TEORIA AXIOMÁTICA DA UTILIDADE ESPERADA

João Luis Becker

Série C, n^0 11, NOV/88

TEORIA AXIOMÁTICA DA UTILIDADE ESPERADA

João Luiz Becker

PPGA/UFRGS
Av. João Pessoa, 52 – Sala 11
90.040 – Porto Alegre – RS

1 INTRODUÇÃO

A teoria da utilidade esperada é amplamente reconhecida como um modelo razoável para guiar decisões sob condições de risco. Uma vez que decisões dependem em grande parte de preferências, a teoria, ao estruturar preferências e oferecer uma representação numérica para esta estrutura, consegue enquadrar o problema decisório em bases objetivas. Enquanto a idéia original é atribuída a BERNOULLI (1738), foi somente depois dos trabalhos de RAMSEY (1931) e VON NEUMANN e MORGENSTERN (1944), independentemente derivando o modelo a partir de um conjunto relativamente simples de axiomas, que ela ganhou larga aceitação normativa. Em simples palavras, no contexto de ganhos monetários, a teoria determina que uma alternativa de risco F seja preferida a uma alternativa de risco G se e somente se $E_F[u(X)] > E_G[u(X)]$, onde u é uma função real (chamada *função de utilidades*) e $E_F[\cdot]$ é o operador esperança matemática com respeito a F.

Sem dúvida o grande desenvolvimento experimentado pela teoria, beneficiada com contribuições advindas da Economia, Estatística, Matemática, Psicologia, e Pesquisa Operacional, foi fortemente influenciado pelo uso da abordagem axiomática. De acordo com esta abordagem, parte-se de um conjunto de axiomas ou condições que caracterizem uma estrutura de preferências. Estas suposições tanto podem ser vistas como critérios de coerência e consistência para as preferências de um tomador de decisões ou como hipóteses simplificadoras de uma realidade. Procura-se então descobrir um modelo numérico que preserve as características da estrutura de preferências consubstanciada pelo conjunto de axiomas. Investigações subseqüentes deverão indicar como tal modelo poderá ser usado para auxiliar os tomadores de decisões e talvez resolver problemas decisórios. Isto pode incluir métodos de estimação de elementos (utilidades, probabilidades, etc.) que aparecem no modelo.

O propósito deste trabalho é apresentar uma axiomatização da teoria. Algumas axiomatizações bastante conhecidas foram desenvolvidas por MARSCHAK (1950) e SAMUELSON (1952), porém sem dúvida a mais elegante do ponto de vista matemático é a de HERSTEIN e MILNOR (1953), a qual procuraremos seguir de perto. O trabalho de SAVAGE (1954) merece particular destaque. Ele propôs um conjunto de axiomas que implica não somente a existência de uma função de utilidades, como também a existência de uma medida de probabilidade subjetiva. Suas idéias abriram caminho para o desenvolvimento das chamadas teorias subjetivas de utilidade esperada. FISHBURN (1981) oferece uma análise detalhada das mesmas, comparando muitas delas.

O trabalho organiza-se da seguinte maneira: na seção 2 tecem-se rápidas considerações a respeito de incerteza e sua mensuração; na seção 3 apresenta-se o famoso paradoxo de São Petersburgo, de importância histórica para o desenvolvimento da área; a seção 4 apresenta a axiomatização pretendida; e na seção 5 finalmente demonstra-se a existência da função de utilidades.

2 DECISÕES SOB INCERTEZA

Todas as decisões que tomamos envolvem incerteza a respeito de suas conseqüências, em maior ou menor grau. Convivemos irracionalmente com a incerteza simplesmente ignorando-a. Podemos entretanto conviver racionalmente com ela através de várias maneiras, seja analisando quantitativamente suas bases, coletando evidências para reduzí-la, ou diversificando seus efeitos negativos. A base de tais procedimentos repousa na possibilidade de mensuração da incerteza, obtida através da probabilidade. Não nos cabe aqui desenvolver aprofundadamente a teoria das probabilidades, apenas ofereceremos alguns exemplos simplistas para posicionar o leitor. Um tratamento mais aprofundado do tema pode ser encontrado em livros de teoria de probabilidades, como por exemplo, FELLER (1968) ou RODRIGUES (1973).

Considere os prospectos de risco P, que oferece um ganho de NCz\$ 1000 com probabilidade 0,3 ou um ganho de NCz\$ 2000 com probabilidade 0,7, e Q, que oferece um ganho de NCz\$ 1000 com probabilidade 0,5 ou um ganho de NCz\$ 3000 com probabilidade 0,5, representados na figura 1.

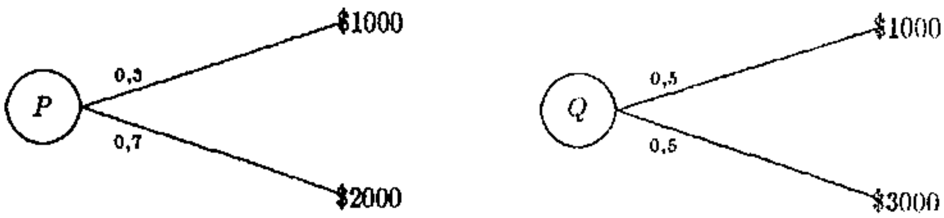

Figura 1: Prospectos P e Q

Um conceito importante é o conceito de ***valor esperado***, uma média das conseqüências, ponderadas por suas respectivas probabilidades, no caso destes prospectos simples. Neste caso, tem-se que

$$E_P[X] = 0,3 \times \$1000 + 0,7 \times \$2000 = \$1700$$

e

$$E_Q[X] = 0,5 \times \$1000 + 0,5 \times \$3000 = \$2000.$$

Uma operação importante é a operação de ***mistura*** de prospectos de risco, combinações lineares convexas dando origem a outros prospectos de risco. Considere por exemplo o prospecto $R = 0,1P + 0,9Q$, representado na figura 2. R representa um prospecto de risco em duas etapas. Ganha-se outro prospecto de risco, P

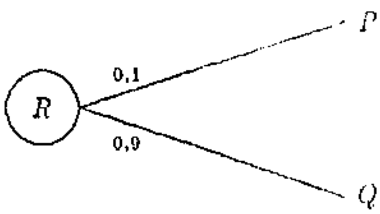

Figura 2: Prospecto R

com probabilidade 0,1, ou Q com probabilidade 0,9. Sob a ótica puramente probabilística, pode-se compor as probabilidades das duas etapas e mostrar R como equivalente ao prospecto representado na figura 3.

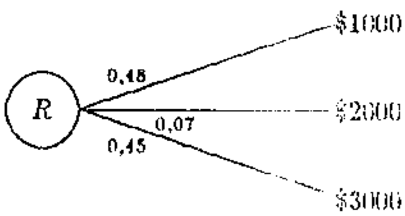

Figura 3: Prospecto equivalente a R

3 O Paradoxo de São Petersburgo

Uma regra comum de decisão é: *prospectos com maior valor esperado são preferidos.* Considere entretanto o prospecto SP, que oferece NCz\$ 2^{i-1} com probabilidade 2^{-i} para $i = 1, 2, 3, \ldots$. O valor esperado de SP é dado pela série

$$E_{SP}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \times 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Contrariamente à regra do valor esperado, não existem muitas pessoas (existirá alguma?) dispostas a pagar grandes fortunas apenas para ter o privilégio de jogar tal jogo. No século XVIII tal constatação pareceu paradoxal, e o exemplo entrou para a história com o nome de paradoxo de São Petersburgo.

BERNOULLI (1738) propôs uma solução para esta forma particular e original do paradoxo, lançando as sementes da moderna teoria da utilidade esperada. Ele propos que ao invés de escolher o prospecto com maior valor esperado (monetário), dever-se-ia escolher o prospecto com maior "esperança moral" de ganhos. Chegou mesmo a propor como função de transformação de ganhos monetários em ganhos morais a função logarítmica. Com efeito,

$$E_{SP}[a \ln(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \times a \ln 2^{i-1} = a \ln 2 < \infty.$$

Neste desenvolvimento a representa uma constante cujo valor pode variar de indivíduo para indivíduo. Isto explicaria porque diferentes indivíduos se dispõem a pagar diferentes quantias para jogar o jogo de São Petersburgo.

A concepção de Bernoulli é um caso particular da concepção moderna, para a qual deve-se escolher o prospecto com maior utilidade esperada. Sob esta ótica, Bernoulli nada mais fez do que propor uma particular função de utilidades. Deve ser ressaltado que o paradoxo de São Petersburgo pode ser generalizado, a menos que a função de utilidades seja limitada. Para detalhes, assim como para referências, veja MACHINA (1982).

4 Axiomatização

Passemos agora à formalização da teoria.

Definição 1 – Um conjunto M é dito um *conjunto mistura* se $\forall a, b \in M$ e $\forall \mu \in [0, 1]$ pudermos associar outro elemento de M, denotado por $\mu a + (1 - \mu) b$, onde:

1. $1a + (1 - 1)b = a$;
2. $\mu a + (1 - \mu)b = (1 - \mu)b + \mu a$;
3. $\lambda[\mu a + (1 - \mu)b] + (1 - \lambda)b = (\lambda\mu)a + (1 - \lambda\mu)b$;

$\forall a, b \in M, \forall \mu, \lambda \in [0, 1]$.

Exemplos de conjuntos mistura são conjuntos convexos em espaços vetoriais, onde $\mu a + (1 - \mu)b$ é definida usando-se a multiplicação de vetores por escalares e a soma vetorial. Em particular, o conjunto de medidas de probabilidades é um conjunto mistura.

Definição 2 – Uma função real v definida em M é dita *linear* se $\forall a, b \in M, \forall \mu \in [0, 1]$,

$$v(\mu a + (1 - \mu)b) = \mu v(a) + (1 - \mu)v(b).$$

Definição 3 – Uma relação binária $\succsim$ definida em um conjunto S é dita uma *ordem completa* se

1. $\forall a, b \in S$, ou $a \succsim b$ ou $b \succsim a$;
2. $\forall a, b, c \in S$, $a \succsim b$, $b \succsim c \Longrightarrow a \succsim c$.

Exemplos de ordens completas são bastante comuns. Estaremos particularmente interessados na relação de preferência, que assumiremos ser uma ordem completa.

Definição 4 – $\forall a, b \in S, a \sim b$ (*a é indiferente a b*) se e somente se $a \succsim b$ e $b \succsim a$.

Algumas propriedades da relação binária $\sim$ são:

1. $a \sim a$;

2. $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$;

3. $a \sim b, b \sim c \Longrightarrow a \sim c$;

$\forall a, b, c \in S$.

Diz-se que uma relação com tais propriedades é uma *relação de equivalência.*

Definição 5 – Para $a \in S$, chamamos de ***conjunto indiferença de*** a ao conjunto $I(a) = \{x \in S \mid x \sim a\}$.

A classe de todos os conjuntos indiferença dos elementos de S forma a partição das *classes de equivalência* de S.

Definição 6 – Se $a \succsim b$, mas $a \notin I(b)$, dizemos $a \succ b$.

Definição 7 – Diz-se que uma função real u definida em S *preserva a ordem* se

$$\forall a, b \in S, u(a) > u(b) \Longleftrightarrow a \succ b.$$

Estamos interessados em um conjunto S que seja ao mesmo tempo um conjunto mistura e completamente ordenado, o conjunto dos prospectos de risco. A mistura é dada por medidas de probabilidades e a ordem é a relação de preferência. Queremos mostrar a existência de uma função linear que preserva a ordem, que chamaremos de ***função de utilidades.***

Se não existirem outras restrições impostas sobre S, além de ser um conjunto mistura completamente ordenado, tal função não necessariamente existirá. Nosso problema é descobrir que restrições adicionais devem ser postuladas sobre a operação mistura e a relação de ordem para fazer emergir a função de utilidades. A seguir apresentam-se alguns axiomas que satisfazem nossos desejos.

Seja S um conjunto mistura.

Axioma 1 – S é completamente ordenado por $\succsim$

Axioma 2 – $\forall a, b, c \in S$, os conjuntos $\{\alpha \in [0,1] \mid \alpha a + (1-\alpha)b \succsim c\}$ e $\{\alpha \in [0,1] \mid c \succsim \alpha a + (1-\alpha)b\}$ são fechados.

Axioma 3 – Se $a \sim a'$ então $\forall b \in S, \forall \alpha \in [0,1], \alpha a + (1-\alpha)b \sim \alpha a' + (1-\alpha)b$.

Em termos econômicos, o axioma 1 simplesmente estabelece um padrão de coerência na relação de preferência dos agentes econômicos, qual seja a de que todos os prospectos são comparáveis transitivamente. O axioma 2 estabelece que a ordem de preferência de um agente econômico é contínua com respeito a distribuições de probabilidades. Ou seja, se $\lim_{i \to \infty} \mu_i = \mu$ e cada $\mu_i a + (1-\mu_i)b \succsim c$, então $\mu a + (1-\mu)b \succsim c$ (semelhantemente para $c \succsim \mu_i a + (1-\mu_i)b$). O axioma 3 retrata o famoso princípio da substituição, estabelecendo que se o agente econômico é indiferente a respeito de dois prospectos a e a', ele também o será a respeito de combinações dos mesmos com qualquer outro prospecto de risco b.

5 Derivação da Função de Utilidades

Passemos agora à derivação da teoria.

Teorema 1 – $\forall a, b, c \in S$, se $a \succsim b \succsim c$, então existe $\mu \in [0,1]$ tal que $b \sim \mu a + (1-\mu)c$. Se $a \succ b \succ c$, então $\mu \in (0,1)$.

Prova: Sejam $a, b, c \in S$, com $a \succsim b \succsim c$ e $T = \{\mu \in [0,1] \mid \mu a + (1-\mu)c \succsim b\}$. Pelo axioma 2, T é um subconjunto fechado de $[0,1]$. T não é vazio, na medida em que $1 \in T$, pois $1a + (1-1)c = a \succsim b$. De modo semelhante, $W = \{\lambda \in [0,1] \mid b \succsim \lambda a + (1-\lambda)c\}$ é fechado e não vazio, pois $0 \in W$. Como S é um conjunto mistura completamente ordenado por $\succsim$, tem-se que $T \cup W = [0,1]$. Como $[0,1]$ é conexo, ele não pode ser decomposto em uma união de dois conjuntos fechados e disjuntos. Logo, $T \cap W \neq \emptyset$. Seja $\mu_0 \in T \cap W$. Por definição de T e de W, $b \sim \mu_0 a + (1-\mu_0)c$, e o teorema está provado. Claramente, se $a \succ b \succ c$, então $1 > \mu_0 > 0$. ∎

Lema 1 – $\forall a,b,c \in S$, o conjunto $\{\alpha \in [0,1] \mid \alpha a + (1-\alpha)b \sim c\}$ é fechado.

Prova: Sejam $a,b,c \in S$ e $\{\mu_i\}$ uma seqüência em $[0,1]$ tal que $\lim_{i\to\infty} \mu_i = \mu$ e cada $\mu_i a + (1-\mu_i)b \sim c$. Então $\mu_i a + (1-\mu_i)b \succsim c$ e $c \succsim \mu_i a + (1-\mu_i)b$, e, pelo axioma 2, tem-se que $\mu a + (1-\mu)b \succsim c$ assim como $c \succsim \mu a + (1-\mu)b$. Conseqüentemente $\mu a + (1-\mu)b \sim c$. ∎

Teorema 2 – $\forall a,b \in S$, se $a \succ b$, então $\forall \mu \in (0,1), a \succ \mu a + (1-\mu)b \succ b$.

Prova: Sejam $a,b \in S$ com $a \succ b$. Suponhamos, por contradição, que exista $\mu \in (0,1)$ tal que $\mu a + (1-\mu)b \succsim a \succ b$. O teorema 1 garante a existência de $\lambda \in [0,1]$ tal que $a \sim \lambda[\mu a + (1-\mu)b] + (1-\lambda)b = (\lambda\mu)a + (1-\lambda\mu)b$. Seja $T = \{\lambda \in [0,1] \mid (\lambda\mu)a + (1-\lambda\mu)b \sim a\}$. Uma conseqüência do lema 1 é que T é um subconjunto fechado de $[0,1]$, e conseqüentemente possui um mínimo λ_0. Como $0 \notin T$, pois $a \not\sim 0a + 1b = b$, $\lambda_0 > 0$. Como $a \sim (\lambda_0\mu)a + (1-\lambda_0\mu)b$, o axioma 3 acarreta que $\mu a + (1-\mu)b \sim \mu[(\lambda_0\mu)a + (1-\lambda_0\mu)b] + (1-\mu)b = (\lambda_0\mu^2)a + (1-\lambda_0\mu^2)b$. Como $\mu a + (1-\mu)b \succsim a \succ b$, tem-se que $(\lambda_0\mu^2)a + (1-\lambda_0\mu^2)b \succsim a \succ b$. Mais uma vez o teorema 1 garante a existência de algum $\lambda \in [0,1]$ tal que $a \sim \lambda[(\lambda_0\mu^2)a + (1-\lambda_0\mu^2)b] + (1-\lambda)b = (\lambda\lambda_0\mu^2)a + (1-\lambda\lambda_0\mu^2)b$. Logo $\lambda\lambda_0\mu \in T$. Mas $\lambda\lambda_0\mu < \lambda_0$, pois $\mu < 1$, em contradição com a escolha de λ_0. Logo não existe $\mu \in (0,1)$ tal que $\mu a + (1-\mu)b \succsim a \succ b$. Argumentos semelhantes levam a suposição de existência de $\mu \in (0,1)$ tal que $a \succ b \succsim \mu a + (1-\mu)b$ a uma contradição. ∎

Teorema 3 – $\forall a,b \in S$, com $a \succ b$, $\forall \mu, \lambda \in [0,1], \lambda a + (1-\lambda)b \succ \mu a + (1-\mu)b$ se e somente se $\lambda > \mu$.

Prova: Sejam $a,b \in S$, com $a \succ b$, e $\mu, \lambda \in [0,1]$. Suponhamos que $\lambda > \mu > 0$. Pelo teorema 2 tem-se $\lambda a + (1-\lambda)b \succ b$. Como $0 < \mu/\lambda < 1$, novamente o teorema 2 implica em que $\lambda a + (1-\lambda)b \succ (\mu/\lambda)[\lambda a + (1-\lambda)b] + [1-(\mu/\lambda)]b = \mu a + (1-\mu)b$. Se $\lambda > \mu = 0$, o teorema 2 implica diretamente que $\lambda a + (1-\lambda)b \succ b = \mu a + (1-\mu)b$.
Inversamente, $\lambda a + (1-\lambda)b \succ \mu a + (1-\mu)b$ claramente implica $\lambda > \mu$, pois, por contraposição, se tivéssemos $\mu > \lambda$, o argumento anterior garantiria $\mu a + (1-\mu)b \succ \lambda a + (1-\lambda)b$; se tivéssemos $\mu = \lambda$ teríamos $\mu a + (1-\mu)b = \lambda a + (1-\lambda)b$. ∎

Teorema 4 – Existe apenas um ou existem infinitos conjuntos indiferença em S.

Prova: Se existirem $a,b \in S$ tais que $a \succ b$, o teorema 3 implica imediatamente na existência de conjuntos indiferença distintos para cada $\lambda \in [0,1]$. Em caso contrário só há um conjunto indiferença em S. ∎

Não há interesse prático neste último caso, pois todos os prospectos seriam igualmente preferidos. A existência de uma função de utilidades em S seria trivial, bastando que se definisse $u(a) = 1$ para qualquer $a \in S$. Suponhamos então que existam infinitos conjuntos indiferença em S.

Teorema 5 – $\forall a,b,c \in S$, se $a \succ b \succ c$ então existe um único $\mu \in (0,1)$ tal que $b \sim \mu a + (1-\mu)c$.

Prova: Sejam $a,b,c \in S$, com $a \succ b \succ c$. Por contradição, suponhamos que existam $\mu_1, \mu_2 \in (0,1)$, com $\mu_1 \neq \mu_2$, tais que $b \sim \mu_1 a + (1-\mu_1)c \sim \mu_2 a + (1-\mu_2)c$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\mu_1 > \mu_2$. Neste caso, o teorema 3 implica $\mu_1 a + (1-\mu_1)c \succ \mu_2 a + (1-\mu_2)c$, de modo que ambos não podem ser simultaneamente indiferentes a b. ∎

O teorema 5 dá sentido à seguinte definição:

Definição 8 – Para $a,b \in S$, com $a \succ b$, seja $S_{ab} = \{x \in S \mid a \succsim x \succsim b\}$. Seja a função real μ_{ab} definida em S_{ab} por $x \sim \mu_{ab}(x)a + [1-\mu_{ab}(x)]b$.

O teorema 3 garante que para $x,y \in S_{ab}$, $\mu_{ab}(x) > \mu_{ab}(y)$ se e somente se $x \succ y$, evidenciando que a função μ_{ab} preserva a ordem. De outra parte, para $x,y \in S_{ab}$ e $\alpha \in [0,1]$, como $x \sim \mu_{ab}(x)a + [1-\mu_{ab}(x)]b$ e $y \sim \mu_{ab}(y)a + [1-\mu_{ab}(y)]b$, sucessivas aplicações do axioma 3 implicam $\alpha x + (1-\alpha)y \sim \alpha[\mu_{ab}(x)a + [1-\mu_{ab}(x)]b] + (1-\alpha)[\mu_{ab}(y)a + [1-\mu_{ab}(y)]b] = [\alpha\mu_{ab}(x) + (1-\alpha)\mu_{ab}(y)]a + [1-[\alpha\mu_{ab}(x) + (1-\alpha)\mu_{ab}(y)]]b$, mostrando que $\mu_{ab}[\alpha x + (1-\alpha)y] = \alpha\mu_{ab}(x) + (1-\alpha)\mu_{ab}(y)$. Logo, a função μ_{ab} também é linear. Ou seja, μ_{ab} possui as qualidades desejadas em nossa função de utilidades. Tudo o que precisamos agora é estender μ_{ab} de S_{ab} para S.

Sejam $r_1, r_2 \in S$, com $r_1 \succ r_2$. Na argumentação que se segue, r_1 e r_2 são mantidos fixos. Sejam $a,b \in S$ tais que $a \succ b$ e $r_1, r_2 \in S_{ab}$. Para $x \in S_{ab}$, definimos

$$M_{ab}(x) = \frac{\mu_{ab}(x) - \mu_{ab}(r_2)}{\mu_{ab}(r_1) - \mu_{ab}(r_2)}.$$

Tem-se que $M_{ab}(r_2) = 0$ e $M_{ab}(r_1) = 1$.

Lema 2 – Sejam f e g funções lineares definidas em S_{ab} que preservam a ordem e tais que $f(r_1) = g(r_1)$ e $f(r_2) = g(r_2)$. Então f é idêntica a g em S_{ab}.

Prova: Seja $x \in S_{ab}$. Se $r_1 \succsim x \succsim r_2$, pelo teorema 1 existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $x \sim \alpha r_1 + (1-\alpha)r_2$. Logo $f(x) = f(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2) = \alpha f(r_1) + (1-\alpha)f(r_2) = \alpha g(r_1) + (1-\alpha)g(r_2) = g(\alpha r_1 + (1-\alpha)r_2) = g(x)$. Se $x \succsim r_1 \succ r_2$, pelo mesmo teorema 1 existe $\mu \in [0,1]$ tal que $r_1 \sim \mu x + (1-\mu)r_2$. Obviamente $\mu \neq 0$, pois $r_1 \not\sim r_2$. Logo $f(r_1) = \mu f(x) + (1-\mu)f(r_2) = g(r_1) = \mu g(x) + (1-\mu)g(r_2)$. Como $f(r_2) = g(r_2)$ e $\mu \neq 0$, tem-se que $f(x) = g(x)$. Argumentos semelhantes poderiam demonstrar o caso $r_1 \succ r_2 \succsim x$. ∎

Estamos agora em condições de definir nossa função de utilidades em S. Seja $x \in S$. Escolham-se $a, b \in S$, com $a \succ b$, tais que

$$r_1, r_2 \in S_{ab}, \tag{1}$$

$$x \in S_{ab}. \tag{2}$$

Definiremos a função real u em S por $u(x) = M_{ab}(x)$.

Pelo lema 2, para quaisquer pares a, b e a', b' satisfazendo as condições (1) e (2), tem-se $M_{ab}(x) = M_{a'b'}(x)$, pois $M_{ab}(r_1) = M_{a'b'}(r_1) = 1$ e $M_{ab}(r_2) = M_{a'b'}(r_2) = 0$. Conseqüentemente não precisamos nos preocupar com a particular escolha de a e b usada na definição de u, estando esta perfeitamente definida.

A evidência de que u preserva a ordem é imediata: dados $x, y \in S$, escolham-se $a, b \in S$, com $a \succ b$ e tais que $x, y, r_1, r_2 \in S_{ab}$; então $u(x) > u(y)$ se e somente se $x \succ y$, pois μ_{ab} e conseqüentemente M_{ab} preservam a ordem em S_{ab}. Da mesma forma, é evidente que u é linear, pois μ_{ab} e conseqüentemente M_{ab} o são.

O resultado fundamental deste trabalho é resumido no

Teorema 6 – Se um conjunto mistura S satisfaz os axiomas 1, 2 e 3 então existe uma função linear real u definida em S que preserva a ordem.

Repare o leitor que embora o teorema 6 tenha sido enunciado garantindo a existência de uma função de utilidades u, o desenvolvimento apresentado anteriormente mostra existirem infinitas funções de utilidades. De fato, toda a argumentação se baseia na escolha (arbitrária) de $r_1, r_2 \in S$, satisfazendo $r_1 \succ r_2$. r_1 e r_2 atuam como "âncoras" para a definição de u, com $u(r_1) = 1$ e $u(r_2) = 0$.

É fácil mostrar o relacionamento entre duas funções de utilidades. Suponhamos existirem duas funções de utilidades definidas em S, u e u'. Seja $x \in S$ e $a, b \in S$ tais que $a \succ b$ e $x \in S_{ab}$. Sejam as funções reais f e g definidas em S_{ab} por

$$f(y) = \frac{u(y) - u(b)}{u(a) - u(b)} \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{u'(y) - u'(b)}{u'(a) - u'(b)}, \quad \forall y \in S_{ab}.$$

Obviamente f e g preservam a ordem e são lineares em S_{ab}, pois u e u', sendo funções de utilidades em S, preservam a ordem e são lineares em S_{ab}. Mais ainda, $f(a) = g(a) = 1$ e $f(b) = g(b) = 0$. O lema 2 (com $r_1 = a$ e $r_2 = b$) implica em que f e g são idênticas em S_{ab}. Conseqüentemente

$$\frac{u(x) - u(b)}{u(a) - u(b)} = \frac{u'(x) - u'(b)}{u'(a) - u'(b)}.$$

Remanejando os termos, tem-se

$$u'(x) = \frac{u'(b) - u'(a)}{u(b) - u(a)} u(x) + u'(a) - \frac{u'(b) - u'(a)}{u(b) - u(a)} u(a).$$

O resultado é resumido no teorema 7.

Teorema 7 – Se u e u' são funções lineares reais definidas em S que preservam a ordem, então existem $\alpha, \beta \in R$, com $\alpha > 0$, tais que $u' = \alpha u + \beta$.

6 BIBLIOGRAFIA

BERNOULLI, D. (1738). "Specimen theoriae novae de mensura sortis". *Comentarii Academiae Scientiarum Imperiales Petropolitanae*, 5, 175-192. Traduzido para o ingles por L. SOMMER em *Econometrica* (1954), 22, 23-36.

FELLER, W. (1968), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. 3rd ed.. John Willey & Sons, New York.

FISHBURN, P.C. (1981). "Subjective expected utility: a review of normative theories". *Theory and Decision*, 13, 139-199.

HERSTEIN, I.N. e J. MILNOR (1953). "An axiomatic approach to measurable utility". *Econometrica*, 21, 291-297.

MACHINA, M.J. (1982). "Expected utility analysis without the independence axiom". *Econometrica*, 50, 277-323.

MARSCHAK, J. (1950). "Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility". *Econometrica*, 18, 111-141.

RAMSEY, F. (1931). *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays.* R.B. BRAITHWAITE (ed.). Routledge & Kegan Paul Ltd., London.

RODRIGUES, F.W. (1973). *Tópicos da Teoria das Probabilidades.* 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro.

SAMUELSON, P.A. (1952). "Utility, preference, and probability". in J. STIGLITZ (ed.) (1966). *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, vol I. M.I.T. Press, Cambridge.

SAVAGE, L.J. (1954). *The Foundations of Statistics.* John Willey & Sons, New York.

VON NEUMANN, J. e O. MORGENSTERN (1944). *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton. 2nd ed., 1947. 3rd ed., 1953. John Willey & Sons, New York.

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

1. Marcos Sebastiani - Palestra Inaugural - MAR/88.
2. José Francisco Porto da Silveira - A Fatorial no Infinito - MAR/88.
3. Miguel A. Ferrero - Um problema em Aberto em Álgebra - MAI/88.
4. Willy G. Engel - Problemas da História da Matemática Antiga - JUN/88.
5. Cydara C. Ripoll - A Série $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ converge!!! - JUL/88.
6. Vera Clotilde Garcia Carneiro - O Caos - SET/88.
7. Ada Maria de S. Doering - A Conjectura de Fermat - SET/88.
8. Elsa Mundstock - Microinformática Aplicada as Áreas de Matemática e Estatística - SET/88.
9. Léa Fagundes - Psicologia Cognitiva e Educação Matemática - OUT/88.
10. Maria Luisa Souza - Breve Relato Sobre o Ensino de Matemática - OUT/88.
11. João Luis Becker - Teoria Axiomática da Utilidade Esperada - NOV/88.
12. Ary Tietböhl - Criação do Instituto de Matemática da UFRGS - MAR/89.
13. Alvino A. Sant'Ana - Construção por Meio de Régua e Compasso - ABR/89.
14. Oclide José Dotto - A Regra dos Sinais de Descartes - ABR/89.
15. Antônio Rodrigues - Reminiscências de um Diretor do Instituto de Matemática - MAI/89.
16. Antonio Vladimir Martins - Problemas dos 3 Corpos e a Solução Colinear de Euler - JUN/89.
17. Richard Aron - Aproximation of Continuons Functions - AGO/89.
18. Jorge Mujica - Álgebras de Funções Holomorfas em Espaços de Banach - SET/89.

Universidade Federal do Rio Grande Sul
Reitor: Professor Tuiskon Dick

Instituto de Matemática
Diretor: Professor Aron Taitelbaum
Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Coordenador: Professor Jaime Bruck Ripoll
Secretária: Rosaura Monteiro Pinheiro

Os cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:
Série A: Trabalho de Pesquisa
Série B: Trabalho de Apoio Didático
Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS
Série D: Trabalho de Graduação
Série E: Dissertações de Mestrado
Série F: Trabalho de Divulgação
Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:
NAEC - Núcleo de Atividades Extra Curriculares
Instituto de Matemática - UFRGS
Av. Bento Gonçalves, 9500
91.500 - Agronomia - POA/RS
Telefone: 36.11.59 ou 36.17.85 Ramal: 252