) + \Delta G(j\omega_r))} \right| = 0, \quad \angle T_d(j\omega_r) = 0^\circ, \quad (28)$$

o que acaba comprovando o seguimento de referência e a rejeição de perturbação com erro nulo de sinais senoidais com frequência  $\omega_r$  de forma robusta, desde que o sistema em malha fechada seja estável para as variações nos parâmetros do processo.

## 2.2.2 Controladores baseados no princípio do modelo interno

Nesta seção são definidas as funções de transferência dos controladores para os quais serão desenvolvidos os métodos de sintonia nos próximos capítulos. Primeiramente é apresentado o controlador proporcional e em seguida são apresentados os controladores baseados no PMI indicados para o seguimento e para a rejeição de sinais constantes, de sinais senoidais e também de sinais periódicos genéricos.

### 2.2.2.1 Controlador proporcional

Na ação de controle proporcional o sinal de controle aplicado a cada instante ao processo é proporcional à amplitude do sinal de erro. Dessa forma, a função de transferência do controlador proporcional (P) é dada por:

$$C_p(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p, \quad (29)$$

na qual  $K_p > 0$  é o ganho proporcional, parâmetro a ser sintonizado. Assim, se em um determinado instante o valor do sinal da saída do processo é menor (maior) que o valor do sinal de referência, ou seja,  $e(t) > 0$  (ou  $e(t) < 0$ ), o sinal de controle a ser aplicado será positivo (negativo) e proporcional ao módulo de  $e(t)$ .

Assumindo que a função de transferência da processo  $G(s)$  não possua polo na origem, quanto maior o valor de  $K_p$  menor será o erro em regime permanente. Esse erro pode ser diminuído com o aumento do ganho proporcional, contudo ele não poderá ser completamente anulado. Quanto maior o valor de  $K_p$  mais oscilatório tende a ficar o comportamento transitório do sistema em malha fechada quando considera-se a resposta a uma entrada do tipo degrau. Além disso, para muitos processos físicos, o elevado aumento do ganho proporcional pode resultar na instabilidade do sistema em malha fechada.

### 2.2.2.2 Controlador proporcional-integral

Considerando o seguimento e a rejeição de sinais constantes que podem ser representados por:

$$R(s) = \frac{N_r(s)}{s}, \quad Q(s) = \frac{N_q(s)}{s}, \quad (30)$$

na qual  $N_r(s)$  e  $N_q(s)$  são os polinômios em  $s$  dos numeradores do sinal de referência e de perturbação, verifica-se que  $\phi(s) = s$ . Então, pelo PMI, o controlador que garante o seguimento de referência e a rejeição de perturbação com erro nulo de sinais constantes

deve apresentar um modo na origem do plano complexo, ou seja, deve conter um integrador:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{N_c(s)}{s}, \quad (31)$$

desde que o processo não tenha nenhum zero na origem.

A fim de facilitar a sintonia do controlador, o numerador de (31) é definido como sendo um ganho em conjunto com um zero. Assim, é obtida a função de transferência do conhecido controlador proporcional-integral (PI) (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995):

$$C_{pi}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( \frac{s + \frac{1}{T_i}}{s} \right) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad (32)$$

na qual  $K_p$  e o tempo integral  $T_i$  são parâmetros a serem calculados.

Aplicando a transformada de Laplace inversa na função de transferência em (32) pode-se obter a equação do sinal de saída desse controlador em função do tempo e do sinal de erro:

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right). \quad (33)$$

Supondo o sistema apresentado na Figura 1 com um processo sem zeros na origem, com um controlador PI devidamente projetado para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, verifica-se que a saída em regime permanente será igual à referência quando utiliza-se sinais de referência e de perturbação constantes. Se for considerada perturbação nula, então o erro em regime permanente será igual a zero. Com isso, a parte do sinal de controle referente à ação proporcional será nula, enquanto a parte relativa à ação integral será constante e igual ao valor do sinal de controle em regime permanente, dado por:

$$u(\infty) = \frac{r(\infty)}{\lim_{s \rightarrow 0} \{G(s)\}}. \quad (34)$$

Em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995) e em BAZANELLA; GOMES DA SILVA JR. (2005) é analisada a influência do parâmetro  $T_i$  na resposta de um sistema estável em malha fechada para um degrau unitário. Considerando  $K_p$  fixo, a ação integral tende a ser predominante sobre a ação proporcional à medida que  $T_i$  é diminuído. A saída do sistema se aproxima da referência com maior rapidez para menores valores de  $T_i$ , mas para um dado valor desse parâmetro, quando diminuído significativamente, a resposta do sistema pode apresentar comportamento oscilatório, tendendo à instabilização. Nesse caso, o zero do controlador PI, localizado em  $-1/T_i$ , está consideravelmente distante do polo na origem e, assim, o controlador tem características de um integrador puro, o qual reduz as margens de estabilidade do sistema.

### 2.2.2.3 Controlador proporcional-integral-derivativo

A função de transferência do controlador proporcional-integral-derivativo (PID) é obtida através de  $C_{pi}(s)$  com a inclusão da ação derivativa ideal, resultando em:

$$C_{pid}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad (35)$$

na qual  $K_p$ ,  $T_i$  e o tempo derivativo  $T_d$  são parâmetros a serem calculados. Essa inclusão tem o propósito de aumentar as margens de estabilidade do sistema, além de tornar a

resposta do sistema em malha fechada mais rápida e menos oscilatória (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Calculando a transformada de Laplace inversa em (35) pode-se obter a equação do sinal de controle do controlador PID em função do tempo e do sinal de erro:

$$u(t) = K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right). \quad (36)$$

Considerando o sistema apresentado na Figura 1 com um controlador PID que garante a estabilidade em malha fechada, para sinais de referência e de perturbação constantes, a contribuição da ação derivativa em regime permanente é nula, visto que o sinal de erro tende a ser constante. Assim, a ação derivativa somente tem influência sobre o comportamento do sistema no regime transitório e, com isto, em regime permanente o controlador PID tem o mesmo comportamento de um controlador PI.

Um derivador ideal não pode ser fisicamente implementado (HAYKIN; VAN VEEN, 2001). Aliás, na prática isso não seria desejável mesmo que fosse possível tendo em vista que o ganho da ação derivativa cresce com o aumento da frequência, o que ocasionaria problemas relativos à amplificação de ruídos de alta frequência. Dessa forma, a implementação do derivador é realizada com a introdução de um polo que tem função de limitar o ganho da ação derivativa em altas frequências, resultando na seguinte função de transferência para o controlador PID:

$$C_{pid}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d \frac{s}{Ns + 1} \right), \quad (37)$$

na qual  $N > 0$  é um parâmetro a ser calculado.

Esta modificação na ação derivativa pode ser interpretada como a ação derivativa ideal filtrada por um sistema de primeira ordem com constante de tempo  $N$ . Para componentes de baixas frequências, esta aproximação atua como um derivador. Contudo, devido ao polo, o ganho da ação derivativa para as componentes de altas frequências é limitado a  $K_p T_d / N$ . Valores típicos de  $T_d / N$  estão entre 8 e 20 (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

Neste trabalho a função de transferência ideal (35) é utilizada para a sintonia do controlador PID, enquanto a função de transferência (37), com limitação do ganho da ação derivativa, é utilizada nas simulações e implementações práticas. Quanto menor o valor do parâmetro  $N$  melhor a aproximação na faixa de interesse da função de transferência (35) pela função de transferência (37). Apesar disso, existem limites inferiores para  $N$  ligados à amplificação de ruídos gerada pelo elevado ganho em altas frequências, questão que não será abordada neste trabalho.

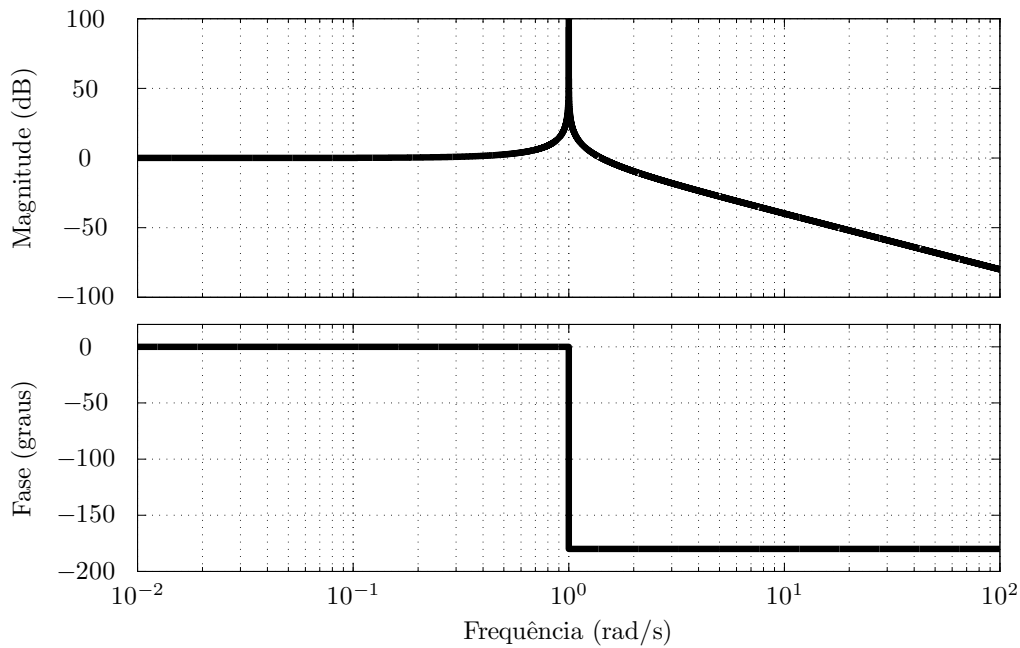
#### 2.2.2.4 Controlador proporcional-ressonante

Analisando o seguimento com erro nulo e a rejeição assintótica de sinais senoidais com frequência  $\omega_r$  que podem ser descritos por:

$$R(s) = \frac{N_r(s)}{s^2 + \omega_r^2}, \quad Q(s) = \frac{N_q(s)}{s^2 + \omega_r^2}, \quad (38)$$

onde  $N_r(s)$  e  $N_q(s)$  são os polinômios em  $s$  dos numeradores do sinal de referência e de perturbação, respectivamente, verifica-se que esses sinais têm modos instáveis em  $\pm j\omega_r$ , ou seja,  $\phi(s) = s^2 + \omega_r^2$ . Assim, pelo PMI, o controlador que garante o seguimento de referência e a rejeição de perturbação com erro nulo de sinais senoidais com frequência  $\omega_r$

Figura 3 – Resposta em frequência da função de transferência apresentada em (39) com  $N_c(s) = \omega_r^2$  e  $\omega_r = 1$  rad/s.



Fonte: Elaborado pelo autor.

deve apresentar um par de polos complexos sobre o eixo imaginário em  $\pm j\omega_r$ , resultando em

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{N_c(s)}{s^2 + \omega_r^2}, \quad (39)$$

considerando que o processo não tenha zeros em  $\pm j\omega_r$ .

Na Figura 3 é ilustrada a resposta em frequência da função de transferência definida em (39) com  $N_c(s) = \omega_r^2$  e com  $\omega_r = 1$  rad/s. Nesta figura constata-se a existência de um pico de ressonância com magnitude infinita em  $\omega_r$ , a qual é uma das principais características dos chamados controladores ressonantes (CHEN, 2013).

Como a magnitude do modo ressonante é infinita na frequência  $\omega_r$ , então, as condições apresentadas em (25) e (26) são satisfeitas para qualquer processo sem zeros em  $\pm j\omega_r$ . Assim, verificada a estabilidade do sistema em malha fechada com um controlador ressonante adequadamente sintonizado em  $\omega_r$ , um sinal de referência senoidal com essa frequência será replicado na saída do sistema, garantindo o seguimento com erro nulo. Além disso, um sinal de perturbação senoidal com essa mesma frequência terá magnitude nula na saída do sistema, assegurando a rejeição assintótica da perturbação.

Por apresentar dois polos sobre o eixo imaginário, em  $\pm j\omega_r$ , para facilitar a etapa de sintonia e para que sejam evitados problemas na garantia de estabilidade do sistema em malha fechada, define-se o numerador da função de transferência em (39) como sendo um ganho em conjunto com dois zeros (PEREIRA *et al.*, 2014). Além disso, em diversas aplicações, por exemplo em HABIBULLAH; POTA; PETERSEN (2017), em MOHEIMANI; VAUTIER (2005) e em TEODORESCU *et al.* (2006), são utilizados controladores ressonantes possuindo polos com módulo  $\omega_r$  deslocados do eixo imaginário para o semiplano esquerdo (SPE) do plano  $s$ , o que melhora a robustez e facilita a sintonia do sistema de controle à custa da perda do seguimento com erro nulo e da rejeição assintótica, visto que a magnitude em  $\omega_r$  é reduzida.

Assim, considera-se a forma genérica do controlador proporcional-ressonante (PR) cuja função de transferência é dada por:

$$C_{pr}(s) = \frac{K_p (s^2 + 2\xi\omega_r s + \omega_r^2) + K_{r1}s + K_{r2}}{s^2 + 2\xi\omega_r s + \omega_r^2} = K_p + \frac{K_{r1}s + K_{r2}}{s^2 + 2\xi\omega_r s + \omega_r^2}, \quad (40)$$

onde  $\omega_r$  é a frequência do sinal senoidal a ser seguido e/ou rejeitado,  $\xi \geq 0$  é o coeficiente de amortecimento dos polos, enquanto  $K_p$ ,  $K_{r1}$  e  $K_{r2} \in \mathbb{R}$  são parâmetros a serem determinados.

A inclusão do termo  $2\xi\omega_r s$  no denominador de (39), considerando  $0 < \xi < 1$ , implica que os polos da função de transferência do controlador PR apresentada em (40) sejam  $p_{1,2} = -\xi\omega_r \pm j\omega_r\sqrt{1 - \xi^2}$ . Neste caso, a magnitude do controlador PR passa a apresentar um pico de ressonância elevado, porém finito, em  $\omega_d = \omega_r\sqrt{1 - \xi^2}$ . A medida que  $\xi$  tende a zero,  $\omega_d$  tende a  $\omega_r$ . Além disso, pode-se constatar que a diferença entre  $\omega_r$  e  $\omega_d$  é menor do que 1% para  $\xi < 0,1$ . Por outro lado, o caso limite, quando  $\xi = 0$ , corresponde à formulação do controlador PR com polos em  $\pm j\omega_r$  e que possui um pico de ressonância com magnitude infinita em  $\omega_r$ .

#### 2.2.2.5 Controlador proporcional-múltiplos-ressonantes

O PMI também pode ser utilizado visando o seguimento e a rejeição de sinais periódicos genéricos, como por exemplo as ondas dente de serra, triangular e quadrada. Neste caso, utilizando a Transformada de Laplace, os sinais de referência e de perturbação periódicos podem ser representados pela soma de termos senoidais ou cossenoidais dependentes das frequências múltiplas inteiras de suas frequências fundamentais  $\omega_r$  e  $\omega_q$  através das seguintes funções de transferência:

$$R(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{rk}(s)}{s^2 + (k\omega_r)^2}, \quad Q(s) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{N_{ql}(s)}{s^2 + (l\omega_q)^2}, \quad (41)$$

nas quais  $N_{rk}(s)$  e  $N_{ql}(s)$  são respectivamente os polinômios do numerador de cada um dos modos que compõem os sinais de interesse.

Considerando os modos de  $R(s)$  e  $Q(s)$  com componentes não nulas, são definidos os polinômios:

$$\begin{aligned} \phi_r(s) &= \prod_{k \geq 0: N_{rk}(s) \neq 0} (s + jk\omega_r) \prod_{k > 0: N_{rk}(s) \neq 0} (s - jk\omega_r), \\ \phi_q(s) &= \prod_{l \geq 0: N_{ql}(s) \neq 0} (s + jl\omega_q) \prod_{l > 0: N_{ql}(s) \neq 0} (s - jl\omega_q), \end{aligned} \quad (42)$$

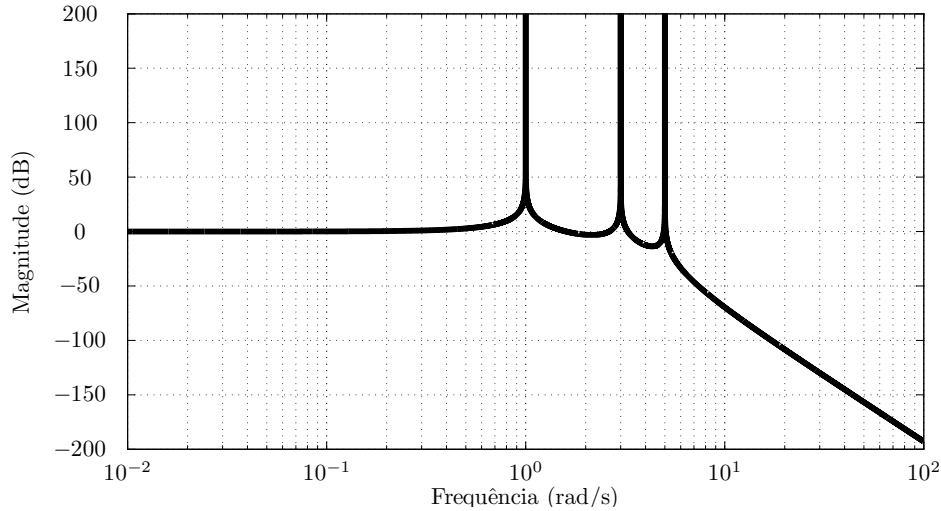
os quais são utilizados para calcular  $\phi(s)$ , o polinômio mínimo múltiplo comum dos modos instáveis dos sinais de referência,  $\phi_r(s)$ , e de perturbação,  $\phi_q(s)$ . Assim, contanto que nenhum zero do processo seja uma raiz de  $\phi(s)$ , ao empregar um controlador que contenha  $\phi(s)$  em seu denominador e que assegure a estabilidade do sistema em malha fechada, pelo PMI é garantido o seguimento com erro nulo em regime permanente do sinal  $R(s)$  e a rejeição assintótica do sinal de perturbação  $Q(s)$ , ambos definidos em (41).

Na Figura 4 é apresentada a magnitude da estrutura de um controlador com três modos ressonantes dada por:

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{9}{s^2 + 9} \cdot \frac{25}{s^2 + 25}, \quad (43)$$



Figura 4 – Magnitude da função de transferência  $C(s)$  apresentada em (43).



na qual verifica-se picos de ressonância nas frequências  $\omega_1 = 1$  rad/s,  $\omega_2 = 3$  rad/s e  $\omega_3 = 5$  rad/s. Caso essa estrutura seja utilizada em um sistema em malha fechada estável e com um processo sem zeros em  $\pm j1$ ,  $\pm j3$  e  $\pm j5$ , então pelo PMI garante-se o seguimento de referência e a rejeição de perturbação com erro nulo de sinais compostos pelas frequências  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ .

Dessa forma, utilizando a estrutura PR apresentada em (40), define-se a função de transferência do controlador proporcional-múltiplos-ressonantes (PMR):

$$C_{pmr}(s) = \prod_n \left( K_{pn} + \frac{K_{r1n}s + K_{r2n}}{s^2 + 2\xi_n\omega_{rn}s + \omega_{rn}^2} \right), \quad (44)$$

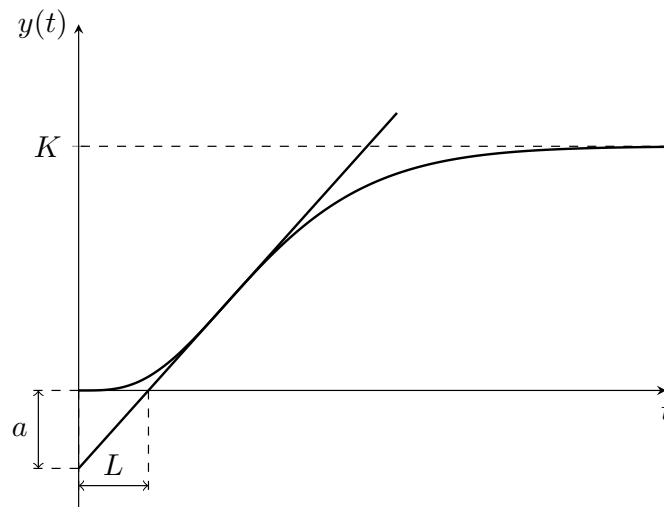
na qual  $\omega_{rn}$  são as frequências que compõem o sinal periódico a ser seguido e/ou rejeitado,  $\xi_n \geq 0$  são os coeficientes de amortecimento dos polos, ao passo que  $K_{pn}$ ,  $K_{r1n}$  e  $K_{r2n} \in \mathbb{R}$  são os parâmetros a serem determinados. Para o seguimento/rejeição de um sinal periódico genérico com frequência fundamental  $\omega_r$  utiliza-se o controlador PMR com modos ressonantes sintonizados nas frequências  $n\omega_r$ , onde  $n$  é um número inteiro que representa a ordem da harmônica que compõe o sinal periódico.

### 2.2.3 Métodos de sintonia de Ziegler-Nichols

O procedimento de sintonizar os parâmetros de um controlador pode ser basicamente realizado de duas maneiras diferentes. A primeira abordagem é obter um modelo matemático que descreva o comportamento do processo e, então, determinar os parâmetros do controlador através desse modelo utilizando algum método específico de projeto de sistemas de controle (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). A obtenção de um modelo matemático que descreve com precisão o comportamento do processo permite o projeto sistemático do controlador, no qual pode-se, por exemplo, otimizar o desempenho do sistema. Por outro lado, a obtenção de um modelo matemático preciso pode ser extremamente difícil ou até impossível em alguns casos.

Em diversas situações, um bom desempenho pode ser obtido com métodos de sintonia baseados em dados, nos quais o controlador é determinado por meio de um modelo simplificado ou um número reduzido de informações sobre o comportamento do processo, geralmente obtidas com baixo custo por meio de ensaios relativamente simples de serem

Figura 5 – Determinação das variáveis  $a$  e  $L$  a partir da resposta ao salto de um processo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

realizados. Essa característica aliada à existência de fórmulas de sintonia facilmente aplicáveis são duas das razões pelas quais os controladores PID, juntamente com os métodos de Ziegler-Nichols (ZIEGLER; NICHOLS, 1942), são populares e utilizados nas mais diversas aplicações. A seguir são detalhados os métodos de Ziegler-Nichols para sintonia de controladores PID: método da resposta ao salto e método da oscilação forçada.

### 2.2.3.1 Método da resposta ao salto

O primeiro método de sintonia de controladores PID proposto por Ziegler e Nichols (ZIEGLER; NICHOLS, 1942), também conhecido por método da resposta ao salto ou método da curva de reação, é baseado na saída do processo em malha aberta quando aplicado um salto em sua entrada e pode ser utilizado em processos cuja resposta tem a forma de um S, tal como a curva apresentada na Figura 5. Este método é basicamente composto de três etapas: realização do ensaio ao salto, obtenção de duas variáveis desse ensaio, e cálculo dos parâmetros do controlador com base nessas duas variáveis. Esse procedimento é descrito na sequência.

Após obter a resposta ao salto do processo, os eixos coordenados são traçados tomando como origem no eixo das abcissas e no eixo das ordenadas, respectivamente, o instante de tempo em que foi aplicado o salto e o valor da variável de saída do processo imediatamente antes desse instante. Em seguida, é traçada uma reta tangente ao sinal de saída no seu ponto de inflexão, que para esta curva é o ponto de máxima taxa de variação desse sinal. Como apontado na Figura 5, a distância entre a origem e as interseções entre a reta tangente e os eixos coordenados resultam nas variáveis positivas  $a$  e  $L$ . Pode-se aplicar um salto com amplitude diferente da unitária contanto que a variável  $a$  seja dividida pela amplitude desse salto.

Então, os parâmetros dos controladores P, PI e PID, cujas funções de transferência foram definidas na Seção 2.2.2, podem ser calculados a partir das variáveis  $a$  e  $L$  utilizando os conjuntos de fórmulas de sintonia de Ziegler-Nichols propostos na referência original ZIEGLER; NICHOLS (1942) que estão representadas na Tabela 1. Ao longo dos anos, baseados no método da resposta ao salto de Ziegler-Nichols, foram apresentados diversos conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores PID visando atender alguma classe de processos ou alguma característica específica de desempenho transitório, como por

Tabela 1 – Fórmulas de Ziegler-Nichols para sintonia pelo método da resposta ao salto.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{1}{a}$	–	–
PI	$\frac{0,9}{a}$	$3L$	–
PID	$\frac{1,2}{a}$	$2L$	$0,5L$

Fonte: ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995).

exemplo as fórmulas propostas por Chien, Hrones e Reswick, as quais podem ser encontradas em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995), além das fórmulas propostas em COHEN; COON (1953), HÄGGLUND; ÅSTRÖM (2002), ÅSTRÖM; HÄGGLUND (2004), entre outras.

Apesar de ser simples e direto, o método de sintonia baseado na curva de reação tem sua aplicação limitada à classe de processos cuja resposta ao salto pode ser aproximada pela curva da Figura 5. Assim, esse método não é adequado para a sintonia de controladores PID visando a classe de processos com comportamento oscilatório ou com resposta inversa característica de processos de fase não mínima, por exemplo.

### 2.2.3.2 Método da oscilação forçada

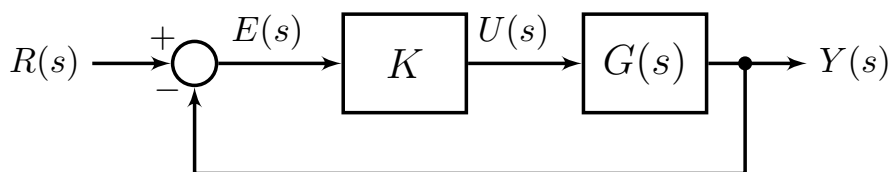
O segundo método de sintonia de controladores PID proposto por Ziegler e Nichols é baseado no conhecimento do ponto crítico da resposta em frequência do processo. O ponto crítico de um processo, cuja função de transferência é  $G(s)$ , é definido como o ponto onde o diagrama de resposta em frequência de  $G(j\omega)$  traçado na forma polar cruza o eixo real negativo, ou seja, é o ponto de menor frequência na qual a fase é  $-\pi$  ou  $-180^\circ$ . Esse ponto é caracterizado pelo período crítico ou pela frequência crítica, respectivamente  $T_u$  e  $\omega_u$ , e pelo ganho crítico,  $K_u$ , os quais são formalmente definidos por

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_u}, \text{ onde } \omega_u = \min_{\omega \geq 0} : \angle G(j\omega) = -\pi, \text{ e } K_u = \frac{1}{|G(j\omega_u)|}. \quad (45)$$

Em processos cuja fase da sua resposta em frequência cruza  $-\pi$ , o ponto crítico pode ser obtido experimentalmente através do sistema operando em malha fechada com controle proporcional como apresentado na Figura 6. Se o ganho deste controlador, definido por  $K$ , for aumentado lentamente, em um dado valor uma oscilação sustentada será observada na saída do processo, um exemplo de oscilação é ilustrado na Figura 7. Para esse valor de  $K$  constata-se que o sistema em malha fechada está no limite da estabilidade, ou seja, o diagrama de resposta em frequência de  $KG(j\omega)$  traçado na forma polar cruza o eixo real negativo exatamente no ponto  $-1 + j0$ , não o envolvendo. Assim, o período da oscilação sustentada é igual ao período crítico  $T_u$ , a partir do qual pode-se calcular  $\omega_u$ , e o valor de  $K$  é igual ao ganho crítico  $K_u$ , dado em (45) como o inverso da magnitude do processo avaliada na frequência crítica.

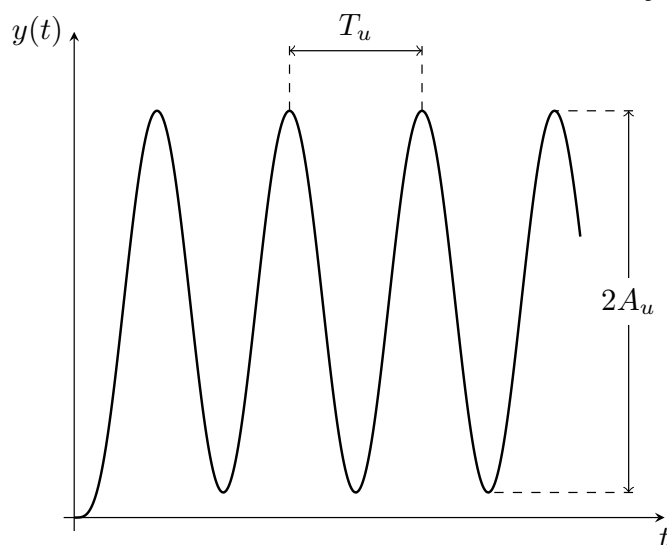
Então, os parâmetros dos controladores PID são calculados por meio das variáveis  $K_u$  e  $T_u$  utilizando, por exemplo, o conjunto de fórmulas de Ziegler-Nichols proposto na referência original ZIEGLER; NICHOLS (1942) que está apresentado na Tabela 2. Os controladores PID também podem ser projetados utilizando o conjunto de fórmulas de

Figura 6 – Diagrama em blocos do sistema em malha fechada com controle proporcional para obtenção do ponto crítico de  $G(s)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7 – Saída de um sistema em malha fechada com oscilação sustentada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Fórmulas de Ziegler-Nichols para sintonia pelo método da oscilação forçada.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5K_u$	—	—
PI	$0,4K_u$	$0,8T_u$	—
PID	$0,6K_u$	$0,5T_u$	$0,125T_u$

Fonte: ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995).

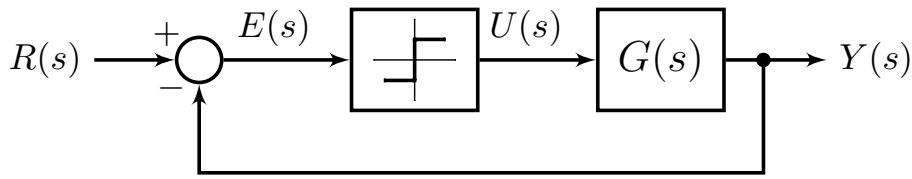
Tabela 3 – Fórmulas de Tyreus-Luyben para sintonia pelo método da oscilação forçada.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
PI	$\frac{K_u}{3,2}$	$2,2T_u$	—
PID	$\frac{K_u}{2,2}$	$2,2T_u$	$\frac{T_u}{6,3}$

Fonte: LUYBEN; LUYBEN (1997).

sintonia de Tyreus-Luyben descrito na Tabela 3, o qual resulta em sintonia mais conservadora —com desempenho mais lento e com menor sobrepasso— que a obtida com as fórmulas de Ziegler-Nichols (LUYBEN; LUYBEN, 1997).

Figura 8 – Diagrama em blocos do sistema realimentado com um relé para identificação do período crítico e do ganho crítico de  $G(s)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar de ser um procedimento simples, a determinação do ponto crítico de um processo por meio do sistema operando em malha fechada com controle proporcional é difícil de ser automatizada e executada. Como o ganho deve ser aumentado progressivamente o método pode se tornar demorado, além de ser necessário um certo conhecimento do processo para a definição do ganho inicial e sua taxa de variação. Outro problema é que a amplitude da oscilação do processo não pode ser controlada, podendo ser bastante acentuada, impossibilitando sua aplicação em diversos processos industriais (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

Em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1984) foi proposta a determinação experimental do ponto crítico de um processo através do experimento do relé, no qual a malha do sistema é fechada utilizando um relé, conforme apresentado na Figura 8. O experimento do relé baseia-se no fato de que a saída de muitos processos oscila com formato aproximadamente senoidal quando o sinal de controle,  $u(t)$ , é uma onda quadrada gerada pela seguinte lei de controle

$$u(t) = d \operatorname{sign}(e(t)) + b, \quad (46)$$

onde  $d \in \mathbb{R}^+$  é um parâmetro a ser escolhido,  $\operatorname{sign}(\cdot)$  é definida como a função sinal

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (47)$$

e  $b \in \mathbb{R}$  é o *offset*, que deve ser ajustado até a obtenção de uma oscilação sustentada simétrica em relação ao valor da referência. Uma vez obtida a oscilação simétrica, a entrada e a saída do processo têm fase oposta, o que significa que a frequência de oscilação é aproximadamente a frequência crítica do processo  $\omega_u$ , então o período desta oscilação é aproximadamente igual ao período crítico do processo,  $T_u$ . A partir da expansão em *CTFS*, a oscilação na saída do processo pode ser considerada como o resultado da primeira harmônica da saída do relé, a qual possui amplitude  $4d/\pi$ . Desta forma, o ganho crítico do processo pode ser aproximadamente calculado através de (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995)

$$K_u = \frac{4d}{\pi A_u}, \quad (48)$$

onde  $A_u$  é a amplitude de pico da oscilação observada, como ilustrado na Figura 7.

Em seguida, os parâmetros dos controladores PID podem ser calculados através das fórmulas de sintonia apresentadas na Tabela 2 ou na Tabela 3. Neste trabalho, o método baseado no experimento do relé e com a sintonia pelas fórmulas da Tabela 2 é chamado de *método clássico da oscilação forçada (método COF)* ou *classical forced oscillation method*, como definido em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017).

Em aplicações práticas, muitas vezes um relé com histerese é utilizado no lugar do simples relé descrito em (47) visando evitar o chaveamento aleatório devido ao ruído de medição. Em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995) é demonstrado pelo método da função descritiva que o período da oscilação obtida é aproximadamente igual ao período crítico e o ganho crítico é calculado por:

$$K_u = \frac{4d}{\pi \sqrt{A_u^2 - h^2}}, \quad (49)$$

onde  $h$  é a largura da histerese.

O experimento do relé é mais fácil de ser automatizado e executado do que o experimento do sistema operando em malha fechada com controle proporcional pois a amplitude do sinal de oscilação na saída do processo é proporcional à saída do relé, e esta é simplesmente ajustada através do parâmetro  $d$ . Além disso, este experimento é realizado em malha fechada, resultando em oscilações em torno do valor da referência, o que permite implementações com o processo em operação, até mesmo sem a paralisação da atividade industrial (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

### 2.2.3.3 Análise do método Clássico da Oscilação Forçada

Nesta seção é realizada uma análise do método da oscilação forçada por meio dos conceitos de resposta em frequência, seu mapeamento no plano complexo e margens de estabilidade, seguindo a abordagem apresentada em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995). O método da oscilação forçada é baseado no conhecimento do ponto onde o diagrama de resposta em frequência do processo traçado na forma polar cruza o eixo real negativo ( $-1/K_u + j0$ ), também conhecido como ponto crítico do processo, a partir do qual determina-se a frequência crítica,  $\omega_u = 2\pi/T_u$ , e ganho crítico,  $K_u$ . Então, com base nessas duas variáveis, os parâmetros dos controladores PID são calculados utilizando fórmulas tabeladas.

Através das fórmulas do método da oscilação forçada de Ziegler-Nichols para o controlador PI, Tabela 2, verifica-se as relações  $K_p = 0,4K_u$  e  $\omega_u T_i = (2\pi/T_u)0,8T_u = 5,03$ . Dessa forma, a função de transferência do controlador PI, apresentada na Equação (32), analisada na frequência crítica é

$$\begin{aligned} C_{pi}(j\omega_u) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega_u T_i} \right) \\ &= 0,4K_u \left( 1 + \frac{1}{j5,03} \right) = K_u(0,4 - j0,08). \end{aligned} \quad (50)$$

Por meio de (50) constata-se que o controlador PI sintonizado por esse método tem  $11,3^\circ$  de atraso de fase na frequência crítica e em tal situação a função de transferência de malha aberta é dada por

$$\begin{aligned} L(j\omega_u) &= C_{pi}(j\omega_u) G(j\omega_u) = -K_u(0,4 - j0,08) \frac{1}{K_u} \\ &= -0,4 + j0,08 = 0,408 \angle -191,3^\circ. \end{aligned} \quad (51)$$

Logo, o controlador PI sintonizado pelo método da oscilação forçada de Ziegler-Nichols move o ponto crítico  $-1/K_u + j0$  para o ponto  $-0,4 + j0,08$ .

Da mesma forma, utilizando as fórmulas de sintonia do método da oscilação forçada de Ziegler-Nichols para o controlador PID, Equação (35), é obtido  $K_p = 0,6K_u$ ,

$\omega_u T_i = (2\pi/T_u)0,5T_u = \pi$  e  $\omega_u T_d = (2\pi/T_u)0,125T_u = \pi/4$ . Com isso, a função de transferência desse controlador analisada em  $\omega_u$  é igual a

$$\begin{aligned} C_{pid}(j\omega_u) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega_u T_i} + j\omega_u T_d \right) \\ &= 0,6K_u \left( 1 + \frac{1}{j\pi} + \frac{j\pi}{4} \right) = K_u(0,6 + j0,28), \end{aligned} \quad (52)$$

o que resulta em  $25^\circ$  de avanço de fase na frequência crítica. A função de transferência de malha aberta avaliada em  $\omega_u$  é a seguinte

$$\begin{aligned} L(j\omega_u) &= C_{pid}(j\omega_u) G(j\omega_u) = -K_u(0,6 + j0,28) \frac{1}{K_u} \\ &= -0,6 - j0,28 = 0,662 \angle -155^\circ. \end{aligned} \quad (53)$$

Portando, o controlador PID sintonizado pelo método da oscilação forçada de Ziegler-Nichols move o ponto crítico  $-1/K_u + j0$  para o ponto  $-0,6 - j0,28$ .

Assim, o método da oscilação forçada pode ser interpretado como um procedimento em que o ponto crítico do processo é identificado e reposicionado em uma localização desejada no plano complexo através da resposta em frequência da função de malha aberta. Sob este ponto de vista esse método pode ser resumido nos seguintes itens:

1. Identificação do ponto crítico da resposta em frequência do processo através da determinação de  $\omega_u$  e  $K_u$ ;
2. Cálculo dos parâmetros do controlador de modo que

$$C(j\omega_u)G(j\omega_u) = p, \quad (54)$$

sendo que pela definição do ponto crítico  $G(j\omega_u) = -1/K_u$ , verifica-se que

$$C(j\omega_u) = -K_u p, \quad (55)$$

onde  $p$  é uma localização predeterminada no plano complexo.

Conforme descrito na seção anterior, o primeiro passo pode ser realizado através do experimento do relé no método COF. No segundo passo desse método, os parâmetros dos controladores,  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ , são calculados através da solução de (55) para o controlador desejado, utilizando a localização escolhida de  $p$ . Isso significa resolver uma equação complexa com duas incógnitas para o controlador PI e com três incógnitas para o controlador PID. Como no controlador PID existe um grau de liberdade no cálculo dos parâmetros (são duas equações para três incógnitas), normalmente é imposta uma restrição adicional de que os dois zeros da função de transferência do controlador sejam iguais. No caso do controlador PID na forma paralela, Equação (35), essa restrição é obtida através de  $T_i = 4T_d$ .

Considerando que a resposta em frequência do processo é suficientemente suave, deslocar o ponto crítico para longe do ponto  $-1 + j0$  no plano complexo implica em deslocar toda a resposta de frequência da função de transferência de malha aberta para longe desse ponto, o que normalmente resulta em apropriadas margens de estabilidade. Ao longo do tempo, diferentes localizações  $p$  foram propostas visando atender alguma característica de desempenho transitório e obter margens de estabilidade apropriadas. Conforme visto

anteriormente, as fórmulas de sintonia de Ziegler-Nichols no método da oscilação forçada utilizam

$$p = -0,4 + j0,08 \quad (56)$$

para o controlador PI e

$$p = -0,6 - j0,28 \quad (57)$$

para o controlador PID.

Na Seção 3.2 o segundo passo deste método será detalhadamente deduzido para a obtenção das fórmulas de sintonia dos controladores PID em função do ponto identificado da resposta em frequência do processo. Essa mesma ideia será utilizada e desenvolvida na Seção 4.2 visando o projeto do controlador PR.

#### 2.2.3.4 Restrições dos métodos de Ziegler-Nichols

Em diversas aplicações os métodos de Ziegler-Nichols são suficientes para a obtenção de apropriadas margens de estabilidade e bom desempenho em malha fechada quando realiza-se a sintonia de controladores PID aplicados a processos com comportamentos típicos: resposta ao salto com forma de um  $S$  e característica de auto-oscilação quando realizado o ensaio de malha fechada. Porém, esses métodos não podem ser utilizados quando o comportamento do processo não atende aos padrões de resposta exigidos em cada um deles. Na sequência são apresentados três exemplos de processos nos quais não é possível a aplicação dos tradicionais métodos de Ziegler-Nichols. Na Seção 3.4 esses processos serão utilizados como estudo de caso para a análise do método de sintonia de controladores PID proposto na Seção 3.2, que pode ser aplicado a processos *LTIC* genéricos —independentemente da forma da resposta ao salto e da existência de uma frequência crítica, de ordem ou de grau relativo—, englobando, dessa forma, os processos considerados pelos dois métodos de Ziegler-Nichols, além de abranger uma classe de processos à qual esses tradicionais métodos não são aplicáveis.

**Exemplo 2.** *O primeiro processo representa o modelo linearizado da dinâmica do ângulo de arfagem de uma aeronave descrito em UNIVERSITY OF MICHIGAN (2012), cuja função de transferência é a seguinte*

$$G_{b1}(s) = \frac{1,15s + 0,18}{s^3 + 0,74s^2 + 0,9s}, \quad (58)$$

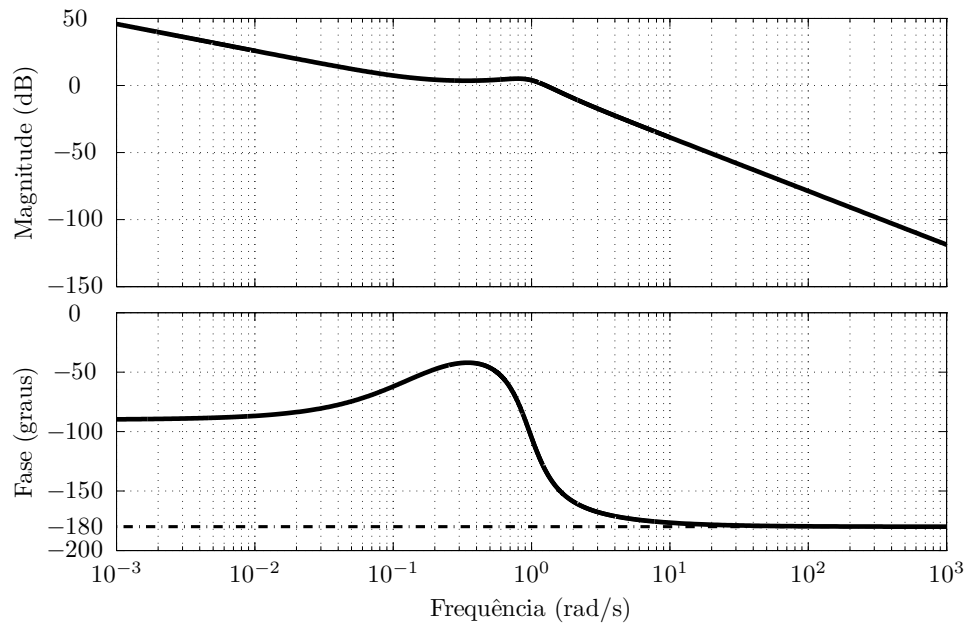
onde a entrada é o ângulo de deflexão do elevador e a saída é o ângulo de arfagem da aeronave, cuja resposta em frequência está representada na Figura 9.

Inicialmente é aplicado o método da resposta ao salto, para o qual a saída do processo  $G_{b1}(s)$  em malha aberta para uma entrada degrau unitário é apresentada na Figura 10(a). Por se tratar de um processo não autorregulado<sup>2</sup>, o método de sintonia baseado na curva de reação não pode ser utilizado. Em seguida, é realizado o experimento do relé cuja saída é apresentada na Figura 10(b). Visto que a resposta em frequência do processo não cruza  $-180^\circ$ , não é obtida a oscilação sustentada e o método COF também não pode ser aplicado. Com isso não é possível determinar os parâmetros dos controladores PID por meio de nenhum dos clássicos métodos de Ziegler-Nichols.

<sup>2</sup>Na literatura dedicada a sistemas de controle, os processos *BIBO*-estáveis são conhecidos como autorregulados e processos que não são *BIBO*-estáveis são denominados como sem autorregulação ou não autorregulados (ÅSTRÖM *et al.*, 1992).

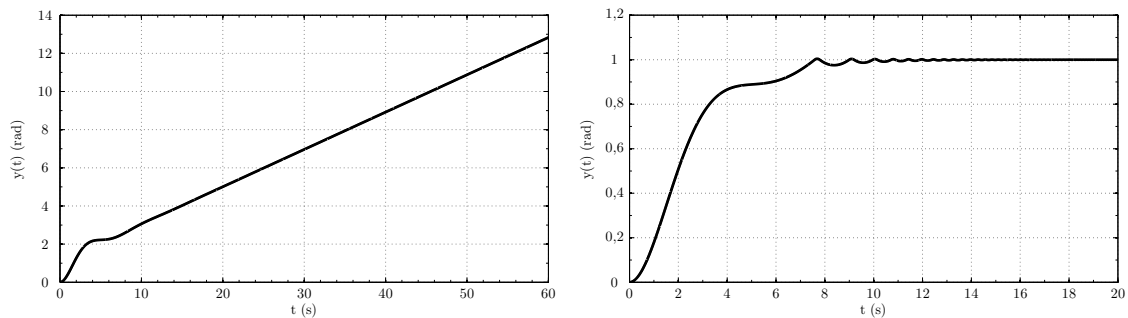


Figura 9 – Resposta em frequência do modelo do ângulo de arfagem de um avião.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10 – Saída dos experimentos de Ziegler-Nichols em malha aberta e malha fechada para o processo do modelo do ângulo de arfagem de um avião.



(a) Curva de reação para um degrau unitário

(b) Experimento do relé com  $d = 0,4$  e  $b = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

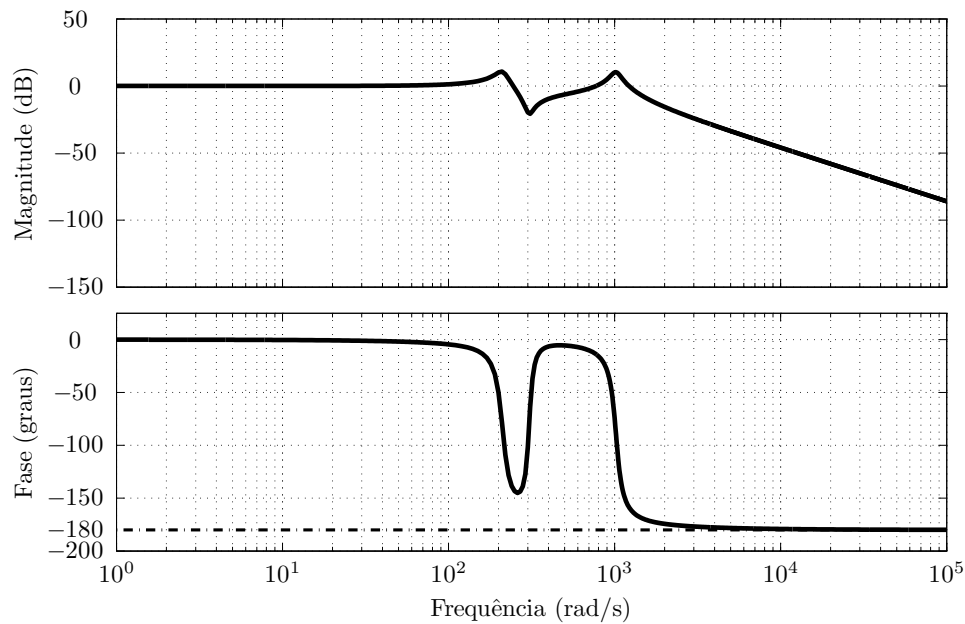
**Exemplo 3.** O segundo processo consiste em um sistema de posicionamento do cabeçote de leitura e de gravação de um disco rígido, apresentado em FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI (2002), o qual é descrito pela função de transferência

$$G_{b2}(s) = \frac{5,00 \times 10^5 s^2 + 1,40 \times 10^7 s + 4,67 \times 10^{10}}{s^4 + 178s^3 + 1,09 \times 10^6 s^2 + 4,21 \times 10^7 s + 4,67 \times 10^{10}} \quad (59)$$

e possui resposta em frequência apresentada na Figura 11, na qual constata-se a existência de picos (modos) de ressonância aproximadamente em 211 rad/s e 1017 rad/s.

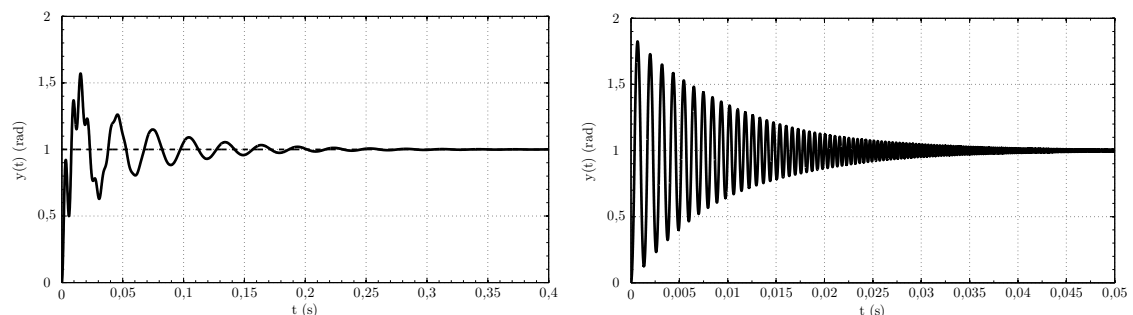
A partir da curva de reação para um degrau unitário, cuja forma difere da característica em  $S$  devido à oscilação ocasionada pelos dois modos de ressonância do processo, conforme pode ser observado na Figura 12(a), verifica-se que não é adequada a aplicação do primeiro método de sintonia de Ziegler-Nichols. Além disto, analisando a saída do experimento do relé, Figura 12(b), também exclui-se a utilização do método COF, visto que esse processo não tem ponto crítico.

Figura 11 – Resposta em frequência do sistema de posicionamento do cabeçote de leitura e de gravação de um disco rígido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Saída dos experimentos de Ziegler-Nichols em malha aberta e malha fechada para o sistema de posicionamento do cabeçote de leitura e de gravação de um disco rígido.



(a) Curva de reação para um degrau unitário

(b) Experimento do relé com  $d = 30$  e  $b = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

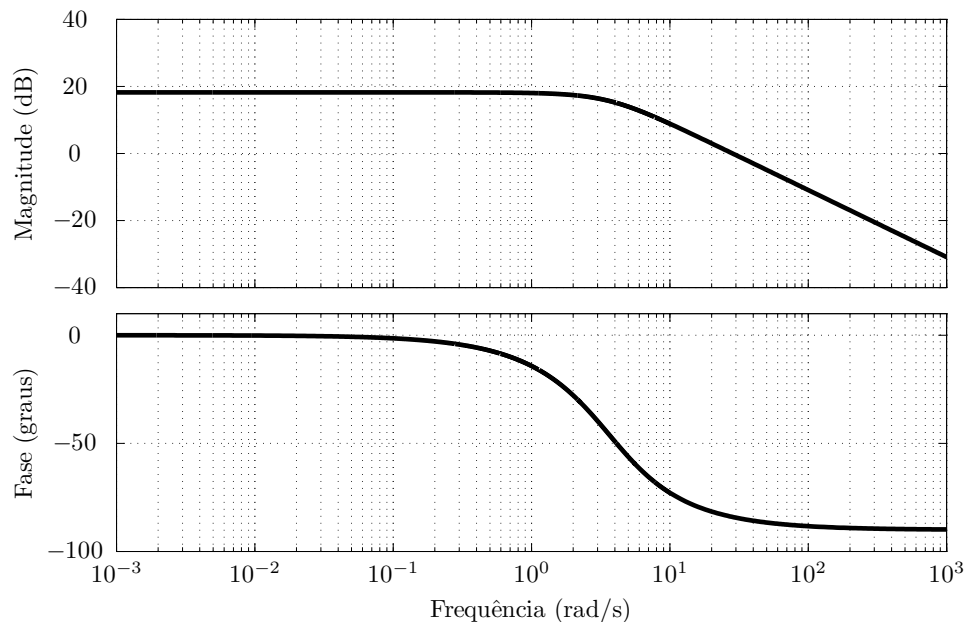
**Exemplo 4.** O último processo considerado é o modelo linearizado de um sistema de direção ativa de um carro de quatro rodas, cuja função de transferência do ângulo do volante do carro (em radianos) para a taxa de guinada (em rad/s) é dada por (ZHANG et al., 2008):

$$G_{c1}(s) = \frac{28,4s + 119,7}{s^2 + 7,15s + 14,7}, \quad (60)$$

e que possui resposta em frequência representada na Figura 13.

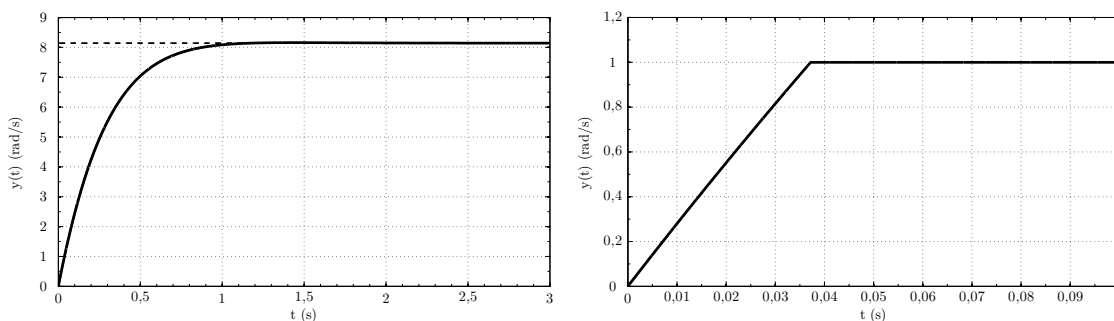
Aplica-se um degrau unitário em  $G_{c1}(s)$  e é obtida a curva de reação que não tem o formato de S apresentada na Figura 14(a). Em seguida é realizado o experimento do relé que resulta na saída sem oscilação sustentada retratada na Figura 14(b). Assim, para esse processo, também não é possível a determinação dos parâmetros dos controladores PID por meio dos clássicos métodos de Ziegler-Nichols.

Figura 13 – Resposta em frequência do sistema de direção ativa de um carro de quatro rodas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 – Saída dos experimentos de Ziegler-Nichols em malha aberta e malha fechada para o sistema de direção ativa de um carro de quatro rodas.



(a) Curva de reação para um degrau unitário

(b) Experimento do relé com  $d = 1$  e  $b = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.2.3.5 Desenvolvimentos no método Clássico da Oscilação Forçada

Ao longo das últimas décadas, muita pesquisa tem sido realizada visando o desenvolvimento de regras para sintonia de controladores PID e, assim, muitos métodos foram propostos e aplicados com sucesso. Conforme pode ser observado em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995), KIONG *et al.* (1999), YU (2006), VISIOLI (2006), WANG; LEE; CHONG (2003), CHIDAMBARAM; SAXENA (2018) e em suas referências, muitos desses métodos e suas extensões —os quais continuam a ser desenvolvidos— constituem variações do método da oscilação forçada proposto em ZIEGLER; NICHOLS (1942) e do experimento do relé descrito em (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1984). A seguir, são listados alguns desses métodos e dessas extensões.

A obtenção de um modelo de ordem reduzida do processo a partir do tradicional experimento do relé foi inicialmente proposta em LUYBEN (1987), com necessidade do conhecimento do ganho estático do processo, e desenvolvida em LI; ESKINAT; LUYBEN

(1991), onde são propostos dois experimentos do relé para a determinação do modelo. A utilização de um relé assimétrico permite uma melhor excitação do processo em baixas frequências do que sua versão simétrica —tradicional— e com isso a identificação do modelo pode ser realizada com apenas um experimento (BERNER; HÄGGLUND; ÅSTRÖM, 2016). A versão do relé assimétrico é largamente utilizada e investigada para esse fim, como pode ser constatado em WANG; HANG; ZOU (1997), KAYA; ATHERTON (2001), LIN; WANG; LEE (2004). Uma revisão sobre obtenção de um modelo do processo a partir do experimento do relé é apresentada em LIU; WANG; HUANG (2013).

Além de evitar o chaveamento aleatório devido ao ruído, em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995) é mostrado que o relé com histerese também permite a identificação de outros pontos da resposta em frequência do processo além do ponto crítico, através da escolha de uma apropriada relação entre o ganho do relé e a largura da histerese. Nesta mesma referência é sugerida a utilização de um integrador em série com o relé para identificação do ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-90^\circ$ . Outros pontos da resposta em frequência do processo podem ser identificados por meio da inclusão de um sistema de primeira ordem com um elemento de atraso, conforme proposto em LEVA (1993), ou da utilização de uma estrutura com dois relés operando em paralelo, como sugerido em FRIMAN; WALLER (1997).

Em SCHEI (1994), os autores apresentam uma modificação no experimento do relé tal que o sistema em malha fechada oscila aproximadamente na frequência de magnitude unitária do processo. Uma solução geral para identificação de outros pontos da resposta em frequência do processo é desenvolvida em DE ARRUDA; BARROS (2003), onde é proposta uma modificação no experimento do relé que resulta na oscilação do sistema em malha fechada com aproximadamente a frequência em que o processo possui uma magnitude previamente definida.

Extensões do experimento do relé também foram propostas para a sintonia de controladores aplicados a sistemas *MIMO* (do inglês, *Multiple-Input Multiple-Output*), por exemplo em LUYBEN (1986), LOH; VASNANI (1994), HALEVI; PALMOR; EFRATI (1997), CAMPESTRINI; FILHO; BAZANELLA (2009), YU (2006), CHIDAMBARAM; SAXENA (2018).

Em BESCHI *et al.* (2013) e em BESCHI *et al.* (2015), os autores propõem a sintonia do controlador PI baseado em eventos utilizando um experimento do relé. A versão em tempo discreto do experimento do relé é abordada em BAZANELLA; PARRAGA (2016), enquanto fórmulas para a sintonia de controladores PID baseadas nessa versão em tempo discreto do experimento do relé são apresentadas em BAZANELLA; PARRAGA (2018).

Na próxima seção será apresentado o integrador de ordem fracionária, sistema que, no Capítulo 3, será utilizado no experimento do relé modificado tendo em vista a identificação de um ponto da resposta em frequência de processos que não possuem ponto crítico e possibilitará a generalização do método da oscilação forçada incluindo processos *LTIC* genéricos, independentemente da existência de um ponto crítico, de ordem ou de grau relativo.

### 2.3 Integrador de ordem fracionária

Muitos sistemas dinâmicos reais podem ser caracterizados com melhor precisão através de um modelo dinâmico de ordem não inteira, baseado em cálculo fracionário (MILLER; ROSS, 1993), (PODLUBNY, 1999a), (MONJE *et al.*, 2010), seja utilizando diferenciadores ou integradores de ordem fracionária. Dois exemplos de sistemas reais de

ordem fracionária são a relação tensão-corrente de uma linha de transmissão semi-infinita sem perdas (WANG, 1987) e a difusão de calor através de um sólido semi-infinito no qual o fluxo de calor é igual a meia-derivada da temperatura (PODLUBNY, 1999a); outros exemplos de sistemas podem ser encontrados nessa última referência. Os sistemas de ordem fracionária ainda podem ser utilizados em filtros digitais de ordem fracionária (SHENG; CHEN; QIU, 2012) e no controlador  $PI^\lambda D^\mu$  (PODLUBNY, 1999b).

Um sistema cuja resposta em frequência apresenta fase constante igual a  $-m \times 90^\circ$  com  $m \in (0, 1)$  é chamado de integrador de ordem fracionária (*FOI*, do inglês *fractional order integrator*) e possui a seguinte função de transferência

$$FOI(s) = \frac{1}{s^m}, \quad (61)$$

a partir da qual pode ser verificado que

$$\angle FOI(j\omega) = -\angle \left( \frac{j}{\omega} \right)^m = -\angle \left( \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{\omega} \right)^m = -\frac{\pi}{2}m.$$

Definindo  $\gamma = -(\pi m)/2$  pode-se escrever  $\angle FOI(j\omega) = \gamma \forall \omega$  e, por exemplo, escolhendo  $\gamma = -\pi/6$  chega-se em  $m = 1/3$  e com  $\gamma = -\pi/3$  verifica-se que  $m = 2/3$ .

A implementação prática de um *FOI* não é tão simples e direta quanto a implementação de um integrador de ordem inteira (TEPLJAKOV, 2013). Por esse motivo, normalmente os sistemas de ordem fracionária são implementados de forma aproximada por sistemas de ordem inteira, onde, por exemplo, escolhe-se o comportamento de magnitude e de fase de um sistema de ordem fracionária em uma faixa de frequências de interesse que é implementado por um sistema de ordem inteira.

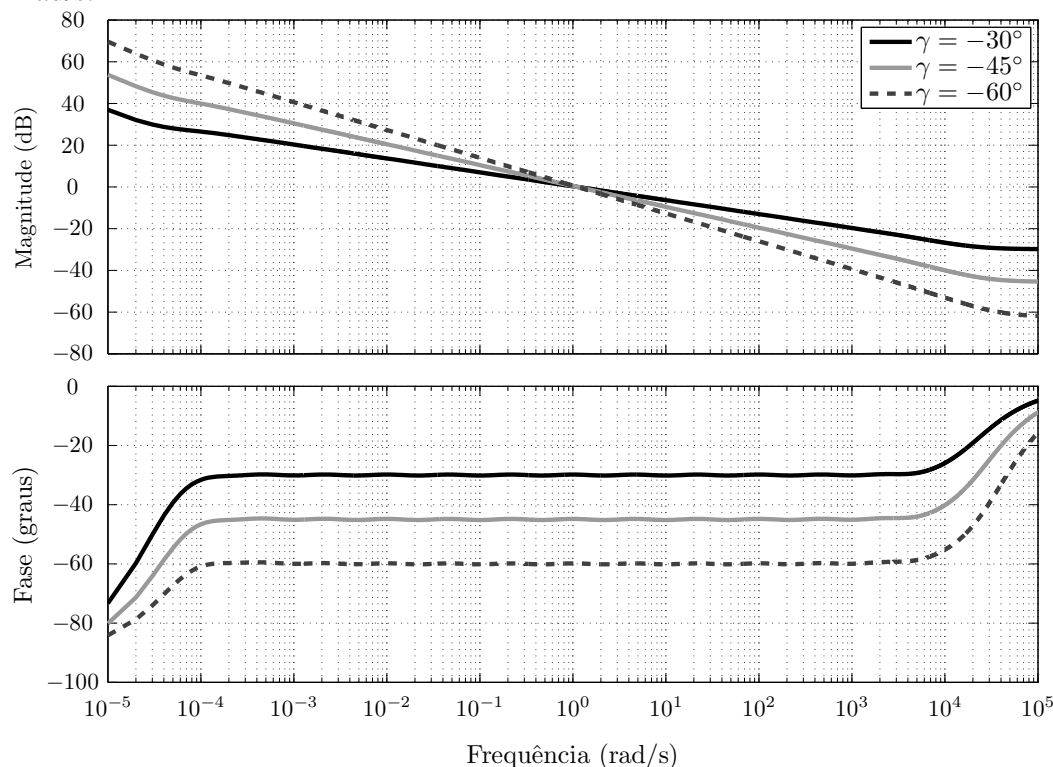
Para a obtenção das funções de transferência que aproximam o comportamento em magnitude e em fase de *FOIs*, neste trabalho foi utilizada a biblioteca FOMCON (TEPLJAKOV, 2013, 2017). Nesta biblioteca, uma função de transferência de um sistema de ordem fracionária pode ser inserida juntamente com a faixa de frequências de interesse e como saída é fornecida sua aproximação através de uma função de transferência de ordem inteira. A função de transferência

$$\hat{F}(s) = \frac{\sum_{k=0}^{14} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{14} a_k s^k} \quad (62)$$

para a qual três conjuntos de coeficientes  $\{a_k, b_k\}$  estão descritos no Apêndice A.1, implementa a aproximação de três *FOIs* com magnitude igual a  $-m \times 20$  dB/dec e com fase constante de  $-m \times 90^\circ$ , onde  $m = 1/3, 1/2$  e  $2/3$ , considerando a faixa de frequências de  $10^{-4}$  até  $10^4$  rad/s.

A Figura 15 apresenta as respostas em frequência dessas três aproximações de *FOIs* com curvas de magnitude e fase possuindo:  $-6,66$  dB/dec e  $-30^\circ$ ,  $-10$  dB/dec e  $-45^\circ$ , e  $-13,33$  dB/dec e  $-60^\circ$ . Pode-se ainda obter funções de transferência com fase constante de  $-120^\circ$ ,  $-135^\circ$  e  $-150^\circ$  utilizando as aproximações desses *FOIs* descritas anteriormente juntamente com um integrador. Na Seção 3.3, essas funções de transferência serão utilizadas no experimento do relé modificado tendo em vista a identificação de um ponto da resposta em frequência de processos que não possuem ponto crítico.

Figura 15 – Resposta em frequência de  $\hat{F}(j\omega)$  na faixa de frequências de  $10^{-4}$  até  $10^4$  rad/s.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 2.4 Conclusões do capítulo

Neste capítulo, inicialmente foi realizada uma revisão sobre sistemas realimentados, critério de estabilidade de Nyquist e margens de estabilidade. Estes conceitos serão utilizados para o desenvolvimento dos métodos de sintonia dos controladores propostos neste trabalho. Os controladores obtidos serão avaliados através da resposta do sistema em malha fechada considerando uma grande variedade de processos com diferentes características e utilizando os critérios de desempenho de sistemas realimentados para entradas padrão.

Foi abordado, através do PMI, o problema do seguimento e da rejeição de sinais constantes e também de sinais periódicos. Nesta etapa foi verificado que, além de assegurar a estabilidade do sistema em malha fechada, é necessário que o controlador possua os modos instáveis dos sinais de interesse a fim de garantir o seguimento com erro nulo em regime permanente e a rejeição assintótica da perturbação. Assim, pelo PMI, para o seguimento/rejeição de sinais constantes o controlador deve conter um modo na origem, como é o caso dos controladores PI e PID. Por outro lado, quando os sinais são periódicos, o controlador deve conter os modos nas frequências que compõem os sinais interesse, da mesma forma que os controladores PR e PMR.

Em seguida, foram apresentados os métodos de sintonia de Ziegler-Nichols da curva de reação e da oscilação forçada, os quais podem ser apontados como uma das razões por que os controladores PID são utilizados nas mais diversas aplicações. Apesar disso, esses métodos não podem ser utilizados quando o comportamento do processo não apresenta as características de resposta exigidas em cada um deles.

Também constatou-se que o método da oscilação forçada pode ser interpretado como um procedimento em que o ponto crítico do processo é identificado e posicionado em uma localização desejada no plano complexo. Dessa forma, são obtidas margens de estabilidade apropriadas na resposta em frequência da função de malha aberta do sistema (processo operando em conjunto com o controlador). Essa mesma filosofia de projeto vai ser utilizada para o desenvolvimento do método e dos conjuntos de fórmulas de sintonia para os controladores considerados neste trabalho.

No próximo capítulo será apresentada uma modificação no experimento do relé que também possibilitará a obtenção da oscilação sustentada, mesmo com processos que não possuem ponto crítico, e a consequente identificação de um ponto previamente determinado da sua resposta em frequência. Por meio desse ponto identificado, serão desenvolvidas fórmulas de sintonia de controladores PID visando o seguimento e a rejeição de sinais constantes para processos em que não podem ser utilizados os tradicionais métodos de Ziegler-Nichols. Por outro lado, no Capítulo 4 serão desenvolvidas fórmulas de sintonia de controladores PR tendo em vista o seguimento e a rejeição de sinais senoidais.

### 3 MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PID

Este capítulo trata do problema do seguimento e da rejeição de sinais constantes através da sintonia de controladores PID. Primeiramente será proposta a generalização do método da oscilação forçada, na qual serão considerados tanto processos que possuem ponto crítico quanto processos que não possuem ponto crítico em uma única metodologia. Em seguida, conjuntos de fórmulas de sintonia destes controladores serão desenvolvidos com base no conhecimento de um ponto da resposta em frequência do processo. Então, será apresentado o experimento modificado do relé que permitirá a identificação desta informação em um único tipo de experimento. Após será realizada uma análise do método proposto através de exemplos numéricos e, ao fim, as questões práticas relativas a sua implementação serão avaliadas por meio da aplicação desse método em um processo real de controle de nível.

#### 3.1 Motivação

Conforme abordado na Seção 2.2.3.2, o método COF não pode ser aplicado a processos que não possuem ponto crítico, dentre os quais podem ser citados processos estáveis de primeira e de segunda ordem com fase mínima, além de processos com grau relativo menor que três cuja resposta em frequência não cruza a linha de  $-180^\circ$  de fase. Em tais casos, para processos cuja resposta ao salto tem a forma típica em  $S$ , pode-se aplicar o método de sintonia baseado nessa curva, que depende da obtenção de duas variáveis do ensaio de malha aberta, como mencionado no capítulo anterior. Mas ainda existem processos em que nenhum dos métodos de Ziegler-Nichols pode ser aplicado, para os quais uma das alternativas é a obtenção de um modelo matemático detalhado do processo e utilização de algum método específico de projeto para a sintonia do controlador desejado.

Um método baseado no experimento do relé aplicado a processos com e sem ponto crítico para a sintonia de controladores PID foi proposto em LEVA (1993). Nesse método, para a obtenção da oscilação sustentada são adicionados ao bloco do relé um sistema de primeira ordem com um elemento de atraso. Então, após algumas iterações no procedimento experimental, nas quais o projetista deve alterar o valor da constante de tempo e do atraso entre cada uma delas, um ponto específico da resposta em frequência do processo é identificado. Em seguida, o projeto dos controladores é realizado através de fórmulas de sintonia previamente desenvolvidas que envolvem os parâmetros identificados nesse experimento. Métodos como esse têm a vantagem de também serem aplicáveis a processos que não possuem ponto crítico, mas apresentam a desvantagem de exigirem experimentos mais complexos que, por exemplo, necessitam da intervenção do projetista, dificultando



consideravelmente a sintonia dos controladores.

Por outro lado, em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017) é proposto o *Extended Forced Oscillation* ou, em tradução livre para português, método Estendido da Oscilação Forçada (método EOF), no qual um único experimento é realizado para a identificação de um ponto predeterminado da resposta em frequência de processos com grau relativo maior que um e que não possuem ponto crítico. Para essa classe de processos, o método EOF utiliza uma modificação no experimento do relé visando a obtenção da auto-oscilação do sistema em malha fechada. Nesse experimento, uma função de transferência conhecida com fase constante em uma larga faixa de frequências é adicionada ao bloco do relé para a identificação de um ponto específico da resposta em frequência do processo —esse procedimento será explorado neste trabalho e será detalhado na Seção 3.3. Baseando-se na mesma justificativa teórica do método COF, no método EOF são desenvolvidas fórmulas de sintonia de controladores PID visando o posicionamento do ponto identificado do processo em uma localização específica no plano complexo, o que geralmente resulta em apropriadas margens de estabilidade para o sistema. Assim, com o método EOF, a sintonia desses controladores destinados à classe de processos com grau relativo maior que um e que não possuem ponto crítico é realizada através de um procedimento experimental simples e com um conjunto de fórmulas facilmente aplicáveis da mesma forma que no método COF.

Neste capítulo será apresentada a primeira contribuição desta tese, na qual, considerando a abordagem teórica dos métodos COF e EOF, será proposto um método de sintonia que pode ser aplicado a processos *LTIC* genéricos, independentemente da existência de uma frequência crítica, de ordem ou de grau relativo. Esta abordagem generaliza e unifica em um só procedimento os dois métodos de Ziegler-Nichols —da curva de reação e da oscilação forçada—, englobando processos aos quais esses métodos são aplicáveis, além de também abranger processos aos quais eles não podem ser aplicados. Para isso, a modificação no experimento do relé apresentada em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017) será explorada e possibilitará a identificação de um ponto relevante da resposta em frequência de uma maior variedade de processos que a considerada nos métodos COF e EOF. Então, serão desenvolvidos conjuntos de fórmulas de sintonia de controladores P, PI e PID visando o posicionamento desse ponto identificado do processo em localizações predeterminadas no plano complexo por meio da função de malha aberta do sistema. Assim, será proposto um método que utilizará sempre o mesmo tipo de experimento na etapa de identificação, sem depender de uma característica específica da resposta em frequência do processo, e cujo projeto dos controladores será constituído pela utilização de um conjunto de fórmulas de sintonia facilmente aplicáveis, mantendo, com isso, a mesma simplicidade e filosofia dos métodos de Ziegler-Nichols.

### 3.2 Método generalizado da oscilação forçada

O método COF é aplicável a processos que possuem ponto crítico, ou seja, pode ser utilizado apenas em processos cuja resposta em frequência analisada na representação polar cruza o eixo real negativo em alguma frequência finita e, portanto, possuem margem de ganho finita. Para tais processos, como visto na Seção 2.2.3.3, esse método pode ser interpretado como um procedimento no qual o ponto crítico do processo é identificado e posicionado em uma localização específica através da inclusão do controlador na função de malha aberta do sistema. Como consequência, normalmente é obtida a estabilidade do sistema em malha fechada, acarretada por margens de estabilidade apropriadas.

No método *Generalizado da Oscilação Forçada (método GOF)* proposto neste trabalho, essa ideia é ampliada com o propósito de incluir, em uma única metodologia, processos *LTIC* genéricos, que possuem ou não ponto crítico —na Seção 3.2.1, os processos *LTIC* considerados serão detalhados e divididos em três classes com características diferentes. Inicialmente, no desenvolvimento do método GOF assume-se o conhecimento do ponto da resposta em frequência do processo cuja fase cruza um valor previamente especificado  $\nu$ , o qual será identificado por meio de um procedimento baseado no experimento do relé apresentado na sequência deste capítulo. Então, tal como nos métodos COF e EOF, o projeto do controlador é realizado visando o posicionamento do ponto identificado do processo em uma localização desejada no plano complexo através da função de malha aberta do sistema considerando a configuração processo-controlador. Sob essa perspectiva o método GOF é detalhado a seguir.

O primeiro passo do método GOF consiste em identificar o ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase cruza um valor previamente especificado  $\nu$ ,

$$G(j\omega_\nu) = M_\nu \angle \nu = M_\nu e^{j\nu}, \quad (63)$$

ou seja, deve-se determinar a frequência  $\omega_\nu$  e a magnitude  $M_\nu$ , definidas por

$$\omega_\nu = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = \nu \text{ e } M_\nu = |G(j\omega_\nu)|. \quad (64)$$

O experimento modificado do relé que resulta na determinação de  $\omega_\nu$  e  $M_\nu$  será apresentado na Seção 3.3. Para fins de desenvolvimento do método de ajuste, assume-se que esses parâmetros estão disponíveis. Então, os parâmetros do controlador são projetados de forma que

$$C(j\omega_\nu)G(j\omega_\nu) = p, \quad (65)$$

em que  $p$  é uma localização predeterminada no plano complexo. Representando este ponto de sintonia  $p$  na forma polar,

$$p = M_\rho e^{j\rho},$$

na qual

$$M_\rho = \sqrt{\text{Re}\{p\}^2 + \text{Im}\{p\}^2} \text{ e } \rho = \text{arctg} \left( \frac{\text{Im}\{p\}}{\text{Re}\{p\}} \right),$$

e utilizando (63) pode-se escrever a equação do controlador avaliada em  $\omega_\nu$ :

$$C(j\omega_\nu) = \frac{M_\rho e^{j\rho}}{M_\nu e^{j\nu}} = \frac{M_\rho}{M_\nu} e^{j(\rho-\nu)},$$

a qual é reescrita como a equação geral de sintonia do método GOF

$$C(j\omega_\nu) = \frac{M_\rho}{M_\nu} (\cos(\rho - \nu) + j \text{sen}(\rho - \nu)). \quad (66)$$

Assim, no método GOF, dados um ponto da resposta em frequência do processo e uma localização  $p$  no plano complexo, os conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores podem ser obtidos através da solução de (66). Esta abordagem será desenvolvida na sequência para os controladores P, PI e PID.

### 3.2.1 Definição de $\nu$ e $p$

Para prosseguir com o desenvolvimento dos conjuntos de fórmulas de sintonia, deve-se definir qual ponto da resposta em frequência do processo será identificado, o que corresponde a determinar qual valor de  $\nu$  será utilizado em (63). Este deve ser um valor tal que o ponto identificado seja representativo do comportamento frequencial do processo, isto é, este ponto identificado deve fornecer alguma informação relevante sobre a resposta em frequência do processo e da margem de estabilidade que poderá ser obtida.

Então, resta especificar para qual localização no plano complexo este ponto identificado será deslocado, o que corresponde a definir o valor de  $p$  em (65), ou seja, é através da escolha de  $p$  que define-se a margem de estabilidade a ser atendida. A literatura dedicada a sistemas de controle sugere que valores de margem de ganho por volta de 2 e de margem de fase em torno de  $45^\circ$  resultam em robustez e desempenho dinâmico adequados para situações práticas típicas (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995; WOLOVICH, 1993). É assim, através da imposição de uma margem de ganho ou de uma margem de fase adequadamente definidas, que será desenvolvido o método GOF e as suas fórmulas de sintonia.

O deslocamento do ponto identificado da resposta em frequência do processo depende diretamente da resposta em frequência do controlador. Deste modo, faz-se necessário analisar a característica frequencial e, principalmente, a contribuição de fase na frequência identificada  $\omega_\nu$  de cada uma das topologias de controle a serem utilizadas: P, PI e PID. Por meio da análise do controlador P definido em (29) verifica-se que

$$\angle C_p(j\omega) = 0 \quad \forall \omega,$$

o que resulta em contribuição de fase nula em  $\omega_\nu$ , ou seja,

$$\angle C_p(j\omega_\nu) = 0.$$

Através dos blocos proporcional e integrador, constata-se que a fase do controlador PI, cuja função de transferência é apresentada em (32), satisfaz

$$\angle C_{pi}(j\omega) = \text{arctg}(\omega T_i) - \frac{\pi}{2},$$

a partir da qual pode-se observar que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \angle C_{pi}(j\omega) \leq 0 \quad \forall \omega,$$

isto é, a contribuição de fase do controlador PI em  $\omega_\nu$  deve ser negativa e somente pode variar entre

$$-\pi/2 < \angle C_{pi}(j\omega_\nu) < 0.$$

Por outro lado, a inclusão do bloco derivativo na função de transferência (35) permite que o controlador PID atenda

$$-\frac{\pi}{2} \leq \angle C_{pid}(j\omega) \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall \omega,$$

o que resulta em contribuição de fase no intervalo

$$-\pi/2 < \angle C_{pid}(j\omega_\nu) < \pi/2.$$

Assim, pode-se concluir que o controlador P somente altera a magnitude do ponto identificado da resposta em frequência do processo sem alterar a fase, enquanto que com

os controladores PI e PID pode-se modificar tanto a magnitude quanto a fase desse ponto identificado. Esta avaliação vai ao encontro da análise do método COF realizada na Seção 2.2.3.3 e será utilizada na definição do ponto  $p$  de sintonia apresentada na sequência.

Quanto à definição do ponto da resposta em frequência do processo a ser identificado, para processos que possuem ponto crítico este ponto claramente deve ser utilizado, conforme proposto em ZIEGLER; NICHOLS (1942) e utilizado na literatura clássica dedicada à sintonia de controladores PID através do experimento do relé (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Então, a escolha  $\nu = -180^\circ$  torna-se a mais adequada para essa classe de processos —a qual, por simplicidade, será chamada de *Classe A*. Assim, para um processo da Classe A, o ponto crítico da resposta em frequência do processo é identificado, ou seja,

$$\begin{aligned} \nu &= -180^\circ, \omega_\nu = \omega_u = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = -180^\circ, \\ M_\nu &= M_u = |G(j\omega_u)| = \frac{1}{K_u}. \end{aligned} \quad (67)$$

Neste caso particular, a Equação (66) pode ser reescrita como (55), a qual é dada por  $C(j\omega_u) = -K_u p$ . As fórmulas de sintonia dos controladores P, PI e PID utilizadas no método GOF para a Classe A de processos são as mesmas utilizadas no método COF propostas em ZIEGLER; NICHOLS (1942). Essas fórmulas de sintonia, que resultam em margem de ganho (aproximadamente) igual a 2, são obtidas através da solução de (55) com

$$p = -0,5 + j0 = 0,5 (\cos(-180^\circ) + j \operatorname{sen}(-180^\circ)) \quad (68)$$

para o controlador P,

$$p = -0,4 + j0,08 \approx 0,41 (\cos(-191,3^\circ) + j \operatorname{sen}(-191,3^\circ)) \quad (69)$$

para o controlador PI e

$$p = -0,6 - j0,28 \approx 0,66 (\cos(-155^\circ) + j \operatorname{sen}(-155^\circ)) \quad (70)$$

para o controlador PID. Claramente outras opções de localização  $p$  no plano complexo poderiam ser utilizadas para a obtenção de diferentes margens de estabilidade ou desempenho transitório (e em regime permanente no caso do controlador P) para os controladores P, PI e PID (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995; LUYBEN; TYREUS; LUYBEN, 1998).

Considere agora os processos que não possuem ponto crítico, isto é, processos cuja resposta em frequência não cruza o eixo real negativo em nenhuma frequência finita, e que, contanto que o controlador não contribua com grande atraso de fase, a margem de ganho será infinita. Neste caso, para processos que não possuem ponto crítico, a margem de fase torna-se um objetivo explícito a ser alcançado no projeto dos controladores (BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA, 2017).

Assim, baseada na abordagem teórica dos métodos COF e EOF, a ideia central do método GOF aplicado a processos que não possuem ponto crítico resume-se à identificação de um ponto específico e representativo da resposta em frequência do processo, seguida da realização do projeto do controlador visando o deslocamento deste ponto identificado para uma localização predeterminada no plano complexo que resulta na margem de fase desejada.

A fim de prosseguir com o desenvolvimento do método, controladores P, PI e PID foram projetados para uma grande variedade de processos que não possuem ponto crítico —nesta análise foram utilizadas as oito famílias de processos cujas funções de transferência são apresentadas no Apêndice A.2—, considerando diferentes pontos identificados

da resposta em frequência do processo e também diferentes especificações de margens de fase. Diversos valores de  $\nu$  e  $p$ , os quais resultam em diferentes margens de fase e desempenhos transitórios em malha fechada, foram testados. Então, analisou-se a resposta em frequência, além da resposta em malha fechada para um degrau unitário em termos do tempo de acomodação e do máximo sobrepasso com cada um dos controladores.

Inicialmente foram considerados os processos com grau relativo igual a dois e grau relativo igual a um cuja resposta em frequência cruza a linha de fase de  $-135^\circ$ , de  $-120^\circ$  ou de  $-105^\circ$  em alguma frequência. Para tais processos foram identificados os pontos de cruzamento por estes ângulos e foram projetados controladores P, PI e PID que resultaram em margens de fase entre  $35^\circ$  e  $75^\circ$ .

Em seguida, foram analisados os processos com grau relativo igual a um e cuja resposta em frequência não cruza a linha de fase de  $-135^\circ$ , de  $-120^\circ$  ou de  $-105^\circ$  em nenhuma frequência. Para estes processos foram identificados os pontos de sua resposta em frequência onde ocorre cruzamento por  $-45^\circ$ , por  $-60^\circ$  e por  $-75^\circ$ . Então, foram projetados controladores P, PI e PID que resultaram em margens de fase entre  $50^\circ$  e  $120^\circ$ . Os resultados finais destes testes estão descritos no Apêndice C e resultaram nos valores propostos de  $\nu$  e  $p$  apresentados a seguir.

Tendo em vista tanto critérios de desempenho em regime transitório (tempo de acomodação e máximo sobrepasso) quanto a obtenção de adequada margem de fase, os processos que não possuem ponto crítico foram divididos em duas classes: a classe de processos cuja resposta em frequência cruza a linha de  $-120^\circ$  de fase —aqui neste trabalho chamada de *Classe B*—, e a classe de processos cuja resposta em frequência não cruza a linha de  $-120^\circ$  de fase mas cruza a linha de  $-60^\circ$  de fase —a qual é denominada de *Classe C*.

Para um processo da Classe B, identifica-se o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $\nu = -120^\circ$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \nu = -120^\circ, \omega_\nu = \omega_{120} = \min_{\omega \geq 0} \omega: \angle G(j\omega) = -120^\circ, \\ M_\nu = M_{120} = |G(j\omega_{120})|. \end{aligned} \quad (71)$$

O controlador P é projetado considerando

$$p = \cos(-120^\circ) + j \operatorname{sen}(-120^\circ), \quad (72)$$

o controlador PI é sintonizado através de

$$p = \cos(-130^\circ) + j \operatorname{sen}(-130^\circ), \quad (73)$$

enquanto para o controlador PID utiliza-se

$$p = \cos(-110^\circ) + j \operatorname{sen}(-110^\circ). \quad (74)$$

Assim, se os controladores P, PI e PID são sintonizados considerando a resposta em frequência da função de malha aberta (65) com  $\omega_\nu = \omega_{120}$  e as localizações  $p$  no plano complexo definidas em (72) a (74), tais que

$$\begin{aligned} C_p(j\omega_{120})G(j\omega_{120}) &= \cos(-120^\circ) + j \operatorname{sen}(-120^\circ), \\ C_{pi}(j\omega_{120})G(j\omega_{120}) &= \cos(-130^\circ) + j \operatorname{sen}(-130^\circ), \\ C_{pid}(j\omega_{120})G(j\omega_{120}) &= \cos(-110^\circ) + j \operatorname{sen}(-110^\circ), \end{aligned}$$

então a margem de fase será exatamente de  $60^\circ$ ,  $50^\circ$  e de  $70^\circ$ , respectivamente para os controladores P, PI e PID, assumindo que a magnitude da função de transferência de malha aberta decresça monotonicamente para frequências maiores que  $\omega_{120}$ .

Neste trabalho, tal como em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017), para a Classe B definiu-se  $\nu = -120^\circ$  e  $p = \cos(-130^\circ) + j \operatorname{sen}(-130^\circ)$  quando considerada a sintonia do controlador PI cuja função de transferência é apresentada em (32). Por outro lado, para o controlador PID aplicado à essa classe de processos, em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017) é utilizada a forma série desse controlador com  $p = \cos(-120^\circ) + j \operatorname{sen}(-120^\circ)$ , que resulta em margem de fase de  $60^\circ$ , enquanto este trabalho utiliza a forma paralela —tal como utilizado em ZIEGLER; NICHOLS (1942) e em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995) para a Classe A—, cuja função de transferência é apresentada em (35), com  $p = \cos(-110^\circ) + j \operatorname{sen}(-110^\circ)$ , que acarreta em  $70^\circ$  de margem de fase e melhora o desempenho dinâmico do sistema em malha fechada.

Para a Classe C de processos, é identificado o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $\nu = -60^\circ$ , o qual é caracterizado por

$$\begin{aligned} \nu = -60^\circ, \omega_\nu = \omega_{60} = \min_{\omega \geq 0} \omega: \angle G(j\omega) = -60^\circ, \\ M_\nu = M_{60} = |G(j\omega_{60})|. \end{aligned} \quad (75)$$

O controlador P é sintonizado através da resposta em frequência da função de malha aberta (65) com  $\omega_\nu = \omega_{60}$  e

$$p = 4,5 (\cos(-60^\circ) + j \operatorname{sen}(-60^\circ)), \quad (76)$$

ou seja,

$$C_p(j\omega_{60})G(j\omega_{60}) = 4,5 (\cos(-60^\circ) + j \operatorname{sen}(-60^\circ)),$$

o que, para a família de processos da Classe C cuja função de transferência pode ser descrita por  $G_{1c}(s) = a/(s + b)$  com  $a > 0$  e  $b > 0$ , resulta em um sistema em malha fechada com resposta dez vezes mais rápida do que a resposta do processo em malha aberta, ou seja, a função de transferência entre a referência e a saída do sistema em malha fechada dessa família de processos com o controlador proporcional terá a forma  $T_r(s) = 9b/(s + 10b)$ , como demonstrado no Apêndice A.3.

Por outro lado, os controladores PI e PID são projetados considerando a resposta em frequência de função de malha aberta (65) com  $\omega_\nu = \omega_{60}$  e

$$p = \cos(-90^\circ) + j \operatorname{sen}(-90^\circ), \quad (77)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C_{pi}(j\omega_{60})G(j\omega_{60}) &= \cos(-90^\circ) + j \operatorname{sen}(-90^\circ), \\ C_{pid}(j\omega_{60})G(j\omega_{60}) &= \cos(-90^\circ) + j \operatorname{sen}(-90^\circ), \end{aligned}$$

o que garante  $90^\circ$  de margem de fase, considerando o decrescimento monotônico da magnitude da função de transferência de malha aberta para frequências maiores que  $\omega_{60}$ .

Na seção a seguir, os conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores P, PI e PID são desenvolvidos a partir da solução de (66) para cada uma das classes de processos e para cada uma das localizações  $p$  no plano complexo previamente definidas.

### 3.2.2 Sintonia do controlador P

A obtenção das fórmulas de sintonia do controlador P se dá por meio da substituição de sua função de transferência definida em (29) com  $s = j\omega_\nu$  na equação geral de sintonia do método GOF (66), resultando em

$$C_p(j\omega_\nu) = K_p = \frac{M_\rho}{M_\nu} (\cos(\rho - \nu) + j \operatorname{sen}(\rho - \nu)). \quad (78)$$

Conforme apontado anteriormente na escolha do parâmetro  $p$  para cada uma das classes de processos, o controlador P tem contribuição de fase nula para toda a faixa de frequências, motivo pelo qual definiu-se que  $\rho = \nu$  para essa topologia de controle. Assim, a fórmula genérica de sintonia do controlador P é dada por:

$$K_p = \frac{M_\rho}{M_\nu}. \quad (79)$$

Para a Classe A, o ponto identificado da resposta em frequência do processo, dado em (67), e a localização  $p$  no plano complexo, apresentada em (68), resultam em  $\rho = \nu = -180^\circ$ ,  $M_\nu = M_u$  e  $M_\rho = 0,5$ . Então, substituindo estes parâmetros na fórmula genérica de sintonia apresentada em (79) é obtida a fórmula de sintonia do controlador P para um processo da Classe A:

$$K_p = \frac{0,5}{M_u}, \quad (80)$$

a qual foi proposta em ZIEGLER; NICHOLS (1942) e é utilizada no método COF.

Para a Classe B, o ponto identificado da resposta em frequência do processo é apresentado em (71) e a localização  $p$  no plano complexo é definida em (72), resultando em  $\nu = \rho = -120^\circ$ ,  $M_\nu = M_{120}$  e  $M_\rho = 1$ . Assim, considerando estes parâmetros em (79) chega-se na fórmula de sintonia do controlador P para um processo da Classe B:

$$K_p = \frac{1}{M_{120}}. \quad (81)$$

Para a Classe C, o ponto identificado da resposta em frequência do processo é definido em (75) e a localização  $p$  no plano complexo é apresentada em (76), os quais resultam em  $\nu = \rho = -60^\circ$ ,  $M_\nu = M_{60}$  e  $M_\rho = 4,5$ . Dessa forma, através da substituição destes parâmetros em (79) pode-se escrever as fórmulas de sintonia do controlador P para um processo da Classe C:

$$K_p = \frac{4,5}{M_{60}}. \quad (82)$$

A seguir uma abordagem semelhante é utilizada para a determinação das fórmulas de sintonia dos controladores PI para cada uma das três classes de processos definidas.

### 3.2.3 Sintonia do controlador PI

Para a obtenção das fórmulas de sintonia do controlador PI substitui-se sua função de transferência apresentada (32) considerando  $s = j\omega_\nu$  na equação geral de sintonia do método GOF (66), o que leva a

$$C_{pi}(j\omega_\nu) = K_p - j \frac{K_p}{\omega_\nu T_i} = \frac{M_\rho}{M_\nu} (\cos(\rho - \nu) + j \operatorname{sen}(\rho - \nu)). \quad (83)$$

Igualando e equacionando as partes real e imaginária de (83) são obtidas as fórmulas genéricas de sintonia do controlador PI:

$$K_p = \frac{M_\rho}{M_\nu} \cos(\rho - \nu), \quad T_i = \frac{-\cos(\rho - \nu)}{\omega_\nu \operatorname{sen}(\rho - \nu)} = \frac{-T_\nu}{2\pi \operatorname{tg}(\rho - \nu)}, \quad (84)$$

onde  $T_\nu = 2\pi/\omega_\nu$ .

Para a Classe A, o ponto identificado da resposta em frequência do processo, dado em (67), e a localização  $p$  no plano complexo, definida em (69), resultam em  $\nu = -180^\circ$ ,

$M_\nu = M_u, T_\nu = T_u, M_\rho = 0,41$  e  $\rho = -191,3^\circ$ . Então, substituindo estes parâmetros nas fórmulas genéricas de sintonia apresentadas em (84) são obtidas as fórmulas de sintonia do controlador PI para um processo da Classe A:

$$K_p = \frac{0,41}{M_u} \cos(11,3^\circ), \quad T_i = \frac{T_u}{2\pi \operatorname{tg}(11,3^\circ)}, \quad (85)$$

as quais foram propostas em ZIEGLER; NICHOLS (1942) e são utilizadas no método COF.

Para a Classe B, o ponto identificado da resposta em frequência do processo é apresentado em (71) e a localização  $p$  no plano complexo é definida em (73), com os quais são obtidos  $\nu = -120^\circ, M_\nu = M_{120}, T_\nu = T_{120}, M_\rho = 1$  e  $\rho = -130^\circ$ . Assim, considerando estes parâmetros em (84) chega-se nas fórmulas de sintonia do controlador PI para um processo da Classe B, as quais são dadas por:

$$K_p = \frac{1}{M_{120}} \cos(10^\circ), \quad T_i = \frac{T_{120}}{2\pi \operatorname{tg}(10^\circ)}. \quad (86)$$

Para a Classe C, o ponto identificado da resposta em frequência do processo é definido em (75) e a localização  $p$  no plano complexo é apresentada em (77), os quais produzem  $\nu = -60^\circ, M_\nu = M_{60}, T_\nu = T_{60}, M_\rho = 1$  e  $\rho = -90^\circ$ . Dessa forma, através da substituição destes parâmetros em (84) pode-se escrever as fórmulas de sintonia do controlador PI para um processo da Classe C:

$$K_p = \frac{1}{M_{60}} \cos(30^\circ), \quad T_i = \frac{T_{60}}{2\pi \operatorname{tg}(30^\circ)}. \quad (87)$$

Na sequência o mesmo procedimento é empregado para a obtenção das fórmulas de sintonia dos controladores PID para cada uma das três classes de processos definidas.

### 3.2.4 Sintonia do controlador PID

As fórmulas de sintonia do controlador PID são obtidas através da substituição de sua função de transferência definida em (35) com  $s = j\omega_\nu$  na equação geral de sintonia do método GOF (66), resultando em

$$C_{pid}(j\omega_\nu) = K_p - j \frac{K_p}{\omega_\nu T_i} + j\omega_\nu K_p T_d = \frac{M_\rho}{M_\nu} (\cos(\rho - \nu) + j \operatorname{sen}(\rho - \nu)). \quad (88)$$

Então, igualando e equacionando as partes real e imaginária de (88) pode-se escrever

$$K_p = \frac{M_\rho}{M_\nu} \cos(\rho - \nu), \quad (89)$$

$$-\frac{K_p}{\omega_\nu T_i} + \omega_\nu K_p T_d = \frac{M_\rho}{M_\nu} \operatorname{sen}(\rho - \nu). \quad (90)$$

Em (89) é apresentada diretamente a fórmula genérica de sintonia de  $K_p$ , a qual é substituída em (90) e após a realização de algumas simplificações pode-se escrever

$$\omega_\nu^2 \cos(\rho - \nu) T_i T_d - \omega_\nu \operatorname{sen}(\rho - \nu) T_i - \cos(\rho - \nu) = 0. \quad (91)$$

Definindo  $T_d = \alpha T_i$ , onde  $\alpha > 0$  é um parâmetro determinado a seguir, a expressão apresentada em (91) pode ser reescrita como

$$\alpha \omega_\nu^2 \cos(\rho - \nu) T_i^2 - \omega_\nu \operatorname{sen}(\rho - \nu) T_i - \cos(\rho - \nu) = 0.$$



Esta última expressão é uma equação quadrática em  $T_i$ , cuja solução é dada por

$$T_i = \frac{\text{sen}(\rho - \nu) \pm \sqrt{\text{sen}^2(\rho - \nu) + 4\alpha \cos^2(\rho - \nu)}}{2\alpha\omega_\nu \cos(\rho - \nu)}. \quad (92)$$

Assim, para a determinação de  $T_i$  e  $T_d$  existe um grau de liberdade através da escolha do parâmetro  $\alpha$ . Esse parâmetro é escolhido como  $\alpha = 1/4$ , o qual é o mesmo valor proposto em ZIEGLER; NICHOLS (1942) e utilizado em ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995), que resulta em controladores PID com um par de zeros reais e iguais, além de simplificar as fórmulas de sintonia. Assim, observando que  $\text{sen}^2(\rho - \nu) + \cos^2(\rho - \nu) = 1$ , a Equação (92) pode ser reescrita como

$$T_i = \frac{2(\text{sen}(\rho - \nu) \pm 1)}{\omega_\nu \cos(\rho - \nu)}. \quad (93)$$

Assumindo valores positivos de  $T_i$  em (93) e lembrando que  $T_d = 1/4T_i$ , seguem as fórmulas genéricas para a sintonia de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  do controlador PID

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{M_\rho}{M_\nu} \cos(\rho - \nu), \\ T_i &= \frac{2(1 + \text{sen}(\rho - \nu))}{\omega_\nu \cos(\rho - \nu)} = \frac{T_\nu(1 + \text{sen}(\rho - \nu))}{\pi \cos(\rho - \nu)}, \\ T_d &= \frac{T_\nu(1 + \text{sen}(\rho - \nu))}{4\pi \cos(\rho - \nu)}. \end{aligned} \quad (94)$$

Para a Classe A, o ponto crítico da resposta em frequência do processo é identificado, ou seja,  $\nu = -180^\circ$ ,  $M_\nu = M_u$ ,  $T_\nu = T_u$ , além disto, a localização no plano complexo  $p$  apresentada em (70) resulta em  $M_\rho = 0,66$  e  $\rho = -155^\circ$ . Assim, através da substituição destes conjuntos de parâmetros em (94) chega-se nas fórmulas de sintonia do controlador PID para um processo da Classe A:

$$K_p = \frac{0,66}{M_u} \cos(25^\circ), \quad T_i = \frac{T_u(1 + \text{sen}(25^\circ))}{\pi \cos(25^\circ)}, \quad T_d = \frac{T_u(1 + \text{sen}(25^\circ))}{4\pi \cos(25^\circ)}, \quad (95)$$

as quais foram propostas em ZIEGLER; NICHOLS (1942) e são utilizadas no método COF.

Para a Classe B, o ponto identificado da resposta em frequência do processo, o qual possui  $-120^\circ$  de fase e é estabelecido em (71), e a localização  $p$  no plano complexo, descrita em (74), definem que:  $\nu = -120^\circ$ ,  $M_\nu = M_{120}$ ,  $T_\nu = T_{120}$ ,  $M_\rho = 1$  e  $\rho = -110^\circ$ . Substituindo estes parâmetros em (94) são obtidas as fórmulas de sintonia do controlador PID para um processo da Classe B:

$$K_p = \frac{1}{M_{120}} \cos(10^\circ), \quad T_i = \frac{T_{120}(1 + \text{sen}(10^\circ))}{\pi \cos(10^\circ)}, \quad T_d = \frac{T_{120}(1 + \text{sen}(10^\circ))}{4\pi \cos(10^\circ)}. \quad (96)$$

Para a Classe C, por meio do ponto identificado da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$ , apresentado na Equação (75), e a localização  $p$  no plano complexo definida em (77) pode-se obter:  $\nu = -60^\circ$ ,  $M_\nu = M_{60}$ ,  $T_\nu = T_{60}$ ,  $M_\rho = 1$  e  $\rho = -90^\circ$ . Desse modo, utilizando estes parâmetros em (94), são obtidas as fórmulas de sintonia do controlador PID para um processo da Classe C:

$$K_p = \frac{1}{M_{60}} \cos(30^\circ), \quad T_i = \frac{T_{60}(1 - \text{sen}(30^\circ))}{\pi \cos(30^\circ)}, \quad T_d = \frac{T_{60}(1 - \text{sen}(30^\circ))}{4\pi \cos(30^\circ)}. \quad (97)$$

Tabela 4 – Fórmulas de sintonia dos controladores P, PI e PID pelo método GOF.

Classe	Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$N$
A	P	$\frac{0,5}{M_u}$	–	–	–
	PI	$\frac{0,4}{M_u}$	$0,8T_u$	–	–
	PID	$\frac{0,6}{M_u}$	$0,5T_u$	$0,125 T_u$	$1,6 \times 10^{-2} T_u$
B	P	$\frac{1}{M_{120}}$	–	–	–
	PI	$\frac{0,98}{M_{120}}$	$0,90T_{120}$	–	–
	PID	$\frac{0,98}{M_{120}}$	$0,38T_{120}$	$0,095 T_{120}$	$1,6 \times 10^{-2} T_{120}$
C	P	$\frac{4,5}{M_{60}}$	–	–	–
	PI	$\frac{0,87}{M_{60}}$	$0,28T_{60}$	–	–
	PID	$\frac{0,87}{M_{60}}$	$0,18T_{60}$	$0,046 T_{60}$	$1,6 \times 10^{-2} T_{60}$

O desenvolvimento das fórmulas de sintonia do controlador PID foi realizado considerando sua função de transferência ideal (35). No entanto, nas simulações e implementações práticas deve-se utilizar a função de transferência (37), na qual define-se  $N = 0,1/\omega_\nu = 0,2\pi/T_\nu$ , onde  $\omega_\nu$  é a frequência identificada do processo e  $T_\nu$  é o período associado a essa frequência. Esta escolha de  $N$  resulta em  $T_d/N$  aproximadamente igual a 7,81, 5,94 e 2,88, respectivamente para as classes A, B e C. Valores os quais estão na mesma ordem de grandeza da relação  $T_d/N$  entre 8 e 20 que é indicada por ÅSTRÖM; HÄGGLUND (1995) para limitação da amplificação de ruídos de alta frequência.

As fórmulas de sintonia propostas para os controladores P, PI e PID estão resumidas na Tabela 4. Nessas fórmulas, os valores numéricos foram arredondados para o valor mais próximo de dois algarismos significativos.

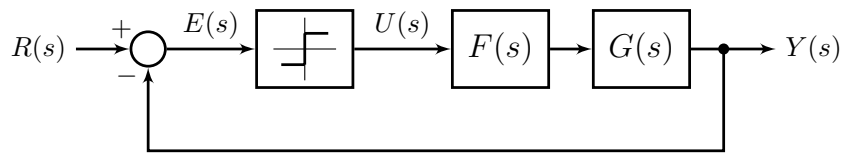
Na próxima seção será apresentado o experimento modificado do relé que é utilizado para a identificação do ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $\nu$ , ou seja, que resulta na determinação de  $\omega_\nu$ ,  $T_\nu$  e  $M_\nu$ .

### 3.3 Experimento do relé com fase ajustável

As fórmulas de sintonia dos controladores PID propostas na Seção 3.2 requerem o conhecimento de um ponto específico da resposta em frequência do processo. Nesta seção apresenta-se um procedimento para a obtenção desta informação através de um experimento simples e que pode ser automatizado.

O experimento do relé descrito na Seção 2.2.3.2 é uma forma clássica para a determinação do ponto crítico de um processo, mas uma pequena modificação nesse experimento

Figura 16 – Diagrama em blocos do experimento do relé para identificação do ponto crítico de  $F(s)G(s)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

permite a identificação de outros pontos relevantes da resposta em frequência do processo (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995). Considere a configuração do experimento retratada na Figura 16, onde  $F(s)$  é uma função de transferência conhecida. Caso a condição de auto-oscilação seja obtida, então ela irá ocorrer aproximadamente na frequência crítica da função de transferência  $F(s)G(s)$ , definida por

$$\omega_1 = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle F(j\omega)G(j\omega) = -180^\circ.$$

Com isso, a magnitude e a fase da resposta em frequência do processo em  $\omega_1$  podem ser calculadas através de:

$$|G(j\omega_1)| \approx \frac{\pi A_1}{4d |F(j\omega_1)|} = M_1, \quad \angle G(j\omega_1) \approx -180^\circ - \angle F(j\omega_1), \quad (98)$$

onde  $A_1$  é a amplitude da oscilação observada na saída do processo, desde que o valor de  $F(j\omega_1)$  seja conhecido (BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA, 2017).

Para implementar o método de sintonia proposto, é necessário identificar o ponto da resposta em frequência do processo (frequência  $\omega_\nu$  e magnitude  $M_\nu$ ) cuja fase é  $\nu$ . Quando a identificação é realizada através do ponto crítico de  $F(s)G(s)$  deve-se escolher uma função de transferência  $F(s)$  cuja fase é

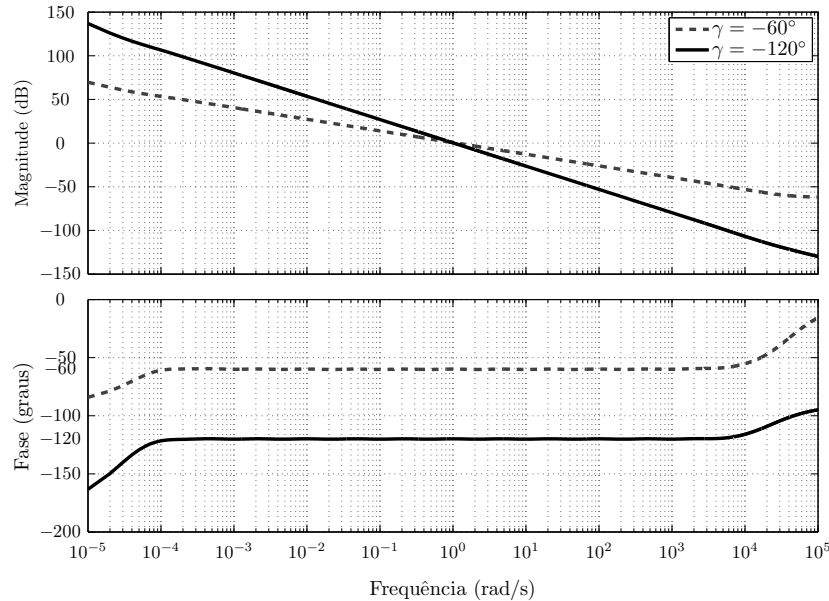
$$\gamma \triangleq -180^\circ - \nu \quad (99)$$

exatamente em  $\omega_\nu$ , a qual é uma das duas variáveis desconhecidas que o experimento visa identificar.

Uma alternativa é realizar um conjunto iterativo de experimentos, nos quais a função adicionada na malha de controle é alterada por tentativa e erro até que seja escolhida uma  $F(s)$  que resulte em uma frequência de oscilação  $\omega_\nu$  que atenda  $\angle F(j\omega_\nu) = \gamma$ . Procedimentos como esse foram propostos e aplicados anteriormente, como por exemplo em LEVA (1993), onde  $F(s)$  é definida como um sistema de primeira ordem com atraso de transporte e são necessárias diversas iterações no procedimento experimental até que o projetista encontre uma constante de tempo e um valor do atraso que resultem em  $\angle F(j\omega_\nu) = \gamma$ . Devido à necessidade de realização de um conjunto iterativo de experimentos que necessitam de intervenção do projetista, este procedimento não é uma boa escolha pois implica em perda de simplicidade e de rapidez no experimento de identificação (BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA, 2017).

Para superar essa dificuldade, a utilização de uma função de transferência  $F(s)$  com a mesma fase para uma ampla faixa de frequências, ou seja,  $\angle F(j\omega) = \gamma \forall \omega$  pertencente ao intervalo  $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$ , foi proposta em BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017). Visto que através desta escolha a fase de  $F(s)$  é conhecida, uma das incógnitas é eliminada do problema. Assim, se na saída do experimento para identificação do ponto

Figura 17 – Resposta em frequência de  $F(j\omega)$  com fase constante na faixa de frequência de  $10^{-4}$  até  $10^4$  rad/s.



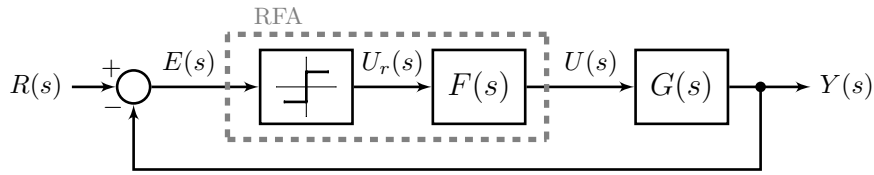
Fonte: Elaborado pelo autor.

crítico de  $F(s)G(s)$  for obtida a auto-oscilação com frequência de oscilação no intervalo  $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$ , então, utilizando (99) sabe-se que o processo terá contribuição de fase igual a  $\nu$  na frequência observada. Logo, através deste experimento é possível identificar as variáveis de interesse:  $\omega_\nu$  é aproximadamente a frequência de oscilação sustentada na saída do processo e  $M_\nu$  pode ser calculada através de (98), desta forma são mantidas as mesmas características operacionais e vantagens do tradicional experimento do relé.

Neste trabalho, para a construção das funções de transferência  $F(s)$ , são utilizados sistemas que têm função de transferência com resposta em frequência com fase constante não múltipla inteira de  $-90^\circ$ , ou seja, são utilizados os integradores de ordem fracionária (FOIs), que possuem função transferência igual a  $FOI(s) = 1/s^m$  onde  $m \in (0, 1)$  e cujas aproximações  $\hat{F}(s)$  foram apresentadas na Seção 2.3. Estas funções de transferência são utilizadas no método GOF, isto é, define-se  $F(s) = \hat{F}(s)$  e, quando necessário, é utilizado um integrador ( $1/s$ ), que possui fase constante igual a  $-90^\circ$ , conforme descrito na sequência. A aproximação do FOI com fase  $\gamma = -60^\circ$  (obtido com  $m = 2/3$ ) é utilizada para identificar o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$ , enquanto a aproximação com  $-30^\circ$  de fase (obtida com  $m = 1/3$ ) é utilizada em conjunto com um integrador —resultando em  $\gamma = -120^\circ$  com  $F(s) = \hat{F}(s)/s$ — para identificar o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$ . As respostas em frequência destas funções  $F(j\omega)$  utilizadas no método GOF são apresentadas na Figura 17.

O ponto desejado da resposta em frequência do processo é adequadamente identificado se  $F(s)$  tem fase  $\gamma$  na frequência de auto-oscilação obtida no experimento do relé com a aproximação do FOI. Assim, considerando as respostas em frequência de  $F(j\omega)$  apresentadas na Figura 17, o ponto desejado da resposta em frequência do processo será devidamente identificado desde que  $10^{-4} \leq \omega_\nu \leq 10^4$  rad/s. Portanto, deve-se ter cuidado ao escolher o intervalo de frequências no qual a função de transferência de ordem inteira  $F(s)$  aproxima adequadamente o comportamento frequencial do FOI, problema que pode ser solucionado através de uma aproximação de ordem e intervalo de frequências suficientemente grandes.

Figura 18 – Diagrama em blocos do experimento do RFA.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para identificar um ponto específico da resposta em frequência do processo, o experimento proposto utiliza um dispositivo que pode ser interpretado como um relé com fase constante que pode ser ajustada para uma faixa de frequências definida. Ao longo deste trabalho esse elemento será referido como *Relé com Fase Ajustável (RFA)*, já o experimento para a identificação do ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $\nu$  que emprega esse elemento será denominado de *experimento do Relé com Fase Ajustável*, ou simplesmente *experimento do RFA*, e tem o diagrama em blocos apresentado na Figura 18. Esse elemento e esse experimento são analisados e descritos na sequência.

Considerando que no experimento do RFA, em regime permanente, a saída do processo oscila com formato senoidal, amplitude  $A_\nu$ , frequência  $\omega_\nu$  e fase oposta a entrada do RFA —o que significa que o sistema em malha fechada está oscilando com a frequência crítica de  $F(s)G(s)$ —, então pode-se aproximar esse sinal de saída por:

$$y(t) = A_\nu \text{sen}(\omega_\nu t - \pi) + a_r, \quad (100)$$

onde  $a_r$  é a amplitude do salto aplicado na referência do experimento.

Nestas condições, supondo que o RFA é ajustado<sup>1</sup> para obtenção da oscilação simétrica na saída do processo, então o sinal de saída do relé será uma onda quadrada com frequência  $\omega_\nu$ , valor médio  $b$ , valor mínimo  $-d + b$  e valor máximo  $d + b$ . Essa onda quadrada pode ser representada através de uma expansão em *CTFS* com a qual pode-se chegar à seguinte expressão para a saída do relé:

$$u_r(t) = \frac{4d}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)\omega_\nu t) + b. \quad (101)$$

A resposta em frequência do *FOI*, definida em (61), pode ser escrita como

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \angle \gamma_r \quad (102)$$

onde  $\gamma_r$  é o ângulo  $\gamma$  em radianos. Com isso, o sinal de saída do RFA é dado por:

$$u(t) = \frac{4d}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(j(2k-1)\omega_\nu)|}{2k-1} \text{sen}((2k-1)\omega_\nu t + \gamma_r) + c, \quad (103)$$

onde  $c$  é uma constante proporcional a  $b$  e a  $\lim_{s \rightarrow 0} F(s)$  e inversamente proporcional a  $\lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ .

Comparando os sinais de saída do processo (100) e de saída do RFA (103) pode-se analisar o processo como um filtro que atende:

$$G(j\omega_\nu) \approx \frac{\pi A_\nu}{4d |F(j\omega_\nu)|} \angle \nu_r, \quad (104)$$

<sup>1</sup> Conforme definido na Seção 2.2.3.2, o parâmetro  $b$  regula o *offset* do sinal de saída do relé, enquanto o parâmetro  $d$  controla a amplitude desta oscilação.

na qual  $\nu_r = -\pi - \gamma_r$ , dada em radianos, é a fase do processo na frequência  $\omega_\nu$ .

Considerando o caso particular do clássico experimento do relé, onde  $F(j\omega) = 1$  e  $\gamma_r = 0$ , caso seja obtida a oscilação sustentada na saída do processo, verifica-se que  $\omega_\nu = \omega_u$ ,  $A_\nu = A_u$ ,  $\nu_r = -\pi$  e através de (104) pode-se escrever

$$G(j\omega_u) \approx \frac{\pi A_u}{4d} \angle -\pi. \quad (105)$$

Assim, confirma-se o valor do ganho crítico do processo,  $K_u = 1/|G(j\omega_u)|$ , apresentado em (48), e que o ponto identificado da resposta em frequência do processo tem fase aproximadamente igual a  $-\pi$ . A mesma análise pode ser realizada no experimento do RFA com fase  $\angle F(j\omega) = \angle \gamma_r$ , no qual, verificada a condição de oscilação sustentada com frequência  $\omega_\nu$  na saída do processo, sabe-se que

$$M_\nu = |G(j\omega_\nu)| \approx \frac{\pi A_\nu}{4d|F(j\omega_\nu)|}, \quad \angle G(j\omega_\nu) \approx \nu_r = -\pi - \gamma_r. \quad (106)$$

O experimento do RFA é iniciado com a fase do relé ajustada em  $0^\circ$ , ou seja, o tradicional experimento do relé é implementado. Caso seja obtida a condição de auto-oscilação e o sinal de saída do processo tenha um formato senoidal bem definido, possuindo amplitude e período de oscilação constantes ao longo do tempo, então o processo pertence à Classe A, como definido na Seção 3.2.1, e seu ponto crítico é identificado. Então, o projeto do controlador pode ser realizado com as fórmulas de sintonia apresentadas na Tabela 4 próprias para a Classe A de processos.

Se no experimento do RFA com  $0^\circ$  não for verificada a condição de auto-oscilação, então constata-se que o processo não possui ponto crítico. Neste caso, a fase do relé é diminuída e realiza-se o experimento do RFA com  $-60^\circ$ . Se a condição de auto-oscilação for obtida, então o processo pertence à Classe B, conforme determinado na Seção 3.2.1, e identifica-se o ponto de sua resposta em frequência cuja fase é  $-120^\circ$ . Assim, o projeto do controlador pode ser realizado através das fórmulas de sintonia apresentadas na Tabela 4 adequadas para a Classe B de processos.

Se, mais uma vez, a condição de auto-oscilação não for verificada, a fase da resposta em frequência do processo não cruza  $-180^\circ$  nem  $-120^\circ$ . Nesta situação, a fase do relé é diminuída mais uma vez e implementa-se o experimento do RFA com  $-120^\circ$ . Caso a condição de auto-oscilação seja obtida, então o processo pertence à Classe C, como estabelecido na Seção 3.2.1, e identifica-se o ponto de sua resposta em frequência cuja fase é  $-60^\circ$ . Desse modo, o controlador pode ser sintonizado por meio das fórmulas de sintonia apresentadas na Tabela 4 apropriadas para a Classe C de processos.

Assim, o experimento do RFA se caracteriza como um procedimento para a identificação de um ponto definido e representativo da resposta em frequência do processo—possuindo ou não ponto crítico— em um único tipo de experimento realizado em até três etapas que não necessita da intervenção do projetista. Na Seção 3.4 são apresentados três exemplos numéricos que demonstram os conceitos teóricos por trás do método GOF e sua ampla aplicabilidade. A Seção 3.5 descreve o procedimento experimental e os resultados da implementação do método proposto em um processo real de controle de nível. Por fim, nos apêndices B e C são respectivamente apresentados os resultados de simulação numérica do experimento do RFA e dos sistemas em malha fechada com os controladores PID sintonizados por meio das fórmulas propostas na Tabela 4, considerando as famílias de processos descritas na bateria de testes do Apêndice A.2.

### 3.4 Estudos de caso

Nesta seção, o método GOF será avaliado nos três processos apresentados na Seção 2.2.3.4 nos quais não é possível a aplicação dos tradicionais métodos de Ziegler-Nichols. Para cada um desses processos será realizada uma análise detalhada da implementação do método, com descrição dos passos necessários para a identificação do ponto da resposta em frequência do processo e para a sintonia dos controladores. Salvo mencionado o contrário, os parâmetros do processo e dos controladores são representados no SI. Além disso, também serão apresentados resultados de simulação da resposta dos sistemas em malha fechada com os controladores projetados para um degrau aplicado na referência. O desempenho será avaliado através do máximo sobrepasso,  $M_o$  dado em %, além do tempo de acomodação,  $t_s$ , dado em segundos e calculado assumindo uma tolerância de 2% do valor do sinal de saída em regime.

#### 3.4.1 Modelo linearizado da dinâmica do ângulo de arfagem de uma aeronave

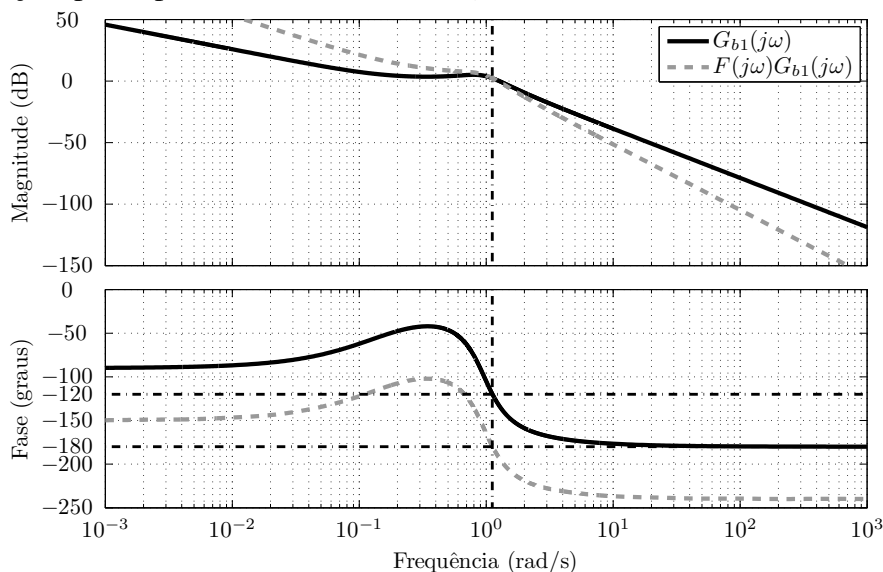
O primeiro processo considerado representa o modelo linearizado da dinâmica do ângulo de arfagem de uma aeronave que possui a função de transferência dada por

$$G_{b1}(s) = \frac{1,15s + 0,18}{s^3 + 0,74s^2 + 0,92s}$$

e cuja resposta em frequência é representada na Figura 19.

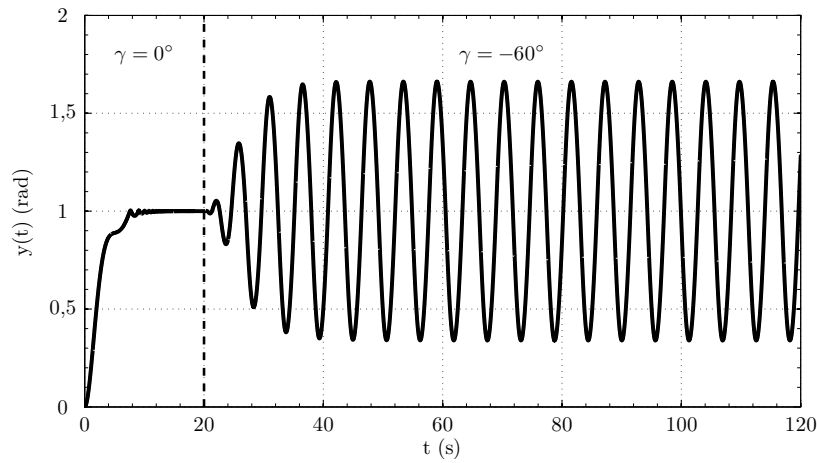
O método GOF é iniciado através da implementação do experimento do RFA, tal como ilustrado na Figura 18. Como  $G_{b1}(s)$  pertence à Classe B, classe na qual a fase da resposta em frequência do processo não cruza a linha de  $-180^\circ$  mas cruza a linha de  $-120^\circ$ , o comportamento auto-oscilatório do sistema em malha fechada é obtido no experimento do RFA com  $-60^\circ$ . Como mostrado na Figura 19, o ponto crítico de  $F(j\omega)G_{b1}(j\omega)$  com  $\gamma = -60^\circ$  tem a mesma frequência que o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$ . Conseqüentemente, nesta configuração, por meio da identificação

Figura 19 – Respostas em frequência de  $G_{b1}(j\omega)$  e de  $F(j\omega)G_{b1}(j\omega)$  com  $\gamma = -60^\circ$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 1,11$  rad/s e nas fases  $-120^\circ$  e  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 – Resposta do sistema em malha fechada para o experimento do RFA aplicado no processo representado por  $G_{b1}(s)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 5 – Dados do experimento do RFA para o processo  $G_{b1}(s)$ .

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$M_\nu$	$T_\nu$	$\omega_\nu$
$0^\circ$	$-180^\circ$	0,4	0	—	1	—	—	—
$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,4	0	0,661	0,999	1,30	5,63	1,11

Tabela 6 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho para o processo  $G_{b1}(s)$ .

PI				PID					
$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,754	5,07	36	12	0,754	2,14	0,535	0,0901	23	10

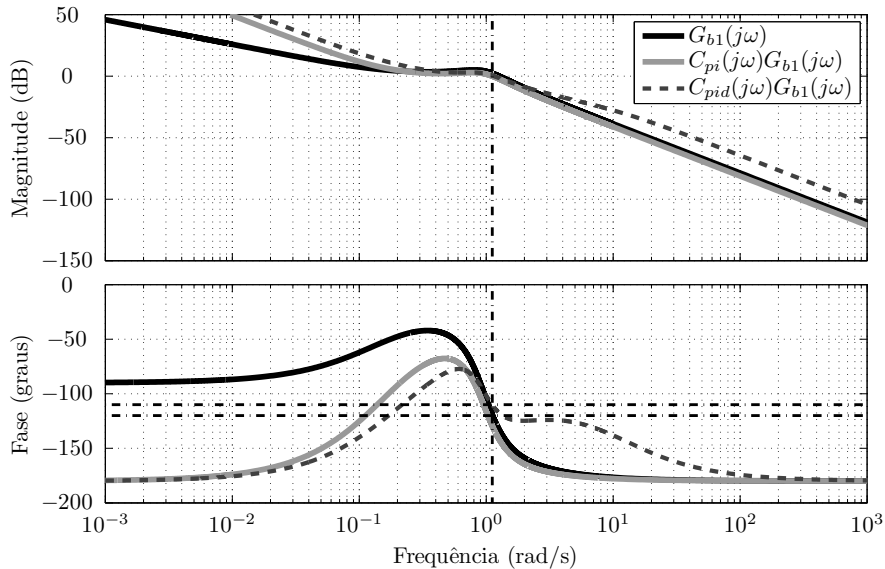
do ponto crítico de  $F(j\omega)G_{b1}(j\omega)$  e da utilização das equações em (98), identifica-se a frequência e a magnitude do ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$ , respectivamente,  $\omega_{120}$  e  $M_{120}$ , como desejado.

A saída do processo  $G_{b1}(s)$  obtida no experimento do RFA é apresentada na Figura 20 considerando um degrau unitário aplicado na referência. Inicialmente, de 0 s até 20 s, realizou-se o experimento do RFA com  $0^\circ$  de fase e a condição de auto-oscilação não foi observada, o que era esperado visto que esse processo não possui ponto crítico. Então, em 20 s a fase do relé foi diminuída para  $-60^\circ$  e a auto-oscilação é alcançada, levando à identificação do ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$ . As medidas obtidas neste experimento estão resumidas na Tabela 5, onde  $A_\nu = A_{120}$  é a amplitude de oscilação e  $T_\nu = T_{120}$  é o período de oscilação.

Os parâmetros dos controladores PI e PID, calculados através das fórmulas de sintonia da Tabela 4 apropriadas para a classe B utilizando  $M_{120}$  e  $T_{120}$ , estão apresentados na Tabela 6. As respostas em frequência do processo,  $G_{b1}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta,  $C_{pi}(j\omega)G_{b1}(j\omega)$  e  $C_{pid}(j\omega)G_{b1}(j\omega)$ , são representadas na Figura 21. Nestes gráficos, verifica-se que em  $\omega_{120} = 1,11$  rad/s, tal como definido através das localizações  $p$  em (73) e (74), as respostas em frequência das funções de malha aberta com os contro-



Figura 21 – Respostas em frequência do processo,  $G_{b1}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta,  $C_{pi}(j\omega)G_{b1}(j\omega)$  e  $C_{pid}(j\omega)G_{b1}(j\omega)$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 1,11$  rad/s e nas fases  $-110^\circ$  e  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

ladores PI e PID têm magnitude unitária e fase respectivamente iguais a  $-130^\circ$  e  $-110^\circ$ , desta forma, como a magnitude da função de malha aberta decresce monotonicamente para frequências maiores que  $\omega_{120}$ , são obtidas as margens de fase desejadas.

Os diagramas de Nyquist da função de transferência do processo,  $G_{b1}(s)$ , e das funções de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{b1}(s)$  e  $C_{pid}(s)G_{b1}(s)$ , são ilustrados na Figura 22. O ponto de  $\omega_{120}$  está destacado com um 'X' nestes diagramas de Nyquist. Como o fechamento desses diagramas ocorre pela direita, o ponto  $-1 + j0$  não é envolvido nenhuma vez. Levando-se em conta que nem o processo nem os controladores têm polos no SPD do plano complexo, comprova-se a estabilidade dos sistemas em malha fechada.

O projeto de cada um dos controladores obtidos foi avaliado através da simulação da resposta do sistema em malha fechada. Neste teste, com perturbação nula, aplicou-se um degrau unitário na referência em  $t = 0$  s. Os sinais de saída do processo são apresentados na Figura 23, enquanto as medidas de desempenho estão resumidas na Tabela 6.

### 3.4.2 Sistema de posicionamento do cabeçote de leitura e de gravação de um disco rígido

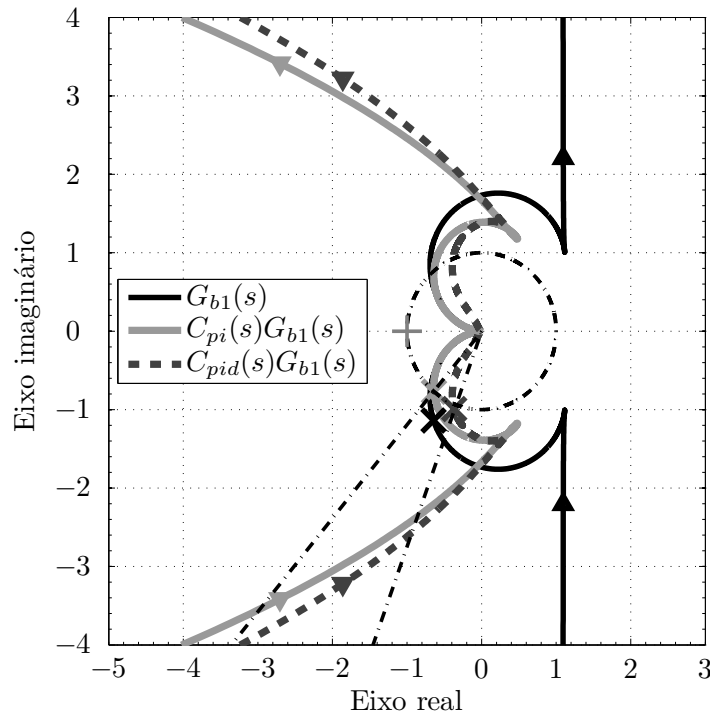
O segundo processo trata-se do sistema de posicionamento do cabeçote de leitura e de gravação de um disco rígido descrito pela seguinte função de transferência

$$G_{b2}(s) = \frac{5,00 \times 10^5 s^2 + 1,40 \times 10^7 s + 4,67 \times 10^{10}}{s^4 + 178s^3 + 1,09 \times 10^6 s^2 + 4,21 \times 10^7 s + 4,67 \times 10^{10}}$$

e que possui resposta em frequência representada na Figura 24, na qual verifica-se a existência de picos (modos) de ressonância aproximadamente em 211 rad/s e 1017 rad/s.

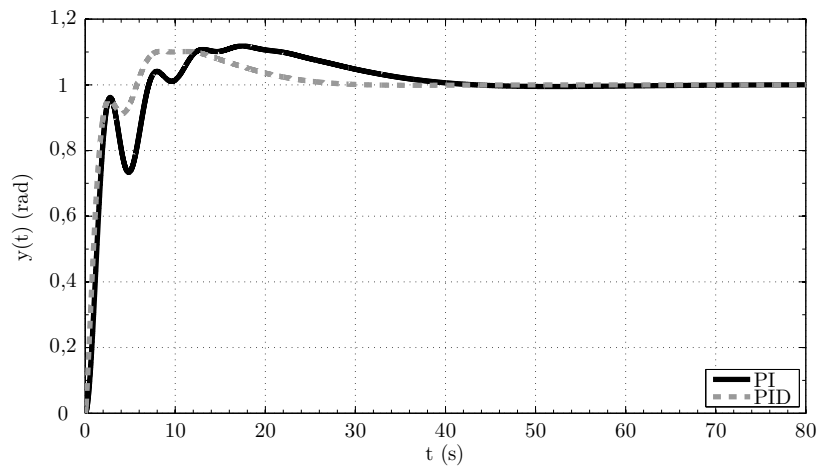
Seguindo o mesmo procedimento realizado para o processo anterior, inicialmente implementa-se o experimento do RFA para a identificação de um ponto da resposta em frequência de  $G_{b2}(j\omega)$ . Por tratar-se de um processo da Classe B, que não possui ponto

Figura 22 – Diagramas de Nyquist do processo,  $G_{b1}(s)$ , e das funções de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{b1}(s)$  e  $C_{pid}(s)G_{b1}(s)$ . Linhas traço e ponto pretas estão na circunferência de raio unitário e nas retas com fase  $-110^\circ$  e com  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Respostas do sistema em malha fechada para um degrau unitário considerando o processo representado por  $G_{b1}(s)$  operando com os controladores PI e PID.

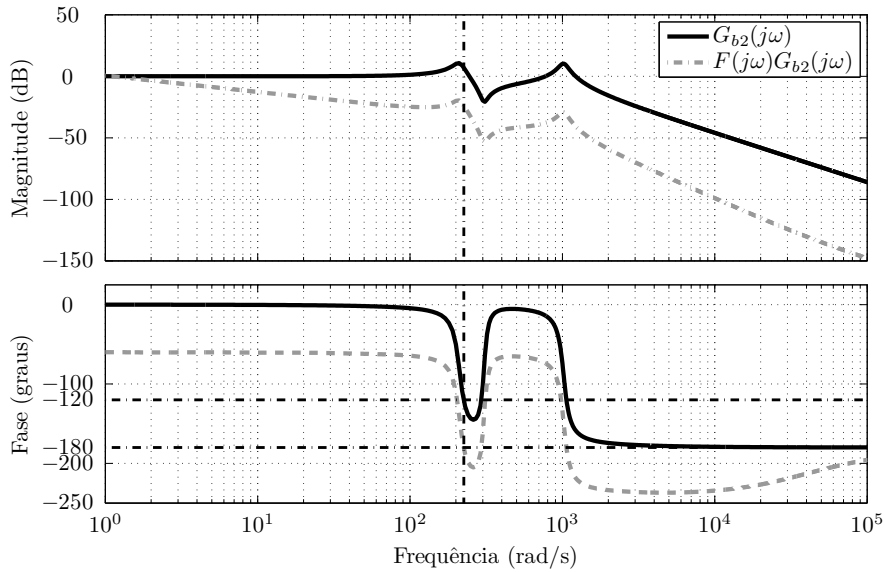


Fonte: Elaborado pelo autor.

crítico mas cuja fase cruza a linha de  $-120^\circ$  (neste caso em três frequências diferentes), a oscilação sustentada é obtida no experimento do RFA com  $-60^\circ$ . Na Figura 24 pode-se verificar a correspondência entre a frequência crítica de  $F(j\omega)G_{b2}(j\omega)$  com  $\gamma = -60^\circ$  e a frequência  $\omega_{120} = 225,5 \text{ rad/s}$ , definida como a menor frequência na qual a fase do processo é  $-120^\circ$ .

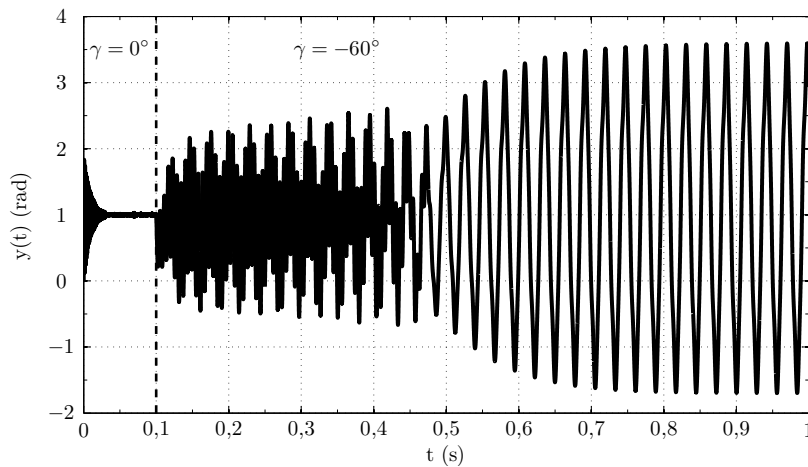
Na Figura 25 é apresentada a saída do processo  $G_{b2}(s)$  quando implementado o experimento do RFA com um degrau unitário aplicado na referência —os primeiros 0,05 s

Figura 24 – Respostas em frequência de  $G_{b2}(j\omega)$  e de  $F(j\omega)G_{b2}(j\omega)$  com  $\gamma = -60^\circ$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 225,5$  rad/s e nas fases  $-120^\circ$  e  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Resposta do sistema em malha fechada para o experimento do RFA aplicado no processo representado por  $G_{b2}(s)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

deste gráfico estão retratados na Figura 12(b). Este experimento foi iniciado através do RFA com  $0^\circ$  e a condição de auto-oscilação não foi verificada. Desse modo, em 0,1 s a fase do relé foi diminuída para  $-60^\circ$ . Após um regime transitório em que a saída do processo oscila sem formato senoidal bem definido em razão dos dois modos de ressonância do processo (como pode ser observado entre 0,1 e 0,5 s), verifica-se a condição de auto-oscilação do sistema, a qual possibilita a identificação do ponto (de menor frequência) da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$ . Os dados obtidos neste experimento estão resumidos na Tabela 7.

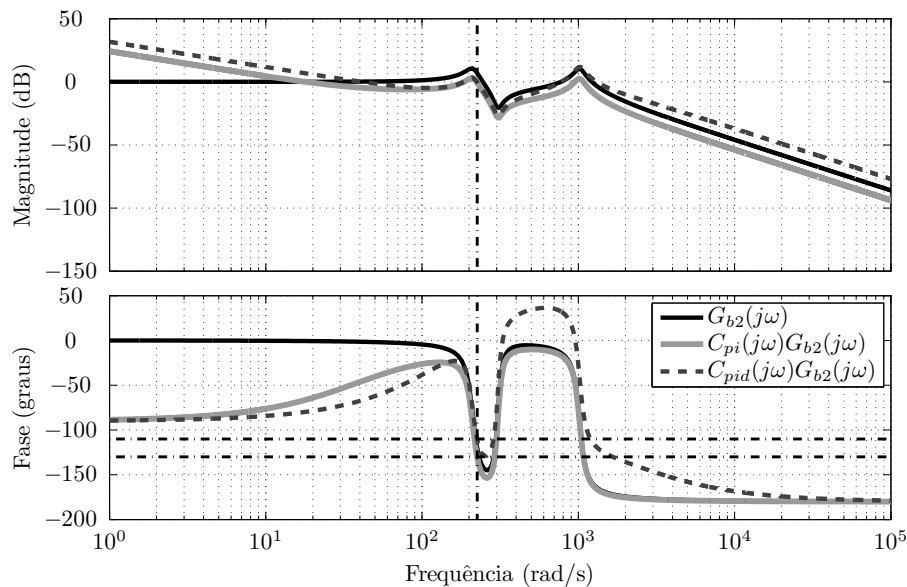
Então, através das variáveis  $M_{120}$  e  $T_{120}$  aplicadas nas fórmulas de sintonia da Tabela 4 para a classe B, são calculados os parâmetros dos controladores PI e PID apresentados na Tabela 8. As respostas em frequência do processo,  $G_{b2}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta,  $C_{pi}(j\omega)G_{b2}(j\omega)$  e  $C_{pid}(j\omega)G_{b2}(j\omega)$ , estão ilustradas na Figura 26. Nestes dia-

Tabela 7 – Dados do experimento do RFA para o processo  $G_{b2}(s)$ .

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$M_\nu$	$T_\nu$	$\omega_\nu$
$0^\circ$	$-180^\circ$	30	0	—	1	—	—	—
$-60^\circ$	$-120^\circ$	30	0	2,65	0,0289	2,40	0,0279	225,5

Tabela 8 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho para o processo  $G_{b2}(s)$ .

PI				PID					
$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,408	0,0251	0,31	0	0,408	0,0106	0,00265	0,000446	0,14	0

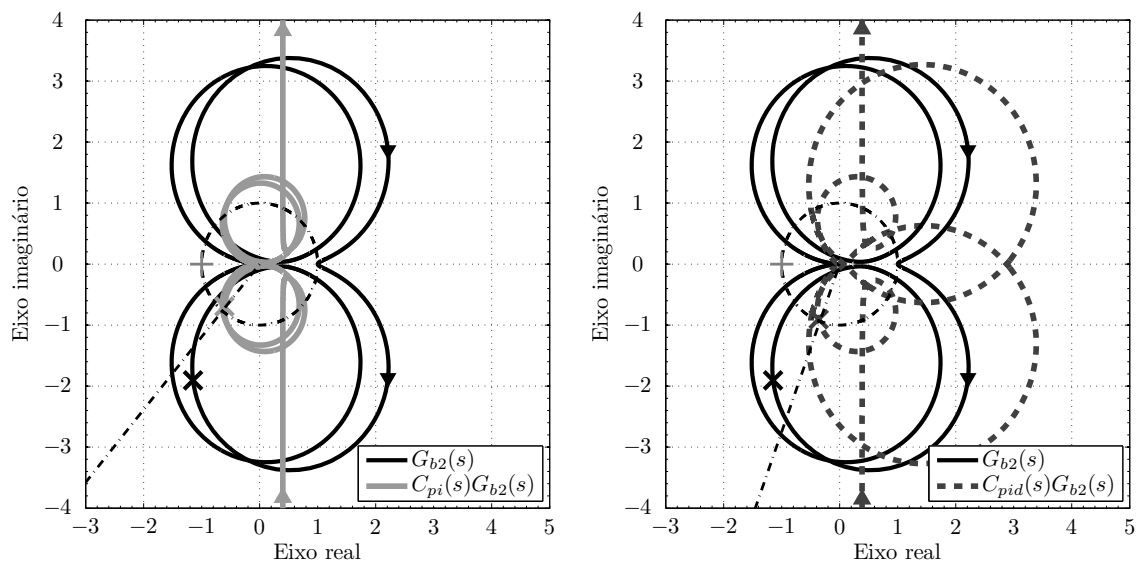
Figura 26 – Respostas em frequência do processo,  $G_{b2}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta,  $C_{pi}(j\omega)G_{b2}(j\omega)$  e  $C_{pid}(j\omega)G_{b2}(j\omega)$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 225,5$  rad/s e nas fases  $-110^\circ$  e  $-130^\circ$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

gramas confirma-se que em  $\omega_{120} = 225,5$  rad/s os controladores PI e PID resultam em funções de malha aberta com magnitude unitária e fase respectivamente iguais a  $-130^\circ$  e  $-110^\circ$ . Constata-se também que a condição de decrescimento monotônico da função de malha aberta para frequências maiores que  $\omega_{120}$  não é satisfeita —em ambos casos a maior frequência na qual a função de malha aberta possui módulo unitário não é  $\omega_{120}$ — e, por isto, a margem de fase desejada não é obtida —com o controlador PI verifica-se margem de fase igual a  $50^\circ$ , por coincidência, o mesmo valor desejado que foi definido em (73), e com o controlador PID é obtida margem de fase igual a  $61^\circ$ , valor menor que o proposto em (74)—, contudo, ainda assim é obtido desempenho satisfatório.

Na Figura 27 estão apresentados os diagramas de Nyquist da função de transferência do processo,  $G_{b2}(s)$ , e das funções de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{b2}(s)$  e  $C_{pid}(s)G_{b2}(s)$ . Mais uma vez, o fechamento desses diagramas ocorre pela direita, o ponto  $-1 + j0$  não é envolvido nenhuma vez e os sistemas em malha fechada resultantes são es-

Figura 27 – Diagramas de Nyquist do processo,  $G_{b2}(s)$ , e das funções de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{b2}(s)$  e  $C_{pid}(s)G_{b2}(s)$ .

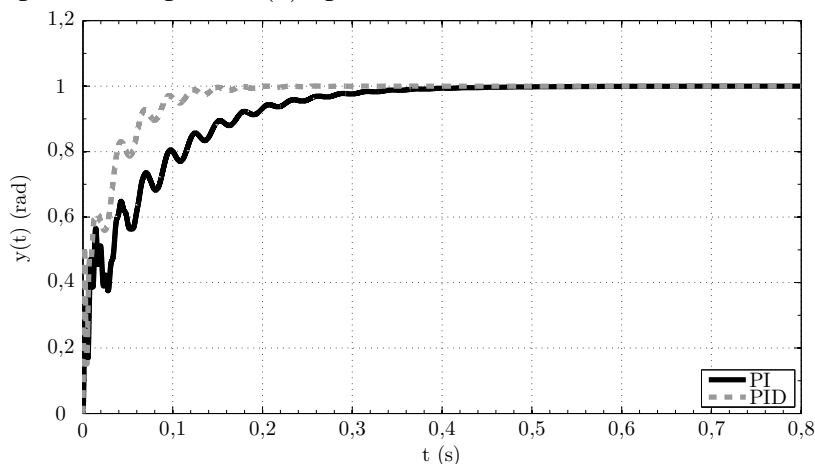


(a)  $G_{b2}(s)$  e  $C_{pi}(s)G_{b2}(s)$ , as linhas traço e ponto pretas estão na circunferência de raio unitário e na reta com fase  $-130^\circ$ .

(b)  $G_{b2}(s)$  e  $C_{pid}(s)G_{b2}(s)$ , as linhas traço e ponto pretas estão na circunferência de raio unitário e na reta com fase  $-110^\circ$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Respostas do sistema em malha fechada para um degrau unitário considerando o processo representado por  $G_{b2}(s)$  operando com os controladores PI e PID.

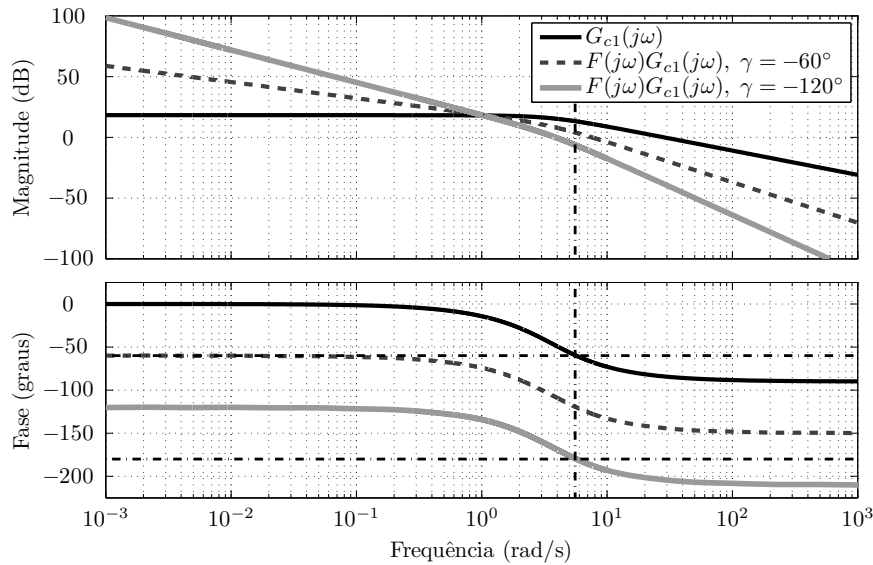


Fonte: Elaborado pelo autor.

táveis já que as funções de malha aberta com o processo e os controladores não possuem polos no SPD.

Os resultados de simulação da resposta do sistema em malha fechada para um degrau unitário na referência com ambos controladores projetados são apresentados na Figura 28. As medidas de desempenho obtidas estão descritas na Tabela 8.

Figura 29 – Respostas em frequência de  $G_{c1}(j\omega)$  e de  $F(j\omega)G_{c1}(j\omega)$  com  $\gamma = -60^\circ$  e com  $-120^\circ$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{60} = 5,56$  rad/s e nas fases  $-60^\circ$  e  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.4.3 Modelo linearizado de um sistema de direção ativa de um carro

O último processo considerado para análise do método proposto é o modelo linearizado de um sistema de direção ativa de um carro de quatro rodas que tem função de transferência do ângulo do volante do carro para a taxa de guinada dada por:

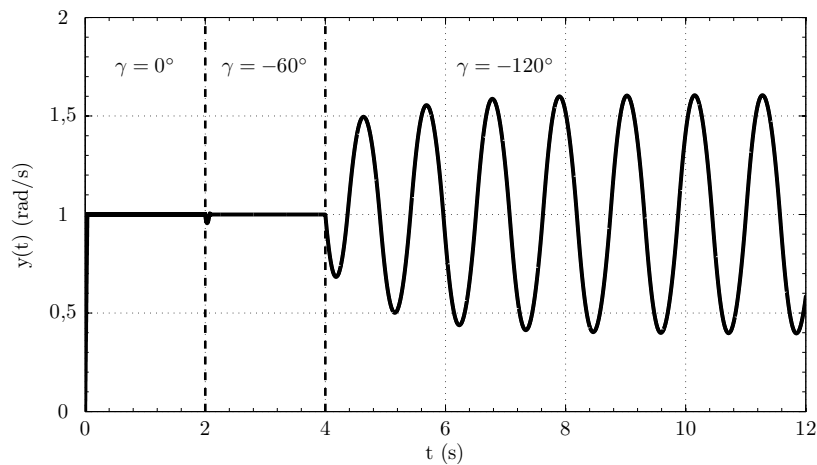
$$G_{c1}(s) = \frac{28,4s + 119,7}{s^2 + 7,15s + 14,7}$$

e resposta em frequência apresentada na Figura 29.

De modo análogo aos exemplos anteriores, o primeiro passo do método GOF é a realização do experimento do RFA. Uma vez que  $G_{c1}(s)$  é um processo da Classe C, classe na qual a fase da resposta em frequência do processo não cruza nem a linha de  $-180^\circ$  nem a linha de  $-120^\circ$  mas cruza a linha de  $-60^\circ$ , a auto-oscilação é verificada no experimento do RFA com  $-120^\circ$ . As respostas em frequência de  $G_{c1}(j\omega)$  e de  $F(j\omega)G_{c1}(j\omega)$  com  $\gamma = -60^\circ$  e com  $\gamma = -120^\circ$  podem ser analisadas na Figura 29, na qual destaca-se que o ponto crítico de  $F(j\omega)G_{c1}(j\omega)$  com  $\gamma = -120^\circ$  tem a mesma frequência que o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$ . Neste caso, a identificação do ponto crítico de  $F(j\omega)G_{c1}(j\omega)$  com  $\gamma = -120^\circ$  e a aplicação das equações em (98) levam à identificação de  $\omega_{60}$  e  $M_{60}$ , respectivamente definidas como a frequência e a magnitude do ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$ .

A implementação do experimento do RFA com um degrau unitário aplicado na referência resulta no sinal de saída do processo  $G_{c1}(s)$  apresentado na Figura 30. Inicialmente, realiza-se o experimento do RFA com  $0^\circ$  entre 0 e 2 s, não resultando em auto-oscilação. Então, em 2 s, muda-se a fase do relé para  $-60^\circ$  e ainda assim nenhuma oscilação é observada. Deste modo, em 4 s, a fase do laço é alterada com a utilização do relé com  $-120^\circ$  de fase e a condição de auto-oscilação é obtida, conforme esperado para um processo da Classe C. Assim, através deste experimento do RFA cujas medidas estão resumidas na Tabela 9, identifica-se o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$ .

Figura 30 – Resposta do sistema em malha fechada para o experimento do RFA aplicado no processo representado por  $G_{c1}(s)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 9 – Dados do experimento do RFA para o processo  $G_{c1}(s)$ .

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$M_\nu$	$T_\nu$	$\omega_\nu$
$0^\circ$	$-180^\circ$	1	0	—	1	—	—	—
$-60^\circ$	$-120^\circ$	1	0	—	—	—	—	—
$-120^\circ$	$-60^\circ$	1	0	0,605	0,105	4,51	1,13	5,56

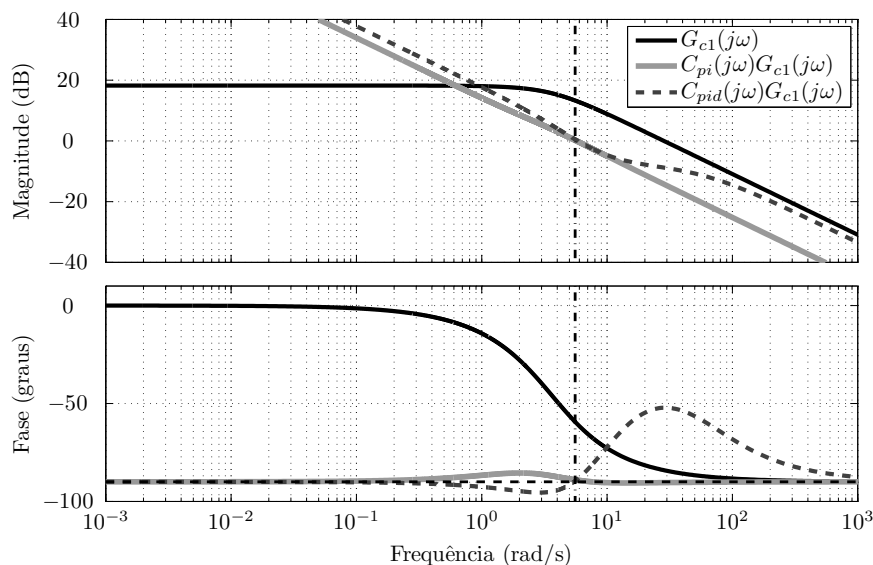
Tabela 10 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho para o processo  $G_{c1}(s)$ .

PI				PID					
$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,193	0,316	1	0	0,193	0,203	0,052	0,0181	0,91	2,7

Os conjuntos de parâmetros dos controladores, os quais são projetados através das fórmulas de sintonia descritas na Tabela 4 adequadas para a Classe C utilizando  $M_{60}$  e  $T_{60}$ , são apresentados na Tabela 10. As respostas em frequência do processo,  $G_{c1}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta,  $C_{pi}(j\omega)G_{c1}(j\omega)$  e  $C_{pid}(j\omega)G_{c1}(j\omega)$ , estão representadas na Figura 31, onde confirma-se que em  $\omega_{60} = 5,56$  rad/s, conforme estabelecido através da localização  $p$  definida em (77), as funções de malha aberta com ambos os controladores PI e PID têm magnitude unitária e  $-90^\circ$  de fase. Assim, visto que a magnitude da função de malha aberta decresce monotonicamente para frequências maiores que  $\omega_{60}$ , obtém-se a margem de fase desejada de  $90^\circ$ .

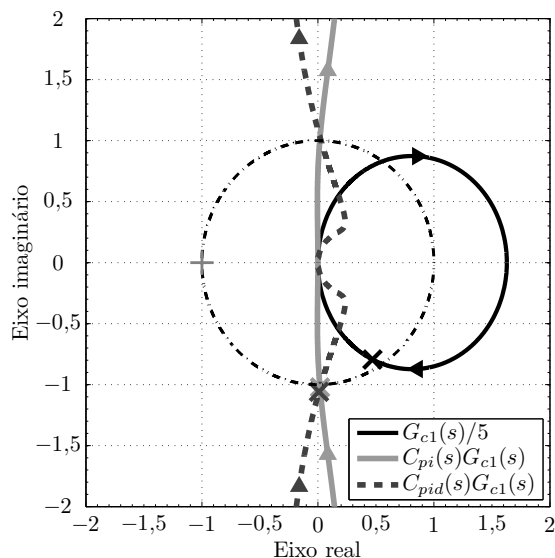
Os diagramas de Nyquist de  $G_{c1}(s)/5$  e das funções de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{c1}(s)$  e  $C_{pid}(s)G_{c1}(s)$ , são ilustrados na Figura 32. O ponto de  $\omega_{60}$  está destacado com um 'X' nestes diagramas de Nyquist. O fechamento desses diagramas ocorre pela direita e o ponto  $-1 + j0$  não é envolvido nenhuma vez. Assim, visto que as funções de malha aberta do processo com os controladores projetados não possuem polos no SPD conclui-se que o sistema em malha fechada é estável com ambos controladores. Além disto, a magnitude dos controladores  $1/M_{60}$  e seus  $-30^\circ$  de contribuição de fase na

Figura 31 – Respostas em frequência do processo,  $G_{c1}(j\omega)$ , e das funções de malha aberta,  $C_{pi}(j\omega)G_{c1}(j\omega)$  e  $C_{pid}(j\omega)G_{c1}(j\omega)$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{60} = 5,56$  rad/s e na fase  $-90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 – Diagramas de Nyquist de  $G_{c1}(s)/5$  e das funções de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{c1}(s)$  e  $C_{pid}(s)G_{c1}(s)$ . A linha traço e ponto preta destaca o círculo de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

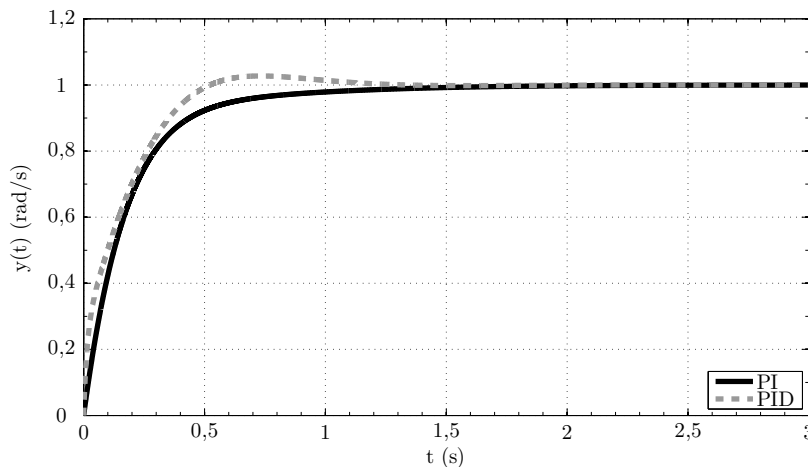
frequência  $\omega_{60}$  do processo resultam em  $90^\circ$  de margem de fase.

Na Figura 33 são apresentados os resultados de simulação da resposta do sistema em malha fechada com  $G_{c1}(s)$  e com os controladores projetados para um degrau unitário na referência. A Tabela 10 resume as medidas de desempenho obtidas.

Na próxima seção descreve-se o procedimento experimental envolvido na aplicação prática do método GOF, no qual descreve-se a implementação do experimento do RFA e da sintonia dos controladores PID através das informações obtidas neste experimento.



Figura 33 – Respostas do sistema em malha fechada para um degrau unitário considerando o processo representado por  $G_{cl}(s)$  operando com os controladores PI e PID.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 3.5 Aplicação experimental

### 3.5.1 Descrição do processo e da configuração experimental

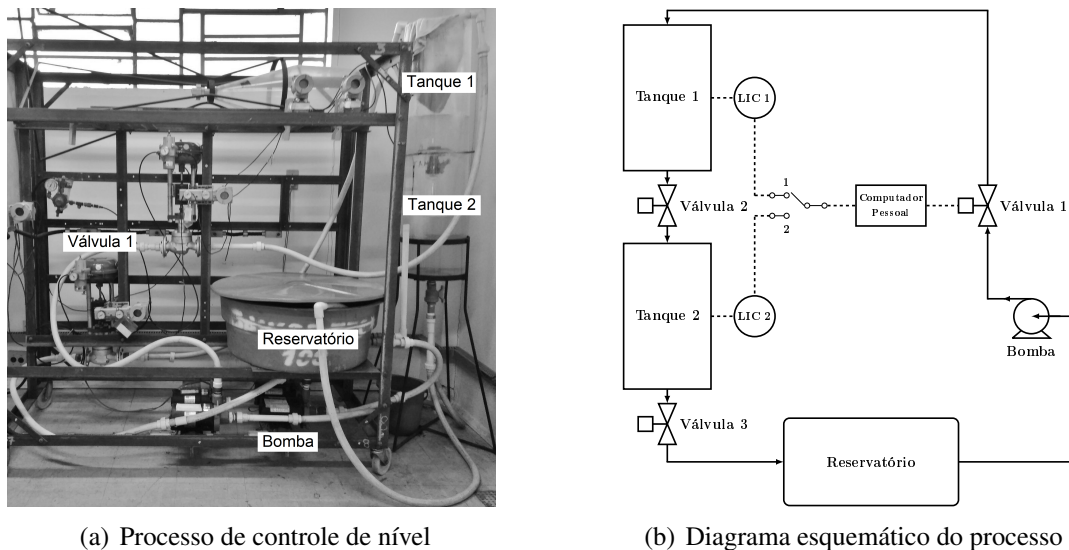
Esta seção apresenta a aplicação experimental do método GOF em um processo real de controle de nível composto de tanques, bombas, válvulas e sensores de aplicação industrial. Uma imagem desse processo de controle de nível é apresentada na Figura 34(a), enquanto seu diagrama esquemático é representado na Figura 34(b) (BOEIRA *et al.*, 2018). Os tanques 1 e 2 têm capacidade máxima de 70 litros, enquanto o reservatório tem capacidade de 250 litros.

Nesse processo, o reservatório alimenta a válvula 1 por meio de uma bomba de corrente alternada, a qual é acionada por meio de um inversor. O fluxo de entrada do tanque 1 também depende da abertura da válvula 1. O fluxo de entrada do tanque 2 depende do nível de líquido no tanque 1 e da abertura da válvula 2. Da mesma forma, o reservatório recebe o fluxo que depende do nível de líquido do tanque 2 e da abertura da válvula 3. Durante todos os experimentos realizados, a frequência do inversor que aciona a bomba, além das aberturas das válvulas 2 e 3 foram mantidas constantes. A medição de nível, dada em centímetros, é realizada por sensores de pressão posicionados no fundo de cada tanque e por indicadores controladores de nível (do inglês *Level indicator controller* — *LIC*). O controle de nível dos tanques 1 e 2 é realizado através da abertura da válvula 1, dada em %, a qual é uma válvula pneumática com abertura controlável.

A comunicação entre equipamentos é realizada por meio de uma rede *Foundation Fieldbus H1* (ZEILMANN *et al.*, 2003). O experimento do RFA, a implementação dos controladores e a aquisição dos dados são realizados com período de amostragem de  $T_s = 1$  s e a comunicação é realizada através de um servidor *OPC*.

O método GOF, o qual inclui o experimento do RFA e a sintonia dos controladores PID, é baseado em funções de transferência representadas em tempo contínuo. Contudo, como deseja-se realizar sua implementação em um sistema em tempo real, faz-se necessário obter equivalentes funções de transferências em tempo discreto dos *FOIs* e dos controladores PID. Para isso, a transformação bilinear foi aplicada nas funções de transferência dos *FOIs* visando manter suas características de resposta em frequência, enquanto o método de Euler atrasado (em inglês, *Backward Euler*) foi utilizado nas funções

Figura 34 – Processo de controle de nível composto de equipamentos industriais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

de transferência dos controladores para evitar polos no semiplano esquerdo do círculo unitário, tentando assim evitar resposta alternada na abertura da válvula.

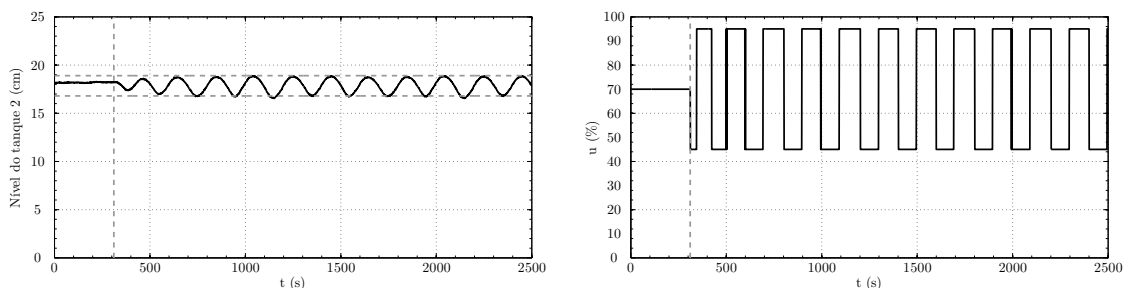
Na sequência, dois problemas de controle serão considerados separadamente: controle de nível do tanque 2 e controle de nível do tanque 1, ambos utilizando a abertura da válvula 1 como entrada de controle. Uma vez que a entrada de controle altera diretamente o fluxo de entrada do tanque 1, enquanto o nível do tanque 2 depende do nível do tanque 1, pode-se esperar que a dinâmica do segundo experimento (controle de nível do tanque 1) tenha ordem menor que a dinâmica do primeiro experimento. Para cada problema de controle, o método GOF foi diretamente aplicado: inicialmente foi realizado o experimento do RFA, então controladores PI e PID foram sintonizados através das fórmulas de sintonia apresentadas na Tabela 4, nas quais são utilizadas a magnitude identificada do processo  $M_v$ , dada em cm/%, e o período  $T_v$  associado a frequência identificada  $\omega_v$  representado em segundos. Para cada um dos controladores projetados, foi obtida a resposta do sistema em malha fechada a degraus (aditivos e subtrativos) aplicados na referência e o desempenho em cada caso foi avaliado em termos do tempo de acomodação ( $t_s$  em segundos e calculado assumindo uma tolerância de 2% do valor do sinal de saída em regime) e do máximo sobressaio ( $M_o$  em %).

### 3.5.2 Controle de nível do tanque 2

No primeiro conjunto de testes, a saída do processo  $y(t)$  é o nível do tanque 2 e a entrada de controle  $u(t)$  é a saída do RFA que comanda a abertura da válvula 1. A Figura 35 apresenta os sinais  $y(t)$  e  $u(t)$  obtidos no experimento do RFA. Inicialmente, colocou-se o processo em malha aberta com a abertura da válvula 1 igual a 70%, desse modo o nível do tanque 2 alcançou aproximadamente 18,2 cm em regime permanente, como mostrado nas figuras 35(a) e 35(b). Então, a referência  $r(t)$  foi definida como 18 cm e foi mantida constante ao longo deste experimento.

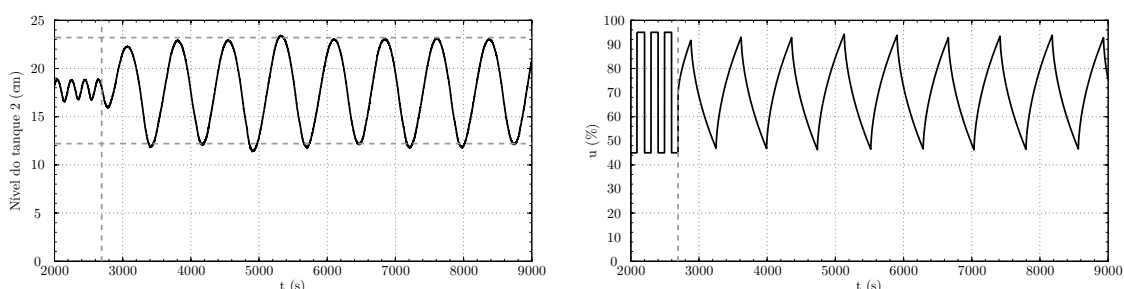
O experimento do RFA foi iniciado com  $\gamma = 0^\circ$  em 311 s, o qual resultou em um comportamento oscilatório do sistema em malha fechada e possibilitou a identificação do ponto crítico da resposta em frequência do processo, ou seja, os parâmetros  $M_u = 1/K_u$

Figura 35 – Experimento do RFA aplicado no controle de nível do tanque 2.



(a) Nível do tanque 2 em malha aberta (0 a 311 s) e com RFA de  $0^\circ$  de fase (311 a 2500 s). As linhas tracejadas estão em 311 s, 16,8 cm e 18,9 cm.

(b) Sinal de controle em malha aberta (0 a 311 s) e com RFA de  $0^\circ$  de fase (311 a 2500 s). A linha tracejada está em 311 s.



(c) Nível do tanque 2 com RFA de  $0^\circ$  de fase (2000 a 2693 s) e com RFA de  $-60^\circ$  de fase (2693 a 9000 s). As linhas tracejadas estão em 2693 s, 12,2 cm e 23,2 cm.

(d) Sinal de controle com RFA de  $0^\circ$  de fase (2000 a 2693 s) e com RFA de  $-60^\circ$  de fase (2693 a 9000 s). A linha tracejada está em 2693 s.

Fonte: Elaborado pelo autor.

e  $T_u$  foram determinados. Em regime permanente, a saída do processo apresentada na Figura 35(a) oscilou entre 16,8 cm e 18,9 cm com período de  $T_u = 199$  s, enquanto o sinal de controle representado na Figura 35(b) variou entre 45% e 95%.

Para avaliar o método de sintonia, neste mesmo experimento a fase do RFA foi reduzida para  $\gamma = -60^\circ$  em 2692 s. Assim, o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$  foi identificado, os parâmetros  $M_{120}$  e  $T_{120}$  foram determinados. As figuras 35(c) e 35(d) mostram a saída do processo e o sinal de controle obtidos nesta etapa do experimento, a partir das quais é possível determinar o período  $T_{120} = 761$  s, e as amplitudes mínima e máxima da oscilação da saída, 12,2 cm e 23,2 cm, respectivamente. Observa-se que, apesar na diferença no formato, as figuras 35(b) e 35(d) apresentam a curva do sinal controle —que é o sinal de saída do RFA enviado para comandar a abertura da válvula 1—, a Figura 35(b) representada a saída do RFA com  $0^\circ$ , ou seja, a saída do bloco do relé, enquanto a Figura 35(d) mostra a saída do RFA com  $-60^\circ$ , isto é, a saída do bloco do FOI com  $-60^\circ$ .

Os dados obtidos no experimento do RFA com  $0^\circ$  e com  $-60^\circ$  aplicados no controle de nível do tanque 2 estão resumidos na Tabela 11. Os parâmetros dos controladores PID projetados através desses dados estão apresentados na Tabela 12.

A resposta do sistema em malha fechada com a inclusão destes controladores PID e a saída sendo o nível do tanque 2 é apresentada na Figura 36 considerando a sintonia baseada no experimento do RFA com  $0^\circ$  (método COF) e na Figura 37 considerando a sintonia baseada no experimento do RFA com  $-60^\circ$ . Inicialmente, o processo foi co-

Tabela 11 – Parâmetros do experimento do RFA no controle de nível do tanque 2.

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$M_\nu$	$T_\nu$
0°	-180°	25	0	1,05	1	0,0330	199
-60°	-120°	0,6	0	5,5	24,4	0,295	761

Tabela 12 – Parâmetros dos controladores PID no controle de nível do tanque 2.

<b>RFA</b>	<b>PI</b>		<b>PID</b>			
$\gamma$	$K_p$	$T_i$	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$N$
0°	12,1	159	18,2	99,5	24,9	3,18
-60°	3,33	685	3,33	289	72,3	12,2

Tabela 13 – Medidas de desempenho no controle de nível do tanque 2.

<b>Procedimento</b>	<b>RFA</b>	<b>PI</b>		<b>PID</b>	
	$\gamma$	$t_s$	$M_o$	$t_s$	$M_o$
1	0°	–	–	1204	96,5
	-60°	1047	8,6	630	8
2	0°	–	–	793	70
	-60°	902	13	296	0

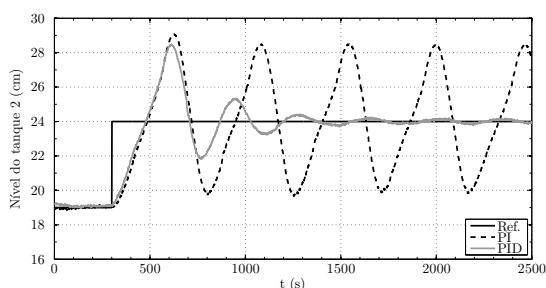
locado em malha aberta com a abertura da válvula 1 igual a 71%, como mostrado nas figuras 36(b) e 37(b). Em malha aberta e regime permanente, o nível do tanque 2 alcançou aproximadamente 19 cm, então, em 300 s, o sistema foi colocado em malha fechada e a referência foi alterada para 24 cm, como apresentado nas figuras 36(a) e 37(a). Essa sequência de operações no processo foi nomeada de *procedimento 1* para facilitar a referência nas figuras. Após o sistema em malha fechada atingir o regime permanente, em 5300 s, a referência foi alterada de 24 cm para 19 cm, o qual foi nomeado de *procedimento 2*. A saída do processo obtida no procedimento 2 é apresentada nas figuras 36(c) e 37(c), enquanto os correspondentes sinais de controle são mostrados nas figuras 36(d) e 37(d). As medidas de desempenho no controle de nível do tanque 2 utilizando o sistema em malha fechada com a inclusão dos controladores PID estão resumidas na Tabela 13.

Mesmo que tenha sido possível aplicar o método COF a esse processo, dificilmente pode-se afirmar que o controlador PI projetado por esse método tenha resultado em um sistema estável em malha fechada, enquanto o desempenho em malha fechada obtido com o controlador PID apresenta grande sobrepasso. Um desempenho muito melhor foi obtido com a sintonia através do experimento do RFA com -60°, no qual ambos controladores PI e PID resultaram em desempenho transitório adequado em termos de tempo de acomodação e máximo sobrepasso.

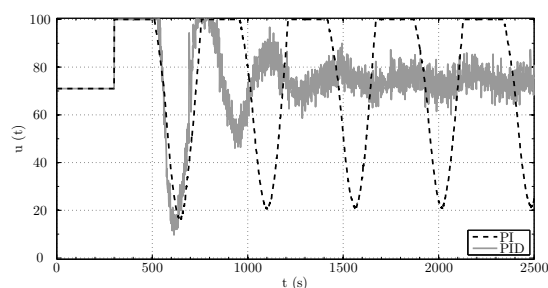
Na sequência, é realizada a complementação dos resultados obtidos no controle de nível do tanque 2 por meio dos processos cujas funções de transferência são dadas por

$$G_{ab}(s) = \frac{e^{-0,08s}}{(s+1)^2} \quad \text{e} \quad G_b(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

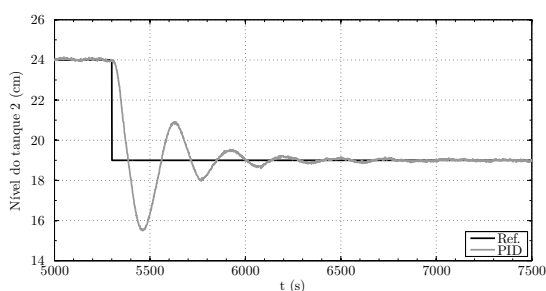
Figura 36 – Respostas do nível do tanque 2 com os controladores PID sintonizados através do experimento do RFA com  $0^\circ$  (método COF).



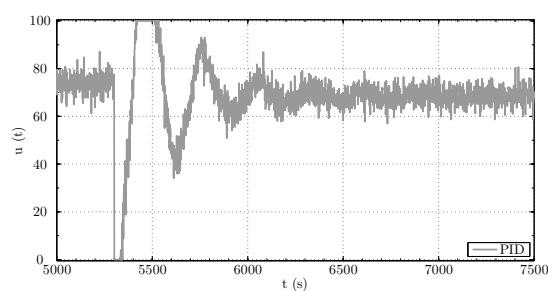
(a) Procedimento 1 – resposta em malha aberta (0 a 300 s) e em malha fechada (300 a 2500 s).



(b) Procedimento 1 – sinal de controle.



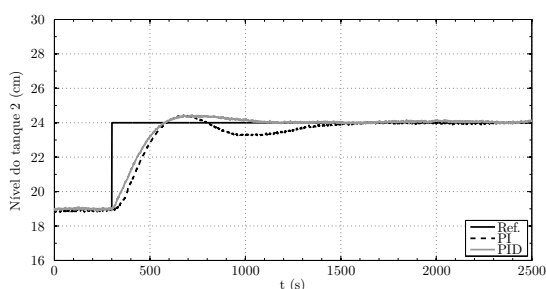
(c) Procedimento 2 – resposta em malha fechada.



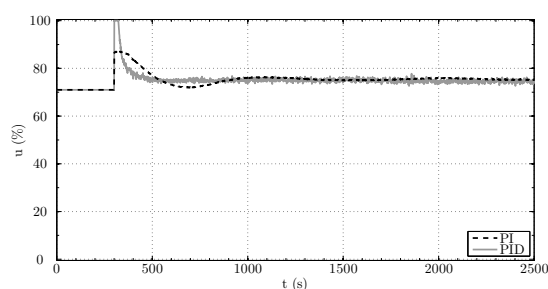
(d) Procedimento 2 – sinal de controle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

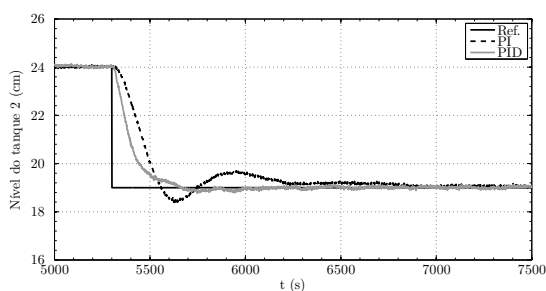
Figura 37 – Respostas do nível do tanque 2 com os controladores PID sintonizados através do experimento do RFA com  $-60^\circ$ .



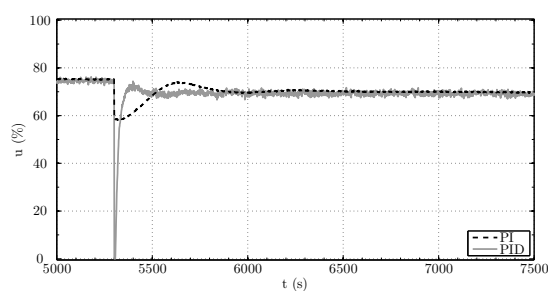
(a) Procedimento 1 – resposta em malha aberta (0 a 300 s) e em malha fechada (300 a 2500 s).



(b) Procedimento 1 – sinal de controle.



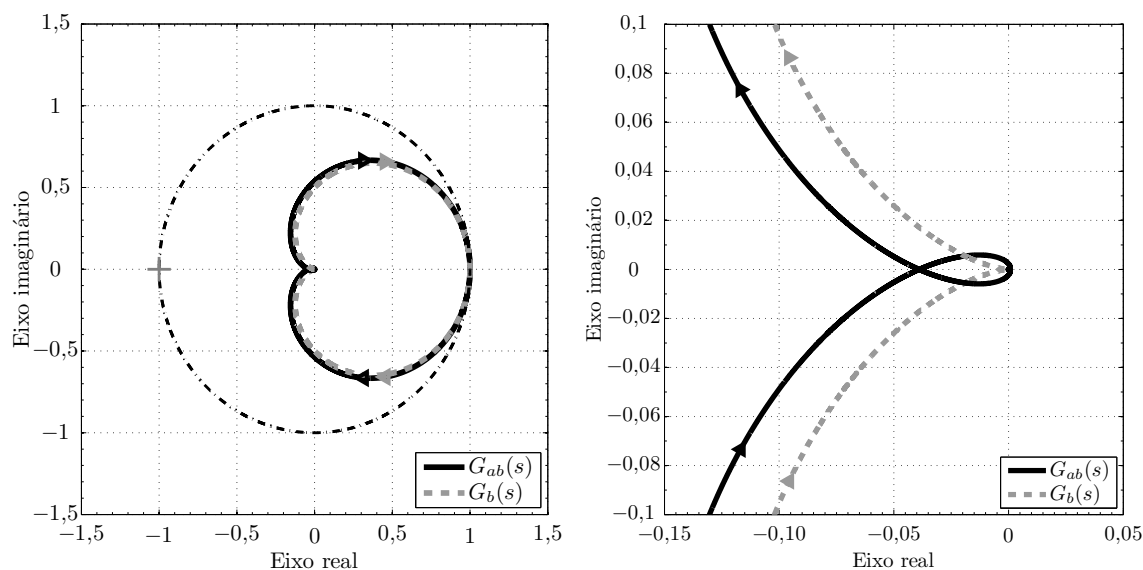
(c) Procedimento 2 – resposta em malha fechada.



(d) Procedimento 2 – sinal de controle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Diagramas de Nyquist dos processos  $G_{ab}(s)$  e  $G_b(s)$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



(a) Diagramas de Nyquist de  $G_{ab}(s)$  e de  $G_b(s)$ .

(b) Destaque na região próxima da origem.

Fonte: Elaborado pelo autor.

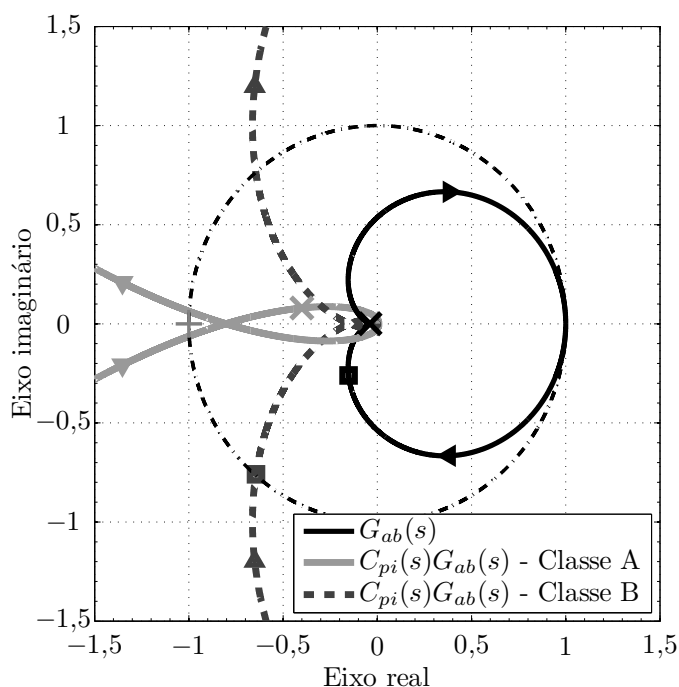
A função de transferência  $G_{ab}(s)$  representa um processo com características de resposta em frequência semelhantes ao processo de controle de nível do tanque 2, enquanto  $G_b(s)$  é igual à função de transferência  $G_{ab}(s)$  sem o elemento de atraso.

Os diagramas de Nyquist de  $G_{ab}(s)$  e de  $G_b(s)$  são apresentados na Figura 38(a). Em um primeiro momento, caso a interpretação do diagrama de Nyquist de  $G_{ab}(s)$  seja realizada sem a devida atenção, pode-se acreditar que sua resposta em frequência traçada na forma polar não cruza o eixo real negativo, isto é, pode-se considerar que esse processo pertence à Classe B, dado que a sua resposta em frequência claramente cruza a linha de  $-120^\circ$  de fase. Na Figura 38(b) é representada a região desse diagrama próxima da origem, na qual constata-se que a resposta em frequência de  $G_{ab}(j\omega)$  cruza o eixo real negativo em  $-0,0390 + j0$ . Portanto, apesar da magnitude reduzida do seu ponto crítico, verifica-se que o processo  $G_{ab}(s)$  efetivamente está na Classe A, conforme definido na Seção 3.2.1.

Pela análise da resposta em frequência, verifica-se que o par de polos em  $-1$  tem maior influência sobre a resposta em frequência do processo  $G_{ab}(j\omega)$  do que o elemento de atraso de  $0,08$  s. Logo, pode-se considerar que  $G_b(j\omega)$  é uma boa aproximação de  $G_{ab}(j\omega)$ , ou seja, este último processo está no limite entre as classes A e B. Em razão desta característica, a identificação do ponto da resposta em frequência cuja fase é  $-120^\circ$  fornece informação mais relevante sobre esse processo do que a identificação do ponto crítico. Além disto, alia-se o fato que a sintonia através das fórmulas propostas para a Classe B garantem adequada margem de fase. Por estes motivos, para processos com este comportamento —estar no limite entre as classes A e B—, espera-se que a sintonia através das fórmulas propostas para a Classe B resultem em melhor resposta em malha fechada do que as propostas para a Classe A.

Na Figura 39 são apresentados os diagramas de Nyquist do processo,  $G_{ab}(s)$ , e da função de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{ab}(s)$ , considerando dois controladores PI. O primeiro controlador foi sintonizado através das fórmulas propostas para a Classe

Figura 39 – Diagramas de Nyquist do processo,  $G_{ab}(s)$ , e da função de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{ab}(s)$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

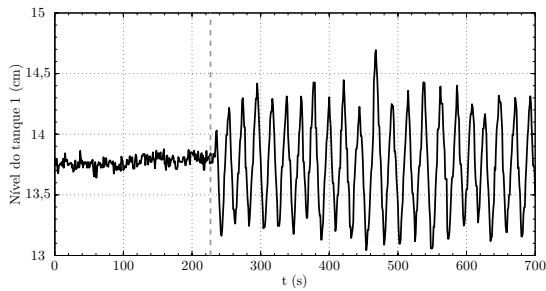
A com  $M_u = 0,0390$  e com  $\omega_u = 4,97$  rad/s. Neste caso, deslocar o ponto crítico do processo com o controlador para  $p = -0,4 + j0,08$  —esses pontos estão destacados com um ‘X’ no diagrama— não resulta em adequadas margens de estabilidade e, por este motivo, será observado um alto valor de sobrepasso na resposta ao salto quando considerado o sistema em malha fechada. O segundo controlador foi sintonizado através das fórmulas propostas para a Classe B com  $M_{120} = 0,302$  e com  $\omega_{120} = 1,52$  rad/s. O controlador obtido desloca o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$  para  $p = \cos(-130^\circ) + j \operatorname{sen}(-130^\circ)$  —esses pontos estão destacados com um ‘quadrado’ no diagrama—, resultando em  $50^\circ$  de margem de fase e, conseqüentemente, em menor sobrepasso na resposta ao salto daquele verificado com as fórmulas de sintonia para a Classe A.

Esta análise teórica realizada com o processo  $G_{ab}(s)$  explica as curvas apresentadas nas figuras 36 e 37. Conforme esperado, em processos que estão no limite entre as classes A e B —como é o caso do processo de controle de nível do tanque 2— as fórmulas de sintonia dos controladores PID para a Classe A resultarão em margens de estabilidade significativamente menores (e maior sobrepasso) que aquelas obtidas com as fórmulas propostas para a Classe B. Portanto, a sintonia adequada é alcançada com as fórmulas de sintonia propostas para a Classe B.

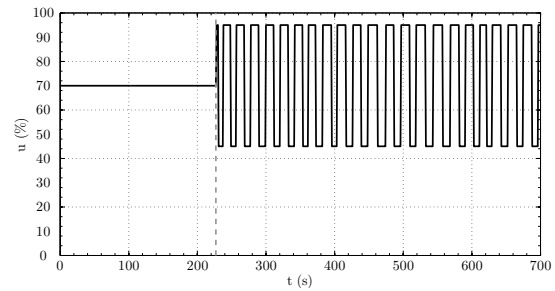
### 3.5.3 Controle de nível do tanque 1

No segundo conjunto de testes, o tanque 2 atua como reservatório, a saída do processo  $y(t)$  é o nível do tanque 1 e a entrada de controle  $u(t)$  é a saída do RFA que comanda a abertura da válvula 1. A Figura 40 mostra os sinais  $y(t)$  e  $u(t)$  obtidos no experimento do RFA. Inicialmente, o processo foi colocado para operar em malha aberta com a abertura

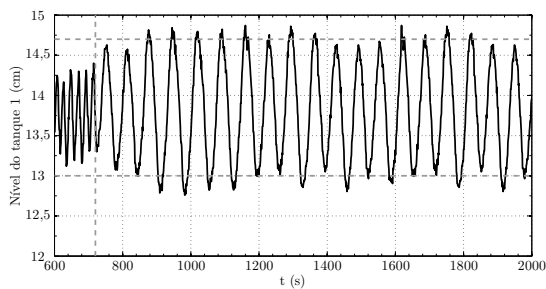
Figura 40 – Experimento do RFA aplicado no controle de nível do tanque 1.



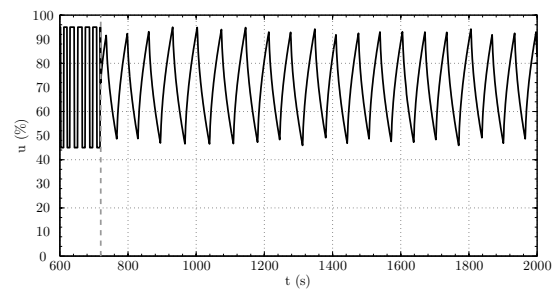
(a) Nível do tanque 1 em malha aberta (0 a 227 s) e com RFA de  $0^\circ$  de fase (227 a 700 s). A linha tracejada está em 227 s.



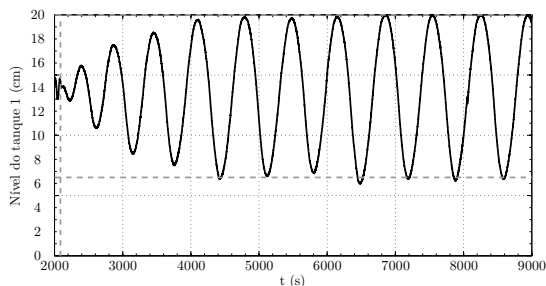
(b) Sinal de controle em malha aberta (0 a 227 s) e com RFA de  $0^\circ$  de fase (227 a 700 s). A linha tracejada está em 227 s.



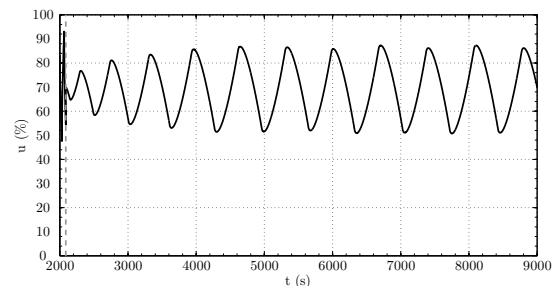
(c) Nível do tanque 1 com RFA de  $0^\circ$  fase (600 a 720 s) e com RFA de  $-60^\circ$  de fase (720 a 2000 s). As linhas tracejadas estão em 720 s, 13 cm e 14,7 cm.



(d) Sinal de controle com RFA de  $0^\circ$  fase (600 a 720 s) e com RFA de  $-60^\circ$  de fase (720 a 2000 s). A linha tracejada está em 720 s.



(e) Nível do tanque 1 com RFA de  $-60^\circ$  de fase (2000 a 2088 s) e com RFA de  $-120^\circ$  de fase (2088 a 9000 s). As linhas tracejadas estão em 2088 s, 6,5 cm e 20 cm.



(f) Sinal de controle com RFA de  $-60^\circ$  de fase (2000 a 2088 s) e com RFA de  $-120^\circ$  de fase (2088 a 9000 s). A linha tracejada está em 2088 s.

Fonte: Elaborado pelo autor.

da válvula 1 igual a 70% e o nível do tanque 1 alcançou aproximadamente 13,8 cm em regime permanente, como retratado nas figuras 40(a) e 40(b). Desta forma, a referência  $r(t)$  foi ajustada para 13,8 cm e foi mantida com esse valor ao longo deste experimento.

Então, o experimento do RFA foi iniciado com  $0^\circ$  em 227s e uma oscilação foi observada. Devido ao formato do sinal de saída do processo, essa não pode ser considerada como uma auto-oscilação, visto que não possui período e amplitude bem definidos, como pode ser observado nas figuras 40(a) e 40(b). Assim, o método COF não pode ser aplicado no processo cuja entrada é a abertura da válvula 1 e a saída é o nível do tanque 1.

Deste modo, em 720 s a fase do RFA foi reduzida para  $\gamma = -60^\circ$  e o ponto da res-



Tabela 14 – Parâmetros do experimento do RFA no controle de nível do tanque 1.

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$M_\nu$	$T_\nu$
$0^\circ$	$-180^\circ$	25	0	–	1	–	–
$-60^\circ$	$-120^\circ$	3	0	0,85	4,80	0,0463	66
$-120^\circ$	$-60^\circ$	0,025	0	6,75	529	0,400	693

Tabela 15 – Parâmetros dos controladores PID no controle de nível do tanque 1.

<b>RFA</b>	<b>PI</b>		<b>PID</b>			
$\gamma$	$K_p$	$T_i$	$K_p$	$T_i$	$T_d$	$N$
$-60^\circ$	21,1	59,4	21,1	25,1	6,27	1,06
$-120^\circ$	2,17	194	2,17	125	31,9	11,1

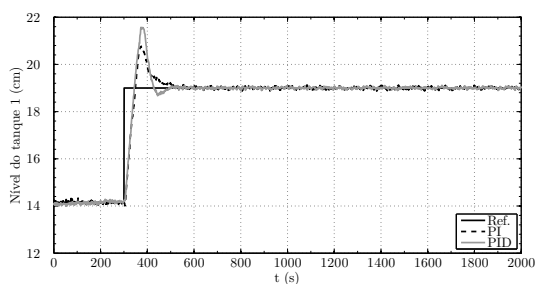
posta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$  foi identificado, ou seja, os parâmetros  $M_{120}$  e  $T_{120}$  foram determinados. A saída do processo e o sinal de controle obtidos nesta etapa do experimento são respectivamente apresentados nas figuras 40(c) e 40(d). Uma vez que a amplitude e o período da oscilação da saída do processo são bem definidos, é possível determinar as amplitudes mínima e máxima de oscilação, 13 cm e 14,7 cm, respectivamente, e o período  $T_{120} = 66$  s.

Para analisar o método GOF, neste mesmo experimento a fase do RFA foi novamente diminuída em 2088 s, desta vez para  $-120^\circ$ . Então, o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$  foi identificado, isto é, os parâmetros  $M_{60}$  e  $T_{60}$  foram determinados. As figuras 40(e) e 40(f) mostram a saída do processo e o sinal de controle obtidos nesta etapa do experimento, através dos quais, em regime permanente, foi possível determinar as amplitudes mínima e máxima de oscilação, 6,5 cm e 20 cm, respectivamente, além do período  $T_{60} = 693$  s.

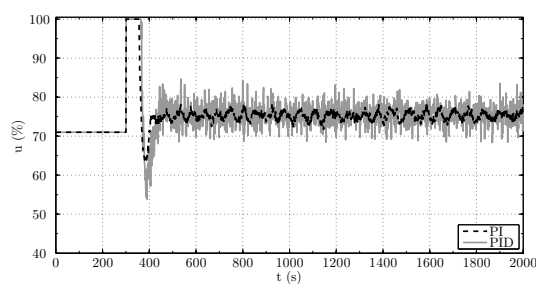
Os dados obtidos no experimento do RFA anteriormente descritos (RFA de  $-60^\circ$  e de  $-120^\circ$  de fase) estão resumidos na Tabela 14. Os parâmetros dos controladores PI e PID projetados através desses dados são apresentados na Tabela 15.

As respostas do sistema em malha fechada com a inclusão dos controladores PI e PID considerando a sintonia obtida através do experimento do RFA com  $\gamma = -60^\circ$  são apresentadas na Figura 41, enquanto na Figura 42 são representadas as respostas do sistema em malha fechada considerando o projeto baseado no experimento do RFA com  $\gamma = -120^\circ$ . Da mesma forma que nos testes anteriores realizados no controle de nível do tanque 2, nos testes de controle de nível do tanque 1 agora considerados, inicialmente o processo foi colocado em malha aberta com a abertura da válvula 1 igual a 71%, como mostrado nas figuras 41(b) e 42(b). Em malha aberta, o nível do tanque 1 atingiu aproximadamente 14,1 cm em regime permanente. Então, realizou-se o procedimento 1: em 300 s o sistema foi colocado para operar em malha fechada e a referência foi alterada para 19 cm, como mostrado nas figuras 41(a) e 42(a). Após o sistema em malha fechada atingir o regime permanente, em 4300 s, o procedimento 2 foi aplicado — a referência foi alterada de 19 cm para 14 cm. A saída do processo obtida no procedimento 2 é apresentada nas figuras 41(c) e 42(c), enquanto o sinal de controle correspondente é retratado nas figuras 41(d) e 42(d). As medidas de desempenho no controle de nível do tanque 1 empregando o sistema em malha fechada com a inclusão dos controladores PID projetados estão resumidos na Tabela 16.

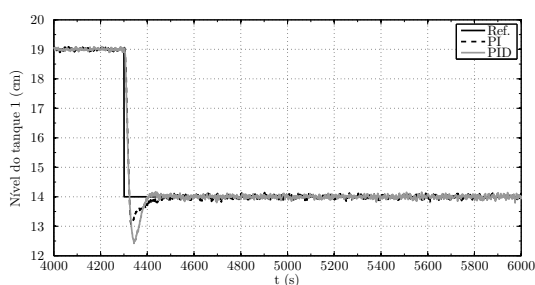
Figura 41 – Respostas do nível do tanque 1 com os controladores PID sintonizados através do experimento do RFA com  $-60^\circ$ .



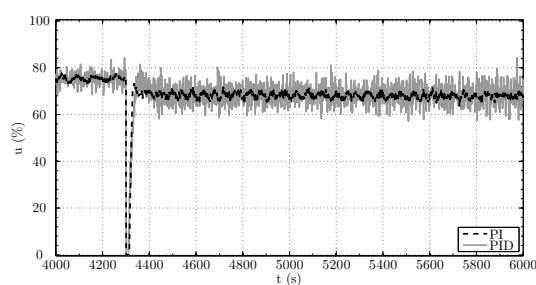
(a) Procedimento 1 – resposta em malha aberta (0 a 300 s) e em malha fechada (300 a 2500 s).



(b) Procedimento 1 – sinal de controle.



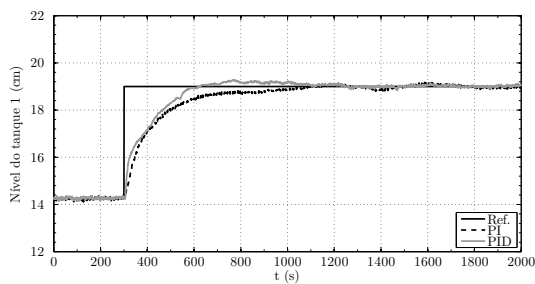
(c) Procedimento 2 – resposta em malha fechada.



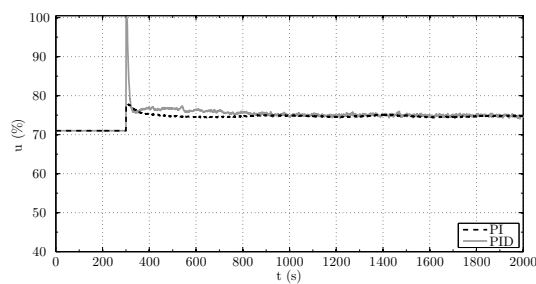
(d) Procedimento 2 – sinal de controle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

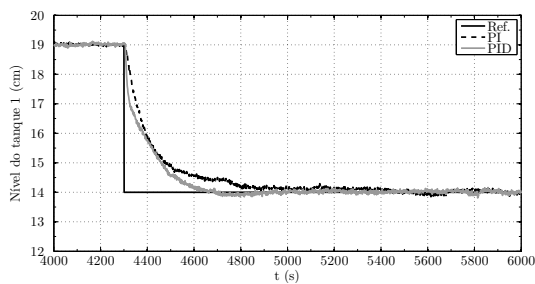
Figura 42 – Respostas do nível do tanque 1 com os controladores PID sintonizados através do experimento do RFA com  $-120^\circ$ .



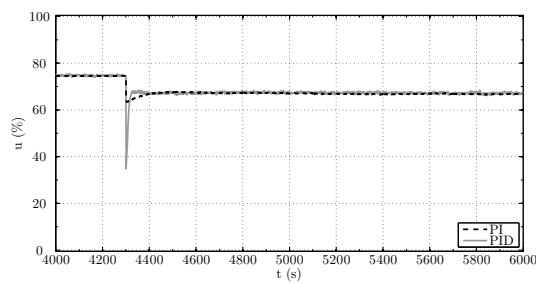
(a) Procedimento 1 – resposta em malha aberta (0 a 300 s) e em malha fechada (300 a 2500 s).



(b) Procedimento 1 – sinal de controle.



(c) Procedimento 2 – resposta em malha fechada.



(d) Procedimento 2 – sinal de controle.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 16 – Medidas de desempenho no controle de nível do tanque 1.

Procedimento	RFA	PI		PID	
	$\gamma$	$t_s$	$M_o$	$t_s$	$M_o$
1	$-60^\circ$	161	36,3	154	53
	$-120^\circ$	611	0	485	5,9
2	$-60^\circ$	104	18,8	90	31,6
	$-120^\circ$	522	0	291	0

Todos os quatro controladores PI e PID sintonizados considerando o experimento do RFA com  $-60^\circ$  e com  $-120^\circ$  resultaram em desempenho satisfatório. Uma vez que foi possível aplicar a sintonia baseada no experimento do RFA com  $-60^\circ$ , pode-se dizer que este processo pertence à Classe B. É interessante notar que para esse processo também foi possível aplicar a sintonia baseada no experimento do RFA com  $-120^\circ$ , resultando em um desempenho mais lento e com menor sobrepasso, ou seja, mais conservador devido à menor banda passante (a qual é definida como a frequência em que a magnitude da função de malha aberta torna-se  $-3$  dB) e às maiores margens de estabilidade.

Seguindo a abordagem realizada anteriormente, a complementação dos resultados obtidos no controle de nível do tanque 1 é efetuada através dos processos cujas funções de transferência são as seguintes

$$G_{bc}(s) = \frac{e^{-0,03s}}{s+1} \quad \text{e} \quad G_c(s) = \frac{1}{s+1}.$$

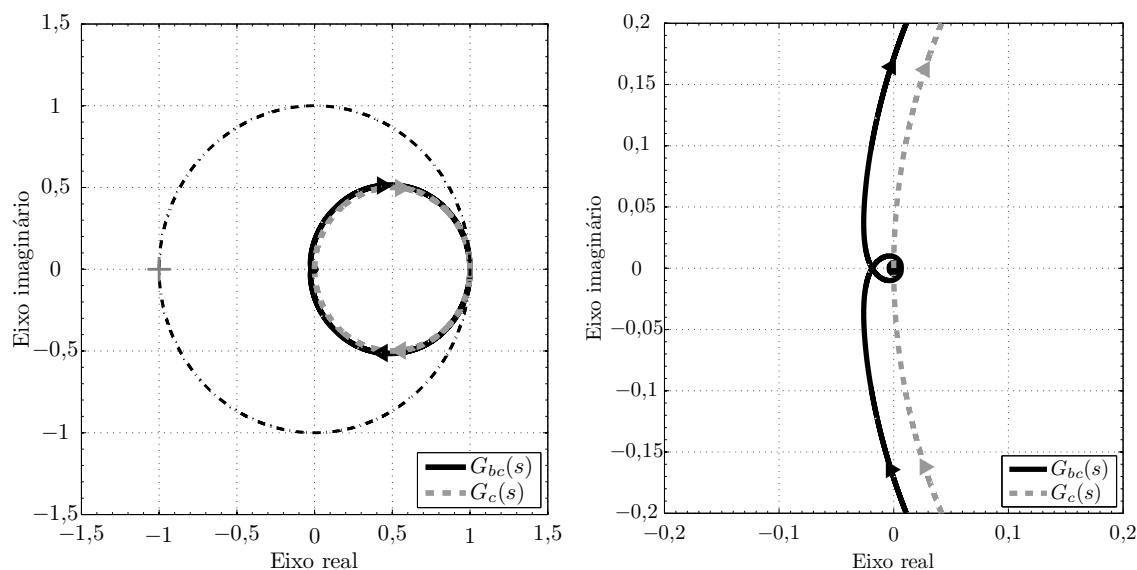
A função de transferência  $G_{bc}(s)$  descreve um processo com características de resposta em frequência semelhantes ao processo de controle de nível do tanque 1, ao passo que  $G_c(s)$  é igual à função de transferência  $G_{bc}(s)$  sem o elemento de atraso.

Na Figura 43(a) são apresentados os diagramas de Nyquist de  $G_{bc}(s)$  e de  $G_c(s)$ . Da mesma forma que no processo  $G_{ab}(s)$ , somente após a observação deste diagrama na região próxima da origem, a qual é representada na Figura 43(b), verifica-se que a resposta em frequência de  $G_{bc}(j\omega)$  traçada na forma polar cruza o eixo real negativo em  $-0,0190 + j0$ . Desta forma, constata-se que, em teoria, o processo  $G_{bc}(s)$  pertence à Classe A, como definido na Seção 3.2.1.

Devido à pequena magnitude do ponto crítico de  $G_{bc}(s)$ , a sua identificação através do experimento do RFA necessita de um ganho do relé elevado para que a amplitude e o período da oscilação na saída do processo possam ser medidos. Considerando esta característica em um processo real, a identificação do ponto crítico pode ser inviabilizada pela limitação da excursão do sinal de controle, como é o caso do processo de controle de nível do tanque 1. Além disto, como verificado anteriormente para o processo  $G_{ab}(s)$ , mesmo que fosse possível a identificação do ponto crítico do processo  $G_{bc}(s)$  em uma situação real, a sintonia do controlador PI resultaria —na melhor das hipóteses— em um sistema em malha fechada com margens de estabilidade bastante reduzidas.

Neste caso, constata-se que o polo em  $-1$  tem maior influência sobre o comportamento frequencial do processo do que o elemento de atraso de  $0,03$  s, o que permite afirmar que  $G_c(j\omega)$  é uma boa aproximação de  $G_{bc}(j\omega)$ . Apesar disto, por causa desse elemento, a resposta em frequência de  $G_{bc}(j\omega)$  cruza a linha de  $-120^\circ$  com magnitude significativa, além de também cruzar a linha de  $-60^\circ$  de fase. Por esse motivo, pode-se considerar que o processo  $G_{bc}(s)$  está no limite entre as classes B e C. Ainda assim, ao

Figura 43 – Diagramas de Nyquist dos processos  $G_{bc}(s)$  e  $G_c(s)$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



(a) Diagrama de Nyquist de  $G_{bc}(s)$  e de  $G_c(s)$ .

(b) Destaque na região próxima da origem.

Fonte: Elaborado pelo autor.

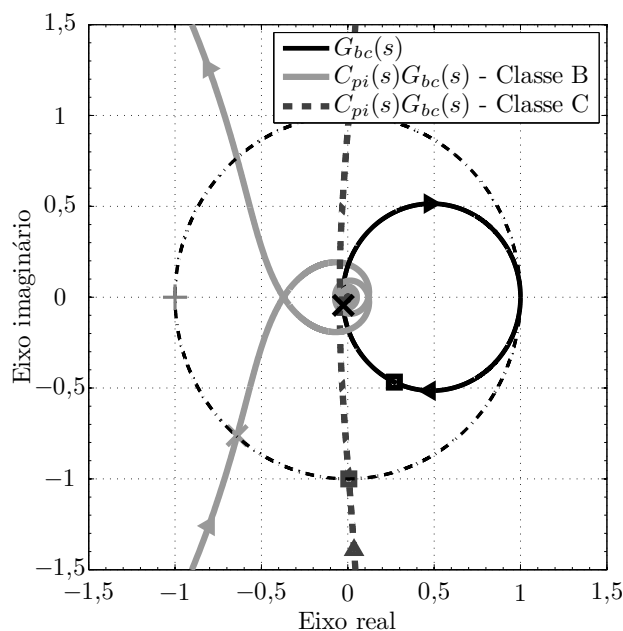
contrário do que foi observado anteriormente para o processo  $G_{ab}(s)$ , como as fórmulas propostas para a sintonia dos controladores PID garantem adequada margem de fase tanto para a Classe B quanto para a Classe C, espera-se, pelo menos, obter sistemas estáveis em malha fechada com ambos pontos de sintonia.

Os diagramas de Nyquist do processo,  $G_{bc}(s)$ , e da função de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{bc}(s)$ , considerando dois controladores PI estão representados na Figura 44. O primeiro controlador foi determinado por meio das fórmulas propostas para a Classe B com  $M_{120} = 0,0520$  e com  $\omega_{120} = 19,2$  rad/s. Essas fórmulas movem o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$  para  $p = \cos(-130^\circ) + j \sin(-130^\circ)$  —os quais estão destacados com um ‘X’ no diagrama—, acarretando em margem de fase de  $50^\circ$  e margem de ganho igual a 2,7. Enquanto o segundo controlador foi sintonizado por meio das fórmulas propostas para a Classe C com  $M_{60} = 0,540$  e com  $\omega_{60} = 1,56$  rad/s, que deslocam o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$  para  $p = \cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)$  —os quais estão destacados com um ‘quadrado’ no diagrama—, resultando em margem de fase de  $90^\circ$  e margem de ganho igual a 27.

Os controladores sintonizados também foram avaliados através da resposta do sistema em malha fechada. Considerando perturbação nula, um degrau de amplitude unitária foi aplicado na referência em  $t = 0$  s. Os sinais de saída do processo estão apresentados na Figura 45. Observa-se que o controlador obtido através das fórmulas de sintonia propostas para a Classe B resultou em um sistema com maior sobrepasso e menor tempo de acomodação do que o controlador sintonizado através das fórmulas de sintonia propostas para a Classe C.

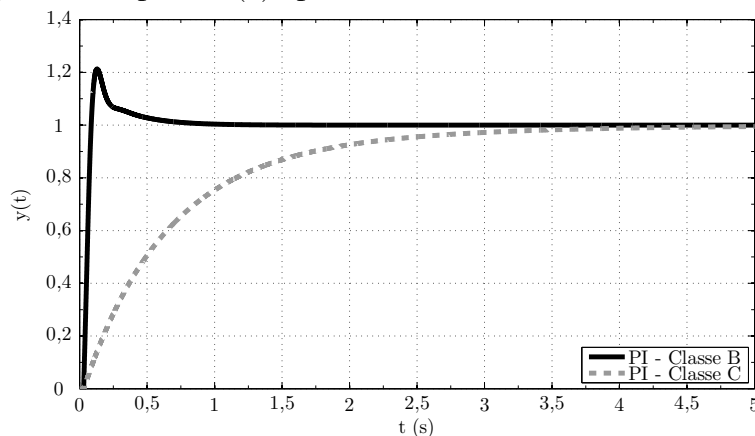
Estes resultados confirmam as respostas em frequência apresentadas anteriormente e vão ao encontro dos resultados retratados na Figura 40 e também na figuras 41 e 42. Para um processo que em teoria está na Classe A mas cuja resposta em frequência está no limite entre as classes B e C —como por exemplo o processo de controle de nível do tanque 1—, a identificação do seu ponto crítico pode ser inviabilizada pela limitação de

Figura 44 – Diagramas de Nyquist do processo,  $G_{bc}(s)$ , e da função de transferência de malha aberta,  $C_{pi}(s)G_{bc}(s)$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 45 – Resposta do sistema em malha fechada para um degrau unitário considerando o processo representado por  $G_{bc}(s)$  operando com os controladores PI.



Fonte: Elaborado pelo autor.

excursão do sinal de controle e pelo formato da oscilação de saída. Quanto à sintonia, os controladores PID obtidos através das fórmulas para a Classe B acarretarão em maior banda passante e em menores margens de estabilidade, ou seja, em maiores sobrepassos e em menores tempos de acomodação, que aqueles obtidas através das fórmulas para a Classe C. Logo, cabe ao projetista definir qual a sintonia mais adequada para o problema a ser resolvido.

### 3.5.4 Análise dos resultados

Pelas questões anteriormente abordadas, o método COF não se comportou adequadamente na sintonia dos controladores PID aplicados no processo de controle de nível. No

controle de nível do tanque 2, o controlador PI obtido por meio desse método resultou em um sistema instável em malha fechada, enquanto o controlador PID resultou em um sistema em malha fechada com grande sobrepasso. No controle de nível do tanque 1 com o tradicional experimento do relé, a saída do processo não apresentou oscilação sustentada com formato senoidal bem definido, além da amplitude e do período de oscilação não serem constantes ao longo do tempo, o que impossibilitou a utilização do método COF uma vez que o ponto crítico do processo não pôde ser identificado.

Por outro lado, o método GOF foi aplicado com sucesso no projeto dos controladores PID para o processo de controle de nível. No controle de nível do tanque 2, os controladores PI e PID sintonizados através do experimento do RFA com  $-60^\circ$  resultaram em sistemas estáveis em malha fechada com tempo de acomodação e sobrepasso adequados. No controle de nível do tanque 1, os quatro controladores projetados resultaram em sistemas estáveis em malha fechada. Como esperado, os controladores sintonizados através do experimento do RFA com  $-60^\circ$  resultaram em resposta mais rápida e com maior sobrepasso que a resposta obtida com os controladores projetados através do experimento do RFA com  $-120^\circ$ .

Com o método GOF, é possível sintonizar controladores PID através de três diferentes pontos da resposta em frequência do processo: o ponto crítico, e os pontos da resposta em frequência do processo cujas fases são  $-120^\circ$  e  $-60^\circ$ . Por meio da implementação do experimento do RFA, a determinação da classe que o processo pertence pode ser realizada por meio da análise da forma do sinal de saída do processo e a relação entre a amplitude do sinal de saída do processo e de saída do RFA. Por exemplo, no experimento do RFA, se a saída de um dado processo não oscila com amplitude e com período de oscilação bem definidos (como por exemplo nos resultados apresentados na Figura 40(a)), ou se a amplitude do sinal de controle é bastante elevada e a amplitude de oscilação da saída do processo é muito baixa (como por exemplo nos resultados apresentados nas figuras 35(a) e 35(b)), então a fase do RFA pode ser diminuída e a sintonia dos controladores pode ser realizada através de um ponto da resposta em frequência do processo com maior fase. Por outro lado, se uma oscilação sustentada bem definida é observada com mais de uma configuração do RFA, pode-se escolher entre diferentes pontos de sintonia.

### 3.6 Passos para implementação do método GOF: realização do experimento do RFA e sintonia dos controladores PID

1. Implementar o experimento do RFA com  $0^\circ$ , ou seja, inicialmente realizar o tradicional experimento do relé.
2. Alterar o parâmetro  $b$  que regula o *offset* do sinal de saída do relé para a obtenção de uma oscilação simétrica na saída do processo conforme necessário. Da mesma forma, variar o ganho do relé, parâmetro  $d$ , para modificar a amplitude da auto-oscilação.
3. Se o sinal de oscilação da saída do processo for simétrico, possuir amplitude e período de oscilação constantes e bem definidos, a partir desse sinal calcular: a amplitude de pico  $A_\nu$ , o período de oscilação  $T_\nu$  e a frequência de oscilação  $\omega_\nu = 2\pi/T_\nu$ .
4. Caso não seja obtida a condição de auto-oscilação diminuir a fase do elemento de fase constante de  $0^\circ$  para  $-60^\circ$  (ou de  $-60^\circ$  para  $-120^\circ$ ) e voltar para o item 2.

Caso seja obtida a condição de auto-oscilação computar a fase do elemento de fase constante  $\angle F(j\omega_\nu)$ : se  $\angle F(j\omega_\nu) = \gamma$ , onde  $\gamma$  é a fase desejada para o RFA ( $0^\circ$ ,  $-60^\circ$  e  $-120^\circ$ ), passar para o item 5; se  $\angle F(j\omega_\nu) \neq \gamma$  alterar adequadamente a faixa de frequências do elemento de fase constante e voltar para o item 2.

5. Calcular a magnitude do processo na frequência identificada  $\omega_\nu$  por meio de

$$M_\nu = \frac{\pi A_\nu}{4d |F(j\omega_\nu)|},$$

onde  $F(j\omega_\nu)$  é a magnitude do elemento de fase constante nessa frequência.

6. Sintonizar os parâmetros dos controladores PID, cujas funções de transferência são

$$C_p(s) = K_p, \quad C_{pi}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad C_{pid}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_s \frac{s}{N s + 1} \right),$$

através das fórmulas de sintonia apresentadas na Tabela 4 utilizando os parâmetros  $T_\nu$  e  $M_\nu$ .

### 3.7 Conclusões do capítulo

Neste capítulo foi proposto o método GOF, primeira contribuição deste trabalho, que inclui o experimento do RFA e os conjuntos de fórmulas de sintonia desenvolvidos para os controladores P, PI e PID. Este método generaliza e unifica os dois métodos de Ziegler-Nichols, da curva de reação e da oscilação forçada, além de englobar uma classe maior de processos à qual esses métodos clássicos não são aplicáveis. O experimento do RFA permite a identificação de um ponto específico da resposta em frequência de processos que possuem ponto crítico e de processos que não o possuem, sendo assim um elemento importante na metodologia proposta. As fórmulas de sintonia foram desenvolvidas em função deste ponto identificado e de um ponto de sintonia escolhido visando a obtenção de adequadas margens de estabilidade e bom desempenho em malha fechada.

Três processos de estudo de caso e oito famílias de processos da bateria de testes, cujos resultados estão apresentados nos apêndices B e C, foram utilizados para examinar detalhadamente os conceitos teóricos por trás do método GOF. Em seguida, o procedimento experimental envolvido na aplicação prática do método proposto foi avaliado em um processo real de controle de nível. Em geral, o desempenho em malha fechada é similar ao que é obtido com os tradicionais métodos de Ziegler-Nichols. Além disto, o método GOF é aplicável a processos *LTIC* genéricos, independentemente da existência de uma frequência crítica, de ordem ou de grau relativo, incluindo assim processos nos quais não pode-se aplicar nem os tradicionais métodos de Ziegler-Nichols nem o método EOF.

Os resultados apresentados neste capítulo foram previamente publicados em LORENZINI; BAZANELLA; PEREIRA (2018) e em LORENZINI *et al.* (2019). Também foi realizada a solicitação de patente do dispositivo Relé de Fase Ajustável junto ao INPI — Instituto Nacional da Propriedade Industrial.

O método GOF, tal como os métodos COF e EOF, foi desenvolvido com base no conhecimento e posicionamento de um ponto específico da resposta em frequência do processo em uma localização predeterminada no plano complexo utilizando a função de malha aberta do sistema. Nos próximos capítulos essa abordagem será empregada no projeto dos controladores proporcional-ressonante e proporcional-múltiplos-ressonantes tendo em vista o seguimento e rejeição de sinais senoidais e periódicos genéricos.

## 4 MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA PARA SINTONIA DO CONTROLADOR PROPORCIONAL-RESONANTE

Este capítulo aborda o problema do seguimento e da rejeição de sinais senoidais através do método GOF para a sintonia do controlador proporcional-ressonante (PR). Inicialmente será desenvolvido um conjunto de fórmulas de sintonia do controlador PR, o qual será dependente do conhecimento de um ponto da resposta em frequência do processo, de uma localização no plano complexo para onde esse ponto será deslocado com o controlador, da frequência do sinal de interesse e do coeficiente de amortecimento dos polos do controlador. Então, esse conjunto de fórmulas será particularizado visando a aplicação do controlador PR a cada uma das três classes de processos consideradas no experimento do RFA. Em seguida, exemplos numéricos serão utilizados para avaliar detalhadamente o método proposto em três processos de estudo de caso. Ao fim, será apresentado um exemplo prático de aplicação do método GOF para a sintonia da estrutura de controle do estágio de saída de uma fonte ininterrupta de energia.

### 4.1 Motivação

Na Seção 2.2.2.4 verificou-se que, segundo o PMI, para o seguimento com erro nulo em regime permanente e a rejeição assintótica de um sinal senoidal com frequência  $\omega_r$ , o sistema em malha fechada deve ser estável e o controlador deve conter um par de polos em  $\pm j\omega_r$ . Utilizando essa estrutura de controle que possui um pico de ressonância com magnitude infinita na frequência  $\omega_r$  em um sistema estável em malha fechada com um processo sem zeros em  $\pm j\omega_r$ , o sinal de referência é replicado na saída do processo em regime permanente, enquanto a perturbação é rejeitada assintoticamente. Em algumas aplicações, os polos do controlador ressonante são deslocados sobre a semicircunferência de raio  $\omega_r$  no SPE utilizando um fator de amortecimento. Tal característica faz com que a magnitude na frequência  $\omega_r$  seja finita e pode, por exemplo, melhorar a robustez e facilitar a sintonia do sistema de controle, além de evitar problemas de saturação do sinal de controle, ao custo da admissão de um erro de seguimento do sinal de referência e rejeição parcial do sinal de perturbação (TEODORESCU *et al.*, 2006).

A estrutura do controlador ressonante é largamente utilizada em aplicações envolvendo conversores CC-CA, como por exemplo em *UPSs*, filtros ativos, sistemas de geração distribuída, conforme apresentado em FUKUDA; YODA (2001), FUKUDA; IMA-MURA (2005), TEODORESCU *et al.* (2006), PARK *et al.* (2008), CHA; VU; KIM (2009), BARROS; SILVA (2010), YEPES *et al.* (2011), PEREIRA *et al.* (2014), LI *et al.* (2015), AAMIR; MEKHILEF (2017), RODRIGUEZ-DIAZ *et al.* (2019), SEIFI; MOAL-



LEM (2019), HONG *et al.* (2019). Pode-se ainda citar aplicações envolvendo controle de vibração em estruturas flexíveis (HALIM; MOHEIMANI, 2001), (PEREIRA *et al.*, 2011), em sistemas de posicionamento de alta precisão (APHALE; BHIKKAJI; MOHEIMANI, 2008), (DAS; POTA; PETERSEN, 2014), (HABIBULLAH; POTA; PETERSEN, 2017) e em uma suspensão ativa de trem de alta velocidade (ZHU *et al.*, 2018). Os controladores ressonantes também são utilizados na redução das oscilações de torque em motores síncronos de ímãs permanentes acionados por inversores (GAO *et al.*, 2017), na redução das correntes de quinta e de sétima harmônicas do estator em um motor síncrono de ímãs permanentes de seis fases (YUAN *et al.*, 2015), e em motores de indução de cinco fases operando em condições de falta (GUZMAN *et al.*, 2016), (KONG *et al.*, 2018).

Nestas referências, pode-se verificar que os parâmetros dos controladores ressonantes são sintonizados por tentativa e erro ou através do conhecimento do modelo do processo em conjunto com a utilização de métodos específicos de projeto de sistemas de controle, enquanto a sintonia dos controladores PID é facilitada pela existência de métodos que não necessitam do modelo do processo e que utilizam conjuntos de regras simples baseadas em dados experimentais, tais como nos métodos de Ziegler-Nichols.

Visando contribuir com a aplicação dos controladores ressonantes, em PEREIRA; BAZANELLA (2015) é proposto o projeto de uma estrutura ressonante aplicada a processos que possuem ponto crítico através de um conjunto de regras semelhantes às utilizadas para a sintonia de controladores PID no método COF. A metodologia apresentada inclui a identificação do ponto crítico do processo utilizando o experimento do relé e a sintonia do controlador por meio de um conjunto de fórmulas desenvolvidas a partir da solução de (55) considerando a função de transferência da estrutura ressonante dada por:

$$C_r(s) = k_r \frac{s}{s^2 + \omega_r^2} + k_p \frac{s^2}{s^2 + \omega_r^2},$$

onde  $\omega_r$  é a frequência dos sinais senoidais a serem seguidos e/ou rejeitados, enquanto  $k_p$  e  $k_r$  são parâmetros do controlador a serem determinados. Assim, identificando o ponto crítico do processo por meio do experimento do relé e resolvendo um conjunto de fórmulas previamente desenvolvidas, dadas em função do ponto identificado da resposta em frequência do processo e da frequência de ressonância  $\omega_r$ , é possível realizar a sintonia dessa estrutura ressonante de maneira semelhante e com a mesma simplicidade dos controladores PID no método COF.

Neste capítulo será apresentado o desenvolvimento do método GOF para a sintonia do controlador PR, que é a segunda contribuição desta tese. Seguindo a abordagem teórica do método GOF para a sintonia de controladores PID apresentada no capítulo anterior —na qual os processos *LTIC* foram divididos em três classes e o ponto identificado da resposta em frequência do processo é deslocado considerando a função de malha aberta do sistema com a configuração processo-controlador— conjuntos de fórmulas de sintonia para o controlador PR serão desenvolvidos visando a obtenção de adequadas margens de estabilidade e bom desempenho em malha fechada para cada uma dessas três classes de processos. Assim, a sintonia do controlador PR poderá ser realizada através da solução de um conjunto de fórmulas simples, dependentes de um ponto da resposta em frequência do processo —identificado através do experimento do RFA—, da frequência do sinal de interesse e do fator de amortecimento dos polos do controlador, que são parâmetros definidos pelo problema/projetista. Com isso, no método GOF para a sintonia do controlador PR, será mantida a mesma simplicidade e filosofia de projeto dos métodos de Ziegler-Nichols.

## 4.2 Método generalizado da oscilação forçada

Nesta seção será realizado o desenvolvimento das fórmulas de sintonia do controlador PR. Inicialmente será obtido um conjunto genérico de fórmulas para a sintonia dos parâmetros desse controlador em função de um ponto identificado da resposta em frequência do processo, da frequência do sinal de referência e/ou perturbação, do coeficiente de amortecimento dos polos e de uma localização no plano complexo —ponto de sintonia— para onde o ponto identificado será deslocado através da função de malha aberta com o controlador. Então, para cada uma das três classes de processos consideradas no experimento do RFA, esse conjunto de fórmulas será particularizado utilizando o ponto identificado da resposta em frequência do processo e um ponto de sintonia, definido para a obtenção de adequadas margens de estabilidade e bom desempenho em malha fechada.

Conforme abordado na Seção 3.2 e aqui retomado por conveniência, o método GOF baseia-se na identificação do ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase cruza um valor previamente especificado  $\nu$ ,

$$G(j\omega_\nu) = M_\nu \angle \nu = M_\nu e^{j\nu},$$

ou seja, na determinação da frequência  $\omega_\nu$  e da magnitude  $M_\nu$ , definidas por

$$\omega_\nu = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = \nu \text{ e } M_\nu = |G(j\omega_\nu)|.$$

Em seguida, esse ponto identificado é deslocado no plano complexo através da resposta em frequência da função de malha aberta utilizando o controlador, tal que

$$C(j\omega_\nu)G(j\omega_\nu) = p = M_\rho e^{j\rho},$$

onde  $p$  é uma localização predeterminada no plano complexo, ou seja, o controlador é projetado por meio da equação geral de sintonia do método GOF, a qual é dada por:

$$C(j\omega_\nu) = \frac{M_\rho}{M_\nu} (\cos(\rho - \nu) + j \operatorname{sen}(\rho - \nu)). \quad (107)$$

A seguir, de forma semelhante à realizada para os controladores PID na Seção 3.2, serão obtidas fórmulas de sintonia do controlador PR através da solução de (107).

### 4.2.1 Controlador proporcional-ressonante

O controlador PR considerado neste trabalho foi apresentado na Seção 2.2.2.4 e tem a seguinte função de transferência

$$C_{pr}(s) = K_p + \frac{K_{r_1}s + K_{r_2}}{s^2 + 2\xi\omega_r s + \omega_r^2}, \quad (108)$$

onde  $\omega_r$  é a frequência do sinal senoidal de interesse,  $\xi \geq 0$  é o coeficiente de amortecimento dos polos, enquanto  $K_p$ ,  $K_{r_1}$  e  $K_{r_2} \in \mathbb{R}$  são parâmetros a serem determinados.

Como visto na análise do PMI, um sistema estável em malha fechada segue/rejeita um dado sinal senoidal com frequência  $\omega_r$  se o controlador possuir um par de polos em  $\pm j\omega_r$  e o processo a ser controlado não possuir zeros em  $\pm j\omega_r$ . Esta característica é obtida com o controlador PR apresentado em (108) com  $\xi = 0$ . Apesar disto, em diversas aplicações, valores positivos de  $\xi$  são utilizados com a finalidade de deslocar os polos do eixo imaginário para o SPE do plano  $s$ , o que melhora a robustez e facilita a etapa de

sintonia, ao custo da redução da magnitude do controlador em  $\omega_r$ , resultando, desta forma, na perda do seguimento (da rejeição) com erro nulo em regime permanente. Assim, o método GOF para a sintonia do controlador PR será desenvolvido para o caso genérico, ou seja,  $\xi \geq 0$ . Visando manter a simplicidade dos métodos de Ziegler-Nichols e evitar problemas na garantia da estabilidade do sistema em malha fechada, os conjuntos de fórmulas de sintonia serão restritos para o caso  $\omega_r < \omega_\nu$ .

#### 4.2.2 Definição de $\nu$ e $p$

Para dar continuidade ao desenvolvimento das fórmulas de sintonia do controlador PR, deve-se escolher qual ponto da resposta em frequência do processo será identificado, o que corresponde a definir qual valor de  $\nu$  será utilizado. Essa definição foi realizada na Seção 3.2.1 para os controladores PID —onde os processos *LTIC* foram divididos nas classes A, B e C— e será mantida neste capítulo para o desenvolvimento das fórmulas de sintonia do controlador PR. Deste modo, resta especificar para qual localização no plano complexo o ponto identificado da resposta em frequência do processo será deslocado, o que corresponde a definir o valor de  $p$ , ou seja, é através da escolha de  $p$  que é definida a margem de estabilidade a ser atendida com cada classe de processos considerando a topologia do controlador PR.

O deslocamento do ponto identificado da resposta em frequência do processo depende diretamente da resposta em frequência do controlador. Assim, é fundamental a análise da característica frequencial e, principalmente, da contribuição de fase do controlador PR na frequência identificada, lembrando que será considerando apenas o caso  $\omega_r < \omega_\nu$ .

Assumindo  $K_p > 0$  e que os zeros do controlador PR estão localizados no SPE do plano  $s$ , constata-se que a fase dessa estrutura de controle está dentro do intervalo

$$-\pi \leq \angle C_{pr}(j\omega) \leq \pi \quad \forall \omega.$$

Na análise da contribuição de fase do controlador PR em  $\omega_\nu$  é necessário limitar suas características visando a obtenção de adequadas margens de estabilidade. Para isso, define-se que o produto dos zeros do controlador PR é  $\eta^2 \omega_r^2$  —onde  $0 < \eta < 1$  é um parâmetro a ser determinado na sequência—, restrição a qual resulta em ao menos um zero com módulo menor que  $\omega_r$ , quando estes forem reais, e em zeros do controlador com módulo igual a  $\eta \omega_r$ , quando estes forem complexos conjugados. A influência do parâmetro  $\eta$  sobre as margens de estabilidade e sobre o desempenho em malha fechada será avaliada na sequência. Também assume-se  $\xi = 0$ , que em relação ao comportamento frequencial de uma estrutura de controle com modos ressonantes é o caso mais restritivo para o coeficiente de amortecimento dos polos, conforme pode ser verificado na Figura 3, na qual observa-se que a fase do controlador PR nesta situação varia abruptamente de  $0^\circ$  para  $-180^\circ$  na frequência  $\omega_r$ . Com estas suposições verifica-se que a contribuição de fase do controlador PR na frequência identificada deve pertencer ao intervalo

$$-\pi/2 < \angle C_{pr}(j\omega_\nu) < 0. \quad (109)$$

Assim, conclui-se que, com o controlador PR, da mesma forma que o controlador PI, pode-se deslocar o ponto identificado da resposta em frequência do processo tanto em magnitude quanto em fase, mas sua contribuição de fase na frequência identificada deve ser negativa e maior que  $-\pi/2$ , ou seja, o controlador PR insere em  $\omega_\nu$  um atraso de fase entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Com o intuito de prosseguir com o desenvolvimento do método GOF, controladores PR foram projetados para uma grande variedade de processos *LTIC* pertencentes às classes A, B e C —nesta etapa foram utilizadas as dezoito famílias de processos cujas funções de transferência estão definidas no Apêndice A.2. Foram considerados controladores PRs com  $\xi = 0$  —o qual corresponde ao caso limite em que esta estrutura possui um pico de ressonância com magnitude infinita e variação de fase de  $0^\circ$  para  $-180^\circ$  em  $\omega_r$ —, que resulta em seguimento com erro nulo de um sinal de referência senoidal com frequência  $\omega_r$  e, ao mesmo tempo, impõe a maior dificuldade na etapa de sintonia.

Para cada uma dessas três classes de processos, foram testados diversos valores da localização  $p$  que atendem à restrição em (109) e diversos valores da restrição nos zeros do controlador no intervalo  $0 < \eta < 1$ , os quais resultam em diferentes margens de estabilidade e desempenhos em malha fechada. Primeiramente, analisou-se a resposta em frequência da função de malha aberta com a configuração processo-controlador. Então, avaliou-se a resposta do sistema em malha fechada —em termos do máximo sobrepasso ( $M_o$ ) e do número de ciclos para acomodação ( $n_s$ )— para um sinal senoidal com amplitude unitária e frequência  $0 < \omega_r \leq 0,9\omega_\nu$ . Os resultados finais destes testes estão resumidos no Apêndice D. Na sequência, são apresentados os valores propostos de  $\nu$ ,  $p$  e  $\eta$  para cada uma das três classes de processos anteriormente definidas.

Para um processo da Classe A, o ponto crítico da resposta em frequência do processo é identificado, isto é,

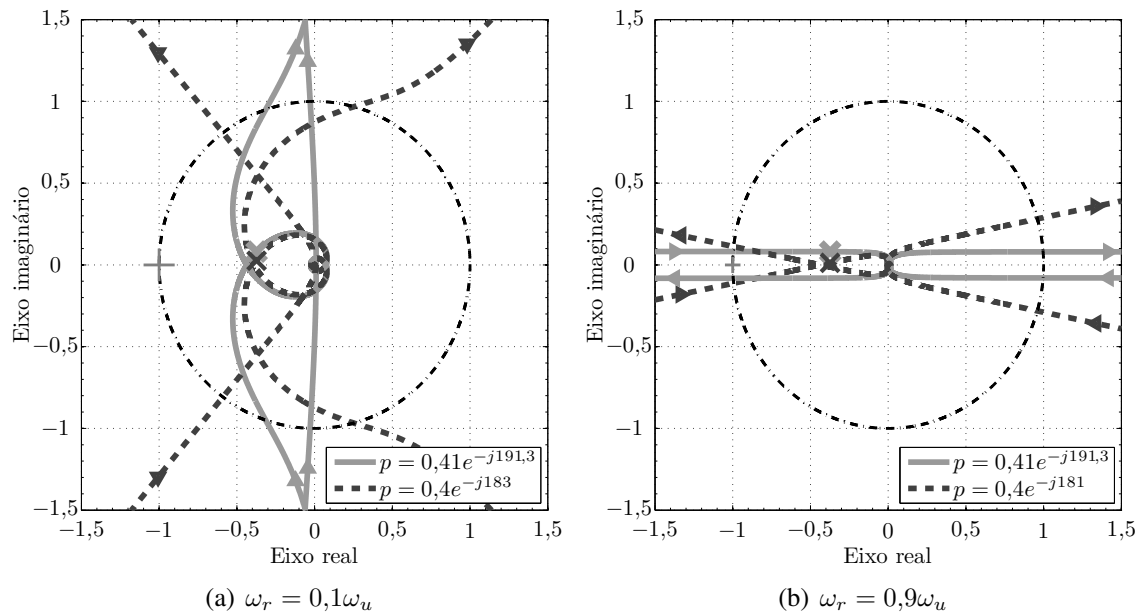
$$\begin{aligned} \nu &= -180^\circ, \omega_\nu = \omega_u = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = -180^\circ, \\ M_\nu &= M_u = |G(j\omega_u)| = 1/K_u. \end{aligned} \quad (110)$$

Em relação à definição da localização para a qual o ponto crítico do processo é deslocado, partiu-se do clássico ponto de sintonia do controlador PI proposto no método COF, no qual  $p = -0,4 + j0,08 = 0,41e^{-j191,3^\circ}$  resulta em um controlador com  $11,3^\circ$  de atraso de fase na frequência crítica do processo. O módulo de  $p$  foi mantido em  $M_p = 0,4$  (para obtenção de margem de ganho entre 2 e 2,5) enquanto a sua fase, parâmetro  $\rho$ , foi variada entre  $-191,3^\circ$  e  $-181^\circ$ , ou seja, foram avaliados controladores PRs com atraso de fase em  $\omega_u$  entre  $11,3^\circ$  e  $1^\circ$ . Menores valores de atraso de fase do controlador na frequência identificada do processo não foram considerados pois implicam em parâmetros de sintonia muito próximos de zero e que, por este motivo, podem causar problemas de precisão numérica na implementação dos controladores.

Nos testes realizados, observou-se que uma pequena variação no valor do atraso de fase do controlador PR em  $\omega_u$  altera significativamente tanto as margens de estabilidade quanto a resposta do sistema. Quando analisados controladores sintonizados com frequências de ressonância no intervalo  $0 < \omega_r \leq 0,9\omega_u$  e com atrasos de fase em  $\omega_u$  maiores que  $4^\circ$ , foram constatados sistemas instáveis em malha fechada para ao menos um dos processos da bateria de testes. Por outro lado, controladores PRs sintonizados com  $p = 0,4e^{-j183^\circ}$ , ou seja, com um menor atraso de fase em  $\omega_u$ , resultaram em sistemas estáveis em malha fechada para todos os processos da bateria de testes quando  $0 < \omega_r < 0,5\omega_u$ , enquanto o mesmo acontece com os controladores PRs sintonizados através de  $p = 0,4e^{-j181^\circ}$  quando  $0,5\omega_u \leq \omega_r < 0,9\omega_u$ .

Na Figura 46 são apresentados os diagramas de Nyquist da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_a(s)$ , considerando o processo  $G_a(s) = e^{-s}/(s+1)^2$  e o controlador PR com frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $\omega_r = 0,9\omega_u$ . A sintonia dos controladores PRs foi realizada com os valores de  $p$  mencionados anteriormente ( $p = 0,4e^{-j183^\circ}$  quando  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $p = 0,4e^{-j181^\circ}$  quando  $\omega_r = 0,9\omega_u$ ), com  $\eta = 0,1$

Figura 46 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_a(s)$ , considerando diferentes valores de  $p$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

e com  $\xi = 0$ . Para comparação, também foi analisada a sintonia de controladores PRs através de  $p = 0,41e^{-j191,3^\circ}$ .

Os diagramas de Nyquist de  $C_{pr}(s)G_a(s)$  com  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e com ambos valores de  $p$  não envolvem o ponto  $-1 + j0$ , isto é, estes sistemas são estáveis em malha fechada. Além disto, a distância entre o traçado desses diagramas de Nyquist e o ponto  $-1 + j0$  resulta em adequadas margens de estabilidade.

Por outro lado, o diagrama de Nyquist de  $C_{pr}(s)G_a(s)$  com o controlador PR sintonizado em  $\omega_r = 0,9\omega_u$  através de  $p = 0,41e^{-j191,3^\circ}$  envolve duas vezes o ponto  $-1 + j0$ , o que resulta na instabilidade do sistema em malha fechada —para frequências positivas, a parte do contorno de Nyquist que tende ao infinito vai do primeiro para o segundo quadrante passando pelo quarto e terceiro quadrantes. Para essa mesma frequência de ressonância, o diagrama de Nyquist de  $C_{pr}(s)G_a(s)$  com o controlador PR obtido através de  $p = 0,4e^{-j181^\circ}$  não envolve o ponto  $-1 + j0$ , ou seja, é obtida a estabilidade do sistema em malha fechada quando o atraso de fase do controlador PR em  $\omega_u$  é diminuído para  $1^\circ$ . No entanto, ainda assim verifica-se que a distância entre o traçado deste diagrama de Nyquist e o ponto  $-1 + j0$  acarreta em margem de fase reduzida. Destaca-se que essa é uma limitação imposta pela estrutura do controlador PR e não pelo ponto  $p$  escolhido, essa questão será melhor abordada na sequência.

Assim, propõe-se os seguintes valores de  $p$  para a sintonia de controladores PRs aplicados aos processos da Classe A:

$$p = 0,4 (\cos(-183^\circ) + j \operatorname{sen}(-183^\circ)), \quad (111)$$

quando  $0 < \omega_r/\omega_u < 0,5$  e

$$p = 0,4 (\cos(-181^\circ) + j \operatorname{sen}(-181^\circ)) \quad (112)$$

quando  $0,5 \leq \omega_r/\omega_u < 1$ .

Resta ainda definir o valor de  $\eta$ , parâmetro que impõe uma restrição sobre os zeros do controlador PR. Inicialmente será considerada a influência de  $\eta$  sobre as margens de estabilidade.

Nas figuras 47 e 48 são apresentadas, respectivamente, a resposta em frequência e o diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta  $G_a(s)C_{pr}(s)$  com o controlador PR possuindo frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $\omega_r = 0,9\omega_u$ . Os controladores PRs são sintonizados através dos valores de  $p$  propostos em (111) e (112) com  $\xi = 0$ , além disto, considera-se duas restrições sobre seus zeros:  $\eta = 0,1$  e  $\eta = 0,9$ .

Através destas figuras, nota-se que a alteração de  $\eta$  modifica significativamente a resposta em frequência de  $G_a(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  quando  $\omega < \omega_r$ , enquanto a porção da resposta em frequência de  $G_a(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  quando  $\omega > \omega_r$  está (praticamente) sobreposta para os valores de  $\eta$  analisados.

Para  $\omega_r = 0,1\omega_u$ , a margem de ganho é aproximadamente igual a 2,6 com ambos valores de  $\eta$ , por outro lado, as margens de fase são iguais a  $54^\circ$ , quando  $\eta = 0,1$ , e  $113^\circ$ , quando  $\eta = 0,9$ . Para  $\omega_r = 0,9\omega_u$ , as margens de ganho e de fase são respectivamente iguais a 2,3 e  $6,4^\circ$ , quando  $\eta = 0,1$ , ao passo que com  $\eta = 0,9$  são obtidas 2,4 e  $7,5^\circ$ .

Por meio destes resultados, descarta-se a definição de  $\eta$  considerando como critério as margens de estabilidade. Para  $\omega_r = 0,1\omega_u$ , a não suavidade de  $G_a(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  —devida ao pico de ressonância e à variação abrupta de fase do controlador em  $\omega_r$ — implica em margens de fase distintas e obtidas em porções diferentes do espectro de frequências — com  $\eta = 0,1$  a margem de fase é verificada em  $\omega < \omega_r$ , enquanto com  $\eta = 0,9$  é verificada em  $\omega > \omega_r$ . Este fato prejudica, em parte, a sintonia do controlador visando o deslocamento do ponto identificado da resposta em frequência do processo. Por outro lado, para  $\omega_r = 0,9\omega_u$ , as margens de estabilidade são obtidas em  $\omega > \omega_r$ , mas não são significativamente modificadas com a alteração de  $\eta$ .

Assim, optou-se pela definição de  $\eta$  através da análise da influência deste parâmetro sobre os índices de desempenho da resposta temporal do sistema em malha fechada. Nesta etapa, foram considerados controladores PRs sintonizados com  $0,1 \leq \eta < 1$  e foram observados os valores de  $M_o$  e de  $n_s$  considerando um sinal de referência senoidal.

Nestes testes observou-se uma alta influência de  $\eta$  sobre os índices de desempenho do sistema em malha fechada. Para valores de  $\omega_r$  muito menores que  $\omega_u$ , a variação de  $\eta$  não resulta em um padrão bem definido sobre  $M_o$  e  $n_s$ , isto é, para alguns processos o aumento de  $\eta$  resulta na diminuição de  $M_o$  e de  $n_s$ , enquanto para outros processos o aumento de  $\eta$  acarreta no aumento destes parâmetros. Por outro lado, para valores de  $\omega_r$  mais próximos de  $\omega_u$ , além de ser o caso de mais difícil sintonia, verifica-se um padrão bem definido: o aumento de  $\eta$  resulta no aumento de  $M_o$  e de  $n_s$ .

Desta maneira, considerando o pior caso, propõe-se a sintonia dos controladores PRs aplicados aos processos da Classe A com

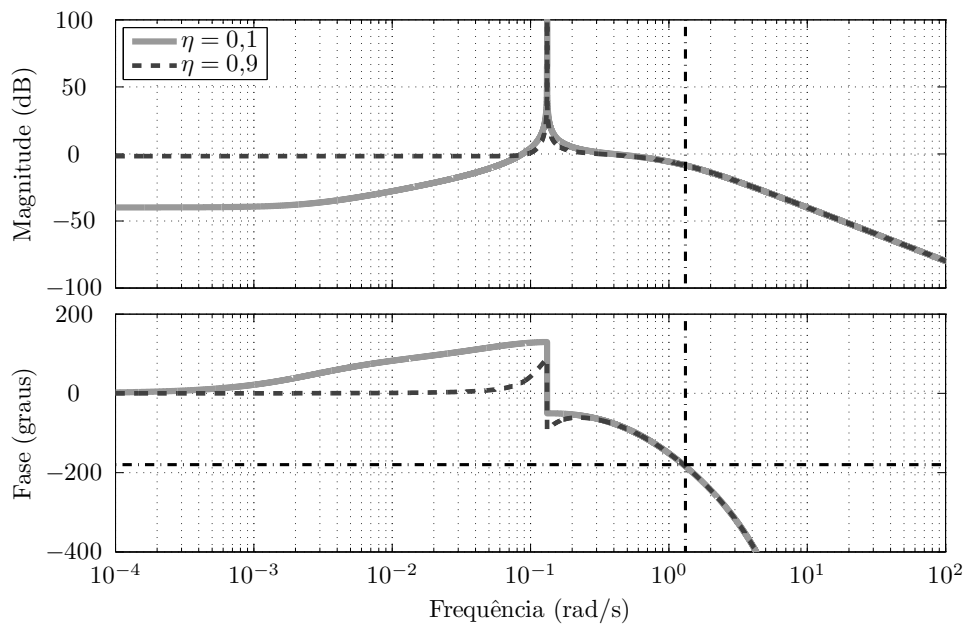
$$\eta = 0,1, \quad (113)$$

o qual acarreta em zeros (quando estes são complexos) em uma década menor que os polos do controlador.

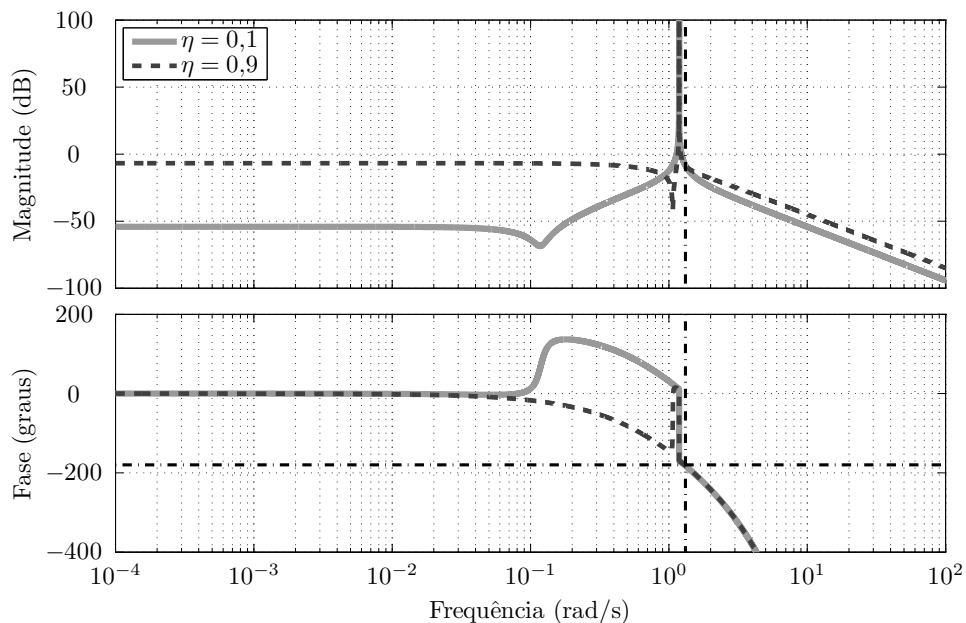
Avalia-se agora a sintonia do controlador PR aplicado aos processos da Classe B, para os quais definiu-se identificar o ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase cruza a linha de  $\nu = -120^\circ$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \nu = -120^\circ, \omega_\nu = \omega_{120} = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = -120^\circ, \\ M_\nu = M_{120} = |G(j\omega_{120})|. \end{aligned} \quad (114)$$

Figura 47 – Resposta em frequência da função de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$ , para análise do parâmetro  $\eta$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



(a)  $\omega_r = 0,1\omega_u$



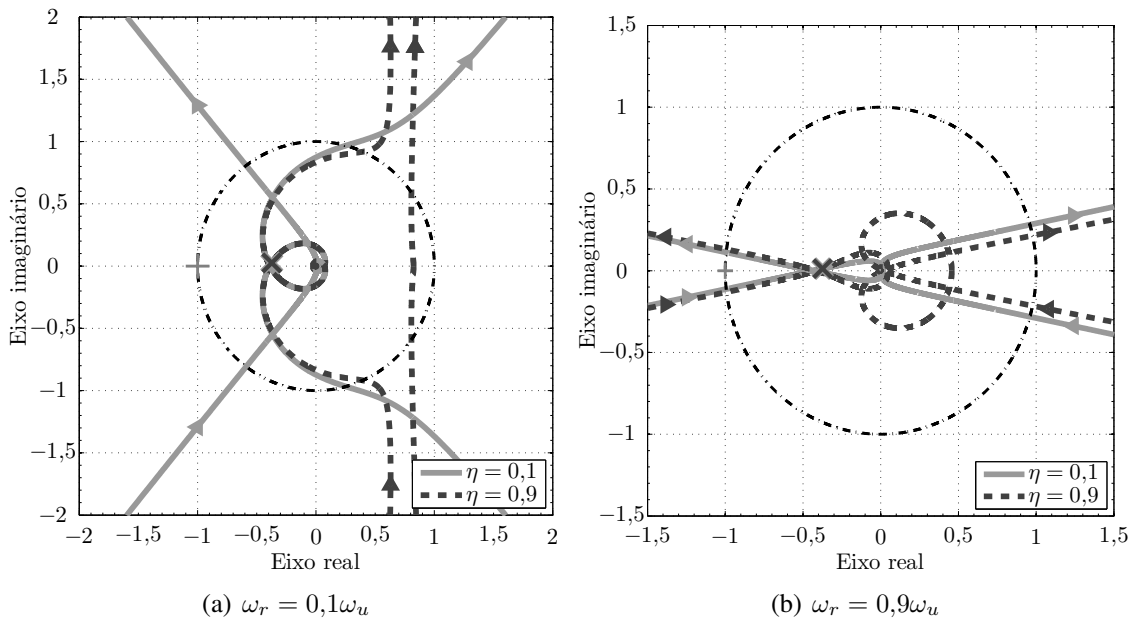
(b)  $\omega_r = 0,9\omega_u$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na sintonia do controlador PI apresentada na Seção 3.2.1, foi estabelecida a localização  $p$  que resulta na obtenção de  $50^\circ$  de margem de fase —em situações práticas típicas, margens de fase em torno de  $45^\circ$  resultam em robustez e desempenho dinâmico adequados (WOLOVICH, 1993)—, o que corresponde a  $p = 1\angle -130^\circ$ . Esta mesma escolha foi testada com sucesso no projeto do controlador PR aplicado aos processos da Classe B.

Na análise realizada com todos os processos da bateria de testes que estão nessa classe,

Figura 48 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_a(s)$ , para análise do parâmetro  $\eta$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

foram obtidos sistemas estáveis em malha fechada com o controlador PR sintonizado através deste valor de  $p$  para frequências de ressonância no intervalo  $0 < \omega_r < 0,9\omega_{120}$ . Assim, para a sintonia do controlador PR visando um processo da Classe B, propõe-se

$$p = 1\angle -130^\circ = \cos(-130^\circ) + j \operatorname{sen}(-130^\circ). \quad (115)$$

Com esta definição, contanto que a magnitude da função de transferência de malha aberta decresça monotonicamente para frequências maiores que  $\omega_{120}$ , a margem de fase será de  $50^\circ$ .

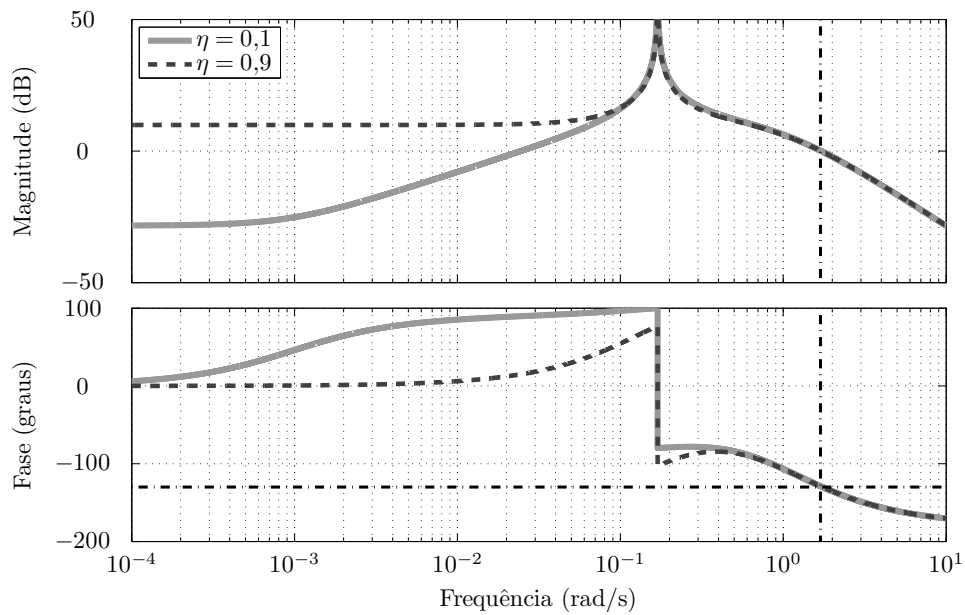
A definição de  $\eta$  é realizada seguindo o mesmo procedimento adotado para a Classe A de processos. Na Figura 49 está representada a resposta em frequência da função de malha aberta  $G_b(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  com o processo  $G_b(j\omega) = 1/(j\omega + 1)^2$  e com o controlador PR possuindo  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$ , enquanto na Figura 50 é ilustrado o seu diagrama de Nyquist. Para ambas frequências de ressonância, o controlador PR é sintonizado através do valor de  $p$  apresentado em (115) e com  $\xi = 0$ , a análise da restrição sobre os seus zeros é realizada com  $\eta = 0,1$  e  $\eta = 0,9$ .

O parâmetro  $\eta$  modifica substancialmente a resposta em frequência de  $G_b(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  para  $\omega < \omega_r$ , ao passo que a parcela da resposta em frequência de  $G_b(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  para  $\omega > \omega_r$  está muito próxima com os valores de  $\eta$  considerados, como observado anteriormente para a Classe A. Apesar disto, verifica-se que os quatro controladores resultaram em  $50^\circ$  de margem de fase, conforme definido através do valor de  $p$  proposto em (115). Por este motivo, não é possível realizar a escolha de  $\eta$  utilizando o critério das margens de estabilidade.

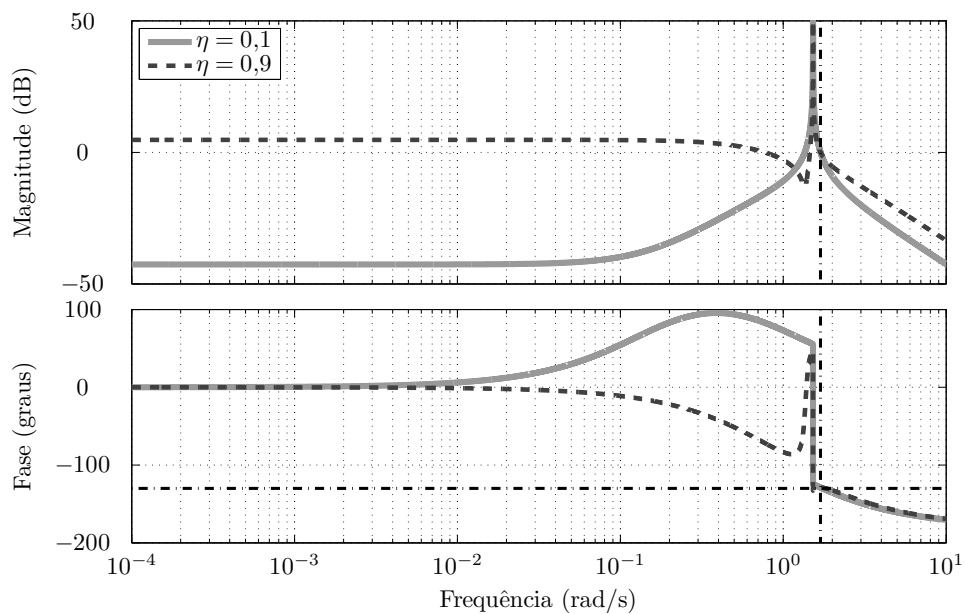
Então, a definição de  $\eta$  para o controlador PR aplicado aos processos da Classe B também foi efetuada através da avaliação da resposta temporal do sistema em malha fechada. A análise realizada com os processos da bateria de testes e considerando  $0,1 \leq \eta < 1$  mostrou que, para valores de  $\omega_r$  muito menores que  $\omega_{120}$ , o aumento de  $\eta$  acarreta na di-



Figura 49 – Resposta em frequência da função de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_b(j\omega)$ , para análise do parâmetro  $\eta$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 1,69$  rad/s e na fase  $-130^\circ$ .



(a)  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$



(b)  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$

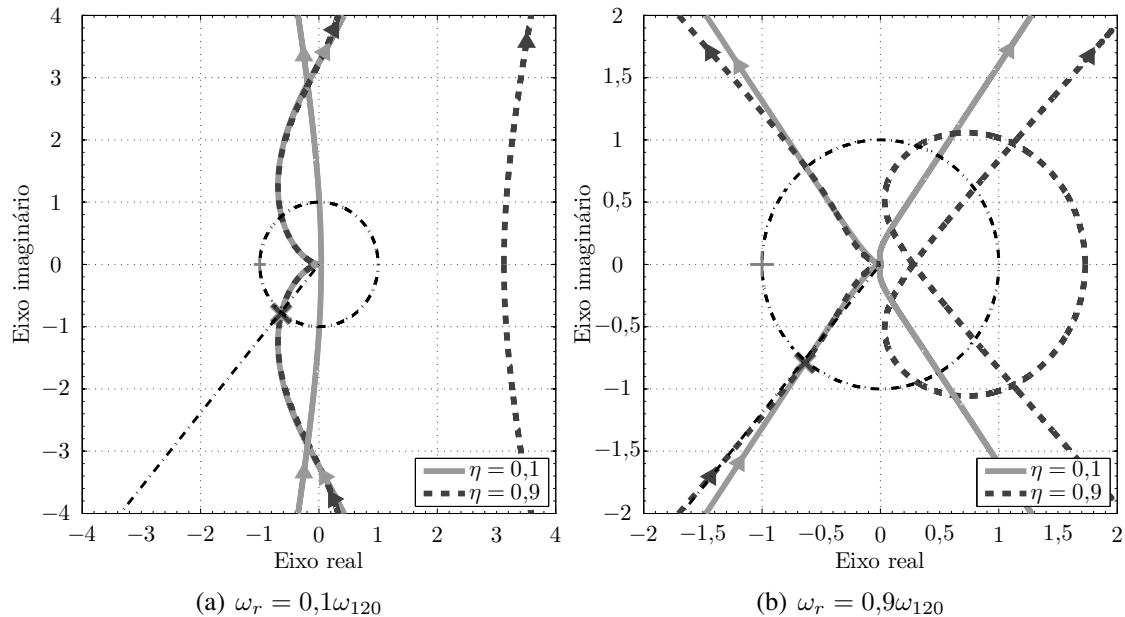
Fonte: Elaborado pelo autor.

minuição de  $M_o$  e  $n_s$ . No entanto, para valores de  $\omega_r$  próximos de  $\omega_{120}$ , verificou-se que o aumento de  $\eta$  resulta na redução de  $M_o$  e no aumento de  $n_s$ .

Desta forma, buscando atender um compromisso entre estes dois índices de desempenho para toda a faixa de  $\omega_r$  considerada, a sintonia dos controladores PRs aplicados aos processos da Classe B é realizada com

$$\eta = 0,7. \quad (116)$$

Figura 50 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_b(s)$ , para análise do parâmetro  $\eta$ . As linhas traço e ponto pretas destacam a circunferência de raio unitário e a reta com fase  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalmente, são analisados os processos da Classe C, para os quais determinou-se identificar o ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase cruza a linha de  $\nu = -60^\circ$ , no qual

$$\nu = -60^\circ, \omega_\nu = \omega_{60} = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = -60^\circ, \quad (117)$$

$$M_\nu = M_{60} = |G(j\omega_{60})|.$$

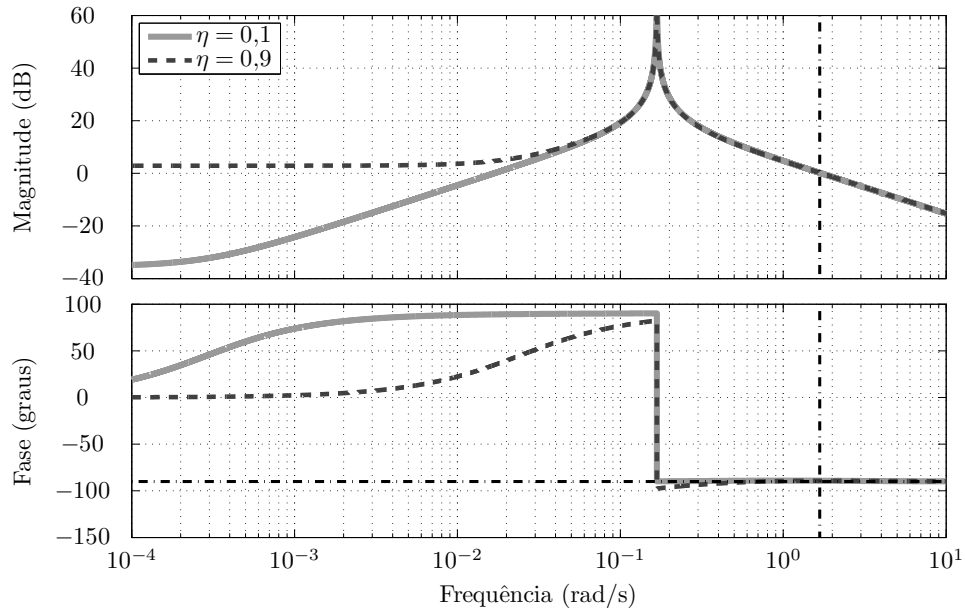
Para a sintonia do controlador PR aplicado aos processos da Classe C, optou-se pela localização  $p$  que resulta em  $90^\circ$  de margem de fase e que foi utilizada para a sintonia do controlador PI apresentada na Seção 3.2.1. Nos testes efetuados com os processos da Classe C e com controladores PRs possuindo frequências de ressonância no intervalo  $0 < \omega_r < 0,9\omega_{60}$ , foram obtidos sistemas estáveis em malha fechada quando considerada essa margem de fase. Desta forma, a sintonia do controlador PR para um processo da Classe C é realizada com

$$p = 1 \angle -90^\circ = \cos(-90^\circ) + j \operatorname{sen}(-90^\circ), \quad (118)$$

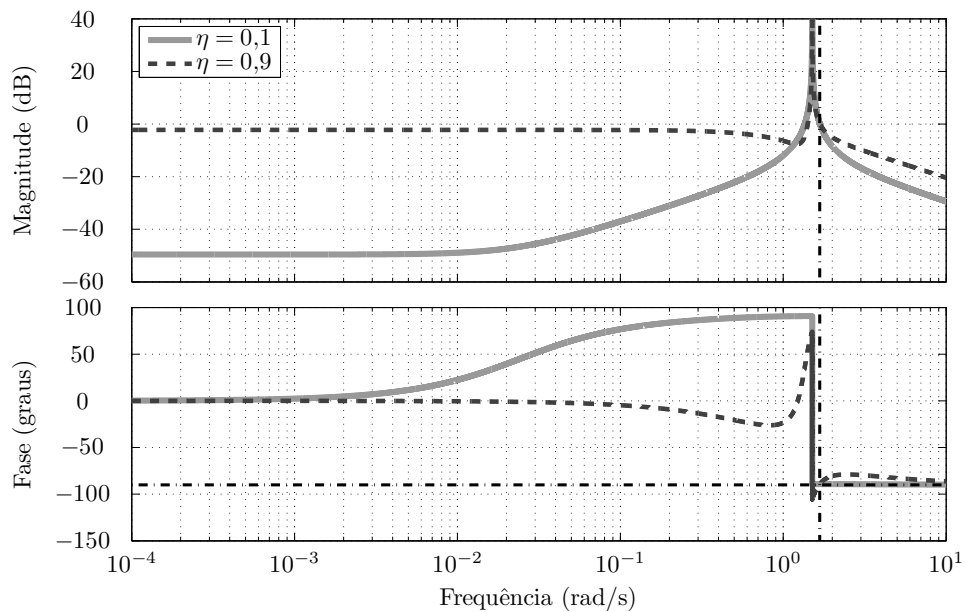
a qual resulta em margem de fase de  $90^\circ$ , assumindo o decréscimo monotônico da magnitude da função de transferência de malha aberta para frequências maiores que  $\omega_{60}$ .

O parâmetro  $\eta$  será definido por meio da mesma estratégia empregada nas classes A e B de processos. Nas figuras 51 e 52 estão representadas, respectivamente, a resposta em frequência da função de malha aberta  $G_c(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  e o seu diagrama de Nyquist para o processo  $G_c(j\omega) = 1/(j\omega + 1)$ . Considerando  $\xi = 0$ , os controladores PRs são sintonizados através do valor de  $p$  proposto em (118) com frequência de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_{60}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{60}$ . Mais uma vez, a análise da restrição sobre os zeros do controlador PR é efetuada com  $\eta = 0,1$  e  $\eta = 0,9$ .

Figura 51 – Resposta em frequência da função de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_c(j\omega)$ , para análise do parâmetro  $\eta$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{60} = 1,68$  rad/s e na fase  $-90^\circ$ .



(a)  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$



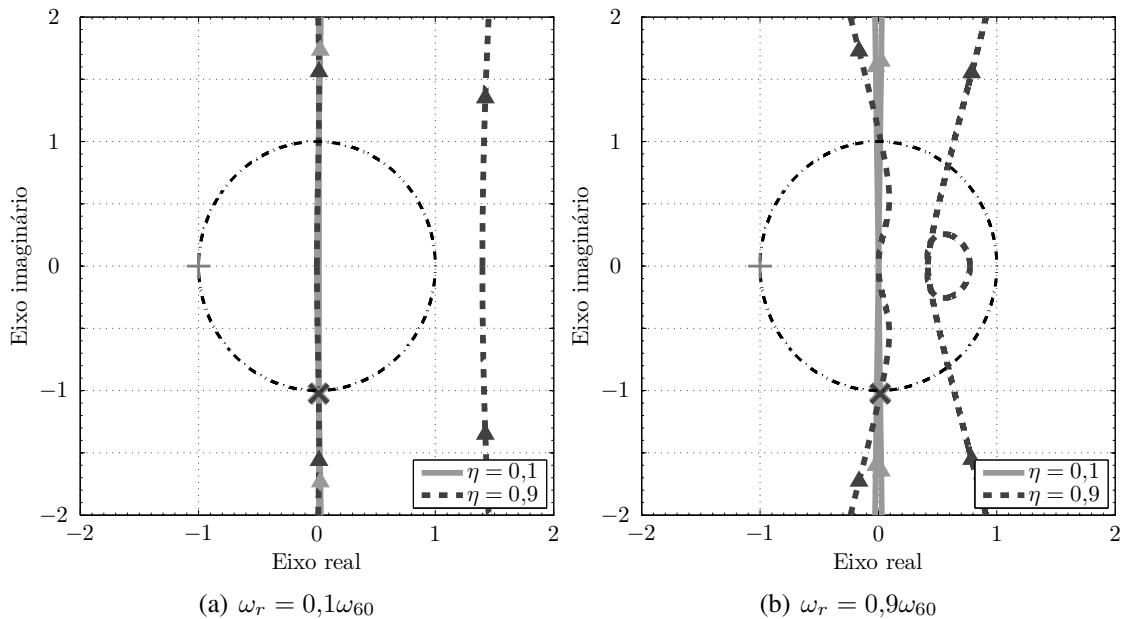
(b)  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente, nota-se que  $\eta$  altera significativamente a resposta em frequência da função de malha aberta  $G_c(j\omega)C_{pr}(j\omega)$ . Entretanto, observa-se que, independentemente de  $\omega_r$ , os controladores PRs resultam em  $90^\circ$  de margem de fase, seguindo a definição de  $p$  proposta em (118). Por este motivo, a escolha de  $\eta$  não pode ser realizada através do critério margens de estabilidade.

Assim, o parâmetro  $\eta$  foi definido por meio da resposta do sistema a uma referência senoidal, da mesma maneira que nas classes de processos anteriores. Verificou-se que a

Figura 52 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_c(s)$ , para análise do parâmetro  $\eta$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

variação de  $\eta$  sobre os índices de desempenho obtidos com os processos da Classe C apresenta comportamento semelhante ao verificado nos índices de desempenho obtidos com os processos da Classe B. Desta forma, para a sintonia dos controladores PRs aplicados aos processos da Classe C propõe-se

$$\eta = 0,9. \quad (119)$$

A seguir, um conjunto genérico de fórmulas de sintonia do controlador PR é desenvolvido. Então, conjuntos de fórmulas de sintonia particulares são propostas para cada uma das três classes de processos consideradas utilizando os valores de  $\nu$ ,  $p$  e  $\eta$  anteriormente propostos.

### 4.2.3 Sintonia do controlador proporcional-ressonante

No método GOF, as fórmulas de sintonia do controlador PR são obtidas através da substituição da função de transferência (108) com  $s = j\omega_\nu$  na equação geral de sintonia do método GOF (107), o que resulta em

$$C_{pr}(j\omega_\nu) = K_p + \frac{j\omega_\nu K_{r1} + K_{r2}}{\omega_r^2 - \omega_\nu^2 + j2\xi\omega_r\omega_\nu} = \frac{M_\rho}{M_\nu} (\cos(\rho - \nu) + j \operatorname{sen}(\rho - \nu)).$$

Após simplificações, a última expressão pode ser representada por meio de suas partes real e imaginária através das seguintes equações:

$$K_p (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) + K_{r2} = \frac{M_\rho}{M_\nu} ((\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho - \nu) - 2\omega_\nu \xi \omega_r \operatorname{sen}(\rho - \nu)), \quad (120)$$

$$\omega_\nu (K_{r1} + 2K_p \xi \omega_r) = \frac{M_\rho}{M_\nu} ((\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \operatorname{sen}(\rho - \nu) + 2\omega_\nu \xi \omega_r \cos(\rho - \nu)). \quad (121)$$

A expressão em (120) pode ser reescrita como

$$K_p = \frac{K_{r_2}}{\omega_\nu^2 - \omega_r^2} + \frac{M_\rho (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho - \nu) - 2M_\rho \omega_\nu \xi \omega_r \sin(\rho - \nu)}{M_\nu (\omega_r^2 - \omega_\nu^2)}. \quad (122)$$

Desta maneira, verifica-se a existência de um grau de liberdade no cálculo dos parâmetros do controlador PR, uma vez que tratam-se de duas equações com três incógnitas,  $K_p$ ,  $K_{r_1}$  e  $K_{r_2}$ . Uma segunda equação envolvendo as incógnitas  $K_p$  e  $K_{r_2}$  é obtida com a imposição de que o produto dos zeros do controlador PR seja  $\eta^2 \omega_r^2$ , onde  $0 < \eta < 1$  é um parâmetro a ser determinado na sequência. Esta restrição, como mencionado anteriormente, resulta em ao menos um zero com módulo menor que  $\omega_r$ , quando estes forem reais, e em zeros do controlador com módulo igual a  $\eta \omega_r$ , quando estes forem complexos conjugados.

A função de transferência do controlador PR apresentada em (108) pode ser representada como

$$C_{pr}(s) = K_p \frac{s^2 + \frac{K_{r_1}}{K_p} s + \left( \frac{K_{r_2}}{\omega_r^2 K_p} + 1 \right) \omega_r^2}{s^2 + 2\xi \omega_r s + \omega_r^2}. \quad (123)$$

O numerador de  $C_{pr}(s)$ , representado em função de  $K_p$  e de suas duas raízes, definidas aqui como  $z_1$  e  $z_2$ , é dado por

$$N_{pr}(s) = K_p (s - z_1)(s - z_2) = K_p (s^2 - (z_1 + z_2)s + z_1 z_2).$$

Agora, utilizando a restrição adicional  $z_1 z_2 = \eta^2 \omega_r^2$ , se o controlador tiver zeros reais constata-se que ao menos um deles terá módulo menor que  $\omega_r$ , pois definiu-se  $0 < \eta < 1$ . Por outro lado, se o controlador tiver um par de zeros complexos conjugados, ou seja,  $z_{1,2} = -a \pm jb$ , onde  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ , então verifica-se que  $z_1 z_2 = a^2 + b^2 = \eta^2 \omega_r^2$  e  $|z_{1,2}| = \eta \omega_r < \omega_r$ . Com isso, pode-se escrever

$$N_{pr}(s) = K_p (s^2 - (z_1 + z_2)s + \eta^2 \omega_r^2). \quad (124)$$

Comparando o numerador de  $C_{pr}(s)$  em (123) com  $N_{pr}(s)$  em (124) chega-se na seguinte expressão:

$$\frac{K_{r_2}}{\omega_r^2 K_p} + 1 = \eta^2,$$

a qual pode ser reescrita como a segunda equação envolvendo os parâmetros  $K_p$  e  $K_{r_2}$ :

$$K_p = \frac{K_{r_2}}{(\eta^2 - 1) \omega_r^2}. \quad (125)$$

Igualando (122) e (125) chega-se em

$$\frac{K_{r_2}}{(\eta^2 - 1) \omega_r^2} = \frac{K_{r_2}}{\omega_\nu^2 - \omega_r^2} + \frac{M_\rho (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho - \nu) - 2M_\rho \omega_\nu \xi \omega_r \sin(\rho - \nu)}{M_\nu (\omega_r^2 - \omega_\nu^2)},$$

a partir da qual pode-se obter a fórmula genérica de sintonia de  $K_{r_2}$

$$K_{r_2} = \frac{M_\rho (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho - \nu) (\eta^2 - 1) \omega_r^2}{M_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)} - \frac{2M_\rho \omega_\nu \xi \omega_r^3 \sin(\rho - \nu) (\eta^2 - 1)}{M_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}.$$

Substituindo a expressão de  $K_{r_2}$  em (125) chega-se na fórmula genérica de sintonia de  $K_p$

$$K_p = \frac{M_\rho (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho - \nu)}{M_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)} - \frac{2\omega_\nu \xi \omega_r \sin(\rho - \nu)}{M_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}.$$

Por meio de (121) e da expressão anteriormente obtida para  $K_p$  pode-se obter a fórmula genérica de sintonia de  $K_{r_1}$ , a qual é dada por

$$K_{r_1} = \frac{M_\rho (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \operatorname{sen}(\rho - \nu)}{M_\nu \omega_\nu} + \frac{M_\rho (2\omega_\nu \xi \omega_r^3 (\eta^2 - 1) \cos(\rho - \nu) + 4\xi^2 \omega_\nu^2 \omega_r^2 \operatorname{sen}(\rho - \nu))}{M_\nu \omega_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}.$$

Assim, no método GOF, os parâmetros do controlador PR são determinados através do seguinte conjunto genérico de fórmulas de sintonia:

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{M_\rho (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho - \nu)}{M_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)} - \frac{2\omega_\nu \xi \omega_r \operatorname{sen}(\rho - \nu)}{M_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}, \\ K_{r_1} &= \frac{M_\rho (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \operatorname{sen}(\rho - \nu)}{M_\nu \omega_\nu} \\ &\quad + \frac{M_\rho (2\omega_\nu \xi \omega_r^3 (\eta^2 - 1) \cos(\rho - \nu) + 4\xi^2 \omega_\nu^2 \omega_r^2 \operatorname{sen}(\rho - \nu))}{M_\nu \omega_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}, \\ K_{r_2} &= \frac{M_\rho (\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho - \nu) (\eta^2 - 1) \omega_r^2}{M_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)} - \frac{M_\rho 2\omega_\nu \xi \omega_r^3 \operatorname{sen}(\rho - \nu) (\eta^2 - 1)}{M_\nu (\eta^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}, \end{aligned} \quad (126)$$

o qual é escrito em função da frequência do sinal de interesse  $\omega_r$ , do coeficiente de amortecimento dos polos  $\xi$ , do ponto identificado da resposta em frequência do processo ( $M_\nu$  e  $\omega_\nu$ ), do parâmetro  $\eta$  e da localização  $p$  no plano complexo ( $M_\rho$  e  $\rho$ ).

Na sequência, a partir desse conjunto genérico de fórmulas de sintonia, são obtidos os conjuntos particulares de fórmulas de sintonia do controlador PR para cada uma das classes A, B e C de processos. Como mencionado anteriormente, esta tarefa foi realizada considerando uma grande variedade de processos dessas três classes com a frequência de ressonância do controlador PR variando entre  $0 < \omega_r \leq 0,9\omega_\nu$ . Nos testes foram analisadas diferentes escolhas da localização  $p$  e do parâmetro  $\eta$ .

Como resultado, para cada uma dessas três classes de processos, foram definidos valores de  $p$  e  $\eta$  que resultam em apropriadas margens de estabilidade e bom desempenho em malha fechada em termos do máximo sobrepasso e do número de ciclos para acomodação. A frequência de ressonância  $\omega_r$  e o coeficiente de amortecimento dos polos  $\xi$  são parâmetros que devem ser escolhidos pelo projetista levando-se em conta que um sistema estável em malha fechada segue (rejeita) assintoticamente um dado sinal de referência (perturbação) senoidal com frequência  $\omega_r$  se o controlador PR com  $\xi = 0$  é incluído na função transferência de malha aberta.

Para a Classe A, identifica-se o ponto crítico da resposta em frequência do processo, definido em (110), e são propostas duas localizações  $p$  dependentes da relação entre  $\omega_r$  e  $\omega_u$ . Consequentemente, são propostos dois conjuntos de fórmulas de sintonia do controlador PR considerando  $p = 0,4\angle -183^\circ$ , apresentado em (111), para  $0 < \omega_r/\omega_u < 0,5$  e  $p = 0,4\angle -181^\circ$ , apresentado em (112), para  $0,5 \leq \omega_r/\omega_u < 1$ , em ambos casos considerando  $\eta = 0,1$  definido em (113). Assim, para um processo da Classe A, o conjunto de fórmulas de sintonia do controlador PR é

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{0,399 (\omega_u^2 - \omega_r^2)}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)} - \frac{0,0419\omega_u\omega_r\xi}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)}, \\ K_{r_1} &= \frac{0,0209 (\omega_u^2 - \omega_r^2)}{M_u \omega_u} + \frac{0,791\omega_r^3\xi + 0,0837\omega_u\omega_r^2\xi^2}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)}, \\ K_{r_2} &= \frac{0,395\omega_r^2 (\omega_r^2 - \omega_u^2)}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)} + \frac{0,0415\omega_u\omega_r^3\xi}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)}, \end{aligned} \quad (127)$$

quando  $0 < \omega_r/\omega_u < 0,5$ ; enquanto

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{0,400 (\omega_u^2 - \omega_r^2)}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)} - \frac{0,0140\omega_u\omega_r\xi}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)}, \\ K_{r_1} &= \frac{0,00698 (\omega_u^2 - \omega_r^2)}{M_u\omega_u} + \frac{0,792\omega_r^3\xi + 0,0279\omega_u\omega_r^2\xi^2}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)}, \\ K_{r_2} &= \frac{0,396\omega_r^2 (\omega_r^2 - \omega_u^2)}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)} + \frac{0,0138\omega_u\omega_r^3\xi}{M_u (\omega_u^2 - 0,010\omega_r^2)}, \end{aligned} \quad (128)$$

deve ser utilizado quando  $0,5 \leq \omega_r/\omega_u < 1$ .

Para a Classe B, o ponto identificado da resposta em frequência do processo é apresentado em (114), a localização  $p = 1\angle -130^\circ$  é definida em (115) e escolheu-se  $\eta = 0,7$ . Deste modo, o conjunto de fórmulas de sintonia do controlador PR para um processo da Classe B é dado por

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{0,985 (\omega_{120}^2 - \omega_r^2)}{M_{120} (\omega_{120}^2 - 0,490\omega_r^2)} - \frac{0,347\omega_{120}\omega_r\xi}{M_{120} (\omega_{120}^2 - 0,490\omega_r^2)}, \\ K_{r_1} &= \frac{0,174 (\omega_{120}^2 - \omega_r^2)}{M_{120}\omega_{120}} + \frac{1,00\omega_r^3\xi + 0,695\omega_{120}\omega_r^2\xi^2}{M_{120} (\omega_{120}^2 - 0,490\omega_r^2)}, \\ K_{r_2} &= \frac{0,502\omega_r^2 (\omega_r^2 - \omega_{120}^2)}{M_{120} (\omega_{120}^2 - 0,490\omega_r^2)} + \frac{0,177\omega_{120}\omega_r^3\xi}{M_{120} (\omega_{120}^2 - 0,490\omega_r^2)}. \end{aligned} \quad (129)$$

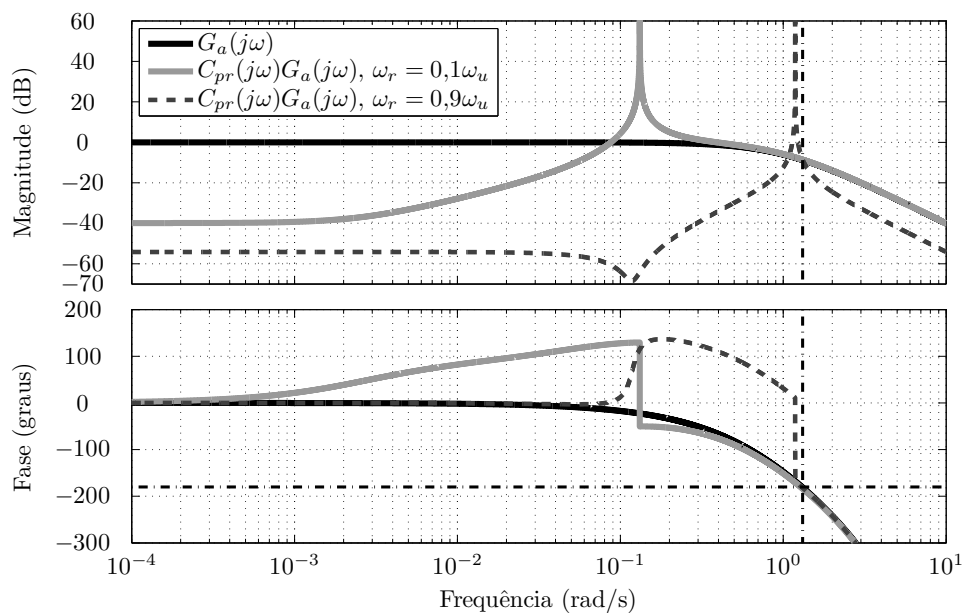
Para a Classe C, o ponto identificado da resposta em frequência do processo é dado em (117), a localização  $p = 1\angle -90^\circ$  é definida em (118) e determinou-se  $\eta = 0,9$ . Assim, o conjunto de fórmulas de sintonia do controlador PR para um processo da Classe C é o seguinte

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{0,866 (\omega_{60}^2 - \omega_r^2)}{M_{60} (\omega_{60}^2 - 0,810\omega_r^2)} - \frac{1,00\omega_{60}\omega_r\xi}{M_{60} (\omega_{60}^2 - 0,810\omega_r^2)}, \\ K_{r_1} &= \frac{0,500 (\omega_{60}^2 - \omega_r^2)}{M_{60}\omega_{60}} + \frac{0,329\omega_r^3\xi + 2,00\omega_{60}\omega_r^2\xi^2}{M_{60} (\omega_{60}^2 - 0,810\omega_r^2)}, \\ K_{r_2} &= \frac{0,165\omega_r^2 (\omega_r^2 - \omega_{60}^2)}{M_{60} (\omega_{60}^2 - 0,810\omega_r^2)} + \frac{0,190\omega_{60}\omega_r^3\xi}{M_{60} (\omega_{60}^2 - 0,810\omega_r^2)}. \end{aligned} \quad (130)$$

Os controladores PRs aplicados aos processos da Classe A são determinados através de dois conjuntos de fórmulas de sintonia pois existe um forte compromisso entre o atraso de fase do controlador na frequência crítica do processo, margens de estabilidade e desempenho em malha fechada. Uma pequena mudança na contribuição de fase do controlador nessa frequência específica altera significativamente as margens de estabilidade e o desempenho em malha fechada. Ao contrário das classes B e C, para as quais o controlador PR resulta em margens de fase de  $50^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente.

Uma análise de resposta em frequência complementa a avaliação dos conjuntos de fórmulas de sintonia propostos. A Figura 53 mostra a resposta em frequência do processo da Classe A  $G_a(j\omega) = e^{-j\omega}/(j\omega + 1)^2$  e da função de malha aberta  $G_a(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  com frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $\omega_r = 0,9\omega_u$ , onde os controladores foram sintonizados através das fórmulas apresentadas em (127) e (128), respectivamente, considerando  $\xi = 0$ , o qual é o pior caso em termos de obtenção de adequadas margens de estabilidade.

Figura 53 – Respostas em frequência do processo,  $G_a(j\omega)$ , e da função de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando  $\omega_r = 0,1\omega_u$ , a frequência de ressonância do controlador é muito menor que a frequência crítica do processo, então apropriadas margens de estabilidade são obtidas e bom desempenho em malha fechada é esperado. Por outro lado, quando  $\omega_r = 0,9\omega_u$ , a frequência de ressonância do controlador está próxima da frequência crítica do processo, consequentemente a margem de fase é muito menor do que no caso anterior. Assim, mau desempenho e até mesmo sistemas instáveis em malha fechada podem ser esperados para  $\omega_r \approx \omega_u$ , visto que esta estrutura de controle apresenta magnitude elevada na faixa de frequências próxima do ponto crítico do processo. É importante salientar que esta não é uma limitação das fórmulas de sintonia propostas, mas sim uma limitação imposta pela estrutura do controlador PR.

Em diversas aplicações, os polos do controlador PR são deslocados do eixo imaginário sobre a circunferência de raio  $\omega_r$  para o SPE do plano  $s$  através da utilização de  $\xi > 0$ . Esta escolha resulta na diminuição da magnitude e na variação menos abrupta da fase do controlador em  $\omega_r$  e, por esse motivo, pode aumentar a margem de fase obtida com a estrutura PR.

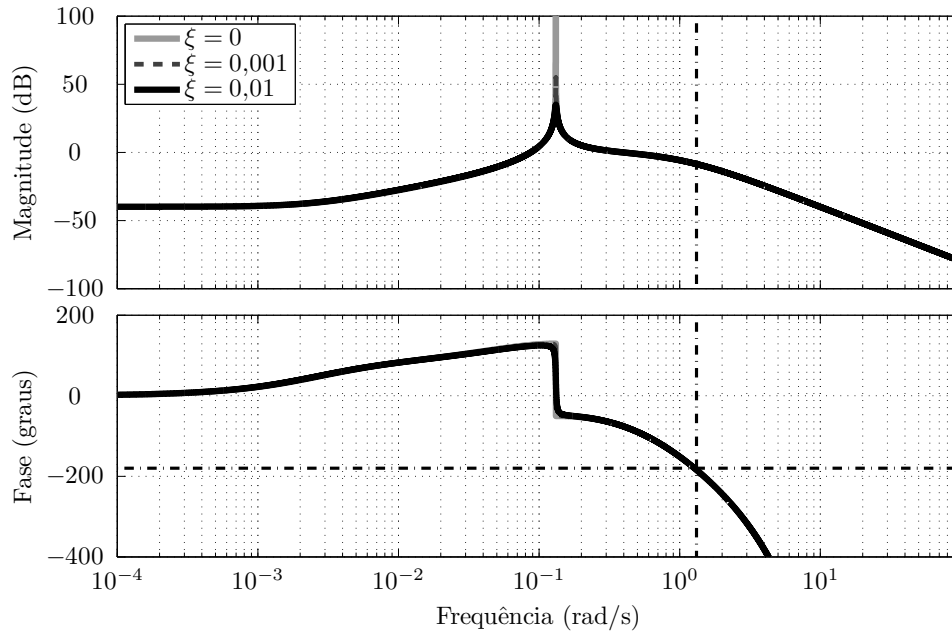
Nas figuras 54 e 55 são apresentadas, respectivamente, a resposta em frequência da função de malha aberta  $G_a(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  e o seu diagrama de Nyquist com o controlador PR possuindo frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $\omega_r = 0,9\omega_u$ , avaliados considerando  $\xi = 0$ ,  $\xi = 0,001$  e  $\xi = 0,01$ . Na Tabela 17 são listados o módulo da função de malha aberta avaliada em  $\omega_r$ ,  $L_{\omega_r} = |G_a(j\omega_r)C_{pr}(j\omega_r)|$ . Nessa mesma tabela são apresentados o máximo valor absoluto da saída do sistema em malha fechada,  $y_r = \max_{t > t_s} |y(t)|$ , e o máximo valor absoluto do erro,  $e_r = \max_{t > t_s} |r(t) - y(t)|$ , ambos obtidos em regime permanente para um sinal de referência senoidal com módulo unitário e frequência  $\omega_r$ .

Nota-se que  $\xi > 0$  efetivamente diminui  $L_{\omega_r}$ , o que resulta na perda do seguimento com erro nulo em regime permanente, como mencionado na Seção 2.2.2.4. Além disto, conforme esperado, à medida que aumenta-se  $\xi$ ,  $L_{\omega_r}$  diminui e  $e_r$  aumenta.

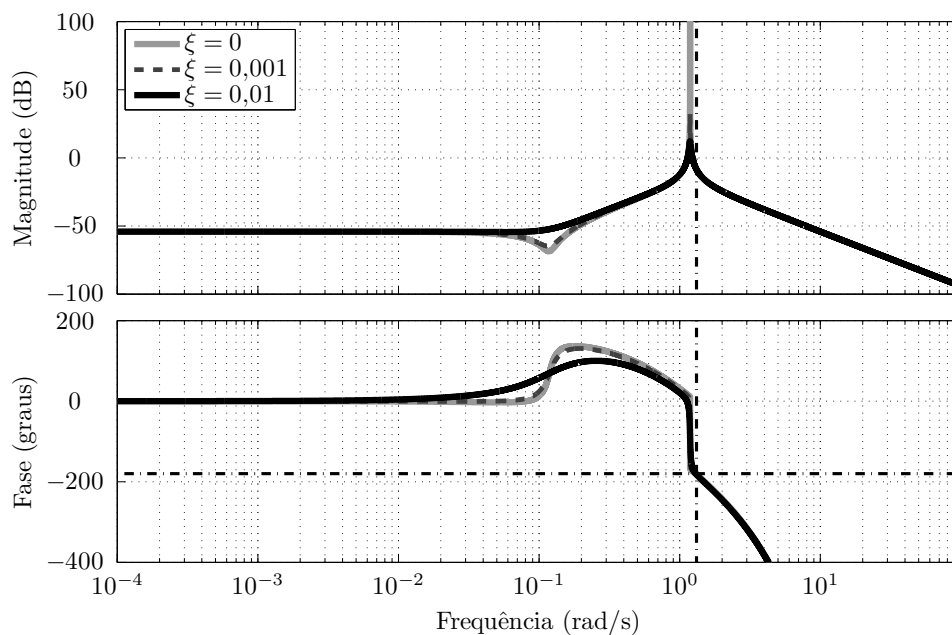
Para  $\omega_r = 0,1\omega_u$ , as margens de estabilidade e o desempenho em regime permanente



Figura 54 – Resposta em frequência da função de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$ , para análise do parâmetro  $\xi$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



(a)  $\omega_r = 0,1\omega_u$

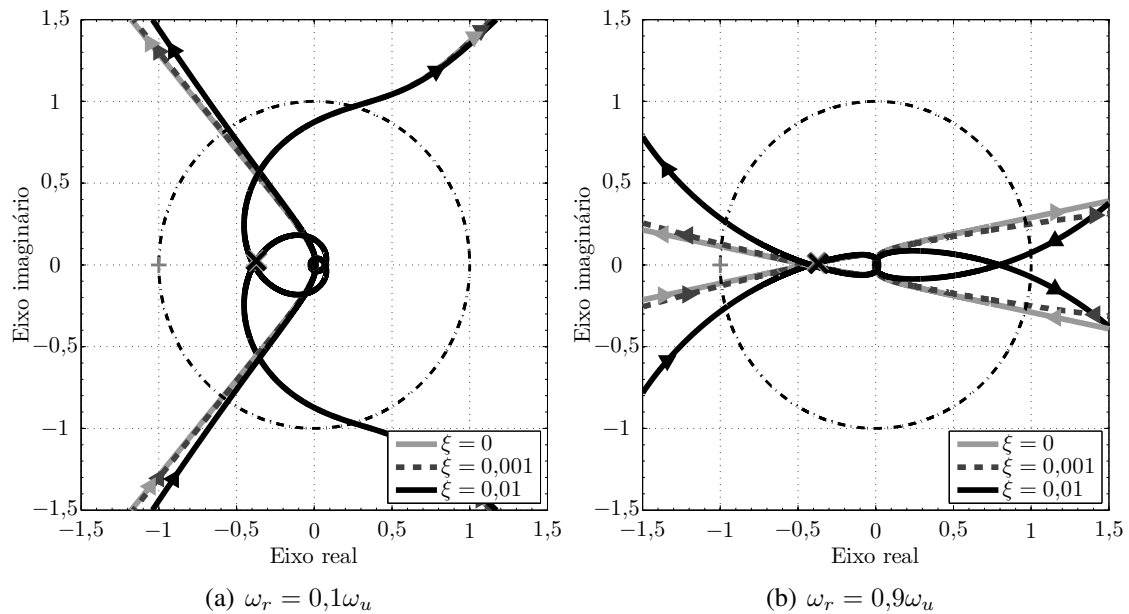


(b)  $\omega_r = 0,9\omega_u$

Fonte: Elaborado pelo autor.

não são significativamente alterados com os valores  $\xi$  considerados. A margem ganho é de 2,6, enquanto a margem de fase (verificada na faixa de frequências  $\omega < \omega_r$ ) aumenta de  $54^\circ$  para  $56,4^\circ$ , obtidas respectivamente com  $\xi = 0$  e  $\xi = 0,01$ . A parcela da resposta em frequência da função de malha aberta na faixa de frequências  $\omega > \omega_r$  está praticamente sobreposta para os valores de  $\xi$  utilizados. O erro regime permanente é nulo com  $\xi = 0$  e aproximadamente igual a 1,8% com  $\xi = 0,01$ .

Figura 55 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_a(s)$ , para análise do parâmetro  $\xi$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 17 – Magnitude da função de malha aberta com controlador PR avaliada em  $\omega_r$ ,  $C_{pr}(j\omega_r)G_a(j\omega_r)$ , e medidas de desempenho do sistema em malha fechada.

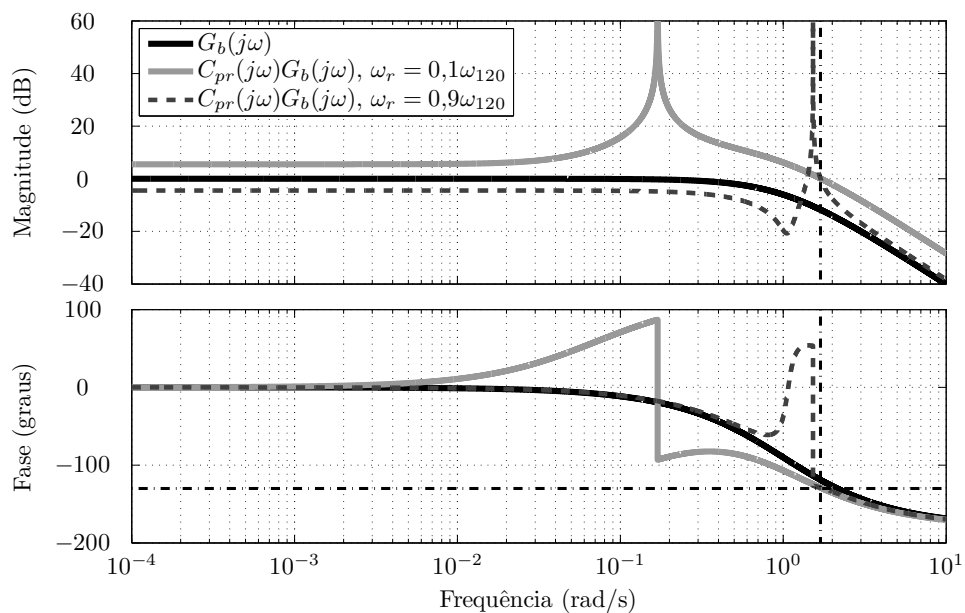
$\frac{\omega_r}{\omega_u}$	$\xi$								
	0			0,001			0,01		
	$L_{\omega_r}$	$y_r$	$e_r$	$L_{\omega_r}$	$y_r$	$e_r$	$L_{\omega_r}$	$y_r$	$e_r$
0,1	$\infty$	1	0	557	0,999	0,00180	56,1	0,986	0,0176
0,9	$\infty$	1	0	40,3	0,995	0,0247	4,06	0,950	0,234

Para  $\omega_r = 0,9\omega_u$ , o aumento de  $\xi$  não resulta no aumento significativo da margem de fase, ao passo que o desempenho em regime permanente é substancialmente prejudicado. A margem de ganho é de aproximadamente 2,3, enquanto a margem de fase (obtida na faixa de frequências  $\omega > \omega_r$ ) aumenta de  $6^\circ$  para  $14^\circ$ , considerando  $\xi = 0$  e  $\xi = 0,01$ , respectivamente. Por outro lado, o erro em regime permanente com  $\xi = 0,01$  é maior que 23%.

Através desta análise, pode-se constatar que considerar  $\xi > 0$  não resulta no impacto desejado, a perda do seguimento com erro nulo e o aumento do erro em regime permanente não é compensada, em ambas frequências de ressonância do controlador PR, com o aumento significativo da margem de fase. A fim de diminuir essa limitação, na Seção 4.2.4, será proposta a utilização de um bloco de avanço de fase em conjunto com o controlador PR visando o aumento da margem de fase para os processos da Classe A.

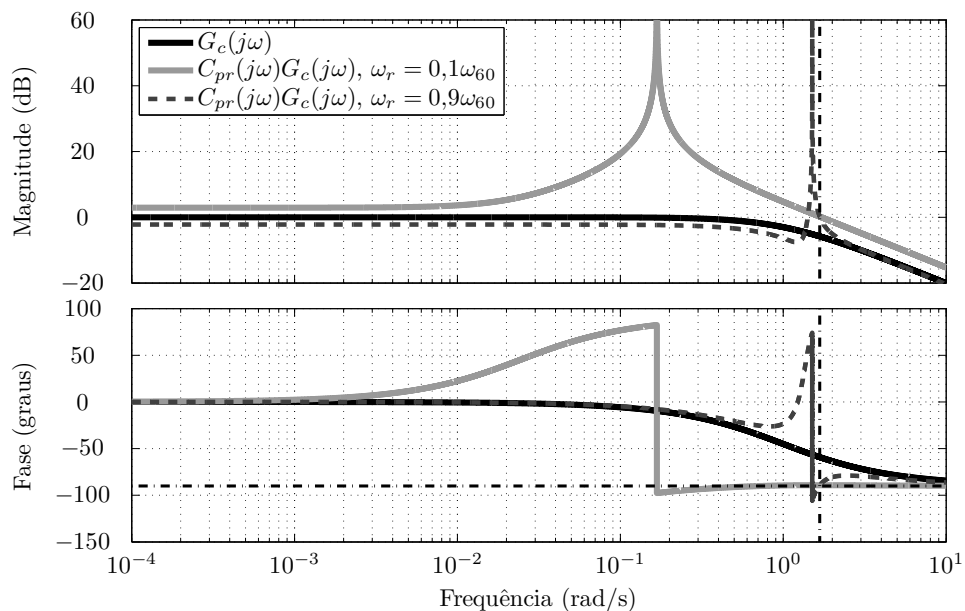
A Figura 56 apresenta a resposta em frequência do processo da Classe B  $G_b(j\omega) = 1/(j\omega + 1)^2$  e da função de malha aberta  $G_b(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  com os controladores PRs sintonizados através das fórmulas em (129) tendo frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$ , considerando  $\xi = 0$ . Da mesma forma, a Figura 57 apresenta a resposta em

Figura 56 – Respostas em frequência do processo,  $G_b(j\omega)$ , e da função de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_b(j\omega)$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,69$  rad/s e na fase  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 57 – Respostas em frequência do processo,  $G_c(j\omega)$ , e da função de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_c(j\omega)$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,68$  rad/s e na fase  $-90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

frequência do processo da Classe C  $G_c(j\omega) = 1/(j\omega + 1)$  e da função de malha aberta  $G_c(j\omega)C_{pr}(j\omega)$  com os controladores PRs sintonizados através das fórmulas em (130) possuindo frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_{60}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{60}$ , utilizando  $\xi = 0$ . Ao contrário dos processos da Classe A, para processos das classes B e C com controladores PRs possuindo  $\omega_r \approx \omega_\nu$ , não são esperados mau desempenho e sistemas instáveis em malha fechada uma vez que a margem de fase definida é garantida para  $\omega_r < \omega_\nu$ .

#### 4.2.4 Controlador proporcional-ressonante com bloco de avanço de fase

A utilização de controladores de avanço de fase tem como principal motivação a alteração da dinâmica do sistema através do aumento da largura de banda da função de transferência de malha aberta, aumentando, desta forma, a frequência crítica da função de malha aberta com o controlador. Conforme visto anteriormente, quando considerada a sintonia do controlador PR com  $\omega_r \approx \omega_u$  aplicado aos processos da Classe A, é muito difícil o estabelecimento de uma margem de fase adequada. Portanto, neste caso, faz-se necessária a inclusão de um bloco de avanço de fase —que proporciona um incremento de fase em uma faixa de frequências específica— na estrutura do controlador. Assim, para processos da Classe A, propõe-se a utilização de um bloco de avanço de fase em conjunto com o controlador PR visando o aumento da margem de fase e, conseqüentemente, a diminuição da limitação imposta pela estrutura PR apontada no final da seção anterior.

A função de transferência do bloco em avanço de fase considerada neste trabalho tem a seguinte forma:

$$C_{av}(s) = k_a \frac{s + z_a}{s + p_a}, \quad (131)$$

na qual

$$k_a = \frac{1}{\alpha}, \quad z_a = \alpha\omega_m, \quad p_a = \frac{\omega_m}{\alpha}, \quad (132)$$

são os parâmetros desse bloco para  $0 < \alpha < 1$ . Esses parâmetros são definidos para que na frequência  $\omega_m$  seja fornecido o máximo valor de avanço de fase e nessa frequência específica esse bloco tenha magnitude unitária. Devido a esta construção, a fase de  $C_{av}(s)$  é positiva para qualquer frequência, inserindo, desta forma, um avanço de fase em qualquer sinal que seja aplicado em sua entrada.

A resposta em frequência de  $C_{av}(j\omega)$  com  $\omega_m = 1$  rad/s e com  $\alpha = 0,2, 0,4$  e  $0,6$  é apresentada na Figura 58, onde observa-se que, de fato, a fase do bloco em avanço de fase é sempre positiva e tem seu máximo valor na frequência  $\omega_m = 1$  rad/s. Por meio deste gráfico também verifica-se que o bloco em avanço de fase tem magnitude menor que um para  $\omega < \omega_m$  e magnitude maior que um para  $\omega > \omega_m$ .

Assim, propõe-se o *controlador proporcional-ressonante com bloco de avanço de fase (controlador PRA)*, cuja função de transferência é dada por

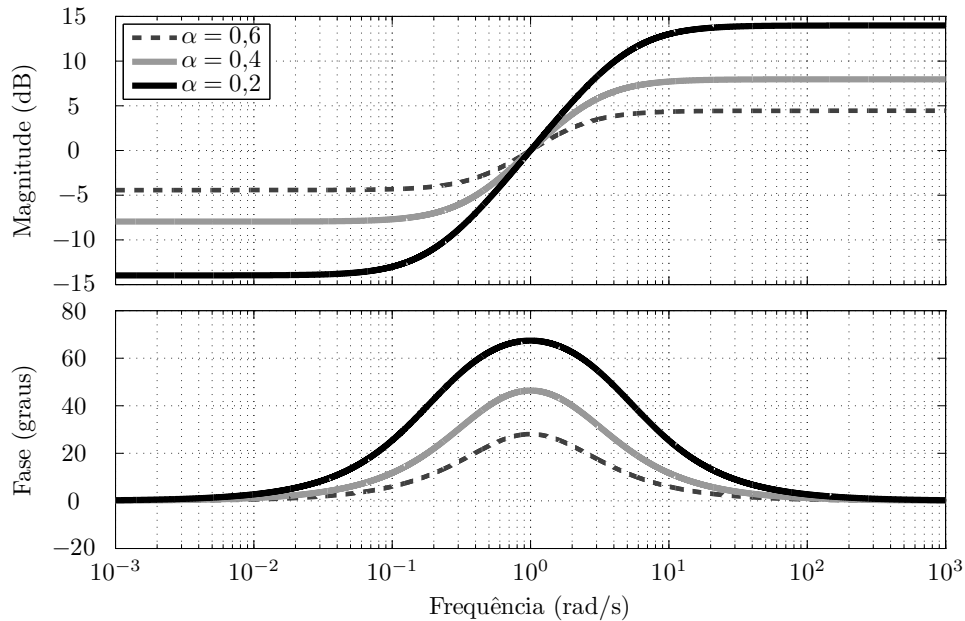
$$C_{pra}(s) = C_{av}(s)C_{pr}(s) = \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_p + \frac{K_{r1}s + K_{r2}}{s^2 + 2\xi\omega_r s + \omega_r^2} \right), \quad (133)$$

onde os parâmetros do bloco de avanço de fase  $k_a$ ,  $z_a$  e  $p_a$  são projetados através de (132), enquanto  $K_p$ ,  $K_{r1}$  e  $K_{r2} \in \mathbb{R}$  são os parâmetros da estrutura PR a serem sintonizados por meio de (126).

Visando o desenvolvimento das fórmulas de sintonia destes parâmetros, controladores PRAs foram projetados para as dez famílias de processos *LTIC* pertencentes à Classe A definidas na bateria de testes do Apêndice A.2. Nesta etapa, foram analisadas diversas combinações de  $\omega_m$  e  $\alpha$  para o ajuste do bloco de avanço de fase, considerando diversos valores da localização  $p$ , que atendem a restrição em (109), em conjunto com diversos valores de  $\eta$  no intervalo  $0 < \eta < 1$  para a sintonia do bloco PR com  $\xi = 0$ .

Estas diferentes combinações de parâmetros implicam em variadas margens de estabilidade e desempenho em malha fechada. A definição de cada um destes parâmetros foi realizada seguindo procedimento semelhante ao adotado para desenvolvimento do controlador PR. Inicialmente, analisou-se a resposta em frequência da função de malha aberta com a configuração processo-controlador. Em seguida, avaliou-se a resposta do sistema

Figura 58 – Respostas em frequência do bloco em avanço de fase com  $\omega_m = 1$  rad/s considerando diferentes valores de  $\alpha$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

em malha fechada (em termos de  $M_o$  e de  $n_s$ ) para um sinal de referência senoidal com amplitude unitária e frequência  $0 < \omega_r \leq 0,9\omega_u$ . O produto final dos testes com o controlador PRA aplicado às famílias de processos da Classe A é apresentado no Apêndice D, enquanto os parâmetros propostos e o conjunto de fórmulas de sintonia desse controlador são apresentados a seguir.

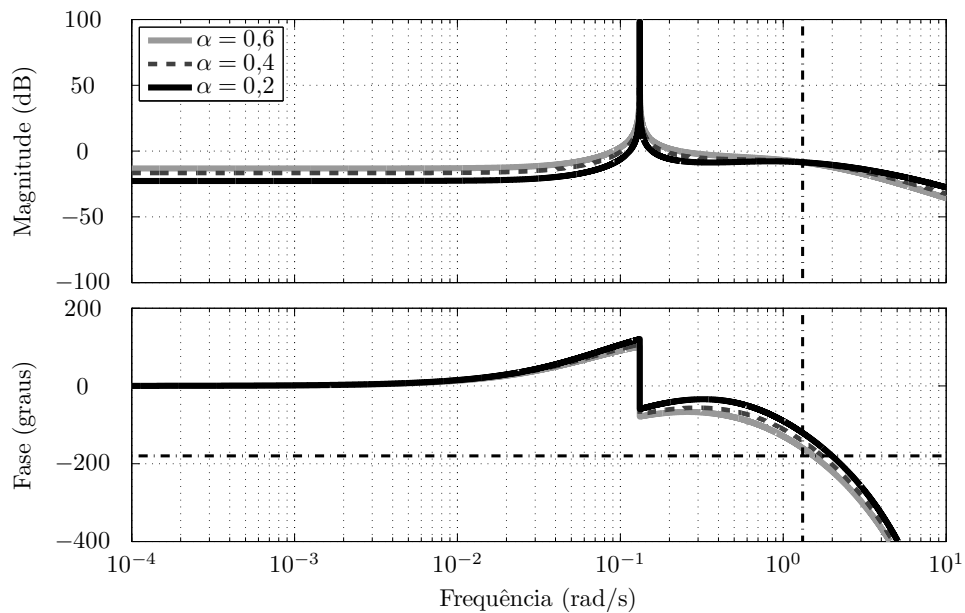
Para aproveitar a máxima vantagem do bloco de avanço de fase, o ajuste é executado de maneira que o máximo valor do avanço de fase seja aplicado na frequência crítica do processo, isto é, define-se  $\omega_m = \omega_u$ . Deste modo, resta definir o valor de  $\alpha$ , ou seja, qual será o avanço de fase desse bloco em  $\omega_u$ .

Nas figuras 59 e 60 estão representadas, respectivamente, a resposta em frequência e o diagrama de Nyquist da função de malha aberta  $G_a(j\omega)C_{pra}(j\omega)$  com o controlador PRA possuindo frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $\omega_r = 0,9\omega_u$ . Considerou-se blocos de avanço de fase com  $\alpha = 0,2$  (contribuição de  $67,4^\circ$  em  $\omega_u$ ),  $\alpha = 0,4$  (contribuição de  $46,4^\circ$  em  $\omega_u$ ) e  $\alpha = 0,6$  (contribuição de  $28,7^\circ$  em  $\omega_u$ ). Os controladores PRs foram sintonizados através de  $p = 0,4e^{-187^\circ}$  com  $\xi = 0$  e com  $\eta = 0,6$ .

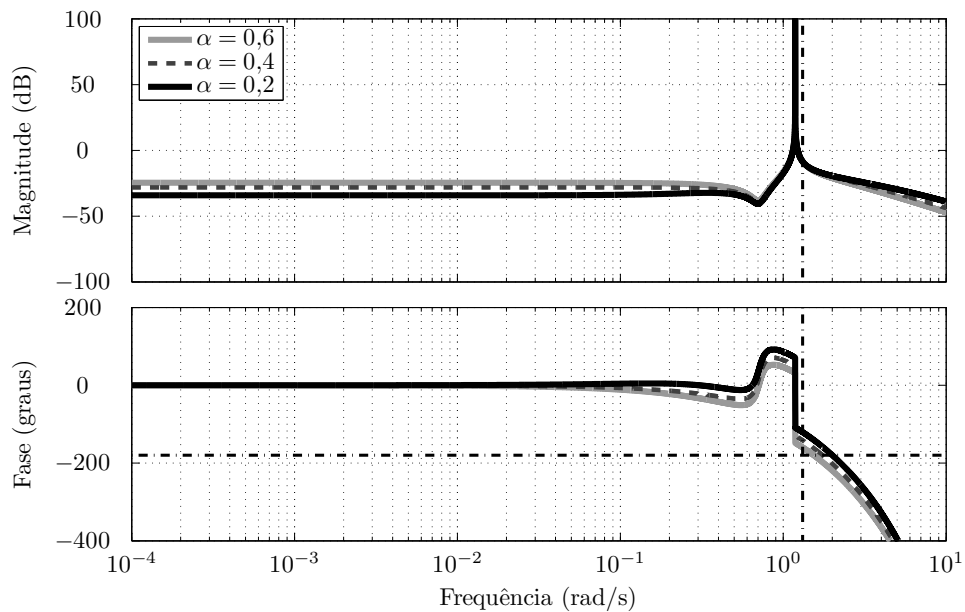
Por meio destas figuras, verifica-se que  $\alpha$  altera a fase de  $G_a(j\omega)C_{pra}(j\omega)$  em  $\omega_u$  e na faixa de frequências próxima a essa frequência específica, quanto menor  $\alpha$ , maior é o avanço de fase e a margem de fase proporcionados. Além disto, também observa-se que a magnitude de  $G_a(j\omega)C_{pra}(j\omega)$  para baixas e para altas frequências é modificada por esse parâmetro, quanto menor  $\alpha$ , menor é a magnitude para baixas frequências e maior é a magnitude para altas frequências. Quanto ao desempenho dinâmico, escolher um valor de  $\alpha$  mais próximo de zero resulta em sistemas em malha fechada mais lentos e com menores sobrepessos, ao passo que um valor de  $\alpha$  mais próximo de um implica em sistemas em malha fechada mais rápidos e com maior sobrepesso.

Assim, levando-se em conta tanto as margens de estabilidade quanto os índices de desempenho da resposta do sistema em malha fechada a uma referência senoidal, propõe-se  $\alpha = 0,4$ , valor que resulta em um avanço de fase de  $46,4^\circ$  em  $\omega_u$  e magnitude unitária

Figura 59 – Resposta em frequência da função de malha aberta,  $C_{pra}(j\omega)G_a(j\omega)$ , para análise do parâmetro  $\alpha$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



(a)  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$



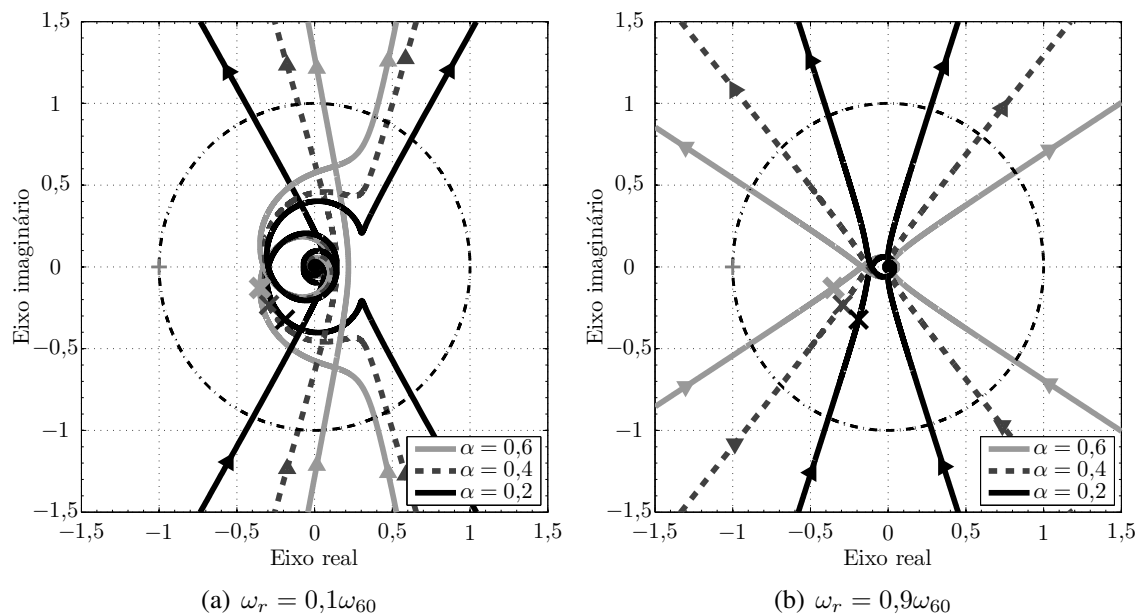
(b)  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

nessa frequência específica. Além disto, quando considera-se o caso  $\omega_r$  próxima de  $\omega_u$ , esta escolha acarreta em aproximadamente  $45^\circ$  de margem de fase com o controlador PRA aplicado aos processos da Classe A.

O desenvolvimento do bloco PR é obtido a partir do conjunto genérico de fórmulas de sintonia apresentado em (126), no qual, para a Classe A, utiliza-se o ponto crítico do processo apresentado em (110). Quanto à definição da localização  $p$  e do parâmetro  $\eta$ , considerou-se inicialmente  $p_{pr} = 0,4 (\cos(-181^\circ) + j \sen(-181^\circ))$  e  $\eta = 0,1$ . Seguindo

Figura 60 – Diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta,  $C_{pra}(s)G_a(s)$ , para análise do parâmetro  $\alpha$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

procedimento semelhante ao apresentado anteriormente para o controlador PR aplicado à Classe A, o módulo de  $p_{pr}$  foi mantido em  $M_\rho = 0,4$  (para obtenção de margem de ganho de aproximadamente 2,5) e sua fase  $\rho$  foi alterada entre  $-181^\circ$  e  $-190^\circ$ , isto é, foram considerados blocos PRs com atraso de fase em  $\omega_u$  entre  $1^\circ$  e  $10^\circ$ , os quais resultam em contribuições de fase do controlador PRA em  $\omega_u$  entre  $45,4^\circ$  e  $36,4^\circ$ .

Então, após diversos testes —nos quais analisou-se a resposta em frequência da função de malha aberta com o processo e com o controlador PRA, além dos índices de desempenho da resposta do sistema em malha fechada para uma referência senoidal—, propõe-se a sintonia do bloco PR com

$$p_{pr} = 0,4 (\cos(-187^\circ) + j \operatorname{sen}(-187^\circ)) \quad (134)$$

e

$$\eta = 0,6. \quad (135)$$

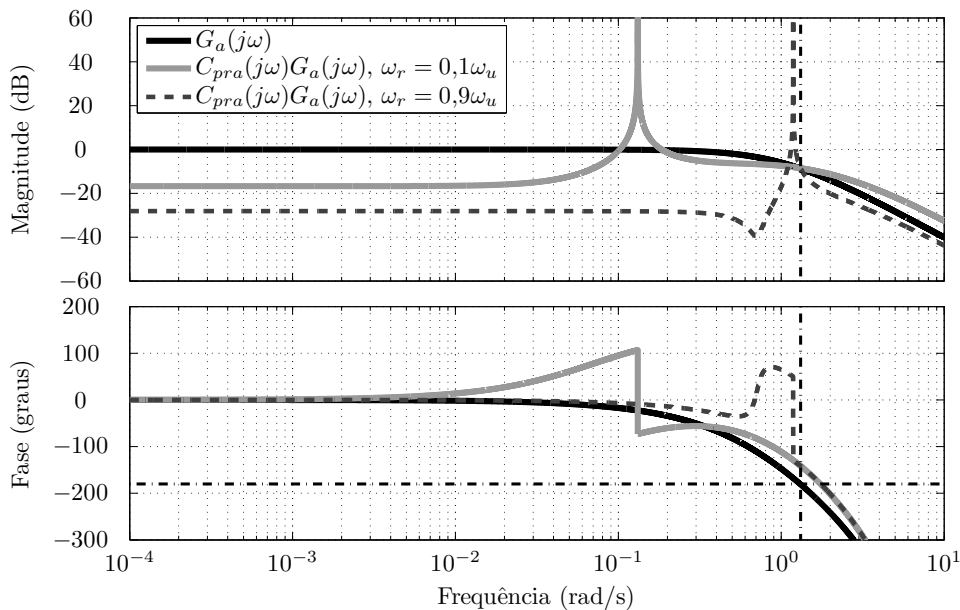
Com isso, a estrutura PR e o bloco de avanço de fase operando em série deslocam efetivamente o ponto crítico do processo para a localização:

$$\begin{aligned} p &= p_{av} \times p_{pr}, \\ p &= (\cos(46,4^\circ) + j \operatorname{sen}(46,4^\circ)) \times 0,4 (\cos(-187^\circ) + j \operatorname{sen}(-187^\circ)), \\ p &= 0,4 (\cos(-140,6^\circ) + j \operatorname{sen}(-140,6^\circ)), \end{aligned} \quad (136)$$

o que resulta em margem de fase consideravelmente maior do que a obtida com os controladores PRs sintonizados por meio de (111) e de (112). Para o caso  $\omega_r$  próxima de  $\omega_u$ , esta escolha de  $p$  resulta em aproximadamente  $45^\circ$  de margem de fase.

Assim, para o controlador PRA, cuja função de transferência é apresentada em (133),

Figura 61 – Respostas em frequência do processo,  $G_a(j\omega)$ , e da função de malha aberta,  $C_{pra}(j\omega)G_a(j\omega)$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

aplicado à processos da Classe A, propõe-se o seguinte conjunto de fórmulas de sintonia:

$$\begin{aligned}
 K_p &= \frac{0,397 (\omega_u^2 - \omega_r^2)}{M_u (\omega_u^2 - 0,360\omega_r^2)} - \frac{0,0975\omega_u\omega_r\xi}{M_u (\omega_u^2 - 0,360\omega_r^2)}, \\
 K_{r_1} &= \frac{0,0487 (\omega_u^2 - \omega_r^2)}{M_u\omega_u} + \frac{0,508\omega_r^3\xi + 0,195\omega_u\omega_r^2\xi^2}{M_u (\omega_u^2 - 0,360\omega_r^2)}, \\
 K_{r_2} &= \frac{0,254\omega_r^2 (\omega_r^2 - \omega_u^2)}{M_u (\omega_u^2 - 0,360\omega_r^2)} + \frac{0,0624\omega_u\omega_r^3\xi}{M_u (\omega_u^2 - 0,360\omega_r^2)}, \\
 k_a &= 2,5, \quad z_a = 0,4\omega_u, \quad p_a = 2,5\omega_u.
 \end{aligned} \tag{137}$$

Uma avaliação desse conjunto de fórmulas de sintonia é realizado por meio da Figura 61, na qual são apresentadas a resposta em frequência do processo da Classe A  $G_a(j\omega) = e^{-j\omega}/(j\omega + 1)^2$  e da função de malha aberta  $G_a(j\omega)C_{pra}(j\omega)$  com frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $\omega_r = 0,9\omega_u$ , considerando  $\xi = 0$ . Nota-se que, para ambas frequências de ressonância, são obtidas apropriadas margens de estabilidade e, com isto, espera-se obter sistemas em malha fechada estáveis para  $\omega_r < \omega_u$ . Além disto, como a margem de fase —para uma mesma  $\omega_r$ — é maior com o controlador PRA do que com o controlador PR, sobrepessos menores são previstos com a estrutura PRA.

Na próxima seção, o método GOF para a sintonia dos controladores PR e PRA é detalhadamente analisado em exemplos numéricos que consideram três processos distintos pertencentes às classes A, B e C.

### 4.3 Estudos de caso

A fim de avaliar o método GOF para a sintonia dos controladores PR e PRA, nesta seção são considerados três processos pertencentes às classes A, B e C, os quais foram utilizados em LORENZINI; PEREIRA; BAZANELLA (2019). Para cada um desses processos, inicialmente realizou-se o experimento do RFA para a identificação de



Tabela 18 – Dados do experimento do RFA para o processo  $G_a(s)$ .

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
$0^\circ$	$-180^\circ$	1,3	1	0,648	4,78	1	1,32	0,392

um ponto de sua resposta em frequência, ou seja, foram determinadas a magnitude  $M_\nu$  e a frequência  $\omega_\nu$ . Em seguida, utilizando esta informação identificada, controladores PRs e PRAs foram sintonizados utilizando os conjuntos de fórmulas propostos nas seções 4.2.3 e 4.2.4. Então, avaliou-se a resposta do sistema em malha fechada com os controladores projetados para um sinal de referência senoidal com magnitude unitária e frequência  $0,1 \leq \omega_r \leq 0,9\omega_\nu$ , considerando  $\xi = 0$  para obtenção de seguimento com erro nulo. Os parâmetros do processo e dos controladores são apresentados no SI. Conforme definido na Seção 2.1.2.2, o desempenho do sistema de controle será avaliado através do máximo sobrepasso,  $M_o$  dado em %, além do tempo e do número de períodos de acomodação, respectivamente  $t_s$  e  $n_s$ , os quais são dados em segundos e número de ciclos do sinal de referência, respectivamente, e são calculados assumindo uma tolerância de 2% do sinal de erro.

#### 4.3.1 Processo da Classe A

O processo da Classe A considerado para análise do método GOF tem a seguinte função de transferência

$$G_a(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}. \quad (138)$$

O primeiro passo para a implementação do método GOF é a realização do experimento do RFA, no qual o ponto crítico do processo  $G_a(s)$  é identificado, visto que sua fase cruza a linha de  $-180^\circ$ . Na Tabela 18 estão listados os dados referentes a esse experimento, na qual  $\gamma$ ,  $d$ ,  $b$  e  $|F(j\omega_\nu)|$  são parâmetros do RFA definidos na Seção 3.3,  $A_\nu = A_u$  é amplitude e  $T_\nu = T_u$  é o período, dado em segundos, da auto-oscilação observada na saída do processo. Os parâmetros  $\omega_\nu = \omega_u$  e  $M_\nu = M_u$  são respectivamente a frequência, dada em radianos por segundo, e a magnitude do ponto crítico do processo em questão.

O segundo passo é a sintonia do controlador PR (108) ou do controlador PRA (133) para uma frequência de referência  $\omega_r$  e um coeficiente de amortecimento dos polos  $\xi$ , utilizando o ponto identificado da resposta em frequência do processo. Para a Classe A, os parâmetros do controlador PR são calculados dependendo da relação entre  $\omega_r$  e  $\omega_u$ : se  $0 < \omega_r/\omega_u < 0,5$  deve-se utilizar (127); enquanto se  $0,5 \leq \omega_r/\omega_u < 1$  deve-se utilizar (128). Além disto, para a Classe A, o controlador PRA (133) é sintonizado através do conjunto de fórmulas em (137).

Neste exemplo, considerou-se sinais de referência senoidais com frequências:  $\omega_r = 0,1\omega_u$ ,  $\omega_r = 0,3\omega_u$ ,  $\omega_r = 0,5\omega_u$ ,  $\omega_r = 0,7\omega_u$  e  $\omega_r = 0,9\omega_u$ . Os conjuntos de parâmetros de sintonia e as medidas de desempenho são apresentados nas tabelas 19 e 20, respectivamente para os controladores PR e PRA. Os dez controladores sintonizados pelo método GOF resultaram em sistemas estáveis em malha fechada. Os sinais de referência e de saída do processo para  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e para  $\omega_r = 0,7\omega_u$  com ambas topologias de controle são exibidos na Figura 62.

Os diagramas de resposta em frequência do processo,  $G_a(j\omega)$ , e das funções de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$  e  $C_{pra}(j\omega)G_a(j\omega)$ , para as frequências  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $\omega_r = 0,7\omega_u$  são apresentados na Figura 63. Constata-se que para  $\omega_r = 0,1\omega_u$  ambos controladores

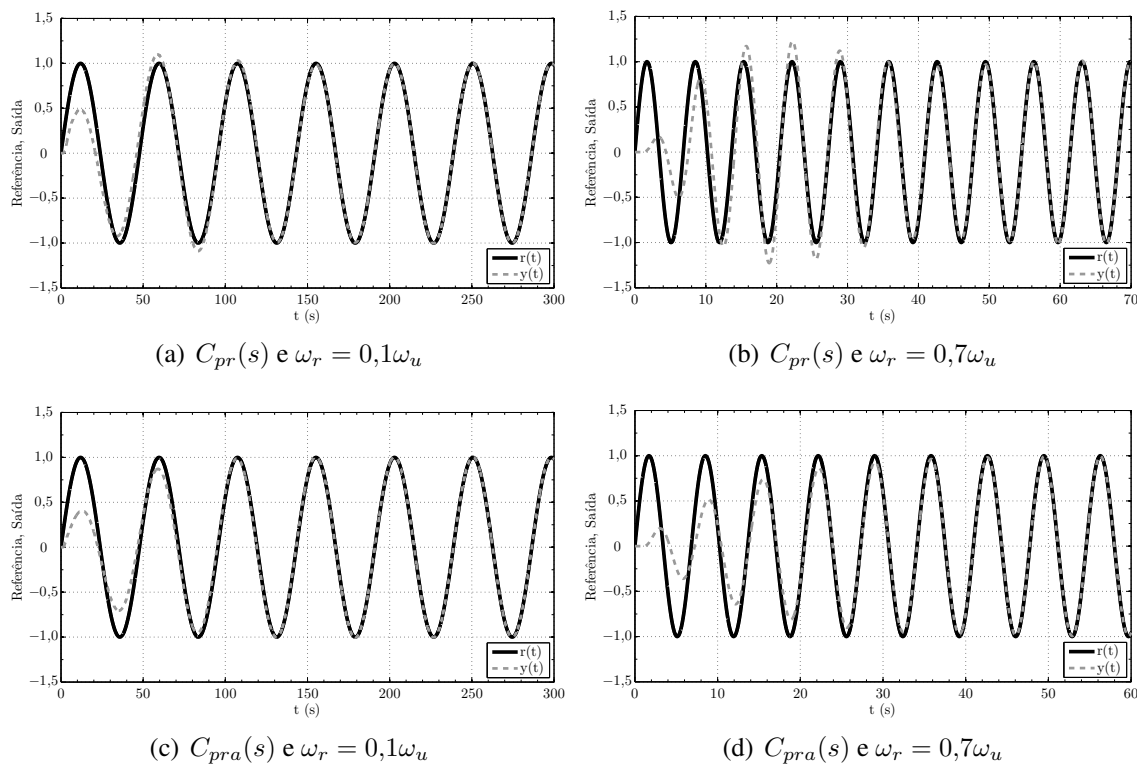
Tabela 19 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_a(s)$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,132$	0	1,01	0,0695	-0,0173	126	2,6	9,9
$0,3\omega_u = 0,395$	0	0,928	0,0639	-0,143	39	2,5	6
$0,5\omega_u = 0,658$	0	0,768	0,0176	-0,329	16	1,7	1,2
$0,7\omega_u = 0,921$	0	0,524	0,012	-0,44	58	8,5	23
$0,9\omega_u = 1,18$	0	0,196	0,00446	-0,272	707	133	70

Tabela 20 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_a(s)$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,132$	0	1,01	0,162	-0,0112	2,5	0,526	3,29	126	2,6	0,5
$0,3\omega_u = 0,395$	0	0,954	0,149	-0,0951	2,5	0,526	3,29	91	5,7	1,9
$0,5\omega_u = 0,658$	0	0,836	0,123	-0,231	2,5	0,526	3,29	53	5,6	0,31
$0,7\omega_u = 0,921$	0	0,628	0,0835	-0,341	2,5	0,526	3,29	43	6,2	0
$0,9\omega_u = 1,18$	0	0,272	0,0311	-0,244	2,5	0,526	3,29	115	22	4,4

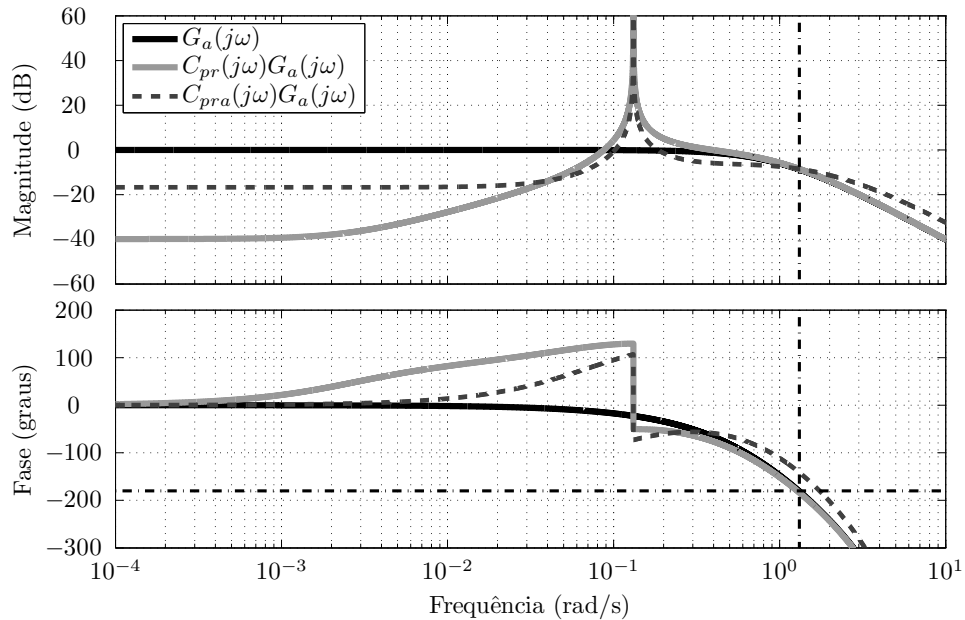
Figura 62 – Sinal de referência senoidal e resposta do sistema em malha fechada considerando o processo  $G_a(s)$  com os controladores PR e PRA.



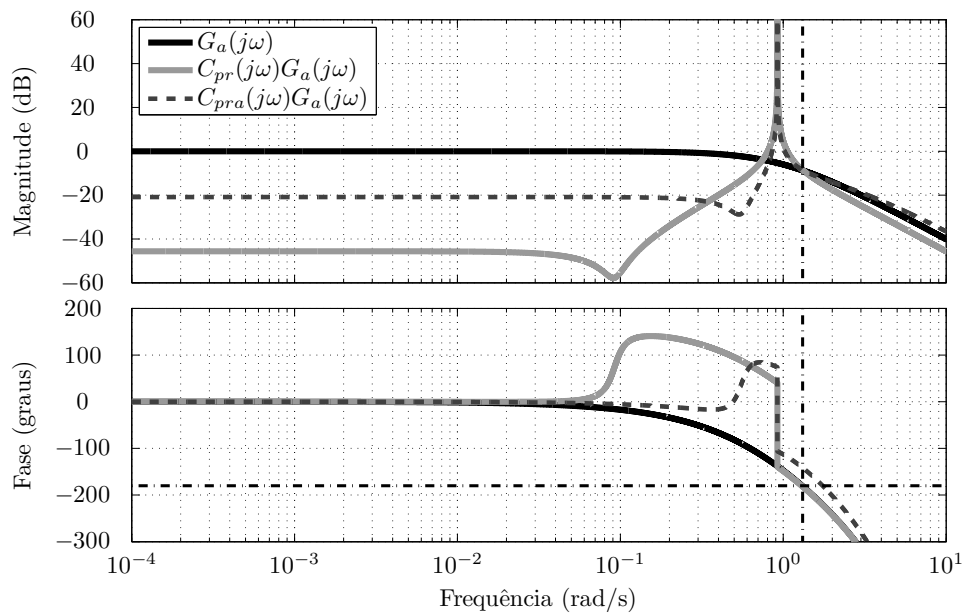
Fonte: Elaborado pelo autor.

resultaram em adequadas margens de estabilidade, o que é confirmado pelas medidas de desempenho do sistema em malha fechada. Por outro lado, para  $\omega_r = 0,7\omega_u$  verifica-se que a contribuição de  $-1^\circ$  de fase do controlador PR em  $\omega_u$  e a sua elevada magnitude

Figura 63 – Respostas em frequência do processo,  $G_a(j\omega)$ , e das funções de malha aberta,  $C_{pr}(j\omega)G_a(j\omega)$  e  $C_{pra}(j\omega)G_a(j\omega)$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



(a)  $\omega_r = 0,1\omega_u$



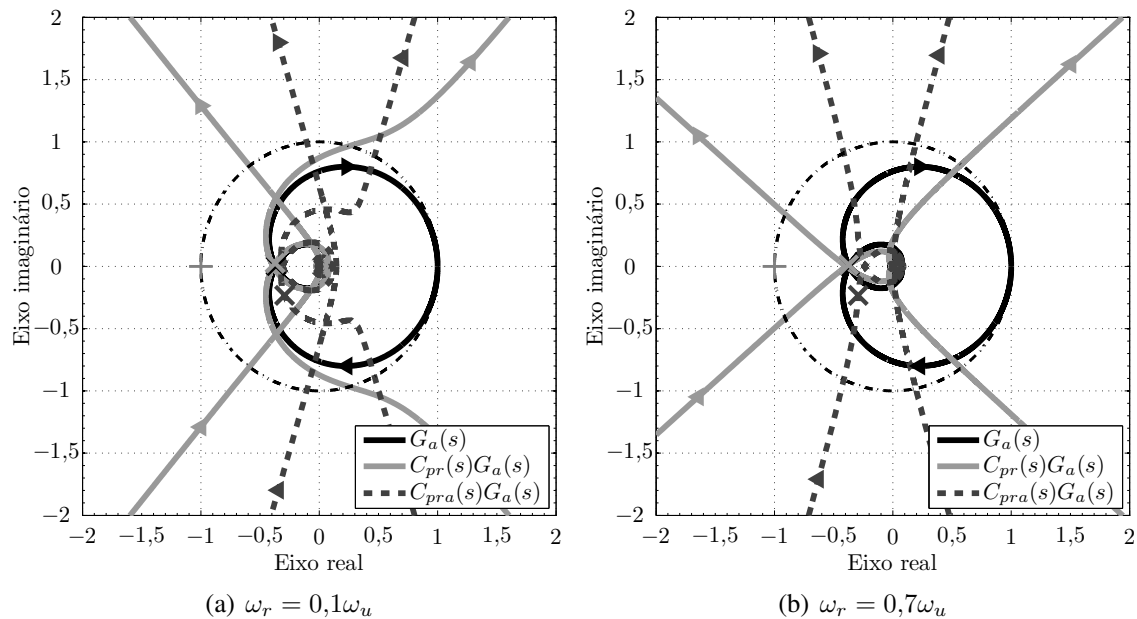
(b)  $\omega_r = 0,7\omega_u$

Fonte: Elaborado pelo autor.

na região próxima essa a frequência reduziram consideravelmente a margem de fase, resultando em elevados sobrepasso e número de ciclos para acomodação —principalmente para a frequência  $\omega_r = 0,9\omega_u$ . Este problema foi contornado com o controlador PRA, onde a inclusão do bloco de avanço de fase resultou em adequadas margens de estabilidade e sobrepasso para as frequências de ressonância consideradas, até mesmo para as mais próximas de  $\omega_u$ .

A Figura 64 apresenta os diagramas de Nyquist do processo,  $G_a(s)$ , além das funções

Figura 64 – Diagramas de Nyquist do processo,  $G_a(s)$ , e das funções de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_a(s)$  e  $C_{pra}(s)G_a(s)$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_a(s)$  e  $C_{pra}(s)G_a(s)$ , avaliadas para as frequências de ressonância  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e  $\omega_r = 0,7\omega_u$ . Como as funções de malha aberta tem polos em  $\pm j\omega_r$ , seus diagramas de Nyquist têm duas voltas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo. Estes diagramas cruzam o eixo real negativo mas não envolvem o ponto  $-1 + j0$ , o que resulta na estabilidade do sistema em malha fechada, dado que as funções de malha aberta não possuem polos no SPD do plano complexo.

Para  $\omega_r = 0,1\omega_u$  com ambos controladores PR e PRA, a resposta em frequência é suficientemente suave no entorno do eixo real negativo tal que o deslocamento do ponto crítico do processo —o qual está destacado com um ‘X’ nestes diagramas de Nyquist— para uma localização distante do ponto  $-1 + j0$  garante adequadas margens de estabilidade. O mesmo não acontece para  $\omega_r = 0,7\omega_u$  com o controlador PR, onde a proximidade do pico de ressonância em  $\omega_r$  com a frequência crítica do processo  $\omega_u$  implica que a distância entre o traçado do diagrama de Nyquist da função de malha aberta e o ponto  $-1 + j0$  é consideravelmente diminuída. Neste caso, deslocar o ponto crítico do processo para uma localização distante do ponto  $-1 + j0$  não garante adequada margem de fase, uma vez que a falta de suavidade da resposta em frequência na região próxima a  $\omega_u$  implica que ela não é deslocada para longe do ponto  $-1 + j0$ . Consequentemente, a margem de fase obtida com  $\omega_r = 0,7\omega_u$  é muito menor do que no caso  $\omega_r = 0,1\omega_u$  e, por isso, pior desempenho transitório é esperado (obtido) para frequências de referência próximas da frequência crítica do processo, lembrando que esta limitação é imposta pela estrutura PR e não pelas fórmulas de sintonia propostas.

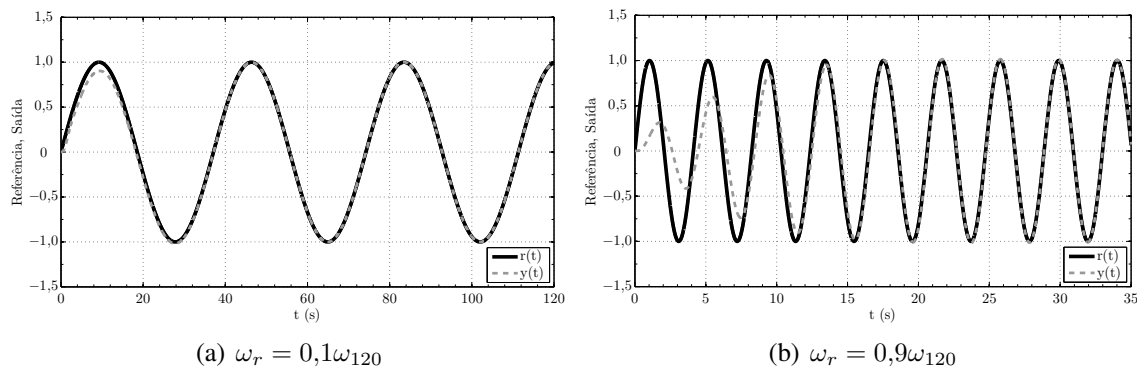
Este problema foi solucionado com o controlador PRA, como pode ser observado para  $\omega_r = 0,7\omega_u$ , no qual a inclusão do bloco de avanço de fase resultou em um aumento considerável da margem de fase e na redução do máximo sobressaio e do número de ciclos para acomodação considerando as frequências mais próximas de  $\omega_u$ .

Tabela 21 – Dados do experimento do RFA para o processo  $G_b(s)$ .

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
$0^\circ$	$-180^\circ$	2,4	0	–	–	1	–	–
$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,4	0	0,589	3,71	0,757	1,69	0,255

Tabela 22 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_b(s)$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,169$	0	3,85	1,14	$-0,0562$	27	0,74	1,9
$0,3\omega_{120} = 0,508$	0	3,68	1,05	$-0,484$	13	1,1	0,45
$0,5\omega_{120} = 0,847$	0	3,30	0,867	$-1,21$	15	2,1	0,66
$0,7\omega_{120} = 1,19$	0	2,59	0,590	$-1,86$	11	2,0	0,21
$0,9\omega_{120} = 1,52$	0	1,22	0,220	$-1,44$	27	6,5	1,6

Figura 65 – Sinal de referência senoidal e resposta do sistema em malha fechada considerando o processo  $G_b(s)$  com o controlador PR.

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 4.3.2 Processo da Classe B

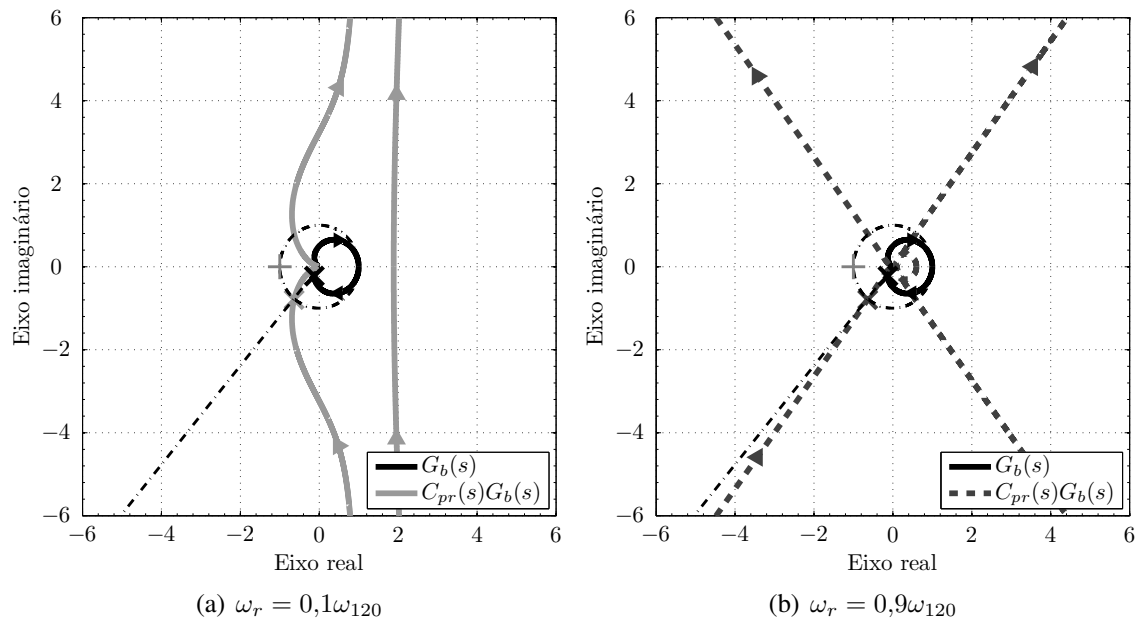
O processo da Classe B é descrito pela seguinte função de transferência

$$G_b(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}. \quad (139)$$

Para a Classe B, identifica-se o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$  através do experimento do RFA com  $-60^\circ$ . Os dados deste experimento realizado com o processo  $G_b(s)$  estão apresentados na Tabela 21.

Os controladores PRs são determinados através de (129), por tratar-se de um processo da Classe B. Neste exemplo, considerou-se sinais de referência senoidais com frequências:  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$ ,  $\omega_r = 0,3\omega_{120}$ ,  $\omega_r = 0,5\omega_{120}$ ,  $\omega_r = 0,7\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$ . Os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PRs e as medidas de desempenho para essas frequências estão resumidos na Tabela 22, onde verifica-se que os cinco controladores resultaram em sistemas estáveis em malha fechada. Os sinais de referência e de saída do sistema em malha fechada obtidos com os controladores projetados para  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$  e para  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$  são apresentados na Figura 65.

Figura 66 – Diagramas de Nyquist do processo,  $G_b(s)$ , e da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_b(s)$ . As linhas traço e ponto pretas destacam a circunferência de raio unitário e a reta com fase  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 56 são representados os diagramas de resposta em frequência do processo  $G_b(j\omega)$  e da função de malha aberta  $C_{pr}(j\omega)G_b(j\omega)$  para as frequências  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$ . Através deste gráfico, verifica-se que, para ambos valores de frequência de ressonância, a função de malha aberta avaliada em  $\omega_{120}$  tem magnitude unitária e  $-130^\circ$  de fase, assim, resultando em  $50^\circ$  de margem de fase.

Os diagramas de Nyquist da função de transferência do processo,  $G_b(s)$ , e da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_b(s)$ , são apresentados na Figura 66, considerando as frequências  $\omega_r = 0,1\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{120}$ . Nota-se que, para ambas frequências de ressonância, os controladores PRs sintonizados movem o ponto identificado da resposta em frequência do processo para a localização  $p = 1 \angle -130^\circ$ . Devido ao fato que as funções de malha aberta têm polos em  $\pm j\omega_r$  os seus diagramas de Nyquist possuem duas voltas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo. Como o traçado do diagrama de Nyquist de  $C_{pr}(s)G_b(s)$  não envolve o ponto  $-1 + j0$  e  $C_{pr}(s)G_b(s)$  não possui polo no SPD do plano  $s$ , constata-se que o sistema em malha fechada é estável com ambos controladores.

### 4.3.3 Processo da Classe C

O processo da Classe C tem função de transferência dada por

$$G_c(s) = \frac{1}{s + 1}. \quad (140)$$

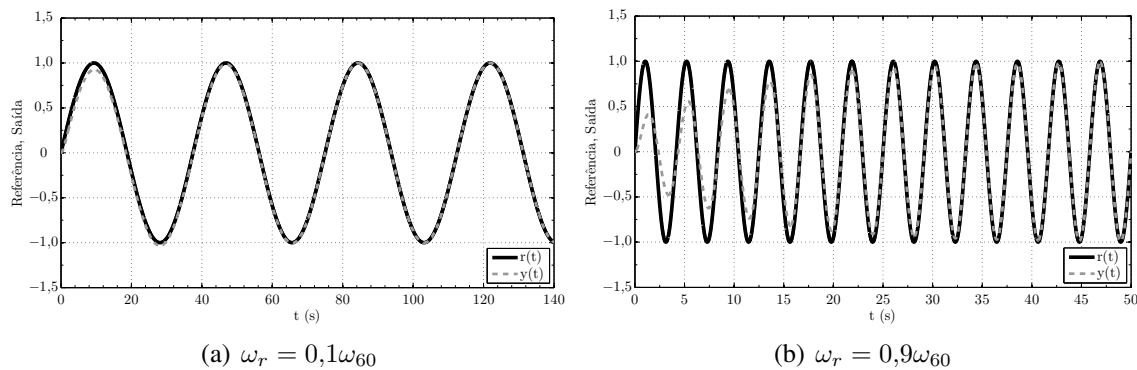
Por pertencer à Classe C, a condição de auto-oscilação é obtida no experimento RFA com  $-120^\circ$  e, conseqüentemente, o ponto da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$  é identificado. Os dados deste experimento realizado com o processo  $G_c(s)$  estão resumidos na Tabela 23.

Tabela 23 – Dados do experimento do RFA para o processo  $G_c(s)$ .

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
$0^\circ$	$-180^\circ$	1,6	0	–	–	1	–	–
$-60^\circ$	$-120^\circ$	1,6	0	–	–	–	–	–
$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,6	0	0,532	3,75	0,501	1,68	0,501

Tabela 24 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_c(s)$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,168$	0	1,73	1,66	$-0,00923$	40	1,1	3,3
$0,3\omega_{60} = 0,503$	0	1,70	1,52	$-0,0817$	6,0	0,48	0
$0,5\omega_{60} = 0,838$	0	1,63	1,26	$-0,218$	9,9	1,3	0
$0,7\omega_{60} = 1,17$	0	1,46	0,853	$-0,383$	17	3,2	0
$0,9\omega_{60} = 1,51$	0	0,956	0,318	$-0,414$	41	9,7	0

Figura 67 – Sinal de referência senoidal e resposta do sistema em malha fechada considerando o processo  $G_c(s)$  com o controlador PR.

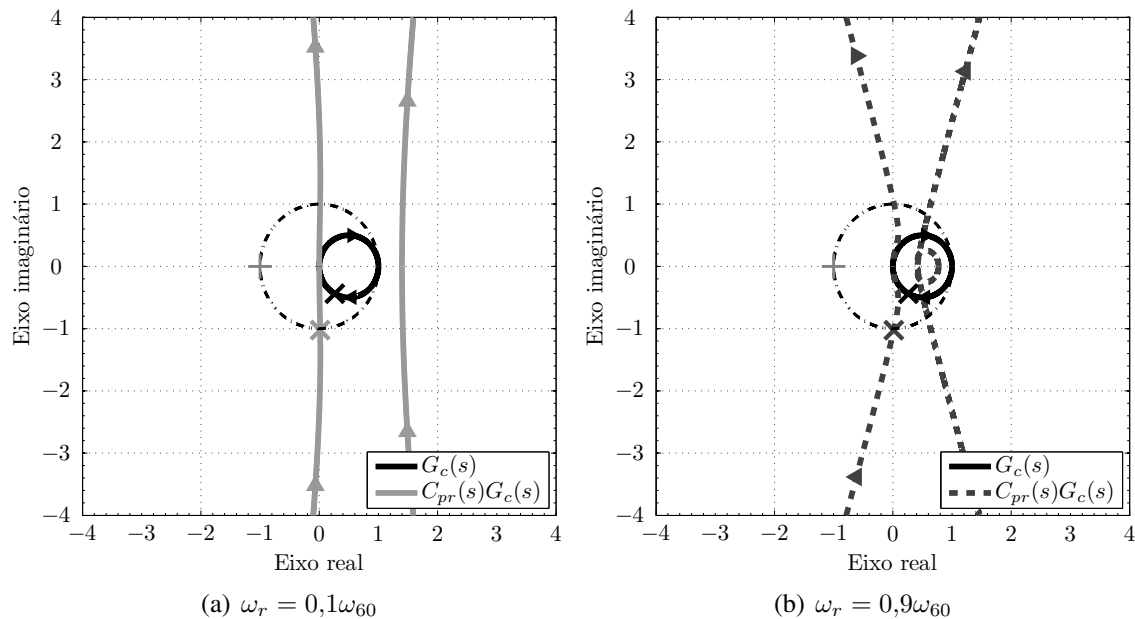
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os parâmetros dos controladores PRs são sintonizados por meio de (130), por tratar-se de um processo da Classe C. Neste exemplo, considerou-se sinais de referência senoidais com frequências:  $\omega_r = 0,1\omega_{60}$ ,  $\omega_r = 0,3\omega_{60}$ ,  $\omega_r = 0,5\omega_{60}$ ,  $\omega_r = 0,7\omega_{60}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{60}$ . Os conjuntos dos parâmetros de sintonia e as medidas de desempenho para essas frequências estão resumidos na Tabela 24, na qual constata-se que os cinco controladores resultaram em sistemas estáveis em malha fechada. Os sinais de referência e de saída do sistema em malha fechada com os controladores projetados para as frequências  $\omega_r = 0,1\omega_{60}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{60}$  são apresentados na Figura 67.

As respostas em frequência de  $G_c(j\omega)$  e de  $C_{pr}(j\omega)G_c(j\omega)$  considerando as frequências  $\omega_r = 0,1\omega_{60}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{60}$  estão apresentadas na Figura 57. Neste gráfico, comprova-se que, na frequência identificada do processo, a função de malha aberta com ambos controladores tem magnitude unitária e  $-90^\circ$  de fase, o que resulta em margem de fase de  $90^\circ$ .

Na Figura 68 são representados os diagramas de Nyquist de  $G_c(s)$  e da função de transferência de malha aberta  $C_{pr}(s)G_c(s)$  para as frequências  $\omega_r = 0,1\omega_{60}$  e  $\omega_r = 0,9\omega_{60}$ . Devido aos polos em  $\pm j\omega_r$ , o diagrama de Nyquist  $C_{pr}(s)G_c(s)$  tem duas vol-

Figura 68 – Diagramas de Nyquist do processo,  $G_c(s)$ , e da função de transferência de malha aberta,  $C_{pr}(s)G_c(s)$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

tas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo. Além disto, para ambas frequências  $\omega_r$ , o diagrama de Nyquist de  $C_{pr}(j\omega)G_c(j\omega)$  não envolve o ponto  $-1 + j0$ , comprovando a estabilidade do sistema em malha fechada, visto que as funções de malha aberta não possuem polos no SPD do plano  $s$ . Também confirma-se que os controladores projetados efetivamente deslocam o ponto identificado do processo para  $p = 1 \angle -90^\circ$ .

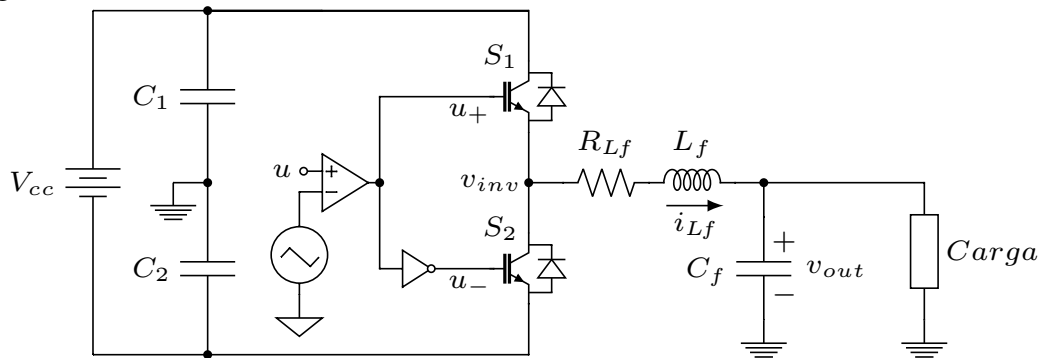
Na próxima seção são descritos os procedimentos para a implementação prática e os resultados do método GOF aplicado na sintonia do sistema de controle do estágio de saída de uma UPS.

#### 4.4 Aplicação experimental

Nesta seção, o método GOF para a sintonia do controlador PR será avaliado experimentalmente no controle do estágio de saída de uma UPS comercial monofásica de 3,5 kVA fabricada pela CP Eletrônica, uma afiliada da Schneider Electric. Do ponto de vista de sistemas de controle, as normas que regulamentam os requisitos de desempenho destes equipamentos determinam que, em condições de regime permanente, a tensão de saída de uma UPS deve ser um sinal senoidal com amplitude e frequências fixas, além de apresentar níveis máximos de taxa de distorção harmônica (THD, do termo em inglês *Total Harmonic Distortion*) e de distorção harmônica individual (IHD, do termo em inglês *Individual Harmonic Distortion*) na condição sem carga e quando submetida a distúrbios periódicos decorrentes da conexão de cargas lineares e não lineares. Em condições transitórias, é exigida uma pequena variação da amplitude da tensão de saída e rápida resposta em situações de aplicação e retirada de carga. Assim, o problema de controle do estágio de saída de uma UPS contempla o seguimento de referência senoidal e a rejeição de distúrbios periódicos e, por essa razão, trata-se de um bom exemplo de aplicação do método GOF para a sintonia do controlador PR proposto neste capítulo.



Figura 69 – Representação esquemática do estágio de saída de uma *UPS* monofásica com carga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

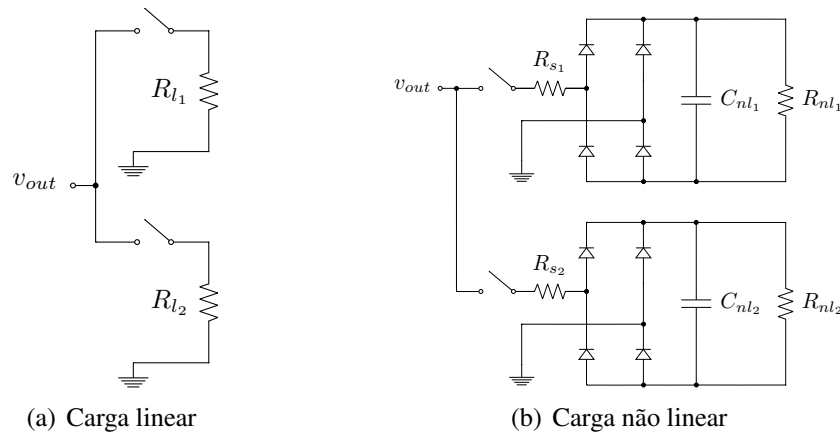
#### 4.4.1 Descrição do processo e da configuração experimental

O estágio de saída da *UPS* considerada neste trabalho converte a tensão contínua em alternada através de um inversor monofásico com topologia em meia ponte em conjunto com um filtro passa-baixas LC de segunda ordem, conforme apresenta o esquemático da Figura 69, na qual, por simplificação, omitiu-se a dependência temporal dos sinais. O acionamento dos *IGBTs* (do termo em inglês *Insulated Gate Bipolar Transistor*)  $S_1$  e  $S_2$  é realizado pelos sinais  $u_+(t)$  e  $u_-(t)$ , obtidos através da modulação *PWM* (do termo em inglês *Pulse-Width Modulation*) do sinal de controle  $u(t)$ . Devido ao chaveamento dos *IGBTs*, a tensão de entrada do filtro passa-baixas, sinal  $v_{inv}(t)$ , tem forma de onda descontínua com valores  $\pm V_{cc}/2$ , nos quais  $V_{cc}$  é a tensão do barramento CC. O filtro passa-baixas é composto pelo resistor  $R_{L_f}$  em série com o indutor  $L_f$ , onde flui a corrente  $i_{L_f}(t)$ , e pelo capacitor  $C_f$ , sobre o qual é obtida a tensão de saída  $v_{out}(t)$ , a variável a ser controlada.

A avaliação do desempenho do sistema em malha fechada com os controladores projetados é baseada na norma IEC 62040-3 (IEC, 2011), a qual define, além da condição sem carga, a utilização de cargas linear e não linear apresentadas na Figura 70. Segundo essa norma, a carga linear deve ser composta por dois resistores,  $R_{l_1}$  e  $R_{l_2}$ , os quais correspondem respectivamente por 20% e por 80% da potência ativa nominal da *UPS*. Para *UPSs* com potência nominal inferior a 4 kVA, a carga não linear é formada por dois circuitos independentes contendo um resistor em série com uma ponte retificadora cuja saída é conectada a um filtro RC em paralelo. Esses dois circuitos são projetados para que o primeiro dissipe 25% da potência aparente nominal da *UPS*, enquanto o segundo dissipe os 75% restantes. A análise harmônica da corrente de entrada dessa carga não linear considerando uma tensão de alimentação senoidal mostra que as componentes de perturbação mais significativas estão na primeira, terceira, quinta, sétima e nona harmônicas (PEREIRA *et al.*, 2014), (BERTOLDI, 2019).

Para a análise do desempenho do sistema de controle são considerados dois cenários de testes baseados na norma IEC 62040-3: o primeiro avalia o desempenho em regime permanente através do valor eficaz, *THD* e *IHD* da tensão de saída; enquanto o segundo avalia o desempenho transitório através do desvio da tensão de saída na aplicação e retirada de carga. Em LORENZINI (2015) pode ser encontrada uma revisão sobre os assuntos referentes aos sistemas *UPS*, tais como normatização, dimensionamento das cargas linear e não linear de referência, bem como o detalhamento do procedimento de testes.

Figura 70 – Cargas conectadas à saída de uma *UPS* monofásica para testes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os testes experimentais foram realizados considerando o estágio de saída de uma *UPS* comercial monofásica de 3,5 kVA, cuja imagem é apresentada na Figura 71(a). O diagrama em blocos da configuração experimental é representado na Figura 71(b) —onde a dependência temporal dos sinais foi omitida—, enquanto seus principais parâmetros estão descritos na Tabela 25. Nestes testes, a rede elétrica fornece energia, através de um transformador variável, para uma ponte retificadora trifásica, cuja saída resulta no barramento CC. O inversor *PWM* converte a tensão contínua para alternada por meio de um módulo *IGBT*. A aquisição de dados, implementação do experimento do RFA e do controlador são realizados em um sistema de tempo-real em conjunto com circuitos de condicionamento, nos quais a corrente no indutor é medida com um sensor de efeito Hall e a tensão de saída é obtida através de um divisor resistivo em conjunto com um optoacoplador.

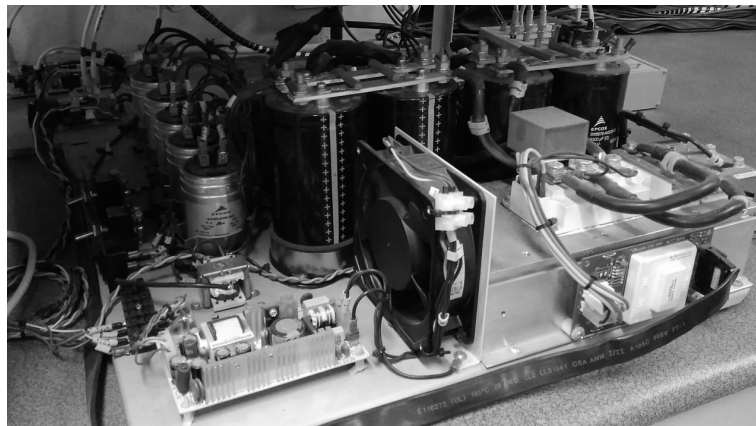
Como o experimento do RFA e os controladores são implementados em um sistema de tempo-real, é necessária a obtenção da versão em tempo discreto dos *FOIs* e da estrutura de controle ressonante. A versão em tempo discreto da função de transferência  $F(s)$  em tempo contínuo, apresentada em (62), foi obtida por meio da transformação bilinear — pois é fundamental manter a característica de fase constante—, enquanto a transformação bilinear com *prewarping* na frequência  $\omega_r$  foi aplicada às funções de transferência dos controladores. Em ambos os casos, foi utilizado o período de amostragem  $T_s = 1/(2f_{tri})$ , onde  $f_{tri}$  é o período da portadora triangular do *PWM*.

Para verificação de desempenho, a aquisição das curvas dos sinais da corrente no indutor, da tensão e da corrente de saída (corrente na carga) é realizada com um osciloscópio em conjunto com pontas de prova de tensão e de corrente. A análise harmônica da tensão de saída é executada por meio de um analisador de qualidade de energia.

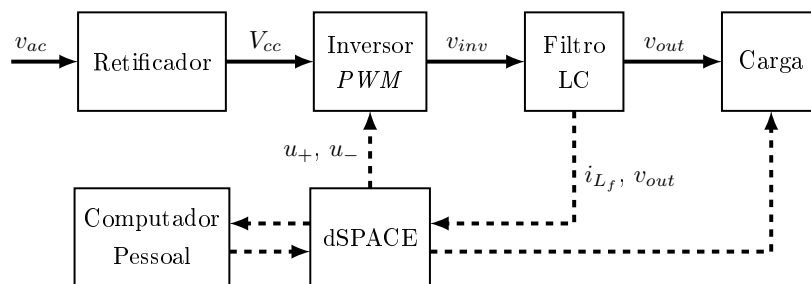
#### 4.4.2 Projeto do sistema de controle

Nesta seção será apresentado o projeto do sistema de controle a ser aplicado no estágio de saída de uma *UPS* anteriormente descrito. Visando o seguimento do sinal de referência senoidal, serão consideradas duas topologias de controle cujos diagramas em blocos estão apresentados na Figura 72. Inicialmente será sintonizado o controlador PR, cuja função de transferência é definida em (108), no laço de realimentação da tensão de saída, conforme representado na Figura 72(a). Em seguida, será sintonizada a estrutura de controle utilizada em PEREIRA *et al.* (2014) que possui um controlador proporcional, ganho  $K_c$ ,

Figura 71 – Configuração experimental do estágio de saída de uma *UPS* monofásica com carga.



(a) Estágio de saída de uma *UPS* monofásica



(b) Diagrama em blocos da configuração experimental

Fonte: Elaborado pelo autor.

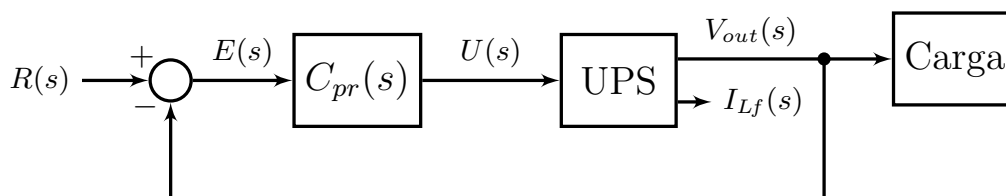
na realimentação da corrente no indutor e um controlador PR no laço de realimentação da tensão de saída, como retratado na Figura 72(b).

O desempenho do sistema em malha fechada com essas topologias será comparado com os resultados obtidos em BERTOLDI (2019), onde os parâmetros da estrutura PR com realimentação da corrente no indutor foram determinados através da solução de um problema de otimização convexa sujeito a restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *linear matrix inequalities — LMIs*) para o mesmo estágio de saída de *UPS*. Nesse problema de otimização, o projeto dos ganhos de realimentação é realizado visando a estabilidade robusta do sistema considerando a incerteza na carga e o atendimento de um desempenho transitório desejado. Para alcançar estes dois objetivos, além de restrições que garantem o posicionamento dos polos do sistema em malha fechada em uma determinada região do plano complexo, é utilizada a minimização de uma função custo que considera a soma ponderada do estado do sistema e do sinal de controle.

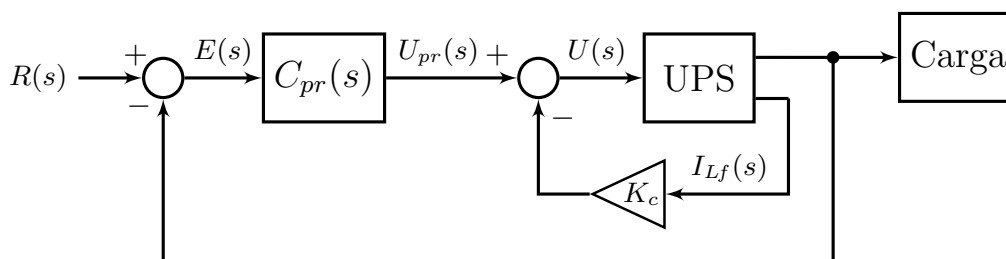
Na sequência, são descritas as etapas de implementação do método GOF para a sintonia dessas duas topologias de controle, nas quais, primeiramente realiza-se o experimento do RFA e, então, aplica-se as fórmulas de sintonia desenvolvidas utilizando a informação identificada da resposta em frequência do processo. Nos experimentos do RFA realizados com o estágio de saída da *UPS* utilizou-se referência nula, ou seja,  $R(s) = 0$  para obtenção de uma oscilação sustentada com valor médio igual a zero na saída do processo, considerando o sistema sujeito a 100% da carga linear. Os parâmetros do processo e dos controladores são apresentados no SI.

Tabela 25 – Parâmetros da configuração experimental.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Potência aparente de saída	$S$	3,5 kVA
Fator de potência de saída	$\cos \phi$	0,7
Valor eficaz da tensão de saída	$V_{ref}$	127 V
Frequência da tensão de saída	$f$	60 Hz
Indutância do filtro de saída	$L_f$	1 mH
Resistência do filtro de saída	$R_{L_f}$	15,0 m $\Omega$
Capacitância do filtro de saída	$C_f$	300 $\mu$ F
Tensão do barramento CC	$V_{cc}$	520 V
Capacitâncias do barramento CC	$C_1, C_2$	6600 $\mu$ F
Frequência da portadora triangular do <i>PWM</i>	$f_{tri}$	18 kHz
Período de amostragem	$T_s$	27,78 $\mu$ s
Resistência 20% da carga linear	$R_{l_1}$	33 $\Omega$
Resistência 80% da carga linear	$R_{l_2}$	8,2 $\Omega$
Resistência série de 25% da carga não linear	$R_{s_1}$	0,39 $\Omega$
Resistência série de 75% da carga não linear	$R_{s_2}$	0,39 $\Omega$
Capacitância 25% da carga não linear	$C_{nl_1}$	3300 $\mu$ F
Capacitância 75% da carga não linear	$C_{nl_2}$	9900 $\mu$ F
Resistência 25% da carga não linear	$R_{nl_1}$	38,3 $\Omega$
Resistência 75% da carga não linear	$R_{nl_2}$	16,0 $\Omega$

Figura 72 – Diagrama em blocos dos sistemas de controle aplicados ao estágio de saída de uma *UPS*.

(a) Controlador PR no laço de tensão



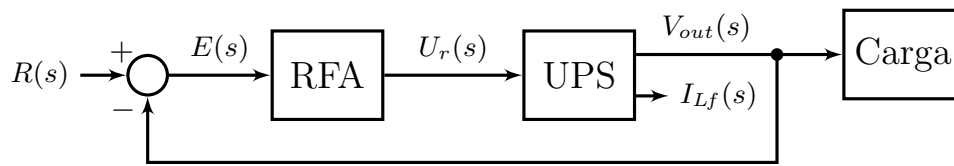
(b) Realimentação de corrente no indutor e controlador PR no laço de tensão

Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.4.2.1 Controlador PR

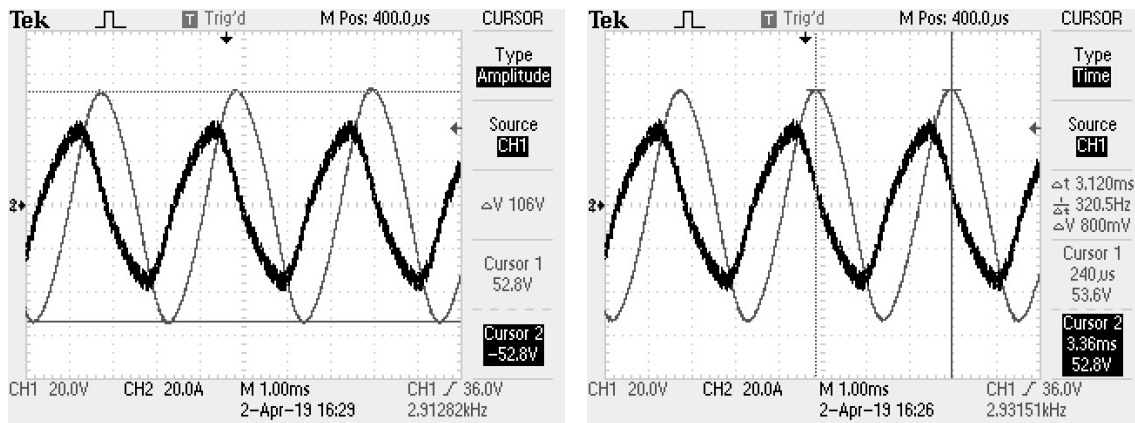
A sintonia do controlador PR no laço de realimentação da tensão de saída apresentado na Figura 72(a) é iniciada pela implementação do experimento do RFA conforme mostra o diagrama em blocos retratado na Figura 73. Através desse experimento, deseja-se iden-

Figura 73 – Diagrama em blocos do experimento do RFA para a identificação de um ponto da resposta em frequência de  $G_v(j\omega)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 74 – Saída do experimento do RFA com  $-60^\circ$  realizado na malha  $G_v(s)$ .



(a) Amplitude  $A_{120}$

(b) Período  $T_{120}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 26 – Dados do experimento do RFA realizado na malha  $G_v(s)$ .

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
$-60^\circ$	$-120^\circ$	$5,5 \times 10^3$	0	52,8	$3,120 \times 10^{-3}$	$6,271 \times 10^{-3}$	$2,014 \times 10^3$	1,202

tificar um ponto da resposta em frequência da função de transferência da malha de tensão, a qual é definida por

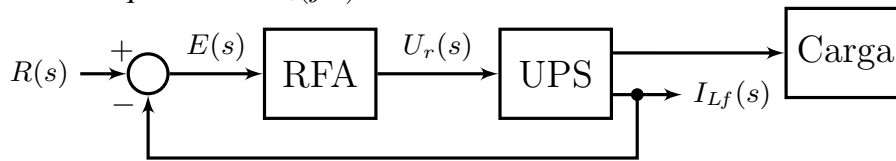
$$G_v(s) = \frac{V_{out}(s)}{U_r(s)},$$

onde  $U_r(s)$  é o sinal de saída do RFA.

Nesse experimento, a condição de auto-oscilação foi verificada com o RFA de  $-60^\circ$ . Assim, o processo pertence à Classe B e identificou-se o ponto da resposta em frequência de  $G_v(j\omega)$  cuja fase é  $-120^\circ$ . A Figura 74 apresenta os sinais da tensão de saída (linha cinza) e da corrente no indutor (linha preta) obtidos. A aparência serrilhada visualizada no sinal corrente é devida ao chaveamento dos *IGBTs*. Os dados envolvidos nesse experimento estão resumidos na Tabela 26, com os quais pode-se verificar que  $\omega_r/\omega_{120} \approx 0,19$ .

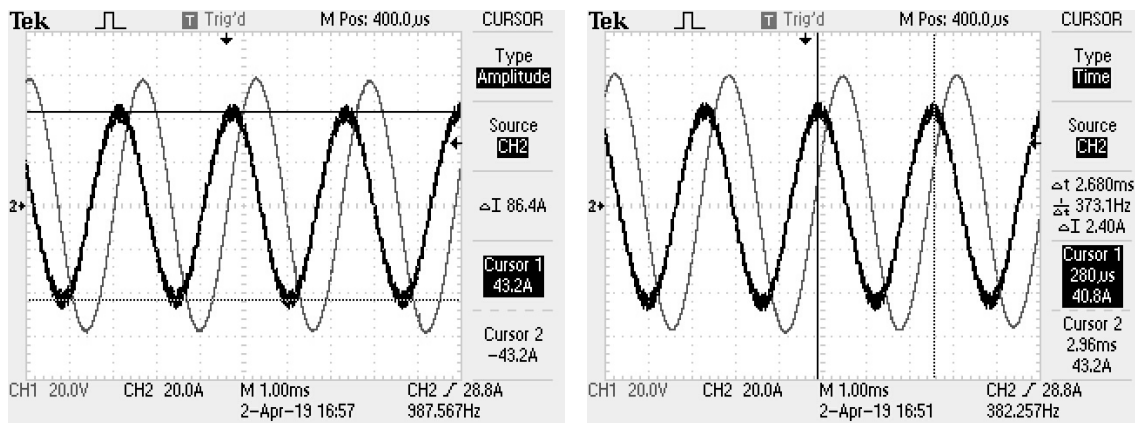
Por tratar-se de um processo da Classe B, o controlador PR é sintonizado através do conjunto de fórmulas proposto em (129), no qual são utilizadas as informações identificadas no experimento do RFA —frequência  $\omega_{120}$  e magnitude  $M_{120}$ —, considerando a frequência da senoide do sinal de referência  $\omega_r = 120\pi$  rad/s e o fator de amortecimento dos polos do controlador  $\xi = 0$ , para obtenção de seguimento com erro nulo. Os parâmetros do controlador PR obtido pelo método GOF são apresentados na Tabela 29.

Figura 75 – Diagrama em blocos do experimento do RFA para a identificação de um ponto da resposta em frequência de  $G_i(j\omega)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 76 – Saída do experimento do RFA com  $-120^\circ$  realizado na malha  $G_i(s)$ .



(a) Amplitude  $A_{60}$

(b) Período  $T_{60}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.4.2.2 Realimentação da corrente no indutor e controlador PR no laço de tensão

O projeto da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e controlador PR no laço de realimentação da tensão de saída representada na Figura 72(b) é realizado através de dois experimentos do RFA: o primeiro para determinação de  $K_c$ , e o segundo para a sintonia de  $C_{pr}(s)$  considerando a realimentação da corrente no indutor.

Assim, para determinação de  $K_c$ , inicialmente implementou-se o experimento do RFA retratado no diagrama em blocos da Figura 75, no qual deseja-se identificar um ponto da resposta em frequência da malha de corrente, cuja função de transferência é a seguinte

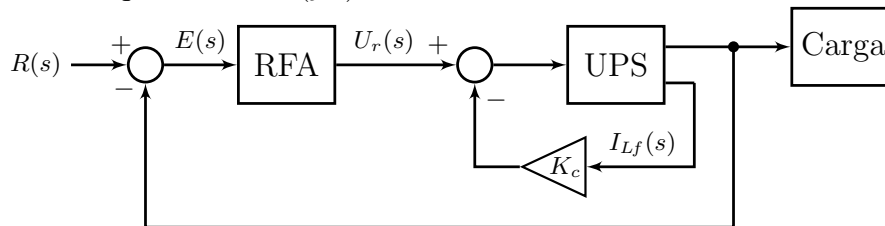
$$G_i(s) = \frac{I_{L_f}(s)}{U_r(s)}.$$

Neste caso, o comportamento auto-oscilatório foi obtido com o RFA de  $-120^\circ$ , portanto esta malha pertence à Classe C, e identificou-se o ponto da resposta em frequência de  $G_i(j\omega)$  no qual a fase é  $-60^\circ$ . Na Figura 76, são apresentados os sinais da corrente no indutor (linha preta) e da tensão de saída (linha cinza). A aparência serrilhada visualizada na curva de corrente é causada pelo chaveamento dos IGBTs, dessa forma, a medida da amplitude do sinal da corrente é realizada no valor médio do serrilhado. A Tabela 27 resume as informações referentes a esse experimento. Com essas informações, a realimentação da corrente no indutor é determinada através da fórmula de sintonia para o controlador proporcional aplicado à Classe C apresentada na Tabela 4. Nesta fórmula, utiliza-se a magnitude identificada  $M_{60}$  para a obtenção do valor de  $K_c$ .

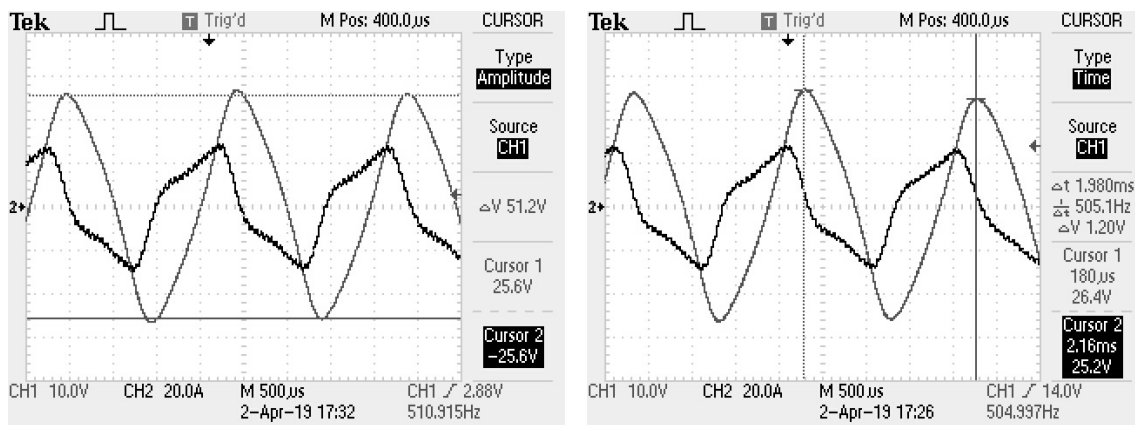
Tendo em vista o projeto do controlador PR a ser utilizado no laço de tensão, um segundo experimento do RFA já considerando a realimentação da corrente no indutor

Tabela 27 – Dados do experimento do RFA realizado na malha  $G_i(s)$ .

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
$-120^\circ$	$-60^\circ$	$1,5 \times 10^6$	0	43,2	$2,680 \times 10^{-3}$	$3,216 \times 10^{-5}$	$2,344 \times 10^3$	0,7033

Figura 77 – Diagrama em blocos do experimento do RFA para a identificação de um ponto da resposta em frequência de  $G_v(j\omega)$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 78 – Saída do experimento do RFA com  $-60^\circ$  realizado na malha  $G_v(s)$ .(a) Amplitude  $A_{120}$ (b) Período  $T_{120}$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 28 – Dados do experimento do RFA realizado na malha  $G_v(s)$  com realimentação da corrente no indutor.

$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A_\nu$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
$-60^\circ$	$-120^\circ$	$3,0 \times 10^4$	0	25,6	$1,980 \times 10^{-3}$	$4,626 \times 10^{-3}$	$3,173 \times 10^3$	0,1449

é realizado através da configuração apresentada na Figura 77. Com esse experimento, pretende-se identificar um ponto da resposta em frequência da função de transferência da malha de tensão nessa configuração, a qual é definida por  $G_v(s) = V_{out}(s)/U_r(s)$ .

Da mesma forma que no primeiro experimento do RFA implementado anteriormente no laço de tensão, a oscilação sustentada em  $V_{out}(s)$  foi obtida com o RFA de  $-60^\circ$ . Com isso, verifica-se que o processo pertence à Classe B e identifica-se o ponto da resposta em frequência de  $G_v(j\omega)$  cuja fase é  $-120^\circ$ . Na Figura 78, são apresentadas as curvas da tensão de saída (linha cinza) e da corrente no indutor (linha preta). Na Tabela 28, estão listados os dados referentes a esse experimento. Neste caso, considerando a realimentação da corrente, a relação  $\omega_r/\omega_{120}$  é aproximadamente igual a 0,12.

Tabela 29 – Parâmetros da estrutura de controle.

Método	$K_c$	$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$
GOF PR	–	$120\pi$	0	0,804	281	$-5,83 \times 10^4$
GOF $K_c + PR$	6,40	$120\pi$	0	6,75	$3,76 \times 10^3$	$-4,89 \times 10^5$
SPOC-LMI $K_c + PR$	5,51	$120\pi$	0	5,69	302	$-2,76 \times 10^3$

Como o estágio de saída da *UPS* com a realimentação da corrente no indutor pertence à Classe B, o controlador PR é determinado por meio do conjunto de fórmulas proposto em (129), onde utiliza-se a frequência  $\omega_{120}$  e a magnitude  $M_{120}$ , considerando  $\omega_r = 120\pi$  rad/s e  $\xi = 0$ . Os parâmetros obtidos pelo método GOF da estrutura de controle que possui realimentação da corrente no indutor e controlador PR no laço de tensão —convenientemente denominada de  $K_c + PR$ — são apresentados na Tabela 29, onde também são descritos os parâmetros obtidos em BERTOLDI (2019) através da solução de um problema de otimização convexa sujeito a restrições na forma de *LMIs* (SPOC-LMI).

Na próxima seção são apresentados os resultados da implementação experimental das duas estruturas de controle sintonizadas pelo método GOF bem como uma comparação com os resultados apresentados em BERTOLDI (2019) e com os requisitos de desempenho definidos na norma IEC 62040-3.

#### 4.4.3 Resultados experimentais

O desempenho em regime permanente do sistema de controle aplicado no estágio de saída da *UPS* foi avaliado nas condições sem carga (SC) e sujeito às cargas linear e não linear nominais, como define a norma IEC 62040-3. A Figura 79 apresenta os sinais da tensão (linha cinza) e da corrente de saída (linha preta) obtidas com 100% da carga linear e 100% da carga não linear considerando o controlador PR no laço de tensão, enquanto na Figura 80 estão representados estes sinais obtidos através da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão.

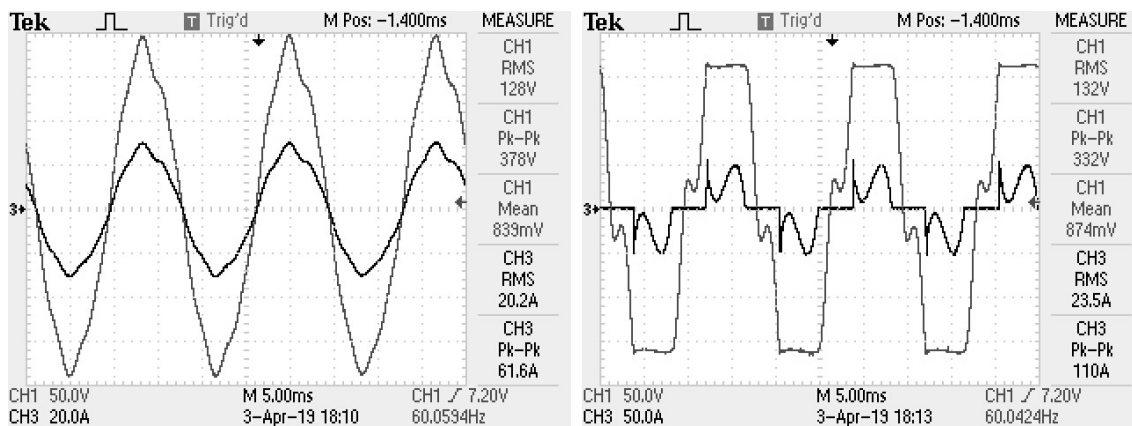
O sinal de controle é retratado na Figura 81 para as duas topologias de controle considerando 100% da carga não linear, a qual é a condição de maior exigência para uma *UPS* e seu sistema de controle em regime permanente. Verifica-se que a amplitude do sinal de controle com o controlador PR no laço de tensão é 7 V maior do que a obtida através da estrutura com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão. As amplitudes mínima e máxima do sinal de controle para ambas topologias estão dentro dos limites de excursão impostos por  $\pm V_{cc}/2$ .

Para as três condições de carga com ambas topologias de controle também foram obtidos os valores *RMS* e de *THD* da tensão de saída retratadas nas figuras 82 e 83. Na Tabela 30 estão resumidos os resultados do desempenho do sistema em regime permanente com os controladores sintonizados pelo método GOF, onde também são descritos os limites impostos pela norma IEC 62040-3 e os resultados apresentados em BERTOLDI (2019). Os valores de *THD* e *IHD* correspondem ao estágio de saída da *UPS* sujeito a 100% da carga não linear. As harmônicas pares e de ordem mais elevada que a décima quinta tem menor influência no sinal de tensão de saída e estão dentro dos limites definidos pela IEC 62040-3, por isto não foram apresentados os seus níveis de *IHD*.

O desempenho dinâmico da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão foi avaliado através da resposta aos degraus de carga linear —aditivo de 20% para 100% e subtrativo de 100% para 20%— e não



Figura 79 – Tensão e corrente de saída obtidas com o controlador PR no laço de tensão.

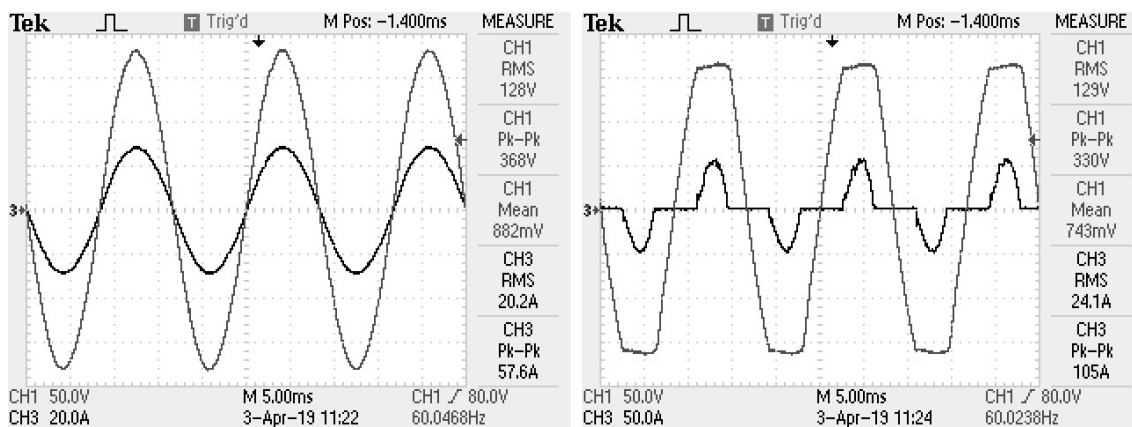


(a) Operação com 100% de carga linear

(b) Operação com 100% de carga não linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 80 – Tensão e corrente de saída obtidas através da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão.

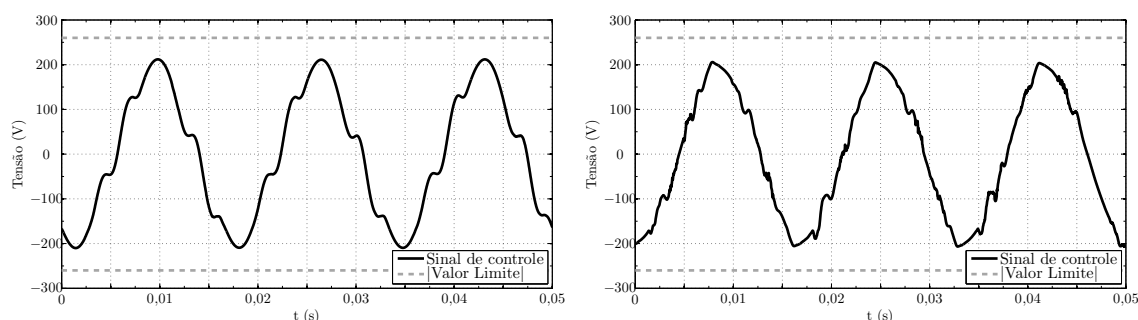


(a) Operação com 100% de carga linear

(b) Operação com 100% de carga não linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 81 – Sinal de controle com 100% de carga não linear.



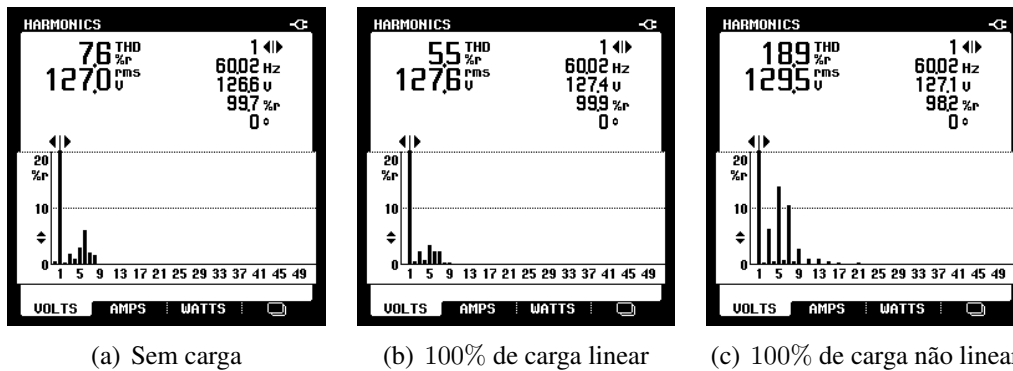
(a) Controlador PR

(b) Estrutura  $K_c$  + controlador PR

Fonte: Elaborado pelo autor.

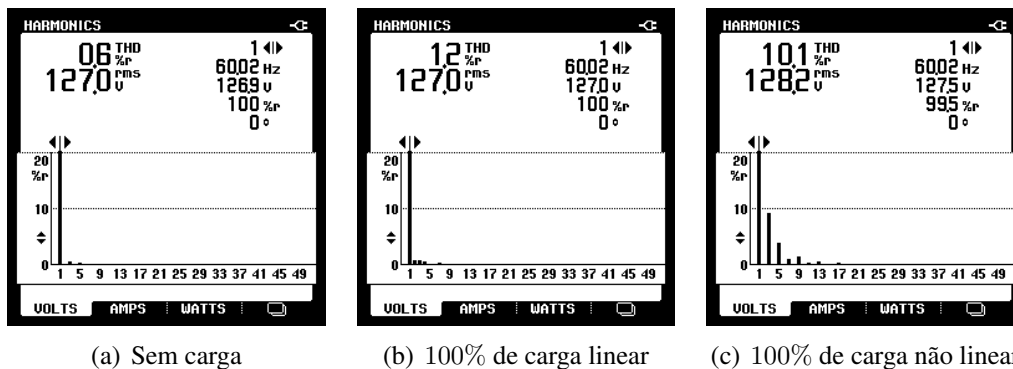
linear —aditivo de 25% para 100% e subtrativo de 100% para 25%. Neste teste, calcula-se o desvio da tensão de saída em relação à condição sem carga e compara-se a curva obtida

Figura 82 – Valores de  $THD$  e de  $RMS$  da tensão de saída obtidas com o controlador PR no laço de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 83 – Valores de  $THD$  e de  $RMS$  da tensão de saída obtidas através da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

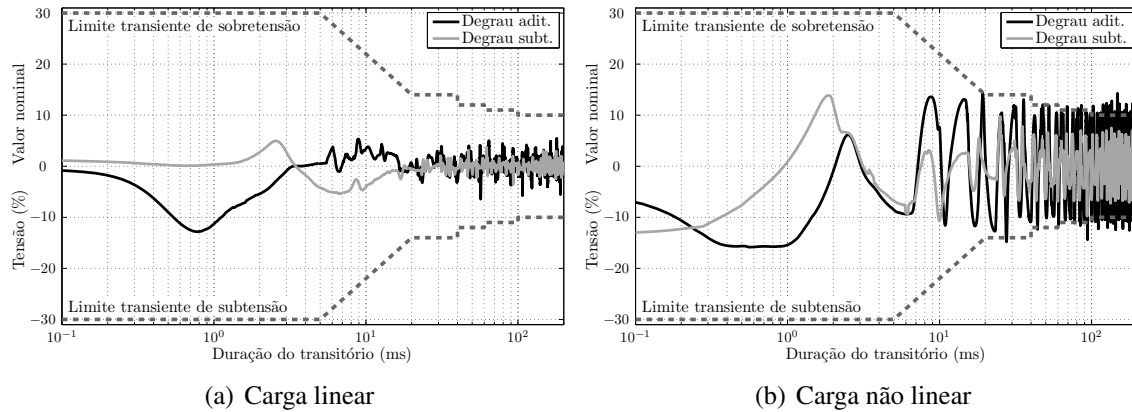
Tabela 30 – Resumo dos resultados experimentais.

Parâmetro	IEC	GOF PR	GOF $K_c + PR$	$LMI K_c + PR^1$
$V_{sc} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	127	127,0	NI
$V_{lin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	127,6	127,0	NI
$V_{nlin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	129,5	128,2	128,0
$THD$ [%]	8,00	<b>18,9</b>	<b>10,1</b>	<b>10,4</b>
$IHD_3$ [%]	5,00	<b>6,48</b>	<b>9,24</b>	<b>9,63</b>
$IHD_5$ [%]	6,00	14,4	3,79	3,58
$IHD_7$ [%]	5,00	11,1	0,93	0,99
$IHD_9$ [%]	1,50	<b>3,00</b>	1,40	1,35
$IHD_{11}$ [%]	3,50	1,09	0,38	0,38
$IHD_{13}$ [%]	3,00	1,13	0,67	0,69
$IHD_{15}$ [%]	0,30	<b>0,73</b>	0,16	NI

com o perfil de limite imposto pela norma IEC 62040-3, conforme mostra a Figura 84.

<sup>1</sup>Os dados representados por NI não são informados em BERTOLDI (2019).

Figura 84 – Perfil de tolerância do desvio da tensão de saída para degraus de carga e estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.4.4 Análise dos resultados

Destaca-se que as duas topologias de controle sintonizadas pelo método GOF garantiram a estabilidade do sistema em malha fechada, resultaram no seguimento do sinal de referência senoidal para as três condições de carga e também asseguraram a rejeição da harmônica de perturbação de primeira ordem quando utilizadas as cargas linear e não linear, lembrando que os controladores foram projetados através do experimento do RFA com 100% da carga linear.

Os resultados de desempenho estático  $THD$  e  $IHD$  obtidos com o controlador PR no laço de tensão não atendem aos limites exigidos pela norma IEC 62040-3. Além disso, esses resultados evidenciam que a realimentação negativa do sinal da corrente no indutor é fundamental no controle do estágio de saída da  $UPS$  considerada.

Por outro lado, a estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR no laço de tensão sintonizada pelo método GOF resultou em desempenho estático muito próximo do obtido pela solução de um problema de otimização convexa sujeito a restrições na forma de  $LMI$ s. Em ambos os casos, somente os valores de  $THD$  e  $IHD_3$  não atendem aos requisitos definidos pela IEC 62040-3.

Na análise de desempenho dinâmico, os resultados do perfil de tolerância do desvio de tensão para os degraus de carga mostram que os limites são atendidos (os desvios ficam dentro da área delimitada pelo perfil de tolerância) com a carga linear mas não são atendidos (os desvios ficam fora da área delimitada pelo perfil de tolerância) com a carga não linear. Por meio destes gráficos, também pode-se constatar que o tempo de recuperação é da ordem de 20 ms, ou seja, 1,2 ciclos do sinal de referência.

Devido à realimentação da corrente no indutor e, principalmente, ao modo ressonante sintonizado na frequência  $\omega_r$ , foi possível garantir o seguimento do sinal de referência senoidal nas três condições de carga e bom desempenho —com pleno atendimento dos requisitos definidos pela norma IEC 62040-3— na condição sem carga e quando utilizada a carga linear. Porém, como esperado, esta estrutura de controle não resultou em bom desempenho na rejeição das harmônicas de perturbação com frequência diferente de  $\omega_r$ , o que impossibilitou o atendimento dos requisitos definidos pela norma IEC 62040-3  $THD$ ,  $IHD_3$  e desvio de tensão para os degraus de carga quando utilizada a carga não linear e, desta maneira, motiva o desenvolvimento dos controladores com múltiplos modos

ressonantes apresentado no próximo capítulo.

Ainda deve-se salientar que pelo método GOF a estrutura de controle foi projetada através de dois experimentos do RFA para identificação de dois pontos da resposta em frequência do processo em conjunto com fórmulas de sintonia previamente desenvolvidas, enquanto que pela solução de um problema de otimização é necessário o conhecimento do modelo do processo e utilização de métodos avançados de projeto de sistemas de controle. Assim, o método GOF mostra-se como uma boa alternativa para a sintonia do controlador PR destinado ao controle do estágio de saída de *UPS* e, com isso, pode contribuir para disseminação e utilização da estratégia de controle ressonante neste tipo de aplicação.

#### 4.5 Passos para implementação do método GOF: realização do experimento do RFA com sintonia de controladores PRs e PRAs

1. Implementar o experimento do RFA com  $0^\circ$ , ou seja, inicialmente realizar o tradicional experimento do relé.
2. Alterar o parâmetro  $b$  que regula o *offset* do sinal de saída do relé para a obtenção de uma oscilação simétrica na saída do processo conforme necessário. Da mesma forma, variar o ganho do relé, parâmetro  $d$ , para modificar a amplitude da auto-oscilação.
3. Se o sinal de oscilação da saída do processo for simétrico, possuir amplitude e período de oscilação constantes e bem definidos, a partir desse sinal calcular: a amplitude de pico  $A_\nu$ , o período de oscilação  $T_\nu$  e a frequência de oscilação  $\omega_\nu = 2\pi/T_\nu$ .
4. Caso não seja obtida a condição de auto-oscilação diminuir a fase do elemento de fase constante de  $0^\circ$  para  $-60^\circ$  (ou de  $-60^\circ$  para  $-120^\circ$ ) e voltar para o item 2. Caso seja obtida a condição de auto-oscilação computar a fase do elemento de fase constante  $\angle F(j\omega_\nu)$ : se  $\angle F(j\omega_\nu) = \gamma$ , onde  $\gamma$  é a fase desejada para o RFA ( $0^\circ$ ,  $-60^\circ$  e  $-120^\circ$ ), passar para o item 5; se  $\angle F(j\omega_\nu) \neq \gamma$  alterar adequadamente a faixa de frequências do elemento de fase constante e voltar para o item 2.
5. Calcular a magnitude do processo na frequência identificada  $\omega_\nu$  por meio de

$$M_\nu = \frac{\pi A_\nu}{4d |F(j\omega_\nu)|},$$

onde  $F(j\omega_\nu)$  é a magnitude do elemento de fase constante nessa frequência.

6. Sintonizar os parâmetros do controlador PR ou PRA, cujas funções de transferência respectivamente são

$$C_{pr}(s) = K_p + \frac{K_{r1}s + K_{r2}}{s^2 + 2\xi\omega_r s + \omega_r^2},$$

$$C_{pra}(s) = \left( K_p + \frac{K_{r1}s + K_{r2}}{s^2 + 2\xi\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right),$$

através dos conjuntos de fórmulas de sintonia apresentados em (127) a (130) para o controlador PR e (137) para o controlador PRA utilizando os parâmetros  $\omega_\nu$  e  $M_\nu$ , considerando a frequência de  $\omega_r < \omega_\nu$  do sinal a ser seguido/rejeitado e o parâmetro  $\xi \geq 0$ , fator de amortecimento dos polos do modo ressonante.

## 4.6 Conclusões do capítulo

Neste capítulo foi proposto o método GOF para a sintonia dos controladores PR e PRA. Tal como o método GOF para a sintonia de controladores PID apresentado no capítulo anterior, conjuntos de fórmulas de sintonia para os controladores PR e PRA foram desenvolvidos a partir do conhecimento e reposicionamento em localização predeterminada no plano complexo do ponto identificado da resposta em frequência do processo visando a obtenção de adequadas margens de estabilidade e bom desempenho em malha fechada. Com base nessa abordagem teórica, os conjuntos de fórmulas de sintonia desenvolvidos para cada uma das três classes de processos definidas no experimento do RFA dependem unicamente do ponto identificado da resposta em frequência do processo, da frequência do sinal de interesse e do fator de amortecimento dos polos do modo ressonante.

Três processos de estudo de caso e dezoito famílias de processos da bateria de testes, cujos resultados são apresentadas no Apêndice D, foram empregados para desenvolver e avaliar minuciosamente o método GOF para a sintonia dos controladores PR e PRA. Todos os controladores sintonizados para esses processos resultaram em sistemas estáveis em malha fechada considerando  $\omega_r \leq 0,9\omega_v$ . Para a Classe A foi necessária a utilização de um bloco de avanço de fase em conjunto com a estrutura PR para o aumento da margem de fase. Assim, para as três classes de processos, foram obtidos bom desempenho em malha fechada, em termos do tempo de acomodação e do máximo sobrepasso, e da robustez, a qual é obtida com apropriadas margens de estabilidade.

Ao fim deste capítulo, o método proposto foi avaliado experimentalmente no controle do estágio de saída de uma *UPS* monofásica. Nesta aplicação, destaca-se a proposição de uma metodologia sistemática baseada em dados experimentais para o projeto da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PR com um modo ressonante sintonizado no laço de tensão. Com essa estrutura de controle, foi garantido o seguimento do sinal de referência senoidal nas três condições de carga e o atendimento dos requisitos definidos pela norma IEC 62040-3 na condição sem carga e quando utilizada a carga linear. Por outro lado, os requisitos definidos pela norma IEC 62040-3 não foram totalmente atendidos quando utilizada a carga não linear pois essa estrutura de controle não permite um bom desempenho na rejeição das harmônicas de perturbação com frequência diferente de  $\omega_r$ , mas este fato motiva a utilização dos controladores com múltiplos modos ressonantes que serão desenvolvidos no próximo capítulo.

Resultados parciais do conteúdo apresentado neste capítulo foram previamente publicados em LORENZINI; PEREIRA; BAZANELLA (2019). No próximo capítulo, a abordagem proposta do método GOF para a sintonia dos controladores PR e PRA será desenvolvida para os controladores proporcional-múltiplos-ressonantes e proporcional-múltiplos-ressonantes com bloco de avanço de fase.

## 5 MÉTODO GENERALIZADO DA OSCILAÇÃO FORÇADA PARA SINTONIA DO CONTROLADOR PROPORCIONAL-MÚLTIPLOS-RESSONANTES

Neste capítulo é tratado o problema do seguimento e da rejeição de sinais periódicos através do desenvolvimento do método GOF para sintonia dos controladores proporcional-múltiplos-ressonantes (PMR) e proporcional-múltiplos-ressonantes com bloco de avanço de fase (PMRA). A partir da abordagem teórica do controlador PR apresentada no capítulo anterior, serão propostos conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores PMRs e PMRAs considerando até cinco modos de ressonância localizados nas cinco primeiras frequências que compõem o sinal periódico de interesse e as três classes nas quais foram divididos os processos *LTIC*. Esses conjuntos de fórmulas de sintonia são dependentes do conhecimento de um ponto da resposta em frequência do processo, do fator de amortecimento dos polos do controlador, da frequência fundamental e da ordem das harmônicas do sinal periódico de interesse. Após o desenvolvimento dessas fórmulas de sintonia, o método GOF será minuciosamente avaliado através de exemplos numéricos em três processos de estudo de caso. Este capítulo será finalizado com a aplicação do método GOF para a sintonia de controladores PMRs no controle do estágio de saída de uma *UPS*.

### 5.1 Motivação

Na análise do PMI realizada na Seção 2.2.2.5, constatou-se que um sistema estável em malha fechada segue/rejeita assintoticamente um dado sinal periódico com frequência fundamental  $\omega_r$  se o controlador com pares de polos em  $\pm jn\omega_r$ , onde  $n$  é um número inteiro que representa a ordem da harmônica que compõe o sinal periódico, for inserido na função de malha aberta do sistema, assumindo que processo a ser controlado não possua zeros em  $\pm jn\omega_r$ . Através dessa estrutura de controle, que é caracterizada por múltiplos picos de ressonância com magnitude infinita nas frequências  $n\omega_r$ , em um sistema estável com um processo sem zeros em  $\pm jn\omega_r$ , o sinal de saída será, em regime permanente, igual à referência, dessa forma, garantindo seguimento e rejeição assintóticos.

A representação por meio da *CTFS* mostra que um sinal periódico pode ser escrito como a soma de termos senoidais ou cossenoidais dependentes das frequências múltiplas inteiras de sua frequência fundamental. No que se refere a essas frequências, podem ser encontradas duas situações principais: o sinal periódico é composto por termos dependentes de frequências múltiplas inteiras ímpares e pares da frequência fundamental —tal como a onda dente de serra— ou o sinal periódico é composto por termos dependentes de frequências múltiplas inteiras ímpares da frequência fundamental —assim como as ondas quadrada e triangular, além do sinal de perturbação da carga não linear na saída da *UPS*.

Nos casos em que o sinal de interesse é formado pela soma de infinitas componentes cujas frequências são múltiplas inteiras da frequência fundamental  $\omega_r$  —como os sinais periódicos anteriormente mencionados—, para a obtenção do seguimento/rejeição assintóticos, deve ser utilizado um controlador com infinitos modos ressonantes sintonizados nessas frequências. Como não é possível a implementação de um controlador de ordem infinita, em aplicações práticas normalmente são utilizados controladores com um número finito de modos ressonantes sintonizados nas frequências de maior contribuição do sinal de interesse, conforme pode ser verificado nas referências citadas a seguir. Além disto, devido à maior facilidade na etapa de sintonia e à melhora na robustez, geralmente são utilizados modos ressonantes com polos deslocados para o SPE do plano  $s$  sobre os semicírculos de raio  $n\omega_r$ , o que leva a magnitude finita nas frequências  $n\omega_r$  (TEODORESCU *et al.*, 2006). Estes dois aspectos —número finito de modos ressonantes e modos ressonantes com magnitude finita em  $n\omega_r$ — ocasionam a perda do seguimento (ou da rejeição) com erro nulo em regime permanente devido às componentes parcialmente (ou não) compensadas; mas, em diversas aplicações, a sintonia adequada dos controladores resulta no atendimento dos requisitos de desempenho desejados.

Assim como os controladores ressonantes, os controladores múltiplos ressonantes são amplamente utilizados em aplicações que utilizam conversores CC-CA, como por exemplo em UPSs, filtros ativos, sistemas de geração distribuída, como pode ser observado em LISERRE *et al.* (2006), LASCU *et al.* (2007), ESCOBAR *et al.* (2007), PEREIRA *et al.* (2014), TAO; DUARTE; HENDRIX (2008), HU; HE (2008), MIRET *et al.* (2009), TIMBUS *et al.* (2009), DE; RAMANARAYANAN (2010), TRINH; LEE (2013), HE; LI; BLAABJERG (2014), (MACCARI *et al.*, 2017), XIN *et al.* (2018), ROJAS *et al.* (2019), REZKALLAH *et al.* (2019).

São ainda encontradas aplicações envolvendo controle de vibração em estruturas flexíveis (POTA; MOHEIMANI; SMITH, 2002), (MOHEIMANI; VAUTIER, 2005) e em um braço mecânico (MAHMOOD; MOHEIMANI; BHIKKAJI, 2008). Em um sistema de geração de energia eólica considerando condições de rede desbalanceadas, um controlador com múltiplos modos ressonantes é usado no controle de potência de um gerador de indução duplamente alimentado para eliminar pulsações de torque e de potência produzidas em desbalanços transitórios na rede (ZHOU; HE; SUN, 2009). Também verifica-se a utilização dos controladores múltiplos ressonantes na redução das oscilações de torque em máquinas síncronas de ímãs permanentes acionadas por inversores (ABOSH; ZHU; REN, 2017), (GAO *et al.*, 2017). Além disto, em uma aplicação mais recente, um controlador com múltiplos modos ressonantes é utilizado na redução das oscilações da posição do rotor de uma máquina multisetor de ímãs permanentes e sem rolamentos (VALENTE *et al.*, 2019).

Da mesma maneira que os controladores ressonantes, a sintonia dos controladores com múltiplos ressonantes é geralmente realizada por tentativa e erro ou através do conhecimento do modelo do processo associado ao uso de métodos específicos de projeto de sistemas de controle, conforme pode ser constatado nas referências anteriormente citadas.

Para facilitar o procedimento de projeto e com o intuito de contribuir com a aplicação dos controladores múltiplos ressonantes, neste capítulo será apresentado o desenvolvimento do método GOF para sintonia dos controladores PMR e PMRA, a qual é a terceira e principal contribuição desta tese. Partindo da formulação desenvolvida no método GOF para a sintonia dos controladores PR e PRA apresentada no capítulo anterior, serão propostos conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores PMR e PMRA com dois, três, quatro e cinco modos ressonantes visando a obtenção de adequadas margens

de estabilidade e bom desempenho em malha fechada para cada umas das três classes de processos *LTIC* consideradas. Como resultado, a sintonia dos controladores PMR e PMRA poderá ser realizada através da solução de um conjunto de fórmulas simples, dependentes de um ponto da resposta em frequência do processo —identificado através do experimento do RFA—, da frequência fundamental e da ordem das harmônicas do sinal a ser seguido/rejeitado, e dos fatores de amortecimento dos modos ressonantes que são parâmetros definidos pelo problema/projetista.

## 5.2 Método generalizado da oscilação forçada

Nesta seção serão propostos os conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores PMRs e PMRAs. A partir do conjunto genérico de fórmulas de sintonia do controlador PR obtido na Seção 4.2.3 serão desenvolvidos conjuntos de fórmulas de sintonia para controladores PMR e PMRA com até cinco modos de ressonância localizados nas frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental do sinal de interesse considerando as três classes em que foram divididos os processos *LTIC*.

Para obtenção de adequadas margens de estabilidade e bom desempenho em malha fechada, esses conjuntos de fórmulas serão desenvolvidos através da equação geral de sintonia do método GOF, a qual foi utilizada nas seções 3.2 e 4.2, e é definida por

$$C(j\omega_\nu) = \frac{M_\rho}{M_\nu} (\cos(\rho - \nu) + j \operatorname{sen}(\rho - \nu)), \quad (141)$$

onde  $\omega_\nu$  e  $M_\nu$  são respectivamente a frequência e a magnitude do processo no ponto de menor frequência em que sua resposta em frequência cruza um valor previamente especificado  $\nu$ , enquanto  $M_\rho$  e  $\rho$  são respectivamente o módulo e a fase da localização  $p$  no plano complexo para onde esse ponto é deslocado com o controlador.

Na sequência são definidas as funções de transferência dos controladores PMR e PMRA. Então, utilizando (141), serão desenvolvidas fórmulas de sintonia para esses controladores.

### 5.2.1 Controladores proporcional-múltiplos-ressonantes e proporcional-múltiplos-ressonantes com bloco de avanço de fase

O controlador PMR considerado neste trabalho foi definido na Seção 2.2.2.5 e tem função de transferência dada por:

$$C_{pmr}(s) = \prod_n \left( K_{pn} + \frac{K_{r1n}s + K_{r2n}}{s^2 + 2\xi_n\omega_{rn}s + \omega_{rn}^2} \right), \quad (142)$$

na qual  $\omega_{rn}$  são as frequências que compõem o sinal periódico a ser seguido e/ou rejeitado,  $\xi_n \geq 0$  são os coeficientes de amortecimento dos polos, enquanto  $K_{pn}$ ,  $K_{r1n}$  e  $K_{r2n} \in \mathbb{R}$  são os parâmetros a serem sintonizados.

A opção pela configuração em série do controlador PMR, ao invés de uma configuração paralela como em PEREIRA *et al.* (2014) ou em XIN *et al.* (2018), definida pelo produto de estruturas PRs com modos nas frequências múltiplas inteiras de  $\omega_r$ , é vantajosa no desenvolvimento do seu conjunto de fórmulas de sintonia uma vez que cada estrutura PR pode ser projetada separadamente através de (126), ou seja, não é necessário o cálculo de novas expressões matemáticas. Além disto, para cada uma dessas estruturas PRs pode ser estabelecido um ponto de sintonia e restringido o posicionamento de seus zeros de maneira independente, sem prejuízos com a inclusão ou retirada de modos ressonantes.



No controlador PMRA, utiliza-se o bloco de avanço de fase  $C_{av}(s)$  apresentado na Equação (131) em série com o controlador PMR, isto é,  $C_{pmra}(s) = C_{av}(s)C_{pmr}(s)$ , o que resulta na seguinte função de transferência:

$$C_{pmra}(s) = \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \prod_n \left( K_{pn} + \frac{K_{r1n}s + K_{r2n}}{s^2 + 2\xi_n\omega_{rn}s + \omega_{rn}^2} \right), \quad (143)$$

onde  $k_a$ ,  $z_a$  e  $p_a$  são os parâmetros do bloco de avanço de fase a serem determinados juntamente com  $K_{pn}$ ,  $K_{r1n}$  e  $K_{r2n} \in \mathbb{R}$ .

A seguir, visando cobrir as diferentes situações apresentadas em Seção 5.1, serão desenvolvidos conjuntos de fórmulas de sintonia para os controladores PMR e PMRA considerando até cinco modos de ressonância em duas situações: modos de ressonância localizados nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $4\omega_r$  e  $5\omega_r$ ; e modos de ressonância localizados nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $5\omega_r$ ,  $7\omega_r$  e  $9\omega_r$ . Esses conjuntos de fórmulas serão desenvolvidos para o caso genérico  $\xi_n \geq 0$ , além disto serão restritos para o caso  $\max(n\omega_r) < \omega_\nu$ , pois deseja-se manter a simplicidade dos métodos de Ziegler-Nichols e evitar problemas na garantia da estabilidade do sistema em malha fechada.

### 5.2.2 Definição de $\nu$ , $p$ e $\eta$

A obtenção dos conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores PMR e PMRA será baseada no desenvolvimento das fórmulas de sintonia dos controladores PR e PRA apresentado na Seção 4.2. Nos conjuntos de fórmulas a serem desenvolvidos para as duas topologias com múltiplos modos ressonantes será mantida a divisão dos processos *LTIC* nas classes A, B e C, a qual foi definida para os controladores PID, PR e PRA, considerando os mesmos pontos identificados da resposta em frequência do processo, ou seja, serão utilizados os mesmos valores de  $\nu$  definidos para cada uma dessas três classes de processos. Em relação à localização no plano complexo para onde esse ponto identificado da resposta em frequência do processo é deslocado, parâmetro  $p$  ou ponto de sintonia, serão mantidos os mesmos valores propostos no desenvolvimento dos controladores PR e PRA. Por conveniência, essas definições são retomadas na sequência.

Para a Classe A, o ponto crítico da resposta em frequência do processo é identificado, ou seja,

$$\begin{aligned} \nu = -180^\circ, \omega_\nu = \omega_u = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = -180^\circ, \\ M_\nu = M_u = |G(j\omega_u)| = 1/K_u. \end{aligned} \quad (144)$$

Os conjuntos de fórmulas dos controladores PMRAs serão desenvolvidos —apenas para a Classe A— utilizando

$$\begin{aligned} p = p_{av} \times p_{pmr} = e^{j46,4^\circ} \times 0,4e^{-j187^\circ}, \\ p = 0,4e^{-j140,6^\circ}, \end{aligned} \quad (145)$$

onde  $p_{av}$  e  $p_{pmr}$  são o ponto de sintonia para o bloco de avanço de fase e para a estrutura PMR, respectivamente. O ajuste do bloco de avanço de fase que resulta em  $p_{av} = e^{j46,4^\circ}$  foi apresentado na Seção 4.2.4 para o controlador PRA.

Quanto à Classe B, definiu-se identificar o ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase cruza a linha de  $\nu = -120^\circ$ ,

$$\begin{aligned} \nu = -120^\circ, \omega_\nu = \omega_{120} = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = -120^\circ, \\ M_\nu = M_{120} = |G(j\omega_{120})|, \end{aligned} \quad (146)$$

e os conjuntos de fórmulas dos controladores PMRs serão desenvolvidos considerando

$$p = e^{-j130^\circ}. \quad (147)$$

Para a Classe C, determinou-se identificar o ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase cruza a linha de  $\nu = -60^\circ$ ,

$$\begin{aligned} \nu = -60^\circ, \omega_\nu = \omega_{60} = \min_{\omega \geq 0} \omega : \angle G(j\omega) = -60^\circ, \\ M_\nu = M_{60} = |G(j\omega_{60})|, \end{aligned} \quad (148)$$

e os conjuntos de fórmulas dos controladores PMRs serão desenvolvidos através de

$$p = e^{-j90^\circ}. \quad (149)$$

Os controladores PMR e PMRA, cujas funções de transferência são apresentadas em (142) e (143), possuem configuração série, definida através do produto de estruturas PRs sintonizadas nas frequências múltiplas inteiras de  $\omega_r$  e em conjunto com o bloco de avanço de fase. Desta forma, sem prejuízos para o atendimento da equação geral de sintonia do método GOF (141), a localização  $p$  no plano complexo é decomposta em duas ou mais localizações complexas intermediárias, por exemplo, para o controlador PMR com dois modos de ressonância considera-se

$$p = p_1 \times p_2 \quad \text{ou} \quad p = p_1 \times p_3, \quad (150)$$

enquanto para três modos utiliza-se

$$p = p_1 \times p_2 \times p_3 \quad \text{ou} \quad p = p_1 \times p_3 \times p_5. \quad (151)$$

Essa decomposição da localização complexa  $p$  em localizações complexas intermediárias  $p_n$ , as quais são caracterizadas pelo módulo  $M_n$  e fase  $\rho_n$ , deve atender

$$p = \prod_n p_n, \quad (152)$$

ou seja,

$$M_p = \prod_n M_n \quad (153)$$

e

$$\rho = \sum_n \rho_n. \quad (154)$$

Procedimento semelhante pode ser realizado para o controlador PMR com mais modos de ressonância e para o controlador PMRA incluindo nesta avaliação o bloco de avanço de fase, no qual  $p_{av} = M_{av} e^{j\rho_{av}}$ .

Assim, a equação geral de sintonia do método GOF (141) pode ser resolvida separadamente para uma localização complexa intermediária considerando cada estrutura PR e bloco de avanço de fase. Esta escolha possibilita a sintonia das estruturas PRs através do conjunto de fórmulas proposto em (126), não havendo a necessidade do desenvolvimento de novas expressões matemáticas para o projeto dos controladores com múltiplos modos ressonantes. Além disto, o posicionamento relativo dos pares de zeros de cada estrutura PR pode ser definido independentemente do número de modos ressonantes considerados.

Por conveniência futura,  $C_{pr_n}(s)$  designará a função de transferência da estrutura PR sintonizada na  $n$ -ésima frequência múltipla inteira de  $\omega_r$ . O mesmo será adotado para a localização intermediária de sintonia  $p_n$  —cujo módulo e fase são  $M_{\rho_n}$  e  $\rho_n$ , respectivamente— e parâmetro  $\eta_n$ , o qual diretamente altera o posicionamento dos zeros de  $C_{pr_n}(s)$ .

O ajuste de magnitude dos controladores PMR e PMRA será realizado no primeiro modo de ressonância —esta escolha facilita e simplifica o desenvolvimento das fórmulas de sintonia, como descrito a seguir. Logo, em (141), para a estrutura PR sintonizada em  $\omega_r$  utiliza-se

$$|C_{pr_1}(j\omega_\nu)| = \frac{M_\rho}{M_\nu} = \frac{M_{\rho_1}}{M_\nu},$$

enquanto para as estruturas PRs sintonizadas nas outras frequências e bloco de avanço de fase emprega-se

$$|C_{pr_n}(j\omega_\nu)| = |C_{av}(j\omega_\nu)| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} : n > 1.$$

Da última expressão, decorre que

$$M_\nu = M_{\rho_n} = M_{av} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} : n > 1.$$

Assim, resta especificar —para cada  $C_{pr_n}(s)$ — a contribuição de fase na frequência  $\omega_\nu$  e o posicionamento relativo dos seus zeros, ou seja, deve-se ainda definir os valores dos parâmetros  $\rho_n$  e  $\eta_n$ . Para o prosseguimento do desenvolvimento dos conjuntos de fórmulas de sintonia, estes parâmetros deverão ser definidos considerando as classes A, B e C de processos *LTIC*, ambos controladores PMR e PMRA com dois a cinco modos de ressonância sintonizados nos grupos de frequências  $\omega_r, 2\omega_r, 3\omega_r, 4\omega_r$  e  $5\omega_r$  ou  $\omega_r, 3\omega_r, 5\omega_r, 7\omega_r$  e  $9\omega_r$ .

Para dar continuidade ao desenvolvimento dos conjuntos de fórmulas de sintonia, avaliou-se o projeto dos controladores PMR e PMRA para as dezoito famílias de processos *LTIC* pertencentes às classes A, B e C cujas funções de transferência estão definidas no Apêndice A.2. Dentro de cada classe de processos, foram examinadas diversas combinações das variáveis  $\rho_n$  e  $\eta_n$  para ambas topologias de controle com dois a cinco modos de ressonância sintonizados nos dois grupos de frequências.

O espaço de análise da variável  $\rho_n$  para cada estrutura PR é limitado por (109), a qual indica que

$$-\pi/2 < \rho_n < 0.$$

Além disto, o resultado de (154) —incluindo  $\rho_{av}$  quando necessário— deve ser igual à fase da localização complexa  $p$  definida em (145), (147) e (149) considerando respectivamente as classes A, B e C. Por definição, o espaço de análise de  $\eta_n$  é limitado por  $0 < \eta_n < 1$ .

Levando-se em conta estas observações, de maneira semelhante à realizada no desenvolvimento do controlador PR, inicialmente analisou-se a resposta em frequência da função de malha aberta com as três classes de processos e com cada controlador PMR e PMRA projetado. Então, avaliou-se a resposta do sistema em malha fechada para sinais periódicos formados pelas componentes frequenciais obtidas a partir da *CTFS* da onda dente de serra e da onda quadrada. Por exemplo, quando foi analisada a sintonia de ambas topologias de controle com modos ressonantes em  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ , foram utilizadas as duas primeiras componentes frequenciais da onda dente de serra para compor o seguinte sinal de referência

$$r(t) = 0,637 \text{sen}(\omega_r t) - 0,318 \text{sen}(2\omega_r t) \quad \forall t \geq 0, \quad (155)$$

Tabela 31 – Variáveis utilizadas na equação geral de sintonia do método GOF para as estruturas PRs.

Ordem da harmônica	Parâmetro	Classe A	Classe B	Classe C
n = 1	$\nu$	$-180^\circ$	$-120^\circ$	$-60^\circ$
	$M_\nu$	$M_u$	$M_{120}$	$M_{60}$
	$\omega_\nu$	$\omega_u$	$\omega_{120}$	$\omega_{60}$
n > 1	$\nu$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$
	$M_\nu$	1	1	1
	$\omega_\nu$	$\omega_u$	$\omega_{120}$	$\omega_{60}$

Tabela 32 – Variáveis de sintonia do método GOF para os controladores PMR e PMRA.

Classe A	Classe B	Classe C
$p = p_{av} \times p_{pmr} = 0,4e^{-j140,6^\circ}$	$p = e^{-j130^\circ}$	$p = e^{-j90^\circ}$
$p_{av} = e^{j46,4^\circ}$	—	—
$p_{pmr} = \prod p_n = 0,4e^{-j187^\circ}$	$p = \prod p_n = e^{-j130^\circ}$	$p = \prod p_n = e^{-j90^\circ}$
$p_1 = 0,4e^{-j(188-M)^\circ}$	$p_1 = e^{-j(131-M)^\circ}$	$p_1 = e^{-j(91-M)^\circ}$
$\eta_1 = \begin{cases} 0,6, & M = 1 \\ 0,7, & 2 \leq M \leq 3 \\ 0,9, & M > 3 \end{cases}$	$\eta_1 = \begin{cases} 0,7, & M = 1 \\ 0,9, & M \geq 2 \end{cases}$	$\eta_1 = 0,9$
$p_n = e^{-j1^\circ}$ e $\eta_n = 0,9, n > 1$		

ao passo que com modos ressonantes em  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  foram utilizadas as duas primeiras componentes frequenciais da onda quadrada para compor o sinal de referência dado por

$$r(t) = 1,27 \text{ sen}(\omega_r t) + 0,424 \text{ sen}(3\omega_r t) \quad \forall t \geq 0. \quad (156)$$

Para o desenvolvimento dos controladores PMR e PMRA com três modos de ressonância foram utilizadas as três primeiras componentes frequenciais de cada onda, e assim progressivamente. Em todos os casos foi considerada a restrição  $0 < \max(n\omega_r) \leq 0,9\omega_\nu$ . As expressões destes sinais de referência com as cinco primeiras componentes frequenciais podem ser obtidas no Apêndice E.1.

Nas tabelas 31 e 32, onde  $M$  representa o número de modos ressonantes considerado nos controladores PMR(A), estão resumidos os valores propostos para os parâmetros da equação geral de sintonia do método GOF que acarretaram em resultados adequados em termos dos critérios margens de estabilidade e desempenho dinâmico, analisado em termos do máximo sobrepasso e do número de ciclos para acomodação. Através desses parâmetros foram obtidos sistemas estáveis em malha fechada utilizando os processos da bateria de testes e controladores PMR(A)s com até cinco modos de ressonância. Além disto, os parâmetros propostos resultaram em sobrepasso máximo de 15% para os sinais de referência utilizados. Na sequência, através dessas variáveis, são propostos os conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores PMR e PMRA para cada uma das três classes de processos *LTIC* consideradas.

### 5.2.3 Sintonia dos controladores PMR e PMRA

Nesta seção são apresentados os conjuntos de fórmulas do método GOF para sintonia dos controladores PMR e PMRA, cujas funções de transferência são respectivamente apresentadas em (142) e (143), com até cinco modos de ressonância. Os controladores PMRs foram desenvolvidos para os processos das classes B e C, enquanto o controlador PMRA é proposto apenas para os processos da Classe A. Além disto, as frequências dos modos ressonantes são restritas ao intervalo  $\max(n\omega_r) < \omega_\nu$ . As funções de transferência particulares desses controladores para cada número de modos ressonância estão apresentadas no Apêndice E.2.

O conjunto de fórmulas de sintonia da estrutura PR referente à harmônica ordem  $n$  que compõe os controladores PMR e PMRA é desenvolvido a partir da substituição da função de transferência

$$C_{pr_n}(s) = K_{pn} + \frac{K_{r_{1n}}s + K_{r_{2n}}}{s^2 + 2\xi_n n\omega_r s + n^2\omega_r^2}, \quad (157)$$

com  $s = j\omega_\nu$  na equação geral de sintonia do método GOF (141).

A solução desta equação para os parâmetros  $K_{pn}$ ,  $K_{r_{1n}}$  e  $K_{r_{2n}}$  é diretamente obtida através de (126) utilizando  $\omega_r = n\omega_r$ ,  $\xi = \xi_n$ ,  $M_\rho = M_{\rho_n}$ ,  $\rho = \rho_n$  e  $\eta = \eta_n$ . Logo, no método GOF, os parâmetros da estrutura PR referente à harmônica de ordem  $n$  são determinados por meio do conjunto genérico de fórmulas de sintonia dado por:

$$\begin{aligned} K_{pn} &= \frac{M_{\rho_n} (n^2\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho_n - \nu)}{M_\nu (\eta_n^2 n^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)} - \frac{2\omega_\nu \xi_n n\omega_r \sin(\rho_n - \nu)}{M_\nu (\eta_n^2 n^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}, \\ K_{r_{1n}} &= \frac{M_{\rho_n} (n^2\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \sin(\rho_n - \nu)}{M_\nu \omega_\nu} \\ &\quad + \frac{M_{\rho_n} (2\omega_\nu \xi_n n^3 \omega_r^3 (\eta_n^2 - 1) \cos(\rho_n - \nu) + 4\xi_n^2 \omega_\nu^2 n^2 \omega_r^2 \sin(\rho_n - \nu))}{M_\nu \omega_\nu (\eta_n^2 n^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}, \\ K_{r_{2n}} &= \frac{M_{\rho_n} (n^2\omega_r^2 - \omega_\nu^2) \cos(\rho_n - \nu) (\eta_n^2 - 1) n^2 \omega_r^2}{M_\nu (\eta_n^2 n^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)} \\ &\quad - \frac{M_{\rho_n} 2\omega_\nu \xi_n n^3 \omega_r^3 \sin(\rho_n - \nu) (\eta_n^2 - 1)}{M_\nu (\eta_n^2 n^2 \omega_r^2 - \omega_\nu^2)}. \end{aligned} \quad (158)$$

A seguir, por meio desse conjunto genérico de fórmulas de sintonia e das variáveis  $\nu$ ,  $M_\nu$ ,  $\omega_\nu$ ,  $p_n$ ,  $p_{av}$  e  $\eta_n$  definidas nas tabelas 31 e 32, são propostos os conjuntos de fórmulas de sintonia particulares dos controladores PMR e PMRA considerando até cinco modos de ressonância para cada uma das classes A, B e C de processos. Inicialmente, na Seção 5.2.3.1, são apresentadas as fórmulas de sintonia do bloco de avanço de fase utilizado no controlador PMRA aplicado à Classe A. Então, na Seção 5.2.3.2, após a definição da versão parametrizada de (158), são apresentados os conjuntos de fórmulas de sintonia da estrutura PR referentes à primeira harmônica para cada uma das três classes. Em seguida, nesta mesma seção, são definidos os conjuntos de fórmulas de sintonia das estruturas PRs referentes às harmônicas de ordem maior que um, as quais são as mesmas para as três classes de processos, considerando, em cada caso, a frequência identificada  $\omega_\nu$  do processo e a ordem  $n$  da harmônica.

#### 5.2.3.1 Sintonia do bloco de avanço de fase $C_{av}(s)$

As fórmulas de sintonia do bloco de avanço de fase, as quais somente são utilizadas para a Classe A e resultam no ponto de sintonia  $p_{av}$  apresentado na Tabela 32, são dadas

por:

$$k_a = 2,5, \quad z_a = 0,4\omega_u, \quad p_a = 2,5\omega_u. \quad (159)$$

Essas fórmulas foram definidas em (137) para fornecer o máximo avanço de fase de  $46,4^\circ$  com magnitude unitária em  $\omega_u$ .

### 5.2.3.2 Sintonia das estruturas PRs $C_{pr_n}(s)$

A versão parametrizada do conjunto genérico de fórmulas de sintonia da estrutura PR apresentado em (158) é dada por:

$$\begin{aligned} K_{p_n} &= \frac{\alpha_1(\omega_\nu^2 - n^2\omega_r^2)}{M_\nu(\omega_\nu^2 - \alpha_3 n^2\omega_r^2)} - \frac{\alpha_2\omega_\nu n\omega_r \xi_n}{M_\nu(\omega_\nu^2 - \alpha_3 n^2\omega_r^2)}, \\ K_{r_{1n}} &= \frac{\beta_1(\omega_\nu^2 - n^2\omega_r^2)}{M_\nu\omega_\nu} + \frac{\beta_2 n^3\omega_r^3 \xi_n + \beta_3\omega_\nu n^2\omega_r^2 \xi_n^2}{M_\nu(\omega_\nu^2 - \alpha_3 n^2\omega_r^2)}, \\ K_{r_{2n}} &= \frac{\zeta_1 n^2\omega_r^2(n^2\omega_r^2 - \omega_\nu^2)}{M_\nu(\omega_\nu^2 - \alpha_3 n^2\omega_r^2)} + \frac{\zeta_2\omega_\nu n^3\omega_r^3 \xi_n}{M_\nu(\omega_\nu^2 - \alpha_3 n^2\omega_r^2)}, \end{aligned} \quad (160)$$

na qual os parâmetros  $M_\nu, \omega_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \zeta_1, \zeta_2$  são definidos, respectivamente, para a harmônica de ordem  $n = 1$  e para as harmônicas de ordem  $n > 1$  nas tabelas 33 e 34 considerando uma dada quantidade  $M$  de modos ressonantes utilizada nos controladores PMR e PMRA. Os valores definidos para  $M = 1$  referem-se aos controladores PR e PRA propostos no Capítulo 4. O coeficiente de amortecimento  $\xi_n$  é um parâmetro a ser escolhido pelo projetista, assumindo que um sistema em malha fechada segue/rejeita assintoticamente um dado sinal senoidal de referência/perturbação com frequência  $\omega_{rn}$  se a estrutura PR de ordem  $n$  com  $\xi_n = 0$  está inserida na malha.

Na sequência, o método GOF para a sintonia dos controladores PMR e PMRA é aplicado em três processos distintos pertencentes às classes A, B e C considerando dois e três modos ressonantes.

## 5.3 Estudos de caso

Nesta seção, visando analisar o método GOF para a sintonia dos controladores PMR e PMRA, serão considerados os três processos pertencentes às classes A, B e C utilizados na Seção 4.3. Seguindo a mesma abordagem adotada nos capítulos anteriores, além da apresentação da resposta dos sistemas em malha fechada e análise de desempenho para entradas padrão, será realizada a avaliação da resposta em frequência das funções de malha aberta com os controladores projetados.

O método GOF é iniciado pela implementação do experimento do RFA, no qual identifica-se o ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase cruza o valor  $\nu$  através da determinação da magnitude  $M_\nu$  e da frequência  $\omega_\nu$ . Então, controladores PMRs e PMRAs são sintonizados através desse ponto identificado e dos conjuntos de fórmulas de sintonia propostos na Seção 5.2.3. Os controladores foram projetados utilizando  $\xi_n = 0$  para obtenção de seguimento com erro nulo.

Considerou-se, para cada configuração de processo-controlador, cinco valores de frequência fundamental do sinal de referência com a maior frequência dos modos ressonantes no intervalo  $0,1\omega_\nu \leq \max(n\omega_r) \leq 0,9\omega_\nu$ . Para controladores com dois modos de ressonância nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  foram utilizadas

$$\omega_r = 0,05\omega_\nu, \quad \omega_r = 0,15\omega_\nu, \quad \omega_r = 0,25\omega_\nu, \quad \omega_r = 0,37\omega_\nu, \quad \omega_r = 0,45\omega_\nu;$$

Tabela 33 – Parâmetros de sintonia de  $C_{pr_n}(s)$  com  $n = 1$ .

Número de modos M	Classe A	Classe B	Classe C	
1, 2, 3, 4 e 5	$M_\nu = M_u$	$M_\nu = M_{60}$	$M_\nu = M_{120}$	
	$\omega_\nu = \omega_u$	$\omega_\nu = \omega_{60}$	$\omega_\nu = \omega_{120}$	
	$\alpha_1 = 0,397$	$\alpha_1 = 0,985$	$\alpha_1 = 0,866$	
	$\alpha_2 = 0,0975$	$\alpha_2 = 0,347$	$\alpha_2 = 1,00$	
	$\alpha_3 = 0,360$	$\alpha_3 = 0,490$	$\alpha_3 = 0,810$	
	$\beta_1 = 0,0487$	$\beta_1 = 0,174$	$\beta_1 = 0,500$	
	$\beta_2 = 0,508$	$\beta_2 = 1,00$	$\beta_2 = 0,329$	
	$\beta_3 = 0,195$	$\beta_3 = 0,695$	$\beta_3 = 2,00$	
	$\zeta_1 = 0,254$	$\zeta_1 = 0,502$	$\zeta_1 = 0,165$	
	$\zeta_2 = 0,0624$	$\zeta_2 = 0,177$	$\zeta_2 = 0,190$	
2	$\alpha_1 = 0,398$	$\alpha_1 = 0,988$	$\alpha_1 = 0,875$	
	$\alpha_2 = 0,0836$	$\alpha_2 = 0,313$	$\alpha_2 = 0,970$	
	$\alpha_3 = 0,490$	$\alpha_3 = 0,810$	$\alpha_3 = 0,810$	
	$\beta_1 = 0,0418$	$\beta_1 = 0,156$	$\beta_1 = 0,485$	
	$\beta_2 = 0,406$	$\beta_2 = 0,375$	$\beta_2 = 0,332$	
	$\beta_3 = 0,167$	$\beta_3 = 0,626$	$\beta_3 = 1,94$	
	$\zeta_1 = 0,203$	$\zeta_1 = 0,188$	$\zeta_1 = 0,166$	
	$\zeta_2 = 0,0426$	$\zeta_2 = 0,0594$	$\zeta_2 = 0,184$	
	3	$\alpha_1 = 0,398$	$\alpha_1 = 0,990$	$\alpha_1 = 0,883$
		$\alpha_2 = 0,0697$	$\alpha_2 = 0,278$	$\alpha_2 = 0,939$
$\alpha_3 = 0,490$		$\alpha_3 = 0,810$	$\alpha_3 = 0,810$	
$\beta_1 = 0,0349$		$\beta_1 = 0,139$	$\beta_1 = 0,469$	
$\beta_2 = 0,406$		$\beta_2 = 0,376$	$\beta_2 = 0,336$	
$\beta_3 = 0,139$		$\beta_3 = 0,557$	$\beta_3 = 1,88$	
$\zeta_1 = 0,203$		$\zeta_1 = 0,188$	$\zeta_1 = 0,168$	
$\zeta_2 = 0,0356$		$\zeta_2 = 0,0529$	$\zeta_2 = 0,178$	
4		$\alpha_1 = 0,399$	$\alpha_1 = 0,993$	$\alpha_1 = 0,891$
		$\alpha_2 = 0,0558$	$\alpha_2 = 0,244$	$\alpha_2 = 0,908$
	$\alpha_3 = 0,810$	$\alpha_3 = 0,810$	$\alpha_3 = 0,810$	
	$\beta_1 = 0,0279$	$\beta_1 = 0,122$	$\beta_1 = 0,454$	
	$\beta_2 = 0,152$	$\beta_2 = 0,377$	$\beta_2 = 0,339$	
	$\beta_3 = 0,112$	$\beta_3 = 0,487$	$\beta_3 = 1,82$	
	$\zeta_1 = 0,0758$	$\zeta_1 = 0,189$	$\zeta_1 = 0,169$	
	$\zeta_2 = 0,0106$	$\zeta_2 = 0,0463$	$\zeta_2 = 0,173$	
	5	$\alpha_1 = 0,399$	$\alpha_1 = 0,995$	$\alpha_1 = 0,899$
		$\alpha_2 = 0,0419$	$\alpha_2 = 0,209$	$\alpha_2 = 0,877$
$\alpha_3 = 0,810$		$\alpha_3 = 0,810$	$\alpha_3 = 0,810$	
$\beta_1 = 0,0209$		$\beta_1 = 0,105$	$\beta_1 = 0,438$	
$\beta_2 = 0,152$		$\beta_2 = 0,378$	$\beta_2 = 0,342$	
$\beta_3 = 0,0837$		$\beta_3 = 0,418$	$\beta_3 = 1,75$	
$\zeta_1 = 0,0759$		$\zeta_1 = 0,189$	$\zeta_1 = 0,171$	
$\zeta_2 = 0,00796$		$\zeta_2 = 0,0397$	$\zeta_2 = 0,167$	

Tabela 34 – Parâmetros de sintonia de  $C_{pr_n}(s)$  com  $n > 1$ .

Ordem	Classes A, B e C
$n > 1$	$M_\nu = 1,00$
	$\omega_\nu = \omega_u$
	$\alpha_1 = 1,00$
	$\alpha_2 = 0,0349$
	$\alpha_3 = 0,810$
	$\beta_1 = 0,0175$
	$\beta_2 = 0,380$
	$\beta_3 = 0,0698$
	$\zeta_1 = 0,190$
	$\zeta_2 = 0,00663$

enquanto para controladores com dois modos de ressonância em  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  bem como para controladores com três modos de ressonância em  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$  considerou-se

$$\omega_r = 0,0333\omega_\nu, \omega_r = 0,1\omega_\nu, \omega_r = 0,167\omega_\nu, \omega_r = 0,233\omega_\nu, \omega_r = 0,3\omega_\nu;$$

ao passo que para controladores com três modos de ressonância nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$  avaliou-se o desempenho com

$$\omega_r = 0,02\omega_\nu, \omega_r = 0,06\omega_\nu, \omega_r = 0,1\omega_\nu, \omega_r = 0,14\omega_\nu, \omega_r = 0,18\omega_\nu.$$

Observe que nestes três casos o modo ressonante de maior frequência está localizado em

$$\begin{aligned} \max(n\omega_r) &= 0,1\omega_\nu, \max(n\omega_r) = 0,3\omega_\nu, \max(n\omega_r) = 0,5\omega_\nu, \\ \max(n\omega_r) &= 0,7\omega_\nu, \max(n\omega_r) = 0,9\omega_\nu. \end{aligned}$$

A resposta do sistema em malha fechada com os controladores projetados é então analisada para sinais de referência periódicos formados pelas duas ou três primeiras componentes frequenciais da onda dente de serra e da onda quadrada. As expressões desses sinais de referência com duas componentes foram apresentadas em (155) e (156), já as expressões com três componentes podem ser obtidas no Apêndice E.1. Em todos os casos, o número de componentes do sinal de referência é igual ao número de modos do controlador sob avaliação. Os parâmetros do processo e dos controladores são apresentados no SI. Segundo definido na Seção 2.1.2.2, o desempenho do sistema de controle será avaliado através do máximo sobrepasso,  $M_o$  dado em %, além do tempo e do número de períodos de acomodação, respectivamente  $t_s$  e  $n_s$ , os quais são dados em segundos e número de ciclos do sinal de referência, respectivamente, e são calculados assumindo uma tolerância de 2% do sinal de erro.

### 5.3.1 Processo da Classe A

O processo da Classe A considerado para a análise do método GOF tem função de transferência dada por:

$$G_a(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^2}. \quad (161)$$



Tabela 35 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  e medidas de desempenho para o processo  $G_a(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p2}$	$K_{r12}$	$K_{r22}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,05\omega_u = 0,0658$	1,02	0,140	-0,00224	0,998	0,0228	-0,00328	304	3,2	0
$0,15\omega_u = 0,197$	1,00	0,137	-0,0200	0,982	0,0210	-0,0291	241	7,6	1,3
$0,25\omega_u = 0,329$	0,983	0,132	-0,0543	0,940	0,0173	-0,0773	164	8,6	1,2
$0,35\omega_u = 0,460$	0,949	0,123	-0,103	0,846	0,0117	-0,136	125	9,1	0,97
$0,45\omega_u = 0,592$	0,900	0,112	-0,161	0,552	0,00437	-0,147	159	15	1,0
$k_a = 2,5, \quad z_a = 0,526, \quad p_a = 3,29, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0$									

Tabela 36 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  e medidas de desempenho para o processo  $G_a(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,0333\omega_u = 0,0439$	1,02	0,140	-0,000997	0,998	0,0228	-0,00328	326	2,3	0
$0,1\omega_u = 0,132$	1,01	0,139	-0,00893	0,982	0,0210	-0,0291	241	5,1	0,76
$0,167\omega_u = 0,219$	1,00	0,137	-0,0246	0,940	0,0173	-0,0773	202	7,0	2,3
$0,233\omega_u = 0,307$	0,988	0,133	-0,0475	0,846	0,0117	-0,136	177	8,7	4,0
$0,3\omega_u = 0,395$	0,968	0,128	-0,0769	0,552	0,00437	-0,147	224	14	5,0
$k_a = 2,5, \quad z_a = 0,526, \quad p_a = 3,29, \quad \xi_1 = \xi_3 = 0$									

No experimento do RFA, identifica-se o ponto crítico da resposta em frequência de  $G_a(j\omega)$ , ou seja, determina-se a frequência  $\omega_u = 1,32$  rad/s e a magnitude  $M_u = 0,392$ . Na sequência, são apresentados os resultados da aplicação nesse processo de controladores PMRAs com dois e com três modos ressonantes sintonizados através destas informações identificadas.

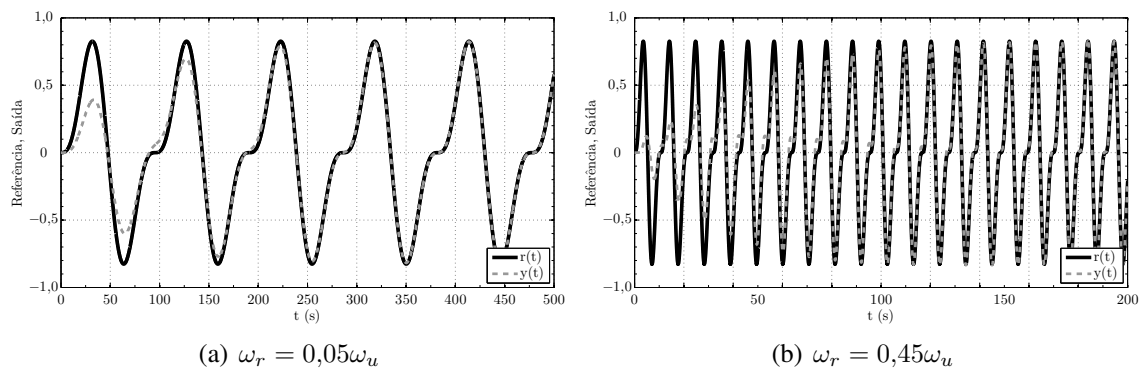
### 5.3.1.1 Dois modos ressonantes

Os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  e as medidas de desempenho estão resumidos na Tabela 35, enquanto na Tabela 36 estão apresentados estes resultados para os controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Os sinais de referência e de saída do processo para a menor e para a maior frequência fundamental do sinal de referência em ambas configurações estão retratados nas figuras 85 e 86.

Na Figura 87 são apresentados os diagramas de resposta em frequência do processo  $G_a(j\omega)$  e da função de malha aberta  $G_a(j\omega)C_{pmra}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  considerando o sinal de referência com frequência fundamental  $\omega_r = 0,05\omega_u$  e  $\omega_r = 0,45\omega_u$ . Os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_a(s)$  e  $G_a(s)C_{pmra}(s)$  para estas mesmas configurações de processo-controlador estão ilustrados na Figura 88, onde o ponto destas curvas referente à frequência  $\omega_u$  está destacado com um 'X'.

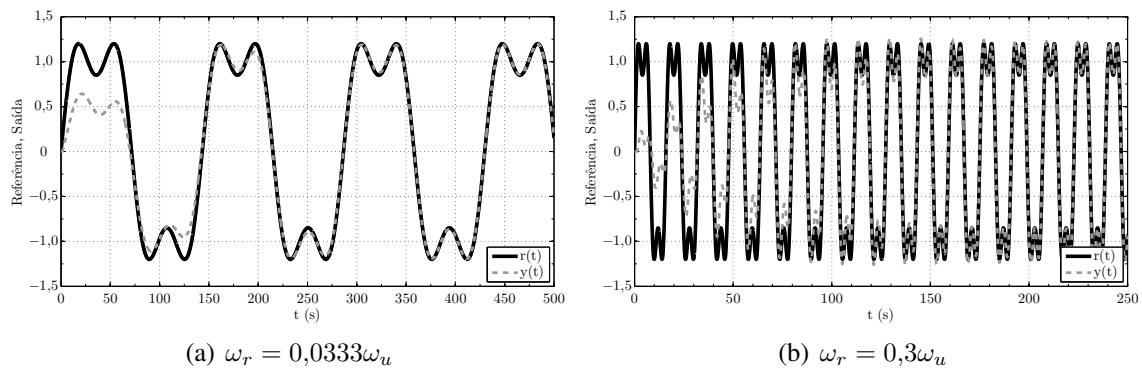
Os diagramas de resposta em frequência de  $G_a(j\omega)$  e de  $G_a(j\omega)C_{pmra}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  analisados para  $\omega_r = 0,0333\omega_u$  e para  $\omega_r = 0,3\omega_u$  estão representados na Figura 89, ao passo que os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_a(s)$  e  $G_a(s)C_{pmra}(s)$  para estas configurações estão retratados

Figura 85 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_a(s)$  e controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 86 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_a(s)$  e controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ .



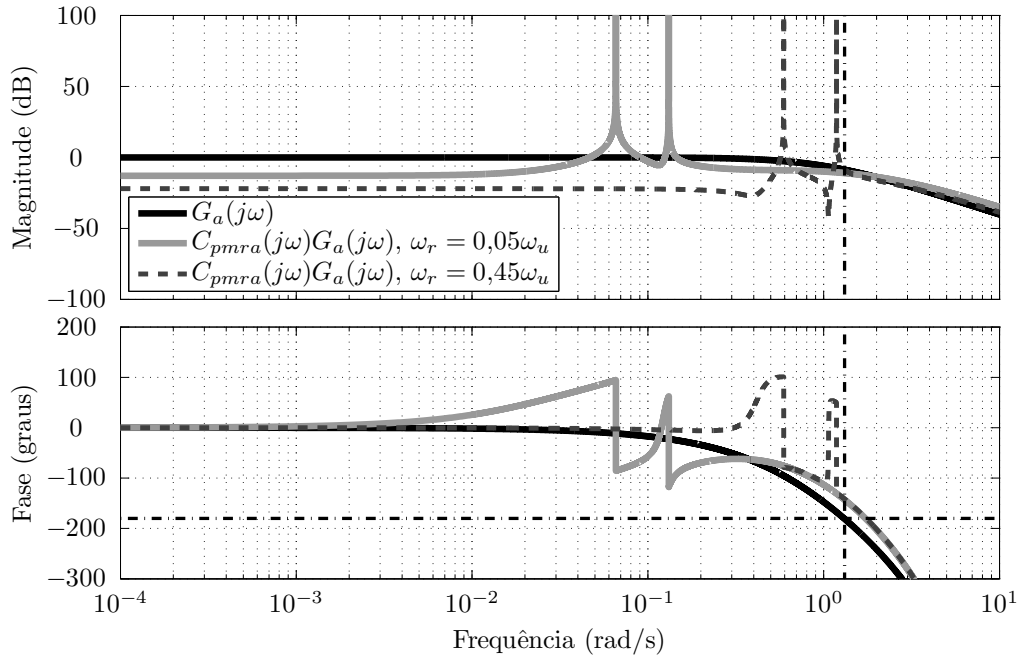
Fonte: Elaborado pelo autor.

na Figura 90.

Por meio destes gráficos, constata-se que os quatro controladores PMRAs analisados resultaram em apropriadas margens de estabilidade, característica que é corroborada pelas medidas de desempenho do sistema em malha fechada. A opção pela topologia em série das estruturas PRs e bloco de avanço de fase, juntamente com as escolhas de projeto realizadas —localização complexa para onde o ponto crítico do processo é deslocado, decomposição em localizações complexas intermediárias e restrição no posicionamento dos zeros para sintonia de cada estrutura PR, além do incremento da margem de fase com o bloco de avanço— asseguraram o deslocamento adequado do ponto crítico do processo e da região próxima à frequência  $\omega_u$  para longe do ponto  $-1 + j0$ .

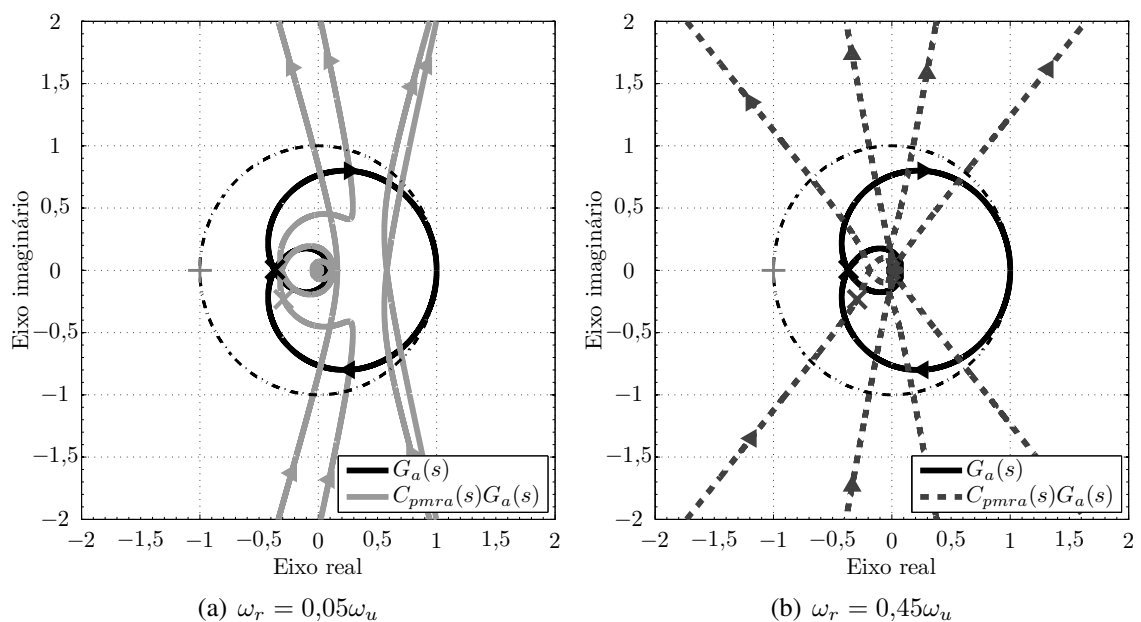
Como a função de transferência  $C_{pmra}(j\omega)$  tem dois pares de polos no eixo imaginário nas localizações  $\pm j\omega_r$  e  $\pm j2\omega_r$  ou em  $\pm j\omega_r$  e  $\pm j3\omega_r$ , os diagramas de Nyquist de  $G_a(s)C_{pmra}(s)$  em cada configuração de processo-controlador têm quatro voltas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo. As curvas desses diagramas obtidos cruzam o eixo real negativo mas não envolvem o ponto  $-1 + j0$ , resultando na estabilidade do sistema em malha fechada, visto que em nenhum dos casos analisados as funções de malha aberta com o processo e com os controladores PMRA possuem polos no SPD do plano complexo.

Figura 87 – Resposta em frequência de  $G_a(j\omega)$  e de  $C_{pmra}(j\omega)G_a(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 88 – Diagramas de Nyquist de  $G_a(s)$  e de  $C_{pmra}(s)G_a(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.

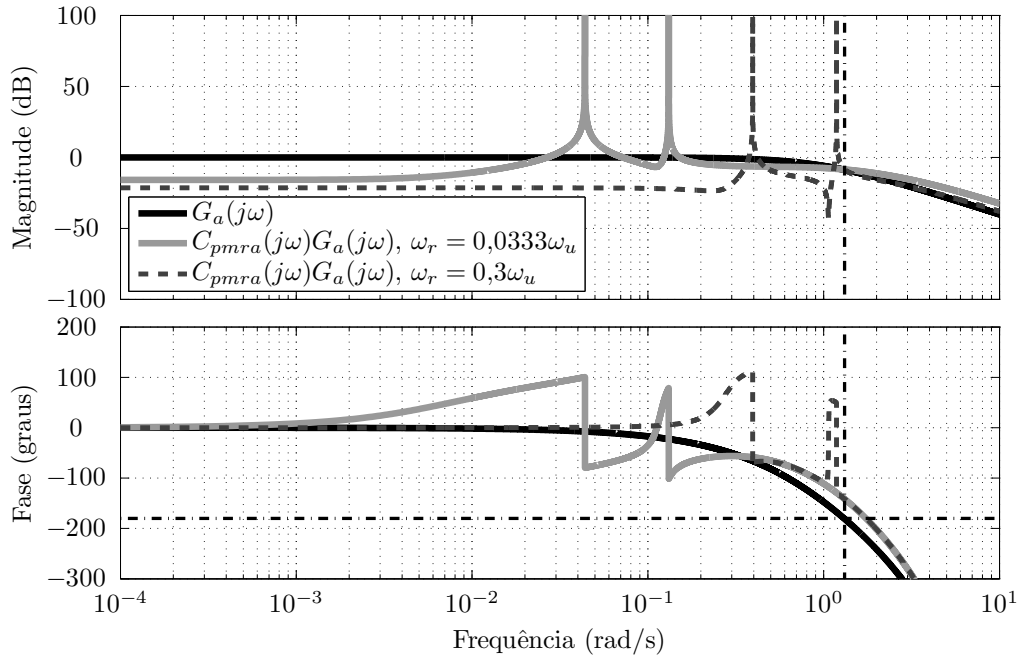


(a)  $\omega_r = 0,05\omega_u$

(b)  $\omega_r = 0,45\omega_u$

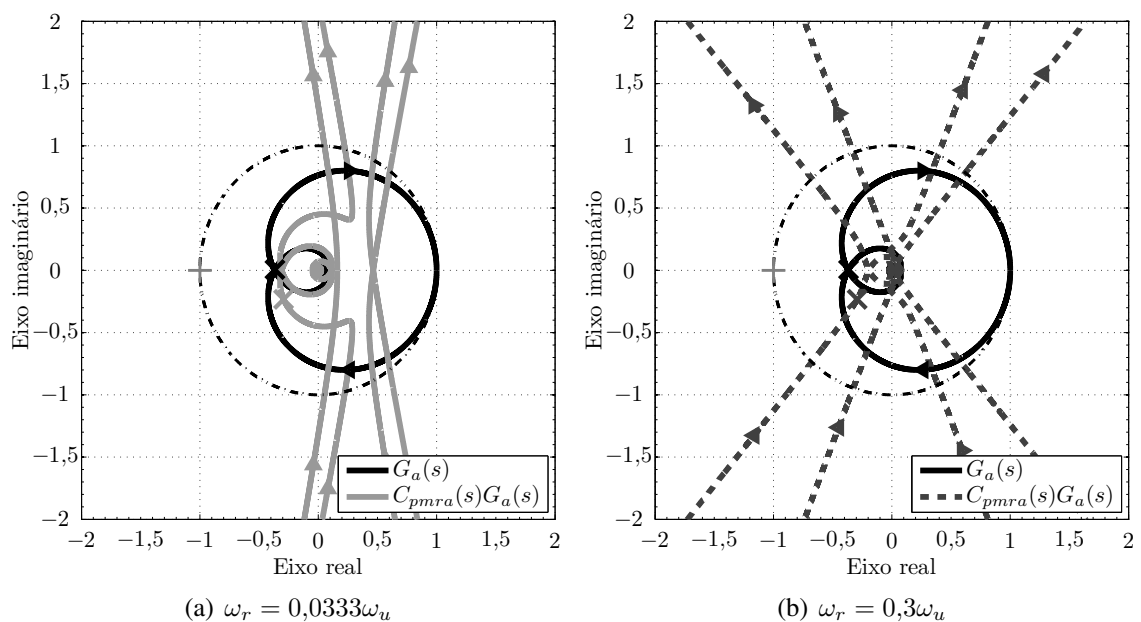
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 89 – Resposta em frequência de  $G_a(j\omega)$  e de  $C_{pmra}(j\omega)G_a(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 90 – Diagramas de Nyquist de  $G_a(s)$  e de  $C_{pmra}(s)G_a(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



(a)  $\omega_r = 0,0333\omega_u$

(b)  $\omega_r = 0,3\omega_u$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 37 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$  para o processo  $G_a(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p2}$	$K_{r12}$	$K_{r22}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$
$0,0333\omega_u$	1,02	0,117	-0,000997	0,999	0,0229	-0,00146	0,998	0,0228	-0,00328
$0,1\omega_u$	1,01	0,116	-0,00893	0,992	0,0221	-0,0131	0,982	0,0210	-0,0291
$0,167\omega_u$	1,00	0,114	-0,0246	0,977	0,0205	-0,0357	0,940	0,0173	-0,0773
$0,233\omega_u$	0,988	0,111	-0,0475	0,950	0,0180	-0,0680	0,846	0,0117	-0,136
$0,3\omega_u$	0,968	0,107	-0,0769	0,903	0,0147	-0,107	0,552	0,00437	-0,147
$k_a = 2,5, \quad z_a = 0,526, \quad p_a = 3,29, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$									

Tabela 38 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$  para o processo  $G_a(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$	$K_{p5}$	$K_{r15}$	$K_{r25}$
$0,02\omega_u$	1,02	0,117	-0,000359	0,999	0,0229	-0,00118	0,998	0,0228	-0,00328
$0,06\omega_u$	1,01	0,117	-0,00323	0,994	0,0223	-0,0106	0,982	0,0210	-0,0291
$0,1\omega_u$	1,01	0,116	-0,00893	0,982	0,0210	-0,0291	0,940	0,0173	-0,0773
$0,14\omega_u$	1,01	0,115	-0,0174	0,961	0,0190	-0,0558	0,846	0,0117	-0,136
$0,18\omega_u$	1,00	0,113	-0,0286	0,927	0,0163	-0,0890	0,552	0,00437	-0,147
$k_a = 2,5, \quad z_a = 0,526, \quad p_a = 3,29, \quad \xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$									

Tabela 39 – Medidas de desempenho para o processo  $G_a(s)$  considerando controladores PMRAs com três modos ressonantes.

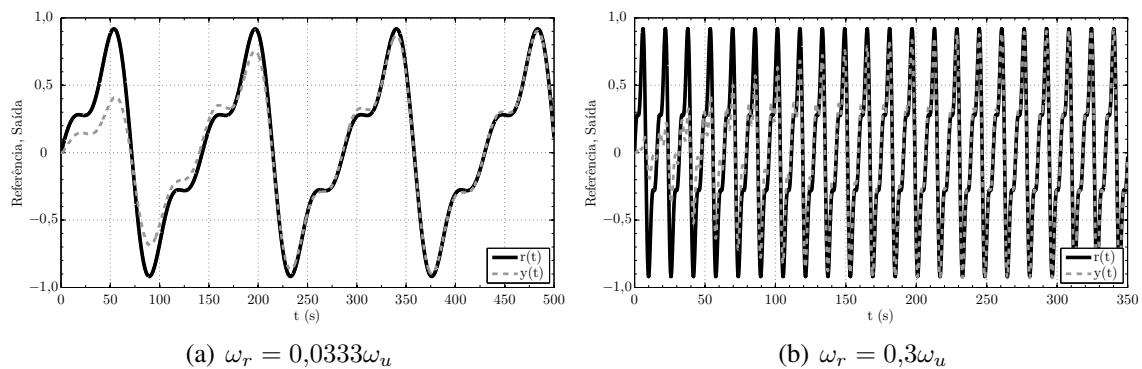
$\omega_r, 2\omega_r, 3\omega_r$				$\omega_r, 3\omega_r, 5\omega_r$			
$\omega_r$	$t_s$	$n_s$	$M_o$	$\omega_r$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,0333\omega_u = 0,0439$	455	3,2	0	$0,02\omega_u = 0,0263$	464	1,9	0
$0,1\omega_u = 0,132$	408	8,5	0,55	$0,06\omega_u = 0,0789$	440	5,5	0,32
$0,167\omega_u = 0,219$	323	11	2,0	$0,1\omega_u = 0,132$	361	7,6	2,6
$0,233\omega_u = 0,307$	271	13	2,2	$0,14\omega_u = 0,184$	343	10	4,8
$0,3\omega_u = 0,395$	321	20	1,3	$0,18\omega_u = 0,237$	428	16	5,7

### 5.3.1.2 Três modos ressonantes

Na Tabela 37 estão resumidos os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$ ,  $3\omega_r$ , enquanto na Tabela 38 estão resumidos os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $5\omega_r$ . As medidas de desempenho para estas duas configurações estão listadas em Tabela 39. Os sinais de referência e de saída do processo para a menor e para a maior frequência fundamental do sinal de referência nestas duas configurações são apresentados nas figuras 91 e 92.

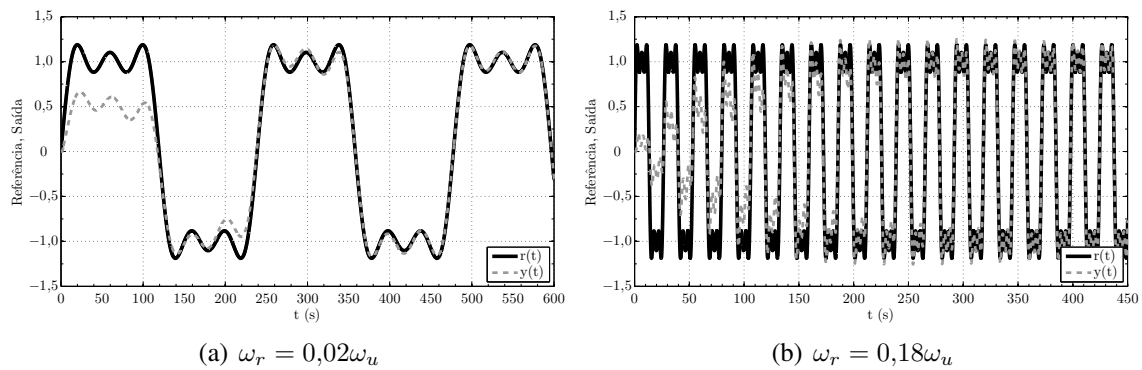
Os diagramas de resposta em frequência de  $G_a(j\omega)$  e de  $G_a(j\omega)C_{pmra}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$  avaliados para o sinal de referência com frequência fundamental  $\omega_r = 0,0333\omega_u$  e  $\omega_r = 0,3\omega_u$  estão retratados na Figura 93, ao passo que os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_a(s)$  e de

Figura 91 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_a(s)$  e controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 92 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_a(s)$  e controladores PMRAs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ .



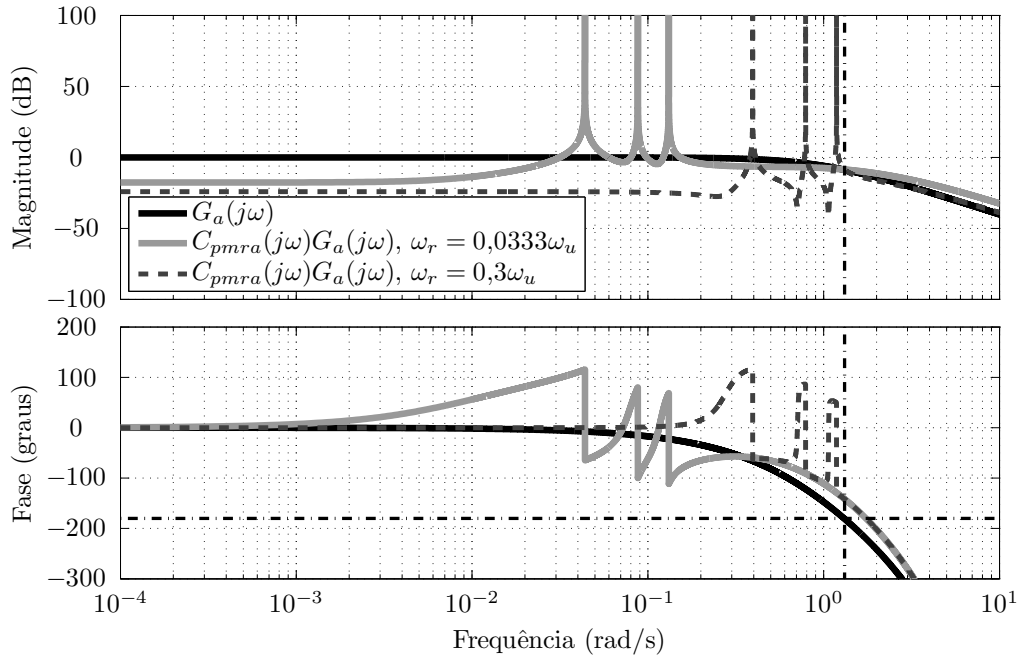
Fonte: Elaborado pelo autor.

$G_a(s)C_{pmra}(s)$  para essas mesmas frequências estão ilustrados na Figura 94.

Na Figura 95 estão retratados os diagramas de resposta em frequência de  $G_a(j\omega)$  e de  $G_a(j\omega)C_{pmra}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$  analisados para  $\omega_r = 0,02\omega_u$  e para  $\omega_r = 0,18\omega_u$ . Na Figura 96 estão apresentados os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_a(s)$  e  $G_a(s)C_{pmra}(s)$  para estas mesmas configurações.

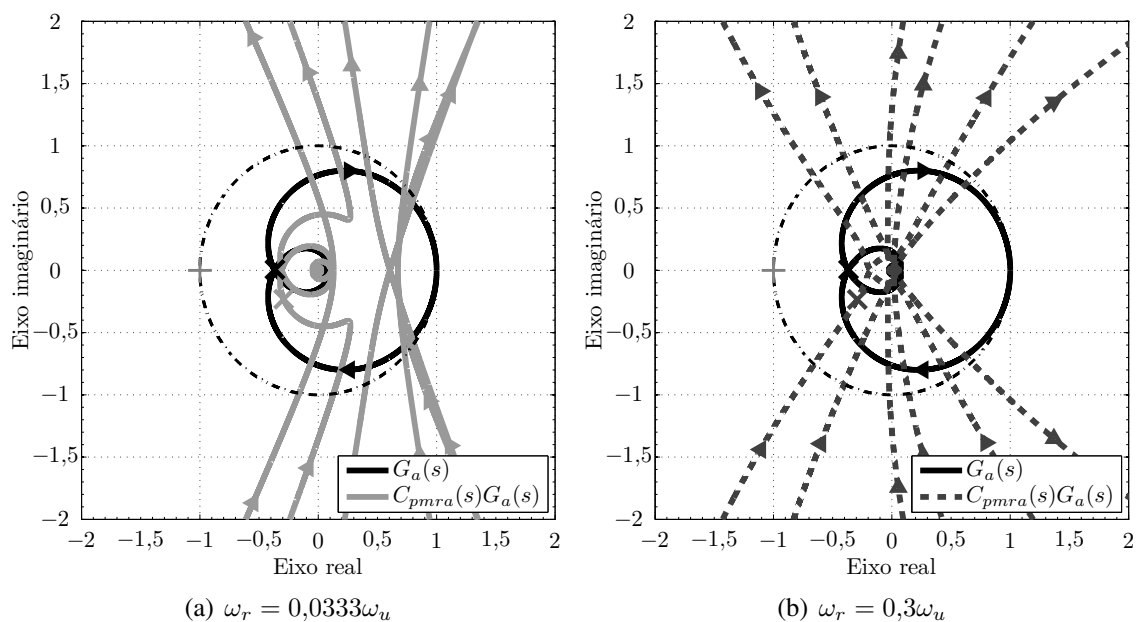
Verifica-se que os quatro controladores PMRAs com três modos de ressonância também resultaram em adequadas margens de estabilidade. Os diagramas de Nyquist de  $G_a(s)C_{pmra}(s)$  possuem seis voltas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo em razão de  $C_{pmra}(j\omega)$  ter três pares de polos sobre o eixo imaginário em  $\pm j\omega_r$ ,  $\pm j2\omega_r$  e  $\pm j3\omega_r$  ou em  $\pm j\omega_r$ ,  $\pm j3\omega_r$  e  $\pm j5\omega_r$ . As curvas destes diagramas cruzam o eixo real negativo mas não envolvem o ponto  $-1 + j0$ , o que comprova a estabilidade do sistema em malha fechada considerando que as funções de malha aberta com os controladores PMRA não possuem polos no SPD do plano complexo.

Figura 93 – Respostas em frequência de  $G_a(j\omega)$  e de  $C_{pmra}(j\omega)G_a(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 94 – Diagramas de Nyquist de  $G_a(s)$  e de  $C_{pmra}(s)G_a(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.

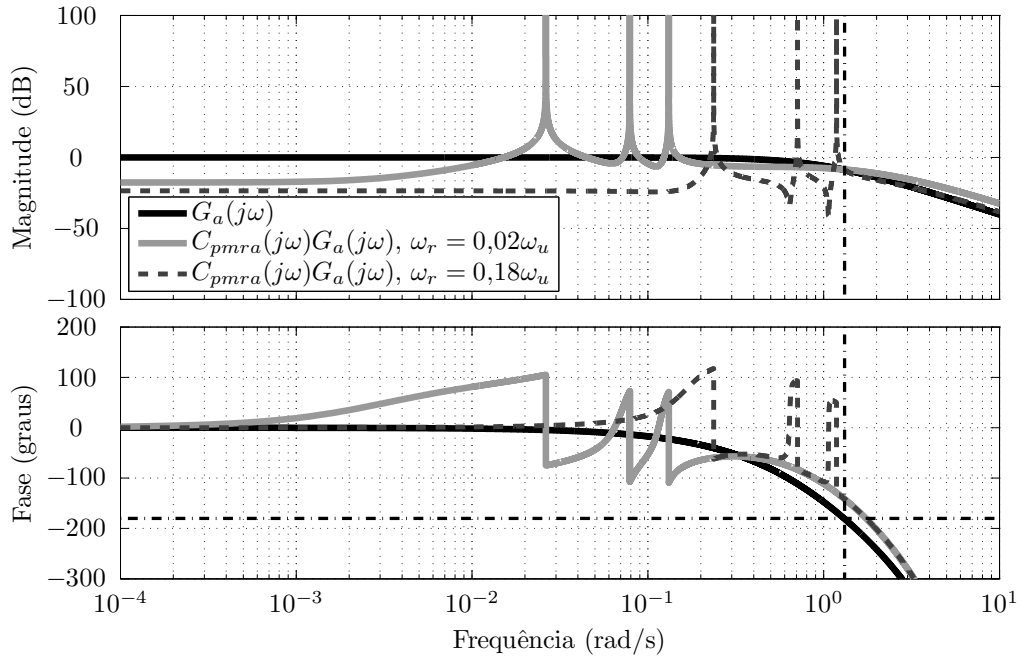


(a)  $\omega_r = 0,0333\omega_u$

(b)  $\omega_r = 0,3\omega_u$

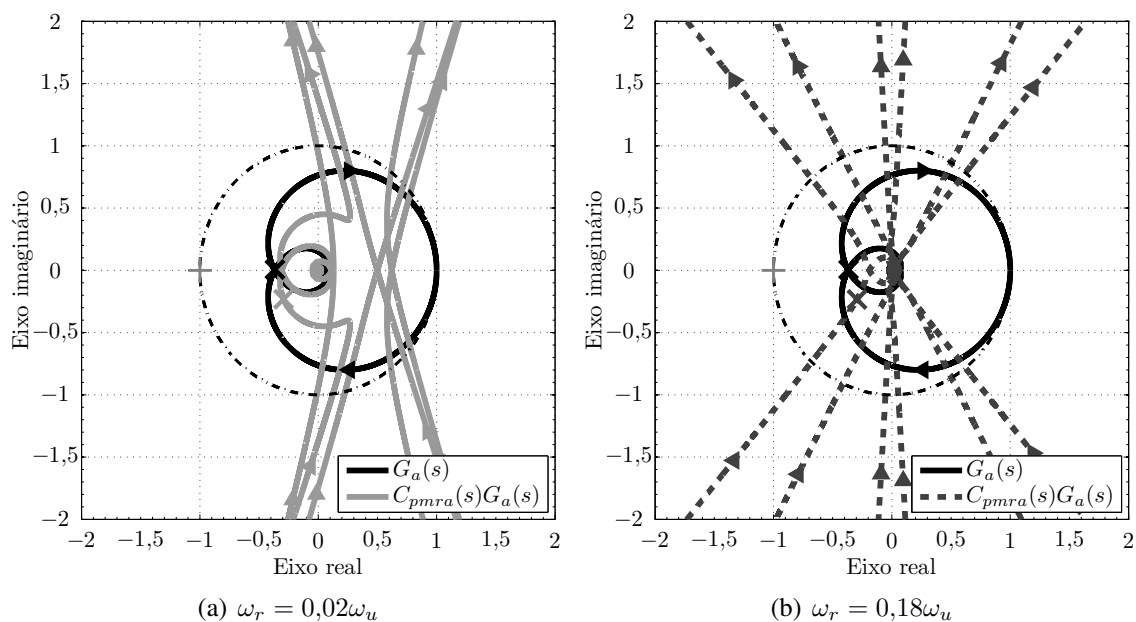
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 95 – Respostas em frequência de  $G_a(j\omega)$  e de  $C_{pmra}(j\omega)G_a(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_u = 1,32$  rad/s e na fase  $-180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 96 – Diagramas de Nyquist de  $G_a(s)$  e de  $C_{pmra}(s)G_a(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



(a)  $\omega_r = 0,02\omega_u$

(b)  $\omega_r = 0,18\omega_u$

Fonte: Elaborado pelo autor.



Tabela 40 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  e medidas de desempenho para o processo  $G_b(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p2}$	$K_{r12}$	$K_{r22}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,05\omega_{120} = 0,0847$	3,88	1,03	-0,00529	0,998	0,0293	-0,00544	69	0,93	0,14
$0,15\omega_{120} = 0,254$	3,86	1,01	-0,0474	0,982	0,0270	-0,0481	70	2,8	1,6
$0,25\omega_{120} = 0,423$	3,83	0,972	-0,131	0,940	0,0222	-0,128	50	3,4	2,2
$0,35\omega_{120} = 0,593$	3,78	0,910	-0,252	0,846	0,0151	-0,226	33	3,1	1,1
$0,45\omega_{120} = 0,762$	3,70	0,827	-0,409	0,552	0,00563	-0,244	31	3,7	0,027
$\xi_1 = \xi_2 = 0$									

Tabela 41 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  e medidas de desempenho para o processo  $G_b(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,0333\omega_{120} = 0,0564$	3,88	1,04	-0,00235	0,998	0,0293	-0,00544	124	1,1	3,2
$0,1\omega_{120} = 0,169$	3,87	1,03	-0,0211	0,982	0,0270	-0,0481	55	1,5	1,0
$0,167\omega_{120} = 0,282$	3,86	1,01	-0,0584	0,940	0,0222	-0,128	37	1,7	1,1
$0,233\omega_{120} = 0,395$	3,84	0,980	-0,114	0,846	0,0151	-0,226	27	1,7	0,25
$0,3\omega_{120} = 0,508$	3,81	0,943	-0,187	0,552	0,00563	-0,244	33	2,6	0
$\xi_1 = \xi_3 = 0$									

### 5.3.2 Processo da Classe B

O processo da Classe B considerado para avaliação do método GOF tem a seguinte função de transferência

$$G_b(s) = \frac{1}{(s+1)^2}. \quad (162)$$

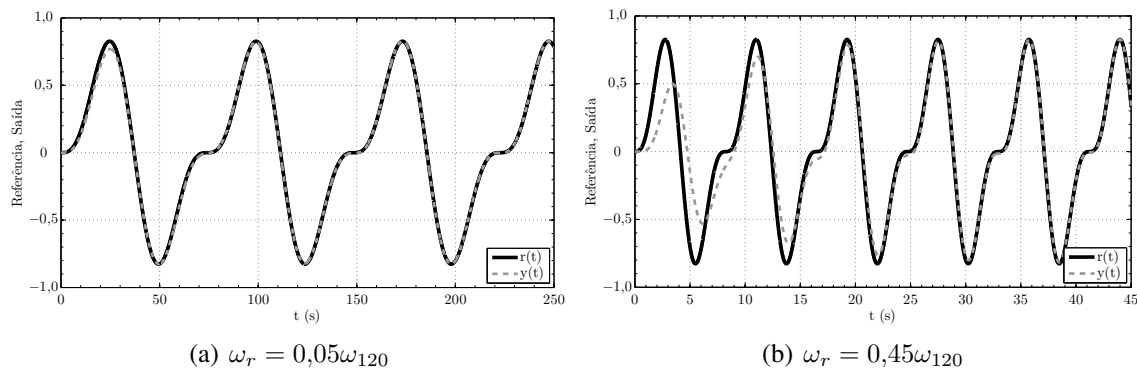
No experimento do RFA para a Classe B identifica-se o ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-120^\circ$ . Neste experimento, para  $G_b(s)$  são obtidas a frequência  $\omega_{120} = 1,69$  rad/s e a magnitude  $M_{120} = 0,255$ . A seguir, são apresentados os resultados da utilização nesse processo de controladores PMRs com dois e com três modos ressonantes sintonizados através destas informações identificadas.

#### 5.3.2.1 Dois modos ressonantes

Os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  bem como as medidas de desempenho estão retratados na Tabela 40, ao passo que na Tabela 41 estão resumidos estes dados para os controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Nas figuras 97 e 98 estão apresentados os sinais de referência e de saída do processo para a menor e para a maior frequência fundamental do sinal de referência em ambas configurações.

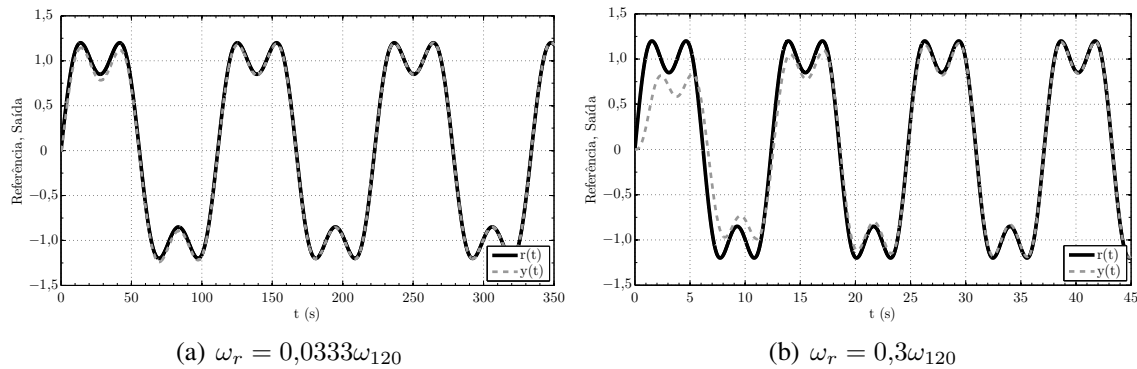
Na Figura 99 são retratados os diagramas de resposta em frequência do processo  $G_b(j\omega)$  e da função de malha aberta  $G_b(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  analisados para o sinal de referência com frequência fundamental  $\omega_r = 0,05\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,45\omega_{120}$ . Os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_b(s)$  e  $G_b(s)C_{pmr}(s)$  para estas mesmas configurações de processo-controlador estão

Figura 97 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_b(s)$  e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 98 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_b(s)$  e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

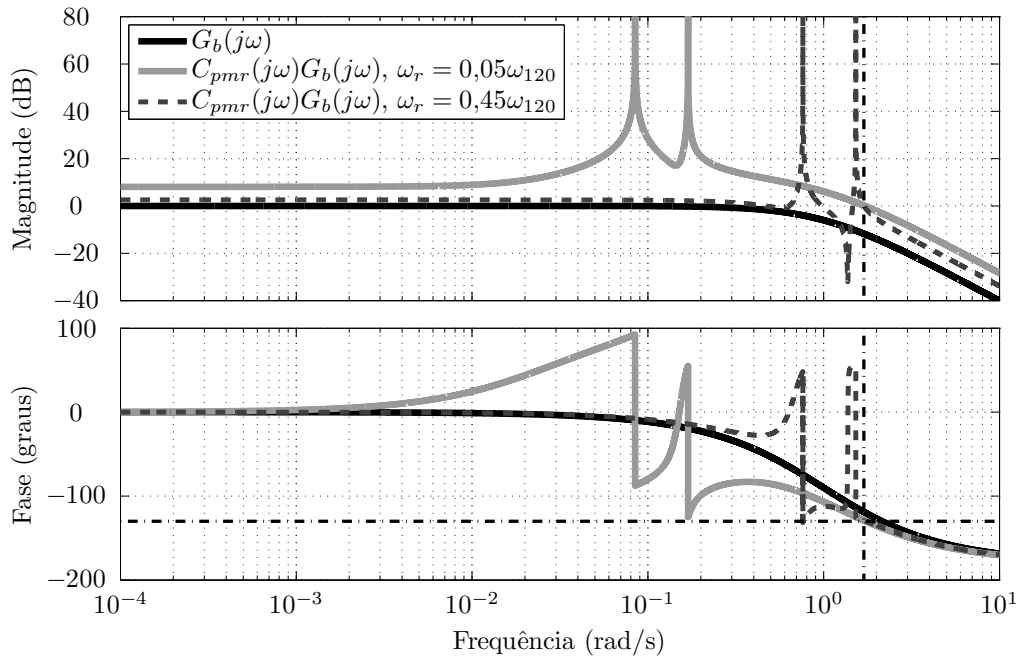
apresentadas na Figura 100, na qual o ponto destas curvas referente à frequência  $\omega_{120}$  está destacado com um 'X'.

Os diagramas de resposta em frequência de  $G_b(j\omega)$  e de  $G_b(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  considerando  $\omega_r = 0,0333\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,3\omega_{120}$  estão representados na Figura 101, enquanto os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_b(s)$  e  $G_b(s)C_{pmr}(s)$  para estas configurações estão ilustrados na Figura 102.

Observa-se, por meio desses diagramas, que a função de malha aberta analisada na frequência identificada do processo  $\omega_{120}$  possui magnitude unitária e  $-130^\circ$  de fase, conforme esperado. Outra forma de verificar esta característica é através do diagrama de Nyquist de  $G_b(s)C_{pmr}(s)$ , onde pode-se confirmar que o ponto identificado da resposta em frequência do processo é efetivamente deslocado para a localização  $p = 1\angle -130^\circ$ , o que resulta em  $50^\circ$  de margem de fase, como definido.

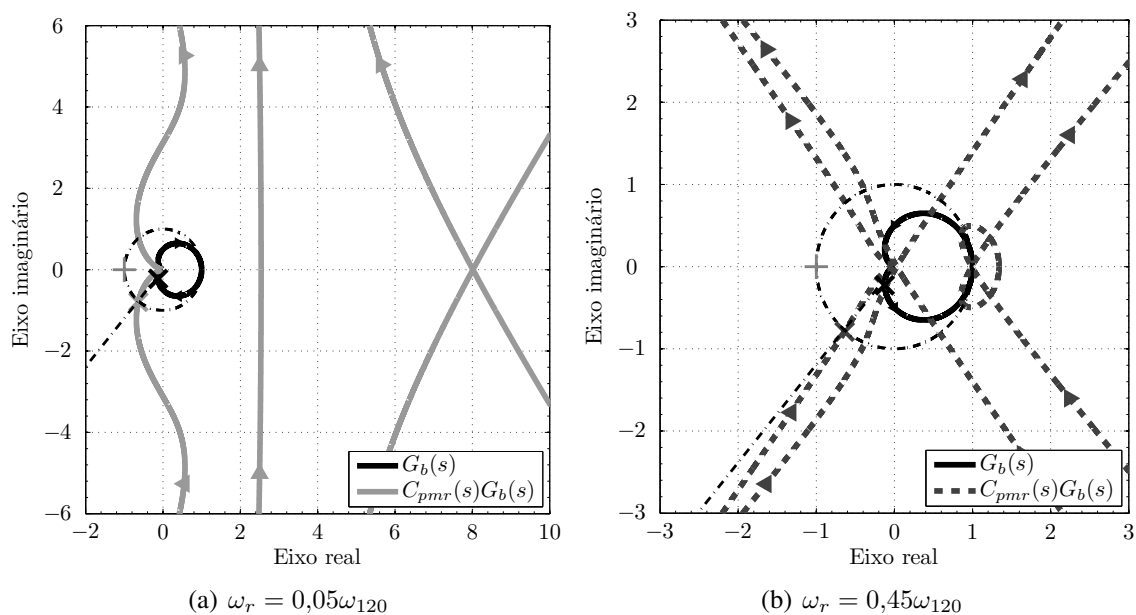
Uma vez que  $C_{pmr}(s)$  tem dois pares de polos no eixo imaginário nas localizações  $\pm j\omega_r$  e  $\pm j2\omega_r$  ou em  $\pm j\omega_r$  e  $\pm j3\omega_r$ , os diagramas de Nyquist de  $G_b(s)C_{pmr}(s)$  em cada configuração de processo-controlador possuem quatro voltas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo. Além disto, verifica-se que o traçado desses diagramas de Nyquist não cruza o eixo real negativo para nenhuma frequência finita e, assim, não envolve o ponto  $-1 + j0$ , confirmando a estabilidade do sistema em malha fechada, dado que  $G_b(s)C_{pmr}(s)$  não possui polos no SPD.

Figura 99 – Respostas em frequência de  $G_b(j\omega)$  e de  $C_{pmr}(j\omega)G_b(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 1,69$  rad/s e na fase  $-130^\circ$ .



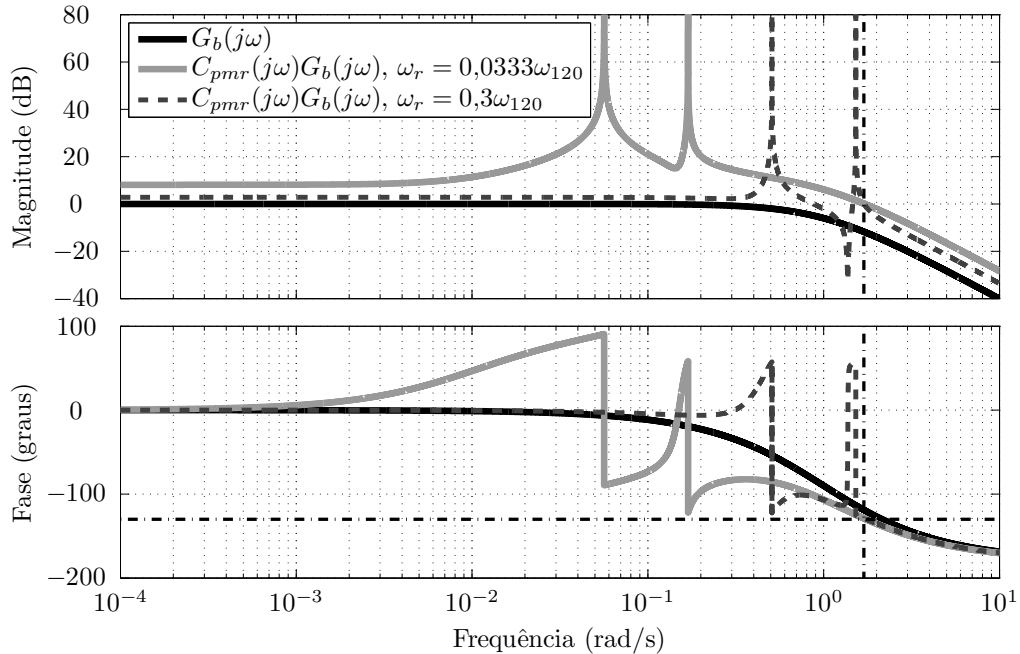
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 100 – Diagramas de Nyquist de  $G_b(s)$  e de  $C_{pmr}(s)G_b(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ . As linhas traço e ponto pretas destacam a circunferência de raio unitário e a reta com fase  $-130^\circ$ .



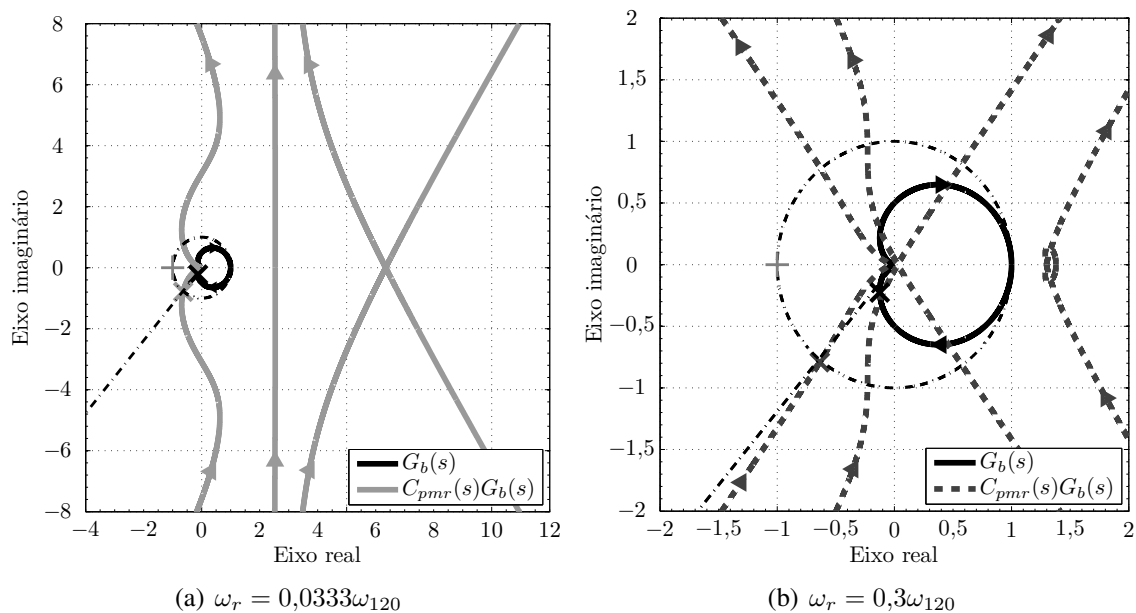
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 101 – Respostas em frequência de  $G_b(j\omega)$  e de  $C_{pmr}(j\omega)G_b(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 1,69$  rad/s e na fase  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 102 – Diagramas de Nyquist de  $G_b(s)$  e de  $C_{pmr}(s)G_b(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . As linhas traço e ponto pretas destacam a circunferência de raio unitário e a reta com fase  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 42 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$  para o processo  $G_b(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p2}$	$K_{r12}$	$K_{r22}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$
$0,0333\omega_{120}$	3,89	0,923	-0,00235	0,999	0,0295	-0,00242	0,998	0,0293	-0,00544
$0,1\omega_{120}$	3,88	0,914	-0,0211	0,992	0,0284	-0,0216	0,982	0,0270	-0,0481
$0,167\omega_{120}$	3,86	0,898	-0,0584	0,977	0,0263	-0,0591	0,940	0,0222	-0,128
$0,233\omega_{120}$	3,84	0,873	-0,114	0,950	0,0232	-0,113	0,846	0,0151	-0,226
$0,3\omega_{120}$	3,81	0,841	-0,187	0,903	0,0190	-0,177	0,552	0,00563	-0,244
$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$									

Tabela 43 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$  para o processo  $G_b(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$	$K_{p5}$	$K_{r15}$	$K_{r25}$
$0,02\omega_{120}$	3,89	0,923	-0,000846	0,999	0,0295	-0,00196	0,998	0,0293	-0,00544
$0,06\omega_{120}$	3,88	0,920	-0,00761	0,994	0,0287	-0,0175	0,982	0,0270	-0,0481
$0,1\omega_{120}$	3,88	0,914	-0,0211	0,982	0,0270	-0,0481	0,940	0,0222	-0,128
$0,14\omega_{120}$	3,87	0,906	-0,0413	0,961	0,0244	-0,0923	0,846	0,0151	-0,226
$0,18\omega_{120}$	3,86	0,894	-0,0681	0,927	0,0210	-0,147	0,552	0,00563	-0,244
$\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$									

Tabela 44 – Medidas de desempenho para o processo  $G_b(s)$  considerando controladores PMRs com três modos ressonantes.

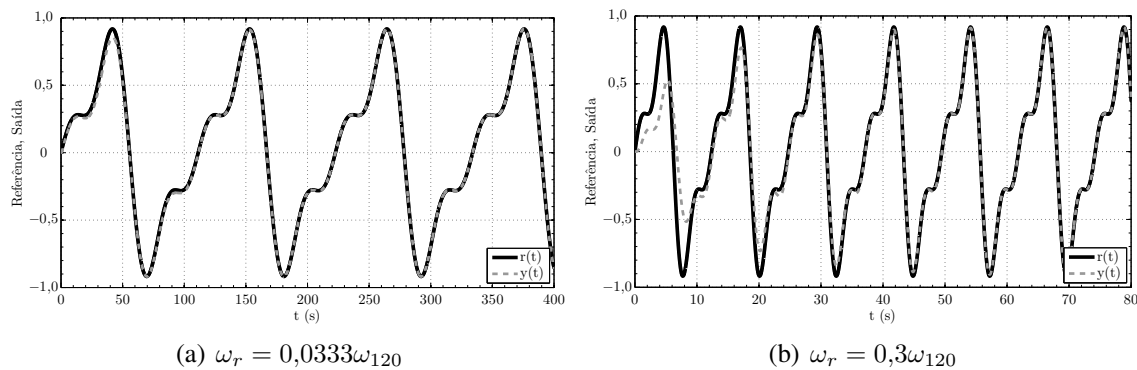
$\omega_r, 2\omega_r, 3\omega_r$				$\omega_r, 3\omega_r, 5\omega_r$			
$\omega_r$	$t_s$	$n_s$	$M_o$	$\omega_r$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,0333\omega_{120} = 0,0564$	96	0,87	0,07	$0,02\omega_{120} = 0,0339$	218	1,2	3,3
$0,1\omega_{120} = 0,169$	73	2,0	0,7	$0,06\omega_{120} = 0,102$	70	1,1	0,37
$0,167\omega_{120} = 0,282$	67	3,0	1,2	$0,1\omega_{120} = 0,169$	62	1,7	0,75
$0,233\omega_{120} = 0,395$	48	3,0	0,55	$0,14\omega_{120} = 0,237$	53	2,0	0,61
$0,3\omega_{120} = 0,508$	46	3,7	0	$0,18\omega_{120} = 0,305$	50	2,4	0,022

### 5.3.2.2 Três modos ressonantes

Na Tabela 42 estão listados os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$ ,  $3\omega_r$ , ao passo que na Tabela 43 estão representados os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $5\omega_r$ . As medidas de desempenho para estas duas configurações estão resumidas em Tabela 44. Nas figuras 103 e 104 estão retratados os sinais de referência e de saída do processo para a menor e para a maior frequência fundamental do sinal de referência nestas duas configurações.

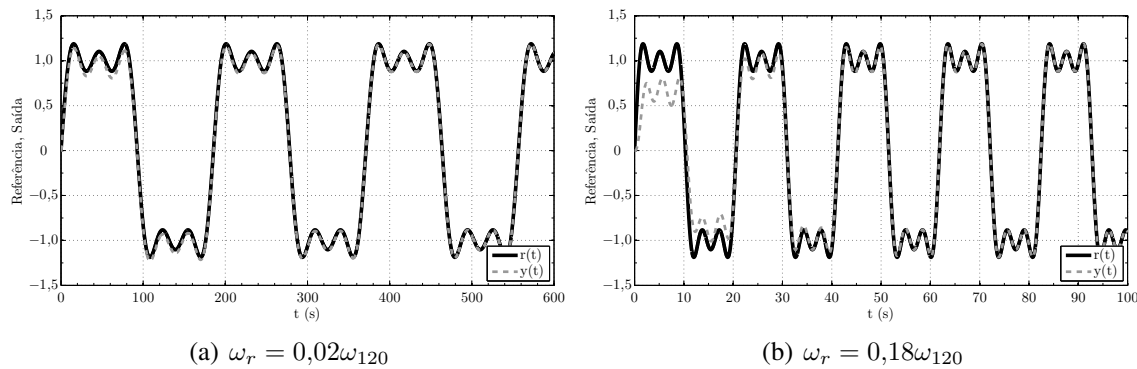
Na Figura 105 estão retratados os diagramas de resposta em frequência de  $G_b(j\omega)$  e de  $G_b(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$  analisados para o sinal de referência com frequência fundamental  $\omega_r = 0,0333\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,3\omega_{120}$ . Os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_b(s)$  e  $G_b(s)C_{pmr}(s)$  para essas mesmas frequências são apresentados na Figura 106.

Figura 103 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_b(s)$  e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 104 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_b(s)$  e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ .



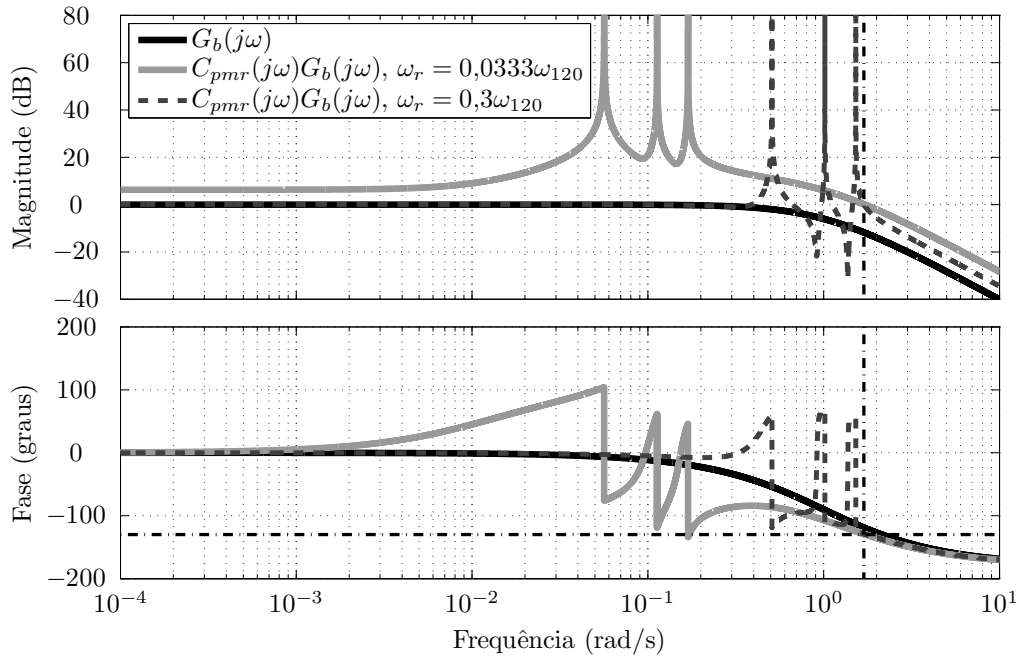
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os diagramas de resposta em frequência de  $G_b(j\omega)$  e de  $G_b(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$  considerando  $\omega_r = 0,02\omega_{120}$  e  $\omega_r = 0,18\omega_{120}$  estão representados na Figura 107, ao passo que os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_b(s)$  e  $G_b(s)C_{pmr}(s)$  para estas mesmas configurações estão ilustrados na Figura 108.

Através destes gráficos, pode-se notar que a resposta em frequência da função de malha aberta com os controladores PMRs sintonizados para  $G_b(j\omega)$  não cruza a linha de  $-180^\circ$  para nenhuma frequência finita e quando avaliada na frequência identificada do processo verifica-se que  $G_b(j\omega_{120})C_{pmr}(j\omega_{120})$  possui magnitude unitária e  $-130^\circ$  de fase, decorrendo em  $50^\circ$  de margem de fase.

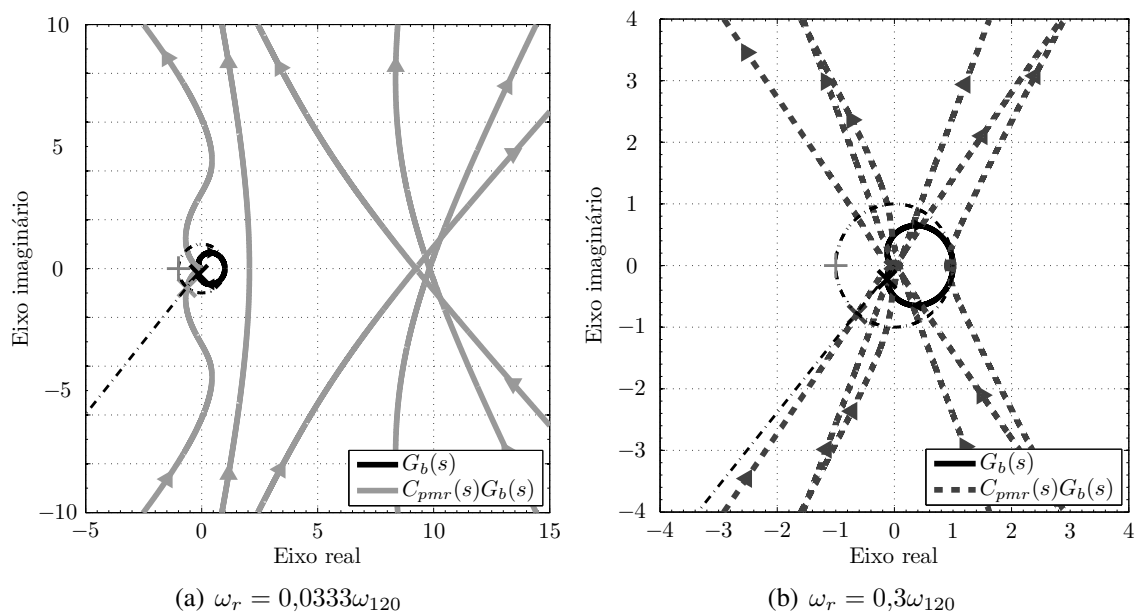
Também verifica-se que os diagramas de Nyquist de  $G_b(s)C_{pmr}(s)$  têm seis voltas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo graças aos três pares de polos do controlador  $C_{pmr}(s)$  no eixo imaginário nas localizações  $\pm j\omega_r$ ,  $\pm j2\omega_r$  e  $\pm j3\omega_r$  ou em  $\pm j\omega_r$ ,  $\pm j3\omega_r$  e  $\pm j5\omega_r$ . Como  $G_b(s)C_{pmr}(s)$  não possui polos no SPD e o traçado desses diagramas não envolve o ponto  $-1 + j0$ , nem cruza o eixo real negativo para nenhuma frequência finita, comprova-se a estabilidade do sistema em malha fechada.

Figura 105 – Respostas em frequência de  $G_b(j\omega)$  e de  $C_{pmr}(j\omega)G_b(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 1,69$  rad/s e na fase  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 106 – Diagramas de Nyquist de  $G_b(s)$  e  $C_{pmr}(s)G_b(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ . As linhas traço e ponto pretas destacam a circunferência de raio unitário e a reta com fase  $-130^\circ$ .

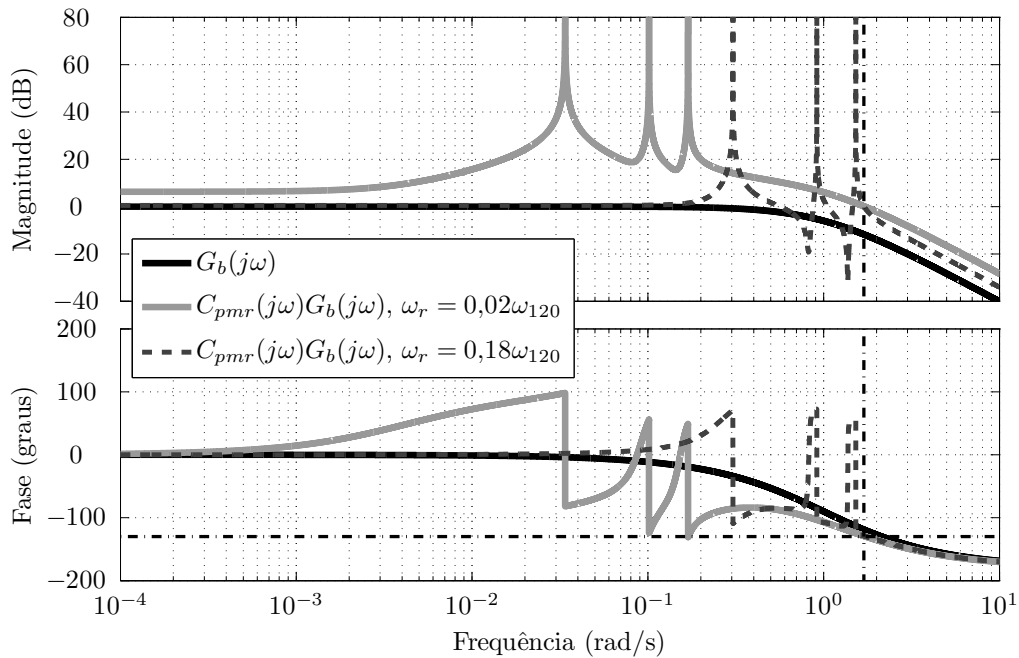


(a)  $\omega_r = 0,0333\omega_{120}$

(b)  $\omega_r = 0,3\omega_{120}$

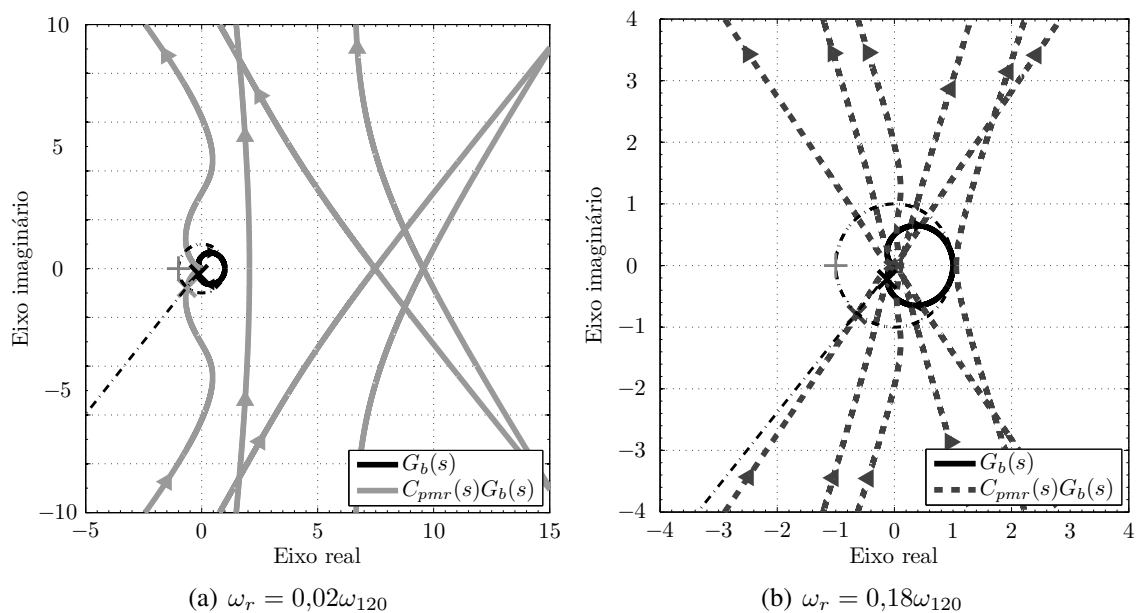
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 107 – Respostas em frequência de  $G_b(j\omega)$  e de  $C_{pmr}(j\omega)G_b(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{120} = 1,69$  rad/s e na fase  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 108 – Diagramas de Nyquist de  $G_b(s)$  e de  $C_{pmr}(s)G_b(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ . As linhas traço e ponto pretas destacam a circunferência de raio unitário e a reta com fase  $-130^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.



Tabela 45 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  e medidas de desempenho para o processo  $G_c(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p2}$	$K_{r12}$	$K_{r22}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,05\omega_{60} = 0,0838$	1,75	1,62	-0,00233	0,998	0,0290	-0,00532	72	0,96	1,4
$0,15\omega_{60} = 0,251$	1,74	1,59	-0,0209	0,982	0,0267	-0,0471	70	2,8	1,5
$0,25\omega_{60} = 0,419$	1,73	1,52	-0,0574	0,940	0,0220	-0,125	54	3,6	2,4
$0,35\omega_{60} = 0,586$	1,70	1,42	-0,111	0,846	0,0150	-0,221	38	3,6	1,9
$0,45\omega_{60} = 0,754$	1,67	1,29	-0,180	0,552	0,00557	-0,239	40	4,7	0,47
$\xi_1 = \xi_2 = 0$									

Tabela 46 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  e medidas de desempenho para o processo  $G_c(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,0333\omega_{60} = 0,0558$	1,75	1,62	-0,00103	0,998	0,0290	-0,00532	177	1,6	3,6
$0,1\omega_{60} = 0,168$	1,74	1,61	-0,00929	0,982	0,0267	-0,0471	57	1,5	4,6
$0,167\omega_{60} = 0,279$	1,74	1,58	-0,0257	0,940	0,0220	-0,125	42	1,8	2,1
$0,233\omega_{60} = 0,391$	1,73	1,53	-0,0501	0,846	0,0150	-0,221	35	2,2	1,2
$0,3\omega_{60} = 0,503$	1,72	1,48	-0,0822	0,552	0,00557	-0,239	37	3,0	0,44
$\xi_1 = \xi_3 = 0$									

### 5.3.3 Processo da Classe C

O processo da Classe C considerado para a análise do método GOF tem a seguinte função de transferência

$$G_c(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (163)$$

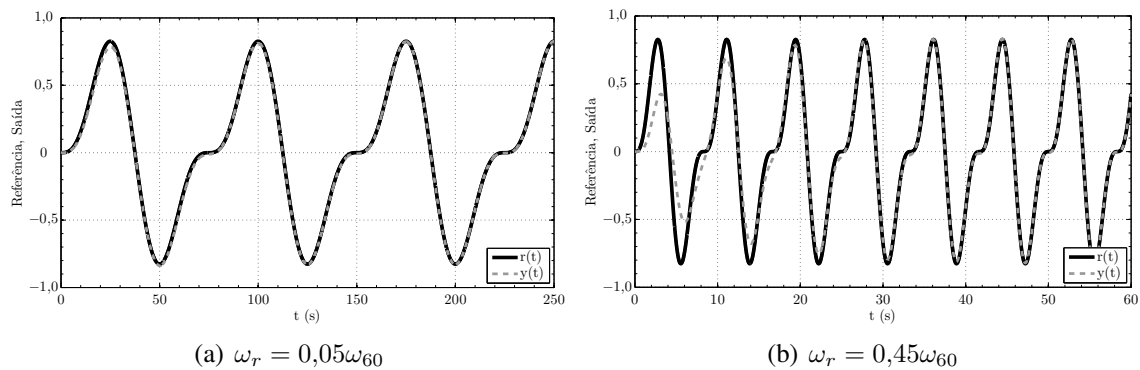
Para a Classe C, no experimento do RFA, identifica-se o ponto de menor frequência da resposta em frequência do processo cuja fase é  $-60^\circ$ . Neste caso, para  $G_c(s)$  são determinadas a frequência  $\omega_{60} = 1,68$  rad/s e a magnitude  $M_{60} = 0,501$ . Na sequência, são retratados os resultados da aplicação de controladores PMRs com dois e com três modos ressonantes sintonizados através destas informações identificadas.

#### 5.3.3.1 Dois modos ressonantes

Os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  e as medidas de desempenho estão apresentados na Tabela 45, enquanto na Tabela 46 estão resumidos estes resultados para os controladores com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Os sinais de referência e de saída do processo para a menor e para a maior frequência fundamental do sinal de referência em ambas configurações estão ilustradas nas figuras 109 e 110.

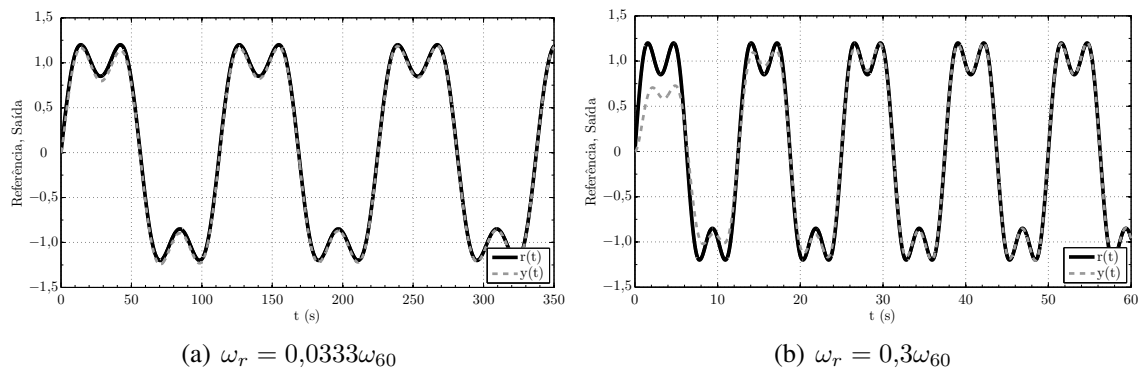
Os diagramas de resposta em frequência do processo  $G_c(j\omega)$  e da função de malha aberta  $G_c(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  considerando o sinal de referência com frequência fundamental  $\omega_r = 0,05\omega_{60}$  e  $\omega_r = 0,45\omega_{60}$  estão retratados na Figura 111, enquanto na Figura 112 são apresentados os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_c(s)$  e  $G_c(s)C_{pmr}(s)$  para estas duas configurações de processo-controlador. Nesses diagramas de Nyquist o ponto referente à frequência

Figura 109 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_c(s)$  e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 110 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_c(s)$  e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

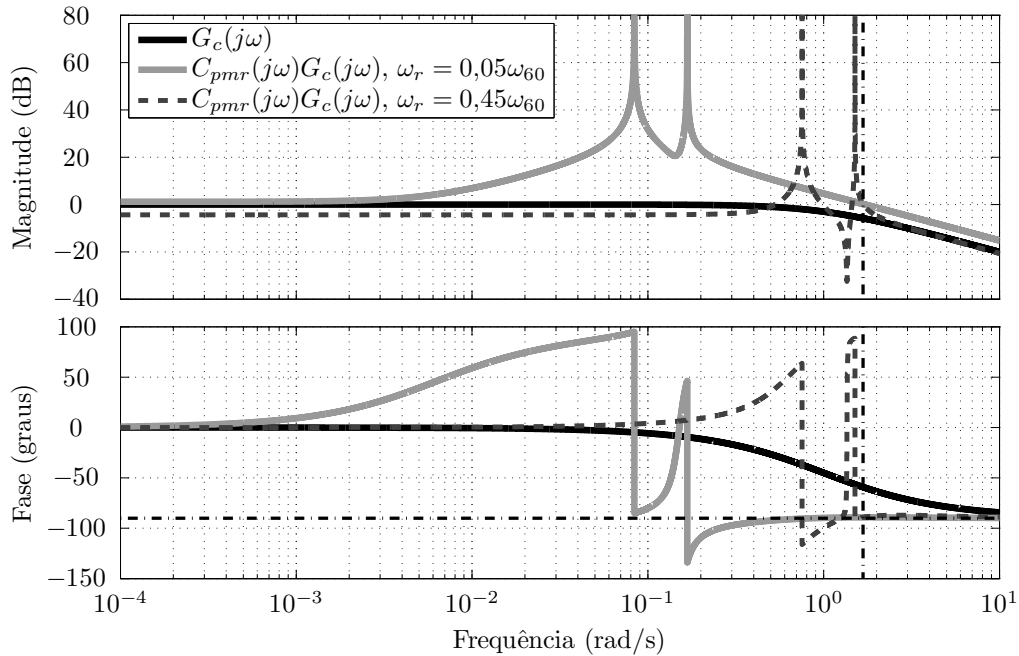
identificada do processo  $\omega_{60}$  está destacado com um 'X'.

Na Figura 113 estão representados os diagramas de resposta em frequência de  $G_c(j\omega)$  e de  $G_c(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  avaliados para  $\omega_r = 0,0333\omega_{60}$  e para  $\omega_r = 0,3\omega_{60}$ . Os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_c(s)$  e  $G_c(s)C_{pmr}(s)$  para estas mesmas frequências estão ilustrados na Figura 114.

Mediante análise destes gráficos, pode-se verificar que o traçado da função de malha aberta não cruza a linha de  $-180^\circ$ . Nota-se também que  $G_c(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  avaliada em  $\omega_{60}$  tem magnitude unitária e  $-90^\circ$  de fase e que os quatro controladores PMRs sintonizados para este processo resultaram em apropriadas margens de estabilidade.

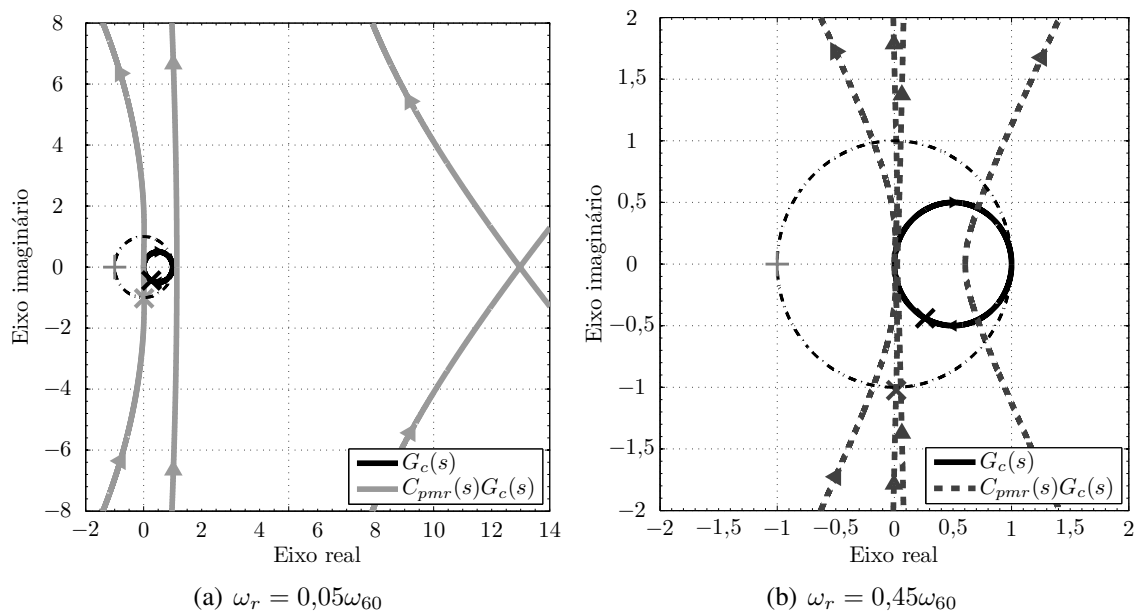
Os traçados dos diagramas de Nyquist de  $G_c(s)C_{pmr}(s)$  têm quatro voltas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo devido ao fato que  $C_{pmr}(s)$  tem dois pares de polos sobre o eixo imaginário em  $\pm j\omega_r$  e  $\pm j2\omega_r$  ou em  $\pm j\omega_r$  e  $\pm j3\omega_r$ . Confirma-se que o ponto identificado da resposta em frequência do processo é deslocado com cada um dos controladores PMRs projetados para a localização  $p = 1 \angle -90^\circ$ . Ainda, observa-se que o traçado desses diagramas de Nyquist não cruza o eixo real negativo para nenhuma frequência finita e, com isso, não envolve o ponto  $-1 + j0$ , comprovando a estabilidade do sistema em malha fechada, visto que  $G_c(s)C_{pmr}(s)$  não possui polos no SPD do plano complexo em nenhum dos casos.

Figura 111 – Respostas em frequência de  $G_c(j\omega)$  e de  $C_{pmr}(j\omega)G_c(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{60} = 1,68$  rad/s e na fase  $-90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 112 – Diagramas de Nyquist de  $G_c(s)$  e de  $C_{pmr}(s)G_c(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.

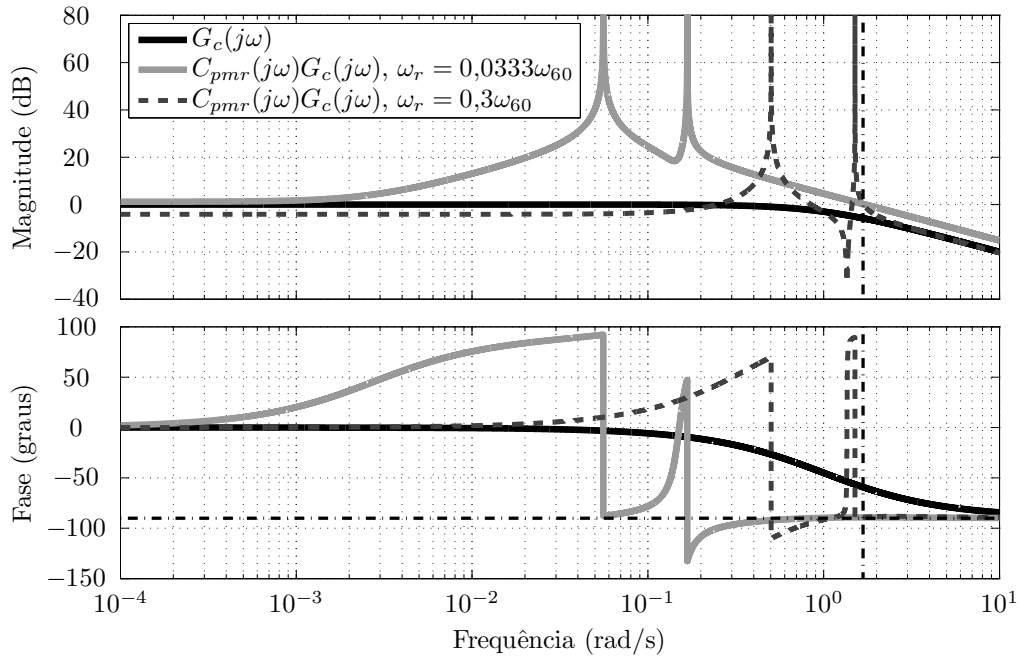


(a)  $\omega_r = 0,05\omega_{60}$

(b)  $\omega_r = 0,45\omega_{60}$

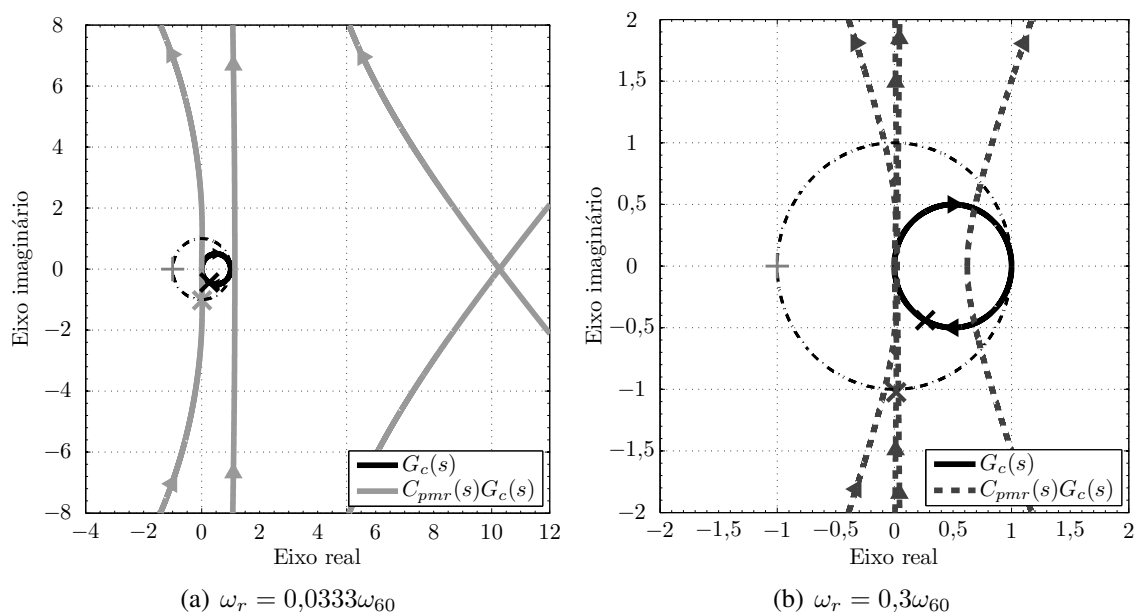
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 113 – Respostas em frequência de  $G_c(j\omega)$  e de  $C_{pmr}(j\omega)G_c(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{60} = 1,68$  rad/s e na fase  $-90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 114 – Diagramas de Nyquist de  $G_c(s)$  e de  $C_{pmr}(s)G_c(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 47 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$  para o processo  $G_c(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p2}$	$K_{r12}$	$K_{r22}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$
$0,0333\omega_{60}$	1,76	1,57	-0,00105	0,999	0,0292	-0,00237	0,998	0,0290	-0,00532
$0,1\omega_{60}$	1,76	1,55	-0,00940	0,992	0,0281	-0,0212	0,982	0,0267	-0,0471
$0,167\omega_{60}$	1,75	1,53	-0,0260	0,977	0,0261	-0,0579	0,940	0,0220	-0,125
$0,233\omega_{60}$	1,74	1,48	-0,0507	0,950	0,0229	-0,110	0,846	0,0150	-0,221
$0,3\omega_{60}$	1,73	1,43	-0,0832	0,903	0,0188	-0,173	0,552	0,00557	-0,239
$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$									

Tabela 48 – Parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$  para o processo  $G_c(s)$ .

$\omega_r$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$K_{p3}$	$K_{r13}$	$K_{r23}$	$K_{p5}$	$K_{r15}$	$K_{r25}$
$0,02\omega_{60}$	1,76	1,57	-0,000377	0,999	0,0292	-0,00192	0,998	0,0290	-0,00532
$0,06\omega_{60}$	1,76	1,56	-0,00339	0,994	0,0284	-0,0172	0,982	0,0267	-0,0471
$0,1\omega_{60}$	1,76	1,55	-0,00940	0,982	0,0267	-0,0471	0,940	0,0220	-0,125
$0,14\omega_{60}$	1,76	1,54	-0,0184	0,961	0,0241	-0,0904	0,846	0,0150	-0,221
$0,18\omega_{60}$	1,75	1,52	-0,0303	0,927	0,0208	-0,144	0,552	0,00557	-0,239
$\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$									

Tabela 49 – Medidas de desempenho para o processo  $G_c(s)$  considerando controladores PMRs com três modos ressonantes.

$\omega_r, 2\omega_r, 3\omega_r$				$\omega_r, 3\omega_r, 5\omega_r$			
$\omega_r$	$t_s$	$n_s$	$M_o$	$\omega_r$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,0333\omega_{60} = 0,0558$	101	0,90	1,2	$0,02\omega_{60} = 0,0335$	340	1,8	3,0
$0,1\omega_{60} = 0,168$	73	1,9	0,59	$0,06\omega_{60} = 0,101$	113	1,8	3,5
$0,167\omega_{60} = 0,279$	67	3,0	1,2	$0,1\omega_{60} = 0,168$	57	1,5	1,4
$0,233\omega_{60} = 0,391$	48	3,0	0,69	$0,14\omega_{60} = 0,235$	54	2,0	1,5
$0,3\omega_{60} = 0,503$	49	4,0	0,018	$0,18\omega_{60} = 0,302$	55	2,6	0,054

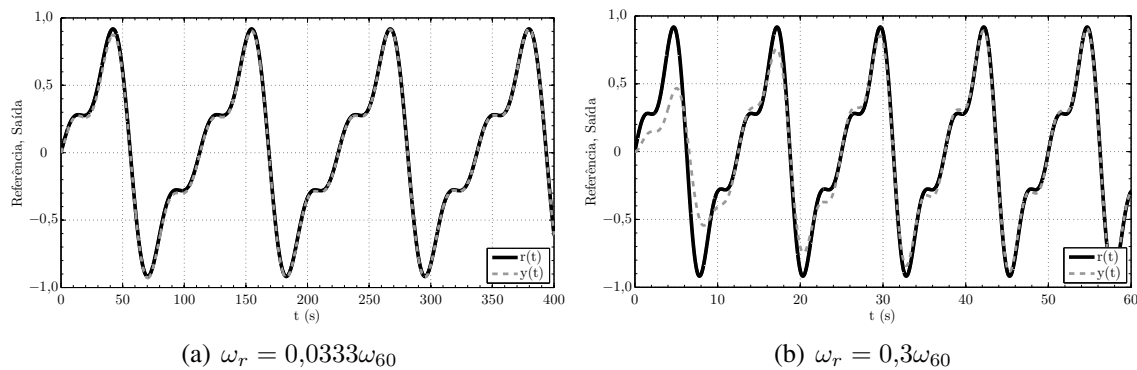
### 5.3.3.2 Três modos ressonantes

Na Tabela 47 estão apresentados os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$ ,  $3\omega_r$ , enquanto na Tabela 48 estão resumidos os conjuntos de parâmetros de sintonia dos controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $5\omega_r$ . As medidas de desempenho para estas duas configurações estão representadas em Tabela 49. Os sinais de referência e de saída do processo para a menor e para a maior frequência fundamental do sinal de referência nestas duas configurações de processo-controlador estão ilustrados nas figuras 115 e 116.

Na Figura 117 estão retratados os diagramas de resposta em frequência de  $G_c(j\omega)$  e de  $G_c(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$  considerando  $\omega_r = 0,0333\omega_{60}$  e  $\omega_r = 0,3\omega_{60}$ . Os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_c(s)$  e  $G_c(s)C_{pmr}(s)$  para essas mesmas frequências estão ilustrados na Figura 118.

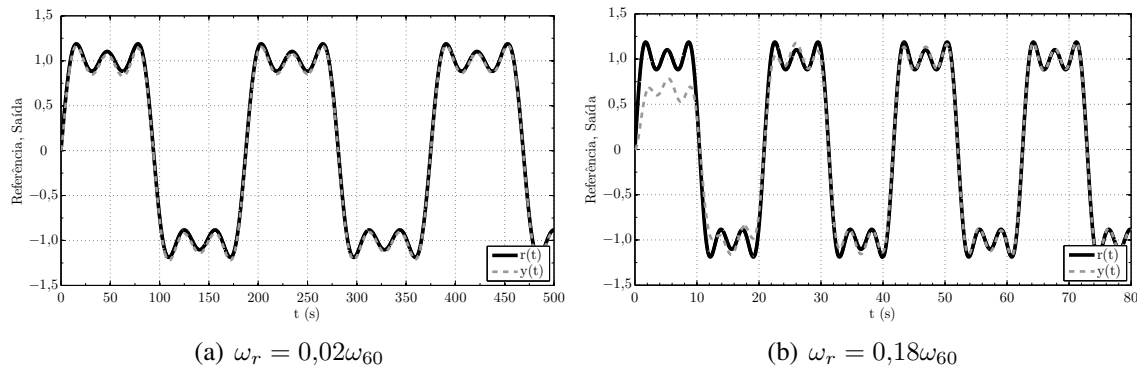
Os diagramas de resposta em frequência de  $G_c(j\omega)$  e de  $G_c(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  com modos

Figura 115 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_c(s)$  e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 116 – Sinal de referência e resposta do sistema em malha fechada para o processo  $G_c(s)$  e controladores PMRs com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

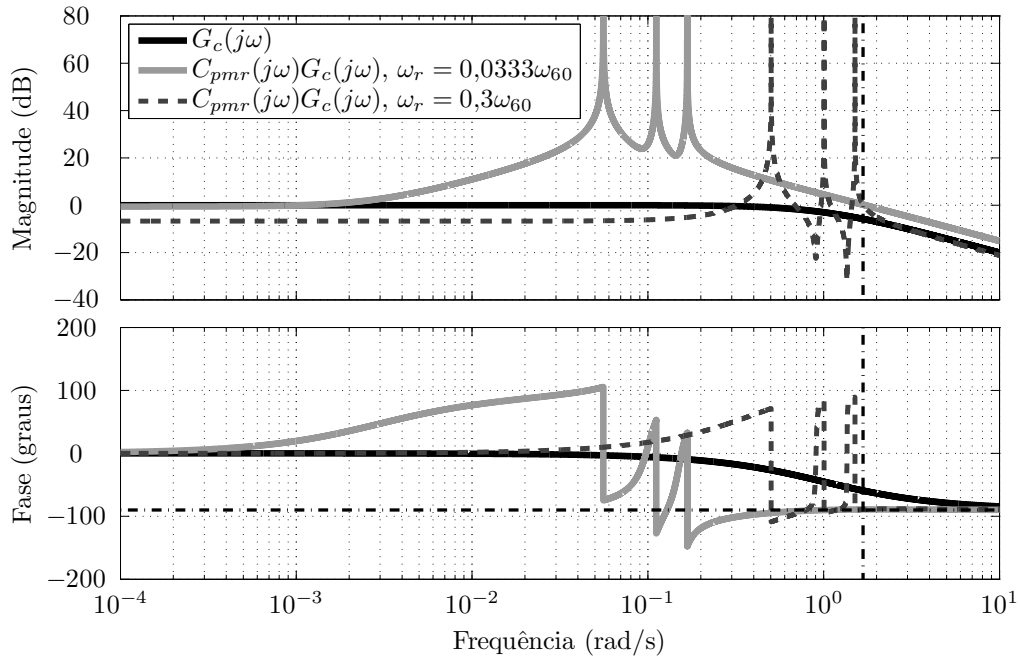
ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$  avaliados para  $\omega_r = 0,02\omega_{60}$  e para  $\omega_r = 0,18\omega_{60}$  estão retratados na Figura 119, enquanto os diagramas de Nyquist das funções de transferência  $G_c(s)$  e  $G_c(s)C_{pmr}(s)$  para estas mesmas configurações estão representados na Figura 120.

Estes diagramas mostram que a resposta em frequência de  $G_c(j\omega)C_{pmr}(j\omega)$  não cruza a linha de  $-180^\circ$  em nenhuma frequência finita, o que resulta em apropriadas margens de estabilidade. Além disso, confirma-se que  $G_c(j\omega_{60})C_{pmr}(j\omega_{60})$  tem magnitude unitária e fase igual a  $-90^\circ$ , conforme definido no desenvolvimento do controlador PMR para os processos da Classe C.

Através dos diagramas de Nyquist, nota-se que o traçado de  $G_c(s)C_{pmr}(s)$  possui seis voltas com raio tendendo ao infinito no SPD do plano complexo geradas pelos três pares de polos do controlador  $C_{pmr}(s)$  nas localizações  $\pm j\omega_r$ ,  $\pm j2\omega_r$  e  $\pm j3\omega_r$  ou em  $\pm j\omega_r$ ,  $\pm j3\omega_r$  e  $\pm j5\omega_r$ . Visto que  $G_c(s)C_{pmr}(s)$  não possui polos no SPD e o traçado desses diagramas não envolve o ponto  $-1 + j0$ , nem mesmo cruza o eixo real negativo para nenhuma frequência finita, reafirma-se a estabilidade do sistema em malha fechada.

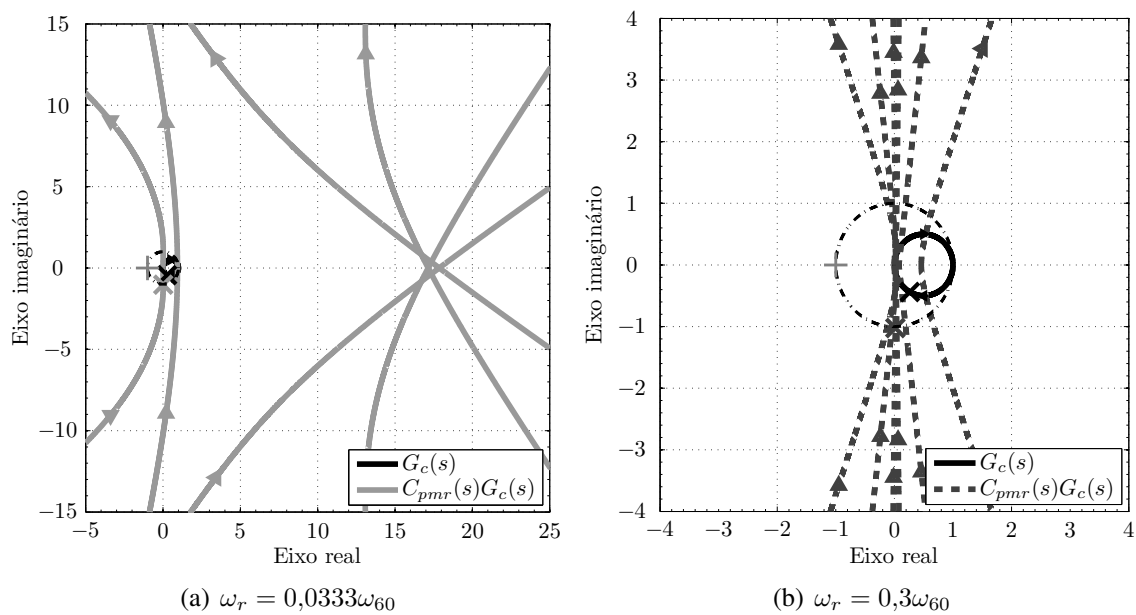
Na próxima seção são apresentados os resultados do método GOF para sintonia do controlador PMR aplicado no projeto do sistema de controle do estágio de saída de uma UPS.

Figura 117 – Respostas em frequência de  $G_c(j\omega)$  e de  $C_{pmr}(j\omega)G_c(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{60} = 1,68$  rad/s e na fase  $-90^\circ$ .



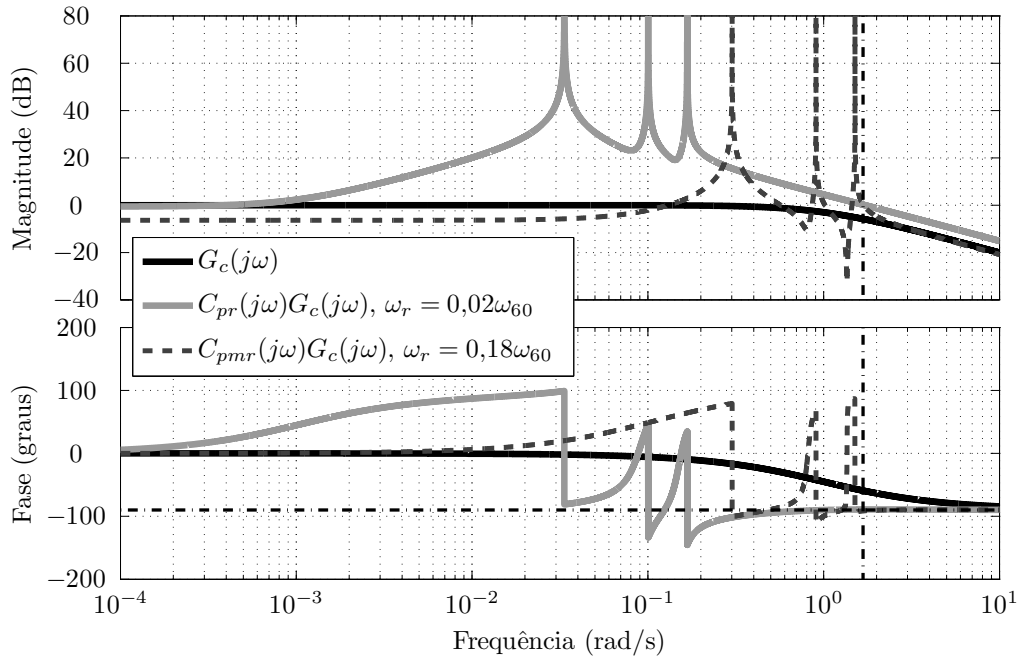
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 118 – Diagramas de Nyquist de  $G_c(s)$  e de  $C_{pmr}(s)G_c(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



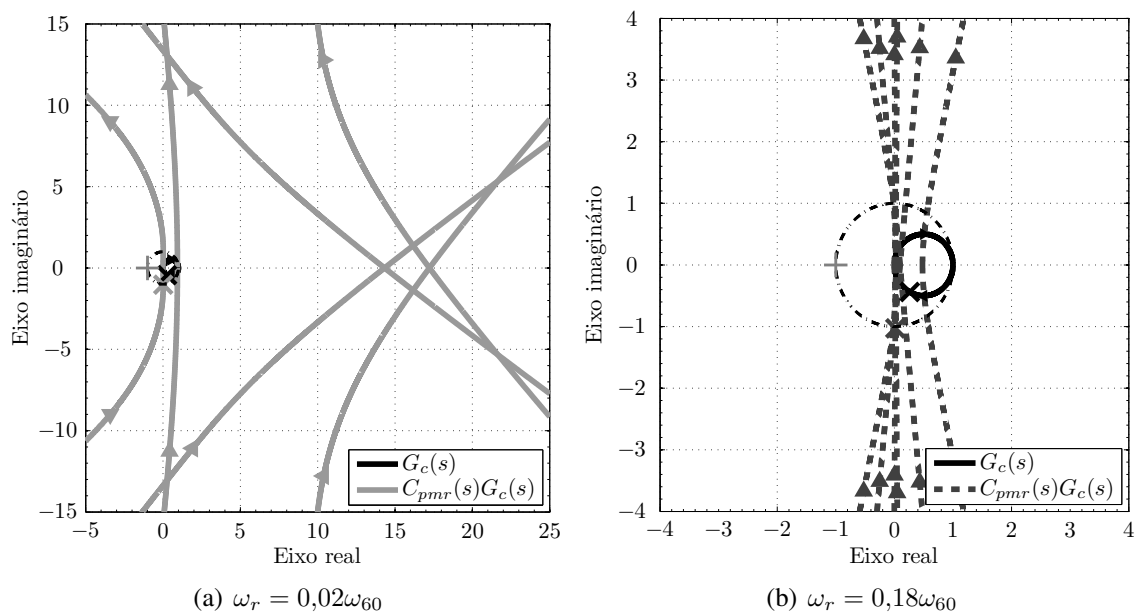
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 119 – Respostas em frequência de  $G_c(j\omega)$  e de  $C_{pmr}(j\omega)G_c(j\omega)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ . Linhas traço e ponto pretas estão em  $\omega_{60} = 1,68$  rad/s e na fase  $-90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 120 – Diagramas de Nyquist de  $G_c(s)$  e de  $C_{pmr}(s)G_c(s)$  com modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$ . A linha traço e ponto preta destaca a circunferência de raio unitário.



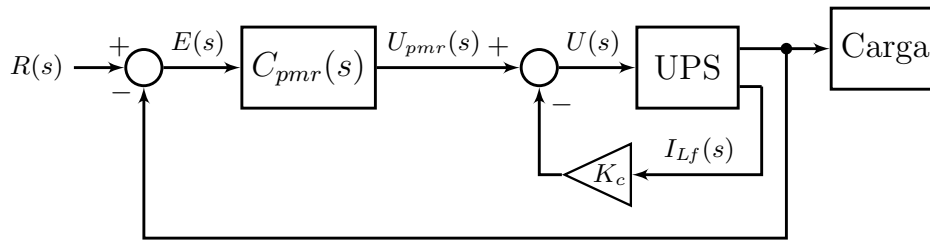
(a)  $\omega_r = 0,02\omega_{60}$

(b)  $\omega_r = 0,18\omega_{60}$

Fonte: Elaborado pelo autor.



Figura 121 – Diagrama em blocos do sistema de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PMR no laço de tensão aplicado ao estágio de saída de uma UPS.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5.4 Aplicação experimental

Nesta seção, o método GOF para a sintonia do controlador PMR será avaliado experimentalmente no controle do estágio de saída de uma UPS monofásica de 3,5 kVA apresentado na Seção 4.4. Visando o seguimento de referência senoidal e a rejeição dos distúrbios periódicos gerados pelas cargas conectadas no estágio de saída da UPS, serão projetados controladores PMRs com até quatro modos ressonantes sintonizados na frequência do sinal de referência e nas três primeiras componentes harmônicas de ordem maior que um da corrente drenada pela carga não linear, ou seja, serão utilizados modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $5\omega_r$  e  $7\omega_r$ .

O processo e a configuração experimental foram detalhados na Seção 4.4.1 e serão mantidos da mesma forma na avaliação dos controladores PMRs. Na sequência, são descritos os procedimentos para projeto do sistema de controle. Então, os resultados experimentais são apresentados e comparados com os requisitos de desempenho definidos na norma IEC 62040-3 e com os resultados obtidos em BERTOLDI (2019).

### 5.4.1 Projeto do sistema de controle

Para obtenção do seguimento da referência senoidal e da rejeição dos distúrbios periódicos gerados pelas cargas conectadas no estágio de saída da UPS propõe-se a estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com o controlador PMR no laço de realimentação da tensão de saída retratado no diagrama em blocos da Figura 121. Por simplificação, ao longo do texto, essa estrutura de controle será referida como  $K_c + \text{PMR}_m$ , onde  $m$  indica o número de modos ressonantes utilizados no controlador PMR.

O projeto dessa estrutura de controle é realizado através de dois experimentos do RFA utilizando carga linear nominal. No primeiro experimento, identifica-se um ponto da resposta em frequência da malha de corrente no indutor  $G_i(j\omega)$  para o projeto da realimentação dessa corrente, ou seja, para a determinação do parâmetro  $K_c$ . Então, um segundo experimento do RFA considerando a realimentação da corrente no indutor é implementado para identificação de um ponto da resposta em frequência da malha da tensão de saída  $G_v(j\omega)$ , o qual é utilizado para a sintonia do controlador PMR. Estas etapas de identificação foram descritas na Seção 4.4.2.2 e seus resultados são brevemente retomados a seguir.

No primeiro experimento do RFA, foi identificado o ponto da resposta em frequência de  $G_i(j\omega)$  cuja fase é  $-60^\circ$  (processo da Classe C), o qual foi utilizado no projeto da realimentação da corrente no indutor que resultou em  $K_c = 6,40$ . No segundo experimento, foi identificado o ponto da resposta em frequência de  $G_v(j\omega)$  cuja fase é  $-120^\circ$ , portanto

Tabela 50 – Parâmetros da estrutura de controle considerando  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ .

Parâmetro	$K_c + PR$	$K_c + PMR_2$	$K_c + PMR_3$	$K_c + PMR_4$
$K_c$	6,40	6,40	6,40	6,40
$\omega_{r1}$	$120\pi$	$120\pi$	$120\pi$	$120\pi$
$\xi_1$	0	0	0	0
$K_{p1}$	6,75	6,80	6,81	6,84
$K_{r11}$	$3,76 \times 10^3$	$3,37 \times 10^3$	$3,00 \times 10^3$	$2,63 \times 10^3$
$K_{r21}$	$-4,89 \times 10^5$	$-1,84 \times 10^5$	$-1,84 \times 10^5$	$-1,85 \times 10^5$
$\omega_{r3}$	—	$360\pi$	$360\pi$	$360\pi$
$\xi_3$	—	0	0	0
$K_{p3}$	—	0,973	0,973	0,973
$K_{r13}$	—	48,5	48,5	48,5
$K_{r23}$	—	$-2,36 \times 10^5$	$-2,36 \times 10^5$	$-2,36 \times 10^5$
$\omega_{r5}$	—	—	$600\pi$	$600\pi$
$\xi_5$	—	—	0	0
$K_{p5}$	—	—	0,906	0,906
$K_{r15}$	—	—	35,9	35,9
$K_{r25}$	—	—	$-6,12 \times 10^5$	$-6,12 \times 10^5$
$\omega_{r7}$	—	—	—	$840\pi$
$\xi_7$	—	—	—	0
$K_{p7}$	—	—	—	0,701
$K_{r17}$	—	—	—	17,1
$K_{r27}$	—	—	—	$-9,28 \times 10^5$

trata-se de um processo da Classe B, através da determinação das variáveis frequência  $\omega_{120} = 3,173 \times 10^3$  rad/s —a qual resulta na relação  $\omega_r/\omega_{120}$  aproximadamente igual a 0,12— e magnitude  $M_{120} = 0,1449$ . Essas variáveis identificadas da malha de tensão de saída são utilizadas para o projeto dos controladores PMRs.

Visto que a malha de tensão de saída pertence à Classe B, os controladores PMRs, cuja função de transferência é definida em (142), são sintonizados através dos conjuntos de fórmulas de sintonia propostos na Seção 5.2.3 adequados para essa classe de processos utilizando a frequência do sinal de referência  $\omega_r = 120\pi$  rad/s (e a ordem  $n$  das harmônicas consideradas), os coeficientes de amortecimento dos modos ressonantes  $\xi_n$ , e as variáveis identificadas da resposta em frequência do processo  $\omega_\nu = \omega_{120}$  e  $M_\nu = M_{120}$ . Por exemplo, para o controlador PMR com dois modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  são utilizados os conjuntos de fórmulas propostos na Tabela 33 com  $M = 2$  para sintonia de  $C_{pr1}(s)$  e propostos na Tabela 34 com  $n = 3$  para sintonia de  $C_{pr3}(s)$ .

O método GOF para a sintonia da estrutura  $K_c + PMR_m$  com até quatro modos ressonantes sintonizados nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $5\omega_r$  e  $7\omega_r$  será avaliado em duas situações considerando os coeficientes de amortecimento dos polos do controlador PMR: iguais a zero com  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ , para obtenção de seguimento com erro nulo do sinal de referência e rejeição completa das harmônicas de perturbação de primeira, terceira, quinta e sétima ordem; além de  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$  para obtenção de seguimento com erro nulo do sinal de referência, rejeição completa da harmônica de perturbação de primeira ordem e rejeição parcial das harmônicas de terceira, quinta e sétima ordem. A influência de  $\xi_n$  sobre o desempenho do sistema UPS foi detalhadamente analisada em BERTOLDI (2019) e não será abordada neste trabalho. Os conjuntos de parâmetros obtidos para cada uma dessas situações são respectivamente apresentados nas tabelas 50 e 51.

Tabela 51 – Parâmetros da estrutura de controle considerando  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ .

Parâmetro	$K_c + PR$	$K_c + PMR_2$	$K_c + PMR_3$	$K_c + PMR_4$
$K_c$	6,40	6,40	6,40	6,40
$\omega_{r1}$	$120\pi$	$120\pi$	$120\pi$	$120\pi$
$\xi_1$	0	0	0	0
$K_{p1}$	6,75	6,80	6,81	6,84
$K_{r11}$	$3,76 \times 10^3$	$3,37 \times 10^3$	$3,00 \times 10^3$	$2,63 \times 10^3$
$K_{r21}$	$-5,83 \times 10^5$	$-1,84 \times 10^5$	$-1,84 \times 10^5$	$-1,85 \times 10^5$
$\omega_{r3}$	—	$360\pi$	$360\pi$	$360\pi$
$\xi_3$	—	0,01	0,01	0,01
$K_{p3}$	—	0,973	0,973	0,973
$K_{r13}$	—	49,1	49,1	49,1
$K_{r23}$	—	$-2,36 \times 10^5$	$-2,36 \times 10^5$	$-2,36 \times 10^5$
$\omega_{r5}$	—	—	$600\pi$	$600\pi$
$\xi_5$	—	—	0,01	0,01
$K_{p5}$	—	—	0,906	0,906
$K_{r15}$	—	—	39,5	39,5
$K_{r25}$	—	—	$-6,12 \times 10^5$	$-6,12 \times 10^5$
$\omega_{r7}$	—	—	—	$840\pi$
$\xi_7$	—	—	—	0,01
$K_{p7}$	—	—	—	0,701
$K_{r17}$	—	—	—	32,9
$K_{r27}$	—	—	—	$-9,27 \times 10^5$

Na sequência, são retratados os resultados da implementação experimental das estruturas de controle sintonizadas pelo método GOF.

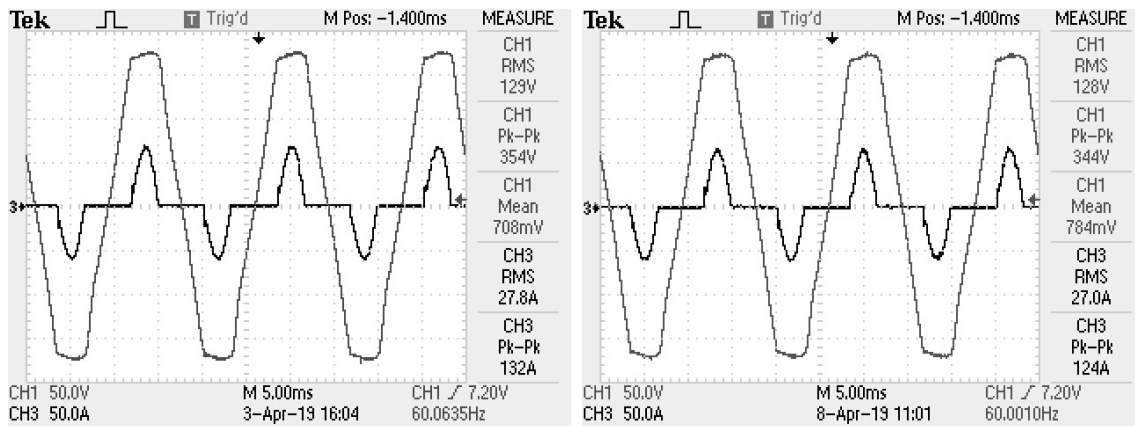
#### 5.4.2 Resultados experimentais

Conforme define a norma IEC 62040-3 e realizado na Seção 4.4.3, o desempenho em regime permanente do sistema de controle aplicado no estágio de saída da *UPS* foi analisado nas condições sem carga e sujeito às cargas linear e não linear nominais. Por outro lado, o desempenho dinâmico foi avaliado através da resposta aos degraus de carga linear —aditivo de 20% para 100% e subtrativo de 100% para 20%— e não linear —aditivo de 25% para 100% e subtrativo de 100% para 25%— com o cálculo do desvio da tensão de saída em relação a condição sem carga.

A seguir, são apresentados os resultados experimentais organizados pelo número de modos ressonantes considerados em cada controlador PMR. Os gráficos dos sinais de tensão e de corrente de saída obtidas com 100% da carga linear, além dos valores de *THD* e *RMS* da tensão de saída na condições de operação sem carga e com 100% da carga linear estão retratados no Apêndice E.3.

Considera-se apenas a curva do sinal de controle com 100% da carga não linear para cada conjunto de parâmetros pois esta trata-se da condição de maior exigência para uma *UPS* e seu sistema de controle em regime permanente. O resumo dos resultados do desempenho do sistema em regime permanente com os controladores sintonizados pelo método GOF será apresentado na seção de análise de resultados, na qual também será realizada a comparação com os requisitos de desempenho definidos na norma IEC 62040-3 e com os resultados obtidos em BERTOLDI (2019), onde os parâmetros da estrutura com reali-

Figura 122 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_2$ .

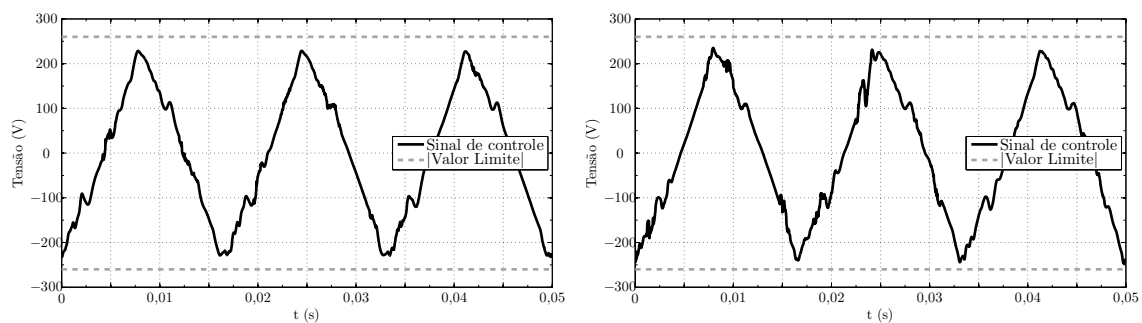


(a)  $\xi_1 = \xi_3 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 123 – Sinal de controle com 100% de carga não linear obtido através da estrutura de controle  $K_c + PMR_2$ .



(a)  $\xi_1 = \xi_3 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = 0,01$

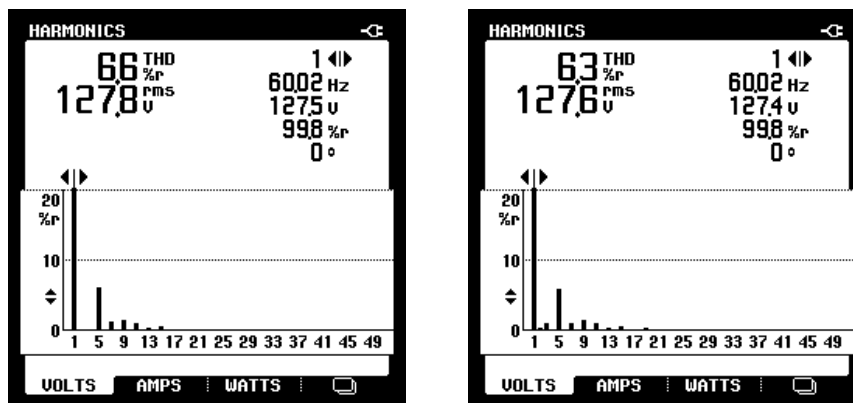
Fonte: Elaborado pelo autor.

mentação da corrente no indutor e dos estados dos controladores PMRs foram projetados através da solução de um problema de otimização convexa sujeito a restrições na forma de *LMI*s (SPOC-LMI) para o mesmo estágio de saída de *UPS*. Conforme mencionado anteriormente, nesse problema de otimização, o projeto dos ganhos de realimentação é realizado visando a estabilidade robusta do sistema considerando incerteza na carga e o atendimento de um desempenho transitório desejado.

#### 5.4.2.1 Realimentação de corrente e controlador PMR com dois modos ressonantes

A Figura 122 apresenta os sinais da tensão (linha cinza) e da corrente de saída (linha preta) obtidos com 100% de carga não linear considerando a estrutura de controle  $K_c + PMR_2$  com os dois conjuntos de coeficientes de amortecimento dos polos:  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ ; e  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = 0,01$ . As curvas do sinal de controle para estas duas configurações estão retratadas na Figura 123, enquanto na Figura 124 são representados os valores de *THD* e *RMS* da tensão de saída. Na Figura 125 estão ilustrados os gráficos com o perfil de limite imposto pela norma IEC 62040-3 e as curvas de desvio da tensão de saída obtidas com os degraus de carga linear e não linear.

Figura 124 – Valores de  $THD$  e de  $RMS$  da tensão de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_2$ .

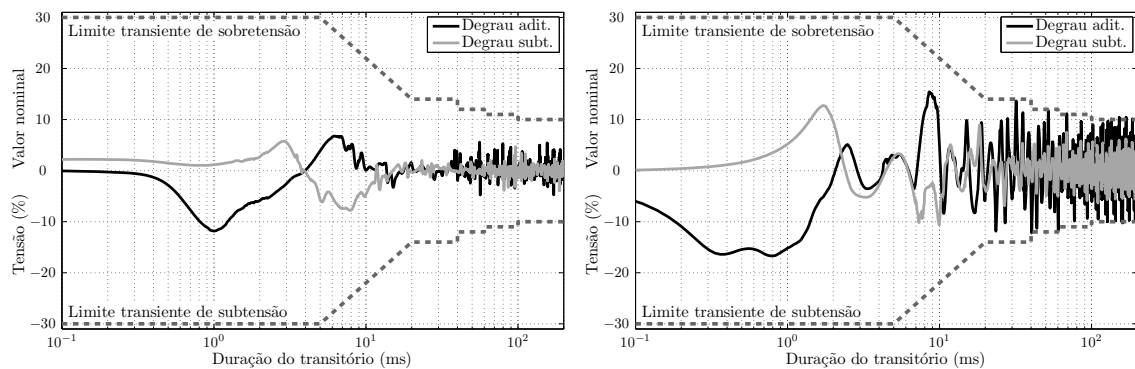


(a)  $\xi_1 = \xi_3 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = 0,01$

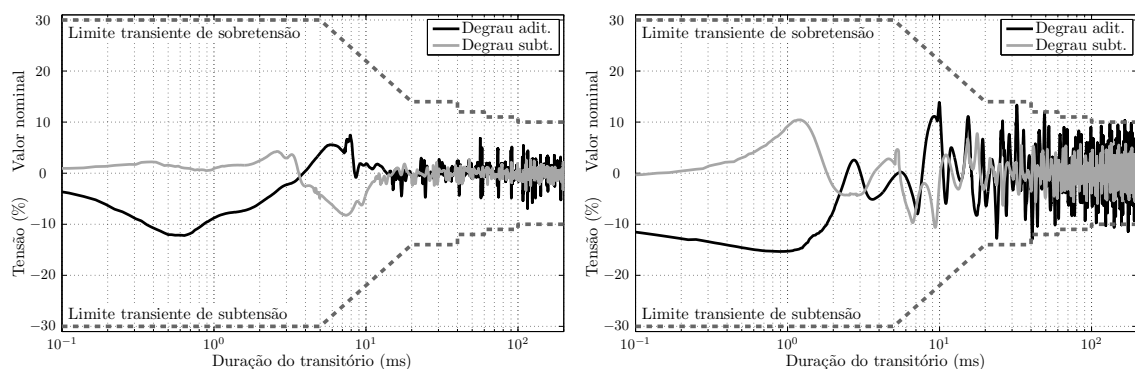
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 125 – Perfil de tolerância do desvio da tensão de saída para degraus de carga obtidos com a estrutura de controle  $K_c + PMR_2$ .



(a)  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  e carga linear

(b)  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  e carga não linear



(c)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = 0,01$  e carga linear

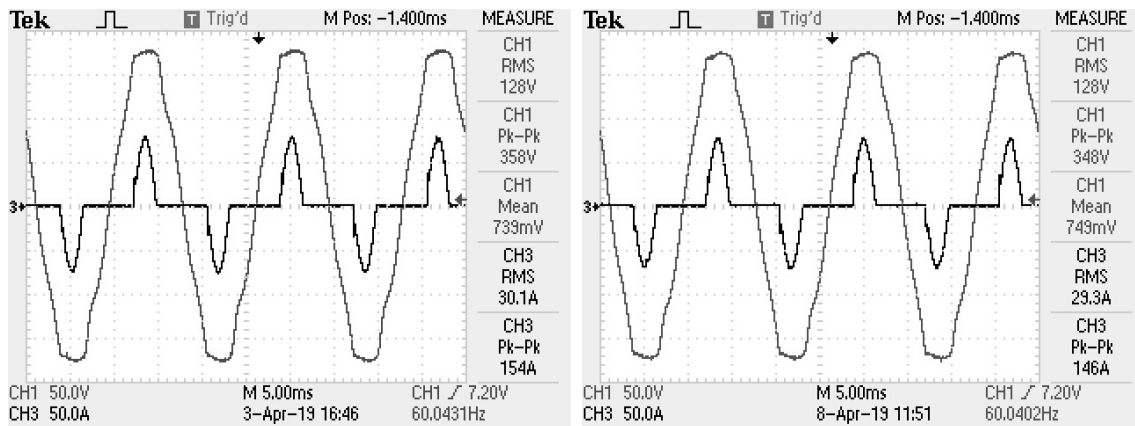
(d)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = 0,01$  e carga não linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 5.4.2.2 Realimentação de corrente e controlador PMR com três modos ressonantes

Na Figura 126 são representados os sinais da tensão e da corrente de saída obtidos com 100% de carga não linear considerando a estrutura de controle  $K_c + PMR_3$  com os dois conjuntos de coeficientes de amortecimento dos polos:  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$ ; e  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = 0,01$ . As curvas do sinal de controle para estas duas configurações estão

Figura 126 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_3$ .

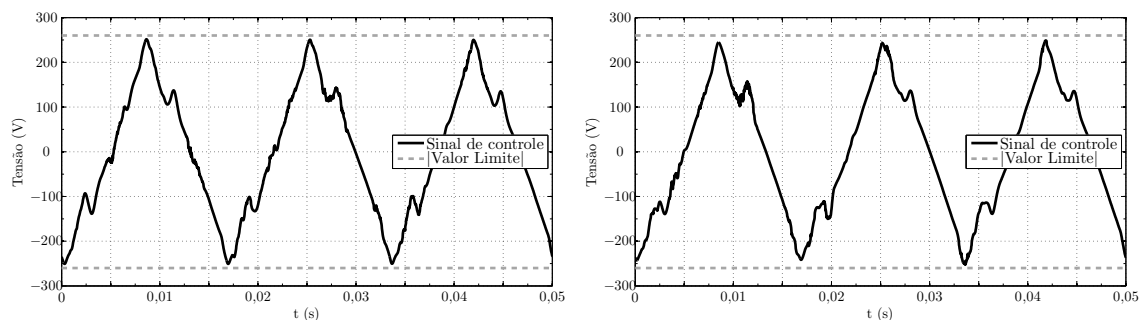


(a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 127 – Sinal de controle com 100% de carga não linear obtido através da estrutura de controle  $K_c + PMR_3$ .



(a)  $\xi_1 = \xi_5 = \xi_7 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_5 = \xi_7 = 0,01$

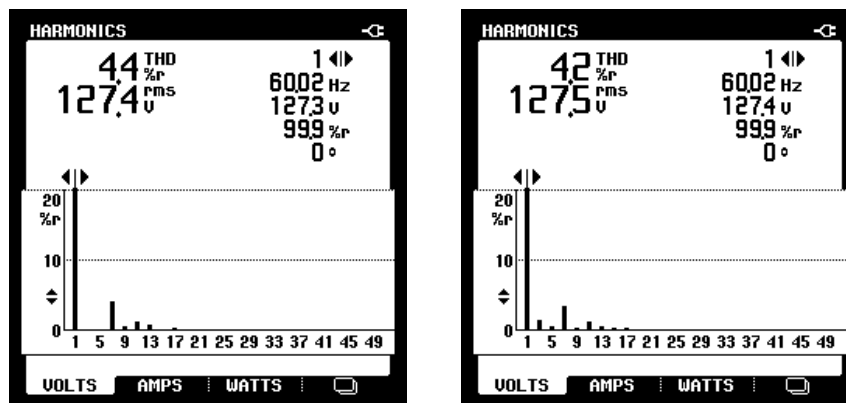
Fonte: Elaborado pelo autor.

ilustradas na Figura 127, ao passo que na Figura 128 são apresentados os valores de  $THD$  e  $RMS$  da tensão de saída. Na Figura 129, são retratados os gráficos com o perfil de limite imposto pela norma IEC 62040-3 e as curvas de desvio da tensão de saída obtidas com os degraus de carga linear e não linear.

#### 5.4.2.3 Realimentação de corrente e controlador PMR com quatro modos ressonantes

A Figura 130 ilustra os sinais da tensão e da corrente de saída obtidos com 100% de carga não linear considerando a estrutura de controle  $K_c + PMR_4$  com os dois conjuntos de coeficientes de amortecimento dos polos:  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ ; e  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ . As curvas do sinal de controle para estas duas configurações estão apresentadas na Figura 131, enquanto na Figura 132 são retratados os valores de  $THD$  e  $RMS$  da tensão de saída. Na Figura 133, são apresentados os gráficos com o perfil de limite imposto pela norma IEC 62040-3 e as curvas de desvio da tensão de saída obtidas com os degraus de carga linear e não linear.

Figura 128 – Valores de  $THD$  e de  $RMS$  da tensão de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_3$ .

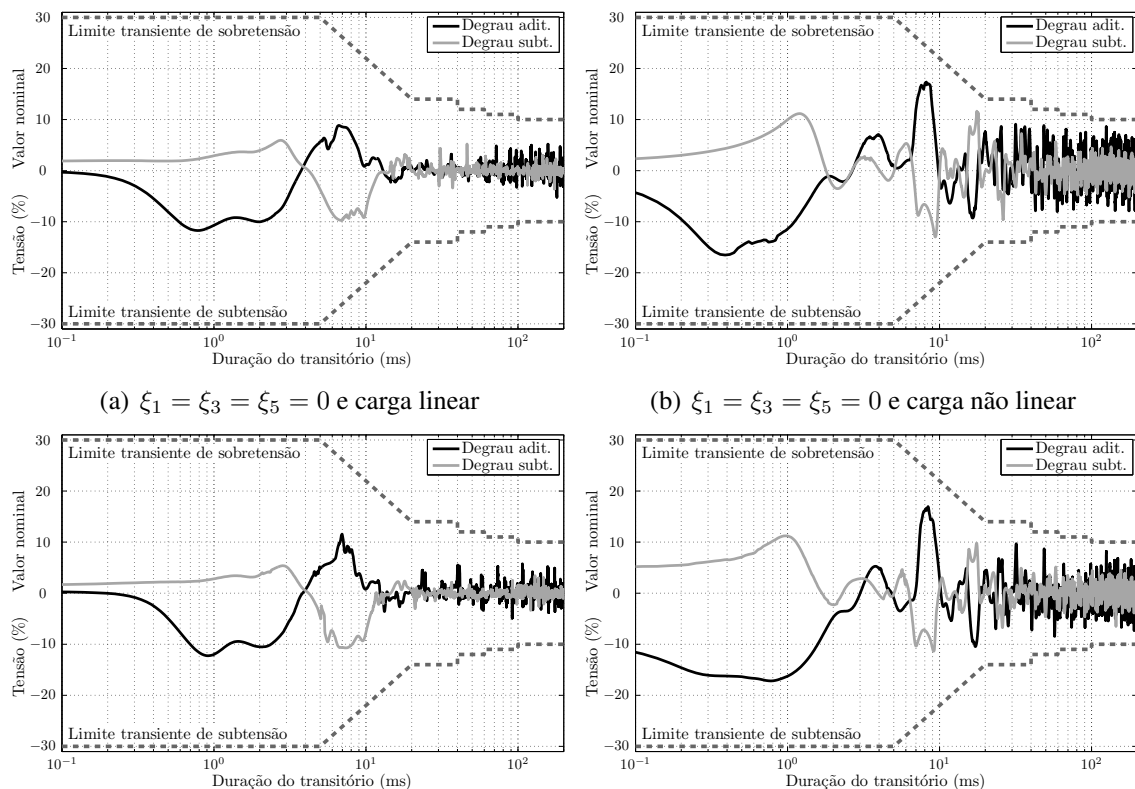


(a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 129 – Perfil de tolerância do desvio da tensão de saída para degraus de carga obtidos com a estrutura de controle  $K_c + PMR_3$ .



(a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$  e carga linear

(b)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$  e carga não linear

(c)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = 0,01$  e carga linear

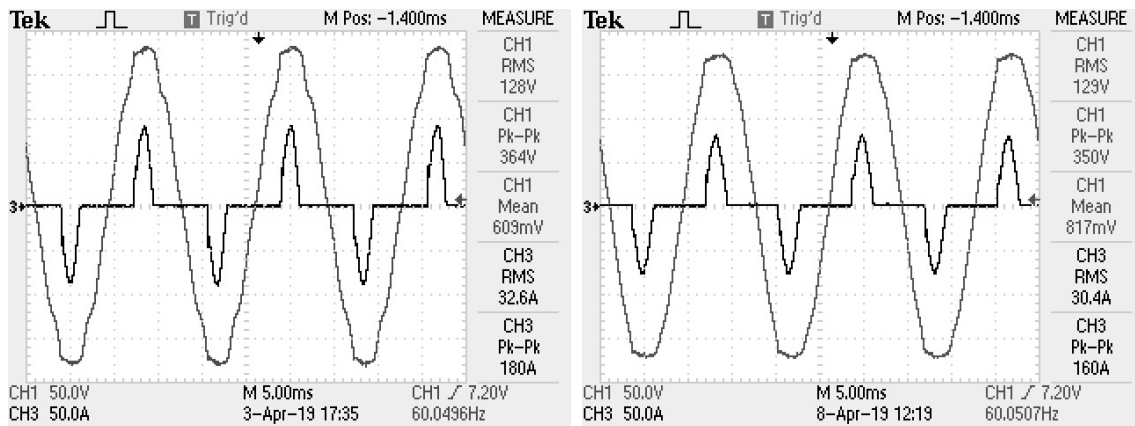
(d)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = 0,01$  e carga não linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.4.3 Análise dos resultados

As tabelas 52 e 53 resumem os resultados do desempenho do sistema em regime permanente obtidos com as estruturas de controle  $K_c + PMR_m$  sintonizadas pelo método GOF considerando respectivamente  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$  e  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$  —lembrando que os dados de  $THD$  e  $IHD$  correspondem ao estágio de saída da  $UPS$  com

Figura 130 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_4$ .

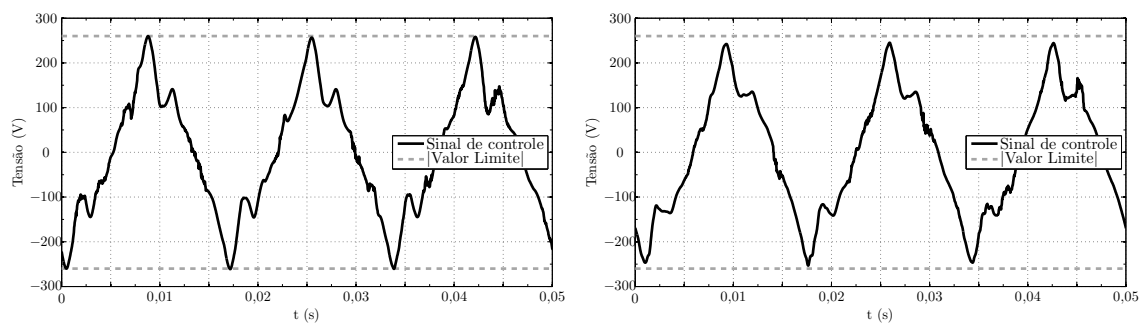


(a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 131 – Sinal de controle com 100% de carga não linear obtido através da estrutura de controle  $K_c + PMR_4$ .



(a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

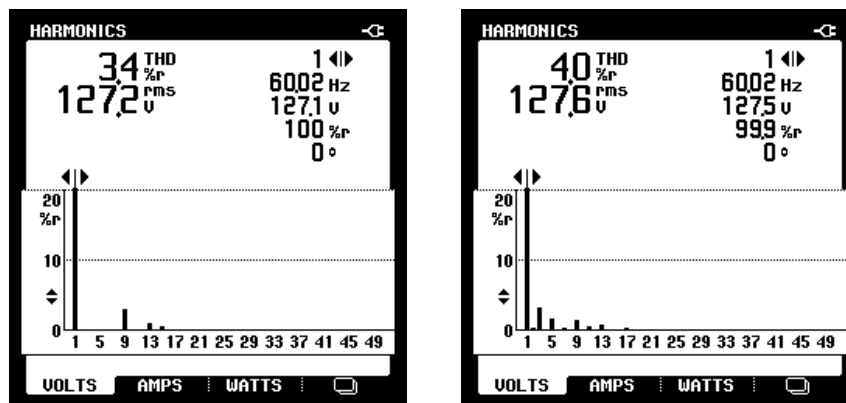
100% de carga não linear. Para efeitos de análise e de comparação, nessas tabelas também estão descritos os resultados obtidos com a estrutura de controle  $K_c + PR$  projetada na Seção 4.4.2, bem como os limites impostos pela norma IEC 62040-3. Com este mesmo propósito, nas tabelas 54 e 55 são apresentados os resultados obtidos em BERTOLDI (2019).

Inicialmente, deve-se destacar que os oito conjuntos de parâmetros sintonizados pelo método GOF para a estrutura de controle  $K_c + PMR_m$  garantiram a estabilidade do sistema em malha fechada, resultando no seguimento com erro nulo do sinal de referência nas três condições de carga e assegurando a rejeição completa da harmônica de perturbação de primeira ordem quando utilizadas as cargas linear e não linear. Além disto, os modos ressonantes sintonizados nas harmônicas de ordem maior que um asseguraram a rejeição completa (parcial) das componentes de mesmas harmônicas de perturbação geradas pela carga não linear.

Por meio da análise das variáveis  $IHD_n$ , pode-se verificar que a rejeição completa (parcial) de uma dada componente harmônica do sinal de perturbação por meio de um modo ressonante de mesma frequência ocasiona a amplificação das componentes harmônicas não compensadas. Por exemplo, a atenuação da componente de perturbação de



Figura 132 – Valores de  $THD$  e de  $RMS$  da tensão de saída obtidas com 100% de carga não linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_4$ .

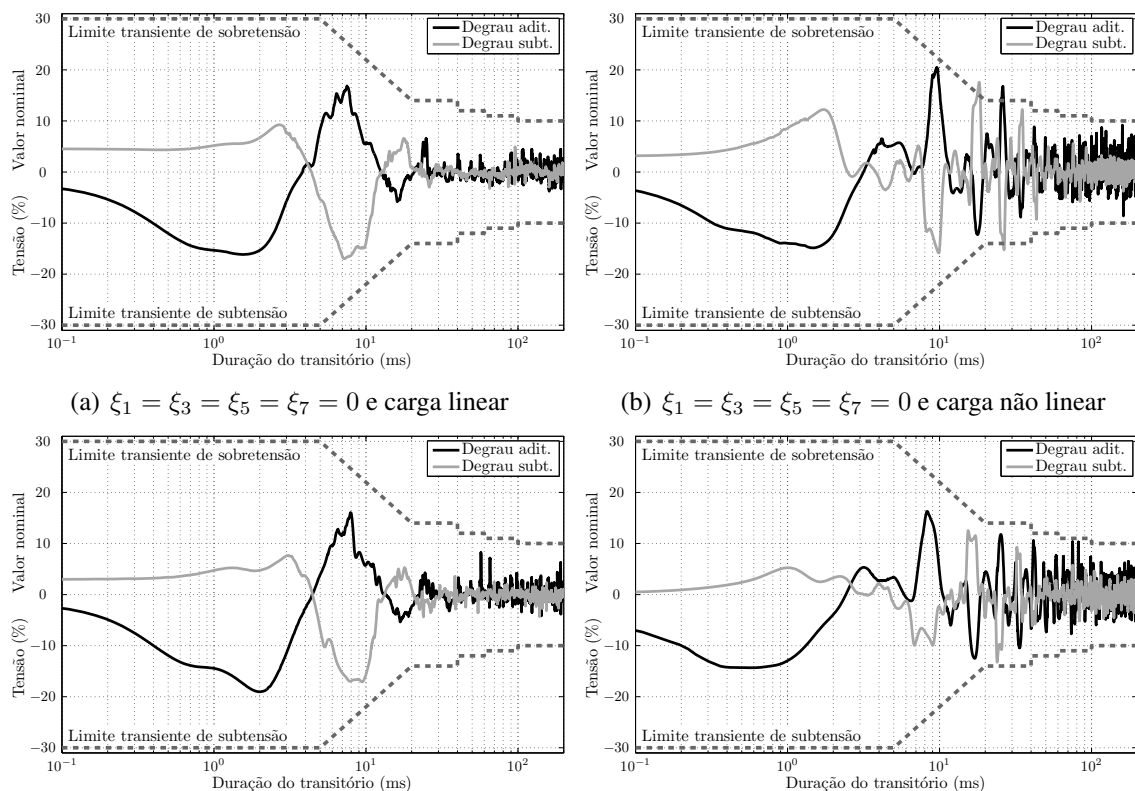


(a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$

(b)  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 133 – Perfil de tolerância do desvio da tensão de saída para degraus de carga obtidos com estrutura de controle  $K_c + PMR_4$ .



(a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$  e carga linear

(b)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$  e carga não linear

(c)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$  e carga linear

(d)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$  e carga não linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

terceira harmônica resulta no aumento das componentes de ordem superior, como é observado nos valores de  $IHD_3$ ,  $IHD_5$  e  $IHD_7$  analisados para as estruturas de controle  $K_c + PR$  e  $K_c + PMR_2$ . Esta característica é conhecida como efeito colchão d'água (do inglês, *waterbed effect*) e pode ser explicada a partir da Fórmula da Integral de Bode (ASTRÖM; MURRAY, 2008), na qual, utilizando a função de sensibilidade do sistema,

Tabela 52 – Resumo dos resultados experimentais obtidos pelo método GOF com  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ .

Parâmetro	IEC	$K_c + PR$	$K_c + PMR_2$	$K_c + PMR_3$	$K_c + PMR_4$
$V_{sc} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	127,0	127,0	127,0	127,0
$V_{lin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	127,0	127,0	127,0	127,0
$V_{nlin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	128,2	127,9	127,4	127,2
$THD$ [%]	8,00	<b>10,1</b>	6,6	4,4	3,4
$IHD_3$ [%]	5,00	<b>9,24</b>	0,15	0,17	0,10
$IHD_5$ [%]	6,00	3,79	<b>6,11</b>	0,14	0,05
$IHD_7$ [%]	5,00	0,93	1,35	4,13	0,15
$IHD_9$ [%]	1,50	1,40	1,42	0,54	<b>3,05</b>
$IHD_{11}$ [%]	3,50	0,38	1,02	1,23	0,16
$IHD_{13}$ [%]	3,00	0,67	0,31	0,85	1,01
$IHD_{15}$ [%]	0,30	0,16	<b>0,54</b>	0,12	<b>0,59</b>

Tabela 53 – Resumo dos resultados experimentais obtidos pelo método GOF com  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ .

Parâmetro	IEC	$K_c + PR$	$K_c + PMR_2$	$K_c + PMR_3$	$K_c + PMR_4$
$V_{sc} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	127,0	127,0	127,0	127,0
$V_{lin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	127,0	127,0	127,0	127,0
$V_{nlin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	128,2	127,6	127,5	127,6
$THD$ [%]	8,00	<b>10,1</b>	6,3	4,2	4,0
$IHD_3$ [%]	5,00	<b>9,24</b>	0,71	1,51	3,17
$IHD_5$ [%]	6,00	3,79	5,86	0,52	1,71
$IHD_7$ [%]	5,00	0,93	1,12	3,53	0,35
$IHD_9$ [%]	1,50	1,40	1,40	0,23	1,35
$IHD_{11}$ [%]	3,50	0,38	0,97	1,19	0,64
$IHD_{13}$ [%]	3,00	0,67	0,35	0,66	0,69
$IHD_{15}$ [%]	0,30	0,16	<b>0,55</b>	0,11	0,12

pode-se demonstrar que a redução da sensibilidade —aumento da capacidade de rejeição de distúrbios— em uma faixa de frequências resulta no aumento da sensibilidade —perda da capacidade de rejeição ou até mesmo amplificação dos distúrbios— em outras faixas do espectro frequências.

Os resultados de desempenho estático obtidos com a sintonia pelo método GOF são semelhantes aos resultados apresentados em BERTOLDI (2019). Com a utilização de controladores PMRs com dois ou mais modos de ressonância, a partir de  $K_c + PMR_2$ , observa-se a diminuição do valor  $THD$  e, com isso, este requisito da norma IEC 62040-3 é atendido com as estruturas de controle  $K_c + PMR_2$ ,  $K_c + PMR_3$  e  $K_c + PMR_4$ .

Em ambas metodologias de sintonia, considerando o controlador PMR com dois modos ressonantes, a inclusão do modo ressonante com  $\xi_3 = 0$  na terceira harmônica leva à significativa redução da  $THD$  e  $IHD_3$  mas, ao mesmo tempo, resulta no aumento da  $IHD_5$  para além do limite da norma IEC 62040-3. Este problema da  $IHD_5$  é contornado com a utilização de  $\xi_3 = 0,01$  com o mesmo número de modos ressonantes, contudo, ainda

Tabela 54 – Resumo dos resultados experimentais obtidos pela SPOC-LMI com  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ .

Parâmetro	IEC	$K_c + PR^1$	$K_c + PMR_2$	$K_c + PMR_3$	$K_c + PMR_4$
$V_{sc} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	NI	NI	NI	NI
$V_{lin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	NI	NI	NI	NI
$V_{nlin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	128,0	NI	NI	NI
$THD$ [%]	8,00	<b>10,4</b>	6,9	4,9	4,30
$IHD_3$ [%]	5,00	<b>9,63</b>	0,14	0,10	0,10
$IHD_5$ [%]	6,00	3,58	<b>6,42</b>	0,14	0,16
$IHD_7$ [%]	5,00	0,99	1,21	4,42	0,17
$IHD_9$ [%]	1,50	1,35	1,40	0,69	<b>3,84</b>
$IHD_{11}$ [%]	3,50	0,38	1,06	1,47	0,97
$IHD_{13}$ [%]	3,00	0,69	0,47	1,04	1,32
$IHD_{15}$ [%]	0,30	NI	NI	NI	NI

Tabela 55 – Resumo dos resultados experimentais obtidos pela SPOC-LMI com  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ .

Parâmetro	IEC	$K_c + PR$	$K_c + PMR_2$	$K_c + PMR_3$	$K_c + PMR_4$
$V_{sc} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	NI	NI	NI	NI
$V_{lin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	NI	NI	NI	NI
$V_{nlin} [V_{RMS}]$	$127 \pm 12,7$	128,0	NI	127,4	127,3
$THD$ [%]	8,00	<b>10,4</b>	6,9	4,2	3,30
$IHD_3$ [%]	5,00	<b>9,63</b>	0,14	1,13	1,23
$IHD_5$ [%]	6,00	3,58	5,85	1,58	1,84
$IHD_7$ [%]	5,00	0,99	0,76	3,33	1,72
$IHD_9$ [%]	1,50	1,35	1,44	0,45	1,01
$IHD_{11}$ [%]	3,50	0,38	0,90	1,37	1,11
$IHD_{13}$ [%]	3,00	0,69	0,61	0,64	0,87
$IHD_{15}$ [%]	0,30	NI	NI	NI	NI

assim, o limite da  $IHD_{15}$  não é atendido em nenhum dos casos com o controlador PMR possuindo dois modos ressonantes sintonizados pelo método GOF.

A utilização de controladores PMRs com três modos ressonantes, em ambas metodologias de sintonia e com os dois conjuntos de  $\xi_n$ , resultou na diminuição dos níveis de  $IHD_5$  (e  $IHD_{15}$  para a sintonia pelo método GOF), com isso foram atendidos todos os requisitos de desempenho estático da norma IEC 62040-3.

Os resultados obtidos com estrutura  $K_c + PMR_4$  e  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$  mais uma vez evidenciam o efeito colchão d'água. A rejeição completa da componente de perturbação de sétima harmônica eleva substancialmente o valor da  $IHD_9$  e da  $IHD_{15}$ , de maneira que estes requisitos da norma IEC 62040-3 não são atendidos. Para esse número de modos ressonantes, através de  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ , fica claro que a rejeição parcial —e não mais total— das componentes harmônicas de terceira, quinta e sétima ordem do sinal de perturbação implicam na redução das componentes de nona e

<sup>1</sup>Os dados representados por NI não são informados em BERTOLDI (2019).

de décima quinta harmônicas deste sinal, bem como dos valores da  $IHD_9$  e da  $IHD_{15}$ , em relação ao caso com  $\xi_n = 0$ . Assim, o sistema de controle com estrutura  $K_c + PMR_4$  com  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$  também atende todos os requisitos de desempenho estático da norma IEC 62040-3.

Os gráficos do sinal de controle para as oito estruturas sintonizadas pelo método GOF mostram que as amplitudes máxima e mínima desse sinal atendem aos limites de excursão —os quais são definidos por  $\pm V_{cc}/2$ — em todos os casos. Nota-se também que a amplitude do sinal de controle aumenta conforme o aumento do número de modos de ressonância do controlador PMR. Uma forma de reduzir esse aumento é através da utilização de controladores PMRs com  $0 < \xi_n < 1$ , às custas da perda do seguimento/rejeição com erro nulo. Assim, considerando o caso específico do controle do estágio de saída da UPS, o projetista pode explorar o efeito colchão d'água através da escolha dos valores de  $\xi_n$  tanto para atender ao requisitos definidos pela norma IEC 62040-3 quanto para a redução da amplitude do sinal de controle.

Na análise de desempenho dinâmico através dos resultados dos perfis de tolerância do desvio de tensão para os degraus de carga verifica-se que os limites definidos pela norma IEC 62040-3 são atendidos pelas oito estruturas de controle sintonizadas pelo método GOF quando utilizada a carga linear, enquanto que com a carga não linear esses limites são atendidos com as estruturas  $K_c + PMR_3$  —considerando ambos valores de  $\xi_n$ — e  $K_c + PMR_4$  para  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ . Além disto, observa-se que o valor máximo do desvio de tensão e o tempo de recuperação aumentam com o aumento do número de modos ressonantes, mas, ainda assim, o maior tempo de recuperação obtido com quatro modos ressonantes é da ordem de 35 ms, isto é, aproximadamente 2,1 ciclos do sinal de referência.

Considerando o projeto pelo método GOF do sistema de controle aplicado no estágio de saída da UPS, os requisitos de desempenho da norma IEC 62040-3 foram totalmente atendidos pelas estruturas  $K_c + PMR_3$  com ambos valores de  $\xi_n$  e  $K_c + PMR_4$  com  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ . Assim, o método GOF apresenta-se como uma boa alternativa para a sintonia da estrutura de controle para o estágio de saída de uma UPS e, desta forma, pode colaborar com a disseminação e utilização dos controladores PMRs neste tipo de aplicação.

## 5.5 Passos para implementação do método GOF: realização do experimento do RFA com sintonia de controladores PMRs e PMRAs

1. Implementar o experimento do RFA com  $0^\circ$ , ou seja, inicialmente realizar o tradicional experimento do relé.
2. Alterar o parâmetro  $b$  que regula o *offset* do sinal de saída do relé para a obtenção de uma oscilação simétrica na saída do processo conforme necessário. Da mesma forma, variar o ganho do relé, parâmetro  $d$ , para modificar a amplitude da auto-oscilação.
3. Se o sinal de oscilação da saída do processo for simétrico, possuir amplitude e período de oscilação constantes e bem definidos, a partir desse sinal calcular: a amplitude de pico  $A_\nu$ , o período de oscilação  $T_\nu$  e a frequência de oscilação  $\omega_\nu = 2\pi/T_\nu$ .
4. Caso não seja obtida a condição de auto-oscilação diminuir a fase do elemento de

fase constante de  $0^\circ$  para  $-60^\circ$  (ou de  $-60^\circ$  para  $-120^\circ$ ) e voltar para o item 2. Caso seja obtida a condição de auto-oscilação computar a fase do elemento de fase constante  $\angle F(j\omega_\nu)$ : se  $\angle F(j\omega_\nu) = \gamma$ , onde  $\gamma$  é a fase desejada para o RFA ( $0^\circ$ ,  $-60^\circ$  e  $-120^\circ$ ), passar para o item 5; se  $\angle F(j\omega_\nu) \neq \gamma$  alterar adequadamente a faixa de frequências do elemento de fase constante e voltar para o item 2.

5. Calcular a magnitude do processo na frequência identificada  $\omega_\nu$  por meio de

$$M_\nu = \frac{\pi A_\nu}{4d |F(j\omega_\nu)|},$$

onde  $F(j\omega_\nu)$  é a magnitude do elemento de fase constante nessa frequência.

6. Sintonizar os parâmetros do controlador PMR ou PMRA, cujas funções de transferência respectivamente são

$$C_{pmr}(s) = \prod_n \left( K_{pn} + \frac{K_{r1n}s + K_{r2n}}{s^2 + 2\xi_n\omega_{rn}s + \omega_{rn}^2} \right),$$

$$C_{pmra}(s) = \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \prod_n \left( K_{pn} + \frac{K_{r1n}s + K_{r2n}}{s^2 + 2\xi_n\omega_{rn}s + \omega_{rn}^2} \right)$$

através das fórmulas de sintonia apresentadas Seção 5.2.3 adequadas para cada classe de processos e número de modos ressonantes, nas quais são utilizados os parâmetros  $\omega_\nu$  e  $M_\nu$ , considerando a frequência fundamental  $\omega_r$  do sinal a ser seguido/rejeitado no intervalo  $\max(n\omega_r) < \omega_\nu$ , a ordem  $n$  das harmônicas utilizadas, e os parâmetros  $\xi_n$ , os fatores de amortecimento dos polos dos modos ressonantes.

## 5.6 Conclusões do capítulo

Tendo em vista o seguimento e a rejeição de sinais periódicos, neste capítulo foi proposto o método GOF para a sintonia dos controladores PMR e PMRA. Seguindo procedimento semelhante ao utilizado no desenvolvimento do método GOF para a sintonia dos controladores PR e PRA anteriormente apresentado, conjuntos de fórmulas de sintonia para os controladores PMR e PMRA com dois, três, quatro e cinco modos ressonantes foram propostos a partir do conhecimento e reposicionamento em uma localização pre-determinada no plano complexo do ponto identificado da resposta do processo visando a obtenção de adequadas margens de estabilidade e bom desempenho em malha fechada.

Para o desenvolvimento dos conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores PMR e PMRA, optou-se pela topologia em série de múltiplas estruturas PRs com modos ressonantes nas frequências harmônicas do sinal de interesse em conjunto com um bloco de avanço de fase. As localizações complexas para onde o ponto identificado da resposta em frequência do processo é deslocado foram definidas como as mesmas propostas para a sintonia dos controladores PR e PRA considerando cada classe de processos. Essas localizações complexas foram então divididas em localizações complexas intermediárias e juntamente com restrições no posicionamento dos zeros serviram para a sintonia de cada uma das estruturas PRs que compõem os controladores PMR e PMRA.

Considerando essa abordagem, os conjuntos de fórmulas de sintonia propostos consideram um número definido de modos ressonantes para cada uma das três classes de

processos definidas no experimento do RFA. Esses conjuntos de fórmulas dependem unicamente do ponto identificado da resposta em frequência do processo, da frequência fundamental e da ordem das harmônicas do sinal a ser seguido/rejeitado, e dos fatores de amortecimento dos modos ressonantes.

O método GOF para a sintonia dos controladores PMR e PMRA foi desenvolvido utilizando as dezoito famílias de processos da bateria de testes, cujas funções de transferência são apresentadas no Apêndice A.2, e detalhadamente avaliado em três processos de estudo de caso. Foi verificada a estabilidade do sistema em malha fechada com os controladores PMR e PMRA sintonizados pelo método GOF em todos os casos analisados para  $\max(n\omega_r) \leq 0,9\omega_\nu$ .

No final deste capítulo, o método GOF foi avaliado experimentalmente no controle do estágio de saída de uma *UPS* monofásica. Nesta aplicação, destaca-se a proposição de uma metodologia sistemática baseada em dados experimentais para a sintonia da estrutura de controle com realimentação da corrente no indutor e com controlador PMR no laço de tensão. Quando analisado o desempenho dos sistemas de controle projetados, constatou-se que os requisitos de desempenho da norma IEC 62040-3 foram plenamente atendidos por estruturas com três e com quatro modos ressonantes. Assim, o método GOF destaca-se como uma alternativa para a sintonia da estrutura de controle para o estágio de saída de uma *UPS* e pode contribuir com a utilização dos controladores PMRs nesta aplicação.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propôs um método generalizado da oscilação forçada para sintonia de controladores proporcional, proporcional-integral, proporcional-integral-derivativo, proporcional-ressonante, proporcional-ressonante com bloco de avanço de fase, proporcional-múltiplos-ressonantes e proporcional-múltiplos-ressonantes com bloco de avanço de fase. O procedimento de obtenção dos conjuntos de fórmulas de sintonia dos controladores, tal como o método da oscilação forçada de Ziegler-Nichols, foi desenvolvido com base no conhecimento e posicionamento de um ponto representativo da resposta em frequência do processo em uma localização específica no plano complexo utilizando a função de malha aberta do sistema. Para possibilitar a identificação desse ponto da resposta em frequência de processos *LTIC* genéricos, que possuem ou não ponto crítico, em um único tipo de ensaio, foi proposto o experimento do RFA. Então, os processos *LTIC* foram divididos nas classes A, B e C e para cada uma delas foi definido um ponto da resposta em frequência do processo a ser identificado.

Inicialmente, considerou-se o problema do seguimento e da rejeição de sinais constantes através da sintonia de controladores P, PI e PID, para os quais foram desenvolvidos conjuntos genéricos de fórmulas de sintonia em função do ponto identificado da resposta em frequência do processo e da localização complexa para onde esse ponto é deslocado com o controlador. Então, a partir da escolha dessa localização no plano complexo, foram propostos conjuntos de fórmulas de sintonia desses controladores para cada uma das três classes de processos *LTIC*. Assim, o método proposto generaliza e unifica os dois métodos de Ziegler-Nichols, da curva de reação e da oscilação forçada, além de englobar uma classe maior de processos do que os métodos clássicos.

Em seguida, abordou-se o problema do seguimento e da rejeição de sinais senoidais por meio da sintonia dos controladores PR e PRA. A partir do desenvolvimento do conjunto genérico de fórmulas de sintonia do controlador PR e da escolha da localização no plano complexo para onde o ponto identificado do processo é deslocado, foram desenvolvidos conjuntos de fórmulas de sintonia desse controlador para cada uma das três classes de processos *LTIC*. Para a classe de processos que possui ponto crítico foi necessária a utilização de um bloco de avanço de fase em conjunto com a estrutura PR para o aumento da margem de fase, desta maneira foi proposto o controlador PRA para os processos da Classe A.

Enfim, tratou-se o problema do seguimento e da rejeição de sinais periódicos através da sintonia dos controladores PMR e PMRA. O desenvolvimento dos conjuntos de fórmulas de sintonia desses controladores teve como base a abordagem adotada para os controladores PR e PRA. Nesta etapa, considerou-se a topologia em série de múltiplas estruturas PRs com modos ressonantes nas frequências harmônicas do sinal de interesse em conjunto com um bloco de avanço de fase, o que viabilizou a utilização do conjunto

genérico de fórmulas de sintonia obtido para o controlador PR. Então, as localizações complexas para onde o ponto identificado do processo é deslocado propostas para os controladores PR e PRA foram divididas em localizações complexas intermediárias e em conjunto com restrições no posicionamento dos zeros possibilitaram o desenvolvimento dos conjuntos de fórmulas de sintonia de cada uma das estruturas PRs que compõem os controladores PMR e PMRA.

Através da implementação do experimento do RFA e dos controladores sintonizados com os conjuntos de fórmulas desenvolvidos em exemplos numéricos de processos com diferentes características, em um processo real de controle de nível e no controle do estágio de saída de uma *UPS* mostrou-se a ampla aplicabilidade do método GOF. Em todos esses casos foi verificada a estabilidade do sistema em malha fechada com os controladores projetados. Na aplicação do estágio de saída de uma *UPS* ainda salienta-se a proposição de um método sistemático baseado em dados experimentais para o projeto da estrutura de controle com realimentação de corrente do indutor e controladores PR/PMR no laço de tensão para esse tipo de processo.

As principais contribuições deste trabalho foram:

- Proposição do método GOF e seu equacionamento.
- Proposição do experimento do RFA para identificação de um ponto predeterminado da resposta em frequência de processos que possuem e que não possuem ponto crítico em um único tipo de experimento.
- Desenvolvimento dos conjuntos —genéricos e particulares para as classes A, B e C de processos— de fórmulas de sintonia dos controladores P, PI e PID.
- Desenvolvimento dos conjuntos —genéricos e particulares para as classes A, B e C de processos— de fórmulas de sintonia dos controladores PR e desenvolvimento do conjunto de fórmulas de sintonia do controlador PRA aplicado à Classe A.
- Desenvolvimento dos conjuntos de fórmulas de sintonia do controlador PMR aplicado às classes B e C, bem como desenvolvimento dos conjuntos de fórmulas de sintonia do controlador PMRA aplicado à Classe A.
- Aplicação do método GOF, o qual inclui o experimento do RFA e os conjuntos de fórmulas de sintonia desenvolvidos, em um processo real de controle de nível e no controle do estágio de saída de uma *UPS*.

Os seguintes itens indicam possíveis perspectivas de continuação deste trabalho:

- Desenvolvimento do método GOF para a sintonia do controlador proporcional-integral-derivativo-ressonante e controlador proporcional-integral-derivativo-múltiplos-ressonantes.
- Desenvolvimento do método GOF para a sintonia dos controladores proporcional-repetitivo e/ou proporcional-repetitivo com bloco de avanço de fase.
- Desenvolvimento do método GOF para a sintonia do controlador proporcional-ressonante-repetitivo e/ou proporcional-ressonante-repetitivo com bloco de avanço de fase.
- Desenvolvimento do método GOF diretamente no domínio de tempo discreto.
- Aplicação do método GOF em outros processos reais.



## REFERÊNCIAS

- AAMIR, M.; MEKHILEF, S. An online transformerless uninterruptible power supply (UPS) system with a smaller battery bank for low-power applications. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 32, n. 1, p. 233–247, Jan. 2017.
- ABOSH, A. H.; ZHU, Z. Q.; REN, Y. Reduction of torque and flux ripples in space vector modulation-based direct torque control of asymmetric permanent magnet synchronous machine. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 32, n. 4, p. 2976–2986, Apr. 2017.
- APHALE, S. S.; BHIKKAJI, B.; MOHEIMANI, S. O. R. Minimizing scanning errors in piezoelectric stack-actuated nanositioning platforms. **IEEE Transactions on Nanotechnology**, New York, v. 7, n. 1, p. 79–90, Jan. 2008.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. **Automatica**, Oxford, v. 20, n. 5, p. 645–651, Sept. 1984.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **PID controllers: theory, design, and tuning**. 2nd ed. Research Triangle Park: International Society for Measurement and Control, 1995.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control. **Journal of Process Control**, Guildford, v. 14, n. 6, p. 635–650, Sept. 2004.
- ÅSTRÖM, K. J.; MURRAY, R. M. **Feedback systems: an introduction for scientists and engineers**. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- ÅSTRÖM, K. J. *et al.* Towards intelligent PID control. **Automatica**, Oxford, v. 28, n. 1, p. 1–9, Jan. 1992.
- BARROS, J. D.; SILVA, J. F. Multilevel optimal predictive dynamic voltage restorer. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 57, n. 8, p. 2747–2760, Aug. 2010.
- BAZANELLA, A. S.; GOMES DA SILVA JR., J. M. **Sistemas de controle: princípios e métodos de projeto**. Porto Alegre: UFRGS, 2005.
- BAZANELLA, A. S.; PARRAGA, A. Limit cycles in sampled-data relay feedback systems. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Berlin, v. 27, n. 3, p. 237–249, June 2016.

- BAZANELLA, A. S.; PARRAGA, A. Tuning PID controllers from sampled-data relay feedback experiments. *In: IFAC CONFERENCE ON ADVANCES IN PROPORTIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVE CONTROL*, 3., 2018, Ghent. **Proceedings...** Oxford: Elsevier, 2018. p. 125–130.
- BAZANELLA, A. S.; PEREIRA, L. F. A.; PARRAGA, A. A new method for PID tuning including plants without ultimate frequency. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 25, n. 2, p. 637–644, Mar. 2017.
- BERNER, J.; HÄGGLUND, T.; ÅSTRÖM, K. J. Asymmetric relay autotuning – practical features for industrial use. **Control Engineering Practice**, Oxford, v. 54, p. 231–245, 2016.
- BERTOLDI, R. **Controlador múltiplo-ressonante de ganho finito aplicado a fontes ininterruptas de energia**. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Escola de Engenharia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.
- BESCHI, M. *et al.* An automatic tuning procedure for an event-based PI controller. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 52., 2013, Florence. **Proceedings...** New York: IEEE, 2013. p. 7437–7442.
- BESCHI, M. *et al.* Closed-loop automatic tuning technique for an event-based PI controller. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, Washington, v. 54, n. 24, p. 6362–6370, June 2015.
- BOEIRA, E. *et al.* Comparing MIMO process control methods on a pilot plant. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Berlin, v. 29, n. 4, p. 411–425, Aug. 2018.
- CAMPESTRINI, L.; FILHO, L. C. S.; BAZANELLA, A. S. Tuning of multivariable decentralized controllers through the ultimate-point method. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 17, n. 6, p. 1270–1281, Nov. 2009.
- CHA, H.; VU, T.; KIM, J. Design and control of proportional-resonant controller based photovoltaic power conditioning system. *In: IEEE ENERGY CONVERSION CONGRESS AND EXPOSITION*, 2009, San Jose, 2009. **Proceedings...** New York: IEEE, 2009. p. 2198–2205.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 4. ed. New York: Oxford University Press, 2013.
- CHIDAMBARAM, M.; SAXENA, N. **Relay tuning of PID controllers: for unstable MIMO processes**. London: Springer, 2018.
- COHEN, G. H.; COON, G. A. Optimum settings for automatic controllers. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, New York, v. 75, p. 827–834, July 1953.
- DAS, S. K.; POTA, H. R.; PETERSEN, I. R. Resonant controller design for a piezoelectric tube scanner: a mixed negative-imaginary and small-gain approach. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 22, n. 5, p. 1899–1906, Sep. 2014.

DE ARRUDA, G.; BARROS, P. Relay-based closed loop transfer function frequency points estimation. **Automatica**, Oxford, v. 39, n. 2, p. 309–315, 2003.

DE, D.; RAMANARAYANAN, V. A proportional + multiresonant controller for three-phase four-wire high-frequency link inverter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 25, n. 4, p. 899–906, Apr. 2010.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern control systems**. 11. ed. Upper Saddle River: Pearson/Prentice Hall, 2008.

ESCOBAR, G. *et al.* An adaptive control for UPS to compensate unbalance and harmonic distortion using a combined capacitor/load current sensing. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 54, n. 2, p. 839–847, Apr. 2007.

FLORES, J. V. **Projeto de controladores para o seguimento de referências periódicas em sistemas com atuadores saturantes**. 2012. 138 f. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Escola de Engenharia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

FRANCIS, B.; WONHAM, W. The internal model principle for linear multivariable regulators. **Applied Mathematics and Optimization**, Berlin, v. 2, n. 2, p. 170–194, June 1975.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback control of dynamic systems**. 4. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

FRIMAN, M.; WALLER, K. V. A two-channel relay for autotuning. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, Washington, v. 36, n. 7, p. 2662–2671, 1997.

FUKUDA, S.; IMAMURA, R. Application of a sinusoidal internal model to current control of three-phase utility-interface converters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 52, n. 2, p. 420–426, Apr. 2005.

FUKUDA, S.; YODA, T. A novel current-tracking method for active filters based on a sinusoidal internal model. **IEEE Transactions on Industry Applications**, New York, v. 37, n. 3, p. 888–895, May. 2001.

GAO, J. *et al.* Torque ripple minimisation of permanent magnet synchronous motor using a new proportional resonant controller. **IET Power Electronics**, Stevenage, v. 10, n. 2, p. 208–214, Feb. 2017.

GUZMAN, H. *et al.* Comparative study of predictive and resonant controllers in fault-tolerant five-phase induction motor drives. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 63, n. 1, p. 606–617, Jan. 2016.

HABIBULLAH, H.; POTA, H. R.; PETERSEN, I. R. A novel control approach for high precision positioning of a piezoelectric tube scanner. **IEEE Transactions on Automation Science and Engineering**, New York, v. 14, n. 1, p. 325–336, Jan. 2017.

HÄGGLUND, T.; ÅSTRÖM, K. J. Revisiting the Ziegler-Nichols tuning rules for PI control. **Asian Journal of Control**, Taiwan, v. 4, n. 4, p. 364–380, Dec. 2002.

- HALEVI, Y.; PALMOR, Z.; EFRATI, T. Automatic tuning of decentralized PID controllers for MIMO processes. **Journal of Process Control**, Guildford, v. 7, n. 2, p. 119–128, 1997.
- HALIM, D.; MOHEIMANI, S. O. R. Spatial resonant control of flexible structures-application to a piezoelectric laminate beam. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 9, n. 1, p. 37–53, Jan. 2001.
- HAYKIN, S. S.; VAN VEEN, B. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- HE, J.; LI, Y. W.; BLAABJERG, F. Flexible microgrid power quality enhancement using adaptive hybrid voltage and current controller. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 61, n. 6, p. 2784–2794, June 2014.
- HONG, L. *et al.* Harmonic resonance investigation of a multi-inverter grid-connected system using resonance modal analysis. **IEEE Transactions on Power Delivery**, New York, v. 34, n. 1, p. 63–72, Feb. 2019.
- HU, J.; HE, Y. Modeling and control of grid-connected voltage-sourced converters under generalized unbalanced operation conditions. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, New York, v.23, n.3, p.903–913, Sep. 2008.
- INTERNATIONAL ELECTROTECHNICAL COMMISSION (IEC). **IEC 62040-3**: uninterruptible power systems (UPS) - part 3: method of specifying the performance and test requirements. Geneva: IEC, 2011.
- KAYA, I.; ATHERTON, D. Parameter estimation from relay autotuning with asymmetric limit cycle data. **Journal of Process Control**, Guildford, v. 11, n. 4, p. 429–439, 2001.
- KIONG, T. K. *et al.* **Advances in PID control**. London: Springer, 1999.
- KONG, W. *et al.* Investigation of spatial harmonic magnetic field coupling effect on torque ripple for multiphase induction motor under open fault condition. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 33, n. 7, p. 6060–6071, July 2018.
- LASCU, C. *et al.* High performance current controller for selective harmonic compensation in active power filters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 22, n. 5, p. 1826–1835, Sept. 2007.
- LEVA, A. PID autotuning algorithm based on relay feedback. **IEE Proceedings D - Control Theory and Applications**, Stevenage, v. 140, n. 5, p. 328–338, Sept. 1993.
- LI, S. *et al.* Circulating current suppressing strategy for MMC-HVDC based on nonideal proportional resonant controllers under unbalanced grid conditions. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 30, n. 1, p. 387–397, Jan. 2015.
- LI, W.; ESKINAT, E.; LUYBEN, W. L. An improved autotune identification method. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, Washington, v. 30, n. 7, p. 1530–1541, 1991.
- LIN, C.; WANG, Q.-G.; LEE, T. H. Relay feedback: a complete analysis for first-order systems. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, Washington, v. 43, n. 26, p. 8400–8402, 2004.

LISERRE, M. *et al.* An anti-islanding method for single-phase inverters based on a grid voltage sensorless control. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 53, n. 5, p. 1418–1426, Oct. 2006.

LIU, T.; WANG, Q.-G.; HUANG, H.-P. A tutorial review on process identification from step or relay feedback test. **Journal of Process Control**, Guildford, v. 23, n. 10, p. 1597–1623, 2013.

LOH, A.; VASNANI, V. Describing function matrix for multivariable systems and its use in multiloop PI design. **Journal of Process Control**, Guildford, v. 4, n. 3, p. 115–120, 1994.

LORENZINI, C. **Desenvolvimento de um controlador ressonante-repetitivo aplicado a fontes ininterruptas de energia**. 2015. 116 f. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Escola de Engenharia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

LORENZINI, C.; BAZANELLA, A. S.; PEREIRA, L. F. A. PID tuning based on forced oscillation for plants without ultimate frequency. *In*: IFAC CONFERENCE ON ADVANCES IN PROPORTIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVE CONTROL, 3., 2018, Ghent. **Proceedings...** Oxford: Elsevier, 2018. p. 131–136.

LORENZINI, C.; PEREIRA, L. F. A.; BAZANELLA, A. S. A generalized forced oscillation method for tuning proportional-resonant controllers. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, p. 1–8, 2019.

LORENZINI, C. *et al.* The generalized forced oscillation method for tuning PID controllers. **ISA Transactions**, Pittsburgh, v. 87, p. 68–87, Apr. 2019.

LUYBEN, M. L.; LUYBEN, W. L. **Essentials of process control**. New York: McGraw-Hill, 1997.

LUYBEN, W. L. Simple method for tuning SISO controllers in multivariable systems. **Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development**, Washington, v. 25, n. 3, p. 654–660, 1986.

LUYBEN, W. L. Derivation of transfer functions for highly nonlinear distillation columns. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, Washington, v. 26, n. 12, p. 2490–2495, 1987.

LUYBEN, W.; TYREUS, B.; LUYBEN, M. **Plantwide process control**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1998.

MACCARI, L. A. *et al.* Robust pole location with experimental validation for three-phase grid-connected converters. **Control Engineering Practice**, Oxford, v. 59, p. 16–26, 2017.

MAHMOOD, I. A.; MOHEIMANI, S. O. R.; BHIKKAJI, B. Precise tip positioning of a flexible manipulator using resonant control. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, New York, v. 13, n. 2, p. 180–186, Apr. 2008.

MILLER, K. S.; ROSS, B. **An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**. New York: Wiley, 1993.

MIRET, J. *et al.* Selective harmonic-compensation control for single-phase active power filter with high harmonic rejection. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 56, n. 8, p. 3117–3127, Aug. 2009.

MOHEIMANI, S. O. R.; VAUTIER, B. J. G. Resonant control of structural vibration using charge-driven piezoelectric actuators. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 13, n. 6, p. 1021–1035, Nov. 2005.

MONJE, C. A. *et al.* **Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications**. London: Springer, 2010.

OGATA, K. **Modern control engineering**. 3rd. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.

PARK, S. *et al.* Admittance compensation in current loop control for a grid-tie LCL fuel cell inverter. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 23, n. 4, p. 1716–1723, July 2008.

PEREIRA, E. *et al.* Integral resonant control for vibration damping and precise tip-positioning of a single-link flexible manipulator. **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, New York, v. 16, n. 2, p. 232–240, Apr. 2011.

PEREIRA, L. F. A.; BAZANELLA, A. S. Tuning rules for proportional resonant controllers. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 23, n. 5, p. 2010–2017, Sept. 2015.

PEREIRA, L. F. A. *et al.* Multiple resonant controllers for uninterruptible power supplies - a systematic robust control design approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Piscataway, v. 61, n. 3, p. 1528–1538, Mar. 2014.

PODLUBNY, I. **Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**. San Diego: Academic Press, 1999.

PODLUBNY, I. Fractional-order systems and  $PI^\lambda D^\mu$ -controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 44, n. 1, p. 208–214, Jan. 1999.

POTA, H. R.; MOHEIMANI, S. O. R.; SMITH, M. Resonant controllers for smart structures. **Smart Materials and Structures**, Bristol, v.11, n.1, p.1–8, Feb. 2002.

REZKALLAH, M. *et al.* Experimental implementation of an APC with enhanced MPPT for standalone solar photovoltaic based water pumping station. **IEEE Transactions on Sustainable Energy**, Piscataway, v. 10, n. 1, p. 181–191, Jan. 2019.

RODRIGUEZ-DIAZ, E. *et al.* Input-admittance passivity compliance for grid-connected converters with an LCL filter. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 66, n. 2, p. 1089–1097, Feb. 2019.

ROJAS, F. *et al.* A design methodology of multiresonant controllers for high performance 400 Hz ground power units. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 66, n. 8, p. 6549–6559, Aug. 2019.

SCHEI, T. S. Automatic tuning of PID controllers based on transfer function estimation. **Automatica**, Oxford, v. 30, n. 12, p. 1983–1989, 1994.

SEIFI, K.; MOALLEM, M. An adaptive PR controller for synchronizing grid-connected inverters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 66, n. 3, p. 2034–2043, Mar. 2019.

SHENG, H.; CHEN, Y.; QIU, T. **Fractional processes and fractional-order signal processing: techniques and applications**. New York: Springer, 2012.

TAO, H.; DUARTE, J. L.; HENDRIX, M. A. M. Line-interactive UPS using a fuel cell as the primary source. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 55, n. 8, p. 3012–3021, Aug. 2008.

TEODORESCU, R. *et al.* Proportional-resonant controllers and filters for grid-connected voltage-source converters. **IEE Proceedings - Electric Power Applications**, London, v. 153, n. 5, p. 750–762, Sept. 2006.

TEPLJAKOV, A. **FOMCON: fractional-order modeling and control**. Disponível em: <<http://fomcon.net/>>. Acesso em: 20 jan. de 2017.

TEPLJAKOV, A. **Fractional-order modeling and control of dynamic systems**. New York: Springer Berlin Heidelberg, 2017.

TIMBUS, A. *et al.* Evaluation of current controllers for distributed power generation systems. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 24, n. 3, p. 654–664, Mar. 2009.

TRINH, Q.; LEE, H. An advanced current control strategy for three-phase shunt active power filters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 60, n. 12, p. 5400–5410, Dec. 2013.

UNIVERSITY OF MICHIGAN. **CTMS: control tutorials for MATLAB and simulink**. Disponível em: <<http://ctms.engin.umich.edu>>. Acesso em: 23 fev. de 2017.

VALENTE, G. *et al.* Performance improvement of bearingless multisector PMSM with optimal robust position control. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 34, n. 4, p. 3575–3585, Apr. 2019.

VISIOLI, A. **Practical PID control**. London: Springer-Verlang London, 2006.

WANG, J. Realizations of generalized Warburg impedance with RC ladder networks and transmission lines. **Journal of the Electrochemical Society**, New York, v. 134, n. 8, p. 1915–1920, Aug. 1987.

WANG, Q.-G.; HANG, C.-C.; ZOU, B. Low-order modeling from relay feedback. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, Washington, v. 36, n. 2, p. 375–381, 1997.

WANG, Q.-G.; LEE, T. H.; CHONG, L. **Relay feedback: analysis, identification and control**. London: Springer, 2003.

WILLMANN, G. *et al.* Multiple-loop H-infinity control design for uninterruptible power supplies. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 54, n. 3, p. 1–12, June 2007.

WOLOVICH, W. A. **Automatic control systems: basic analysis and design**. Fort Worth: Saunders College Pub, 1993.

XIN, Z. *et al.* Mitigation of grid-current distortion for LCL-filtered voltage-source inverter with inverter-current feedback control. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 33, n. 7, p. 6248–6261, July 2018.

YEPES, A. G. *et al.* Analysis and design of resonant current controllers for voltage-source converters by means of Nyquist diagrams and sensitivity function. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 58, n. 11, p. 5231–5250, Nov. 2011.

YU, C.-C. **Autotuning of PID controllers: a relay feedback approach**. London: Springer, 2006.

YUAN, L. *et al.* Current harmonics elimination control method for six-phase PM synchronous motor drives. **ISA Transactions**, Pittsburgh, v. 59, p. 443–449, 2015.

ZEILMANN, R. *et al.* Web-based control experiments on a foundation Fieldbus pilot plant. *In: IFAC INTERNATIONAL CONFERENCE ON FIELDBUS SYSTEMS AND THEIR APPLICATIONS*, 5., 2003, Aveiro. **Proceedings...** Oxford: Elsevier, 2003. p. 323–328.

ZHANG, J. Y. *et al.* Development of an active front steering (AFS) system with QFT control. **International Journal of Automotive Technology**, Seoul, v. 9, n. 6, p. 695–702, Dec. 2008.

ZHOU, P.; HE, Y.; SUN, D. Improved direct power control of a DFIG-based wind turbine during network unbalance. **IEEE Transactions on Power Electronics**, New York, v. 24, n. 11, p. 2465–2474, Nov. 2009.

ZHU, Q. *et al.* A low-cost lateral active suspension system of the high-speed train for ride quality based on the resonant control method. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 65, n. 5, p. 4187–4196, May 2018.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, New York, v. 64, n. 11, p. 759–768, Nov. 1942.



## APÊNDICE A INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES PARA O DESENVOLVIMENTO DO MÉTODO GOF

### A.1 Aproximações dos *FOIs*

Na Tabela 56 estão listados três conjuntos de coeficientes  $\{a_k, b_k\}$  das aproximações de *FOIs* cuja função de transferência é definida por

$$\hat{F}(s) = \frac{\sum_{k=0}^{14} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{14} a_k s^k},$$

as quais possuem magnitude igual a  $-m \times 20$  dB/dec e fase constante de  $\gamma = -m \times 90^\circ$ , onde  $m = 1/3, 1/2$  e  $2/3$ , considerando a faixa de frequências de  $10^{-4}$  até  $10^4$  rad/s.

Tabela 56 – Coeficientes de  $\hat{F}(s)$ .

<i>k</i>	$m = 1/3, \gamma = -30^\circ$		$m = 1/2, \gamma = -45^\circ$		$m = 2/3, \gamma = -60^\circ$	
	$a_k$	$b_k$	$a_k$	$b_k$	$a_k$	$b_k$
0	0	0,3452	0	0,527	0	0,7152
1	515,7	$1,309 \times 10^4$	111,1	$1,384 \times 10^4$	23,94	$1,446 \times 10^4$
2	$3,941 \times 10^6$	$5,400 \times 10^7$	$9,649 \times 10^5$	$4,873 \times 10^7$	$2,362 \times 10^5$	$4,387 \times 10^7$
3	$5,337 \times 10^9$	$4,302 \times 10^{10}$	$1,485 \times 10^9$	$3,395 \times 10^{10}$	$4,133 \times 10^8$	$2,678 \times 10^{10}$
4	$1,500 \times 10^{12}$	$7,220 \times 10^{12}$	$4,744 \times 10^{11}$	$5,008 \times 10^{12}$	$1,500 \times 10^{11}$	$3,473 \times 10^{12}$
5	$9,013 \times 10^{13}$	$2,598 \times 10^{14}$	$3,239 \times 10^{13}$	$1,585 \times 10^{14}$	$1,164 \times 10^{13}$	$9,672 \times 10^{13}$
6	$1,165 \times 10^{15}$	$2,012 \times 10^{15}$	$4,756 \times 10^{14}$	$1,080 \times 10^{15}$	$1,943 \times 10^{14}$	$5,799 \times 10^{14}$
7	$3,241 \times 10^{15}$	$3,357 \times 10^{15}$	$1,504 \times 10^{15}$	$1,586 \times 10^{15}$	$6,982 \times 10^{14}$	$7,490 \times 10^{14}$
8	$1,943 \times 10^{15}$	$1,206 \times 10^{15}$	$1,025 \times 10^{15}$	$5,014 \times 10^{14}$	$5,406 \times 10^{14}$	$2,084 \times 10^{14}$
9	$2,510 \times 10^{14}$	$9,342 \times 10^{13}$	$1,504 \times 10^{14}$	$3,416 \times 10^{13}$	$9,018 \times 10^{13}$	$1,249 \times 10^{13}$
10	$6,986 \times 10^{12}$	$1,559 \times 10^{12}$	$4,757 \times 10^{12}$	$5,016 \times 10^{11}$	$3,240 \times 10^{12}$	$1,613 \times 10^{11}$
11	$4,195 \times 10^{10}$	$5,621 \times 10^9$	$3,242 \times 10^{10}$	$1,588 \times 10^9$	$2,506 \times 10^{10}$	$4,482 \times 10^8$
12	$5,462 \times 10^7$	$4,413 \times 10^6$	$4,766 \times 10^7$	$1,088 \times 10^6$	$4,164 \times 10^7$	$2,667 \times 10^5$
13	$1,569 \times 10^4$	779,1	$1,514 \times 10^4$	162,9	$1,466 \times 10^4$	33,28
14	1	0,03205	1	0,00527	1	0,0007704

## A.2 Famílias de processos da bateria de testes

As famílias de processos da bateria de testes consideradas no desenvolvimento do método GOF representam casos típicos encontrados em problemas de controle e foram obtidas de ÅSTRÖM; HÄGGLUND (2004) e de BAZANELLA; PEREIRA; PARRAGA (2017). Estas famílias, as quais são apresentadas a seguir, incluem desde processos sem ponto crítico, cujas funções de transferência são representadas de  $G_1(s)$  até  $G_8(s)$ , e também processos com ponto crítico, funções de transferência de  $G_9(s)$  até  $G_{18}(s)$ .

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad \alpha = 1.$$

$$G_2(s) = \frac{\alpha}{(s + 1)(s + \alpha)}, \quad \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

$$G_3(s) = \frac{\alpha(s + \beta)}{\beta(s + 1)(s + \alpha)}, \quad \alpha = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100], \quad \beta = [0,1; 10; 100].$$

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + 1}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9].$$

$$G_5(s) = \frac{(s + \beta)}{\beta(s^2 + 2\alpha s + 1)}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9], \quad \beta = [1; 10; 100].$$

$$G_6(s) = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{s(s + \alpha)}, \quad \alpha = 1.$$

$$G_7(s) = \frac{\alpha \left( \frac{2s}{\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}{(s + 1)(s + \alpha) \left( \frac{s}{2\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}, \quad \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

$$G_8(s) = \frac{\alpha \left( \frac{2s}{\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}{(s + 1)(s + \alpha) \left( \frac{s}{2\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}, \quad \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

$$G_9(s) = \frac{1}{(s + 1)^n}, \quad n = [3; 4; 5; 6; 7; 8].$$

$$G_{10}(s) = \frac{1}{(s + 1)(Ts + 1)^2}, \quad T = [0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 2; 5; 10].$$

$$G_{11}(s) = \frac{1}{(s + 1)((sT)^2 + 1,4Ts + 1)}, \quad T = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1].$$

$$G_{12}(s) = \frac{1}{(s + 1)(1 + \alpha s)(1 + \alpha^2 s)(1 + \alpha^3 s)},$$

$$\alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1].$$

$$G_{13}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s + 1}, \quad \tau = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1].$$

$$G_{14}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(s+1)^2}, \quad \tau = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1].$$

$$G_{15}(s) = \frac{e^{-sL_1}}{s(T_1s+1)}, \quad T_1 + L_1 = 1, \quad L_1 = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1].$$

$$G_{16}(s) = \frac{e^{-sL_1}}{(Ts+1)(T_1s+1)}, \quad T_1 + L_1 = 1, \quad T = [1; 2; 5; 10], \quad L_1 = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1].$$

$$G_{17}(s) = \frac{1-\alpha s}{(s+1)^2}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1].$$

$$G_{18}(s) = \frac{1-\alpha s}{(s+1)^3}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1].$$

### A.3 Determinação do controlador P para a Classe C de processos

Visando o desenvolvimento do controlador P para processos da Classe C, considera-se os processos pertencentes a essa classe cuja função de transferência pode ser escrita na forma:

$$G_{1c}(s) = \frac{\alpha}{s+\beta},$$

onde  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ .

Deseja-se determinar o controlador  $C_p(s) = K_p$  tal que o sistema em malha fechada, apresentado na Figura 1, com  $G_{1c}(s)$  tenha resposta  $\kappa$  vezes mais rápida que o processo malha aberta, ou seja, deseja-se que o polo de malha fechada esteja em  $-\kappa\beta$ , com  $\kappa > 0$ .

Neste caso, a função de transferência entre a referência e a saída do sistema em malha fechada obtida por meio da Equação (1) é dada por:

$$T_r(s) = \frac{K_p \frac{\alpha}{s+\beta}}{1 + K_p \frac{\alpha}{s+\beta}} = \frac{\beta K_p}{s + \beta + \alpha K_p}, \quad (164)$$

a qual, devido à restrição sobre o polo de malha fechada, também pode ser reescrita como:

$$T_r(s) = \frac{\beta K_p}{s + \kappa\beta}. \quad (165)$$

Igualando as funções de transferência em (164) e (165) pode-se chegar na seguinte relação:

$$K_p = \frac{\beta(\kappa-1)}{\alpha}. \quad (166)$$

As equações de magnitude e fase de  $G_{1c}(j\omega)$  são respectivamente dadas por:

$$|G_{1c}(j\omega)| = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}, \quad \angle G_{1c}(j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (167)$$

No experimento do RFA para um processo da classe C identifica-se o ponto de sua resposta em frequência cuja fase é  $-60^\circ$  (ou  $-\pi/3$  rad). Assim, utilizando (167) pode-se verificar que a frequência  $\omega_{60}$  e a magnitude  $M_{60}$  neste ponto respectivamente são:

$$\omega_{60} = \sqrt{3}\beta, \quad M_{60} = \frac{\alpha}{2\beta}.$$

Agora substituindo  $\beta/\alpha = 1/(2M_{60})$  na equação de  $K_p$  apresentada em (166) chega-se na seguinte fórmula genérica para o controlador P:

$$K_p = \frac{(\kappa - 1)}{2M_{60}}, \quad (168)$$

onde  $\kappa$  é parâmetro que altera o posicionamento do polo de malha fechada para  $-\kappa\beta$ .

Comparando-se a resposta em frequência da função de laço aberto avaliada em  $\omega_{60}$ , a qual é apresentada em (65) e considerando o controlador P aplicado à classe C para o qual verifica-se  $\nu = \rho = -60^\circ$ , com a fórmula genérica dada em (168), pode-se escrever o ponto  $p$  de sintonia para o controlador P aplicado à classe C de processos:

$$p = \frac{(\kappa - 1)}{2} (\cos(-60^\circ) + j \operatorname{sen}(-60^\circ)). \quad (169)$$

Por exemplo, para um sistema em malha fechada 10 vezes mais rápido que o processo em malha aberta define-se  $\kappa = 10$ , o que resulta em:

$$p = 4,5 (\cos(-60^\circ) + j \operatorname{sen}(-60^\circ)). \quad (170)$$

e

$$K_p = \frac{4,5}{M_{60}}.$$

Este desenvolvimento é utilizado na Seção 3.2.1 para a sintonia do controlador P aplicado aos processos da classe C.

## APÊNDICE B RESULTADOS DO EXPERIMENTO DO RELÉ COM FASE AJUSTÁVEL

Neste apêndice são apresentados os resultados do experimento do RFA aplicados às famílias de processos descritas na bateria de testes do Apêndice A.2. Processos que apresentem comportamento auto-oscilatório no experimento do RFA com  $\gamma = 0^\circ$  pertencem à Classe A, enquanto processos que auto-oscilam no experimento do RFA com  $\gamma = -60^\circ$  estão na Classe B, ao passo que os processos da Classe C possuem comportamento auto-oscilatório no experimento do RFA com  $\gamma = -120^\circ$ . Os parâmetros do experimento do RFA e do processo apresentados a seguir estão no SI.

### B.1 Processos de primeira ordem

A função de transferência da família de processos de primeira ordem é dada por:

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad \alpha = 1,$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família processos é apresentado na Tabela 57.

Tabela 57 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_1(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
1	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,6	0	0,532	3,75	0,522	1,68	0,501

### B.2 Processos de segunda ordem

#### B.2.1 Com grau relativo igual a dois e com polos reais

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais é dada por:

$$G_2(s) = \frac{\alpha}{(s + 1)(s + \alpha)}, \quad \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 58.

Tabela 58 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_2(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,4	0	0,589	3,71	0,757	1,69	0,255
2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	3,4	0	0,594	2,55	0,588	2,46	0,234
5	$-60^\circ$	$-120^\circ$	7,4	0	0,600	1,41	0,396	4,45	0,161
10	$-60^\circ$	$-120^\circ$	16	0	0,610	0,849	0,283	7,40	0,106
20	$-60^\circ$	$-120^\circ$	39	0	0,600	0,481	0,193	13,1	0,0626
50	$-60^\circ$	$-120^\circ$	150	0	0,603	0,211	0,112	29,8	0,0282
100	$-60^\circ$	$-120^\circ$	440	0	0,602	0,110	0,0722	57,1	0,0149

Tabela 59 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,01	$-120^\circ$	$-60^\circ$	14	0	0,611	4,28	0,623	1,47	0,0551
0,02	$-120^\circ$	$-60^\circ$	7,2	0	0,609	4,21	0,609	1,49	0,109
0,05	$-120^\circ$	$-60^\circ$	3,2	0	0,615	4,02	0,573	1,56	0,264
0,1	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,8	0	0,599	3,75	0,522	1,68	0,501
0,2	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,2	0	0,617	3,32	0,444	1,89	0,910
0,5	$-120^\circ$	$-60^\circ$	0,9	0	0,625	2,52	0,305	2,50	1,78
1	$-120^\circ$	$-60^\circ$	0,9	0	0,595	1,82	0,198	3,45	2,62
2	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,2	0	0,596	1,20	0,114	5,24	3,42
5	$-120^\circ$	$-60^\circ$	2,4	0	0,601	0,610	0,0463	10,3	4,25
10	$-120^\circ$	$-60^\circ$	5	0	0,598	0,333	0,0206	18,9	4,57
20	$-120^\circ$	$-60^\circ$	11	0	0,596	0,177	0,00889	35,5	4,79
50	$-120^\circ$	$-60^\circ$	35	0	0,589	0,0727	0,00270	86,5	4,89
100	$-120^\circ$	$-60^\circ$	85	0	0,594	0,0371	0,00111	170	4,96

### B.2.2 Com grau relativo igual a um e com polos reais

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a um e com polos reais é dada por:

$$G_3(s) = \frac{\alpha(s + \beta)}{\beta(s + 1)(s + \alpha)}, \quad \alpha = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100], \quad \beta = [0,1; 10; 100],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos são apresentados nas tabelas 59 a 63.

### B.2.3 Com grau relativo igual a dois e com polos complexos

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois e com polos complexos é dada por:

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + 1}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 64.

Tabela 60 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,01	$-60^\circ$	$-120^\circ$	28	0	0,602	9,36	1,39	0,672	0,0121
0,02	$-60^\circ$	$-120^\circ$	15	0	0,600	9,02	1,36	0,696	0,0231
0,05	$-60^\circ$	$-120^\circ$	7,3	0	0,604	8,21	1,28	0,766	0,0508
0,1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	4,8	0	0,611	7,24	1,18	0,868	0,0850
0,2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	3,5	0	0,592	6,00	1,04	1,05	0,128
0,5	$-60^\circ$	$-120^\circ$	3,3	0	0,592	4,16	0,818	1,51	0,172
1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	4,7	0	0,606	2,77	0,621	2,27	0,163
2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	18	0	0,590	1,19	0,354	5,28	0,0726

Tabela 61 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
5	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,1	0	0,619	4,92	0,749	1,28	0,59
10	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,8	0	0,599	3,75	0,522	1,68	0,501
20	$-120^\circ$	$-60^\circ$	3,3	0	0,613	2,83	0,358	2,22	0,407
50	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1800	0	0,610	0,102	0,00427	61,4	0,0623
100	$-120^\circ$	$-60^\circ$	6500	0	0,611	0,0428	0,00134	147	0,0551

Tabela 62 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,01	$-60^\circ$	$-120^\circ$	21	0	0,602	10,9	1,54	0,579	0,0146
0,02	$-60^\circ$	$-120^\circ$	11	0	0,587	10,5	1,50	0,601	0,0279
0,05	$-60^\circ$	$-120^\circ$	5,5	0	0,605	9,48	1,41	0,663	0,0614
0,1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	3,5	0	0,596	8,35	1,29	0,752	0,103
0,2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,6	0	0,599	6,96	1,15	0,903	0,158
0,5	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,2	0	0,585	5,00	0,923	1,26	0,226
1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,5	0	0,586	3,63	0,746	1,73	0,247
2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	3,7	0	0,602	2,47	0,575	2,54	0,222
5	$-60^\circ$	$-120^\circ$	8,5	0	0,591	1,31	0,377	4,80	0,145
10	$-60^\circ$	$-120^\circ$	21	0	0,588	0,730	0,256	8,61	0,0860
20	$-60^\circ$	$-120^\circ$	85	0	0,609	0,329	0,150	19,1	0,0376

Tabela 63 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
50	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,7	0	0,614	3,90	0,550	1,61	0,515
100	$-120^\circ$	$-60^\circ$	1,9	0	0,632	3,75	0,522	1,68	0,501

Tabela 64 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_4(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	-60°	-120°	0,11	0	0,591	5,93	1,03	1,06	4,08
0,2	-60°	-120°	0,25	0	0,612	5,61	0,996	1,12	1,93
0,3	-60°	-120°	0,4	0	0,595	5,31	0,960	1,18	1,22
0,4	-60°	-120°	0,58	0	0,591	5,03	0,926	1,25	0,865
0,5	-60°	-120°	0,8	0	0,597	4,76	0,894	1,32	0,656
0,6	-60°	-120°	1	0	0,570	4,52	0,864	1,39	0,518
0,7	-60°	-120°	1,3	0	0,583	4,30	0,835	1,46	0,422
0,8	-60°	-120°	1,7	0	0,614	4,09	0,808	1,54	0,351
0,9	-60°	-120°	2	0	0,591	3,89	0,782	1,61	0,297

Tabela 65 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	-120°	-60°	0,07	0	0,595	6,11	0,998	1,03	6,69
0,2	-120°	-60°	0,15	0	0,599	5,92	0,958	1,06	3,28
0,3	-120°	-60°	0,24	0	0,597	5,72	0,915	1,10	2,13
0,4	-120°	-60°	0,34	0	0,588	5,51	0,870	1,14	1,56
0,5	-120°	-60°	0,47	0	0,596	5,27	0,821	1,19	1,21
0,6	-120°	-60°	0,63	0	0,604	5,01	0,768	1,25	0,980
0,7	-120°	-60°	0,83	0	0,610	4,73	0,711	1,33	0,812
0,8	-120°	-60°	1,08	0	0,611	4,42	0,650	1,42	0,683
0,9	-120°	-60°	1,4	0	0,609	4,09	0,587	1,53	0,582

#### B.2.4 Com grau relativo igual a um e com polos complexos

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a um e com polos complexos é dada por:

$$G_5(s) = \frac{(s + \beta)}{\beta(s^2 + 2\alpha s + 1)}, \quad \beta = [1; 10; 100] \\ \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9]$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos são apresentados nas tabelas 65 a 67.

#### B.2.5 Com um polo no SPE e com um polo na origem

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois, com um polo no SPE e com um polo na origem é dada por:

$$G_6(s) = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{s(s + \alpha)}, \quad \alpha = 1$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 68.



Tabela 66 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,12	0	0,588	5,84	1,02	1,08	3,77
0,2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,28	0	0,603	5,42	0,974	1,16	1,74
0,3	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,47	0	0,591	5,03	0,927	1,25	1,07
0,4	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,73	0	0,601	4,65	0,880	1,35	0,734
0,5	$-60^\circ$	$-120^\circ$	1,05	0	0,601	4,30	0,835	1,46	0,538
0,6	$-60^\circ$	$-120^\circ$	1,5	0	0,618	3,96	0,791	1,59	0,409
0,7	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2	0	0,608	3,64	0,747	1,73	0,319
0,8	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,6	0	0,590	3,34	0,704	1,88	0,253
0,9	$-60^\circ$	$-120^\circ$	3,5	0	0,598	3,03	0,661	2,07	0,203

Tabela 67 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 100$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,11	0	0,586	5,92	1,03	1,06	4,05
0,2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,25	0	0,605	5,59	0,994	1,12	1,91
0,3	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,41	0	0,601	5,28	0,957	1,19	1,20
0,4	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,6	0	0,600	4,99	0,922	1,26	0,852
0,5	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,83	0	0,606	4,72	0,889	1,33	0,644
0,6	$-60^\circ$	$-120^\circ$	1,1	0	0,610	4,47	0,858	1,40	0,508
0,7	$-60^\circ$	$-120^\circ$	1,4	0	0,609	4,24	0,828	1,48	0,412
0,8	$-60^\circ$	$-120^\circ$	1,75	0	0,609	4,02	0,799	1,56	0,342
0,9	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,1	0	0,596	3,82	0,772	1,64	0,289

Tabela 68 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_6(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	0,13	0	0,588	11,5	1,60	0,547	2,22

### B.3 Processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com bloco de avanço de fase é dada por:

$$G_7(s) = \frac{\alpha \left( \frac{2s}{\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}{(s+1)(s+\alpha) \left( \frac{s}{2\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}, \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 69.

Tabela 69 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_7(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,7	0	0,587	2,09	0,514	3,01	0,332
2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	3,8	0	0,596	1,43	0,399	4,40	0,308
5	$-60^\circ$	$-120^\circ$	7,4	0	0,598	0,798	0,272	7,88	0,234
10	$-60^\circ$	$-120^\circ$	14	0	0,580	0,485	0,194	13,0	0,168
20	$-60^\circ$	$-120^\circ$	32	0	0,616	0,284	0,136	22,1	0,111
50	$-60^\circ$	$-120^\circ$	95	0	0,608	0,136	0,0835	46,1	0,0602
100	$-60^\circ$	$-120^\circ$	240	0	0,607	0,0755	0,0562	83,2	0,0353

Tabela 70 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_8(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
1	$-60^\circ$	$-120^\circ$	1,35	0	0,608	7,17	1,17	0,876	0,302
2	$-60^\circ$	$-120^\circ$	1,75	0	0,602	5,11	0,937	1,23	0,289
5	$-60^\circ$	$-120^\circ$	2,7	0	0,588	3,36	0,708	1,87	0,242
10	$-60^\circ$	$-120^\circ$	4,1	0	0,598	2,48	0,576	2,54	0,199
20	$-60^\circ$	$-120^\circ$	6,2	0	0,592	1,84	0,472	3,41	0,159
50	$-60^\circ$	$-120^\circ$	11	0	0,604	1,26	0,368	4,99	0,117
100	$-60^\circ$	$-120^\circ$	17	0	0,621	0,957	0,307	6,56	0,0935

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com bloco de atraso de fase é dada por:

$$G_8(s) = \frac{\alpha \left( \frac{2s}{\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}{(s+1)(s+\alpha) \left( \frac{s}{2\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}, \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 70.

## B.4 Processos de enésima ordem

A função de transferência da família de processos de enésima ordem é dada por:

$$G_9(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n = [3; 4; 5; 6; 7; 8],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 71.

## B.5 Processos de terceira ordem com grau relativo igual a três

### B.5.1 Com três polos reais

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com grau relativo igual a três que possui polos reais diferentes é dada por:

$$G_{10}(s) = \frac{1}{(s+1)(Ts+1)^2}, \quad T = [0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 2; 5; 10],$$

Tabela 71 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_9(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
3	0°	-180°	3,8	1	0,620	3,68	1	1,71	0,128
4	0°	-180°	1,9	1	0,616	6,33	1	0,993	0,255
5	0°	-180°	1,35	1	0,604	8,67	1	0,725	0,352
6	0°	-180°	1,1	1	0,598	10,9	1	0,577	0,427
7	0°	-180°	1,01	1	0,625	13,0	1	0,483	0,486
8	0°	-180°	1,01	1	0,687	15,1	1	0,416	0,534

Tabela 72 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{10}(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,005	0°	-180°	185	1	0,603	0,0320	1	197	0,00256
0,01	0°	-180°	92	1	0,593	0,0636	1	98,8	0,00507
0,02	0°	-180°	48	1	0,607	0,126	1	49,9	0,00993
0,05	0°	-180°	20	1	0,596	0,306	1	20,5	0,0234
0,1	0°	-180°	11	1	0,597	0,585	1	10,7	0,0426
0,2	0°	-180°	6,5	1	0,591	1,08	1	5,81	0,0714
0,5	0°	-180°	4,2	1	0,609	2,26	1	2,79	0,114
2	0°	-180°	4,1	1	0,595	5,71	1	1,10	0,114
5	0°	-180°	6,5	1	0,594	9,67	1	0,650	0,0718
10	0°	-180°	11	1	0,605	14,1	1	0,445	0,0432

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 72.

### B.5.2 Com um polo real e com dois polos complexos

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com um polo real e com dois polos complexos é dada por:

$$G_{11}(s) = \frac{1}{(s+1)((sT)^2 + 1,4Ts + 1)}, \quad T = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 73.

## B.6 Processos de quarta ordem com polos diferentes

A função de transferência da família de processos de quarta ordem com polos reais diferentes é dada por:

$$G_{12}(s) = \frac{1}{(s+1)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)},$$

$$\alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 74.

Tabela 73 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{11}(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	0°	-180°	7,5	1	0,604	0,595	1	10,6	0,0633
0,2	0°	-180°	4,4	1	0,617	1,12	1	5,60	0,110
0,3	0°	-180°	3,3	1	0,607	1,60	1	3,93	0,144
0,4	0°	-180°	2,8	1	0,603	2,03	1	3,09	0,169
0,5	0°	-180°	2,5	1	0,593	2,43	1	2,58	0,186
0,6	0°	-180°	2,3	1	0,581	2,81	1	2,24	0,198
0,7	0°	-180°	2,3	1	0,604	3,16	1	1,99	0,206
0,8	0°	-180°	2,3	1	0,618	3,49	1	1,80	0,211
0,9	0°	-180°	2,4	1	0,652	3,80	1	1,65	0,213
1	0°	-180°	2,4	1	0,654	4,10	1	1,53	0,214

Tabela 74 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{12}(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	0°	-180°	49	1	0,603	0,207	1	30,4	0,00967
0,2	0°	-180°	14	1	0,618	0,579	1	10,9	0,0347
0,3	0°	-180°	7	1	0,624	1,06	1	5,95	0,0700
0,4	0°	-180°	4,3	1	0,607	1,62	1	3,89	0,111
0,5	0°	-180°	3,1	1	0,601	2,25	1	2,79	0,152
0,6	0°	-180°	2,5	1	0,603	2,95	1	2,13	0,189
0,7	0°	-180°	2,1	1	0,586	3,71	1	1,69	0,219
0,8	0°	-180°	1,9	1	0,580	4,53	1	1,39	0,240
0,9	0°	-180°	1,8	1	0,575	5,40	1	1,16	0,251
1	0°	-180°	1,8	1	0,583	6,33	1	0,993	0,255

## B.7 Processos de primeira ordem com atraso de transporte

A função de transferência da família de processos de primeira ordem com atraso de transporte é dada por:

$$G_{13}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s + 1}, \quad \tau = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 75.

## B.8 Processos de segunda ordem com atraso de transporte

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com polos iguais e com atraso de transporte é dada por:

$$G_{14}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(s + 1)^2}, \quad \tau = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 76.

Tabela 75 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{13}(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	0°	-180°	6,4	1	0,609	0,382	1	16,5	0,0747
0,2	0°	-180°	3,4	1	0,616	0,733	1	8,57	0,142
0,3	0°	-180°	2,3	1	0,596	1,06	1	5,92	0,204
0,4	0°	-180°	1,85	1	0,610	1,37	1	4,59	0,259
0,5	0°	-180°	1,5	1	0,590	1,66	1	3,78	0,309
0,6	0°	-180°	1,3	1	0,587	1,94	1	3,23	0,354
0,7	0°	-180°	1,2	1	0,604	2,22	1	2,84	0,395
0,8	0°	-180°	1,1	1	0,606	2,48	1	2,54	0,432
0,9	0°	-180°	1	1	0,593	2,73	1	2,30	0,466
1	0°	-180°	1	1	0,632	2,98	1	2,11	0,496

Tabela 76 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{14}(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	0°	-180°	9	1	0,600	1,49	1	4,23	0,0523
0,2	0°	-180°	5	1	0,636	2,09	1	3,01	0,0999
0,3	0°	-180°	3,4	1	0,625	2,55	1	2,46	0,144
0,4	0°	-180°	2,6	1	0,616	2,95	1	2,13	0,186
0,5	0°	-180°	2,1	1	0,603	3,31	1	1,90	0,226
0,6	0°	-180°	1,8	1	0,602	3,63	1	1,73	0,263
0,7	0°	-180°	1,6	1	0,607	3,94	1	1,59	0,298
0,8	0°	-180°	1,5	1	0,632	4,23	1	1,49	0,331
0,9	0°	-180°	1,4	1	0,646	4,51	1	1,39	0,362
1	0°	-180°	1,3	1	0,648	4,78	1	1,32	0,392

## B.9 Processos de primeira e segunda ordem com um polo na origem e com atraso de transporte

A função de transferência da família de processos de primeira e segunda ordem com um polo na origem e com atraso de transporte é dada por:

$$G_{15}(s) = \frac{e^{-sL_1}}{s(T_1s + 1)}, \quad T_1 + L_1 = 1, \quad L_1 = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 77.

## B.10 Processos de primeira e segunda ordem com polos diferentes e com atraso de transporte

A função de transferência da família de processos de primeira e segunda ordem com polos diferentes e que possuem atraso de transporte é dada por:

$$G_{16}(s) = \frac{e^{-sL_1}}{(Ts + 1)(T_1s + 1)}, \quad T_1 + L_1 = 1, \quad T = [1; 2; 5; 10], \quad L_1 = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1]$$

Tabela 77 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{15}(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,01	0°	-180°	42	0	0,613	0,682	1	9,21	0,0115
0,02	0°	-180°	20	0	0,577	0,956	1	6,58	0,0226
0,05	0°	-180°	9	0	0,635	1,48	1	4,24	0,0554
0,1	0°	-180°	4,5	0	0,620	2,04	1	3,08	0,108
0,3	0°	-180°	1,6	0	0,617	3,21	1	1,96	0,303
0,5	0°	-180°	1	0	0,603	3,75	1	1,68	0,473
0,7	0°	-180°	0,8	0	0,627	3,97	1	1,58	0,616
0,9	0°	-180°	0,65	0	0,605	4,00	1	1,57	0,731
1	0°	-180°	0,6	0	0,600	4,00	1	1,57	0,785

Tabela 78 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{16}(s)$  com  $T = 1$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,01	0°	-180°	85	1	0,617	0,480	1	13,1	0,0057
0,02	0°	-180°	42	1	0,602	0,673	1	9,34	0,0113
0,05	0°	-180°	17	1	0,600	1,05	1	6,01	0,0277
0,1	0°	-180°	9	1	0,629	1,45	1	4,35	0,0549
0,3	0°	-180°	2,8	1	0,593	2,32	1	2,70	0,166
0,5	0°	-180°	1,7	1	0,611	2,77	1	2,27	0,282
0,7	0°	-180°	1,25	1	0,623	2,97	1	2,11	0,392
0,9	0°	-180°	1,1	1	0,657	2,99	1	2,10	0,469
1	0°	-180°	1	1	0,632	2,98	1	2,11	0,496

Tabela 79 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{16}(s)$  com  $T = 2$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,01	0°	-180°	124	1	0,601	0,555	1	11,3	0,00381
0,02	0°	-180°	64	1	0,615	0,779	1	8,07	0,00755
0,05	0°	-180°	26	1	0,613	1,21	1	5,20	0,0185
0,1	0°	-180°	13	1	0,605	1,67	1	3,77	0,0365
0,3	0°	-180°	4,4	1	0,604	2,65	1	2,38	0,108
0,5	0°	-180°	2,6	1	0,589	3,12	1	2,02	0,178
0,7	0°	-180°	2,1	1	0,645	3,32	1	1,89	0,241
0,9	0°	-180°	2	1	0,736	3,33	1	1,88	0,289
1	0°	-180°	2	1	0,787	3,33	1	1,89	0,309

e os conjuntos de dados obtidos no experimento do RFA para essa família de processos são apresentados tabelas 78 a 81.

Tabela 80 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{16}(s)$  com  $T = 5$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,01	0°	-180°	250	1	0,609	0,622	1	10,1	0,00191
0,02	0°	-180°	124	1	0,596	0,871	1	7,21	0,00378
0,05	0°	-180°	50	1	0,590	1,35	1	4,65	0,00926
0,1	0°	-180°	26	1	0,601	1,86	1	3,37	0,0182
0,3	0°	-180°	9	1	0,598	2,94	1	2,14	0,0522
0,5	0°	-180°	5,6	1	0,597	3,44	1	1,83	0,0837
0,7	0°	-180°	4,4	1	0,622	3,65	1	1,72	0,111
0,9	0°	-180°	3,6	1	0,608	3,67	1	1,71	0,133
1	0°	-180°	3,4	1	0,616	3,67	1	1,71	0,142

Tabela 81 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{16}(s)$  com  $T = 10$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,01	0°	-180°	450	1	0,597	0,649	1	9,67	0,00104
0,02	0°	-180°	230	1	0,603	0,911	1	6,90	0,00206
0,05	0°	-180°	95	1	0,611	1,41	1	4,45	0,00505
0,1	0°	-180°	48	1	0,603	1,95	1	3,23	0,00987
0,3	0°	-180°	17	1	0,607	3,07	1	2,05	0,0280
0,5	0°	-180°	11	1	0,622	3,58	1	1,75	0,0444
0,7	0°	-180°	8	1	0,595	3,79	1	1,66	0,0584
0,9	0°	-180°	7	1	0,620	3,82	1	1,64	0,0696
1	0°	-180°	6,5	1	0,619	3,82	1	1,65	0,0747

### B.11 Processos com um zero de fase não-mínima

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com polos reais e com um zero de fase não-mínima é dada por:

$$G_{17}(s) = \frac{1 - \alpha s}{(s + 1)^2}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 82.

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com polos reais e com um zero de fase não-mínima é dada por:

$$G_{18}(s) = \frac{1 - \alpha s}{(s + 1)^3}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1],$$

e o conjunto de dados obtido no experimento do RFA para essa família de processos é apresentado na Tabela 83.

Tabela 82 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{17}(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	0°	-180°	8	1	0,600	1,53	1	4,12	0,0589
0,2	0°	-180°	4	1	0,599	2,13	1	2,95	0,118
0,3	0°	-180°	2,7	1	0,606	2,57	1	2,44	0,176
0,4	0°	-180°	2,1	1	0,628	2,94	1	2,14	0,235
0,5	0°	-180°	1,6	1	0,598	3,24	1	1,94	0,294
0,6	0°	-180°	1,3	1	0,583	3,51	1	1,79	0,352
0,7	0°	-180°	1,1	1	0,575	3,75	1	1,67	0,411
0,8	0°	-180°	1,1	1	0,657	3,97	1	1,58	0,469
0,9	0°	-180°	1	1	0,672	4,17	1	1,51	0,527
1	0°	-180°	1	1	0,746	4,35	1	1,44	0,586
1,1	0°	-180°	1	1	0,820	4,52	1	1,39	0,644

Tabela 83 – Parâmetros do experimento do RFA para a família de processos  $G_{18}(s)$ .

$\alpha$	$\gamma$	$\nu$	$d$	$b$	$A$	$T_\nu$	$ F(j\omega_\nu) $	$\omega_\nu$	$M_\nu$
0,1	0°	-180°	2,8	1	0,599	4,14	1	1,52	0,168
0,2	0°	-180°	2,3	1	0,609	4,53	1	1,39	0,208
0,3	0°	-180°	1,9	1	0,602	4,88	1	1,29	0,249
0,4	0°	-180°	1,6	1	0,590	5,18	1	1,21	0,290
0,5	0°	-180°	1,4	1	0,589	5,46	1	1,15	0,331
0,6	0°	-180°	1,25	1	0,592	5,72	1	1,10	0,372
0,7	0°	-180°	1,1	1	0,579	5,95	1	1,06	0,413
0,8	0°	-180°	1	1	0,579	6,17	1	1,02	0,455
0,9	0°	-180°	0,95	1	0,600	6,37	1	0,987	0,496
1	0°	-180°	0,9	1	0,617	6,56	1	0,958	0,538
1,1	0°	-180°	0,85	1	0,628	6,73	1	0,933	0,580



## APÊNDICE C RESULTADOS DO MÉTODO GOF PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PID

Neste apêndice são apresentados os resultados da implementação do método GOF para a sintonia de controladores PID aplicada às oito famílias de processos *LTIC* pertencentes às classes B e C —que não possuem ponto crítico— apresentadas na Seção A.2. Inicialmente, para cada um dos processos dessas famílias, através do experimento do RFA, foi identificado o ponto de interesse da resposta em frequência do processo, isto é, foram determinadas a frequência,  $\omega_{120}$  ou  $\omega_{60}$ , e a magnitude do processo,  $M_{120}$  ou  $M_{60}$ . Os conjuntos de dados obtidos através do experimento do RFA estão apresentados no Apêndice B.

Então, de posse dessas informações, foi realizado o projeto dos controladores utilizando as fórmulas propostas na Tabela 4, lembrando que o valor de  $K_p$  é o mesmo para os controladores PI e PID considerando as classes B e C. A seguir são detalhados os parâmetros dos controladores obtidos, os quais estão no SI, e os resultados de simulação da resposta do sistema em malha fechada para um degrau unitário aplicado na referência em  $t = 0$  s. O desempenho foi avaliado pelo tempo de acomodação,  $t_s$ , dado em segundos e calculado com uma tolerância de 2% do valor da saída do sistema em malha fechada em regime permanente, e também considerando o máximo sobrepasso,  $M_o$ , dado em %.

### C.1 Processos de primeira ordem

A função de transferência da família de processos de primeira ordem é dada por

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad \alpha = 1,$$

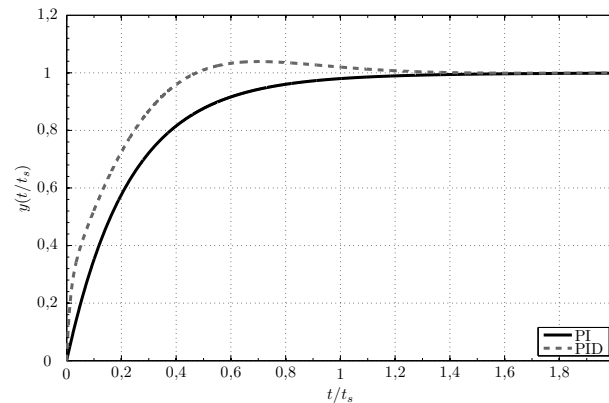
para qual, tomando valores positivos de  $\alpha$ , a fase da resposta em frequência dos processos não cruza  $-120^\circ$  mas cruza  $-60^\circ$ . Por esse motivo, essa família pertence à Classe C, para a qual identifica-se a frequência  $\omega_{60}$  e magnitude  $M_{60}$  de cada um dos processos através do experimento do RFA com  $-120^\circ$ .

Os parâmetros dos controladores e as medidas de desempenho da resposta do sistema em malha fechada para um degrau unitário na referência em cada uma das configurações de processo-controlador estão resumidos na Tabela 84. As curvas do sinal de saída estão ilustradas na Figura 134. Para que fosse possível mostrar o resultado de várias simulações no mesmo espaço, o tempo de cada um dos sinais de saída foi normalizado pelo tempo de acomodação obtido com sua configuração de processo-controlador. Assim, nessa figura e nas que seguem, uma unidade no eixo das abcissas corresponde ao tempo de  $t_s$  obtido com a dada configuração processo-controlador.

Tabela 84 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_1(s)$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
1	1,74	1,05	2,5	0	0,675	0,173	0,06	3,5	3,9

Figura 134 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_1(s)$  com os controladores projetados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## C.2 Processos de segunda ordem

### C.2.1 Com grau relativo igual a dois e com polos reais

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais é dada por

$$G_2(s) = \frac{\alpha}{(s+1)(s+\alpha)}, \quad \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

Para valores positivos de  $\alpha$  a fase da resposta em frequência de  $G_2(s)$  não cruza  $-180^\circ$  mas cruza  $-120^\circ$ . Portanto, essa família pertence à Classe B e no experimento do RFA com  $-60^\circ$  são identificadas a frequência  $\omega_{120}$  e magnitude  $M_{120}$  de cada processo. Os parâmetros dos controladores e as medidas de desempenho obtidas para a família de processos representada por  $G_2(s)$  estão resumidos na Tabela 85. As respostas para um degrau unitário na referência do sistema em malha fechada estão apresentadas na Figura 135.

### C.2.2 Com grau relativo igual a um e com polos reais

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a um e com polos reais é obtida através da função de transferência  $G_2(s)$  com a inclusão de um zero resultando em:

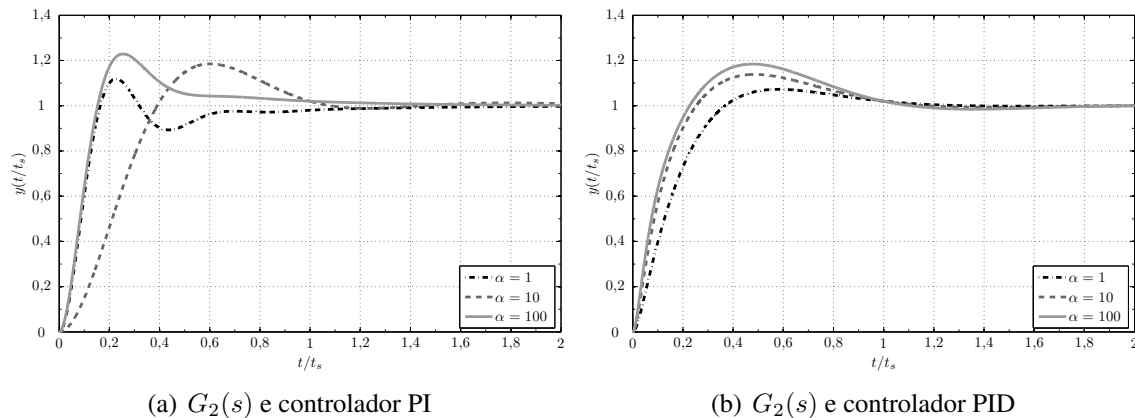
$$G_3(s) = \frac{\alpha(s+\beta)}{\beta(s+1)(s+\alpha)}, \quad \alpha = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

A fase da resposta em frequência da família de processos  $G_3(s)$  para  $\beta = 0,1$  com os valores de  $\alpha$  utilizados não cruza  $-120^\circ$  mas cruza  $-60^\circ$  (Classe C), por isso identifica-se  $\omega_{60}$  e  $M_{60}$  através do experimento do RFA com  $-120^\circ$ . Os parâmetros dos controladores

Tabela 85 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_2(s)$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
1	3,85	3,34	7,4	12	1,41	0,353	0,0594	3,3	7,2
2	4,19	2,30	4,8	13	0,970	0,243	0,0408	2,4	8,1
5	6,10	1,27	1,6	16	0,536	0,134	0,0226	1,5	11
10	9,28	0,764	0,64	19	0,323	0,0807	0,0136	0,97	14
20	15,6	0,433	0,71	21	0,183	0,0457	0,00770	0,57	16
50	34,8	0,190	0,36	22	0,0801	0,0200	0,00337	0,25	18
100	65,9	0,0991	0,20	23	0,0418	0,0105	0,00176	0,13	18

Figura 135 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_2(s)$  com os controladores projetados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

projetados para  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$  são apresentados na Tabela 86 juntamente com as medidas de desempenho da saída do sistema em malha fechada para um salto unitário na referência. As curvas normalizadas do sinal de saída são mostradas na Figura 136.

Com  $\beta = 10$  e para os valores de  $0,01 \leq \alpha \leq 2$  considerados, a fase da resposta em frequência de  $G_3(s)$  não cruza  $-180^\circ$  mas cruza  $-120^\circ$  (Classe B), por conseguinte, o comportamento auto-oscilatório é observado no experimento do RFA com  $-60^\circ$  para esses processos. Os parâmetros dos controladores e as medidas de desempenho do sistema em malha fechada são apresentados na Tabela 87 e na Figura 137 são ilustradas as curvas normalizadas do sinal de saída. Por outro lado, para  $\beta = 10$  e  $5 \leq \alpha \leq 100$  a fase da resposta em frequência de  $G_3(s)$  não cruza  $-120^\circ$  mas cruza  $-60^\circ$  (Classe C), assim, no experimento do RFA com  $-120^\circ$  são identificadas  $\omega_{60}$  e  $M_{60}$ . Os parâmetros dos controladores e os resultados do comportamento da saída do sistema em malha fechada são apresentados na Tabela 88 e na Figura 138.

O mesmo acontece com  $\beta = 100$ , valor para o qual a fase da resposta em frequência de  $G_3(s)$  não cruza  $-180^\circ$  mas cruza  $-120^\circ$  (Classe B) tomando  $0,01 \leq \alpha \leq 20$ , com isso a auto-oscilação é observada no experimento do RFA com  $-60^\circ$  para estes processos. Os parâmetros dos controladores e as medidas de desempenho da saída do sistema em malha fechada para um salto unitário na referência são apresentados na Tabela 89 e na Figura 140 são ilustradas as curvas normalizadas do sinal de saída. Para  $G_3(s)$  com

Tabela 86 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,01	15,8	1,20	14	4,2	0,771	0,197	0,0685	8,5	6,7
0,02	7,99	1,18	13	3,6	0,758	0,194	0,0674	6,9	6,3
0,05	3,30	1,13	6,3	2	0,724	0,185	0,0644	4,7	5,3
0,1	1,74	1,05	2,5	0	0,675	0,173	0,0600	3,5	3,9
0,2	0,956	0,930	9,7	0	0,598	0,153	0,0532	5,2	2
0,5	0,488	0,705	19	0	0,453	0,116	0,0403	13	0
1	0,332	0,510	20	0	0,328	0,0838	0,0292	15	0
2	0,254	0,336	19	0	0,216	0,0551	0,0192	14	0
5	0,205	0,171	14	0	0,110	0,0281	0,00977	8,8	0,49
10	0,191	0,0931	7,9	0	0,0599	0,0153	0,00532	3,3	1,9
20	0,182	0,0495	1,9	0	0,0318	0,00813	0,00283	0,14	2,7
50	0,178	0,0203	0,054	0	0,0131	0,00334	0,00116	0,062	3,5
100	0,175	0,0104	0,026	0	0,00667	0,0017	0,000593	0,033	3,6

Tabela 87 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,01	80,9	8,42	16	24	3,56	0,889	0,150	11	19
0,02	42,5	8,12	15	23	3,43	0,857	0,144	10	18
0,05	19,3	7,39	12	22	3,12	0,780	0,131	9,4	17
0,1	11,5	6,51	5,7	20	2,75	0,687	0,116	8	15
0,2	7,68	5,40	6,7	18	2,28	0,570	0,0960	6,3	14
0,5	5,69	3,75	5,2	16	1,58	0,396	0,0666	4	12
1	6,00	2,49	3,5	17	1,05	0,263	0,0443	2,6	13
2	13,5	1,07	1,5	23	0,452	0,113	0,0190	1,8	19

Tabela 88 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
5	1,47	1,38	4,8	0	0,885	0,226	0,0787	2,2	1,9
10	1,74	1,05	2,5	0	0,675	0,173	0,0600	3,5	3,9
20	2,14	0,793	1,4	1,4	0,510	0,130	0,0453	2,8	6,2
50	14,0	0,0287	0,26	7,4	0,0184	0,00471	0,00164	0,19	9,4
100	15,8	0,0120	0,14	4,2	0,0077	0,00197	0,000685	0,085	6,7

$\beta = 100$  e considerando  $\alpha = 50$  e  $100$ , o comportamento auto-oscilatório é observado no experimento do RFA com  $-120^\circ$  (Classe C). Os parâmetros dos controladores e dos resultados do comportamento da saída do sistema em malha fechada para um salto unitário na entrada são apresentados na Tabela 90 e na Figura 140.

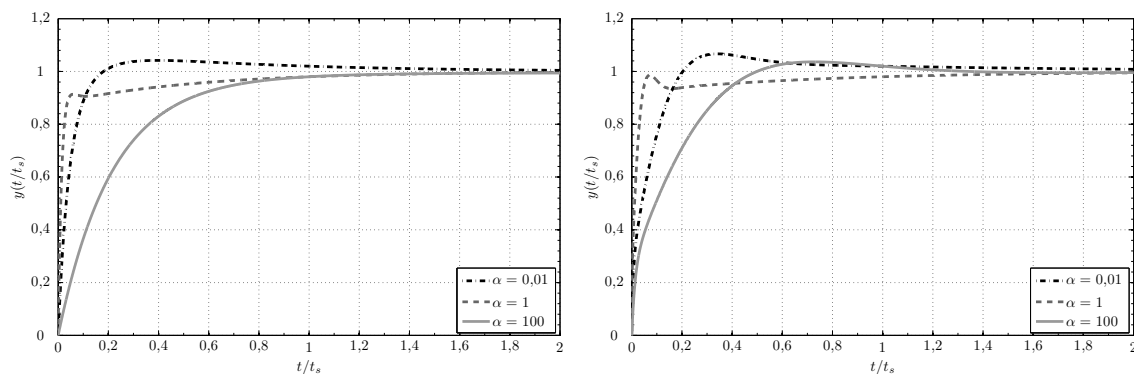
Tabela 89 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,01	67,0	9,77	19	23	4,13	1,03	0,174	13	18
0,02	35,2	9,41	18	22	3,97	0,993	0,167	12	18
0,05	16,0	8,53	14	21	3,60	0,901	0,152	11	16
0,1	9,49	7,52	6,3	19	3,17	0,793	0,134	9,5	14
0,2	6,21	6,26	7,7	16	2,64	0,661	0,111	7,5	12
0,5	4,33	4,50	9,1	13	1,90	0,475	0,0800	4,8	8,6
1	3,97	3,27	7,2	12	1,38	0,345	0,0581	3,3	7,7
2	4,41	2,22	4,4	13	0,938	0,235	0,0395	2,4	8,8
5	6,77	1,18	1,5	17	0,498	0,124	0,0210	1,4	12
10	11,4	0,657	0,57	20	0,277	0,0694	0,0117	0,81	15
20	26,1	0,296	0,51	23	0,125	0,0312	0,00526	0,36	18

Tabela 90 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
50	1,69	1,09	2,8	0	0,702	0,179	0,0624	3,5	3,6
100	1,74	1,05	2,5	0	0,675	0,173	0,0600	3,5	3,9

Figura 136 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$  e com os controladores projetados.

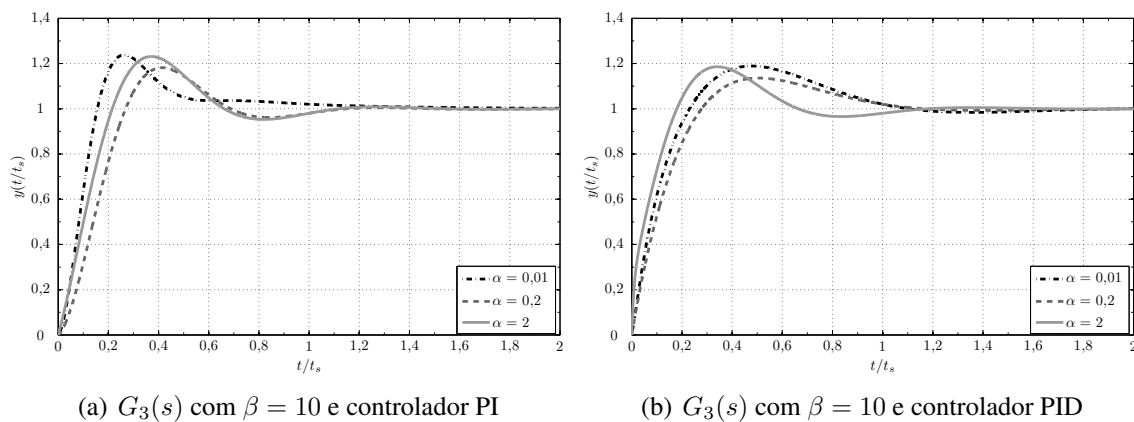


(a)  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$  e controlador PI

(b)  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$  e controlador PID

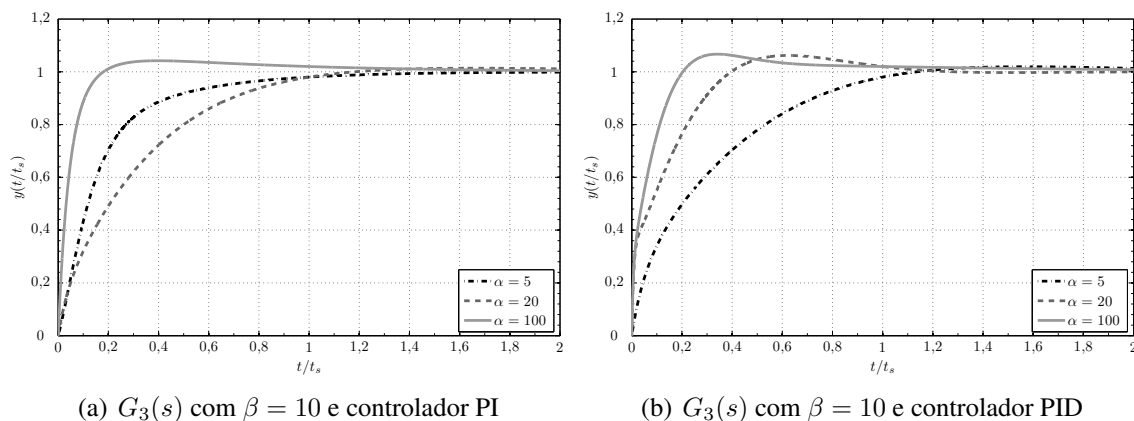
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 137 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e com os controladores projetados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 138 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e com os controladores projetados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

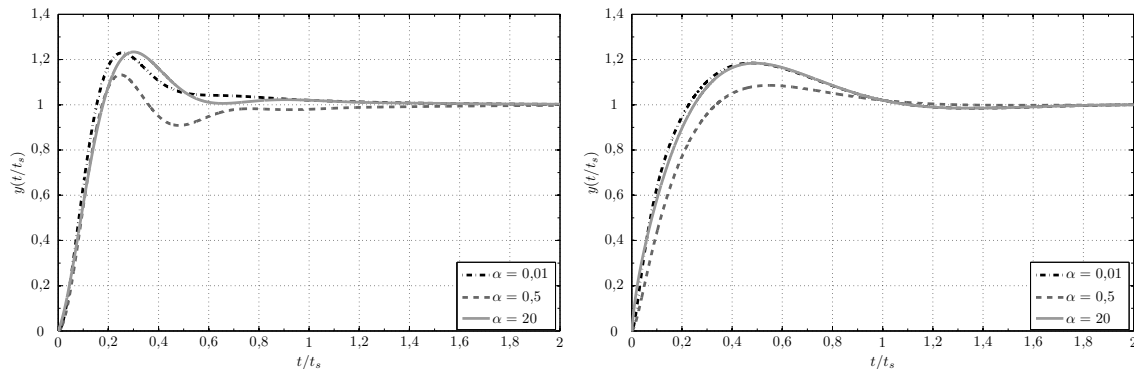
### C.2.3 Com grau relativo igual a dois e com polos complexos

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois e com polos complexos é dada por:

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + 1}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9].$$

Para  $0 < \alpha < 1$  a família de processos  $G_4(s)$  possui um par de polos complexos no SPE do plano complexo e a fase da sua resposta em frequência não cruza  $-180^\circ$  mas cruza  $-120^\circ$  (Classe B). Assim, no experimento do RFA com  $-60^\circ$  são identificadas a frequência  $\omega_{120}$  e a magnitude  $M_{120}$  dos processos descritos por  $G_4(s)$ . Os parâmetros dos controladores obtidos e os resultados do desempenho do sistema em malha fechada para um salto unitário na referência são apresentados na Tabela 91 e na Figura 141.

Figura 139 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e com os controladores projetados.

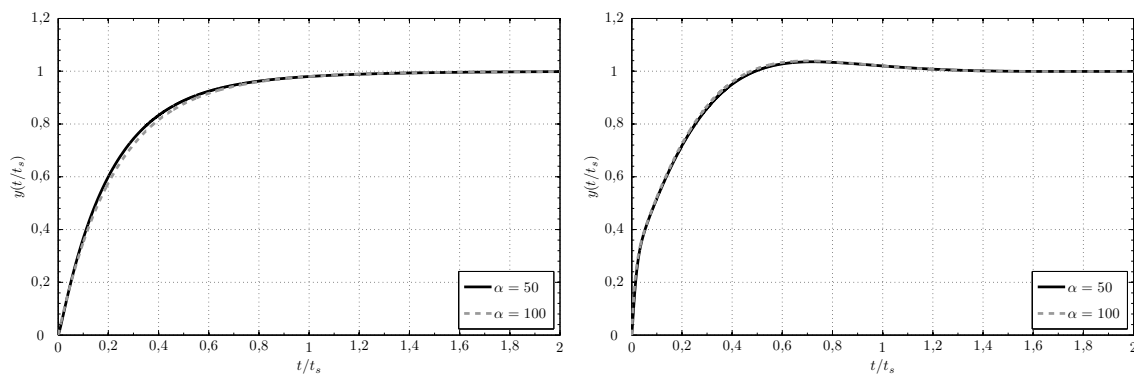


(a)  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e controlador PI

(b)  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e controlador PID

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 140 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e com os controladores projetados.



(a)  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e controlador PI

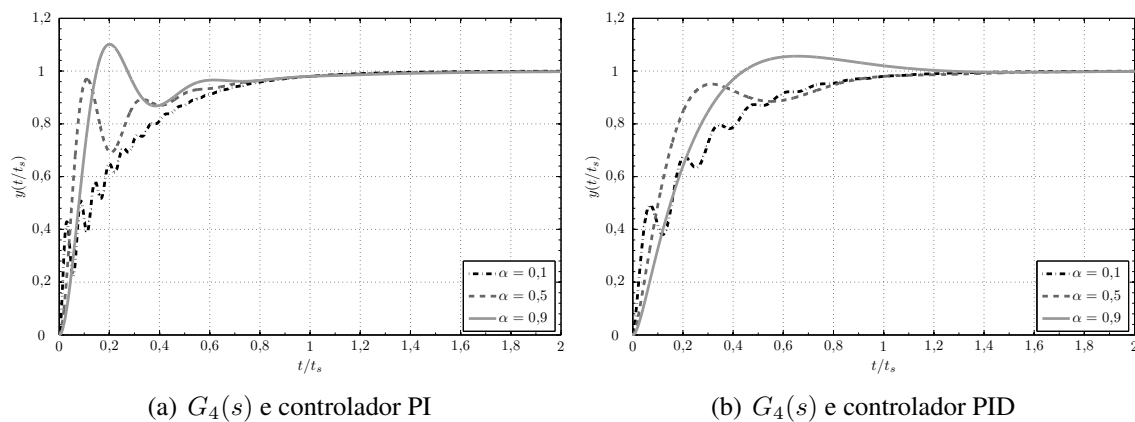
(b)  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e controlador PID

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 91 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_4(s)$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,1	0,240	5,34	102	0	2,25	0,564	0,0949	42	0
0,2	0,508	5,05	52	0	2,13	0,533	0,0897	22	0
0,3	0,805	4,78	35	0	2,02	0,504	0,0849	14	0
0,4	1,13	4,52	26	0	1,91	0,477	0,0804	10	0
0,5	1,50	4,29	20	0	1,81	0,453	0,0762	6,9	0
0,6	1,89	4,07	16	1,7	1,72	0,430	0,0724	5,9	0
0,7	2,32	3,87	13	5,2	1,63	0,408	0,0688	5	1,5
0,8	2,79	3,68	11	8	1,55	0,388	0,0654	2,6	3,7
0,9	3,30	3,50	8,8	10	1,48	0,370	0,0623	3	5,6

Figura 141 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_4(s)$  com os controladores projetados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

#### C.2.4 Com grau relativo igual a um e com polos complexos

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a um e com polos complexos é obtida a partir da função de transferência da família de processos de segunda ordem com polos complexos,  $G_4(s)$ , com a inclusão de um zero, o que resulta em:

$$G_5(s) = \frac{(s + \beta)}{\beta(s^2 + 2\alpha s + 1)}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9], \quad \beta = [1; 10; 100]$$

A fase da resposta em frequência da família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$  não cruza  $-120^\circ$  mas cruza  $-60^\circ$ , por isso tratam-se de processos da Classe C, para os quais são identificadas  $\omega_{60}$  e  $M_{60}$  através do experimento do RFA com  $-120^\circ$ . Para esses processos, os parâmetros dos controladores projetados e do desempenho do sistema em malha fechada para um salto unitário na referência são apresentados na Tabela 92. As curvas normalizadas da saída do sistema em malha fechada para um salto unitário são ilustradas na Figura 142.

Para  $\beta = 10$  e  $100$  a fase da resposta em frequência da família de processos  $G_5(s)$  não cruza  $-180^\circ$  mas cruza  $-120^\circ$  (Classe B), com isso identifica-se  $\omega_{120}$  e  $M_{120}$  através do experimento do RFA de  $-60^\circ$ . Os parâmetros dos controladores e do desempenho do sistema em malha fechada para um salto unitário na referência são apresentados nas tabelas 93 e 94. As curvas normalizadas do sinal de saída para esses casos são mostradas nas figuras 143 e 144.

#### C.2.5 Com um polo no SPE e com um polo na origem

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois, com um polo no SPE e com um polo na origem é dada por:

$$G_6(s) = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{s(s + \alpha)}, \quad \alpha = 1,$$

a qual é obtida a partir da função de transferência da família de processos de primeira ordem com a inclusão de um polo na origem e ajuste de magnitude para  $|G_6(j1)| = 1$ .



Tabela 92 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,1	0,130	1,71	59	0	1,10	0,281	0,0977	38	0
0,2	0,266	1,66	31	0	1,07	0,272	0,0948	20	0
0,3	0,408	1,60	21	0	1,03	0,263	0,0916	14	0
0,4	0,557	1,54	16	0	0,991	0,253	0,0881	11	0
0,5	0,717	1,48	12	0	0,949	0,242	0,0843	7,8	0
0,6	0,887	1,40	9,8	0	0,902	0,231	0,0802	6,6	0
0,7	1,07	1,32	7,8	0	0,851	0,218	0,0757	5,5	0
0,8	1,27	1,24	6,2	0	0,796	0,203	0,0708	2,1	0
0,9	1,49	1,15	4,4	0	0,737	0,188	0,0655	2,9	2,2

Tabela 93 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$ .

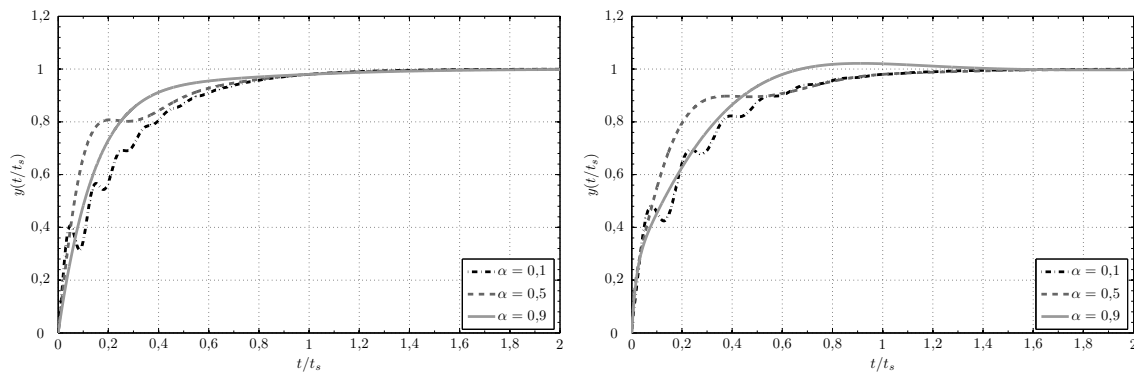
$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,1	0,260	5,26	94	0	2,22	0,555	0,0935	40	0
0,2	0,564	4,88	46	0	2,06	0,515	0,0868	19	0
0,3	0,919	4,53	30	0	1,91	0,478	0,0804	12	0
0,4	1,33	4,19	22	0	1,77	0,442	0,0744	8,6	0
0,5	1,82	3,87	16	0,47	1,63	0,408	0,0688	5,9	0
0,6	2,39	3,56	12	5,4	1,50	0,376	0,0634	5,1	3,1
0,7	3,07	3,28	9,3	9,2	1,38	0,346	0,0582	4,4	6,3
0,8	3,87	3,00	7,2	12	1,27	0,317	0,0534	2,7	8,9
0,9	4,82	2,73	4,1	15	1,15	0,288	0,0485	2,7	11

Tabela 94 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 100$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
0,1	0,242	5,33	101	0	2,25	0,563	0,0948	42	0
0,2	0,513	5,03	51	0	2,12	0,531	0,0894	21	0
0,3	0,815	4,75	34	0	2,01	0,502	0,0845	14	0
0,4	1,15	4,49	25	0	1,9	0,474	0,0799	10	0
0,5	1,52	4,25	20	0	1,79	0,449	0,0756	6,8	0
0,6	1,93	4,03	16	2	1,7	0,425	0,0716	5,8	0
0,7	2,38	3,82	13	5,6	1,61	0,403	0,0678	5	1,9
0,8	2,86	3,62	11	8,3	1,53	0,382	0,0644	2,7	4,2
0,9	3,39	3,44	8,5	10	1,45	0,363	0,0611	3	6,1

Para valores positivos de  $\alpha$ , a fase da resposta em frequência de  $G_6(s)$  não cruza  $-180^\circ$  mas cruza  $-120^\circ$  (Classe B). Logo, ao realizar o experimento do RFA com  $-60^\circ$  identifica-se  $\omega_{120}$  e  $M_{120}$  da família de processos  $G_6(s)$ . Os parâmetros dos controladores

Figura 142 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$  e com os controladores projetados.

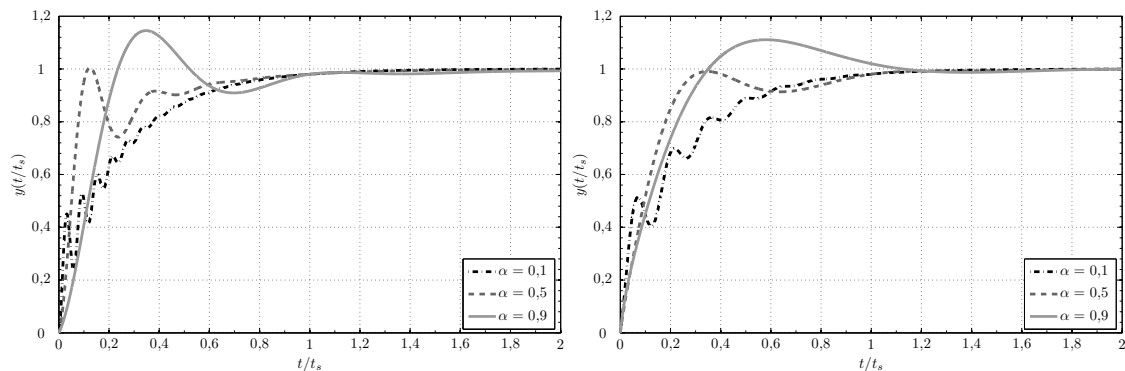


(a)  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$  e controlador PI

(b)  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$  e controlador PID

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 143 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$  e com os controladores projetados.

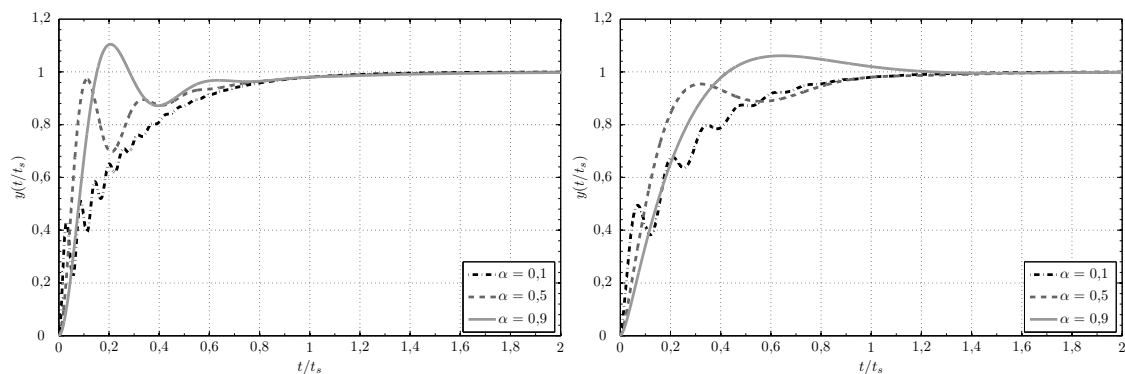


(a)  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$  e controlador PI

(b)  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$  e controlador PID

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 144 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_5(s)$  com  $\beta = 100$  e com os controladores projetados.



(a)  $G_5(s)$  com  $\beta = 100$  e controlador PI

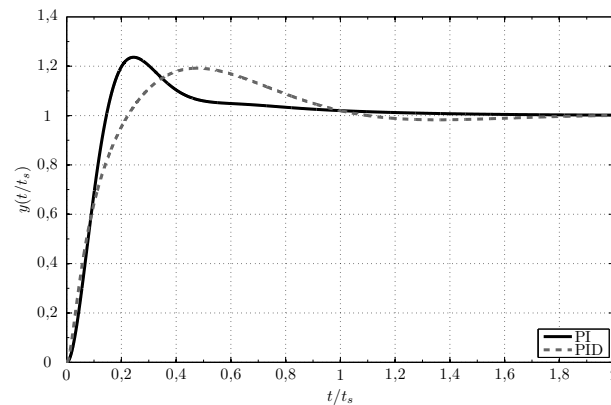
(b)  $G_5(s)$  com  $\beta = 100$  e controlador PID

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 95 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_6(s)$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
1	0,442	10,3	21	24	4,37	1,09	0,184	14	19

Figura 145 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_6(s)$  com os controladores projetados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

obtidos e dos resultados do desempenho do sistema em malha fechada para um salto unitário em sua referência são apresentados na Tabela 95 e Figura 145.

### C.3 Processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com bloco de avanço de fase é dada por:

$$G_7(s) = \frac{\alpha \left( \frac{2s}{\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}{(s+1)(s+\alpha) \left( \frac{s}{2\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}, \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100],$$

a qual é obtida através da função de transferência da família de processos de segunda ordem com polos reais,  $G_2(s)$ , com a inclusão de um bloco de avanço de fase, que consiste em adicionar um par de polo-zero entre os polos originais em  $-1$  e  $-\alpha$ .

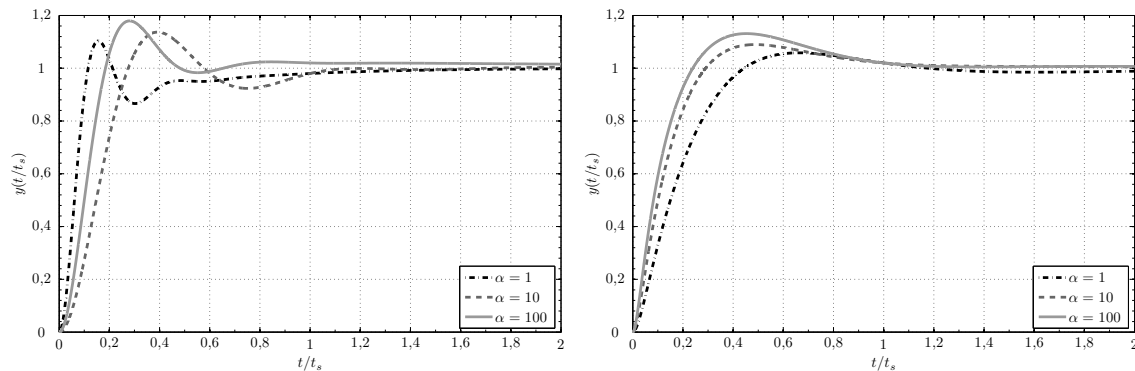
Com os valores considerados de  $\alpha$ , a fase da resposta em frequência de  $G_7(s)$  não cruza  $-180^\circ$  mas cruza  $-120^\circ$  (Classe B), por esse motivo através do experimento do RFA com  $-60^\circ$  são identificadas as variáveis  $\omega_{120}$  e  $M_{120}$  dos processos descritos por  $G_7(s)$ . Os parâmetros dos controladores e dos resultados do desempenho sistema em malha fechada para um salto unitário na referência estão apresentados na Tabela 96 e na Figura 146.

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com grau relativo

Tabela 96 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_7(s)$ .

$\alpha$	PI				PID				
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$
1	2,95	1,88	6,1	10	0,795	0,199	0,0335	1,6	5,8
2	3,18	1,29	3,8	11	0,543	0,136	0,0229	1,1	6,4
5	4,20	0,718	1,5	12	0,303	0,0758	0,0128	0,75	7,6
10	5,84	0,437	0,56	14	0,184	0,0461	0,00776	0,53	9
20	8,83	0,256	0,31	15	0,108	0,0270	0,00454	0,34	10
50	16,3	0,123	0,2	17	0,0518	0,0130	0,00218	0,17	12
100	27,7	0,068	0,12	18	0,0287	0,00717	0,00121	0,093	13

Figura 146 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_7(s)$  com os controladores projetados.



(a)  $G_7(s)$  e controlador PI

(b)  $G_7(s)$  e controlador PID

Fonte: Elaborado pelo autor.

igual a dois e com bloco de atraso de fase é dada por:

$$G_8(s) = \frac{\alpha \left( \frac{2s}{\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}{(s+1)(s+\alpha) \left( \frac{s}{2\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}, \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100],$$

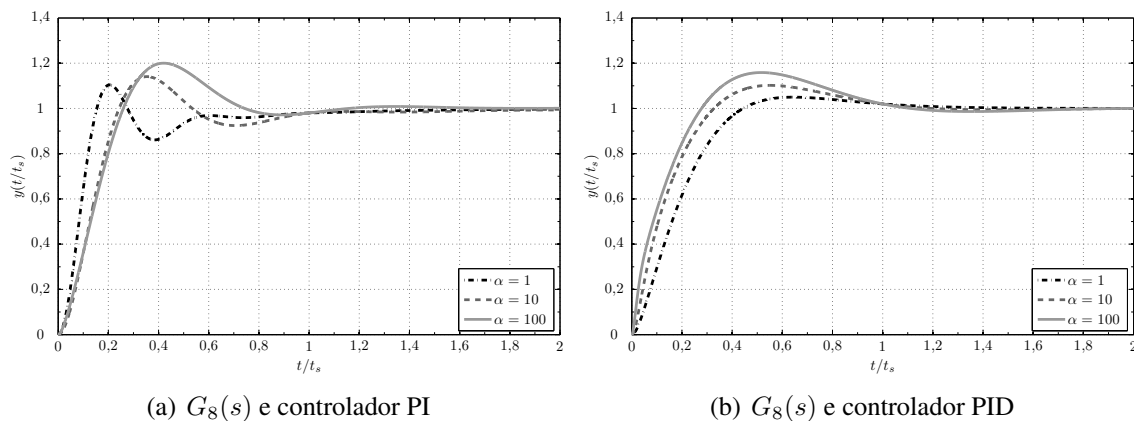
a qual é obtida através da função de transferência da família de processos de segunda ordem com polos reais,  $G_2(s)$ , com a inclusão de um bloco de atraso de fase.

Com os valores considerados de  $\alpha$ , a fase da resposta em frequência de  $G_8(s)$  não cruza  $-180^\circ$  mas cruza  $-120^\circ$  (Classe B), assim, as variáveis  $\omega_{120}$  e  $M_{120}$  de cada um dos processos descritos por  $G_8(s)$  são identificadas através do experimento do RFA com  $-60^\circ$ . Os parâmetros dos controladores obtidos e dos resultados do desempenho do sistema em malha fechada para um salto unitário na referência estão apresentados na Tabela 97 e na Figura 147.

Tabela 97 – Parâmetros de sintonia dos controladores e medidas de desempenho do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_8(s)$ .

$\alpha$	PI				PID					
	$K_p$	$T_i$	$t_s$	$M_o$	$T_i$	$T_d$	$N$	$t_s$	$M_o$	
1	3,24	6,45	16	10	2,72	0,681	0,115	5,5	5	
2	3,40	4,60	11	11	1,94	0,485	0,0818	4,2	5,6	
5	4,06	3,02	6,5	12	1,28	0,319	0,0537	3,1	7,9	
10	4,93	2,23	3,2	14	0,942	0,235	0,0397	2,4	10	
20	6,16	1,66	2,3	16	0,700	0,175	0,0295	1,8	12	
50	8,36	1,13	1,5	19	0,479	0,120	0,0202	1,3	15	
100	10,5	0,861	1,1	20	0,364	0,0909	0,0153	0,98	16	

Figura 147 – Saída normalizada no tempo do sistema em malha fechada para a família de processos  $G_8(s)$  com os controladores projetados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## APÊNDICE D RESULTADOS DO MÉTODO GOF PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PR E PRA

Neste apêndice são apresentados os resultados da implementação do método GOF para a sintonia dos controladores PR e PRA aplicados às dezoito famílias de processos *LTIC* pertencentes às classes A, B e C cujas funções de transferência estão definidas no Apêndice A.2. Inicialmente, para cada um dos processos dessas famílias, foi realizado o experimento do RFA para a identificação de um ponto de sua resposta em frequência, ou seja, foram determinadas a magnitude  $M_v$  e a frequência  $\omega_v$  de cada processo. Os conjuntos de dados obtidos através desse experimento estão apresentados no Apêndice B.

Então, avaliou-se a resposta do sistema em malha fechada com os controladores PRs, os quais foram determinados através dos conjuntos de fórmulas de sintonia apresentados em (127) a (130), e com os controladores PRAs sintonizados através de (137), considerando um sinal senoidal com magnitude unitária e frequência  $0,1 \leq \omega_r \leq 0,9\omega_v$  e  $\xi = 0$  para obtenção de seguimento com erro nulo. Os parâmetros dos processos e dos controladores são apresentados no SI. Conforme definido na Seção 2.1.2.2, o desempenho do sistema de controle será avaliado através do máximo sobrepasso,  $M_o$  dado em %, além do tempo e do número de períodos de acomodação, respectivamente  $t_s$  e  $n_s$ , os quais são dados em segundos e em número de ciclos do sinal de referência, respectivamente, e são calculados assumindo uma tolerância de 2% do sinal de erro.

### D.1 Processos de primeira ordem

A função de transferência da família de processos de primeira ordem é dada por:

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}, \quad \alpha = 1.$$

Os processos nesta família pertencem à Classe C, os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos para  $G_1(s)$  foram apresentados na Seção 4.3.3.

### D.2 Processos de segunda ordem

#### D.2.1 Com grau relativo igual a dois e com polos reais

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais é dada por:

$$G_2(s) = \frac{\alpha}{(s + 1)(s + \alpha)}, \quad \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

Tabela 98 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_2(s)$  com  $\alpha = 10$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,74$	0	9,28	12,1	-2,59	4,2	0,49	0,99
$0,3\omega_{120} = 2,22$	0	8,88	11,1	-22,3	2,7	0,94	0,16
$0,5\omega_{120} = 3,70$	0	7,97	9,14	-55,6	2,6	1,5	0,32
$0,7\omega_{120} = 5,18$	0	6,26	6,22	-85,6	2,2	1,8	0
$0,9\omega_{120} = 6,66$	0	2,94	2,32	-66,4	6,1	6,5	1,7

Tabela 99 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_2(s)$  com  $\alpha = 100$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 5,71$	0	65,9	661	$-1,09 \times 10^3$	0,14	0,13	0,082
$0,3\omega_{120} = 17,1$	0	63,0	607	$-9,41 \times 10^3$	0,33	0,9	0,11
$0,5\omega_{120} = 28,5$	0	56,6	500	$-2,35 \times 10^4$	0,33	1,5	0,24
$0,7\omega_{120} = 39,9$	0	44,4	340	$-3,61 \times 10^4$	0,27	1,7	0
$0,9\omega_{120} = 51,3$	0	20,9	127	$-2,80 \times 10^4$	0,84	6,9	1,7

Os processos nesta família pertencem à Classe B. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos para  $G_2(s)$  com  $\alpha = 1$  foram apresentados na Seção 4.3.2, enquanto nas tabelas 98 e 99 são listados os resultados para  $\alpha = 10$  e  $\alpha = 100$ , respectivamente.

### D.2.2 Com grau relativo igual a um e com polos reais

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a um e com polos reais é dada por:

$$G_3(s) = \frac{\alpha(s + \beta)}{\beta(s + 1)(s + \alpha)}, \quad \beta = [0,1; 10; 100] \\ \alpha = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

Para  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$ , os processos desta família pertencem à Classe C. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos neste caso com  $\alpha = 0,01$ , com  $\alpha = 1$  e com  $\alpha = 100$  são apresentados nas tabelas 100 a 102.

Para  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e para os valores de  $0,01 \leq \alpha \leq 2$  considerados, os processos desta família estão na Classe B. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos nestes casos com  $\alpha = 0,01$ , com  $\alpha = 0,1$  e com  $\alpha = 2$  são apresentados nas tabelas 103 a 105. Enquanto que, para  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e para os valores de  $5 \leq \alpha \leq 100$  considerados, os processos desta família estão na Classe C. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos nestes casos com  $\alpha = 5$ , com  $\alpha = 20$  e com  $\alpha = 100$  são apresentados nas tabelas 106 a 108.

Para  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e para os valores de  $0,01 \leq \alpha \leq 20$  considerados, os processos desta família estão na Classe B. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos nestes casos com  $\alpha = 0,01$ , com  $\alpha = 0,5$  e com  $\alpha = 20$  são apresentados nas tabelas 109 a 111. Enquanto que, para  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  considerando  $\alpha = 50$  e  $100$ , os processos desta família estão na Classe C. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos nestes casos são apresentados nas tabelas 112 e 113.

Tabela 100 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$  e  $\alpha = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,147$	0	15,7	13,2	-0,0644	13	0,31	0,37
$0,3\omega_{60} = 0,44$	0	15,4	12,1	-0,57	15	1,0	1,5
$0,5\omega_{60} = 0,734$	0	14,8	9,99	-1,52	15	1,8	0,54
$0,7\omega_{60} = 1,03$	0	13,3	6,79	-2,67	23	3,7	0,17
$0,9\omega_{60} = 1,32$	0	8,69	2,53	-2,89	47	9,8	0

Tabela 101 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$  e  $\alpha = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,345$	0	0,330	0,652	-0,00748	38	2,1	12
$0,3\omega_{60} = 1,03$	0	0,325	0,599	-0,0662	5,8	0,95	4,5
$0,5\omega_{60} = 1,72$	0	0,311	0,494	-0,176	5,2	1,4	0,22
$0,7\omega_{60} = 2,41$	0	0,280	0,336	-0,311	8,5	3,3	0
$0,9\omega_{60} = 3,10$	0	0,183	0,125	-0,335	19	9,3	0

Tabela 102 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 0,1$  e  $\alpha = 100$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 17,0$	0	0,174	16,9	-9,55	0,60	1,6	4,5
$0,3\omega_{60} = 50,9$	0	0,171	15,6	-84,5	0,061	0,50	0,40
$0,5\omega_{60} = 84,8$	0	0,164	12,8	-225	0,099	1,3	0,22
$0,7\omega_{60} = 119$	0	0,148	8,72	-396	0,17	3,3	0,14
$0,9\omega_{60} = 153$	0	0,0964	3,25	-428	0,38	9,3	0,072

Tabela 103 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,0672$	0	80,9	9,56	-0,186	11	0,12	0,092
$0,3\omega_{120} = 0,201$	0	77,5	8,78	-1,60	28	0,90	0,11
$0,5\omega_{120} = 0,336$	0	69,5	7,24	-4,00	28	1,5	0,30
$0,7\omega_{120} = 0,470$	0	54,6	4,92	-6,15	23	1,7	0
$0,9\omega_{120} = 0,604$	0	25,6	1,83	-4,77	72	6,9	2,0

Tabela 104 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,0868$	0	11,5	1,76	-0,0443	29	0,40	0,80
$0,3\omega_{120} = 0,260$	0	11,0	1,62	-0,382	22	0,92	0,15
$0,5\omega_{120} = 0,434$	0	9,91	1,33	-0,952	22	1,5	0,37
$0,7\omega_{120} = 0,608$	0	7,78	0,907	-1,46	14	1,4	0,051
$0,9\omega_{120} = 0,781$	0	3,65	0,338	-1,14	55	6,9	2,0



Tabela 105 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 2$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,528$	0	13,5	12,5	-1,92	4,6	0,39	0,81
$0,3\omega_{120} = 1,58$	0	12,9	11,5	-16,5	3,4	0,86	0,17
$0,5\omega_{120} = 2,64$	0	11,6	9,48	-41,1	3,6	1,5	0,63
$0,7\omega_{120} = 3,69$	0	9,10	6,45	-63,3	2,3	1,3	1,5
$0,9\omega_{120} = 4,75$	0	4,27	2,40	-49,1	9,1	6,9	3,1

Tabela 106 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,128$	0	1,46	1,07	-0,00455	53	1,1	3,6
$0,3\omega_{60} = 0,383$	0	1,44	0,984	-0,0403	13	0,79	0
$0,5\omega_{60} = 0,639$	0	1,38	0,811	-0,107	13	1,4	0
$0,7\omega_{60} = 0,894$	0	1,24	0,552	-0,189	23	3,3	0
$0,9\omega_{60} = 1,15$	0	0,81	0,206	-0,204	53	9,8	0

Tabela 107 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 20$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,222$	0	2,12	2,69	-0,0199	28	1,0	2,9
$0,3\omega_{60} = 0,666$	0	2,09	2,48	-0,176	4,3	0,45	0
$0,5\omega_{60} = 1,11$	0	2,00	2,04	-0,469	7,3	1,3	0
$0,7\omega_{60} = 1,55$	0	1,80	1,39	-0,826	13	3,2	0
$0,9\omega_{60} = 2,00$	0	1,17	0,517	-0,892	29	9,3	0

Tabela 108 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 100$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 14,7$	0	15,7	$1,32 \times 10^3$	-645	0,13	0,31	0,37
$0,3\omega_{60} = 44,0$	0	15,4	$1,21 \times 10^3$	$-5,71 \times 10^3$	0,15	1,0	1,5
$0,5\omega_{60} = 73,4$	0	14,8	$1,00 \times 10^3$	$-1,52 \times 10^4$	0,15	1,8	0,54
$0,7\omega_{60} = 103$	0	13,3	680	$-2,68 \times 10^4$	0,23	3,7	0,17
$0,9\omega_{60} = 132$	0	8,69	253	$-2,89 \times 10^4$	0,47	9,8	0

Tabela 109 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e  $\alpha = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,0579$	0	67,0	6,82	-0,114	14	0,13	0,083
$0,3\omega_{120} = 0,174$	0	64,1	6,27	-0,986	32	0,9	0,11
$0,5\omega_{120} = 0,289$	0	57,6	5,17	-2,46	32	1,5	0,25
$0,7\omega_{120} = 0,405$	0	45,2	3,51	-3,78	27	1,7	0
$0,9\omega_{120} = 0,521$	0	21,2	1,31	-2,94	83	6,9	1,8

Tabela 110 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,126$	0	4,33	0,956	-0,0349	36	0,72	1,8
$0,3\omega_{120} = 0,377$	0	4,14	0,879	-0,300	17	1,0	0,39
$0,5\omega_{120} = 0,629$	0	3,72	0,725	-0,749	20	2,0	0,59
$0,7\omega_{120} = 0,880$	0	2,92	0,493	-1,15	14	2,0	0,17
$0,9\omega_{120} = 1,13$	0	1,37	0,184	-0,894	36	6,5	1,7

Tabela 111 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e  $\alpha = 20$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 1,91$	0	26,1	87,7	-48,6	0,54	0,16	0,19
$0,3\omega_{120} = 5,74$	0	25,0	80,6	-419	0,98	0,89	0,13
$0,5\omega_{120} = 9,56$	0	22,4	66,4	$-1,04 \times 10^3$	1,0	1,5	0,42
$0,7\omega_{120} = 13,4$	0	17,6	45,2	$-1,61 \times 10^3$	0,64	1,4	0,23
$0,9\omega_{120} = 17,2$	0	8,26	16,8	$-1,25 \times 10^3$	2,5	6,9	2,3

Tabela 112 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e  $\alpha = 50$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,161$	0	1,68	1,55	-0,00829	42	1,1	3,4
$0,3\omega_{60} = 0,483$	0	1,65	1,42	-0,0734	6,3	0,48	0
$0,5\omega_{60} = 0,805$	0	1,58	1,17	-0,195	10	1,3	0
$0,7\omega_{60} = 1,13$	0	1,42	0,797	-0,344	18	3,2	0
$0,9\omega_{60} = 1,45$	0	0,929	0,297	-0,372	42	9,7	0

Tabela 113 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_3(s)$  com  $\beta = 100$  e  $\alpha = 100$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,168$	0	1,73	1,66	-0,00923	40	1,1	3,3
$0,3\omega_{60} = 0,503$	0	1,70	1,52	-0,0817	6,0	0,48	0
$0,5\omega_{60} = 0,838$	0	1,63	1,26	-0,218	9,9	1,3	0
$0,7\omega_{60} = 1,17$	0	1,46	0,853	-0,383	17	3,2	0
$0,9\omega_{60} = 1,51$	0	0,956	0,318	-0,414	41	9,7	0

Tabela 114 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_4(s)$  com  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,106$	0	0,240	0,0447	-0,00137	205	3,5	0,17
$0,3\omega_{120} = 0,318$	0	0,230	0,0411	-0,0118	194	9,8	4,1
$0,5\omega_{120} = 0,530$	0	0,206	0,0339	-0,0295	180	15	11
$0,7\omega_{120} = 0,741$	0	0,162	0,0230	-0,0454	147	17	15
$0,9\omega_{120} = 0,953$	0	0,076	0,00858	-0,0352	85	13	5,8

Tabela 115 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_4(s)$  com  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,132$	0	1,49	0,347	-0,0132	32	0,68	0,69
$0,3\omega_{120} = 0,396$	0	1,43	0,319	-0,114	35	2,2	1,6
$0,5\omega_{120} = 0,659$	0	1,28	0,263	-0,285	31	3,3	2,5
$0,7\omega_{120} = 0,923$	0	1,01	0,179	-0,438	22	3,2	1,5
$0,9\omega_{120} = 1,19$	0	0,473	0,0665	-0,340	31	5,9	1,6

Tabela 116 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_4(s)$  com  $\alpha = 0,9$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,161$	0	3,30	0,936	-0,0438	29	0,74	2,0
$0,3\omega_{120} = 0,484$	0	3,16	0,860	-0,377	20	1,5	0,56
$0,5\omega_{120} = 0,807$	0	2,83	0,709	-0,941	16	2,1	0,8
$0,7\omega_{120} = 1,13$	0	2,23	0,482	-1,45	11	2,0	0,29
$0,9\omega_{120} = 1,45$	0	1,04	0,180	-1,12	28	6,4	1,6

### D.2.3 Com grau relativo igual a dois e com polos complexos

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois e com polos complexos é dada por:

$$G_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2\alpha s + 1}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9].$$

Os processos nesta família pertencem à Classe B. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos para  $G_4(s)$  com  $\alpha = 0,1$ , com  $\alpha = 0,5$  e com  $\alpha = 0,9$  são apresentados nas tabelas 114 a 116.

### D.2.4 Com grau relativo igual a um e com polos complexos

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a um e com polos complexos é dada por:

$$G_5(s) = \frac{(s + \beta)}{\beta(s^2 + 2\alpha s + 1)}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9], \quad \beta = [1; 10; 100].$$

Para  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$ , os processos desta família pertencem à Classe C. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos neste caso com  $\alpha = 0,1$ , com

$\alpha = 0,5$  e com  $\alpha = 0,9$  são apresentados nas tabelas 117 a 119. Enquanto que, para  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$  e com  $\beta = 100$ , os processos desta família estão na Classe B. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos nestes casos com  $\alpha = 0,1$ , com  $\alpha = 0,5$  e com  $\alpha = 0,9$  são apresentados nas tabelas 120 a 125.

Tabela 117 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$  e  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,103$	0	0,129	0,0761	-0,00026	119	1,9	0,037
$0,3\omega_{60} = 0,309$	0	0,127	0,0699	-0,00230	113	5,6	0,26
$0,5\omega_{60} = 0,514$	0	0,122	0,0576	-0,00613	118	9,7	1,6
$0,7\omega_{60} = 0,720$	0	0,109	0,0392	-0,0108	125	14	4,3
$0,9\omega_{60} = 0,926$	0	0,0715	0,0146	-0,0117	131	19	5,0

Tabela 118 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$  e  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,119$	0	0,712	0,486	-0,00193	52	0,99	4,2
$0,3\omega_{60} = 0,358$	0	0,700	0,447	-0,0171	25	1,4	0,10
$0,5\omega_{60} = 0,596$	0	0,671	0,368	-0,0454	21	2,0	0,024
$0,7\omega_{60} = 0,834$	0	0,603	0,250	-0,0801	26	3,4	0
$0,9\omega_{60} = 1,07$	0	0,394	0,0933	-0,0865	55	9,3	0

Tabela 119 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 1$  e  $\alpha = 0,9$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{60} = 0,153$	0	1,48	1,31	-0,00666	45	1,1	3,6
$0,3\omega_{60} = 0,460$	0	1,46	1,20	-0,059	7,0	0,51	0,015
$0,5\omega_{60} = 0,767$	0	1,40	0,989	-0,157	11	1,4	0
$0,7\omega_{60} = 1,07$	0	1,26	0,672	-0,277	19	3,2	0
$0,9\omega_{60} = 1,38$	0	0,822	0,250	-0,299	42	9,3	0

Tabela 120 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,108$	0	0,260	0,0492	-0,00153	179	3,1	0,21
$0,3\omega_{120} = 0,323$	0	0,249	0,0452	-0,0132	182	9,3	4,7
$0,5\omega_{120} = 0,538$	0	0,224	0,0373	-0,0330	177	15	13
$0,7\omega_{120} = 0,753$	0	0,176	0,0253	-0,0507	150	18	17
$0,9\omega_{120} = 0,968$	0	0,0824	0,00944	-0,0394	82	13	9,4

Tabela 121 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,146$	0	1,82	0,468	-0,0198	30	0,71	1,3
$0,3\omega_{120} = 0,439$	0	1,74	0,430	-0,171	31	2,2	1,6
$0,5\omega_{120} = 0,731$	0	1,56	0,355	-0,426	24	2,8	2,4
$0,7\omega_{120} = 1,02$	0	1,23	0,241	-0,656	16	2,7	1,4
$0,9\omega_{120} = 1,32$	0	0,577	0,0898	-0,509	30	6,4	2,2

Tabela 122 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 10$  e  $\alpha = 0,9$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,207$	0	4,82	1,76	-0,105	22	0,72	1,8
$0,3\omega_{120} = 0,621$	0	4,62	1,61	-0,908	11	1,1	0,50
$0,5\omega_{120} = 1,04$	0	4,14	1,33	-2,26	9,6	1,6	0,71
$0,7\omega_{120} = 1,45$	0	3,25	0,904	-3,48	8,6	2,0	0,40
$0,9\omega_{120} = 1,86$	0	1,53	0,337	-2,70	23	6,9	2,30

Tabela 123 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 100$  e  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,106$	0	0,242	0,0451	-0,00139	183	3,1	0,17
$0,3\omega_{120} = 0,318$	0	0,231	0,0414	-0,0119	194	9,8	4,1
$0,5\omega_{120} = 0,530$	0	0,208	0,0342	-0,0298	179	15	11
$0,7\omega_{120} = 0,742$	0	0,163	0,0232	-0,0458	147	17	15
$0,9\omega_{120} = 0,955$	0	0,0766	0,00865	-0,0356	85	13	6,2

Tabela 124 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 100$  e  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,106$	0	0,242	0,0451	-0,00139	183	3,1	0,17
$0,3\omega_{120} = 0,318$	0	0,231	0,0414	-0,0119	194	9,8	4,1
$0,5\omega_{120} = 0,530$	0	0,208	0,0342	-0,0298	179	15	11
$0,7\omega_{120} = 0,742$	0	0,163	0,0232	-0,0458	147	17	15
$0,9\omega_{120} = 0,955$	0	0,0766	0,00865	-0,0356	85	13	6,2

### D.2.5 Com um polo no SPE e com um polo na origem

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com grau relativo igual a dois, com um polo no SPE e com um polo na origem é dada por:

$$G_6(s) = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{s(s + \alpha)}, \quad \alpha = 1.$$

Os processos nesta família pertencem à Classe B. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos para  $G_6(s)$  com  $\alpha = 1$  estão listados na Tabela 126.

Tabela 125 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_5(s)$  com  $\beta = 100$  e  $\alpha = 0,9$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,106$	0	0,242	0,0451	-0,00139	183	3,1	0,17
$0,3\omega_{120} = 0,318$	0	0,231	0,0414	-0,0119	194	9,8	4,1
$0,5\omega_{120} = 0,530$	0	0,208	0,0342	-0,0298	179	15	11
$0,7\omega_{120} = 0,742$	0	0,163	0,0232	-0,0458	147	17	15
$0,9\omega_{120} = 0,955$	0	0,0766	0,00865	-0,0356	85	13	6,2

Tabela 126 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_6(s)$  com  $\alpha = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,0547$	0	0,442	0,0425	-0,000674	13	0,11	0,61
$0,3\omega_{120} = 0,164$	0	0,423	0,0391	-0,00580	34	0,9	0,54
$0,5\omega_{120} = 0,273$	0	0,380	0,0322	-0,0145	34	1,5	0,23
$0,7\omega_{120} = 0,383$	0	0,298	0,0219	-0,0223	28	1,7	0
$0,9\omega_{120} = 0,492$	0	0,140	0,00816	-0,0173	88	6,9	1,7

### D.3 Processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com polos reais

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com bloco de avanço de fase é dada por:

$$G_7(s) = \frac{\alpha \left( \frac{2s}{\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}{(s+1)(s+\alpha) \left( \frac{s}{2\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}, \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

Os processos nesta família pertencem à Classe B. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos para  $G_7(s)$  com  $\alpha = 1$ , com  $\alpha = 10$  e com  $\alpha = 100$  são listados nas tabelas 127 a 129.

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com grau relativo igual a dois e com bloco de atraso de fase é dada por:

$$G_8(s) = \frac{\alpha \left( \frac{2s}{\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}{(s+1)(s+\alpha) \left( \frac{s}{2\sqrt{\alpha}} + 1 \right)}, \alpha = [1; 2; 5; 10; 20; 50; 100].$$

Os processos nesta família pertencem à Classe B. Os parâmetros dos controladores PRs e as medidas de desempenho obtidos para  $G_8(s)$  com  $\alpha = 1$ , com  $\alpha = 10$  e com  $\alpha = 100$  são listados nas tabelas 130 a 132.

Tabela 127 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_7(s)$  com  $\alpha = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,0832$	0	27,7	4,05	-0,0976	0	0	0,59
$0,3\omega_{120} = 0,249$	0	26,5	3,72	-0,841	12	0,48	0,52
$0,5\omega_{120} = 0,416$	0	23,8	3,07	-2,10	7,9	0,52	0,98
$0,7\omega_{120} = 0,582$	0	18,7	2,09	-3,23	19	1,8	2,1
$0,9\omega_{120} = 0,748$	0	8,77	0,777	-2,50	32	3,8	5,0

Tabela 128 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_7(s)$  com  $\alpha = 10$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 1,30$	0	5,84	13,3	-4,99	2,9	0,59	1,1
$0,3\omega_{120} = 3,89$	0	5,59	12,2	-43,0	1,7	1,0	0,32
$0,5\omega_{120} = 6,48$	0	5,02	10,1	-107	2,0	2,0	0,50
$0,7\omega_{120} = 9,07$	0	3,94	6,85	-165	1,4	2,0	0,21
$0,9\omega_{120} = 11,7$	0	1,85	2,55	-128	3,5	6,5	1,6

Tabela 129 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_7(s)$  com  $\alpha = 100$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 8,32$	0	27,7	405	-978	0,24	0,31	0,43
$0,3\omega_{120} = 25,0$	0	26,5	373	$-8,42 \times 10^3$	0,26	1,0	0,50
$0,5\omega_{120} = 41,6$	0	23,8	307	$-2,1 \times 10^4$	0,31	2,0	0,76
$0,7\omega_{120} = 58,2$	0	18,7	209	$-3,23 \times 10^4$	0,21	1,9	0,43
$0,9\omega_{120} = 74,9$	0	8,78	77,8	$-2,51 \times 10^4$	0,55	6,5	1,9

Tabela 130 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_8(s)$  com  $\alpha = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,00657$	0	10,5	0,121	-0,000230	578	0,6	1,4
$0,3\omega_{120} = 0,0197$	0	10,0	0,111	-0,00198	363	1,1	1,3
$0,5\omega_{120} = 0,0328$	0	9,00	0,0916	-0,00494	356	1,9	2,8
$0,7\omega_{120} = 0,0460$	0	7,07	0,0623	-0,00761	512	3,7	5,8
$0,9\omega_{120} = 0,0591$	0	3,32	0,0232	-0,00590	792	7,4	14

Tabela 131 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_8(s)$  com  $\alpha = 10$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,254$	0	4,93	2,20	-0,161	18	0,71	1,7
$0,3\omega_{120} = 0,761$	0	4,72	2,02	-1,39	8,6	1,0	0,39
$0,5\omega_{120} = 1,27$	0	4,23	1,66	-3,47	7,8	1,6	0,56
$0,7\omega_{120} = 1,77$	0	3,32	1,13	-5,34	6,9	2,0	0,20
$0,9\omega_{120} = 2,28$	0	1,56	0,422	-4,14	18	6,5	1,8

Tabela 132 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_8(s)$  com  $\alpha = 100$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_{120} = 0,656$	0	10,5	12,1	-2,3	4,5	0,47	0,95
$0,3\omega_{120} = 1,97$	0	10,0	11,1	-19,8	3,0	0,93	0,17
$0,5\omega_{120} = 3,28$	0	9,00	9,16	-49,4	2,9	1,5	0,50
$0,7\omega_{120} = 4,60$	0	7,07	6,23	-76,1	1,9	1,4	0,35
$0,9\omega_{120} = 5,91$	0	3,32	2,32	-59,0	7,3	6,9	2,3

Tabela 133 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_9(s)$  com  $n = 3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p_1}$	$K_{r_{11}}$	$K_{r_{21}}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,171$	0	3,08	0,276	-0,0890	69	1,9	12
$0,3\omega_u = 0,512$	0	2,84	0,254	-0,737	21	1,7	8,7
$0,5\omega_u = 0,854$	0	2,35	0,0698	-1,69	24	3,2	21
$0,7\omega_u = 1,20$	0	1,60	0,0475	-2,26	72	14	41
$0,9\omega_u = 1,54$	0	0,598	0,0177	-1,40	696	170	75

Tabela 134 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_9(s)$  com  $n = 3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,171$	0	3,08	0,643	-0,0575	2,5	0,683	4,27	43	1,2	0,82
$0,3\omega_u = 0,512$	0	2,92	0,591	-0,489	2,5	0,683	4,27	33	2,7	1,4
$0,5\omega_u = 0,854$	0	2,55	0,487	-1,19	2,5	0,683	4,27	19	2,5	0,16
$0,7\omega_u = 1,20$	0	1,92	0,331	-1,75	2,5	0,683	4,27	21	4,1	0,4
$0,9\omega_u = 1,54$	0	0,831	0,123	-1,26	2,5	0,683	4,27	81	20	6,1

## D.4 Processos de enésima ordem

A função de transferência da família de processos de enésima ordem é dada por:

$$G_9(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n = [3; 4; 5; 6; 7; 8].$$

Os processos nesta família pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_9(s)$  com  $n = 3$ , com  $n = 5$  e com  $n = 8$  são apresentados nas tabelas 133 a 138.

## D.5 Processos de terceira ordem com grau relativo igual a três

### D.5.1 Com três polos reais

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com grau relativo igual a três que possui polos reais diferentes é dada por:

$$G_{10}(s) = \frac{1}{(s+1)(Ts+1)^2}, \quad T = [0,005; 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 2; 5; 10].$$



Tabela 135 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_9(s)$  com  $n = 5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0725$	0	1,12	0,0426	-0,00584	235	2,7	12
$0,3\omega_u = 0,217$	0	1,03	0,0392	-0,0483	74	2,6	8,0
$0,5\omega_u = 0,362$	0	0,855	0,0108	-0,111	30	1,7	2,9
$0,7\omega_u = 0,507$	0	0,583	0,00734	-0,148	93	7,5	22
$0,9\omega_u = 0,652$	0	0,218	0,00273	-0,0917	1003	104	65

Tabela 136 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_9(s)$  com  $n = 5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0725$	0	1,12	0,0993	-0,00377	2,5	0,290	1,81	2282	2,6	0,68
$0,3\omega_u = 0,217$	0	1,06	0,0913	-0,0321	2,5	0,290	1,81	153	5,3	3,1
$0,5\omega_u = 0,362$	0	0,931	0,0753	-0,0781	2,5	0,290	1,81	89	5,2	1,0
$0,7\omega_u = 0,507$	0	0,699	0,0512	-0,115	2,5	0,290	1,81	66	5,3	0
$0,9\omega_u = 0,652$	0	0,303	0,0191	-0,0824	2,5	0,290	1,81	186	19	3,8

Tabela 137 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_9(s)$  com  $n = 8$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0416$	0	0,740	0,0161	-0,00127	550	3,6	11
$0,3\omega_u = 0,125$	0	0,681	0,0148	-0,0105	174	3,5	6,5
$0,5\omega_u = 0,208$	0	0,563	0,00408	-0,0241	64	2,1	0,65
$0,7\omega_u = 0,291$	0	0,384	0,00277	-0,0322	136	6,3	15
$0,9\omega_u = 0,374$	0	0,144	0,00103	-0,0199	1630	97	63

Tabela 138 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_9(s)$  com  $n = 8$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0416$	0	0,739	0,0376	-0,000818	2,5	0,166	1,04	549	3,6	0,65
$0,3\omega_u = 0,125$	0	0,699	0,0345	-0,00697	2,5	0,166	1,04	392	7,8	3,6
$0,5\omega_u = 0,208$	0	0,613	0,0285	-0,0170	2,5	0,166	1,04	216	7,2	1,3
$0,7\omega_u = 0,291$	0	0,460	0,0193	-0,0250	2,5	0,166	1,04	138	6,4	0
$0,9\omega_u = 0,374$	0	0,199	0,00721	-0,0179	2,5	0,166	1,04	325	19	3,2

Os processos nesta família pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_{10}(s)$  com  $T = 0,005$ , com  $T = 0,1$  e com  $T = 10$  são apresentados nas tabelas 139 a 144.

Tabela 139 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{10}(s)$  com  $T = 0,005$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 19,7$	0	154	$1,59 \times 10^3$	$-5,91 \times 10^4$	0,17	0,53	0,98
$0,3\omega_u = 59,0$	0	142	$1,46 \times 10^3$	$-4,89 \times 10^5$	0,14	1,3	3,6
$0,5\omega_u = 98,3$	0	118	402	$-1,12 \times 10^6$	0,30	4,6	26
$0,7\omega_u = 138$	0	80,1	273	$-1,50 \times 10^6$	0,84	18	49
$0,9\omega_u = 177$	0	29,9	102	$-9,28 \times 10^5$	7,5	211	79

Tabela 140 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{10}(s)$  com  $T = 0,005$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 19,7$	0	154	$3,7 \times 10^3$	$-3,81 \times 10^4$	2,5	78,6	492	0,23	0,73	0,75
$0,3\omega_u = 59,0$	0	146	$3,4 \times 10^3$	$-3,25 \times 10^5$	2,5	78,6	492	0,19	1,8	0,020
$0,5\omega_u = 98,3$	0	128	$2,81 \times 10^3$	$-7,91 \times 10^5$	2,5	78,6	492	0,17	2,7	0,092
$0,7\omega_u = 138$	0	96,1	$1,91 \times 10^3$	$-1,16 \times 10^6$	2,5	78,6	492	0,22	4,9	2,1
$0,9\omega_u = 177$	0	41,6	711	$-8,34 \times 10^5$	2,5	78,6	492	0,73	21	6,8

Tabela 141 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{10}(s)$  com  $T = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,07$	0	9,27	5,22	-10,6	9,8	1,7	9,0
$0,3\omega_u = 3,22$	0	8,53	4,80	-87,7	3,3	1,7	2,2
$0,5\omega_u = 5,37$	0	7,06	1,32	-202	4,6	3,9	24
$0,7\omega_u = 7,52$	0	4,81	0,898	-270	14	16	46
$0,9\omega_u = 9,67$	0	1,80	0,334	-167	129	199	78

Tabela 142 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{10}(s)$  com  $T = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,07$	0	9,26	12,2	-6,84	2,5	4,30	26,9	3,4	0,58	0,39
$0,3\omega_u = 3,22$	0	8,76	11,2	-58,3	2,5	4,30	26,9	2,9	1,5	0,029
$0,5\omega_u = 5,37$	0	7,68	9,21	-142	2,5	4,30	26,9	2,7	2,3	0
$0,7\omega_u = 7,52$	0	5,77	6,26	-209	2,5	4,30	26,9	3,8	4,5	1,2
$0,9\omega_u = 9,67$	0	2,50	2,33	-150	2,5	4,30	26,9	13	20	6,5

Tabela 143 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{10}(s)$  com  $T = 10$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0445$	0	9,14	0,213	-0,0179	240	1,7	9,9
$0,3\omega_u = 0,134$	0	8,41	0,196	-0,149	119	2,5	4,4
$0,5\omega_u = 0,223$	0	6,96	0,0539	-0,342	156	5,5	33
$0,7\omega_u = 0,312$	0	4,74	0,0367	-0,456	452	22	54
$0,9\omega_u = 0,401$	0	1,77	0,0137	-0,282	4041	258	81

Tabela 144 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{10}(s)$  com  $T = 10$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0445$	0	9,13	0,497	-0,0116	2,5	0,178	1,11	96	0,68	1,2
$0,3\omega_u = 0,134$	0	8,64	0,457	-0,0986	2,5	0,178	1,11	70	1,5	0,33
$0,5\omega_u = 0,223$	0	7,57	0,376	-0,240	2,5	0,178	1,11	48	1,7	0,085
$0,7\omega_u = 0,312$	0	5,69	0,256	-0,354	2,5	0,178	1,11	99	4,9	2,8
$0,9\omega_u = 0,401$	0	2,46	0,0953	-0,253	2,5	0,178	1,11	324	21	7,2

Tabela 145 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{11}(s)$  com  $T = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,06$	0	6,24	3,45	-6,88	8,1	1,4	9,9
$0,3\omega_u = 3,17$	0	5,74	3,17	-57,0	2,5	1,3	2,1
$0,5\omega_u = 5,28$	0	4,75	0,873	-131	3,1	2,6	16
$0,7\omega_u = 7,39$	0	3,24	0,594	-175	9,9	12	37
$0,9\omega_u = 9,50$	0	1,21	0,221	-108	99	149	73

Tabela 146 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{11}(s)$  com  $T = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,06$	0	6,23	8,04	-4,44	2,5	4,22	26,4	3,2	0,54	0,096
$0,3\omega_u = 3,17$	0	5,90	7,39	-37,8	2,5	4,22	26,4	4,0	2,0	0,022
$0,5\omega_u = 5,28$	0	5,17	6,09	-92,1	2,5	4,22	26,4	3,5	2,9	0
$0,7\omega_u = 7,39$	0	3,88	4,14	-136	2,5	4,22	26,4	3,9	4,6	0,076
$0,9\omega_u = 9,50$	0	1,68	1,54	-97,1	2,5	4,22	26,4	13	20	5,5

### D.5.2 Com um polo real e com dois polos complexos

A função de transferência da família de processos de terceira ordem com um polo real e com dois polos complexos é dada por:

$$G_{11}(s) = \frac{1}{(s+1)((sT)^2 + 1,4Ts + 1)}, \quad T = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1].$$

Os processos nesta família pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_{11}(s)$  com  $T = 0,1$ , com  $T = 0,5$  e com  $T = 1$  são apresentados nas tabelas 145 a 150.

### D.6 Processos de quarta ordem com polos diferentes

A função de transferência da família de processos de quarta ordem com polos reais diferentes é dada por:

$$G_{12}(s) = \frac{1}{(s+1)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}$$

$$\alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1].$$

Tabela 147 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{11}(s)$  com  $T = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,258$	0	2,12	0,287	-0,14	55	2,3	8,9
$0,3\omega_u = 0,775$	0	1,95	0,263	-1,16	18	2,3	10
$0,5\omega_u = 1,29$	0	1,61	0,0725	-2,66	12	2,5	16
$0,7\omega_u = 1,81$	0	1,10	0,0493	-3,56	37	11	34
$0,9\omega_u = 2,32$	0	0,411	0,0184	-2,20	375	139	71

Tabela 148 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{11}(s)$  com  $T = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,258$	0	2,12	0,668	-0,0903	2,5	1,03	6,46	40	1,7	0,85
$0,3\omega_u = 0,775$	0	2,00	0,614	-0,769	2,5	1,03	6,46	26	3,3	2,2
$0,5\omega_u = 1,29$	0	1,76	0,506	-1,87	2,5	1,03	6,46	17	3,6	0,71
$0,7\omega_u = 1,81$	0	1,32	0,344	-2,76	2,5	1,03	6,46	13	3,7	0
$0,9\omega_u = 2,32$	0	0,571	0,128	-1,97	2,5	1,03	6,46	52	19	5,4

Tabela 149 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{11}(s)$  com  $T = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,153$	0	1,85	0,148	-0,0429	95	2,3	11
$0,3\omega_u = 0,460$	0	1,70	0,136	-0,355	38	2,8	12
$0,5\omega_u = 0,767$	0	1,40	0,0375	-0,817	21	2,5	17
$0,7\omega_u = 1,07$	0	0,957	0,0255	-1,09	65	11	35
$0,9\omega_u = 1,38$	0	0,358	0,0095	-0,675	653	144	71

Tabela 150 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{11}(s)$  com  $T = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,153$	0	1,84	0,345	-0,0277	2,5	0,613	3,83	69	1,7	0,96
$0,3\omega_u = 0,460$	0	1,74	0,317	-0,236	2,5	0,613	3,83	52	3,8	3,5
$0,5\omega_u = 0,767$	0	1,53	0,262	-0,575	2,5	0,613	3,83	30	3,7	1,4
$0,7\omega_u = 1,07$	0	1,15	0,178	-0,846	2,5	0,613	3,83	21	3,6	0
$0,9\omega_u = 1,38$	0	0,497	0,0663	-0,606	2,5	0,613	3,83	87	19	5,5

Os processos nesta família pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_{12}(s)$  com  $\alpha = 0,1$ , com  $\alpha = 0,5$  e com  $\alpha = 1$  são apresentados nas tabelas 151 a 156.

Tabela 151 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{12}(s)$  com  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 3,04$	0	40,9	65,0	-373	3,7	1,8	2,8
$0,3\omega_u = 9,11$	0	37,6	59,7	$-3,09 \times 10^3$	1,8	2,6	8,9
$0,5\omega_u = 15,2$	0	31,1	16,4	$-7,10 \times 10^3$	2,7	6,6	36
$0,7\omega_u = 21,3$	0	21,2	11,2	$-9,48 \times 10^3$	8,1	27	58
$0,9\omega_u = 27,3$	0	7,93	4,17	$-5,86 \times 10^3$	68	295	83

Tabela 152 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{12}(s)$  com  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 3,04$	0	40,8	151	-241	2,5	12,1	75,9	0,54	0,26	0,10
$0,3\omega_u = 9,11$	0	38,6	139	$-2,05 \times 10^3$	2,5	12,1	75,9	0,67	0,97	0,30
$0,5\omega_u = 15,2$	0	33,8	115	$-4,99 \times 10^3$	2,5	12,1	75,9	0,86	2,1	0,95
$0,7\omega_u = 21,3$	0	25,4	78,0	$-7,35 \times 10^3$	2,5	12,1	75,9	1,6	5,3	3,8
$0,9\omega_u = 27,3$	0	11,0	29,1	$-5,26 \times 10^3$	2,5	12,1	75,9	4,9	21	7,5

Tabela 153 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{12}(s)$  com  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,279$	0	2,60	0,380	-0,201	40	1,8	11
$0,3\omega_u = 0,838$	0	2,39	0,349	-1,66	16	2,2	8,7
$0,5\omega_u = 1,40$	0	1,98	0,0961	-3,82	12	2,6	18
$0,7\omega_u = 1,96$	0	1,35	0,0653	-5,10	36	11	36
$0,9\omega_u = 2,51$	0	0,504	0,0243	-3,15	354	142	72

Tabela 154 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{12}(s)$  com  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,279$	0	2,59	0,885	-0,129	2,5	1,12	6,98	26	1,2	0,70
$0,3\omega_u = 0,838$	0	2,45	0,813	-1,10	2,5	1,12	6,98	20	2,7	1,0
$0,5\omega_u = 1,40$	0	2,15	0,670	-2,68	2,5	1,12	6,98	14	3,0	0,073
$0,7\omega_u = 1,96$	0	1,62	0,456	-3,95	2,5	1,12	6,98	15	4,6	0,061
$0,9\omega_u = 2,51$	0	0,700	0,170	-2,83	2,5	1,12	6,98	49	20	5,3

Tabela 155 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{12}(s)$  com  $\alpha = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0993$	0	1,55	0,0807	-0,0152	142	2,2	12
$0,3\omega_u = 0,298$	0	1,43	0,0742	-0,125	55	2,6	9,2
$0,5\omega_u = 0,497$	0	1,18	0,0204	-0,288	22	1,7	11
$0,7\omega_u = 0,695$	0	0,805	0,0139	-0,385	79	8,7	28
$0,9\omega_u = 0,894$	0	0,301	0,00517	-0,238	822	117	67

Tabela 156 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{12}(s)$  com  $\alpha = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0993$	0	1,55	0,188	-0,00978	2,5	0,397	2,48	134	2,1	0,78
$0,3\omega_u = 0,298$	0	1,47	0,173	-0,0833	2,5	0,397	2,48	90	4,3	2,5
$0,5\omega_u = 0,497$	0	1,29	0,142	-0,203	2,5	0,397	2,48	52	4,1	0,70
$0,7\omega_u = 0,695$	0	0,966	0,0969	-0,299	2,5	0,397	2,48	39	4,3	0
$0,9\omega_u = 0,894$	0	0,418	0,0361	-0,214	2,5	0,397	2,48	135	19	4,5

Tabela 157 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{13}(s)$  com  $\tau = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,65$	0	5,29	4,56	-14,2	4,5	1,2	7,2
$0,3\omega_u = 4,94$	0	4,86	4,19	-117	0,93	0,73	0,75
$0,5\omega_u = 8,23$	0	4,02	1,15	-270	2,4	3,1	9,6
$0,7\omega_u = 11,5$	0	2,74	0,784	-360	7,4	14	34
$0,9\omega_u = 14,8$	0	1,03	0,292	-223	88	208	77

Tabela 158 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{13}(s)$  com  $\tau = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,65$	0	5,28	10,6	-9,15	2,5	6,58	41,1	3,0	0,79	0
$0,3\omega_u = 4,94$	0	5,00	9,76	-77,9	2,5	6,58	41,1	4,2	3,3	0
$0,5\omega_u = 8,23$	0	4,38	8,04	-190	2,5	6,58	41,1	4,0	5,2	0
$0,7\omega_u = 11,5$	0	3,29	5,47	-279	2,5	6,58	41,1	4,4	8,1	0,34
$0,9\omega_u = 14,8$	0	1,42	2,04	-200	2,5	6,58	41,1	12	27	5,8

## D.7 Processos de primeira ordem com atraso de transporte

A função de transferência da família de processos de primeira ordem com atraso de transporte é dada por:

$$G_{13}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s + 1}, \quad \tau = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1].$$

Os processos nesta família pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_{13}(s)$  com  $\tau = 0,1$ , com  $\tau = 0,5$  e com  $\tau = 1$  são apresentados nas tabelas 157 a 162.

## D.8 Processos de segunda ordem com atraso de transporte

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com polos iguais e com atraso de transporte é dada por:

$$G_{14}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(s + 1)^2}, \quad \tau = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1].$$

Tabela 159 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{13}(s)$  com  $\tau = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,378$	0	1,28	0,253	-0,181	34	2,1	8,9
$0,3\omega_u = 1,13$	0	1,18	0,232	-1,49	9,8	1,8	2,2
$0,5\omega_u = 1,89$	0	0,973	0,064	-3,44	7,6	2,3	2,9
$0,7\omega_u = 2,64$	0	0,663	0,0435	-4,59	27	11	28
$0,9\omega_u = 3,40$	0	0,248	0,0162	-2,84	460	249	80

Tabela 160 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{13}(s)$  com  $\tau = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,378$	0	1,28	0,589	-0,116	2,5	1,51	9,44	34	2,1	0,13
$0,3\omega_u = 1,13$	0	1,21	0,542	-0,992	2,5	1,51	9,44	25	4,6	0,15
$0,5\omega_u = 1,89$	0	1,06	0,446	-2,42	2,5	1,51	9,44	19	5,8	0
$0,7\omega_u = 2,64$	0	0,796	0,304	-3,56	2,5	1,51	9,44	18	7,7	0,031
$0,9\omega_u = 3,40$	0	0,345	0,113	-2,55	2,5	1,51	9,44	49	27	6,0

Tabela 161 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{13}(s)$  com  $\tau = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,211$	0	0,796	0,0879	-0,035	92	3,1	9,4
$0,3\omega_u = 0,633$	0	0,732	0,0808	-0,290	27	2,8	3,2
$0,5\omega_u = 1,05$	0	0,606	0,0222	-0,667	10	1,7	0
$0,7\omega_u = 1,48$	0	0,413	0,0151	-0,891	43	10	23
$0,9\omega_u = 1,90$	0	0,154	0,00563	-0,550	997	301	84

Tabela 162 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{13}(s)$  com  $\tau = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,211$	0	0,795	0,205	-0,0226	2,5	0,843	5,27	105	3,5	0,30
$0,3\omega_u = 0,633$	0	0,752	0,188	-0,193	2,5	0,843	5,27	66	6,6	1,1
$0,5\omega_u = 1,05$	0	0,659	0,155	-0,469	2,5	0,843	5,27	39	6,5	0,064
$0,7\omega_u = 1,48$	0	0,495	0,105	-0,690	2,5	0,843	5,27	33	7,7	0
$0,9\omega_u = 1,90$	0	0,214	0,0393	-0,494	2,5	0,843	5,27	85	26	6,2

Os processos nesta família pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_{14}(s)$  com  $\tau = 0,1$  e com  $\tau = 0,5$  são apresentados nas tabelas 163 e 166, enquanto os parâmetros dos controladores PRs e PRAs, em conjunto com as medidas de desempenho obtidos para  $G_{14}(s)$  com  $\tau = 1$  foram apresentados na Seção 4.3.1.

Tabela 163 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{14}(s)$  com  $\tau = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,423$	0	7,55	1,67	-1,34	23	1,5	11
$0,3\omega_u = 1,27$	0	6,94	1,54	-11,1	11	2,2	4,1
$0,5\omega_u = 2,11$	0	5,75	0,423	-25,4	14	4,6	28
$0,7\omega_u = 2,96$	0	3,92	0,288	-34,0	39	18	49
$0,9\omega_u = 3,81$	0	1,46	0,107	-21,0	296	180	76

Tabela 164 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{14}(s)$  com  $\tau = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,423$	0	7,54	3,90	-0,862	2,5	1,69	10,6	9,9	0,67	0,86
$0,3\omega_u = 1,27$	0	7,13	3,58	-7,35	2,5	1,69	10,6	7,5	1,5	0,27
$0,5\omega_u = 2,11$	0	6,25	2,95	-17,9	2,5	1,69	10,6	6,4	2,1	0,01
$0,7\omega_u = 2,96$	0	4,70	2,01	-26,3	2,5	1,69	10,6	11	5,0	2,0
$0,9\omega_u = 3,81$	0	2,03	0,748	-18,9	2,5	1,69	10,6	34	21	6,3

Tabela 165 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{14}(s)$  com  $\tau = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,190$	0	1,75	0,174	-0,0626	74	2,2	9,9
$0,3\omega_u = 0,570$	0	1,61	0,160	-0,518	23	2,1	7,8
$0,5\omega_u = 0,950$	0	1,33	0,0441	-1,190	13	2,0	12
$0,7\omega_u = 1,33$	0	0,909	0,0300	-1,590	48	10	31
$0,9\omega_u = 1,71$	0	0,340	0,0112	-0,983	471	128	69

Tabela 166 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{14}(s)$  com  $\tau = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,190$	0	1,75	0,406	-0,0404	2,5	0,760	4,75	54	1,6	0,56
$0,3\omega_u = 0,570$	0	1,66	0,373	-0,344	2,5	0,760	4,75	40	3,7	1,1
$0,5\omega_u = 0,950$	0	1,45	0,308	-0,838	2,5	0,760	4,75	26	4,0	0,06
$0,7\omega_u = 1,33$	0	1,09	0,209	-1,23	2,5	0,760	4,75	25	5,2	0
$0,9\omega_u = 1,71$	0	0,472	0,078	-0,883	2,5	0,760	4,75	76	21	4,7

## D.9 Processos de primeira e segunda ordem com um polo na origem e com atraso de transporte

A função de transferência da família de processos de primeira e segunda ordem com um polo na origem e com atraso de transporte é dada por:

$$G_{15}(s) = \frac{e^{-sL_1}}{s(T_1s + 1)}, \quad T_1 + L_1 = 1, \quad L_1 = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1].$$



Tabela 167 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{15}(s)$  com  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,921$	0	34,4	16,6	-28,9	25	3,7	12
$0,3\omega_u = 2,76$	0	31,7	15,3	-239	60	26	37
$0,5\omega_u = 4,60$	0	26,2	4,20	-550	34	25	52
$0,7\omega_u = 6,44$	0	17,9	2,86	-735	99	101	75
$0,9\omega_u = 8,29$	0	6,68	1,06	-454	953	1256	93

Tabela 168 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{15}(s)$  com  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,921$	0	34,4	38,7	-18,6	2,5	3,68	23,0	1,5	0,23	0,98
$0,3\omega_u = 2,76$	0	32,6	35,6	-159	2,5	3,68	23,0	3,6	1,6	7,2
$0,5\omega_u = 4,60$	0	28,5	29,3	-387	2,5	3,68	23,0	3,7	2,7	11
$0,7\omega_u = 6,44$	0	21,4	19,9	-570	2,5	3,68	23,0	6,0	6,2	9,2
$0,9\omega_u = 8,29$	0	9,28	7,43	-408	2,5	3,68	23,0	17	22	9,2

Tabela 169 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{15}(s)$  com  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,196$	0	1,31	0,134	-0,0494	14	0,43	0,28
$0,3\omega_u = 0,587$	0	1,20	0,123	-0,409	15	1,4	2
$0,5\omega_u = 0,978$	0	0,994	0,0338	-0,940	26	4,1	25
$0,7\omega_u = 1,37$	0	0,677	0,0230	-1,26	73	16	45
$0,9\omega_u = 1,76$	0	0,253	0,00857	-0,776	549	154	74

Tabela 170 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{15}(s)$  com  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,196$	0	1,30	0,311	-0,0319	2,5	0,782	4,89	27	0,85	1,1
$0,3\omega_u = 0,587$	0	1,23	0,286	-0,272	2,5	0,782	4,89	20	1,8	0,071
$0,5\omega_u = 0,978$	0	1,08	0,236	-0,661	2,5	0,782	4,89	18	2,8	0,17
$0,7\omega_u = 1,37$	0	0,812	0,160	-0,974	2,5	0,782	4,89	25	5,5	1,6
$0,9\omega_u = 1,76$	0	0,352	0,0598	-0,697	2,5	0,782	4,89	74	21	5,9

Os processos nesta família pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_{15}(s)$  com  $L_1 = 0,01$ , com  $L_1 = 0,3$  e com  $L_1 = 1$  são apresentados nas tabelas 167 a 172.

Tabela 171 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{15}(s)$  com  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,157$	0	0,503	0,0414	-0,0123	18	0,45	0,42
$0,3\omega_u = 0,471$	0	0,463	0,0380	-0,102	13	0,95	1,6
$0,5\omega_u = 0,785$	0	0,383	0,0105	-0,234	25	3,2	12
$0,7\omega_u = 1,10$	0	0,261	0,00712	-0,312	86	15	36
$0,9\omega_u = 1,41$	0	0,0976	0,00265	-0,193	875	197	76

Tabela 172 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{15}(s)$  com  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,157$	0	0,502	0,0964	-0,00793	2,5	0,628	3,93	54	1,4	2,7
$0,3\omega_u = 0,471$	0	0,475	0,0886	-0,0676	2,5	0,628	3,93	49	3,7	0,12
$0,5\omega_u = 0,785$	0	0,417	0,0731	-0,164	2,5	0,628	3,93	45	5,7	0,1
$0,7\omega_u = 1,10$	0	0,313	0,0497	-0,242	2,5	0,628	3,93	49	8,6	0,96
$0,9\omega_u = 1,41$	0	0,136	0,0185	-0,173	2,5	0,628	3,93	121	27	6

Tabela 173 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 1$  e  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,31$	0	69,4	47,6	-118	11	2,2	7,2
$0,3\omega_u = 3,93$	0	63,9	43,7	-975	14	9,0	26
$0,5\omega_u = 6,54$	0	52,8	12,0	$-2,24 \times 10^3$	15	16	50
$0,7\omega_u = 9,16$	0	36,0	8,19	$-2,99 \times 10^3$	43	63	70
$0,9\omega_u = 11,8$	0	13,5	3,05	$-1,85 \times 10^3$	262	500	90

## D.10 Processos de primeira e segunda ordem com polos diferentes e com atraso de transporte

A função de transferência da família de processos de primeira e segunda ordem com polos diferentes e que possuem atraso de transporte é dada por:

$$G_{16}(s) = \frac{e^{-sL_1}}{(Ts + 1)(T_1s + 1)}, \quad T_1 + L_1 = 1, \quad T = [1; 2; 5; 10]$$

$$L_1 = [0,01; 0,02; 0,05; 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1]$$

Os processos nesta família pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_{16}(s)$  com  $T = 1$ , com  $T = 2$ , com  $T = 5$  e com  $T = 10$ , para os quais também considera-se  $L_1 = 0,01$ ,  $L_1 = 0,3$  e  $L_1 = 1$ , são apresentados nas tabelas 173 a 196.

Tabela 174 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 1$  e  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,31$	0	69,3	111	-76	2,5	5,24	32,7	0,58	0,12	0,16
$0,3\omega_u = 3,93$	0	65,6	102	-647	2,5	5,24	32,7	2,4	1,5	1,1
$0,5\omega_u = 6,54$	0	57,5	84,0	$-1,58 \times 10^3$	2,5	5,24	32,7	2,5	2,6	8,5
$0,7\omega_u = 9,16$	0	43,2	57,1	$-2,32 \times 10^3$	2,5	5,24	32,7	3,9	5,8	7,1
$0,9\omega_u = 11,8$	0	18,7	21,3	$-1,66 \times 10^3$	2,5	5,24	32,7	12	22	8,7

Tabela 175 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 1$  e  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,270$	0	2,38	0,337	-0,172	40	1,7	9,4
$0,3\omega_u = 0,811$	0	2,19	0,309	-1,42	12	1,6	8,1
$0,5\omega_u = 1,35$	0	1,81	0,0851	-3,27	11	2,4	17
$0,7\omega_u = 1,89$	0	1,23	0,0579	-4,37	36	11	35
$0,9\omega_u = 2,43$	0	0,461	0,0216	-2,70	341	132	70

Tabela 176 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 1$  e  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,270$	0	2,37	0,784	-0,111	2,5	1,08	6,76	36	1,6	0,59
$0,3\omega_u = 0,811$	0	2,25	0,721	-0,945	2,5	1,08	6,76	24	3,1	0,69
$0,5\omega_u = 1,35$	0	1,97	0,594	-2,30	2,5	1,08	6,76	16	3,4	0,0097
$0,7\omega_u = 1,89$	0	1,48	0,404	-3,39	2,5	1,08	6,76	17	5,1	0,082
$0,9\omega_u = 2,43$	0	0,641	0,150	-2,43	2,5	1,08	6,76	54	21	5,0

Tabela 177 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 1$  e  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,211$	0	0,796	0,0879	-0,0350	92	3,1	9,4
$0,3\omega_u = 0,633$	0	0,732	0,0808	-0,290	27	2,8	3,2
$0,5\omega_u = 1,05$	0	0,606	0,0222	-0,667	10	1,7	0
$0,7\omega_u = 1,48$	0	0,413	0,0151	-0,891	43	10	23
$0,9\omega_u = 1,90$	0	0,154	0,00563	-0,550	996	301	84

Tabela 178 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 1$  e  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,211$	0	0,795	0,205	-0,0226	2,5	0,843	5,27	105	3,5	0,3
$0,3\omega_u = 0,633$	0	0,752	0,188	-0,193	2,5	0,843	5,27	66	6,6	1,1
$0,5\omega_u = 1,05$	0	0,659	0,155	-0,469	2,5	0,843	5,27	39	6,5	0,064
$0,7\omega_u = 1,48$	0	0,495	0,105	-0,690	2,5	0,843	5,27	33	7,7	0
$0,9\omega_u = 1,90$	0	0,214	0,0393	-0,494	2,5	0,843	5,27	85	26	6,2

Tabela 179 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 2$  e  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,13$	0	104	61,5	-132	14	2,5	9,1
$0,3\omega_u = 3,40$	0	95,5	56,6	$-1,09 \times 10^3$	24	13	30
$0,5\omega_u = 5,66$	0	79,0	15,6	$-2,51 \times 10^3$	21	19	51
$0,7\omega_u = 7,92$	0	53,9	10,6	$-3,35 \times 10^3$	60	76	72
$0,9\omega_u = 10,2$	0	20,1	3,95	$-2,07 \times 10^3$	514	833	91

Tabela 180 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 2$  e  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,13$	0	104	143	-85	2,5	4,53	28,3	1,1	0,20	0
$0,3\omega_u = 3,40$	0	98,1	132	-724	2,5	4,53	28,3	2,8	1,5	3,6
$0,5\omega_u = 5,66$	0	86,0	109	$-1,76 \times 10^3$	2,5	4,53	28,3	3,0	2,7	9,7
$0,7\omega_u = 7,92$	0	64,6	73,9	$-2,6 \times 10^3$	2,5	4,53	28,3	4,9	6,1	7,9
$0,9\omega_u = 10,2$	0	28,0	27,5	$-1,86 \times 10^3$	2,5	4,53	28,3	13	22	8,9

Tabela 181 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 2$  e  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,238$	0	3,66	0,456	-0,205	48	1,8	11
$0,3\omega_u = 0,713$	0	3,37	0,419	-1,69	15	1,7	5,6
$0,5\omega_u = 1,19$	0	2,79	0,115	-3,90	16	3,0	20
$0,7\omega_u = 1,66$	0	1,90	0,0784	-5,21	47	13	39
$0,9\omega_u = 2,14$	0	0,711	0,0292	-3,22	406	138	71

Tabela 182 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 2$  e  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,238$	0	3,66	1,06	-0,132	2,5	0,950	5,94	29	1,1	0,48
$0,3\omega_u = 0,713$	0	3,46	0,976	-1,13	2,5	0,950	5,94	18	2,1	0,19
$0,5\omega_u = 1,19$	0	3,03	0,805	-2,74	2,5	0,950	5,94	15	2,9	0
$0,7\omega_u = 1,66$	0	2,28	0,547	-4,03	2,5	0,950	5,94	19	5,1	0,31
$0,9\omega_u = 2,14$	0	0,988	0,204	-2,89	2,5	0,950	5,94	61	21	5,2

Tabela 183 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 2$  e  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,189$	0	1,28	0,126	-0,0451	69	2,1	8,9
$0,3\omega_u = 0,567$	0	1,18	0,116	-0,374	20	1,8	2,2
$0,5\omega_u = 0,944$	0	0,973	0,0320	-0,859	15	2,3	2,9
$0,7\omega_u = 1,32$	0	0,663	0,0218	-1,15	54	11	28
$0,9\omega_u = 1,70$	0	0,248	0,0081	-0,709	920	249	80

Tabela 184 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 2$  e  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,189$	0	1,28	0,295	-0,0291	2,5	0,755	4,72	69	2,1	0,13
$0,3\omega_u = 0,567$	0	1,21	0,271	-0,248	2,5	0,755	4,72	51	4,6	0,15
$0,5\omega_u = 0,944$	0	1,06	0,223	-0,604	2,5	0,755	4,72	39	5,8	0
$0,7\omega_u = 1,32$	0	0,796	0,152	-0,889	2,5	0,755	4,72	36	7,7	0,031
$0,9\omega_u = 1,70$	0	0,345	0,0565	-0,637	2,5	0,755	4,72	99	27	6

Tabela 185 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 5$  e  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,01$	0	207	109	-209	19	3,0	11
$0,3\omega_u = 3,03$	0	190	100	$-1,73 \times 10^3$	38	18	34
$0,5\omega_u = 5,05$	0	157	27,6	$-3,97 \times 10^3$	27	22	51
$0,7\omega_u = 7,07$	0	107	18,8	$-5,30 \times 10^3$	79	89	74
$0,9\omega_u = 9,09$	0	40,1	7,00	$-3,28 \times 10^3$	706	1022	92

Tabela 186 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 5$  e  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 1,01$	0	206	255	-135	2,5	4,04	25,2	1,3	0,21	0,33
$0,3\omega_u = 3,03$	0	195	234	$-1,15 \times 10^3$	2,5	4,04	25,2	3,2	1,6	5,5
$0,5\omega_u = 5,05$	0	171	193	$-2,79 \times 10^3$	2,5	4,04	25,2	3,4	2,7	10
$0,7\omega_u = 7,07$	0	129	131	$-4,11 \times 10^3$	2,5	4,04	25,2	5,5	6,1	8,6
$0,9\omega_u = 9,09$	0	55,7	48,9	$-2,94 \times 10^3$	2,5	4,04	25,2	15	22	9,1

Tabela 187 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 5$  e  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,214$	0	7,57	0,848	-0,343	45	1,5	9,5
$0,3\omega_u = 0,641$	0	6,96	0,779	-2,84	11	1,1	4,5
$0,5\omega_u = 1,07$	0	5,76	0,214	-6,52	20	3,4	22
$0,7\omega_u = 1,50$	0	3,93	0,146	-8,71	58	14	42
$0,9\omega_u = 1,92$	0	1,47	0,0543	-5,38	476	146	73

Tabela 188 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 5$  e  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,214$	0	7,56	1,98	-0,221	2,5	0,855	5,35	16	0,55	0,10
$0,3\omega_u = 0,641$	0	7,15	1,82	-1,88	2,5	0,855	5,35	18	1,9	0
$0,5\omega_u = 1,07$	0	6,27	1,50	-4,59	2,5	0,855	5,35	16	2,8	0
$0,7\omega_u = 1,50$	0	4,71	1,02	-6,75	2,5	0,855	5,35	23	5,4	0,68
$0,9\omega_u = 1,92$	0	2,04	0,379	-4,83	2,5	0,855	5,35	68	21	5,5

Tabela 189 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 5$  e  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,171$	0	2,78	0,249	-0,0807	58	1,6	6,6
$0,3\omega_u = 0,514$	0	2,55	0,229	-0,668	14	1,2	1,5
$0,5\omega_u = 0,857$	0	2,11	0,0630	-1,54	20	2,7	7,3
$0,7\omega_u = 1,20$	0	1,44	0,0429	-2,05	69	13	32
$0,9\omega_u = 1,54$	0	0,538	0,0160	-1,27	887	218	78

Tabela 190 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 5$  e  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,171$	0	2,77	0,580	-0,0521	2,5	0,686	4,29	36	0,98	0
$0,3\omega_u = 0,514$	0	2,62	0,534	-0,444	2,5	0,686	4,29	42	3,4	0
$0,5\omega_u = 0,857$	0	2,30	0,440	-1,08	2,5	0,686	4,29	39	5,3	0
$0,7\omega_u = 1,20$	0	1,73	0,299	-1,59	2,5	0,686	4,29	42	8,1	0,21
$0,9\omega_u = 1,54$	0	0,748	0,111	-1,14	2,5	0,686	4,29	11	27	5,8

Tabela 191 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 10$  e  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,967$	0	379	192	-351	21	3,3	11
$0,3\omega_u = 2,90$	0	349	177	$-2,91 \times 10^3$	47	22	35
$0,5\omega_u = 4,84$	0	289	48,6	$-6,69 \times 10^3$	31	24	52
$0,7\omega_u = 6,77$	0	197	33,1	$-8,94 \times 10^3$	88	95	75
$0,9\omega_u = 8,71$	0	73,6	12,3	$-5,52 \times 10^3$	829	1149	92

Tabela 192 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 10$  e  $L_1 = 0,01$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,967$	0	379	448	-227	2,5	3,87	24,2	1,4	0,22	0,63
$0,3\omega_u = 2,90$	0	359	412	$-1,93 \times 10^3$	2,5	3,87	24,2	3,4	1,6	6,4
$0,5\omega_u = 4,84$	0	314	339	$-4,70 \times 10^3$	2,5	3,87	24,2	3,5	2,7	11
$0,7\omega_u = 6,77$	0	236	231	$-6,93 \times 10^3$	2,5	3,87	24,2	5,7	6,2	8,9
$0,9\omega_u = 8,71$	0	102	86,0	$-4,96 \times 10^3$	2,5	3,87	24,2	16	22	9,1

Tabela 193 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 10$  e  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,205$	0	14,1	1,51	-0,586	59	1,9	6,4
$0,3\omega_u = 0,615$	0	13,0	1,39	-4,85	12	1,1	3,9
$0,5\omega_u = 1,02$	0	10,7	0,383	-11,2	21	3,4	23
$0,7\omega_u = 1,43$	0	7,31	0,260	-14,9	64	15	44
$0,9\omega_u = 1,84$	0	2,73	0,097	-9,21	508	149	73

Tabela 194 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 10$  e  $L_1 = 0,3$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,205$	0	14,1	3,53	-0,378	2,5	0,820	5,12	12	0,39	0
$0,3\omega_u = 0,615$	0	13,3	3,24	-3,22	2,5	0,820	5,12	19	1,8	0
$0,5\omega_u = 1,02$	0	11,7	2,67	-7,84	2,5	0,820	5,12	17	2,8	0
$0,7\omega_u = 1,43$	0	8,77	1,82	-11,5	2,5	0,820	5,12	24	5,5	0,91
$0,9\omega_u = 1,84$	0	3,8	0,677	-8,27	2,5	0,820	5,12	71	21	5,6

Tabela 195 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 10$  e  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p_1}$	$K_{r_{11}}$	$K_{r_{21}}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,165$	0	5,29	0,456	-0,142	45	1,2	7,2
$0,3\omega_u = 0,494$	0	4,86	0,419	-1,17	9,3	0,73	0,75
$0,5\omega_u = 0,823$	0	4,02	0,115	-2,70	24	3,1	9,6
$0,7\omega_u = 1,15$	0	2,74	0,0784	-3,60	74	14	34
$0,9\omega_u = 1,48$	0	1,03	0,0292	-2,23	878	207	77

Tabela 196 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{16}(s)$  com  $T = 10$  e  $L_1 = 1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r_1}$	$K_{r_2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,165$	0	5,28	1,06	-0,0914	2,5	0,658	4,11	30	0,79	0
$0,3\omega_u = 0,494$	0	5,00	0,976	-0,779	2,5	0,658	4,11	42	3,3	0
$0,5\omega_u = 0,823$	0	4,38	0,804	-1,90	2,5	0,658	4,11	40	5,2	0
$0,7\omega_u = 1,15$	0	3,29	0,547	-2,79	2,5	0,658	4,11	44	8,1	0,34
$0,9\omega_u = 1,48$	0	1,42	0,204	-2,00	2,5	0,658	4,11	115	27	5,8

## D.11 Processos com um zero de fase não-mínima

A função de transferência da família de processos de segunda ordem com polos reais e com um zero de fase não-mínima é dada por:

$$G_{17}(s) = \frac{1 - \alpha s}{(s + 1)^2}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1]$$

enquanto a função de transferência da família de processos de terceira ordem com polos reais e com um zero de fase não-mínima é dada por:

$$G_{18}(s) = \frac{1 - \alpha s}{(s + 1)^3}, \quad \alpha = [0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1; 1,1].$$

Os processos nestas duas famílias pertencem à Classe A. Os parâmetros dos controladores PRs e dos controladores PRAs, juntamente com as medidas de desempenho obtidas para  $G_{17}(s)$  e para  $G_{18}(s)$  com  $\alpha = 0,1$ , com  $\alpha = 0,5$  e com  $\alpha = 1,1$  são apresentados nas tabelas 197 a 208.

Tabela 197 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{17}(s)$  com  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,412$	0	6,71	1,45	-1,13	22	1,4	11
$0,3\omega_u = 1,23$	0	6,17	1,33	-9,32	11	2,2	4,9
$0,5\omega_u = 2,06$	0	5,11	0,366	-21,4	12	4,0	26
$0,7\omega_u = 2,88$	0	3,48	0,249	-28,6	33	15	44
$0,9\omega_u = 3,70$	0	1,30	0,0927	-17,7	195	115	68

Tabela 198 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{17}(s)$  com  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,412$	0	6,70	3,37	-0,726	2,5	1,65	10,3	10	0,66	0,54
$0,3\omega_u = 1,23$	0	6,34	3,10	-6,19	2,5	1,65	10,3	7,7	1,5	0,18
$0,5\omega_u = 2,06$	0	5,56	2,55	-15,1	2,5	1,65	10,3	6,8	2,2	0
$0,7\omega_u = 2,88$	0	4,18	1,74	-22,2	2,5	1,65	10,3	11	5,0	1,4
$0,9\omega_u = 3,70$	0	1,81	0,647	-15,9	2,5	1,65	10,3	34	20	5

Tabela 199 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{17}(s)$  com  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,194$	0	1,35	0,137	-0,0500	69	2,1	10
$0,3\omega_u = 0,581$	0	1,24	0,125	-0,414	21	1,9	4,2
$0,5\omega_u = 0,968$	0	1,02	0,0345	-0,951	12	1,8	4,9
$0,7\omega_u = 1,36$	0	0,698	0,0235	-1,27	36	7,7	22
$0,9\omega_u = 1,74$	0	0,261	0,00875	-0,785	203	56	46

Tabela 200 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{17}(s)$  com  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,194$	0	1,34	0,318	-0,0322	2,5	0,775	4,84	68	2,1	0,36
$0,3\omega_u = 0,581$	0	1,27	0,292	-0,275	2,5	0,775	4,84	45	4,1	0,69
$0,5\omega_u = 0,968$	0	1,11	0,241	-0,669	2,5	0,775	4,84	29	4,5	0,020
$0,7\omega_u = 1,36$	0	0,837	0,164	-0,985	2,5	0,775	4,84	29	6,2	0
$0,9\omega_u = 1,74$	0	0,363	0,061	-0,705	2,5	0,775	4,84	68	19	1,7

Tabela 201 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{17}(s)$  com  $\alpha = 1,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,139$	0	0,613	0,0446	-0,0117	160	3,5	8,0
$0,3\omega_u = 0,417$	0	0,564	0,0410	-0,0969	42	2,8	2,1
$0,5\omega_u = 0,694$	0	0,467	0,0113	-0,223	17	1,9	0
$0,7\omega_u = 0,972$	0	0,318	0,00767	-0,298	45	7,0	12
$0,9\omega_u = 1,25$	0	0,119	0,00286	-0,184	224	45	36



Tabela 202 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{17}(s)$  com  $\alpha = 1,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,139$	0	0,612	0,104	-0,00755	2,5	0,555	3,47	184	4,1	0,21
$0,3\omega_u = 0,417$	0	0,580	0,0955	-0,0644	2,5	0,555	3,47	115	7,6	0,82
$0,5\omega_u = 0,694$	0	0,508	0,0787	-0,157	2,5	0,555	3,47	63	7,0	0,062
$0,7\omega_u = 0,972$	0	0,382	0,0535	-0,231	2,5	0,555	3,47	50	7,8	0
$0,9\omega_u = 1,25$	0	0,165	0,0199	-0,165	2,5	0,555	3,47	98	19	0,71

Tabela 203 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{18}(s)$  com  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,152$	0	2,35	0,187	-0,0537	72	1,7	10
$0,3\omega_u = 0,455$	0	2,16	0,172	-0,445	32	2,3	9,8
$0,5\omega_u = 0,759$	0	1,79	0,0473	-1,02	21	2,6	18
$0,7\omega_u = 1,06$	0	1,22	0,0322	-1,37	66	11	35
$0,9\omega_u = 1,37$	0	0,456	0,0120	-0,844	625	136	71

Tabela 204 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{18}(s)$  com  $\alpha = 0,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,152$	0	2,35	0,436	-0,0347	2,5	0,607	3,80	67	1,6	0,84
$0,3\omega_u = 0,455$	0	2,22	0,401	-0,295	2,5	0,607	3,80	44	3,2	1,6
$0,5\omega_u = 0,759$	0	1,95	0,330	-0,719	2,5	0,607	3,80	25	3,0	0,22
$0,7\omega_u = 1,06$	0	1,46	0,225	-1,06	2,5	0,607	3,80	25	4,2	0,049
$0,9\omega_u = 1,37$	0	0,634	0,0837	-0,758	2,5	0,607	3,80	91	20	5,3

Tabela 205 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{18}(s)$  com  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,115$	0	1,20	0,0720	-0,0157	147	2,7	11
$0,3\omega_u = 0,345$	0	1,10	0,0662	-0,130	46	2,5	6,5
$0,5\omega_u = 0,575$	0	0,910	0,0182	-0,298	19	1,7	4,5
$0,7\omega_u = 0,805$	0	0,620	0,0124	-0,398	62	8	24
$0,9\omega_u = 1,04$	0	0,232	0,00462	-0,246	548	90	61

Tabela 206 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{18}(s)$  com  $\alpha = 0,5$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,115$	0	1,19	0,168	-0,0101	2,5	0,460	2,88	141	2,6	0,56
$0,3\omega_u = 0,345$	0	1,13	0,154	-0,0861	2,5	0,460	2,88	86	4,7	2,0
$0,5\omega_u = 0,575$	0	0,990	0,127	-0,210	2,5	0,460	2,88	55	5,0	0,36
$0,7\omega_u = 0,805$	0	0,744	0,0864	-0,309	2,5	0,460	2,88	41	5,3	0
$0,9\omega_u = 1,04$	0	0,322	0,0322	-0,221	2,5	0,460	2,88	117	19	3,4

Tabela 207 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRs e medidas de desempenho para o processo  $G_{18}(s)$  com  $\alpha = 1,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_{p1}$	$K_{r11}$	$K_{r21}$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0933$	0	0,681	0,0333	-0,00587	241	3,6	9,6
$0,3\omega_u = 0,280$	0	0,627	0,0306	-0,0486	64	2,9	4,1
$0,5\omega_u = 0,467$	0	0,519	0,00842	-0,112	27	2,0	0,034
$0,7\omega_u = 0,653$	0	0,354	0,00573	-0,149	67	6,9	16
$0,9\omega_u = 0,840$	0	0,132	0,00213	-0,0923	541	72	54

Tabela 208 – Parâmetros de sintonia dos controladores PRAs e medidas de desempenho para o processo  $G_{18}(s)$  com  $\alpha = 1,1$ .

$\omega_r$	$\xi$	$K_p$	$K_{r1}$	$K_{r2}$	$k_a$	$z_a$	$p_a$	$t_s$	$n_s$	$M_o$
$0,1\omega_u = 0,0933$	0	0,68	0,0776	-0,00379	2,5	0,373	2,33	273	4,1	0,39
$0,3\omega_u = 0,280$	0	0,644	0,0713	-0,0323	2,5	0,373	2,33	162	7,2	1,8
$0,5\omega_u = 0,467$	0	0,564	0,0588	-0,0786	2,5	0,373	2,33	95	7,0	0,30
$0,7\omega_u = 0,653$	0	0,424	0,0400	-0,116	2,5	0,373	2,33	69	7,2	0
$0,9\omega_u = 0,840$	0	0,184	0,0149	-0,0829	2,5	0,373	2,33	152	20	2,3

## APÊNDICE E INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES SOBRE O MÉTODO GOF PARA SINTONIA DE CONTROLADORES PMR E PMRA

### E.1 Sinais de referência

Por meio da aplicação da *CTFS* em uma onda dente de serra,  $r_{ds}(t)$ , em uma onda quadrada,  $r_q(t)$ , e em uma onda triangular,  $r_t(t)$ , assumindo a extensão periódica destes sinais para  $-\infty < t < \infty$ , pode-se chegar nas seguintes representações dos sinais de referência baseados nestas ondas que são utilizados neste trabalho:

$$r_{ds}(t) = 0 \quad \forall t < 0, \quad r_{ds}(t) = \frac{2a_r}{\pi} \sum_{k=1}^M \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{sen}(k\omega_r t) \quad \forall t \geq 0, \quad (171)$$

$$r_q(t) = 0 \quad \forall t < 0, \quad r_q(t) = \frac{4a_r}{\pi} \sum_{k=1}^M \frac{1}{2k-1} \text{sen}((2k-1)\omega_r t) \quad \forall t \geq 0, \quad (172)$$

$$r_t(t) = 0 \quad \forall t < 0, \quad r_t(t) = \frac{8a_r}{\pi^2} \sum_{k=1}^M \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \text{sen}((2k-1)\omega_r t) \quad \forall t \geq 0, \quad (173)$$

onde  $\omega_r \in \mathbb{R}$  é a frequência fundamental do sinal em questão para  $t \geq 0$ ,  $a_r > 0$  é a amplitude da onda ideal obtida quando considera-se o número de componentes frequenciais  $M$  tendendo ao infinito.

### E.2 Funções de transferência dos controladores PMR e PMRA

Nesta seção são apresentadas as funções de transferência particulares dos controladores PMR e PMRA com dois até cinco modos de ressonância cujos conjuntos de fórmulas de sintonia foram propostos na Seção 5.2.3.

#### E.2.1 Controladores PMR e PMRA com dois modos ressonantes

As funções de transferência dos controladores PMR e PMRA com dois modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $2\omega_r$  são respectivamente dadas por:

$$C_{pmr_2}(s) = C_{pr_1}(s)C_{pr_2}(s),$$

$$C_{pmr_2}(s) = \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( K_{p_2} + \frac{K_{r_{12}}s + K_{r_{22}}}{s^2 + 4\xi_2\omega_r s + 4\omega_r^2} \right), \quad (174)$$

$$\begin{aligned}
C_{pmra_2}(s) &= C_{av}(s)C_{pr_1}(s)C_{pr_2}(s), \\
C_{pmra_2}(s) &= \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_2} + \frac{K_{r_{12}}s + K_{r_{22}}}{s^2 + 4\xi_2\omega_r s + 4\omega_r^2} \right), \tag{175}
\end{aligned}$$

enquanto os controladores PMR e PMRA com dois modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$  e  $3\omega_r$  têm as seguintes funções de transferência:

$$\begin{aligned}
C_{pmr_2}(s) &= C_{pr_1}(s)C_{pr_3}(s), \\
C_{pmr_2}(s) &= \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right), \tag{176}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pmra_2}(s) &= C_{av}(s)C_{pr_1}(s)C_{pr_3}(s), \\
C_{pmra_2}(s) &= \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right). \tag{177}
\end{aligned}$$

## E.2.2 Controladores PMR e PMRA com três modos ressonantes

As funções de transferência dos controladores PMR e PMRA com três modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$  e  $3\omega_r$  são respectivamente dadas por:

$$\begin{aligned}
C_{pmr_3}(s) &= C_{pr_1}(s)C_{pr_2}(s)C_{pr_3}(s), \\
C_{pmr_3}(s) &= \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( K_{p_2} + \frac{K_{r_{12}}s + K_{r_{22}}}{s^2 + 4\xi_2\omega_r s + 4\omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right), \tag{178}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pmra_3}(s) &= C_{av}(s)C_{pr_1}(s)C_{pr_2}(s)C_{pr_3}(s), \\
C_{pmra_3}(s) &= \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_2} + \frac{K_{r_{12}}s + K_{r_{22}}}{s^2 + 4\xi_2\omega_r s + 4\omega_r^2} \right) \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right), \tag{179}
\end{aligned}$$

enquanto os controladores PMR e PMRA com três modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $5\omega_r$  têm as seguintes funções de transferência:

$$\begin{aligned}
C_{pmr_3}(s) &= C_{pr_1}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_5}(s), \\
C_{pmr_3}(s) &= \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_5} + \frac{K_{r_{15}}s + K_{r_{25}}}{s^2 + 10\xi_5\omega_r s + 25\omega_r^2} \right), \tag{180}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pmra_3}(s) &= C_{av}(s)C_{pr_1}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_5}(s), \\
C_{pmra_3}(s) &= \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \left( K_{p_5} + \frac{K_{r_{15}}s + K_{r_{25}}}{s^2 + 10\xi_5\omega_r s + 25\omega_r^2} \right). \tag{181}
\end{aligned}$$

### E.2.3 Controladores PMR e PMRA com quatro modos ressonantes

As funções de transferência dos controladores PMR e PMRA com quatro modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$ ,  $3\omega_r$  e  $4\omega_r$  são respectivamente dadas por:

$$\begin{aligned}
 C_{pmr_4}(s) &= C_{pr_1}(s)C_{pr_2}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_4}(s), \\
 C_{pmr_4}(s) &= \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( K_{p_2} + \frac{K_{r_{12}}s + K_{r_{22}}}{s^2 + 4\xi_2\omega_r s + 4\omega_r^2} \right) \\
 &\quad \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \left( K_{p_4} + \frac{K_{r_{14}}s + K_{r_{24}}}{s^2 + 8\xi_4\omega_r s + 16\omega_r^2} \right), \quad (182) \\
 C_{pmra_4}(s) &= C_{av}(s)C_{pr_1}(s)C_{pr_2}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_4}(s), \\
 C_{pmra_4}(s) &= \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \\
 &\quad \left( K_{p_2} + \frac{K_{r_{12}}s + K_{r_{22}}}{s^2 + 4\xi_2\omega_r s + 4\omega_r^2} \right) \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \\
 &\quad \left( K_{p_4} + \frac{K_{r_{14}}s + K_{r_{24}}}{s^2 + 8\xi_4\omega_r s + 16\omega_r^2} \right), \quad (183)
 \end{aligned}$$

enquanto os controladores PMR e PMRA com quatro modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $5\omega_r$  e  $7\omega_r$  têm as seguintes funções de transferência:

$$\begin{aligned}
 C_{pmr_4}(s) &= C_{pr_1}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_5}(s)C_{pr_7}(s), \\
 C_{pmr_4}(s) &= \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \\
 &\quad \left( K_{p_5} + \frac{K_{r_{15}}s + K_{r_{25}}}{s^2 + 10\xi_5\omega_r s + 25\omega_r^2} \right) \left( K_{p_7} + \frac{K_{r_{17}}s + K_{r_{27}}}{s^2 + 14\xi_7\omega_r s + 49\omega_r^2} \right), \quad (184) \\
 C_{pmra_4}(s) &= C_{av}(s)C_{pr_1}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_5}(s)C_{pr_7}(s), \\
 C_{pmra_4}(s) &= \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \\
 &\quad \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \left( K_{p_5} + \frac{K_{r_{15}}s + K_{r_{25}}}{s^2 + 10\xi_5\omega_r s + 25\omega_r^2} \right) \\
 &\quad \left( K_{p_7} + \frac{K_{r_{17}}s + K_{r_{27}}}{s^2 + 14\xi_7\omega_r s + 49\omega_r^2} \right). \quad (185)
 \end{aligned}$$

### E.2.4 Controladores PMR e PMRA com cinco modos ressonantes

As funções de transferência dos controladores PMR e PMRA com cinco modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $2\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $4\omega_r$  e  $5\omega_r$  são respectivamente dadas por:

$$\begin{aligned}
 C_{pmr_5}(s) &= C_{pr_1}(s)C_{pr_2}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_4}(s)C_{pr_5}(s), \\
 C_{pmr_5}(s) &= \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( K_{p_2} + \frac{K_{r_{12}}s + K_{r_{22}}}{s^2 + 4\xi_2\omega_r s + 4\omega_r^2} \right) \\
 &\quad \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \left( K_{p_4} + \frac{K_{r_{14}}s + K_{r_{24}}}{s^2 + 8\xi_4\omega_r s + 16\omega_r^2} \right) \\
 &\quad \left( K_{p_5} + \frac{K_{r_{15}}s + K_{r_{25}}}{s^2 + 10\xi_5\omega_r s + 25\omega_r^2} \right), \quad (186)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pmra_4}(s) &= C_{av}(s)C_{pr_1}(s)C_{pr_2}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_4}(s)C_{pr_5}(s), \\
C_{pmra_4}(s) &= \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_2} + \frac{K_{r_{12}}s + K_{r_{22}}}{s^2 + 4\xi_2\omega_r s + 4\omega_r^2} \right) \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_4} + \frac{K_{r_{14}}s + K_{r_{24}}}{s^2 + 8\xi_4\omega_r s + 16\omega_r^2} \right) \left( K_{p_5} + \frac{K_{r_{15}}s + K_{r_{25}}}{s^2 + 10\xi_5\omega_r s + 25\omega_r^2} \right), \tag{187}
\end{aligned}$$

enquanto os controladores PMR e PMRA com cinco modos ressonantes nas frequências  $\omega_r$ ,  $3\omega_r$ ,  $5\omega_r$ ,  $7\omega_r$  e  $9\omega_r$  têm as seguintes funções de transferência:

$$\begin{aligned}
C_{pmr_5}(s) &= C_{pr_1}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_5}(s)C_{pr_7}(s)C_{pr_9}(s), \\
C_{pmr_5}(s) &= \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_5} + \frac{K_{r_{15}}s + K_{r_{25}}}{s^2 + 10\xi_5\omega_r s + 25\omega_r^2} \right) \left( K_{p_7} + \frac{K_{r_{17}}s + K_{r_{27}}}{s^2 + 14\xi_7\omega_r s + 49\omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_9} + \frac{K_{r_{19}}s + K_{r_{29}}}{s^2 + 18\xi_9\omega_r s + 81\omega_r^2} \right), \tag{188}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pmra_5}(s) &= C_{av}(s)C_{pr_1}(s)C_{pr_3}(s)C_{pr_5}(s)C_{pr_7}(s)C_{pr_9}(s), \\
C_{pmra_5}(s) &= \left( k_a \frac{s + z_a}{s + p_a} \right) \left( K_{p_1} + \frac{K_{r_{11}}s + K_{r_{21}}}{s^2 + 2\xi_1\omega_r s + \omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_3} + \frac{K_{r_{13}}s + K_{r_{23}}}{s^2 + 6\xi_3\omega_r s + 9\omega_r^2} \right) \left( K_{p_5} + \frac{K_{r_{15}}s + K_{r_{25}}}{s^2 + 10\xi_5\omega_r s + 25\omega_r^2} \right) \\
&\quad \left( K_{p_7} + \frac{K_{r_{17}}s + K_{r_{27}}}{s^2 + 14\xi_7\omega_r s + 49\omega_r^2} \right) \left( K_{p_9} + \frac{K_{r_{19}}s + K_{r_{29}}}{s^2 + 18\xi_9\omega_r s + 81\omega_r^2} \right). \tag{189}
\end{aligned}$$

### E.3 Complemento dos resultados experimentais

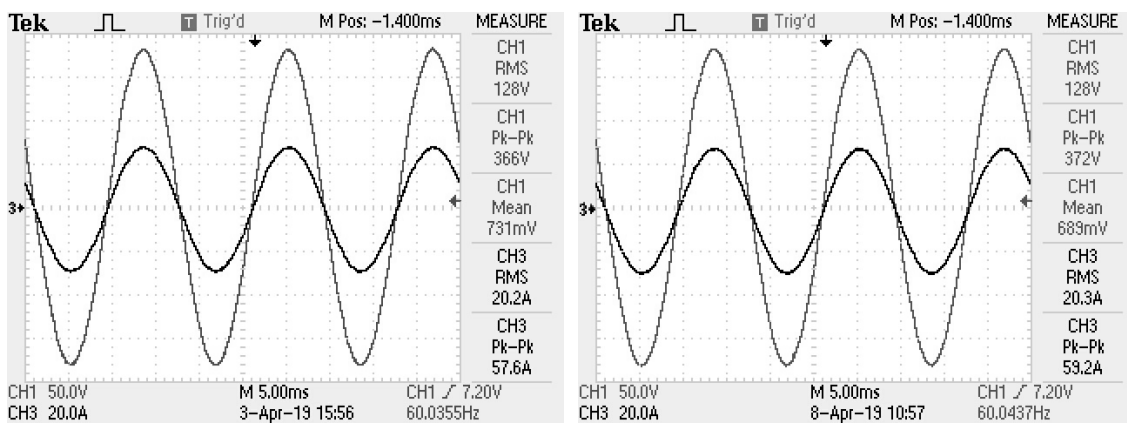
Nesta seção são retratados os gráficos dos sinais de tensão e de corrente de saída obtidas com 100% da carga linear, além dos valores de *THD* e *RMS* da tensão de saída nas condições de operação sem carga e com 100% da carga linear obtidos no controle do estágio de saída da *UPS* com os controladores PMRs apresentados na Seção 5.4.

A Figura 148 apresenta os sinais da tensão (linha cinza) e da corrente de saída (linha preta) obtidos com 100% de carga linear considerando a estrutura de controle  $K_c + \text{PMR}_2$  com os dois conjuntos de coeficientes de amortecimento dos polos:  $\xi_1 = \xi_3 = 0$ ; e  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = 0,01$ . Na Figura 149 são representados os valores de *THD* e *RMS* da tensão de saída nas condições sem carga e com 100% de carga linear.

Na Figura 150 são representados os sinais da tensão e da corrente de saída obtidos com 100% de carga linear considerando a estrutura de controle  $K_c + \text{PMR}_3$  com os dois conjuntos de coeficientes de amortecimento dos polos:  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$ ; e  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = 0,01$ . Na Figura 151 são apresentados os valores de *THD* e *RMS* da tensão de saída nas condições sem carga e com 100% de carga linear.

A Figura 152 ilustra os sinais da tensão e da corrente de saída obtidos com 100% de carga linear considerando a estrutura de controle  $K_c + \text{PMR}_4$  com os dois conjuntos de coeficientes de amortecimento dos polos:  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$ ; e  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$ . Na Figura 153 são retratados os valores de *THD* e *RMS* da tensão de saída nas condições sem carga e com 100% de carga linear.

Figura 148 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_2$ .

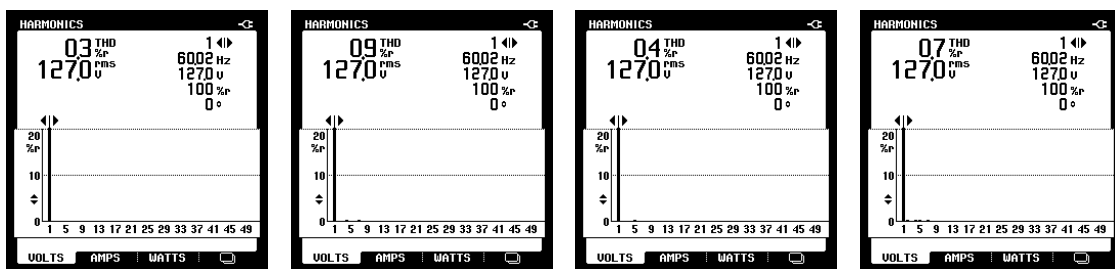


(a) Operação com  $\xi_1 = \xi_3 = 0$

(b) Operação com  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 149 – Valores de *THD* e de *RMS* da tensão de saída obtidas através da estrutura de controle  $K_c + PMR_2$ .



(a)  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  e sem carga.

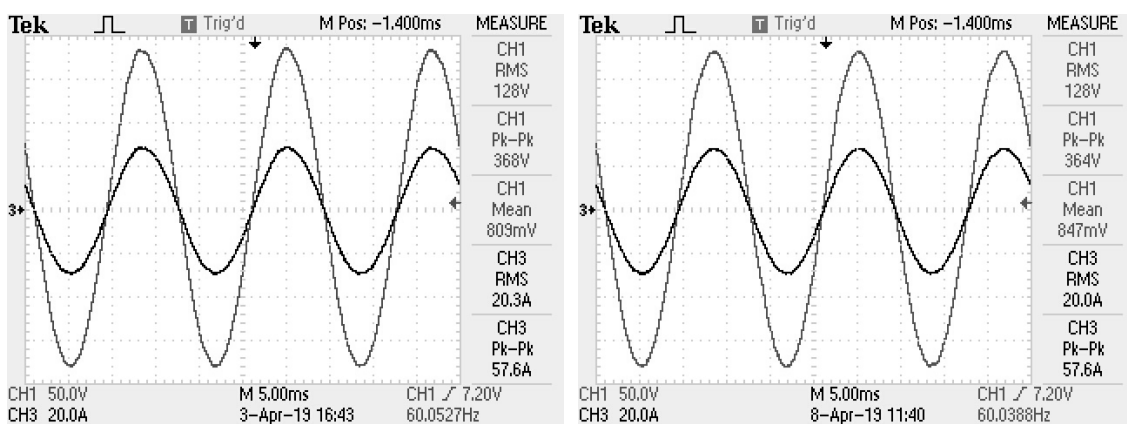
(b)  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  e 100% de carga linear.

(c)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = 0,01$  e sem carga

(d)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = 0,01$  e 100% de carga linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 150 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_3$ .

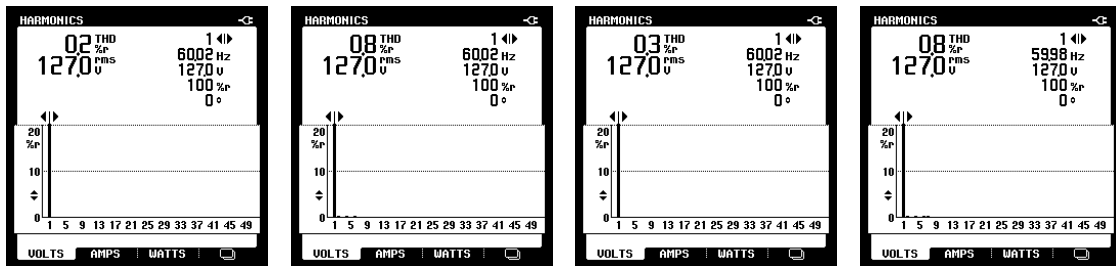


(a) Operação com  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$

(b) Operação com  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

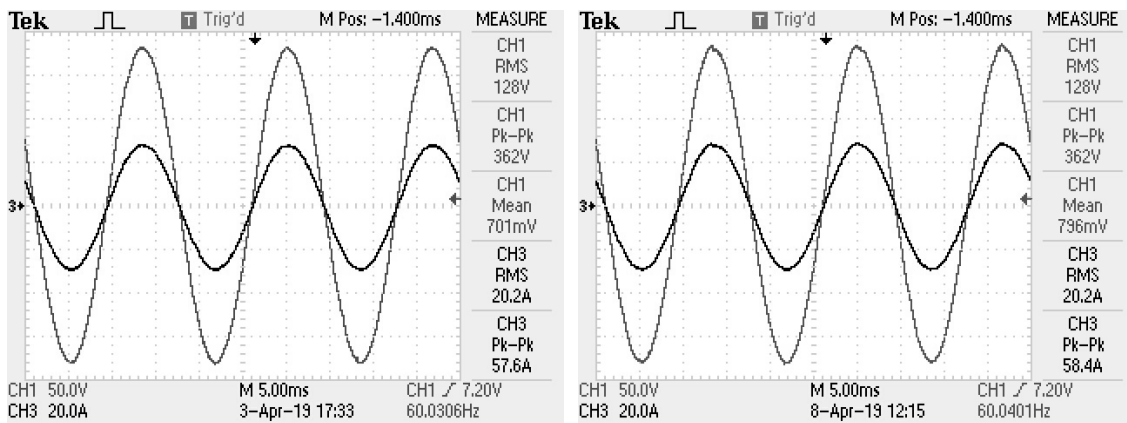
Figura 151 – Valores de *THD* e de *RMS* da tensão de saída obtidas através da estrutura de controle  $K_c + PMR_3$ .



- (a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$  e sem carga. (b)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = 0$  e 100% de carga linear. (c)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = 0,01$  e sem carga. (d)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = 0,01$  e 100% de carga linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

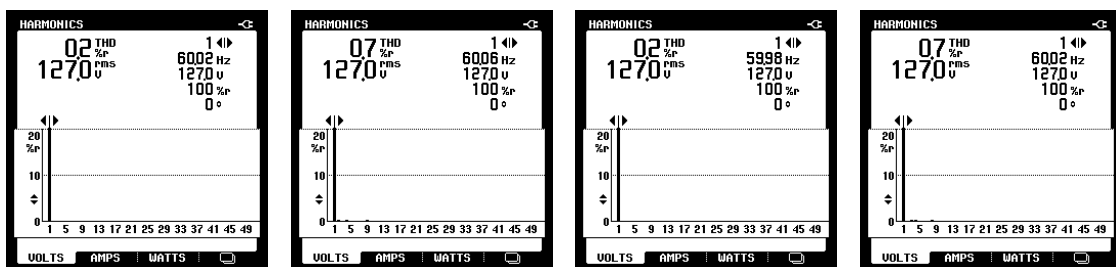
Figura 152 – Tensão e corrente de saída obtidas com 100% de carga linear através da estrutura de controle  $K_c + PMR_4$ .



- (a) Operação com  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$  (b) Operação com  $\xi_1 = 0$  e  $\xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 153 – Valores de *THD* e de *RMS* da tensão de saída obtidas através da estrutura de controle  $K_c + PMR_4$ .



- (a)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$  e sem carga. (b)  $\xi_1 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0$  e 100% de carga linear. (c)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$  e sem carga. (d)  $\xi_1 = 0, \xi_3 = \xi_5 = \xi_7 = 0,01$  e 100% de carga linear

Fonte: Elaborado pelo autor.