UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÉRIE B: TRABALHO DE APOIO DIDÁTICO

INTRODUÇÃO À ANÁLISE MATEMÁTICA REAL II

Claus I. Doering

SÉRIE B, Nº 78
Porto Alegre, dezembro de 2011

Sumário

Funções

Passamos agora ao estudo do conceito de convergência, em sua versão contínua. No que segue, todas as funções são reais e utilizamos, sem maiores explicações, as propriedades de números reais e de sequências reais que foram desenvolvidas nos capítulos precedentes. Da mesma forma, para obter exemplos mais significativos, utilizamos as funções transcendentes seno, cosseno, exponencial e logaritmo, apresentadas ao final do primeiro capítulo.

3.1. Continuidade

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer. Podemos interpretar f como um *operador de sequências*, já que, a cada sequência (x_n) do domínio X de f podemos associar uma sequência (y_n) da imagem $f(X)$ de f, definida, naturalmente, com qualquer n, por

$$y_n = f(x_n).$$

A *continuidade* de uma função é caracterizada pela preservação da convergência dessas sequências. Mais precisamente, dado um ponto $\sigma \in X$ qualquer do domínio de f, dizemos que f é *contínua em* σ se (y_n) for uma sequência convergente com $\lim y_n = f(\sigma)$ sempre que (x_n) for uma sequência convergente de X com $\lim x_n = \sigma$. Em menos palavras, f é contínua em σ se $f\big(\lim x_n\big) = \lim f(x_n)$ sempre que $\lim x_n = \sigma$ ou, então,

$$x_n \longrightarrow \sigma \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(\sigma).$$

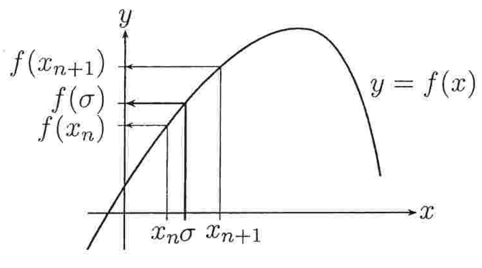


Figura 3.1. A continuidade de f em σ

Exemplo 3.1. As funções constantes e a identidade $\xi_{\mathbb{R}}$ são, claramente, contínuas em cada ponto de $\mathbb{R}$. Pelo Exercício 2.2.9, sabemos que $x_n \longrightarrow \sigma \Longrightarrow |x_n| \longrightarrow |\sigma|$; agora, isso significa que a função valor absoluto é contínua em cada $\sigma \in \mathbb{R}$. Também sabemos, pela Proposição

2.30, que $1/x_n \longrightarrow 1/\sigma$, sempre que $x_n \longrightarrow \sigma \neq 0$. Dessa forma, a função racional definida por $f(x) = 1/x$ é contínua em cada ponto de seu domínio. ◎

Pelas propriedades operacionais dos limites de sequências (Proposição 2.30), decorre que combinações lineares e produtos de funções contínuas num ponto são contínuas nesse ponto. Segue daí que são contínuas em cada ponto todas as funções polinomiais de uma variável real. A continuidade das funções exponenciais $f(x) = b^x$ (com $b > 0$ fixado), das potências $f(x) = x^c$ (com um real c fixado) e da função logaritmo $f(x) = \log x$ em cada ponto de seu domínio é o conteúdo do Exemplo 2.33, à página 76. Nos exemplos, também utilizaremos a continuidade das funções trigonométricas (o que só veremos no Capítulo 4).

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua em* $A \subseteq X$ se f é contínua em cada ponto de A. Qualquer função é contínua em subconjuntos discretos de seu domínio. (Ver Exercício 3.1.2.) Dizemos, simplesmente, que uma função é *contínua* se for contínua em cada ponto de seu domínio. Observe que toda sequência define uma função contínua, já que seu domínio é discreto.

A continuidade é herdada por composição. Se f for contínua (em σ) e g for contínua (em $f(\sigma)$), então a composta $g \circ f$ é contínua (em σ), sempre que essa composta exista, ou seja, se $f(X) \subseteq Y$, onde $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$. De fato,

$$x_n \longrightarrow \sigma \implies f(x_n) \longrightarrow f(\sigma) \implies (g \circ f)(x_n) \longrightarrow (g \circ f)(\sigma).$$

Lembramos disso dizendo que é contínua a composta de funções contínuas. Assim, por exemplo, fixado $b \in \mathbb{R}$, são contínuas em $(-b, +\infty)$ as funções definidas por $\log(b + x)$ e $\sqrt{b + x}$. A continuidade dessa última foi demonstrada no Exemplo 2.34 e usada, sem mencionar a palavra "continuidade", no Exemplo 2.37, em que mostramos que o limite de uma sequência definida por iteração é o ponto fixo da função iterada. Isso é bem geral.

Exemplo 3.2. Se a sequência (x_n) definida pelas iteradas $x_{n+1} = f(x_n)$ de uma função f for convergente e se a função for contínua em $\sigma = \lim x_n$, então

$$\sigma = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f\big(\lim x_n\big) = f(\sigma),$$

ou seja, esse limite é um ponto fixo da função iterada. ◎

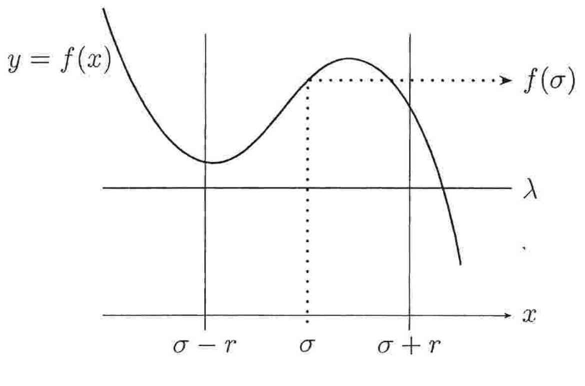


Figura 3.2. A permanência do sinal de uma função contínua em σ

Da mesma forma que as propriedades operacionais das sequências convergentes são herdadas pela continuidade, também a permanência do sinal e o confronto de sequências convergentes são transmitidos à continuidade. (Ver Exercício 3.1.1.)

Lema 3.3. (Permanência do Sinal) *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua num ponto $\sigma \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ dados. Se $f(\sigma) > \lambda$, então existe $r > 0$ tal que $f(x) > \lambda$, com qualquer $x \in X \cap (\sigma - r, \sigma + r)$. Resultado análogo vale se $f(\sigma) < \lambda$ e, portanto, se $f(\sigma) \neq \lambda$.*

Demonstração. Sejam f contínua em σ e $\lambda \in \mathbb{R}$ dados. Usamos contraposição. Digamos que não exista $r > 0$ com a propriedade $|x - \sigma| < r \Longrightarrow f(x) > \lambda$, com $x \in X$. Isso significa que, dado $r > 0$, sempre podemos encontrar $x \in X$ tal que $|x - \sigma| < r$ e $f(x) \leqslant \lambda$. Em particular (por indução), dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $x_n \in X$ tal que $|\sigma - x_n| < \frac{1}{n}$ e $f(x_n) \leqslant \lambda$. Dessa forma, obtemos uma sequência (x_n) de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$ e, portanto, $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$, pela continuidade de f em σ. Como $f(x_n) \leqslant \lambda$ com $n \in \mathbb{N}$, a permanência do sinal de sequências garante que, também, $f(\sigma) \leqslant \lambda$. (Ver Lema 2.25.) □

Exemplo 3.4. O quociente de funções contínuas num ponto é contínuo nesse ponto, desde que o denominador seja não nulo no ponto em consideração. De fato, sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas num ponto $\sigma \in X$. Se $g(\sigma) \neq 0$, então a permanência do sinal de funções contínuas garante que existe $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$, com $x \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$. Desse modo, o quociente f/g das duas funções está bem definido em $(\sigma - r, \sigma + r) \cap X$ e é contínuo em σ, pela Proposição 2.30. (Ver, também, o Exercício 3.1.7.)

Em particular, toda função racional é contínua em cada ponto no qual o polinômio do denominador não se anula, ou seja, em cada ponto de seu domínio. ◎

Definições Equivalentes

Para estabelecer a continuidade de uma função num ponto σ de seu domínio X, a definição exige que verifiquemos se $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$ com *toda e qualquer* sequência (x_n) de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$. Será isso, de fato, necessário? Na verdade, não é preciso verificar isso com todas as sequências que tendem a σ, bastando considerar as sequências monótonas que tendem a σ. Mais que isso, como a sequência constante $x_n = \sigma$ sempre leva à sequência constante $f(x_n) = f(\sigma)$, basta considerar as sequências (monótonas) de $X - \{\sigma\}$ que tendem a σ e, dessas, apenas as crescentes e as decrescentes. (Ver Exercício 3.1.6.)

A continuidade de uma função num ponto de seu domínio também pode ser caracterizada sem referência direta a sequências, dizendo que f é contínua em σ se $f(x)$ estiver situado *arbitrariamente próximo* de $f(\sigma)$ sempre que x estiver *suficientemente próximo* de σ. Em símbolos, temos a afirmação seguinte.

Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja $x \in X$, vale

$$|x - \sigma| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\sigma)| < \varepsilon.$$

Mostremos que essa afirmação equivale à continuidade de f em σ.

Suponhamos que a afirmação seja válida e mostremos que f é contínua em σ. Para isso, consideremos uma sequência (x_n) qualquer de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$ e mostremos que também $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$. Lembremos que isso significa que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, precisamos mostrar a validade de $|f(x_n) - f(\sigma)| < \varepsilon$ com $n \gg 0$. Seja, pois, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente e tomemos o $\delta > 0$ fornecido pela afirmação. Com esse $\delta > 0$, nossa hipótese $x_n \longrightarrow \sigma$ garante a validade de $|x_n - \sigma| < \delta$ com $n \gg 0$. Pela afirmação, $|f(x_n) - f(\sigma)| < \varepsilon$ decorre de $|x_n - \sigma| < \delta$, portanto, estabelecemos que $|f(x_n) - f(\sigma)| < \varepsilon$ vale com $n \gg 0$. Como isso é válido com qualquer $\varepsilon > 0$, estabelecemos que $f(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$. Como isso é válido com qualquer sequência (x_n) de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$, podemos concluir que f é contínua em σ.

Reciprocamente, suponhamos que a afirmação seja falsa e mostremos que, nesse caso, f não é contínua em σ. Seja, pois, $\varepsilon_0 > 0$ tal que, qualquer que seja $\delta > 0$, exista algum $x \in X$ tal que não valha $|x - \sigma| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\sigma)| < \varepsilon_0$, ou seja, vale $|x - \sigma| < \delta$, mas $|f(x) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon_0$. Assim, tomando $\delta = 1$, obtemos $x_1 \in X$ com $|x_1 - \sigma| < 1$, mas $|f(x_1) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon_0$; tomando $\delta = \frac{1}{2}$, obtemos $x_2 \in X$ com $|x_2 - \sigma| < \frac{1}{2}$, mas $|f(x_2) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon_0$, e assim por diante. Desse modo, construímos uma sequência (x_n) de X com $|x_n - \sigma| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon_0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Em particular, pelo critério do confronto para sequências, temos $x_n \longrightarrow \sigma$, mas de $|f(x_n) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ decorre que $\big(f(x_n)\big)$ é divergente ou, então, convergente com limite distinto de $f(\sigma)$. A existência dessa sequência garante que f não é contínua em σ.

O argumento que acabamos de apresentar é bastante utilizado em Análise quando queremos provar alguma afirmação do tipo $H \implies (\forall a)(\exists b)(\forall c)[P(a,b,c)]$ e, para isso, usamos contraposição. Assim, *partindo* da negação $(\exists a)(\forall b)(\exists c)[\sim P(a,b,c)]$, tomamos esse a que existe e, ao invés de utilizar todos os b disponíveis, consideramos apenas os termos b_n de alguma sequência nula conveniente (muitas vezes, $b_n = \frac{1}{n}$) e, para cada um desses b_n, escolhemos um c_n correspondente tal que valha $\sim P(a, b_n, c_n)$. Desse modo, obtemos duas sequências, com as quais tentamos chegar a $\sim H$. Esse procedimento já foi utilizado, por exemplo, na demonstração do Lema 3.3).

Descontinuidades

Se uma função não for contínua nalgum ponto de seu domínio, diremos que a função é *descontínua*; mais precisamente, dizemos que uma função é *descontínua em σ* se não for contínua no ponto σ de seu domínio. Para estabelecer que uma função f seja descontínua num ponto σ de seu domínio X, basta encontrar uma única sequência (x_n) do domínio X que seja convergente a σ mas tal que a sequência $\big(f(x_n)\big)$ da imagem seja divergente ou, então, convergente com limite distinto de $f(\sigma)$.

Observe que uma função só pode ser descontínua em pontos de acumulação do domínio, já que toda função é contínua em cada ponto isolado do domínio. (Ver Exercício 3.1.2.)

Fora do mundo das funções polinomiais, racionais, potências, exponenciais e trigonométricas, existem funções com variados tipos de comportamento. Podemos exibir funções que são descontínuas em apenas um ponto, ou descontínuas em todos os pontos, ou até contínuas em apenas um ponto, como segue.

Exemplo 3.5. Fixado $a \in \mathbb{R}$, seja $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0, \\ a, & \text{se} \quad x = 0, \\ -1, & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

cujo gráfico "pula" do gráfico constante igual a -1 em $(-\infty, 0)$ para o constante 1 em $(0, \infty)$. Essa função é contínua em cada ponto de $\mathbb{R}$, exceto em $\sigma = 0$. (Ver Figura 3.3.)

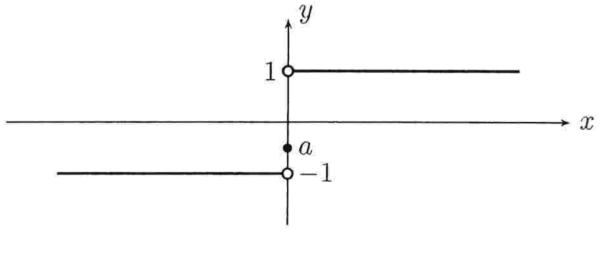


Figura 3.3. Essa função só é descontínua em 0

De fato, f_a é contínua em cada ponto de $\mathbb{R} - \{0\}$, por ser constante. No entanto, as duas sequências definidas por $x_n^{\pm} = \pm 1/n$ convergem a 0, mas $f_a(x_n^+) \longrightarrow 1$ e $f_a(x_n^-) \longrightarrow -1$, de modo que pelo menos uma dessas duas sequências não converge a $f_a(0) = a$, independentemente do valor a escolhido para $f_a(0)$. Assim, f_a não é contínua em 0. ◎

Exemplo 3.6. Seja $I_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função indicador de $\mathbb{Q}$, definida por

$$I_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

cujo gráfico "pula" entre os gráficos das retas horizontais $y = 0$ e $y = 1$. (Ver Exercício 0.0.21.) Essa função, conhecida como *função de Dirichlet*, não é contínua em ponto algum. De fato, se σ for racional, escolhemos uma sequência (x_n) qualquer de irracionais que convirja a σ e obtemos $I_{\mathbb{Q}}(x_n) = 0 \longrightarrow 0 \neq 1 = I_{\mathbb{Q}}(\sigma)$ e se σ for irracional, escolhemos uma sequência (x_n) qualquer de racionais que convirja a σ e obtemos $I_{\mathbb{Q}}(x_n) = 1 \longrightarrow 1 \neq 0 = I_{\mathbb{Q}}(\sigma)$. (Ver Exercício 2.2.6.) ⊚

Exemplo 3.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } \; x \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{se } \; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

cujo gráfico "pula" entre os gráficos das retas $y = x + 1$ e $y = 2$. Essa variação da função de Dirichlet só é contínua num único ponto, a saber, no ponto em que as duas retas se cortam.

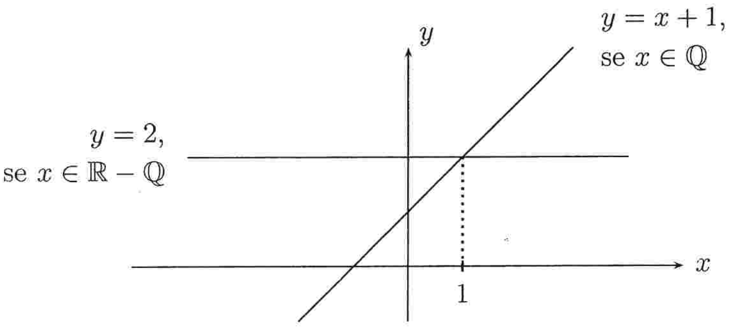


Figura 3.4. Essa função só é contínua em $\sigma = 1$

De fato, se (x_n) for uma sequência qualquer convergente a σ, então $x_n + 1 \longrightarrow \sigma + 1$ por valores racionais de x_n e $x_n = 2 \longrightarrow 2$ por valores irracionais de x_n. Como $\sigma + 1 = 2$ se, e só se, $\sigma = 1$, resulta que f tem o único ponto de continuidade $\sigma = 1$, no qual as retas $y = x + 1$ e $y = 2$ se cortam. (Ver Figura 3.4.) ⊚

A Propriedade do Valor Intermediário

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ tem a *propriedade do valor intermediário*, abreviada por PVI, se a imagem direta $f(I)$ de qualquer intervalo $I \subseteq X$ contido no domínio de f também for um intervalo. Usando a caracterização de intervalo como um *conjunto* com a PVI isso significa que, dados quaisquer $a, b, d \in \mathbb{R}$ tais que $a, b \in I \subseteq X$, se d estiver *entre* $f(a)$ e $f(b)$, sempre existe algum $c \in I$, também *entre* a e b, tal que $d = f(c) \in f(I)$. (Ver Exercício 1.4.14.)

Uma maneira prática de provar isso pode ser dada nos moldes da prova alternativa que vimos do Teorema 2.41 de Bolzano-Weierstrass, no capítulo precedente.

De fato, supondo, por exemplo, que $f(a) < d < f(b)$, com $a < b$, temos três opções para o ponto médio $c_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ do intervalo $[a, b]$: ou $f(c_1) = d$, e estamos prontos, ou $f(c_1) > d$, ou $f(c_1) < d$. Se $f(c_1) > d$, passamos ao subintervalo $[a, c_1]$ e, se $f(c_1) < d$, ao subintervalo $[c_1, b]$, retomando o processo de considerar o ponto médio. O processo termina quando encontramos o ponto em que f vale d, ou continua indefinidamente; nesse caso, obtemos um ponto pelo princípio dos intervalos encaixados no qual, por continuidade, o valor de f é d.

A prova que apresentamos a seguir, substitui o processo de infinitas escolhas de subintervalos e o princípio dos intervalos encaixados pelo axioma do supremo.

Teorema 3.8. (Teorema do Valor Intermediário – TVI) *A imagem direta por uma função contínua de qualquer intervalo contido no domínio da função é um intervalo.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que $a < b$ e $d \in \mathbb{R}$ sejam tais que $[a, b] \subseteq X$ e $f(a) < d < f(b)$ (o caso $b < a$ é análogo); mostremos que existe algum $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. Seja $C = \{x \in [a, b] : f(x) < d\}$. Temos que $a \in C$ e $C \subseteq [a, b]$ é limitado, de modo que existe $c = \sup C \in [a, b]$: vamos mostrar que $c \in (a, b)$ e $f(c) = d$.

Ora, como $f(a) < d$ e f é contínua em a, a permanência do sinal garante que existe algum $r > 0$ tal que $[a, a + r) \subseteq C$, mostrando que $a < c$. Do mesmo modo, $f(b) > d$ e a permanência do sinal garantem que existe algum $r > 0$ tal que $C \subseteq [a, b - r]$, mostrando que $c < b$. Assim, $a < c < b$. Também $f(c) < d$ acarreta $[c, c + r) \subseteq C$, com algum $r > 0$, o que é impossível, pois c é cota superior de C. Logo, $c \in (a, b)$ e $d \leqslant f(c)$.

Finalmente, por definição de supremo, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher algum $x_n \in C$ tal que $c - \frac{1}{n} < x_n \leqslant c$. Então $f(x_n) < d$ com $n \in \mathbb{N}$ e, pelo confronto, a sequência (x_n) de X assim obtida satisfaz $x_n \longrightarrow c$. Por continuidade de f e permanência do sinal de limites de sequências, decorre que $f(c) = \lim f(x_n) \leqslant d$. Assim, $f(c) = d$. □

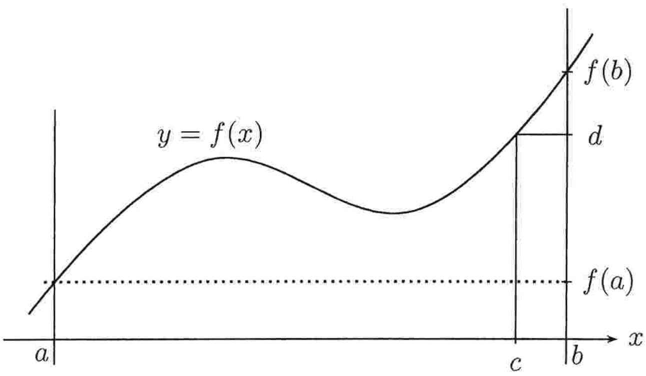


Figura 3.5. A propriedade do valor intermediário

Exemplo 3.9. Existe alguma raiz real de $x^5 + 4x^3 - 2x^2 + x - 3$ entre 0 e 1, pois a função $f(x) = x^5 + 4x^3 - 2x^2 + x - 3$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $f(0) = -3 < 0 < 1 = f(1)$.

Exemplo 3.10. A cúbica dada por $f(x) = x(x + 1)(x - 1) = x^3 - x$ é contínua e tal que $f(-2) = -6 < 0 < 6 = f(2)$, mas existem três pontos c entre -2 e 2 tais que $f(c) = 0$, a saber, $c = -1$, 0 e 1. ◎

O TVI garante que existe pelo menos um ponto c tal que $f(c) = d$. No exemplo precedente, obtivemos três. É claro que se a função contínua for injetora no intervalo, existe exatamente um único ponto c tal que $f(c) = d$. Assim obtemos uma maneira alternativa de mostrar a existência de todas as raízes de todos os números reais positivos. (Ver Exercício 1.4.28.)

Proposição 3.11. *Dados $x \in \mathbb{R}$ positivo e $n \in \mathbb{N}$, existe, e é única, a raiz enésima $\sqrt[n]{x}$ de x.*

Demonstração. Fixado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que é contínua em $\mathbb{R}$ a função potência definida por $f(x) = x^n$, com $x \in \mathbb{R}$. Também é injetora em $(0, +\infty)$, pois $0 < x < y \Longrightarrow x^n < y^n$.

Dado $x > 0$, mostremos que existe um único $c > 0$ tal que $x = f(c) = c^n$. Isso é imediato com $n = 1$, portanto, podemos supor que $n \geqslant 2$. Pela propriedade arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x < m$, e é claro que $m < m^n$. Logo, $f(0) = 0 < x < m^n = f(m)$ e o TVI garante que existe $c > 0$ tal que $c^n = f(c) = x$. Como a função f é injetora, a raiz enésima de x é única. □

A recíproca do TVI não é válida, pois existem exemplos de funções descontínuas com a propriedade do valor intermediário. (Ver Exercício 3.1.27.) No entanto, a recíproca é válida na categoria especial das funções monótonas.

Teorema 3.12. *Se a imagem direta de um intervalo por alguma função monótona for um intervalo, então a função é contínua nesse intervalo.*

Demonstração. Seja f uma função não crescente num intervalo I qualquer e digamos que f seja descontínua num ponto $\sigma \in I$. Pelo Exercício 3.1.4, existe alguma sequência (x_n) de $I - \{\sigma\}$ que é crescente ou decrescente e convergente a σ, mas tal que $\big(f(x_n)\big)$ diverge ou converge a um ponto distinto de $f(\sigma)$. Vamos supor que (x_n) seja crescente.

Como f é não crescente e $x_n < x_{n+1} < \sigma$ com $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$f(x_n) \geqslant f(x_{n+1}) \geqslant f(\sigma),$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Segue que a sequência $\big(f(x_n)\big)$ é decrescente e limitada inferiormente por $f(\sigma)$, de modo que essa sequência converge, com $\lim f(x_n) = \inf\{f(x_n)\} \geqslant f(\sigma)$. (Ver Teorema 2.35.) No entanto, essa sequência não converge a $f(\sigma)$, portanto, $\eta = \lim f(x_n) > f(\sigma)$. Mostremos que nenhum ponto entre $f(\sigma)$ e η pertence à imagem de f, com o que a imagem de f não é um intervalo, pois $[x_1, \sigma] \subseteq I$, mas $f\big([x_1,\sigma]\big) = [f(\sigma), f(x_1)] \nsubseteq I$.

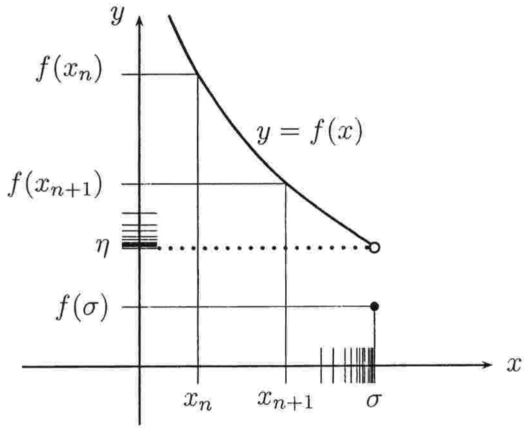


Figura 3.6. A imagem de uma função decrescente e descontínua não pode ser um intervalo

Se algum $y \in \big(f(\sigma), \eta\big)$ fosse um ponto da imagem de f, então existiria $x \in I$ tal que $f(x) = y$ e, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, de

$$f(\sigma) < f(x) < \eta \leqslant f(x_n)$$

decorreria que $x_n < x < \sigma$, de modo que o critério do confronto garantiria $x = \sigma$, o que é impossível, já que $f(x) = y \neq f(\sigma)$.

A prova é análoga se (x_n) for decrescente, bem como nos dois casos de f não decrescente. □

Corolário 3.13. *Uma função monótona num intervalo é contínua se, e só se, tem a propriedade do valor intermediário.* □

Corolário 3.14. *Toda função contínua e injetora num intervalo é crescente (ou decrescente) e sua função inversa também é contínua, injetora e crescente (ou decrescente).*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e injetora no intervalo I. Pelo TVI, a imagem $J = f(I)$ de f é um intervalo e, por ser f injetora, existe a função inversa $g : J \to \mathbb{R}$ de f. Pelo Exercício 3.1.23, f é crescente (ou decrescente) em I, com inversa crescente (ou decrescente). Como a imagem de g é o intervalo I, o Teorema 3.12 garante que a inversa g é contínua. □

Exemplo 3.15. Fixado $n \in \mathbb{N}$, a função raiz enésima $g(x) = \sqrt[n]{x}$ definida em $[0, +\infty)$ é crescente e contínua, com função inversa $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada pela potência enésima $f(x) = x^n$. ◎

O Teorema de Weierstrass

Exemplo 3.16. A função racional contínua definida por $f(x) = 1/x$ leva o intervalo limitado não fechado $(0, 1]$ no intervalo ilimitado $[1, \infty)$ e leva o intervalo fechado não limitado $[1, \infty)$ no intervalo não fechado $(0, 1]$.

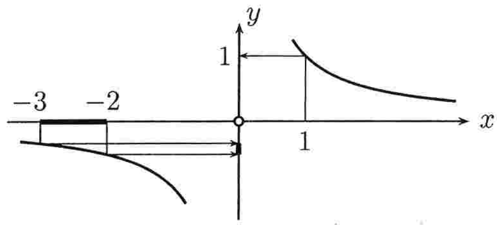


Figura 3.7. A função contínua $f(x) = 1/x$ leva intervalos compactos do domínio em intervalos compactos

No entanto, essa função leva qualquer intervalo limitado e fechado (ou seja, compacto) do domínio num intervalo limitado e fechado; por exemplo, leva $[-3, -2]$ em $\big[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\big]$. ◎

Em geral, nenhuma função contínua pode levar um intervalo compacto do domínio num intervalo ilimitado.

Proposição 3.17. *A imagem direta por uma função contínua de qualquer intervalo compacto contido no domínio da função é um intervalo limitado.*

Demonstração. De fato, suponha que $[a, b] \subseteq X$ seja um intervalo compacto e que seja ilimitada a imagem direta de $[a, b]$ pela função contínua $f : X \to \mathbb{R}$. Escolhendo, com qualquer $n \in \mathbb{N}$, algum $y_n \in f([a, b])$ tal que $n < |y_n|$, obtemos uma sequência (x_n) de $[a, b]$ tal que $n < |y_n| = |f(x_n)|$, com $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema 2.41 de Bolzano-Weierstrass, essa última sequência possui alguma subsequência convergente. Se (x_{k_n}) denotar uma tal subsequência e se $x_{k_n} \longrightarrow c$, então $k_n \geqslant n$ e $c \in [a, b]$, já que $[a, b]$ é um intervalo fechado. Mas, por continuidade, $f(x_{k_n}) \longrightarrow f(c)$, de modo que $n \leqslant k_n < |f(x_{k_n})| \longrightarrow |f(c)|$, o que é uma contradição. Desse modo, provamos que $f([a, b])$ é um conjunto limitado. □

Tampouco pode função contínua alguma levar um subintervalo compacto do domínio num intervalo não fechado.

Teorema 3.18. (Teorema de Weierstrass – TW) *A imagem direta por uma função contínua de qualquer intervalo compacto contido no domínio da função é um intervalo compacto.*

Em mais palavras, o TW afirma que se $f : X \to \mathbb{R}$ for contínua em $[a, b] \subseteq X$, então existem os valores mínimo m e máximo M de f em $[a, b]$, ou seja, temos $f([a, b]) = [m, M]$; em particular, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$m = f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) = M,$$

qualquer que seja $x \in [a, b]$. Assim, toda função contínua atinge algum valor mínimo e algum valor máximo em cada intervalo fechado e limitado.

Demonstração. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a, b] \subseteq X$. Queremos mostrar que $f([a, b])$ é um intervalo fechado e limitado. Pelo TVI e pela proposição precedente, já estabelecemos que $f([a, b])$ é um intervalo limitado. Denotando $m = \inf f([a, b])$ e $M = \sup f([a, b])$, resta mostrar que $f([a, b]) = [m, M]$.

Mostremos por que $M \in f([a,b])$. Pela propriedade do supremo, existe uma sequência (y_n) de $f([a,b])$ tal que $y_n \longrightarrow M$. Assim, obtemos uma sequência (x_n) de $[a,b]$ tal que $f(x_n) \longrightarrow M$. Pelo Teorema 2.41 de Bolzano-Weierstrass, podemos escolher alguma subsequência convergente (x_{k_n}) de (x_n). Temos $f(x_{k_n}) \longrightarrow M$. Como $[a,b]$ é fechado, temos $x_{k_n} \to c$, com algum $c \in [a,b]$, e a continuidade de f garante que $f(x_{k_n}) \to f(c)$, acarretando que $M = f(c) \in f([a,b])$. De maneira totalmente análoga, podemos mostrar que $m \in f([a,b])$. □

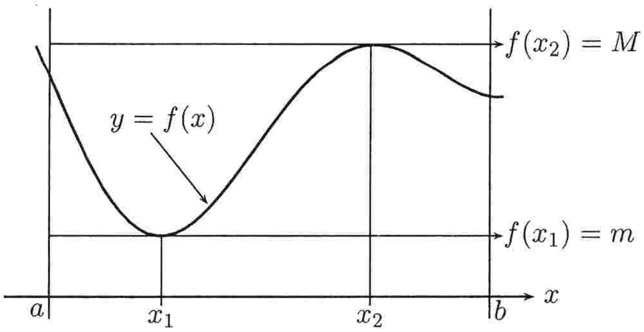


Figura 3.8. O Teorema de Weierstrass

Para terminar esta seção, investigamos as oscilações de funções contínuas em intervalos. Se $f : X \to \mathbb{R}$ for uma função que é limitada num subconjunto não vazio $A \subseteq X$, dizemos que

$$\omega(f, A) = \sup f(A) - \inf f(A) = \sup\left\{|f(c) - f(d)| : c, d \in A\right\}$$

é a *oscilação* de f em A. (Ver Exercício 1.5.7.)

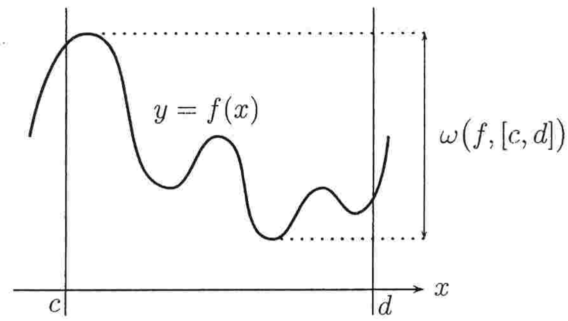


Figura 3.9. A oscilação de f em $[c,d]$

Exemplo 3.19. A função racional definida por $f(x) = 1/x$ é contínua em seu domínio, mas possui oscilações muito grandes em intervalos muito pequenos. De fato, é imediato verificar que, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega\Big(f, \big[\tfrac{1}{2n}, \tfrac{1}{n}\big]\Big) = n.$$

No entanto, as oscilações de f são controladas em subintervalos fechados de intervalos compactos do domínio dessa função, que necessariamente se mantêm afastados da origem. ◎

Em geral, funções contínuas em intervalos compactos têm as oscilações em subintervalos uniformemente controladas.

Proposição 3.20. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $[a,b] \subseteq X$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher algum $r > 0$ tal que*

$$0 \leqslant \omega(f, [c,d]) \leqslant \varepsilon,$$

qualquer que seja o subintervalo $[c,d]$ de $[a,b]$ com $d - c \leqslant r$.

Demonstração. Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $[a, b] \subseteq X$. Queremos mostrar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, sempre podemos escolher algum $r > 0$ de tal forma que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$, quaisquer que sejam $x, y \in [a, b]$ com $|x - y| \leqslant r$.

Digamos que essa afirmação seja falsa, ou seja, digamos que $\varepsilon_0 > 0$ seja tal que, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, sempre existam $x_n, y_n \in [a, b]$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$. Dessa forma construímos duas sequências de $[a, b]$ e, pelo Teorema 2.42 de Bolzano-Weierstrass, podemos supor que (uma subsequência de) (y_n) seja convergente; digamos que $y_n \longrightarrow c \in [a, b]$. Então também $x_n = (x_n - y_n) + y_n \longrightarrow 0 + c = c$ e, por continuidade, ambas as sequências $\big(f(x_n)\big)$ e $\big(f(y_n)\big)$ convergem a $f(c)$, acarretando

$$0 = |f(c) - f(c)| = \lim |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0,$$

o que é uma impossibilidade. □

Exercícios 3.1

3.1.1. Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais contínuas num ponto $\sigma \in X$. Mostre que valem as afirmações seguintes.

(1) $f(\sigma) < g(\sigma)$ se, e só se, existir $r > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, com $x \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$.

(2) $f(\sigma) \leqslant g(\sigma)$ se, e só se, dado qualquer $r > 0$ existir algum $x_0 \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$ tal que $f(x_0) \leqslant g(x_0)$.

(3) (Critério do Confronto) Se $f(\sigma) = g(\sigma)$ e se $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função qualquer tal que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, com $x \in X$, então h é contínua em σ e $f(\sigma) = h(\sigma) = g(\sigma)$.

3.1.2. Mostre que toda função é contínua em cada ponto isolado de seu domínio. Em particular, mostre que toda sequência é uma função contínua.

3.1.3. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, defina a função valor absoluto $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de f por $|f|(x) = |f(x)|$, com $x \in X$. Seja $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que

(1) se f é contínua em σ, então $|f|$ é contínua em σ;

(2) se f é contínua em σ e $f(\sigma) \neq 0$ então, dado qualquer $c > 0$ tal que $|f(\sigma)| > c$, existe algum $r > 0$ tal que $|f(x)| > c$, com $x \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$.

Dê um exemplo de uma função que não é contínua em ponto algum de $\mathbb{R}$ tal que sua função valor absoluto seja contínua em $\mathbb{R}$.

3.1.4. Sejam $\sigma \in X$ um ponto de acumulação de X e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função quaisquer. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) Existe alguma sequência crescente ou decrescente (x_n) de X que converge a σ e tal que $\big(f(x_n)\big)$ diverge ou converge a algum ponto distinto de $f(\sigma)$.

(2) Existe alguma sequência (x_n) de X que converge a σ e tal que $\big(f(x_n)\big)$ diverge ou converge a algum ponto distinto de $f(\sigma)$.

(3) f não é contínua em σ.

(4) Existe algum $\varepsilon_0 > 0$ com a propriedade seguinte: dado qualquer $r > 0$, sempre existe algum $x \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$ tal que $\big|f(x) - f(\sigma)\big| > \varepsilon_0$.

(5) Existe algum $\varepsilon_0 > 0$ com a propriedade seguinte: dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, sempre existe algum $x_n \in \big(\sigma - \frac{1}{n}, \sigma + \frac{1}{n}\big) \cap X$ tal que $\big|f(x_n) - f(\sigma)\big| > \varepsilon_0$.

(6) Existem algum $\varepsilon_0 > 0$ e alguma sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ que converge a σ, mas tal que $\big|f(x_n) - f(\sigma)\big| > \varepsilon_0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

3.1.5. Sejam $\sigma \in X$ um ponto de acumulação de X e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função quaisquer. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes, nas quais, para simplificar, usamos a frase

$$\text{se } x_n \longrightarrow \sigma, \text{ então } f(x_n) \longrightarrow f(\sigma). \tag{3.1}$$

(1) Dada qualquer sequência (x_n) monótona de X, vale (3.1).

(2) Dada qualquer sequência (x_n) monótona de $X - \{\sigma\}$, vale (3.1).

(3) Dada qualquer sequência (x_n) de X, vale (3.1).

(4) Dada qualquer sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$, vale (3.1).

3.1.6. Seja $\sigma \in X$ um ponto do domínio de alguma função f. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) Dada qualquer sequência (x_n) crescente ou decrescente de X que seja convergente a σ, a sequência $\big(f(x_n)\big)$ é convergente a $f(\sigma)$.

(2) f é contínua em σ.

(3) Se (x_n) for alguma sequência de X convergente a σ, então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ é convergente.

(4) Se (x_n) for alguma sequência de X que converge a σ, então a sequência $\big(f(x_n)\big)$ tem alguma subsequência que converge a $f(\sigma)$.

3.1.7. Dados uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq X$, dizemos que a função $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x)$, com $x \in A$, é a *restrição de* f a A, denotada por $f|_A$. (Ver Capítulo 0.)

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Mostre que

(1) se f é contínua em σ, então existe algum $r > 0$ tal que a restrição de f a $(\sigma - r, \sigma + r) \cap X$ é uma função limitada;

(2) f é contínua em σ se, e só se, existe algum $r > 0$ tal que a restrição de f a $(\sigma - r, \sigma + r) \cap X$ é contínua em σ.

3.1.8. Dados uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $B \supseteq X$, dizemos que uma função $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *extensão de* f a B se $g|_B = f$. (Ver exercício precedente.) Seja f a função definida em cada $x \neq 0$ de $\mathbb{R}$ por $f(x) = x/|x|$. Mostre que não existe *extensão contínua* alguma de f a $\mathbb{R}$, ou seja, mostre que se alguma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ for tal que $g(x) = x/|x|$, com $x \neq 0$, então necessariamente g é descontínua (em 0). Repita o exercício, agora com a função racional definida em cada $x \neq 0$ de $\mathbb{R}$ por $f(x) = 1/x$.

3.1.9. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(0) = 0$ e $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, com $x \neq 0$. Mostre que f não é contínua em 0. Repita o exercício trocando o seno pelo cosseno. Mostre que as funções definidas por $\cos(1/x)$ e $\operatorname{sen}(1/x)$ em $\mathbb{R} - \{0\}$ não têm extensões contínuas a $\mathbb{R}$.

3.1.10. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R} - \{0\}$ e defina a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(0) = 0$ e $f(x) = x \cdot g(x)$, com $x \neq 0$. Mostre que se g for limitada, então f é contínua em 0. Mostre que as funções definidas por $x \cdot \cos(1/x)$ e $x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$ em $\mathbb{R} - \{0\}$ têm extensões contínuas a $\mathbb{R}$.

3.1.11. Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e σ um ponto de acumulação qualquer de X que não pertence a X. Mostre que f tem uma extensão contínua a $X \cup \{\sigma\}$ se, e só se, qualquer que seja a sequência (x_n) de X convergente a σ, a sequência $\big(f(x_n)\big)$ for convergente.

3.1.12. No Exercício 1.5.7 definimos a oscilação de uma função limitada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ num subconjunto $Y \subseteq X$ por $\omega(f, Y) = \sup f(Y) - \inf f(Y)$. Sejam, agora, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de X. Defina a *oscilação* de f no ponto σ por

$$\omega_f(\sigma) = \inf\big\{\omega\big(f, [\sigma - r, \sigma + r] \cap X\big) : r > 0\big\}.$$

Mostre que f é contínua em σ se, e só se, $\omega_f(\sigma) = 0$.

3.1.13. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua crescente e $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado. Mostre que a imagem $f(X)$ de X por f é um conjunto não vazio e limitado e que

$$\sup f(X) = f(\sup X) \quad \text{e} \quad \inf f(X) = f(\inf X).$$

Enuncie e demonstre resultado análogo para funções contínuas decrescentes. Mostre que esses resultados são falsos com funções crescentes ou decrescentes descontínuas.

3.1.14. Mostre que se uma função f for contínua no intervalo $[a, b]$, então

$$\max\{f(x) : a \leqslant x \leqslant b\} = \sup\{f(x) : a < x < b\}.$$

Mostre que a igualdade permanece válida trocando máximo e supremo por mínimo e ínfimo. Mostre que esses resultados são falsos com funções descontínuas.

3.1.15. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio qualquer e $f : \overline{X} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$. Mostre que se X for limitado, $f(\overline{X}) = \overline{f(X)}$. Usando o Exercício 2.3.28, conclua que

$$\sup f(\overline{X}) = \sup f(X) \quad \text{e} \quad \inf f(\overline{X}) = \inf f(X).$$

3.1.16. Seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que sua restrição a $(-\infty, b)$ seja crescente. Mostre que se f for contínua em b, então $f(x) \leqslant f(b)$, qualquer que seja $x < b$. Mostre que se f for contínua em b, então f será crescente. Enuncie e mostre os resultados análogo para os três outros tipos de funções monótonas. Enuncie e mostre resultados análogos para funções contínuas em $[a, +\infty)$ e monótonas em $(a, +\infty)$.

3.1.17. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função que é contínua nas extremidades a e b de $[a, b]$. Mostre que se a restrição de f a (a, b) for monótona, então f é monótona (do mesmo tipo).

3.1.18. Mostre que se uma função $f : I \to \mathbb{R}$ for contínua no intervalo I e tal que $f(x) = 0$ em cada x racional de I, então $f(x) = 0$ em cada $x \in I$. Dê um exemplo de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) = 0$ em cada x racional de X, mas não valha $f(x) = 0$ em cada $x \in X$.

3.1.19. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto *simétrico em relação à origem*, ou seja, tal que $x \in X$ se, e só se, $-x \in X$. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ qualquer, defina as partes *par* $f^p : X \to \mathbb{R}$ e *ímpar* $f^i : X \to \mathbb{R}$ de f por

$$f^p(x) = \tfrac{1}{2}\big[f(x) + f(-x)\big], \qquad f^i(x) = \tfrac{1}{2}\big[f(x) - f(-x)\big],$$

com $x \in X$. Mostre que $f^p(-x) = f^p(x)$ e que $f^i(-x) = -f^i(x)$, qualquer que seja $x \in X$.

Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ de domínio X simétrico em relação à origem é *par* se valer $f(-x) = f(x)$, com $x \in X$, e é *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$, com $x \in X$. Conclua que toda função de domínio simétrico em relação à origem é a soma de sua parte par com sua parte ímpar. (Lembre do Exercício 1.5.7.) Tomando $X = \mathbb{R}$ e $f(x) = e^x$, obtenha os gráficos das partes par f^p e ímpar f^i dessa função, denominadas *cosseno* e *seno hiperbólicos*, respectivamente.

Mostre que a função f é contínua (em $\sigma \in X$) se, e só se, as funções parte par e parte ímpar f^p e f^i de f são contínuas (em $\sigma \in X$).

3.1.20. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ qualquer, defina a *parte positiva* $f^+ : X \to \mathbb{R}$ de f e a *parte negativa* $f^- : X \to \mathbb{R}$ de f por

$$f^+(x) = \tfrac{1}{2}\big[|f(x)| + f(x)\big], \qquad f^-(x) = \tfrac{1}{2}\big[|f(x)| - f(x)\big],$$

com $x \in X$. Mostre que, qualquer que seja $x \in X$, valem $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, e conclua que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ e $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$. (Lembre do Exercício 1.3.21.) Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$, com $x \in X = \mathbb{R}$, esboce os gráficos de f, f^+ e f^-. Faça o mesmo trocando o seno pelo cosseno.

Mostre que a função f é contínua (em $\sigma \in X$) se, e só se, as funções parte positiva f^+ e negativa f^- de f são contínuas (em $\sigma \in X$).

3.1.21. Dadas duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$, considere as funções $m, M : X \to \mathbb{R}$ definidas por

$$m(x) = \tfrac{1}{2}\big[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big], \qquad M(x) = \tfrac{1}{2}\big[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big],$$

com $x \in X$. Mostre que $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ em cada $x \in X$ e conclua que $m(x) \leqslant f(x), g(x) \leqslant M(x)$, com $x \in X$. (Lembre do Exercício 1.3.20.) Tomando f e g como as funções seno e cosseno em $X = \mathbb{R}$, esboce os gráficos de m, f, g e M.

Mostre que se duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ forem contínuas (em $\sigma \in X$), então as funções máximo e mínimo $m, M : X \to \mathbb{R}$ de f e g também são contínuas (em $\sigma \in X$). Dê um exemplo de funções descontínuas em algum ponto tais que o mínimo e o máximo sejam contínuos.

3.1.22. Seja f a *função de Dirichlet* dada por $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Estude o comportamento do gráfico da função definida em $\mathbb{R}$ por

$$(1)\ f(x); \qquad (2)\ f(\sqrt{|x|}); \qquad (3)\ x + f(x); \qquad (4)\ x^2 \cdot f(x); \qquad (5)\ x^2 + f(x).$$

Obtenha todos os pontos de continuidade dessas funções.

3.1.23. Mostre que toda função contínua e injetora num intervalo é crescente ou decrescente. (*Sugestão*: use contraposição, o Exercício 1.5.3 e o TVI.)

3.1.24. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua. Mostre que f possui algum *ponto fixo*, ou seja, algum ponto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. (*Sugestão*: considere $g(x) = x - f(x)$.) Mostre que existe algum $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 1 - c$. (*Sugestão*: considere $g(x) = 1 - x - f(x)$.)

3.1.25. Considere as funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que $f(0) = f(1)$.

(1) Dê um exemplo de uma tal função que satisfaça $f(x) \neq f(x + \frac{1}{2})$, em cada $x \in (0, \frac{1}{2})$.

(2) Supondo que $f(\frac{1}{2}) \neq f(0)$, mostre que existe algum ponto $c \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. (*Sugestão*: considere a função $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.)

(3) Generalize os dois itens precedentes de $\frac{1}{2}$ para $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc.

Estabeleça que, a cada instante, existem dois pontos diametralmente opostos (ou seja, *antípodas*) do Equador terrestre nos quais se registra a mesmíssima temperatura.

3.1.26. Defina a *pré-imagem* de um ponto $b \in \mathbb{R}$ qualquer por uma função $f : X \to \mathbb{R}$ qualquer como a imagem inversa $f^{-1}(\{b\}) = \{x \in X : f(x) = b\}$. Mostre se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for crescente ou decrescente, então a pré-imagem de cada ponto $b \in \mathbb{R}$ é um conjunto de, no máximo, um elemento. Mostre que a pré-imagem do ponto $0 \in \mathbb{R}$ pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, com $x \neq 0$, é um conjunto infinito.

3.1.27. Suponha que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenha a propriedade de regularidade seguinte: a pré-imagem de cada ponto $b \in \mathbb{R}$ é um conjunto finito (ou vazio). (Ver exercício precedente.) Mostre que se essa função f satisfaz a PVI, então f é contínua. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, com $x \neq 0$, tem a PVI, mesmo sendo descontínua.

3.1.28. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Usando o exercício precedente (e não utilizando o Corolário 3.13) mostre que f é contínua se, e só se, tem a PVI. Dê um exemplo de uma função monótona $f : X \to \mathbb{R}$ descontínua com a PVI.

3.1.29. Por meio de exemplos, mostre que a imagem direta por uma função contínua de um intervalo fechado pode não ser fechado e de um intervalo limitado pode não ser limitado. Forneça um exemplo de função contínua tal que a imagem direta de algum intervalo ilimitado não fechado seja fechado e limitado.

3.1.30. Mostre que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e só se, é convergente a sequência $(f(x_n))$ definida pela imagem de qualquer sequência convergente (x_n) de X com limite em X.

3.1.31. Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e só se, é um conjunto aberto a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de qualquer conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ aberto. Repita o exercício trocando "aberto" por "fechado".

3.1.32. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Dizemos que f é *uniformemente* contínua se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir algum $\delta > 0$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in X$. Dizemos que f é *lipschitziana* se existir alguma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in X$.

Mostre que toda função lipschitziana é uniformemente contínua e que toda função uniformemente contínua é contínua.

3.1.33. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função de $X \subseteq \mathbb{R}$. Dê um exemplo de uma função contínua em X e de uma sequência (x_n) de Cauchy de X tal que $\big(f(x_n)\big)$ não é de Cauchy. Mostre que se f for uniformemente continua, então f sempre transforma sequências de Cauchy de X em sequências de Cauchy. Mostre que se X for fechado e f for contínua, então f transforma sequências de Cauchy de X em sequências de Cauchy.

3.1.34. Toda função contínua num intervalo fechado e limitado é uniformemente contínua. Essa afirmação é conhecida como Teorema de Heine, em homenagem a Heinrich Heine (1821–1881). (*Sugestão*: use contraposição.)

3.1.35. Mostre que a imagem $f(C)$ de uma função contínua $f : C \to \mathbb{R}$ definida num conjunto compacto $C \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto compacto. (Ver Exercício 2.3.13.)

3.2. Derivada

Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real e $\sigma \in X$ um ponto do domínio de f. Dizemos que f é *derivável em* σ se existir alguma função $\varphi_\sigma = \varphi_\sigma^f : X \to \mathbb{R}$ que seja contínua em σ e tal que valha

$$f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma), \tag{3.2}$$

com qualquer $x \in X$. Nesse caso, dizemos que $\varphi_\sigma(\sigma)$ é a *derivada de* f *em* σ, que denotamos por $f'(\sigma)$.

Como toda função é contínua em pontos isolados de seu domínio, nossa definição de derivada só caracteriza uma propriedade da função nos pontos de acumulação do domínio dessa função. Assim, daqui em diante, sempre que considerarmos a derivabilidade de uma função num ponto de seu domínio, estaremos supondo que esse ponto é um ponto de acumulação do domínio da função. Para simplificar, daqui em diante passamos a supor que o domínio de todas nossas funções são intervalos ou uniões finitas de intervalos de $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.21. Se f é uma função constante, então $\varphi_\sigma(x) = 0$, quaisquer que sejam $x, \sigma \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $f'(\sigma) = 0$, em cada σ. Se $g(x) = x$, então $\varphi_\sigma(x) = 1$, quaisquer que sejam $x, \sigma \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $g'(\sigma) = 1$, em cada σ. Se $h(x) = a + bx$, então $\varphi_\sigma(x) = b$ quaisquer que sejam $x, \sigma \in \mathbb{R}$ e, consequentemente, $h'(\sigma) = b$, em cada σ. Assim, a derivada da função linear afim $h(x) = a + bx$, em cada ponto, é a constante b, que é a *inclinação*, ou o *coeficiente angular*, da reta $y = a + bx$ que constitui o gráfico de h. ⊚

Em geral, a validade de (3.2) em cada $x \in X$ equivale à validade de

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{f(x) - f(\sigma)}{x - \sigma} \tag{3.3}$$

em cada $x \in X - \{\sigma\}$, de modo que f é derivável em σ se, e só se, a função dada pelo quociente do lado direito de (3.3) tem uma extensão φ_σ a X que é contínua em σ. Decorre disso que existe, no máximo, uma única função φ_σ que satisfaça (3.2). Além disso, por ser φ_σ contínua em σ, só existe uma única opção para o valor da extensão de (3.3) em σ e, portanto, a derivada de f em σ tem esse valor $\varphi_\sigma(\sigma)$ como única opção.

Observe que (3.3) significa que cada $\varphi_\sigma(x)$ é a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(\sigma, f(\sigma))$ e $(x, f(x))$ do gráfico de f. Quando f for derivável em σ, a continuidade de φ_σ em σ garante que as inclinações $\varphi_\sigma(x_n)$ das retas secantes tendem à a inclinação $\varphi_\sigma(\sigma)$ de uma reta que é *tangente* ao gráfico de f no ponto $(\sigma, f(\sigma))$, sempre que $x_n \longrightarrow \sigma$ em X. Essa inclinação $\varphi_\sigma(\sigma)$ é a derivada $f'(\sigma)$ de f em σ.

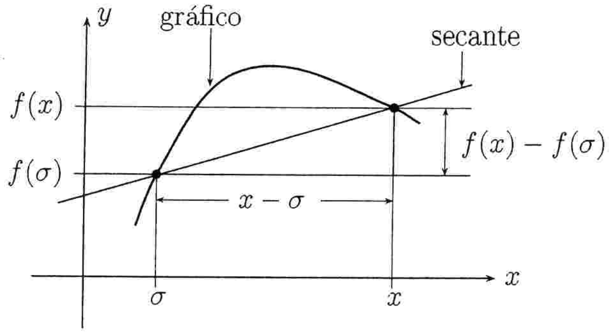


Figura 3.10. A secante pelos pontos $(\sigma, f(\sigma))$ e $(x, f(x))$ do gráfico

Assim, em particular, se uma função f for derivável em σ, dizemos que a reta de equação

$$y = f(\sigma) + f'(\sigma)(x - \sigma)$$

é *tangente* ao gráfico de f no ponto $(\sigma, f(\sigma))$. Nesse caso, a função f e a função linear afim $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada, em cada $x \in \mathbb{R}$, por

$$h(x) = f(\sigma) + f'(\sigma)(x - \sigma)$$

têm valor $f(\sigma)$ e derivada $f'(\sigma)$ iguais em σ.

Todas as derivadas e as respectivas funções φ_σ no Exemplo 3.21 foram constantes. É importante observar que, em geral, a função φ_σ dada em (3.2) depende do particular ponto σ sob consideração.

Exemplo 3.22. Se $f(x) = a + bx + cx^2$ for uma função quadrática, então

$$f(x) - f(\sigma) = b(x - \sigma) + c(x^2 - \sigma^2) = [b + c(x + \sigma)](x - \sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma),$$

quaisquer que sejam $x, \sigma \in \mathbb{R}$. Assim, f é derivável em cada ponto σ de $\mathbb{R}$, com derivada $f'(\sigma) = \varphi_\sigma(\sigma) = b + c(\sigma + \sigma) = b + 2c\sigma$, pois $\varphi_\sigma(x) = b + c(x + \sigma)$ é contínua em σ. Observe que essas funções φ_σ dependem de σ.

Fixando, por exemplo, $a = b = 0$ e $c = \sigma = 1$, temos $\varphi_1(x) = x + 1$ e podemos ver geometricamente a variação contínua da inclinação $x + 1$ da reta secante da parábola $y = x^2$ pelos pontos (x, x^2) e $(1, 1)$, passando pela inclinação 2 da reta tangente $y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$ à parábola em $(1, 1)$. (Ver Figuras 3.11 e 3.12.) ◎

Para obter a derivada de potências inteiras maiores de x, podemos proceder analogamente (ver Exercício 3.2.1) ou, então, utilizar indução na potência inteira e a regra operacional da derivada do produto, apresentada na Proposição 3.27. (Ver Exemplo 3.28.) Para potências mais gerais, ver os Exemplos 3.29, 3.32 e 3.34.

Exemplo 3.23. Um objeto em *movimento retilíneo* permanece confinado a uma reta durante sua trajetória. Ao longo de séculos tentou-se entender a relação entre o tempo t decorrido e a distância s percorrida em várias situações.

Num movimento uniforme, o objeto percorre distâncias iguais em tempos iguais, digamos, λ unidades de distância a cada unidade de tempo. A distância total percorrida desde uma posição inicial s_0, a partir da qual inicia a medição, e o enésimo intervalo de tempo é dada por $s(t) = s_0 + n\lambda$, o é uma simples relação *afim* entre a distância percorrida e o tempo decorrido.

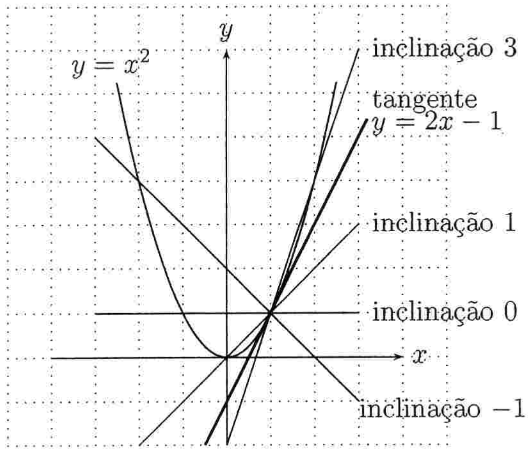


Figura 3.11. A variação contínua das secantes por $(1,1)$

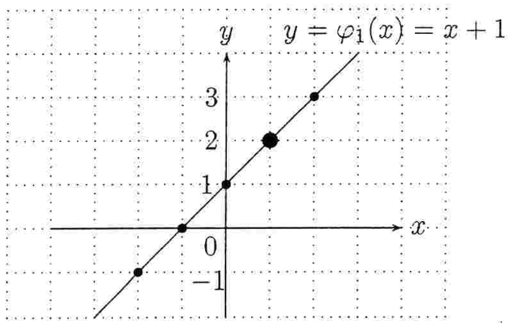


Figura 3.12. As inclinações das secantes

Bem mais complicado foi entender um movimento não uniforme, por exemplo, o de um objeto em queda livre. No século XIV, Oresme e outros conseguiram avançar os estudos de Arquimedes e estabeleceram que a distância percorrida por um objeto em movimento uniformemente acelerado no *segundo* intervalo de tempo é o triplo da distância percorrida no primeiro intervalo de tempo.

Foi só no início do século XVII, no alto de sua carreira científica, que Galileu estendeu aquela descoberta, mostrando que as distâncias percorridas no *terceiro* e no *quarto* intervalos de tempo por um objeto em movimento uniformemente acelerado são o quíntuplo e o séptuplo da distância percorrida no primeiro intervalo de tempo. Denotando por s_n a distância total percorrida num movimento uniformemente acelerado desde uma posição inicial s_0, a partir da qual inicia a medição, até a quarta unidade de tempo, obtemos $s_1 = s_0 + \mu$, $s_2 = s_1 + 3\mu = s_0 + 4\mu$, $s_3 = s_2 + 5\mu = s_0 + 9\mu$ e $s_4 = s_3 + 7\mu = s_0 + 16\mu$, ou seja, $s_n = s_0 + n^2\mu$, com $0 \leqslant n \leqslant 4$. Isso indica uma relação *quadrática* entre os deslocamentos e o tempo decorrido.

No caso de um objeto lançado verticalmente para cima, em queda livre, a altura s em que se encontra esse objeto é obtida subtraindo do deslocamento vertical para cima (produzido por movimento uniforme) o deslocamento vertical para baixo (produzido por movimento uniformemente acelerado) da queda livre. Se a altura inicial do objeto for s_0, sua velocidade inicial for $\lambda = v_0 > 0$ e os intervalos de tempo forem contínuos, ou seja, variando com $t > 0$, então sua altura $s(t)$ no eixo s no instante de tempo t é dada por $s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, em que g é a constante que denota a aceleração da gravidade.

A *velocidade média* desse objeto ao longo de um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é definida pela razão entre a variação da altura $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ e o tempo decorrido $\Delta t = t_2 - t_1 \neq 0$. Assim, a velocidade média desse objeto em queda livre é dada por

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\left(s_0 + v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2\right) - \left(s_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2\right)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{v_0(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}g\left(t_2^2 - t_1^2\right)}{t_2 - t_1} = v_0 - \tfrac{1}{2}g(t_2 + t_1). \end{aligned}$$

Fixando t_1 e variando t_2, vemos que as velocidades médias variam continuamente e que, no próprio instante t_1 temos uma "velocidade média" igual a $v_0 - \frac{1}{2}g(t_1 + t_1) = v_0 - gt_1$. Como isso não pode ser uma velocidade média, essa abstração física recebe o nome de *velocidade instantânea*.

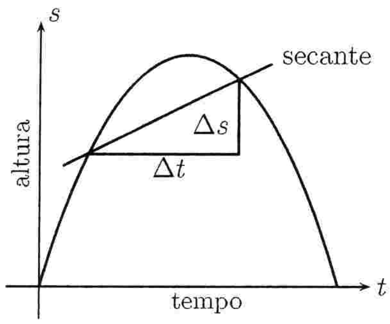


Figura 3.13. Movimento retilíneo uniformemente acelerado

Desse modo, a velocidade instantânea $v(t) = v_0 - gt$ do objeto em queda livre não é nada mais do que a derivada $s'(t)$ da função altura $s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. (Ver exemplo precedente.) Da mesma forma, a velocidade instantânea de um objeto em movimento uniforme, que percorre linearmente a distância $s(t) = s_0 + \lambda t$, é dada pela derivada $v(t) = s'(t) = \lambda$ da função posição, ou seja, sua velocidade constante.

Isso é generalizado para qualquer movimento retilíneo, mesmo se não for uniforme ou uniformemente acelerado. Se $s(t)$ denota a posição ocupada por um objeto em movimento retilíneo, então a derivada $v(t) = s'(t)$ de s em t é denominada *velocidade* do objeto. ◎

Da relação $f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma)$ e da continuidade de φ_σ em σ decorre que também f é contínua em σ. Destacamos esse resultado.

Proposição 3.24. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $\sigma \in X$, então f é contínua em σ.* □

A afirmação recíproca dessa proposição não é válida.

Exemplo 3.25. A função valor absoluto $f(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é derivável em $\sigma = 0$. De fato, $f(x) = x$ com $x > 0$, o que força $\varphi_0(x) = 1$ em (3.3) e $f(x) = -x$ com $x < 0$, o que força $\varphi_0(x) = -1$. No entanto, sabemos que não existe função alguma que seja contínua em 0, constante e igual a -1 em $(-\infty, 0)$ e constante e igual a 1 em $(0, \infty)$. ◎

No exemplo precedente, a função valor absoluto é derivável em todos os pontos de $\mathbb{R} - \{0\}$. No entanto, uma função pode perfeitamente não ser derivável em ponto algum (como a função de Dirtichlet) ou, então, ser derivável somente em um único ponto, da mesma forma como pode ser contínua somente em um único ponto.

Exemplo 3.26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 2x - 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Essa função só é contínua em 1, onde também é derivável. De fato, usando as contas dos Exemplos 3.21 e 3.22, obtemos $\varphi_1(x) = x + 1$, com $x \in \mathbb{Q}$, e $\varphi_1(x) = 2$, com $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Assim, φ_1 é contínua em 1 e f é derivável em 1, com $f'(1) = \varphi_1(1) = 2$; essa é a derivada comum das duas partes de f, cujo gráfico "pula" entre a parábola $y = x^2$ e sua reta tangente em $(1, 1)$, dada por $y = 2x - 1$. (Ver Exemplo 3.7.) ◎

Propriedades Operacionais da Derivada

Vejamos as propriedades algébricas da derivada. A soma ou a diferença de duas funções deriváveis num ponto são deriváveis e as derivadas são dadas pela soma ou diferença das derivadas dessas funções nesse ponto. Também é derivável qualquer múltiplo de uma função derivável, ou seja, combinações lineares de funções deriváveis são deriváveis. No Exemplo 3.21 isso já pode ser observado, pois a derivada da combinação linear $h(x) = a + bx$ é a combinação linear das derivadas das funções $f(x) = a$ e $g(x) = x$.

Já no Exemplo 3.22, a derivabilidade e a derivada das funções quadráticas poderiam ter sido obtidas pela regra operacional seguinte, como a derivada do produto da função $g(x) = x$ por si mesmo. No entanto, o produto da derivada $g'(x) = 1$ de g por si mesmo resulta não ser a derivada do produto da função g por si mesmo e, em geral, o produto de duas funções deriváveis num ponto é derivável nesse ponto, mas a derivada do produto *não* é dada pelo produto das derivadas.

Proposição 3.27. (Regras Operacionais da Derivação) *Se as duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ são deriváveis em algum ponto $\sigma \in X$, então qualquer combinação linear dessas funções e o produto dessas funções também são deriváveis nesse ponto e valem as relações seguintes.*

(1) $(f + \lambda \cdot g)'(\sigma) = f'(\sigma) + \lambda \cdot g'(\sigma)$, *com qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixado e*

(2) $(f \cdot g)'(\sigma) = f'(\sigma) \cdot g(\sigma) + f(\sigma) \cdot g'(\sigma)$.

Demonstração. Sejam φ_σ e ψ_σ duas funções contínuas em σ tais que, dado $x \in X$,

$$f(x) = f(\sigma) + \varphi_\sigma(x)(x - \sigma) \qquad \text{e} \qquad g(x) = g(\sigma) + \psi_\sigma(x)(x - \sigma).$$

Fixado $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer, somamos as expressões para $f(x)$ e $g(x)$ e obtemos

$$f(x) + \lambda \cdot g(x) = f(\sigma) + \lambda \cdot g(\sigma) + \big(\varphi_\sigma(x) + \lambda \cdot \psi_\sigma(x)\big)(x - \sigma)$$

e, portanto,

$$(f + \lambda \cdot g)(x) = (f + \lambda \cdot g)(\sigma) + \eta_\sigma(x)(x - \sigma),$$

onde $\eta_\sigma(x) = \varphi_\sigma(x) + \lambda \cdot \psi_\sigma(x)$ define uma função contínua em σ. Assim, $f + \lambda \cdot g$ é derivável em σ, com

$$(f + \lambda \cdot g)'(\sigma) = \eta_\sigma(\sigma) = f'(\sigma) + \lambda \cdot g'(\sigma).$$

Para provar a derivabilidade do produto, multiplicamos as expressões para $f(x)$ e $g(x)$ explicitadas no início da demonstração e obtemos

$$(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(\sigma) + \eta_\sigma(x)(x - \sigma),$$

com

$$\eta_\sigma(x) = \varphi_\sigma(x) \cdot g(x) + f(\sigma) \cdot \psi_\sigma(x) + \varphi_\sigma(x) \cdot \psi_\sigma(x) \cdot (x - \sigma),$$

em cada $x \in X$. Por ser derivável, g é contínua em σ, de modo que η_σ define uma função contínua em σ e, portanto, $f \cdot g$ é derivável em σ, com derivada dada por $\eta_\sigma(\sigma)$. Resta lembrar que $\varphi_\sigma(\sigma) = f'(\sigma)$ e $\psi_\sigma(\sigma) = g'(\sigma)$ para obter a relação do enunciado. □

Seja $A \subseteq X$ um intervalo (ou uma união finita de intervalos) contido no domínio X de uma função f. Dizemos que *f é derivável em $A \subseteq X$* se f for derivável em cada ponto de A. Nesse caso, obtemos uma nova função, a *função derivada f'* : $A \to \mathbb{R}$ de f em A, definida, em cada $x \in A$, pela derivada $f'(x)$ de f em x. Dizemos, simplesmente, que uma função é *derivável* se f for derivável em cada ponto de seu domínio. Do ponto de vista da função derivada, a função f é uma *primitiva*, ou *antiderivada*, de f'.

Exemplo 3.28. As funções lineares afins $f(x) = a + bx$ e as quadráticas $f(x) = a + bx + cx^2$ são deriváveis (em $\mathbb{R}$). Mais que isso, com as regras operacionais das derivadas, podemos ver que qualquer função polinomial é derivável (em $\mathbb{R}$). De fato, já vimos no Exemplo 3.21 que se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$, portanto, pela regra do produto, decorre que se $f(x) = x^2 = x \cdot x$, então $f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$. Por indução, decorre que se $f(x) = x^{n-1}$ é derivável com derivada $f'(x) = (n-1)x^{n-2}$, então $f(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x$ é derivável com derivada $f'(x) = (n-1)x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \cdot 1 = nx^{n-1}$, quaisquer que sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. ◎

Vejamos a derivada de funções racionais.

Exemplo 3.29. Seja $f(x) = x^{-1} = 1/x$, com $x \neq 0$. Então

$$f(x) - f(\sigma) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma - x}{x\sigma} = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma),$$

quaisquer que sejam $x, \sigma \neq 0$, onde $\varphi_\sigma(x) = -1/(x\sigma)$ é contínua em σ. Logo, f é derivável em σ e $f'(\sigma) = \varphi_\sigma(\sigma) = -1/\sigma^2$. Assim, f é derivável, com $f'(x) = -1/x^2 = -x^{-2}$, em cada $x \neq 0$. Em particular, a fórmula da derivada $f'(x) = nx^{n-1}$ da função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ fixado, do Exemplo 3.28, também é válida com $n = -1$. ◎

Podemos imitar o raciocínio do exemplo precedente para calcular a derivada da recíproca $1/g$ de qualquer função e, assim, chegar na derivabilidade de qualquer função racional. Em vez disso, utilizamos o Exemplo 3.29 e a regra da cadeia que é, talvez, o resultado mais importante sobre derivadas.

Teorema 3.30. (Regra da Cadeia - RC) *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $\sigma \in X$, $g : Y \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $\xi \in Y$ e suponha que $f(X) \subseteq Y$, com $f(\sigma) = \xi$. Então a função composta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em σ e*

$$(g \circ f)'(\sigma) = g'(\xi) \cdot f'(\sigma) = g'\big(f(\sigma)\big) \cdot f'(\sigma).$$

Demonstração. Sejam φ_σ uma função contínua em σ e ψ_σ uma função contínua em ξ tais que

$$f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma), \qquad \text{com } x \in X \quad \text{e}$$
$$g(x) - g(\xi) = \psi_\xi(x)(x - \xi), \qquad \text{com } x \in Y.$$

Então

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\sigma) &= g(f(x)) - g(f(\sigma)) = \psi_\xi(f(x))(f(x) - f(\sigma)) \\ &= \psi_\xi(f(x)) \cdot \varphi_\sigma(x)(x - \sigma) = \eta_\sigma(x)(x - \sigma),\end{aligned}$$

onde $\eta_\sigma(x) = \psi_\xi(f(x)) \cdot \varphi_\sigma(x)$, com $x \in X$. Por ser derivável, f é contínua em σ, de modo que a composta $\psi_\xi \circ f$ é contínua em σ e, portanto, o produto η_σ é uma função contínua em σ. Assim, a composta $g \circ f$ é derivável em σ, com derivada dada pelo produto $\eta_\sigma(\sigma) = \psi_\xi(\xi) \cdot \varphi_\sigma(\sigma) = g'(\xi) \cdot f'(\sigma)$. □

Corolário 3.31. *Considere duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis em algum ponto $\sigma \in X$ e suponha que $g(\sigma) \neq 0$. Então existe $r > 0$ tal que o quociente f/g está definido na interseção $(\sigma - r, \sigma + r) \cap X$ e é derivável em σ, com*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(\sigma) = \frac{1}{[g(\sigma)]^2}\big(f'(\sigma) \cdot g(\sigma) - f(\sigma) \cdot g'(\sigma)\big).$$

Demonstração. Seja g uma função derivável em σ, com $g(\sigma) \neq 0$. Por continuidade de g em σ (Proposição 3.24), a permanência do sinal (Lema 3.3) garante a existência de $r > 0$ tal que $g(x) \neq 0$, qualquer que seja $x \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$. Denotemos $h(x) = 1/x$, com $x \neq 0$. Pela RC e o Exemplo 3.29, a composta $h \circ g : (\sigma - r, \sigma + r) \cap X \to \mathbb{R}$, dada por $h(g(x)) = 1/g(x)$, é derivável em σ, com derivada

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(\sigma) = (h \circ g)'(\sigma) = h'(g(\sigma)) \cdot g'(\sigma) = -\frac{1}{[g(\sigma)]^2} \cdot g'(\sigma).$$

Sejam f e g duas funções deriváveis em σ, com $g(\sigma) \neq 0$. A relação entre as derivadas de f e g e do quociente de f por g, a saber,

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(\sigma) = \Big(f \cdot \frac{1}{g}\Big)'(\sigma) = f'(\sigma) \cdot \frac{1}{g(\sigma)} + f(\sigma) \cdot \Big(\frac{1}{g}\Big)'(\sigma) = \frac{1}{[g(\sigma)]^2}\big(f'(\sigma) \cdot g(\sigma) - f(\sigma) \cdot g'(\sigma)\big),$$

decorre, agora, da regra da derivada do produto. □

Exemplo 3.32. Como o quociente de funções deriváveis é derivável e toda função polinomial é derivável (ver Exemplo 3.28), decorre que qualquer função racional é derivável. Em particular, a derivada

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

da função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ fixado, do Exemplo 3.28, também é válida com potências n inteiras negativas, desde que lembremos que, nesse caso, o domínio da função deixa de contar com a origem. ◎

Para obter a derivada de potências fracionárias $f(x) = x^{1/n}$, é conveniente interpretá-las como funções inversas de potências inteiras $g(x) = x^n$. (Ver Exemplo 3.15.)

Proposição 3.33. (Derivada da Inversa) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e injetora no intervalo I. Se f é derivável em algum ponto σ de I e se $f'(\sigma) \neq 0$, então a função inversa f^{-1} de f é derivável em $\xi = f(\sigma)$ e vale*

$$(f^{-1})'(\xi) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))} = \frac{1}{f'(\sigma)}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.14, a função inversa $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ de f é contínua e injetora no intervalo $J = f(I)$, com $g(J) = I$. Seja $\varphi_\sigma : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em σ tal que $f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma)$, com $x \in I$. Substituindo, nessa expressão, $f(x)$, $f(\sigma)$, x e σ por y, ξ, $g(y)$ e $g(\xi)$, respectivamente, obtemos $y - \xi = \varphi_\sigma(g(y))(g(y)) - g(\xi)$, com $y \in J$. Por hipótese, $(\varphi_\sigma \circ g)(\xi) = \varphi_\sigma(\sigma) = f'(\sigma) \neq 0$. Como g é contínua em J e φ_σ é contínua em σ, decorre que $\varphi_\sigma \circ g : J \to \mathbb{R}$ é contínua em ξ e $(\varphi_\sigma \circ g)(\xi) \neq 0$. Pela permanência do sinal (Lema 3.3), existe $r > 0$ tal que $(\varphi_\sigma \circ g)(y) \neq 0$, qualquer que seja $y \in (\xi - r, \xi + r) \cap J$. Segue que a recíproca $\eta_\xi = 1/(\varphi_\sigma \circ g) : (\xi - r, \xi + r) \cap J \to \mathbb{R}$ de $\varphi_\sigma \circ g$ é contínua em ξ e satisfaz

$$\eta_\xi(y)(y - \xi) = g(y) - g(\xi),$$

com $y \in (\xi - r, \xi + r) \cap J$. Isso mostra que a inversa g de f é derivável em ξ, com derivada $\eta_\xi(\xi) = 1/f'(\sigma)$. □

Exemplo 3.34. Em $(0,+\infty)$, a função raiz enésima $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ é a função inversa da função derivável $f(x) = x^n$, que tem derivada $f'(x) = nx^{n-1} > 0$, com $x > 0$. Assim, pela Proposição 3.33, g é derivável em $(0,+\infty)$ e tem derivada

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \tfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1},$$

com $x > 0$. Como $h(x) = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$ é a composta de $f(x) = x^m$ com $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ em $(0,+\infty)$, a RC garante que $h = f \circ g$ é derivável em $(0,+\infty)$ e tem derivada

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = m\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \tfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} = \tfrac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1},$$

com $x > 0$. Assim, provamos que a função potência $f(x) = x^r$, com expoente $r \in \mathbb{Q}$ fixado, é derivável, com derivada dada por $f'(x) = rx^{r-1}$, qualquer que seja $x > 0$. ◎

Nos exemplos e exercícios utilizamos, também, a derivabilidade das funções exponencial e trigonométricas, com suas derivadas conhecidas (o que só veremos no Capítulo 4). Assim, denotando $f(x) = e^x, g(x) = \operatorname{sen} x$ e $h(x) = \cos x$, temos $f'(x) = e^x, g'(x) = \cos x$ e $h'(x) = -\operatorname{sen} x$, com $x \in \mathbb{R}$. Decorre da Proposição 3.33 que a função $k(x) = \log x$ é derivável e

$$k'(x) = \frac{1}{f'(k(x))} = \frac{1}{f(k(x))} = \frac{1}{x},$$

com $x > 0$. Em particular, vemos que, fixado $\lambda \in \mathbb{R}$, a função potência $f(x) = x^\lambda$ é derivável, com derivada

$$f'(x) = \lambda x^{\lambda-1},$$

em qualquer $x > 0$. De fato, $f(x) = x^\lambda = e^{\lambda \cdot \log x}$ e, portanto, pela RC,

$$f'(x) = e^{\lambda \cdot \log x} \cdot \lambda\, \frac{1}{x} = x^\lambda \cdot \lambda\, \frac{1}{x} = \lambda\, x^{\lambda-1},$$

em qualquer $x > 0$. Isso generaliza o exemplo precedente.

Derivada e Crescimento

Funções crescentes e deriváveis podem ter derivada nula em algum ponto, como sucede na origem com a cúbica definida por $f(x) = x^3$, que é crescente. No entanto, funções deriváveis e não decrescentes (não crescentes) não podem ter derivada negativa (positiva) alguma.

Proposição 3.35. *Seja f uma função definida num intervalo.*

(1) *Se f for não decrescente, então $f'(x) \geqslant 0$ em cada x no qual f for derivável.*

(2) *Se f for não crescente, então $f'(x) \leqslant 0$ em cada x no qual f for derivável.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $\sigma \in I$ e tomemos a (única) função $\varphi_\sigma : I \to \mathbb{R}$ que é contínua em σ e satisfaz

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{f(x) - f(\sigma)}{x - \sigma},$$

qualquer que seja $x \neq \sigma$ de I, conforme (3.3). Supondo que f seja não decrescente, temos $f(x) \leqslant f(\sigma)$, com $x < \sigma$, de modo que $x - \sigma < 0$ e, também, $f(x) - f(\sigma) \leqslant 0$; analogamente, temos $f(\sigma) \leqslant f(x)$, com $\sigma < x$, de modo que $x - \sigma > 0$ e $f(x) - f(\sigma) \geqslant 0$. Assim, em cada $x \neq \sigma$ de I temos $\varphi_\sigma(x) \geqslant 0$ e, portanto, $f'(\sigma) = \varphi_\sigma(\sigma) \geqslant 0$, pela permanência do sinal de φ_σ em σ. A demonstração no caso não crescente é análoga. □

Se alguma função tiver derivada positiva (negativa) em algum ponto, nada garante que ela seja crescente (decrescente), nem mesmo numa pequena vizinhança desse ponto. (Ver Exercício

3.2.15.) Uma derivada não nula num único ponto apenas garante que a função troca de quadrante nesse ponto, ou seja, *localmente*, o gráfico da função passa de um lado da reta horizontal $y = f(\sigma)$ para o outro lado dessa reta em $(\sigma, f(\sigma))$, como afirma o próximo resultado.

Lema 3.36. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $\sigma \in X$. Se $f'(\sigma) \neq 0$, então existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq f(\sigma)$, qualquer que seja $x \in X$ com $0 < |x - \sigma| < r$. Mais precisamente,*

(1) *se $f'(\sigma) > 0$, então existe $r > 0$ tal que vale $f(x_1) < f(\sigma) < f(x_2)$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in X$ com $\sigma - r < x_1 < \sigma < x_2 < \sigma + < r$;*

(2) *se $f'(\sigma) < 0$, então existe $r > 0$ tal que vale $f(x_1) > f(\sigma) > f(x_2)$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in X$ com $\sigma - r < x_1 < \sigma < x_2 < \sigma + < r$.*

Demonstração. Seja $\varphi_\sigma : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em σ tal que

$$f(x) - f(\sigma) = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma),$$

qualquer que seja $x \in X$. Vejamos o caso em que $\varphi_\sigma(\sigma) = f'(\sigma) > 0$. Por continuidade de φ_σ em σ, a permanência do sinal (Lema 3.3) garante a existência de $r > 0$ tal que $\varphi_\sigma(x) > 0$, com $x \in X$ satisfazendo $\sigma - r < x < \sigma + r$. Dados quaisquer $x_1, x_2 \in X$ tais que $\sigma - r < x_1 < \sigma < x_2 < \sigma + r$, temos $x_1 - \sigma < 0 < x_2 - \sigma$, de modo que, para manter o sinal positivo de $\varphi_\sigma(x)$ em (3.3), devemos ter $f(x_1) - f(\sigma) < 0 < f(x_2) - f(\sigma)$. Isso demonstra o caso $f'(\sigma) > 0$; o outro caso é inteiramente análogo. □

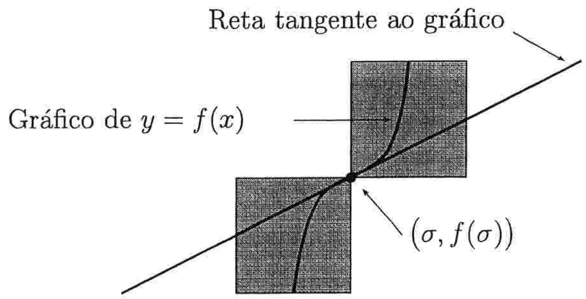


Figura 3.14. A derivada $f'(\sigma) > 0$ força o gráfico a cruzar a reta $y = f(\sigma)$ e permanecer, pelo menos localmente, nos quadrantes destacados

Para garantir que uma função seja crescente (decrescente), precisamos controlar a derivada em *todos* os pontos, e não só em um. Para ver isso, começamos com um resultado muito intuitivo em termos de velocidades, a saber, que as velocidades (instantâneas) ao longo de um intervalo de tempo não podem ser todas menores nem todas maiores do que a velocidade média nesse intervalo.

Teorema 3.37. (Desigualdade do Valor Médio) *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $[a, b] \subseteq X$, então existem $c_1, c_2 \in [a, b]$ tais que*

$$f'(c_1) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(c_2).$$

Demonstração. À maneira da prova alternativa do TBW, construímos uma sequência de intervalos encaixados que tendem a um ponto em que a derivada não é menor do que a inclinação das retas secantes nos intervalos encaixados. Mais precisamente, dados $x < y$ de X, denotemos a inclinação da reta secante pelos pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ do gráfico de f por

$$\varphi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Queremos mostrar que existe $c_2 \in [a, b]$ tal que $\varphi(a, b) \leqslant f'(c_2)$.

Pelo Exercício 1.3.14, dado qualquer ponto $c \in (a, b)$ entre $x_0 = a$ e $y_0 = b$, a inclinação $\varphi(a, b)$ não é maior do que ambas as inclinações $\varphi(a, c)$ e $\varphi(c, b)$. Assim, tomando $c = \frac{1}{2}(b - a)$ como o ponto médio, ou temos $\varphi(a, b) \leqslant \varphi(a, c)$ ou, então, $\varphi(a, b) \leqslant \varphi(c, b)$. Denotamos $x_1 = a, y_1 = c$ no primeiro e $x_1 = c, y_1 = b$ no segundo caso. Se as três inclinações forem iguais, escolhemos o intervalo da esquerda.

Continuando esse processo, obtemos duas sequências (x_n) e (y_n) de $[a, b]$ tais que $x_n < y_n$ e $\varphi(a, b) \leqslant \varphi(x_n, y_n)$, com $n \in \mathbb{N}$. A Proposição 1.28 garante que existe um ponto c_2 na interseção de todos os intervalos $[x_n, y_n]$ e, como $y_n - x_n = 2^{-n}|b - a| \longrightarrow 0$, esse ponto é único. Por hipótese, f é derivável em c_2 e, então, o Exercício 3.2.4 garante que $\varphi(x_n, y_n) \longrightarrow f'(c_2)$. Pela permanência do sinal, de $\varphi(a, b) \leqslant \varphi(x_n, y_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, decorre $\varphi(a, b) \leqslant f'(c_2)$.

Como $(-f)' = -f'$, podemos obter a outra desigualdade trocando f com $-f$. □

Corolário 3.38. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ que é derivável em cada ponto interior do intervalo.*

(1) *Se $f'(x) > 0$ em cada x interior de I, então f é crescente.*

(2) *Se $f'(x) \geqslant 0$ em cada x interior de I, então f é não decrescente.*

(3) *Se $f'(x) = 0$ em cada x interior de I, então f é constante.*

(4) *Se $f'(x) \leqslant 0$ em cada x interior de I, então f é não crescente.*

(5) *Se $f'(x) < 0$ em cada x interior de I, então f é decrescente.*

Demonstração. Pelo Exercício 3.1.17, uma função que é contínua num intervalo e monótona no interior do intervalo, é monótona (de mesmo tipo). Assim, basta provar o corolário para funções $f : I \to \mathbb{R}$ deriváveis num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Vamos supor que $f'(x) \geqslant 0$ em cada $x \in I$, e mostremos que f é não decrescente. Dados quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$, o teorema garante que $\varphi(a, b) \geqslant 0$, portanto, como $b - a > 0$, resulta $f(b) - f(a) \geqslant 0$, ou seja, $f(a) \leqslant f(b)$. Como a, b foram tomados arbitrariamente no intervalo I, mostramos que f é não decrescente. Isso prova a segunda afirmação; a demonstração das outras é inteiramente análoga. Observe que a terceira afirmação decorre da segunda e da quarta. □

Corolário 3.39. *Se duas funções forem deriváveis num intervalo e tiverem a mesma derivada em cada ponto interior, então essas funções diferem por uma constante nesse intervalo.*

Demonstração. O terceiro item do corolário precedente aplicado à diferença das duas funções garante que essa diferença é constante. □

O Teorema do Valor Médio

Seja $\sigma \in X$ um ponto qualquer do domínio de uma função real $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que σ é um *ponto crítico* de f se f não for derivável em σ ou se f for derivável em σ, mas $f'(\sigma) = 0$. Frizamos que todo ponto crítico de uma função pertence ao domínio da função.

Exemplo 3.40. As funções valor absoluto, definida por $f_1(x) = |x|$, e a cúbica, definida por $f_2(x) = x^3$ têm um único ponto crítico, a origem. De fato, f_1 não é derivável em 0 (Exemplo 3.25) e a cúbica é derivável, com derivada $f_2'(x) = 3x^2$, que se anula em $x = 0$. A função racional $f_3(x) = 1/x$ não tem ponto crítico, pois é derivável, com derivada $f_3'(x) = -x^{-2} \neq 0$, em cada ponto de seu domínio. ◎

Dizemos que σ é um *ponto de máximo local* de f se existir algum $r > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(\sigma)$, qualquer que seja $x \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$. Nesse caso, dizemos que f atinge um máximo local em σ e que $f(\sigma)$ é um *valor máximo local* de f. Analogamente, dizemos que σ é um *ponto de* *mínimo local* de f, que f atinge um mínimo local em σ e que $f(\sigma)$ é um *valor mínimo local* de f, se existir algum $r > 0$ tal que $f(x) \geqslant f(\sigma)$, qualquer que seja $x \in (\sigma - r, \sigma + r) \cap X$. Finalmente, dizemos que σ é um *ponto de extremo local* de f, que f atinge um extremo local em σ e que $f(\sigma)$ é um *valor extremo local* de f, se σ for um ponto de máximo ou mínimo local de f.

Por outro lado, se $f(x) \leqslant f(\sigma)$, com $x \in X$, dizemos que σ é um *ponto de máximo global* de f, que f atinge um máximo global em σ e que $f(\sigma)$ é um *valor máximo global* de f. Analogamente, definimos ponto de mínimo global, valor mínimo global, ponto de extremo global e valor extremo global.

O primeiro resultado que apresentamos é atribuído a Pierre de Fermat (1601–1665).

Teorema 3.41. (Teorema de Fermat) *Se uma função atinge um extremo local num ponto interior de seu domínio, então esse ponto é crítico.*

Demonstração. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e $\sigma \in X$ um ponto interior de X tal que f é derivável em σ e $f'(\sigma) \neq 0$. Basta mostrar que f não atinge um valor extremo em σ.

Ora, pelo Lema 3.36, se $f'(\sigma) > 0$, podemos escolher $r > 0$ tal que $f(x_1) < f(\sigma) < f(x_2)$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in X$ satisfazendo $\sigma - r < x_1 < \sigma < x_2 < \sigma + r$. Como σ é um ponto interior de X, efetivamente existem pontos $x_1 < \sigma < x_2$ de X nos quais $f(x_1) < f(\sigma) < f(x_2)$, de modo que $f(\sigma)$ não é um valor extremo local de f. Analogamente, estabelecemos que $f(\sigma)$ não é um valor extremo local de f no caso em que $f'(\sigma) < 0$. □

O segundo resultado é devido a Michel Rolle (1652–1719).

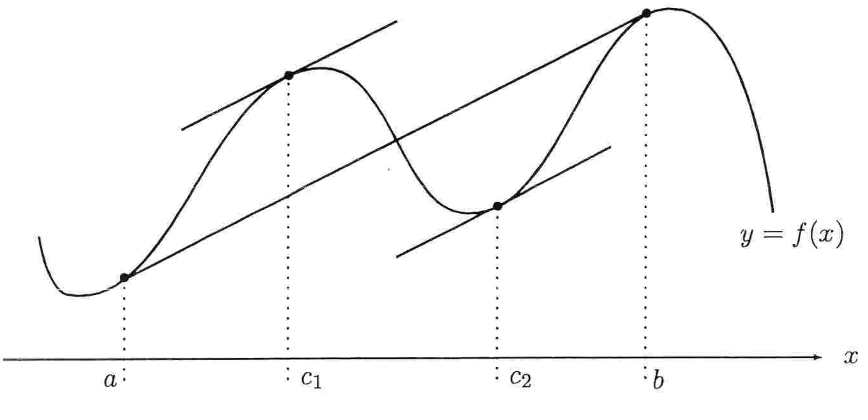


Figura 3.15. O Teorema do Valor Médio

Teorema 3.42. (Teorema de Rolle) *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e $a, b \in X$ tais que $a < b$, $[a, b] \subseteq X$ e $f(a) = f(b)$. Se f for derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe algum ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Pelo Teorema 3.18 de Weierstrass, f tem algum ponto de mínimo e algum ponto de máximo globais em $[a, b]$. Se ambos forem extremidades de $[a, b]$, então a hipótese $f(a) = f(b)$ garante que f é constante em $[a, b]$, portanto derivável, com $f'(c) = 0$ em cada $c \in [a, b]$. Caso contrário, f atinge um valor extremo em algum ponto $c \in (a, b)$ que, pelo Teorema de Fermat, é crítico. Se f for derivável em (a, b), resulta $f'(c) = 0$. □

Teorema 3.43. (Teorema do Valor Médio, de Lagrange – TVM) *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e $a, b \in X$ tais que $a < b$ e $[a, b] \subseteq X$. Se f for derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Demonstração. A afirmação do TVM é um Teorema de Rolle "inclinado", bastando aplicar aquele teorema à função definida pela diferença entre f e uma função linear convenientemente escolhida, digamos,

$$g(x) = f(x) - \alpha \cdot x.$$

Dada uma função f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), essa função $g(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $g'(x) = f'(x) - \alpha$, qualquer que seja $x \in [a, b]$, restando escolher $\alpha = [f(b) - f(a)]/(b - a)$ e encontrar $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas isso é um serviço para o Teorema de Rolle, bastando observar que $g(a) = g(b)$, já que $f(a) - \alpha \cdot a = f(b) - \alpha \cdot b$ se, e só se, $\alpha \cdot (b - a) = f(b) - f(a)$. □

Exercícios 3.2

3.2.1. Mostre — generalizando a igualdade (1.6) — que, dados $x, \sigma \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ quaisquer, vale

$$x^n - \sigma^n = \big(x^{n-1} + x^{n-2}\sigma + \cdots + x\sigma^{n-2} + \sigma^{n-1}\big)(x - \sigma).$$

Use essa relação para provar diretamente a partir da definição dada em (3.2) que a função $f(x) = x^n$ é derivável, com $f'(x) = nx^{n-1}$, como no Exemplo 3.28.

3.2.2. Mostre que a função definida por $g(x) = x \cdot \operatorname{sen}(1/x)$, com $x \neq 0$, e $g(0) = 0$ (é contínua mas) não é derivável em 0. Mostre que a função definida por $h(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}(1/x)$, com $x \neq 0$, e $h(0) = 0$ é derivável em $\mathbb{R}$ (com $h'(0) = 0$) mas que a função derivada $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de h não é contínua em $\mathbb{R}$, por não ser contínua em $\sigma = 0$. (*Sugestão*: ver Exercício 3.1.10.)

3.2.3. Mostre que $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $\sigma \in X$ se, e só se,

$$\frac{f(x_n) - f(\sigma)}{x_n - \sigma}$$

define uma sequência convergente, qualquer que seja a sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ convergente a σ. (Ver Exercício 3.1.11.) Obtenha um exemplo de $f : X \to \mathbb{R}$ e de uma sequência (x_n) de X convergente a $\sigma \in X$ tal que $[f(x_n) - f(\sigma)]/(x_n - \sigma)$ defina uma sequência convergente, mas f não seja derivável em σ.

3.2.4. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $\sigma \in X$. Mostre que a sequência definida por

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \tag{3.4}$$

é convergente a $f'(\sigma)$, sempre que (x_n) e (y_n) forem sequências de X convergentes a σ satisfazendo $x_n < \sigma < y_n$ com $n \gg 0$. (Ver Exercícios 1.3.14 e 2.2.21.) Obtenha um exemplo de uma função f que não seja sequer contínua num ponto $\sigma \in X$ e de sequências (x_n) e (y_n) de X convergentes a σ satisfazendo $x_n < \sigma < y_n$, com $n \in \mathbb{N}$, e tais que a sequência definida por (3.4) seja convergente. Obtenha um exemplo de uma função f que seja derivável num ponto $\sigma \in X$ e de sequências (x_n) e (y_n) de X convergentes a σ satisfazendo $\sigma < x_n < y_n$, com qualquer $n \in \mathbb{N}$, tais que não exista o limite (3.4).

3.2.5. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ for derivável em $\sigma \in X$, então existem $M \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ tais que $|f(x) - f(\sigma)| \leqslant M|x - \sigma|$, qualquer que seja $x \in X$ com $|x - \sigma| < \delta$.

3.2.6. Mostre que se a função derivada $f' : X \to \mathbb{R}$ de uma função derivável $f : X \to \mathbb{R}$ for limitada, então f é uma função lipschitziana; em particular, f é uniformemente contínua. (Ver Exercício 3.1.32.)

3.2.7. Mostre que se a função derivada $f' : X \to \mathbb{R}$ de uma função derivável $f : X \to \mathbb{R}$ for contínua num ponto $\sigma \in X$, então

$$f'(\sigma) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n},$$

quaisquer que sejam as sequências $(x_n), (y_n)$ de X convergentes a σ satisfazendo $x_n \neq y_n$ com $n \gg 0$. (*Sugestão*: use o TVM.)

3.2.8. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas e $a, b \in X$ tais que $a < b$ e $[a, b] \subseteq X$. Mostre que se f e g forem deriváveis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$ em cada $x \in (a, b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Essa fórmula é atribuída a Cauchy. Observe que o TVM de Lagrange é o caso particular em que $g(x) = x$.

(*Sugestão*: use o Teorema de Rolle com $h(x) = f(x) - \alpha \cdot g(x)$, com algum α conveniente.)

3.2.9. Sabe-se que $e^x < 1$ se $x < 0$ e $e^x > 1$ se $x > 0$. Usando derivada, mostre que $1 + x < e^x$, com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$. Usando derivada, mostre que $e^x < 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, com $x < 0$ e

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 < 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 < e^x,$$

com $x > 0$. Usando derivada, mostre que $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 < e^x$, com $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$.

3.2.10. Dado $n \in \mathbb{N}$, denote $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$, com $x \in \mathbb{R}$. Mostre que

(1) $p_{2m-1}(x) < e^x < p_{2m}(x)$, com $m \in \mathbb{N}$ e $x < 0$;

(2) $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < p_n(x) < e^x$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$.

3.2.11. Sabe-se que $\cos x \leqslant 1$ com $x \in \mathbb{R}$. Usando derivada, mostre que $\operatorname{sen} x \leqslant x$, com $x \geqslant 0$. Conclua que $x \leqslant \operatorname{sen} x$, com $x \leqslant 0$. Usando derivada, mostre que $1 - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos x$, com $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $x - \frac{1}{3!}x^3 \leqslant \operatorname{sen} x$, com $x \geqslant 0$. Conclua que $\operatorname{sen} x \leqslant x - \frac{1}{3!}$, com $x \leqslant 0$.

3.2.12. Mostre que, com $x \in \mathbb{R}$,

(1) $1 - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos x \leqslant 1$, ou seja, $0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant \frac{1}{2}x^2$.

(2) $1 - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$, ou seja, $0 \leqslant \cos x - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \leqslant \frac{1}{4!}x^4$.

(3) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$, ou seja, $0 \leqslant \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right) - \cos x \leqslant \frac{1}{6!}x^6$.

3.2.13. Mostre que, com $x \geqslant 0$,

(1) $x - \frac{1}{3!}x^3 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x$, ou seja, $0 \leqslant x - \operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{3!}x^3$.

(2) $x - \frac{1}{3!}x^3 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$, ou seja, $0 \leqslant \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) \leqslant \frac{1}{5!}x^5$.

(3) $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$, ou seja, $0 \leqslant \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\right) - \operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{7!}x^7$.

3.2.14. Mostre que, com $x \leqslant 0$,

(1) $x \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x - \frac{1}{3!}x^3$, ou seja, $0 \leqslant \operatorname{sen} x - x \leqslant -\frac{1}{3!}x^3$.

(2) $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x - \frac{1}{3!}x^3$, ou seja, $0 \leqslant \left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) - \operatorname{sen} x \leqslant -\frac{1}{5!}x^5$.

(3) $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$, ou seja, $0 \leqslant \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\right) \leqslant -\frac{1}{7!}x^7$.

3.2.15. Mostre que a função definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \cdot \text{sen}(1/x)$, com $x \neq 0$, e $f(0) = 0$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, mas que a função f não é crescente em $(-r, r)$, qualquer que seja $r > 0$. (Ver Exercício 1.5.3.) Enuncie e demonstre resultado dual para $f'(0) < 0$ e f não decrescente.

3.2.16. Considere a função definida por $f(x) = |x|^3 \cdot \text{sen}^2(1/x)$ com $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que f é derivável (sendo $f'(0) = 0$) e que a função derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f é contínua. Mostre que f atinge um valor mínimo em 0 mas que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, f não é monótona nem em $(-\varepsilon, 0)$ nem em $(0, \varepsilon)$.

3.2.17. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $\sigma \in I$ tal que $f(\sigma) < g(\sigma)$. Mostre que, se $f'(x) \leqslant g'(x)$ em cada $x \in I$ tal que $x \geqslant \sigma$, então $f(x) < g(x)$ em cada $x \in I$ tal que $x \geqslant \sigma$.

3.2.18. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, com $x \in \mathbb{R}$. Verifique se f é limitada ou monótona em algum intervalo real. Obtenha os maiores intervalos de limitação e monotonicidade de f. Fixado $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, com $x \in \mathbb{R}$. Verifique se f_n é limitada ou monótona em algum intervalo e obtenha os maiores intervalos em que f_n é limitada ou monótona.

3.2.19. Fixado o natural $n \geqslant 2$, considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = x^n + n(1-x) - 1$. Mostre que h é decrescente em $[-1, 1]$ e crescente em $[1, +\infty)$. Como $h(1) = 0$, conclua que $h(x) > 0$ em cada $-1 \leqslant x \neq 1$. Considerando a função $g(x) = h(1+x)$, estabeleça (sem usar indução) que vale a desigualdade (1.10) de Bernoulli estrita $(1+x)^n > 1 + nx$, em $-2 \leqslant x \neq 0$. (Ver Exercício 1.3.7.)

3.2.20. Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{x} - \log x$, com $x > 0$. Mostre que f possui um único ponto crítico; mostre que esse crítico é um ponto de mínimo, com valor mínimo positivo. Conclua que $\log x < \sqrt{x}$, qualquer que seja $x > 0$.

3.2.21. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - 1 - x$, com $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f possui um único ponto crítico; mostre que esse crítico é um ponto de mínimo, com valor mínimo zero. Estabeleça que $e^x \geqslant 1 + x$, com $x \in \mathbb{R}$. Em quais valores de x vale $e^x > 1 + x$?

3.2.22. Considerando a derivada de funções apropriadas, mostre que

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x\,,$$

com qualquer $x > -1$ tal que $x \neq 0$.

3.2.23. Use a desigualdade do Exercício 3.2.21 para estabelecer que $e^{x-1} \geqslant x$, com $x \in \mathbb{R}$. Dados reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, denotemos por A a média aritmética desses números e por G sua média geométrica (Ver Proposição 1.6.5). Mostre que $e^{(a_k/A)-1} \geqslant a_k/A$, com k de 1 a n; multiplicando essas n desigualdades, obtenha $1 \geqslant G^n/A^n$ e conclua que $G \leqslant A$. Mostre que $G = A$ se, e só se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. (Essa prova alternativa da desigualdade fundamental entre as médias aritmética e geométrica de n números é atribuída a G. Polya.)

3.2.24. Sejam dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2, \quad \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

Encontre o ponto em que f atinge seu valor mínimo absoluto. Conclua que *o mínimo da soma dos quadrados das distâncias de x a cada um de n pontos da reta é mínima se, e só se, x é igual à média aritmética desses pontos.*

3.2.25. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função qualquer definida num intervalo $X \subseteq \mathbb{R}$ e $c > 0$ e $\alpha > 1$ constantes dadas. Mostre que se $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant c \cdot |x_1 - x_2|^\alpha$, com quaisquer $x_1, x_2 \in X$, então f é uma função constante.

3.3. Primitivas e o Teorema Fundamental do Cálculo

Dizemos que uma função $g : X \to \mathbb{R}$ é uma *primitiva*, ou uma *antiderivada* de f em X se g for derivável em X e $g'(x) = f(x)$, com $x \in X$. Do ponto de vista da função g, a função f é somente a função derivada de g em X.

Exemplo 3.44. Sabemos do Cálculo que $y = \log x$ define uma primitiva de $y = 1/x$ em $(0, +\infty)$.

Dadas duas primitivas g_1 e g_2 de f num *intervalo* I, temos que a diferença $g_1 - g_2$ tem derivada nula em I e, portanto, pelo Corolário 3.39, é constante. Assim, duas primitivas quaisquer de uma função num intervalo sempre diferem apenas por uma constante. A pergunta, agora, é se toda função possui alguma primitiva ou, equivalentemente, se toda equação diferencial $y' = f(x)$ tem alguma solução.

Em qualquer teoria de integral, como, por exemplo, a de Riemann, vemos que toda função contínua possui primitiva. No entanto, existem funções deriváveis em $\mathbb{R}$ cujas funções derivadas não são contínuas em $\mathbb{R}$. (Ver Exercício 3.2.2.) Assim, funções derivadas podem não ser contínuas ou, equivalentemente, funções descontínuas também podem possuir primitiva.

No entanto, não é verdade que qualquer função possa ter alguma primitiva pois, como veremos a seguir, as funções derivadas têm uma propriedade comum às funções contínuas, a saber, a propriedade do valor intermediário: a imagem direta $f'(J)$ de qualquer intervalo $J \subseteq X$ pela função derivada $f' : X \to \mathbb{R}$ de uma função derivável f é um intervalo.

Teorema 3.45. (Teorema de Darboux) *Se uma função tiver alguma primitiva num intervalo, então essa função tem a propriedade do valor intermediário nesse intervalo.*

Demonstração. Seja f uma função derivável num intervalo I. Usando a caracterização de intervalo vista no Exercício 1.4.14, basta mostrar que, dados $x_1, x_2 \in I$ e $d \in \mathbb{R}$ entre $f'(x_1)$ e $f'(x_2)$, sempre existe algum x entre x_1 e x_2 tal que $f'(x) = d$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $x_1 < x_2$ e $f'(x_1) > d > f'(x_2)$ e consideremos a mesma função $g : I \to \mathbb{R}$ da prova do Teorema 3.43 do valor médio, dada por $g(x) = f(x) - d \cdot x$, que é contínua e derivável em $[x_1, x_2]$, com $g'(x_1) = f'(x_1) - d > 0$ e $g'(x_2) = f'(x_2) - d < 0$. Se f' fosse contínua, então g' seria contínua e, portanto, pelo Teorema 3.8 do valor intermediário, aplicado a g', existiria $c \in (x_1, x_2)$ tal que $g'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = d$.

No entanto, não sabemos se f' é, ou não é, contínua. Ocorre que isso nem é necessário, pois o Lema 3.36 garante que $g(x_1) < g(x)$, com $x > x_1$ suficientemente próximo de x_1, já que $g'(x_1) > 0$, e $g'(x_2) < 0$ garante que $g(x) > g(x_2)$, com $x < x_2$ suficientemente próximo de x_2. Desse modo, nenhuma das extremidades pode ser um ponto de mínimo local de g em $[x_1, x_2]$. No entanto, como g é contínua, o Teorema 3.18 garante que existe algum ponto de mínimo local de g nesse intervalo. Assim, obtemos algum ponto de mínimo $x \in (x_1, x_2)$ de g em que, pelo Teorema de Fermat, $g'(x) = 0$, ou seja, $f'(x) = d$. □

Usando os exemplos vistos de derivadas, podemos obter exemplos de primitivas. Assim, fixados quaisquer racional $r \neq -1$ e real α, a função $g(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + \alpha$ define uma primitiva de $f(x) = x^r$ em $\mathbb{R}$ se $r \geqslant 0$, ou em $(0, +\infty)$, se $r < 0$. É tradicional denotar as primitivas de uma função f com o símbolo da *integral indefinida* $\int f(x)dx$. Assim,

$$\int x^r \, dx = \tfrac{1}{r+1} x^{r+1} + \alpha$$

denota todas as primitivas de $f(x) = x^r$ no caso $r \neq -1$.

Das regras operacionais das derivadas decorrem, imediatamente, as regras clássicas de primitivação. Por exemplo, usando as regras de derivação da Proposição 3.27, obtemos o corolário seguinte.

Corolário 3.46. (Regras Operacionais da Primitivação) *Sejam f e g duas funções quaisquer definidas num mesmo intervalo I.*

(1) *Linearidade: se f e g têm primitivas em I, então, fixado qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, a função $f + \lambda g$ tem primitiva em I, dada por*

$$\int (f + \lambda g)(x)dx = \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx.$$

(2) *Integração por partes: se f e g são deriváveis em I e se o produto $f' \cdot g$ tem primitiva em I, então o produto $f \cdot g'$ tem primitiva em I, dada por*

$$\int (f \cdot g')(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int (f' \cdot g)(x)dx.$$

Da regra da cadeia (Teorema 3.30) decorre, imediatamente, a regra da substituição de variáveis em primitivas.

Corolário 3.47. (Substituição) *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável no intervalo I, $g : J \to \mathbb{R}$ tem uma primitiva $h(x) = \int g(x)dx$ em J e se $f(I) \subseteq J$, então $(g \circ f) \cdot f'$ tem primitiva em I, dada por*

$$\int [(g \circ f) \cdot f'](x)dx = (h \circ f)(x).$$

Exemplo 3.48. Fixemos $r \in \mathbb{Q}$ com $r > 0$. Para calcular uma primitiva em $\mathbb{R}$ da função $\xi(x) = (1-x)^r$, usamos a substituição $f(x) = 1 - x$, com $f'(x) = -1$, e a primitiva $h(x) = \frac{1}{r+1}\, x^{r+1}$ de $g(x) = x^r$. Temos

$$\begin{aligned}\int (1-x)^r\, dx &= -\int (1-x)^r(-1)dx = -\int (g(f(x)) \cdot f'(x)dx \\ &= h(f(x)) = -\tfrac{1}{r+1}\,(1-x)^{r+1},\end{aligned}$$

pelo Corolário 3.47. ◎

Exemplo 3.49. Fixemos $r \in \mathbb{Q}$ com $r > 0$. Para calcular uma primitiva em $\mathbb{R}$ de $\eta(x) = r^2 x\,(1-x)^r$, usamos as partes $f(x) = r^2 x$, com $f'(x) = r^2$, e a primitiva $g(x) = -\frac{1}{r+1}\,(1-x)^{r+1}$ de $g'(x) = (1-x)^r$ do exemplo precedente. Usando integração por partes,

$$\begin{aligned}\int r^2 x\,(1-x)^r\, dx &= \int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx \\ &= -\frac{r^2 x(1-x)^{r+1}}{r+1} + \int \frac{r^2\,(1-x)^{r+1}}{r+1}\, dx.\end{aligned}$$

Agora, pela integral calculada no exemplo precedente (com $r+1$ no lugar de r),

$$\int \frac{r^2\,(1-x)^{r+1}}{r+1}\, dx = \frac{r^2}{r+1} \int (1-x)^{r+1}\, dx = -\frac{r^2\,(1-x)^{r+2}}{(r+1)(r+2)},$$

de modo que estabelecemos

$$\int r^2 x\,(1-x)^r\, dx = -\frac{r^2 x(1-x)^{r+1}}{r+1} - \frac{r^2\,(1-x)^{r+2}}{(r+1)(r+2)}.$$

Essa conta pode até ser considerada difícil, mas é sempre muito fácil conferir o trabalho feito: basta derivar a (candidata a) primitiva encontrada e verificar se o resultado é o integrando. ◎

Enfatizamos, mais uma vez, que não estamos *integrando* coisa alguma. As afirmações dos corolários acima são, simplesmente, reformulações clássicas das regras operacionais da derivada da soma, do produto e da composta.

Na próxima seção construímos a integral de funções contínuas. Nesta seção, vamos utilizar essa integral para apresentar o teorema fundamental do Cálculo. Para esse fim, basta supor que exista a *integral* de funções f contínuas em intervalos $[a, b]$. Essa integral pode ser definida de várias maneiras, sendo a de Riemann a mais tradicional nas disciplinas de Cálculo, mas todas elas têm as propriedades básicas da monotonicidade e da aditividade, como segue. No que segue, supomos que dada qualquer função f contínua num intervalo I e qualquer intervalo $[a, b] \subseteq I$, existe um número real, que denotamos por

$$\int_a^b f,$$

e que satisfaz as propriedades I1 e I2 seguintes.

(I1) A integral é *monótona*: se $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$ com $a \leqslant x \leqslant b$ e $a, b \in I$, então

$$\alpha \cdot (b - a) \leqslant \int_a^b f \leqslant \beta \cdot (b - a).$$

(I2) A integral é *aditiva*: se $a \leqslant c \leqslant b$ com $a, b \in I$, então

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Em particular, da primeira propriedade decorre que a integral de uma função constante positiva em $[a, b]$ coincide com a *área* do retângulo determinado pela base $[a, b]$ e o gráfico horizontal da função. Mais geralmente, se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma função contínua *positiva* em $[a, b] \subseteq X$, interpretamos a integral

$$\int_a^b f$$

como a *área* da região delimitada pelas retas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$ e pelo gráfico de f.

Esse é o ponto de partida de todas as teorias de integração. Podemos construir um conceito de integral — a partir do qual definimos a área de regiões entre o gráfico de funções positivas e o eixo x, acima de intervalos de continuidade dessas funções — ou, então, podemos construir um conceito de área para regiões arbitrárias do plano — a partir do qual definimos a integral de funções positivas em intervalos de continuidade dessas funções. Nesta seção não veremos isso, mas, tão somente, supomos a existência de uma integral que satisfaça as propriedades da monotonicidade e da aditividade para funções contínuas.

Por conveniência, definimos

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

se $[a, b] \subseteq I$ e f for contínua em I. Não é difícil verificar que, com essa convenção, a propriedade (I2) de integrais é válida com quaisquer $a, b, c \in I$, em qualquer ordem. Também vale (I1) com pontos a, b distintos quaisquer de I, pois

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = \frac{1}{a-b}\int_b^a f.$$

A integral, bem diferente da derivada, é um conceito fundamentalmente global, definido somente em intervalos, nos quais fornece uma espécie de *média* da função toda no intervalo, como afirma nosso primeiro resultado sobre integrais.

Proposição 3.50. (Teorema do Valor Médio da Integral) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I. Dados $a, b \in I$, existe c entre a e b tal que*

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b - a).$$

Demonstração. Se $a = b$, o resultado é imediato. Sejam, pois, $a, b \in I$ dois pontos distintos. Pelo Teorema 3.18 de Weierstrass, existem x_1, x_2 entre a e b tais que

$$\alpha = f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) = \beta$$

com qualquer x entre a e b. Pela primeira propriedade da integral, decorre que

$$f(x_1) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leqslant f(x_2).$$

Pelo TVI, existe c entre x_1 e x_2 tal que $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f$. □

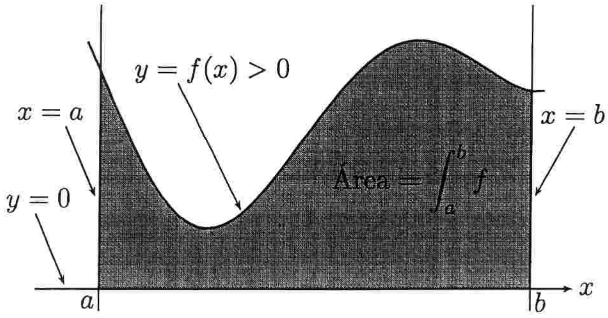


Figura 3.16. A área da região destacada é a integral de f em $[a, b]$

A primeira das duas versões do Teorema Fundamental do Cálculo é a seguinte.

Teorema 3.51. (Teorema Fundamental do Cálculo I – TFCI) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I. Fixados $a \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, defina a função $F : I \to \mathbb{R}$, em cada $x \in I$, por*

$$F(x) = \alpha + \int_a^x f.$$

Então F é derivável em I e $F'(x) = f(x)$, qualquer que seja $x \in I$, ou seja, F é uma primitiva de f em I. Observe que $\alpha = F(a)$.

Demonstração. Que F é uma função decorre da existência da integral e é claro que $F(a) = \alpha$. Mostremos que F é uma primitiva de f. Fixemos $\sigma \in I$ e mostremos que F é derivável em σ, com $F'(\sigma) = f(\sigma)$. Dado qualquer $x \in I$, temos

$$\begin{aligned} F(x) - F(\sigma) &= \alpha + \int_a^x f - \alpha - \int_a^\sigma f \\ &= \int_a^x f - \int_a^\sigma f = \int_\sigma^x f = \varphi_\sigma(x)(x - \sigma), \end{aligned}$$

onde

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{x - \sigma} \int_\sigma^x f,$$

com qualquer $x \in I - \{\sigma\}$. Agora o teorema do valor médio da integral garante que, dado qualquer $x \in I$ distinto de σ, existe algum c entre x e σ tal que $\varphi_\sigma(x) = f(c)$.

Portanto, dada qualquer sequência (x_n) em $I - \{\sigma\}$ e dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe algum c_n entre x_n e σ tal que $\varphi_\sigma(x_n) = f(c_n)$. Assim, se $x_n \longrightarrow \sigma$, o critério do confronto garante que $c_n \longrightarrow \sigma$ e a continuidade de f garante que $f(c_n) \longrightarrow f(\sigma)$, ou seja, $\varphi_\sigma(x_n) \longrightarrow f(\sigma)$. Pelo Exercício 3.4.7, resta definir $\varphi_\sigma(\sigma) = f(\sigma)$ para estabelecer a continuidade de φ_σ em σ e concluir que F é derivável em σ, com $F'(\sigma) = \varphi_\sigma(\sigma) = f(\sigma)$. Como o ponto σ foi dado arbitrariamente, temos que F é uma primitiva de f em I. □

Em particular, decorre do TFCI que existe, no máximo, uma única maneira de definir uma integral de funções contínuas que satisfaça as duas propriedades dadas, como segue.

Corolário 3.52. *Se g é uma primitiva de f em I, então, dados quaisquer $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f = g\Big|_a^b = g(b) - g(a).$$

Demonstração. Fixado $a \in I$, como $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ e g têm a mesma derivada f, sabemos que $F(x) - g(x)$ é constante. Como $F(a) = 0$, essa constante é $-g(a)$ e, portanto, qualquer que seja $x \in I$, obtemos $F(x) = g(x) - g(a)$. □

Esse fato é o que estabelece uma justificativa para a notação tradicional de *integral indefinida* para as primitivas, já que

$$\int f\Big|_a^b = \int_a^b f.$$

Observamos que, por serem as primitivas impropriamente denominadas de integrais indefinidas, muitas vezes as integrais são denominadas integrais *definidas*. Isso é costume em disciplinas de Cálculo, mas neste texto, utilizamos apenas os termos *primitiva* e *integral*.

O corolário do TFCI permite que calculemos o valor de muitas integrais, pelo menos de funções cujas primitivas sejam conhecidas. No caso em que a função f for dada explicitamente, é costume substituir f por $f(x)\,dx$ na notação de integral, ou seja, escrever

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 3.53. Temos

$$\int_a^b x^r\,dx = \tfrac{1}{r+1}x^{r+1}\Big|_a^b = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1},$$

com $r \neq -1$. Também estabelecemos, com $r > 0$,

$$\int_0^1 r^2 x(1-x)^r\,dx = -\frac{r^2 x(1-x)^{r+1}}{r+1} - \frac{r^2\,(1-x)^{r+2}}{(r+1)(r+2)}\Bigg|_0^1 = \frac{r^2}{(r+1)(r+2)},$$

usando a primitiva obtida no Exemplo 3.49. ◎

Exemplo 3.54. Dados $a, b \in (1, +\infty)$ com $a \neq b$, temos

$$\frac{b-a}{b} < \log b - \log a < \frac{b-a}{a}.$$

Em particular,

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

tomando $b = n + 1$ e $a = n$. De fato, se $1 < a \leqslant x \leqslant b$, então $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{a}$, de modo que a monotonicidade da integral garante que

$$\frac{b-a}{b} \leqslant \int_a^b \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{b-a}{a}.$$

Lembrando que $y = \log x$ define uma primitiva de $y = 1/x$ em $(0, +\infty)$, obtemos a desigualdade no caso $a < b$. Dexamos o caso $b < a$ como exercício. ◎

No presente contexto de funções contínuas, a segunda versão do Teorema Fundamental do Cálculo é equivalente à primeira. Mais precisamente, como f é uma primitiva de f', o corolário precedente garante que $\int_\sigma^x f' = f\Big|_\sigma^x = f(x) - f(\sigma)$, sempre que a função derivada f' for contínua. Esse fato é destacado como segue.

Teorema 3.55. (Teorema Fundamental do Cálculo II – TFCII) *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável com função derivada $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. Temos*

$$f(x) = f(\sigma) + \int_\sigma^x f',$$

com quaisquer $x, \sigma \in I$. □

Vejamos algumas propriedades adicionais das integrais.

Proposição 3.56. *Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in I$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(1) $\int_a^b (f + \alpha \cdot g) = \int_a^b f + \alpha \cdot \int_a^b g.$

(2) *Se $a < b$ e $f(x) \leqslant g(x)$ com $x \in [a, b]$, então* $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$

(3) *Integração por partes: se f, g forem deriváveis com derivadas f', g' contínuas no intervalo I, então*

$$\int_a^b f \cdot g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' \cdot g.$$

Demonstração. (1) Por virtude do (corolário do) TFCI, a linearidade da integral decorre da linearidade da primitivação, vista no Corolário 3.46. (2) Já a monotonicidade decorre da linearidade e da observação seguinte: como $m = 0 \leqslant (g - f)(x)$ com $x \in [a, b]$, a propriedade característica da integral garante que, também, $0 \leqslant \int_a^b (g - f)$. (3) Decorre da fórmula correspondente da integração por partes para primitivas dadas no Corolário 3.46, observando que $f \cdot g\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. □

Corolário 3.57. *Sejam $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$. Seja $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ com $x \in [a, b]$. Então*

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant M \cdot (b - a).$$

Demonstração. Basta observar que $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ e usar a proposição. □

A fórmula da substituição para integrais é a seguinte, em que geralmente convém denotar com letras distintas as variáveis dos dois intervalos I e J envolvidos.

Proposição 3.58. (Mudança de variáveis) *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável com derivada f' contínua no intervalo I, se $g : J \to \mathbb{R}$ é contínua no intervalo J e se $f(I) \subseteq J$, então*

$$\int_a^b (g \circ f) \cdot f' = \int_{f(a)}^{f(b)} g.$$

Demonstração. Se $G : J \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de g, então a RC dá $(G \circ f)' = (g \circ f) \cdot f'$ e, portanto,

$$\int_a^b (g \circ f) \cdot f' = (G \circ f)\Big|_a^b = G\Big|_{f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} g$$

pelo TFCI. □

Teorema 3.59. *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$ e $f(x) \geqslant 0$ com $x \in [a, b]$. Então $\int_a^b f = 0$ se, e só se, $f(x) = 0$ com $x \in [a, b]$.*

Demonstração. Basta mostrar que $\int_a^b f > 0$ sempre que $f(\sigma) > 0$ em algum ponto $\sigma \in [a, b]$. Suponhamos, pois, que $f(\sigma) > 0$ em algum ponto $\sigma \in [a, b]$ e tomemos $c > 0$ tal que $f(\sigma) > c$. Pela continuidade de f, a permanência do sinal garante que $m = c < f(x)$ com $x \in [a, b]$ suficientemente próximo de σ. No caso em que $\sigma \in (a, b]$, tomamos $\delta > 0$ tal que $m = c < f(x)$ com $x \in [\sigma - \delta, \sigma] \subseteq [a, b]$ e, pelas propriedades características da integral, decorre que

$$\int_a^b f = \int_a^{\sigma-\delta} f + \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} f + \int_{\sigma}^{b} f \geqslant \int_{\sigma-\delta}^{\sigma} f \geqslant c \cdot \delta > 0.$$

No caso em que $\sigma \in [a, b)$, tomamos $\delta > 0$ tal que $m = c < f(x)$ com $x \in [\sigma, \sigma + \delta] \subseteq [a, b]$ e procedemos analogamente. □

Exercícios 3.3

3.3.1. Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$. Mostre que a primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de f, definida por $F(x) = \int_a^x f$, é lipschitziana. (Ver Exercícios 3.1.32 e 3.2.6.)

3.3.2. Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona derivável com derivada contínua no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Dados $a, b \in I$, mostre que existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b g \cdot f = g(a) \cdot \int_a^c f + g(b) \cdot \int_c^b f.$$

Essa afirmação é conhecida como o *Segundo* Teorema do Valor Médio da Integral, ou Teorema de Bonnet. Observe que, no caso $g(x) =$ constante, essa afirmação é válida em cada c, sendo a propriedade (2) da aditividade da integral. (*Sugestão*: use integração por partes e depois, na integral resultante, o exercício anterior.)

3.3.3. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b \in I$ tais que $a < b$. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\left[\int_a^b f \cdot g\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2\right] \cdot \left[\int_a^b g^2\right].$$

(*Sugestão*: considere o polinômio de segundo grau não negativo $p(x) = \int_a^b \left[x \cdot f + g\right]^2 dt$.)

3.3.4. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $a, b \in I$ tais que $g(x) \geqslant 0$, qualquer que seja x entre a e b. Mostre que existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b f \cdot g = f(c) \cdot \int_a^b g.$$

(*Sugestão*: como $g(x)$ é não negativo, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ implica $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$.) No caso em que $g(x) > 0$ em algum $x \in [a, b]$, podemos interpretar

$$f(c) = \int_a^b f \cdot g \Big/ \int_a^b g$$

como a *média ponderada* de f com peso g em $[a, b]$. Esse resultado costuma ser denominado *Primeiro* Teorema do Valor Médio da Integral. Mostre que a afirmação da Proposição 3.50 é um caso particular desse teorema, com $g(x) =$ constante.

3.3.5. Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ e tal que $g(J) \subseteq I$. Fixado $a \in I$, mostre que é derivável a função $h : J \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \int_a^{g(x)} f,$$

com $h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ em cada $x \in J$.

3.3.6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que, se f for *ímpar*, então

$$\int_{-a}^a f = 0, \quad \text{em cada } a \in \mathbb{R}$$

e, se f for *par*, então

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f, \quad \text{em cada } a \in \mathbb{R}.$$

3.3.7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função *periódica* de período T, ou seja, $T > 0$ é tal que $f(x + T) = f(x)$, com qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(1) Mostre que se f for contínua, com cada $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_a^{a+T} f = \int_0^T f.$$

(2) Mostre que se f for contínua, com quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_a^b f = \int_{a+T}^{b+T} f.$$

(3) Mostre que se f for derivável, dado qualquer $t > 0$ existe algum $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(c+t) - f(c) = t \cdot f'(c),$$

ou seja, a reta tangente ao gráfico de f pelo ponto $(c, f(c))$ volta a tocar o gráfico de f no ponto $(c + t, f(c + t))$.

3.3.8. Seja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e não crescente. Mostre que, dado $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f \leqslant f(n).$$

Use indução para mostrar que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

3.4. Extensão de Funções Contínuas

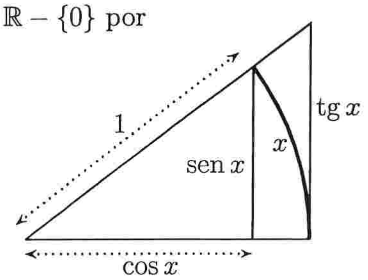
Existem funções cujo domínio tem um "furo" natural e podemos querer estender o domínio dessas funções para "tapar" esse furo. Por exemplo, o domínio pode ser a reta perfurada $\mathbb{R} - \{0\}$ e podemos perguntar se existe alguma extensão dessa função a toda a reta. Sem exigir alguma regularidade da extensão, isso é trivial, pois podemos definir uma função de qualquer maneira. A sutileza consiste em estender o domínio de uma função que tenha alguma propriedade de tal modo que a função estendida tenha essa propriedade também no novo ponto do domínio.

Por exemplo, dada qualquer sequência (x_n) de $\mathbb{R} - \{0\}$ convergente a 0, temos $x_n/|x_n| = \pm 1$, dependendo de x_n ser positivo ou negativo; da mesma forma, sabemos que $1/x_n$ diverge. (Na verdade, pela Proposição 2.49, $1/|x_n| \longrightarrow +\infty$.) Assim, não existe maneira alguma de estender o domínio das funções contínuas definidas por $x/|x|$ ou $1/x$ de $\mathbb{R} - \{0\}$ para $\mathbb{R}$ de tal maneira que a extensão seja contínua (em 0).

No entanto, pode ocorrer que alguma função que só não esteja definida na origem possua alguma extensão que seja naturalmente contínua nesse ponto. Um exemplo trivial disso é o da função contínua definida por x^2/x, de domínio $\mathbb{R} - \{0\}$. Evidentemente, a identidade $\xi_{\mathbb{R}}$ é uma extensão dessa função a $\mathbb{R}$ que é contínua (em 0). Dois exemplos bem mais sutis são os seguintes.

Exemplo 3.60. Considere as funções contínuas definidas em $\mathbb{R} - \{0\}$ por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$$



e mostremos que f e g podem ser estendidas a $\mathbb{R}$ de modo a serem contínuas também na origem, bastando definir $f(0) = 1$ e $g(0) = 0$. Para isso, partimos do conhecimento das relações trigonométricas

$$|1 - \cos x| \leqslant |x| \quad \text{e} \quad |\operatorname{sen} x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|,$$

visíveis no círculo trigonométrico e válidas com qualquer arco $|x| \leqslant \pi/2$.

Pelo critério do confronto, decorre dessas relações que $\cos x_n \longrightarrow 1$ e $\operatorname{sen} x_n \longrightarrow 0$, com qualquer sequência nula (x_n) de $\mathbb{R} - \{0\}$. Usando, agora, a segunda relação trigonométrica e o fato de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ serem funções par e ímpar, respectivamente, verificamos que, dado qualquer x tal que $0 < |x| \leqslant \pi/2$, vale

$$\cos x \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leqslant 1,$$

de modo que o critério do confronto garante que $f(x_n) \longrightarrow 1$, qualquer que seja a sequência nula (x_n) de $\mathbb{R} - \{0\}$. Dessa forma, definindo $f(0) = 1$, a extensão resulta ser contínua em 0.

Para estender g, observe que, com $0 < |x| \leqslant \pi/2$, temos

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{x \cdot (1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot (1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{1 + \cos x},$$

de modo que, pela regra do produto, $g(x_n) \longrightarrow 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$, qualquer que seja a sequência nula (x_n) de $\mathbb{R} - \{0\}$. Dessa forma, definindo $g(0) = 0$, a extensão resulta ser contínua em 0. ◎

Na Seção 4 do Capítulo 4 veremos a afirmação desse exemplo sem depender da Trigonometria.

Singularidades

Dizemos que um ponto de acumulação σ do domínio X de uma função f é uma *singularidade* de f se $\sigma \in X$ for um ponto de descontinuidade de f ou se σ não pertencer a X. Por exemplo, a origem é uma singularidade das funções f e g do exemplo precedente.

Seja σ uma singularidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_n) \longrightarrow \lambda$, qualquer que seja a sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ que convergir a σ, dizemos que a singularidade σ é *removível* e que λ é o *limite* da função f em σ. Da unicidade do limite de sequências, decorre que é único o limite de uma função numa singularidade removível. Nesse caso, podemos redefinir $f(\sigma) = \lambda$ se $\sigma \in X$ for um ponto de descontinuidade e, caso $\sigma \in \overline{X} - X$, estender o domínio de f a $X \cup \{\sigma\}$ definindo $f(\sigma) = \lambda$. Nos dois casos, obtemos uma nova função (redefinida ou estendida) que é contínua em σ. É costume denotar o limite λ de f na singularidade removível σ por $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)$ ou, simplesmente, se o ponto σ estiver claro no contexto, por $\lim f(x)$.

Assim, o limite de uma função numa singularidade removível é o valor que a função deve tomar nesse ponto para se tornar contínua nesse ponto, ou seja, representa uma tendência. Se uma singularidade não for removível, dizemos que é *essencial*; nesse caso, não há real algum que seja o limite da função e dizemos que *não existe* o limite de f nessa singularidade.

Exemplo 3.61. A origem é uma singularidade removível das funções $(\operatorname{sen} x)/x$ e $(\cos x - 1)/x$ definidas em $\mathbb{R} - \{0\}$ e, pelo Exemplo 3.60, valem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{3.6}$$

As funções definidas por $x/|x|$ ou $1/x$ têm uma singularidade essencial na origem e não existem os limites dessas funções na origem. ◎

Observe que até poderíamos definir o limite de uma função num ponto de acumulação do domínio em que a função fosse contínua, mas isso seria uma redundância pois, num tal ponto, inevitavelmente, esse limite seria o próprio valor da função. Por isso, definimos o limite de uma função apenas em singularidades removíveis da função, mas, para simplificar os enunciados de propriedades dos limites, passamos a definir e identificar

$$\lim_{x\to\sigma} f(x) = f(\sigma)$$

sempre que $\sigma \in X$ for um ponto de acumulação de X e de continuidade da função $f : X \to \mathbb{R}$.

Para estabelecer que λ é o limite de uma função numa singularidade removível σ, a definição exige que verifiquemos se $f(x_n) \longrightarrow \lambda$ com *toda e qualquer* sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ tal que $x_n \longrightarrow \sigma$. Será isso, de fato, necessário? Na verdade, não é preciso verificar isso com todas as sequências que tendem a σ, bastando considerar as sequências crescentes e as decrescentes de X que tendem a σ. (Ver Exercício 3.4.18.)

O limite de uma função numa singularidade removível também pode ser caracterizado sem referência direta a sequências, dizendo que o limite de f em σ é λ se $f(x)$ estiver situado *arbitrariamente próximo* de λ sempre que x estiver *suficientemente próximo* de σ, mas distinto de σ. Em símbolos, temos a afirmação seguinte. (Ver Exercício 3.4.1.)

$$\lim_{x\to\sigma} f(x) = \lambda \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\big[0 < |x - \sigma| < \delta \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon\big].$$

Os limites de funções satisfazem as mesmas propriedades dos limites de sequências decorrentes da permanência do sinal e do confronto. (Ver Exercícios 3.4.2 e 3.4.3.) Da mesma forma, os limites de funções também satisfazem, como os limites de sequências, as regras operacionais arroladas na Proposição 2.30, a saber, que o limite da soma, diferença, produto e quociente de funções é a soma, diferença, produto e quociente dos limites das funções. No caso do quociente f/g de funções, é essencial que $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) \neq 0$ para que valha

$$\lim_{x\to\sigma} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)}{\lim\limits_{x\to\sigma} g(x)}.$$

Em particular, se $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) \neq 0$, o quociente tem limite nulo.

No caso em que ambos $\lim_{x \to \sigma} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to \sigma} g(x) = 0$, o quociente f/g tem uma singularidade em σ que é de fundamental importância, que tanto pode ser removível, e o limite ser algum número, quanto essencial. Como não existe regra operacional alguma para a singularidade σ desse quociente, dizemos que o limite do quociente em σ é uma *indeterminação* $0/0$.

Exemplo 3.62. As funções definidas por $\operatorname{sen} x$, $\cos x - 1$ e x se anulam na origem, de modo que a origem é uma indeterminação $0/0$ dos quocientes $(\operatorname{sen} x)/x$ e $(\cos x - 1)/x$. Pelo Exemplo 3.61, essa indeterminação é removível. Como $\operatorname{sen} 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$, vemos que essas indeterminações definem as derivadas das funções seno e cosseno na origem, já que os limites significam que as funções

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{e} \quad \varphi(x) = \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \frac{\cos x - 1}{x}$$

têm extensões contínuas na origem, ou seja, a função seno é derivável na origem, com derivada igual a 1, a função cosseno é derivável na origem, com derivada igual a 0. ◎

Em geral, temos as seguintes definições equivalentes da derivabilidade de uma função. Para a demonstração, ver Exercício 3.4.6.

Proposição 3.63. *Seja $\sigma \in X$ um ponto de acumulação do domínio X de uma função f e defina*

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{f(x) - f(\sigma)}{x - \sigma}$$

com $x \in X - \{\sigma\}$, como em (3.3). São equivalentes as afirmações seguintes.

(1) *A função f é derivável em σ.*

(2) *A função φ_σ tem uma extensão a X que é contínua em σ.*

(3) *A indeterminação $0/0$ da função φ_σ em σ é removível.*

(4) *Existe o limite $\lim_{x \to \sigma} \varphi_\sigma(x)$.* □

Limites Laterais

Quando uma função é contínua num intervalo do tipo fechado, é costume dizer que a função é contínua *lateralmente* na(s) extremidade(s). Por exemplo, se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ for contínua em 1, diz-se que f é *contínua à esquerda* em 1, para evidenciar que nada se afirma sobre possíveis valores de f à direita de 1, mas é claro que isso não acrescenta coisa alguma ao que já era sabido.

Quando uma função definida num intervalo X tiver uma singularidade removível numa extremidade do intervalo, então o limite de f nessa extremidade é, naturalmente, um limite *lateral*, como segue. Seja σ uma singularidade de uma função $f : X \to \mathbb{R}$. No caso particular em que σ é um ponto de acumulação de $(\sigma - 1, \sigma) \cap X$ costumamos dizer que $\lambda \in \mathbb{R}$ é o limite de f em σ *pela esquerda*, e escrevemos $\lim_{x \to \sigma -} f(x) = \lambda$, se $f(x_n) \longrightarrow \lambda$, qualquer que seja a sequência (x_n) de X convergente a σ e tal que $x_n < \sigma$, com $n \gg 0$.

Nesse caso, podemos redefinir $f(\sigma) = \lambda$ se $\sigma \in X$ for um ponto de descontinuidade e, caso $\sigma \in \overline{X} - X$, estender o domínio da restrição $f|_{(-\infty,\sigma) \cap X}$ a $(-\infty, \sigma] \cap X$ definindo $f(\sigma) = \lambda$. Nos dois casos, obtemos uma nova função (redefinida ou estendida) de domínio $(-\infty, \sigma] \cap X$ que é contínua (à esquerda) em σ.

Se σ for um ponto de acumulação de $(\sigma, \sigma + 1) \cap X$ diremos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é o limite de f em σ *pela direita*, e escrevemos $\lim_{x \to \sigma +} f(x) = \lambda$, se $f(x_n) \longrightarrow \lambda$, qualquer que seja a sequência (x_n) de X convergente a σ e tal que $x_n > \sigma$, com $n \gg 0$. Nesse caso, podemos obter uma nova função (redefinida ou estendida) de domínio $[\sigma, +\infty) \cap X$ que é contínua em σ.

Esses dois tipos particulares de limite são denominados *limites laterais*.

Exemplo 3.64. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função real denotada por f_0 no Exemplo 3.5, ou seja, $f(x) = -1$ se $x < 0$, $f(0) = 0$ e $f(x) = 1$, se $x > 0$. (Ver Figura 3.3.) Essa função é contínua em cada ponto de $\mathbb{R}$, exceto em na origem, onde temos

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 1.$$

Observe que mesmo que f não possua extensão contínua a $\mathbb{R}$, as restrições de f a $(-\infty, 0)$ e a $(0, +\infty)$ têm extensões contínuas a $(-\infty, 0]$ e a $[0, +\infty)$, respectivamente. ◎

Para estabelecer que λ é o limite lateral pela esquerda (respectivamente, pela direita) de uma função numa singularidade σ, basta considerar as sequências crescentes (respectivamente, decrescentes) de X que tendem a σ. A formulação sem referência direta a sequências, nesse caso, consiste em exigir que $|f(x) - \lambda|$ seja arbitrariamente pequeno se $x < \sigma$ for suficientemente próximo de σ. (Ver Exercício 3.4.18.)

Seja σ um ponto de acumulação bilateral de X, ou seja, de $(\sigma - 1, \sigma) \cap X$ e de $(\sigma, \sigma + 1) \cap X$. Então a singularidade σ é removível se, e só se, existirem ambos limites laterais e $\lim_{x \to \sigma-} f(x) = \lim_{x \to \sigma+} f(x)$. Nesse caso, os dois limites laterais coincidem com $\lim_{x \to \sigma} f(x)$. (Ver Exercício 3.4.15.)

Em particular, podemos falar de *derivadas laterais* pela esquerda e direita de uma função, que costumam ser denotadas por

$$f'_-(\sigma) = \lim_{x \to \sigma-} \varphi_\sigma(x) \quad \text{e} \quad f'_+(\sigma) = \lim_{x \to \sigma+} \varphi_\sigma(x),$$

respectivamente. A derivada lateral num ponto pela direita é a tendência das inclinações das secantes pela direita. Quando a função é derivável, essa derivada lateral não deve ser confundida com o limite lateral da *função derivada*, que é a tendência das inclinações das retas tangentes,

Exemplo 3.65. Considere a função definida por $h(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ em $x \neq 0$ e $h(0) = 0$ do Exercício 3.2.2. Essa função é derivável, com $h'(0) = 0$, portanto, em particular, as derivadas laterais em 0 existem e são nulas, ou seja, $h'_-(0) = h'_+(0) = h'(0) = 0$. No entanto, a função derivada $h'(x)$ tem uma descontinuidade essencial na origem, não existindo, sequer, os limites laterais $h'(0-)$ e $h'(0+)$ dessa função na origem. ◎

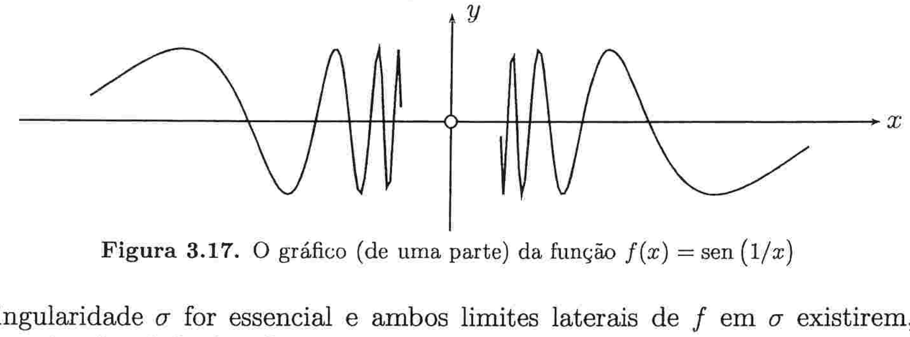


Figura 3.17. O gráfico (de uma parte) da função $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$

Se a singularidade σ for essencial e ambos limites laterais de f em σ existirem, dizemos que σ é uma *singularidade de salto*, ou uma *singularidade de primeira espécie*, e que o número positivo

$$\left| \lim_{x \to \sigma+} f(x) - \lim_{x \to \sigma-} f(x) \right|$$

é o *salto* de f em σ. Nesse caso, se $\sigma \in X$ for um ponto de descontinuidade, também dizemos que σ é uma *descontinuidade de salto* de f. Por exemplo, a origem é uma descontinuidade de salto da função f_a do Exemplo 3.5, com salto 2. Se σ não for de primeira espécie, dizemos que σ é uma *singularidade de segunda espécie.*

Exemplo 3.66. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, com $x \neq 0$. A origem é uma singularidade essencial que é de segunda espécie, pois não existem os limites laterais de f na origem. (Ver Figura 3.17 e Exercício 3.4.16.) ◎

Por virtude do TCM, a classe das funções monótonas tem um comportamento especial no que toca aos limites laterais. Para a demonstração, ver Exercício 3.4.21.

Proposição 3.67. *Toda função monótona limitada tem os limites laterais possíveis em cada singularidade.* □

Exemplo 3.68. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida em cada x por $f(x) = [x]$, a parte inteira de x, cujo gráfico é uma "escada infinita". Essa função é monótona não decrescente, contínua em cada real não inteiro e com uma singularidade essencial em cada inteiro. Em cada inteiro k é contínua à direita, mas não à esquerda, pois $\lim\limits_{x\to k+} f(x) = k = f(k)$, mas $\lim\limits_{x\to k-} f(x) = k - 1$. ◎

Exemplo 3.69. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \sum\limits_{s_n<x} \dfrac{1}{2^n}$, em que $s_n = \frac{n-1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. O somatório à direita significa que para obter o valor de $f(x)$ somamos todas as frações $1/2^n$ com expoentes n tais que $\frac{n-1}{n} < x$. Como $s_n \in [0,1)$, resulta que $f(x) = 0$, com $x \leqslant 0$ e $f(x) = 1$, com $x \geqslant 1$. Como só $n = 1$ dá $s_n = 0 < x$ se $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, temos $f(x) = 1/2$ nesse pontos. Também $f(x) = 1/2 + 1/4 = 3/4$, com $\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{2}{3}$, e $f(x) = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$, com $\frac{2}{3} < x \leqslant \frac{3}{4}$, e assim por diante, de modo que o gráfico dessa função é uma "escada infinita". Essa função é monótona não decrescente, contínua em cada real, exceto em cada ponto s_n, em que há uma singularidade essencial, na qual é contínua à esquerda, mas não à direita, pois $\lim\limits_{x\to s_n-} f(x) = f(s_n) < \lim\limits_{x\to s_n+} f(x)$. ◎

Uma extensão do conceito de limite lateral é o de limite *no infinito*. No caso em que X for um conjunto ilimitado superiormente, dizemos que λ é o *limite de f em $+\infty$*, e escrevemos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$, se a sequência $\big(f(x_n)\big)$ for convergente a λ, qualquer que seja a sequência (x_n) de X que divirja a $+\infty$. Quando $X = \mathbb{N}$, esse é exatamente o limite de sequências, visto no capítulo precedente. Analogamente, se X for ilimitado inferiormente, dizemos que λ é o *limite de f em $-\infty$*, e escrevemos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lambda$, se a sequência $\big(f(x_n)\big)$ for convergente a λ, qualquer que seja a sequência (x_n) de X que divirja a $-\infty$. Por exemplo, já sabemos que

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right).$$

Novamente, para estabelecer que λ é o limite de f em $+\infty$, basta considerar as sequências crescentes ilimitadas de X. A formulação sem referência direta a sequências, nesse caso, consiste em exigir que $|f(x) - \lambda|$ seja arbitrariamente pequeno se x for suficientemente grande. (Ver Exercício 3.4.22.)

Limites Infinitos

Também é útil considerar o caso de funções que divergem a infinito. Embora não sejam autênticos limites, não deixam de caracterizar uma tendência bem definida e podem ser tratados como limites. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in \mathbb{R}$ uma singularidade qualquer de f.

Dizemos que f *diverge a $+\infty$ em σ* se a sequência $\big(f(x_n)\big)$ divergir a $+\infty$, qualquer que seja a sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ convergente a σ. Nesse caso, escrevemos $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$. Analogamente, dizemos que f *diverge a $-\infty$ em σ*, e escrevemos $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = -\infty$, se a sequência $\big(f(x_n)\big)$ divergir a $-\infty$, qualquer que seja a sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ convergente a σ. Em ambos casos, σ é uma singularidade essencial.

Seja σ um ponto de acumulação do domínio comum de duas funções f e g e digamos que $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = \lambda \neq 0$. Então $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = 0$ se, e só se $\lim\limits_{x\to\sigma} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ (dependendo do sinal do limite λ). No caso em que ambos $\lim_{x\to\sigma} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to\sigma} g(x)$, dizemos que o limite do quociente em σ é uma *indeterminação* ∞/∞, o que significa que não existe uma regra operacional para o limite desse quociente, pois a singularidade pode tanto pode ser removível (e o limite ser algum número) quanto essencial. Como $f/g = \dfrac{1/g}{1/f}$ e $\lim_{x\to\sigma} \dfrac{1}{f(x)} = 0 = \lim_{x\to\sigma} \dfrac{1}{g(x)}$, essas indeterminações ∞/∞ são equivalentes a indeterminações $0/0$.

Da mesma forma que antes, também podemos considerar divergência a $+\infty$ lateralmente pela esquerda e pela direita, obtendo $\lim_{x\to\sigma\pm} f(x) = \pm\infty$. Por exemplo, já sabemos que

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

Finalmente, ainda podemos definir divergência infinita no infinito, a saber, as duas expressões $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, que deixamos a critério do leitor.

Exercícios 3.4

3.4.1. Sejam σ um ponto de acumulação do domínio X de uma função f e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número. Mostre que $\lim_{x\to\sigma} f(x) = \lambda$ se, e só se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja $x \in X$, vale $0 < |x - \sigma| < \delta \implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon$. Mostre que se existir o limite de f em σ então f é *limitada na vizinhança de* σ, ou seja, existem M e $r > 0$ tais que $|f(x)| \leqslant M$, qualquer que seja $x \in X$ com $0 < |x - \sigma| < r$.

3.4.2. Sejam σ um ponto de acumulação do domínio X de uma função f e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número. Mostre que se $\lim_{x\to\sigma} f(x) = \lambda$, então $\lim_{x\to\sigma} |f(x)| = |\lambda|$. Mostre que, se $A < \lambda < B$, então existe $r > 0$ tal que $A < f(x) < B$, qualquer que seja $x \in X$ com $0 < |x - \sigma| < r$. Mostre que se $\lambda \neq 0$, então existe $r > 0$ tal que $2|f(x)| > |\lambda|$, qualquer que seja $x \in X$ com $0 < |x - \sigma| < r$.

3.4.3. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções reais e $\sigma \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X tais que existam $\lim_{x\to\sigma} f(x) = \lambda$ e $\lim_{x\to\sigma} g(x) = \mu$. Mostre que valem as afirmações seguintes.

(1) Se $\lambda < \mu$, então existe $r > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, qualquer que seja $x \in X$ com $0 < |x - \sigma| < r$.

(2) Se existe $r > 0$ tal que $f(x) \leqslant g(x)$, qualquer que seja $x \in X$ com $0 < |x - \sigma| < r$, então $\lambda \leqslant \mu$.

(3) (Critério do Confronto) Se $\lambda = \mu$ e se $h : X \to \mathbb{R}$ for uma função qualquer tal que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, qualquer que seja $x \in X - \{\sigma\}$, então existe $\lim_{x\to\sigma} h(x) = \eta$ e $\lambda = \eta = \mu$.

3.4.4. Sejam σ um ponto de acumulação do domínio X de uma função f e $\lambda \in \mathbb{R}$ um número. Observe que a afirmação $\lim_{x\to\sigma} f(x) \neq \lambda$ significa que ou o limite de f em σ não existe ou, então, existe mas é distinto de λ. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) Existe alguma sequência crescente ou decrescente (x_n) de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$ e $f(x_n) \not\longrightarrow \lambda$.

(2) Existe alguma sequência (x_n) de $X - \{\sigma\}$ tal que $x_n \longrightarrow \sigma$ e $f(x_n) \not\longrightarrow \lambda$.

(3) $\lim_{x\to\sigma} f(x) \neq \lambda$.

(4) Existe algum $\varepsilon_0 > 0$ tal que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, existe algum $x_n \in X$ tal que valem $0 < |x_n - \sigma| < \frac{1}{n}$ e $\left|f(x_n) - \lambda\right| > \varepsilon_0$.

(5) Existem algum $\varepsilon_0 > 0$ e alguma sequência (x_n) de X tal que $x_n \longrightarrow \sigma$ e, com $n \gg 0$, valem $x_n \neq \sigma$ e $\left|f(x_n) - \lambda\right| > \varepsilon_0$.

3.4.5. Seja $\sigma \in X$ um ponto do domínio da função $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) f não é contínua em σ.

(2) σ é um ponto de acumulação de X e $\lim_{x\to\sigma} f(x) \neq f(\sigma)$.

(3) σ é um ponto de acumulação de X e o limite de f em σ não existe ou, então, existe mas é distinto de $f(\sigma)$.

3.4.6. Demonstre a Proposição 3.63.

3.4.7. Seja $\sigma \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto X que pertence a X e denotemos $X_\sigma = X - \{\sigma\}$. Seja $f : X_\sigma \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Mostre que existe o limite de f em σ se, e só se, existe alguma extensão de f a X que é contínua em σ. Seja $g : X \to \mathbb{R}$ uma extensão de f a X. Mostre que g é contínua em σ se, e só se, $g(\sigma) = \lim_{x\to\sigma} f(x)$. Mostre que qualquer função definida em X_σ tem, no máximo, uma única extensão a X que é contínua em σ.

3.4.8. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Observe que todo ponto $\sigma \in I$ é um ponto de acumulação de $I - \{\sigma\}$ e que 0 é um ponto de acumulação do intervalo transladado $\{h : \sigma + h \in I\}$. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer e fixemos $\sigma \in I$. Mostre que, se existir um dos três limites seguintes, então existem os outros dois e todos coincidem.

$$\lim_{x\to\sigma} \frac{f(x) - f(\sigma)}{x - \sigma}, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(\sigma + h) - f(\sigma)}{h} \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(\sigma - h) - f(\sigma)}{h}.$$

3.4.9. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $\sigma \in X$. Mostre que f é derivável em σ se, e só se, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big[f(\sigma+h) - f(\sigma) - d\cdot h\big] = 0$. Nesse caso, $d = f'(\sigma)$. Mostre que f é derivável em σ se, e só se, existe o limite $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big[f(\sigma+h) - f(\sigma)\big]$. Nesse caso, $f'(\sigma)$ é o valor desse limite.

3.4.10. Considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e $\sigma \in X$ um ponto interior de X. Mostre que se f for derivável em σ, então existe o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\sigma + h) - f(\sigma - h)}{2h}$$

e é igual a $f'(\sigma)$. Obtenha um exemplo de uma função f que não seja derivável num ponto $\sigma \in X$ e tal que exista o limite precedente.

3.4.11. Considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e $\sigma \in X$ um ponto interior de X. Mostre que se f for derivável em σ, então existe o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\sigma + 2h) - f(\sigma + h)}{h}$$

e é igual a $f'(\sigma)$. Obtenha um exemplo de uma função f que não seja derivável num ponto $\sigma \in X$ e tal que exista o limite precedente.

Sugestão: somar e subtrair $f(x)$ do denominador e obter, no limite, $2f'(x) - f'(x) = f'(x)$.)

3.4.12. Dizemos que duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ são *tangentes em* σ se $\lim_{x\to\sigma} \frac{f(x) - g(x)}{x - \sigma} = 0$, ou seja, se $(f - g)(x) = o(x - \sigma)$ em σ (Exercício 3.4.13). Mostre que duas funções lineares afins $h(x) = a\cdot x + b$ e $g(x) = c\cdot x + d$ são tangentes em algum ponto se, e só se, coincidirem. Mostre que uma função f derivável em σ e uma função linear afim $h(x) = a\cdot x + b$ são tangentes em σ se, e só se, $a = f'(\sigma)$ e $b = f(\sigma) - f'(\sigma)\cdot\sigma$.

3.4.13. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $\sigma \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do domínio X de f e g. Dizemos que f é de *ordem de grandeza menor do que* g em σ ou, simplesmente, de ordem menor do que g em σ, e escrevemos $f(x) = o(g(x))$ em σ, se

$$\lim_{x \to \sigma} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Suponha que $f(x) = o(g(x))$ em σ e que $\lim\limits_{x \to \sigma} g(x) = 0$. Mostre que $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = 0$. Mostre que uma função linear afim $f(x) = a \cdot x + b$ é de ordem de grandeza menor do que $g(x) = x$ em $\sigma = 0$ se, e só se, $a = b = 0$.

3.4.14. Sejam σ um ponto de acumulação do domínio X de uma função f. Mostre que σ é uma singularidade essencial de f sempre que existirem sequências (x_n) e (y_n) de $X - \{\sigma\}$ convergentes a σ e tais que $\big(f(x_n)\big)$ e $\big(f(y_n)\big)$ sejam convergentes, mas $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$. Com um exemplo, mostre que a condição suficiente dada não é necessária para que um ponto de acumulação do domínio seja uma singularidade essencial da função.

3.4.15. Considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $(\sigma - 1, \sigma) \cap X$ e, também, de $(\sigma, \sigma + 1) \cap X$. Mostre que existe $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x)$ se, e só se, existem e são iguais os limites laterais $\lim\limits_{x \to \sigma-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to \sigma+} f(x)$ de f em σ; mostre que, nesse caso, os três limites são iguais.

3.4.16. Considere a função definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$ não nulo. Mostre que a origem é uma singularidade de segunda espécie dessa função, mostrando que não existem $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, nem $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Enuncie resultados análogos trocando sen por cos.

3.4.17. Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto limitado não vazio e considere a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é cota superior de } X, \\ 0, & \text{se } x \text{ não é cota inferior nem superior de } X, \\ -1, & \text{se } x \text{ é cota inferior de } X, \end{cases}$$

Mostre que ψ é contínua, exceto nos pontos $\sigma_1 = \inf X$ e $\sigma_2 = \sup X$, em que ψ tem descontinuidades de salto, com salto 1.

3.4.18. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, $\lambda \in \mathbb{R}$ um número e $\sigma \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $(\sigma - 1, \sigma) \cap X$. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) $\lim\limits_{x \to \sigma-} f(x) = \lambda$.

(2) Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum $\delta > 0$ tal que $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$ satisfazendo $\sigma - \delta < x < \sigma$.

(3) $f(x_n) \longrightarrow \lambda$ qualquer que seja a sequência (x_n) crescente de X convergente a σ.

Enuncie e demonstre resultado análogo para o limite pela direita. Mostre que se σ é um ponto de acumulação qualquer de X, então $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = \lambda$ se, e só se, $f(x_n) \longrightarrow \lambda$ qualquer que seja a sequência (x_n) estritamente monótona (isto é, crescente ou decrescente) de X convergente a σ.

3.4.19. Considere uma função $f : X \to \mathbb{R}$ não decrescente e $\sigma \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $(\sigma - 1, \sigma) \cap X$. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) Existe $\lim\limits_{x \to \sigma-} f(x)$.

(2) Existe alguma sequência crescente (x_n) de X convergente a σ tal que $\big(f(x_n)\big)$ converge.

Mostre que se f for limitada superiormente em $(\sigma - 1, \sigma) \cap X$, então sempre existe o limite de f em σ pela esquerda. Enuncie e demonstre resultados análogos para funções não crescentes.

3.4.20. Considere uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ não decrescente e $\sigma \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $(\sigma, \sigma + 1) \cap X$. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) Existe $\lim\limits_{x \to \sigma +} f(x)$.

(2) Existe alguma sequência decrescente (x_n) de X convergente a σ tal que $\big(f(x_n)\big)$ converge.

Mostre que se f for limitada inferiormente em $(\sigma, \sigma + 1) \cap X$, então sempre existe o limite de f em σ pela direita. Enuncie e demonstre resultados análogos para funções não crescentes.

3.4.21. Considere uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ não decrescente. Mostre que se $\sigma \in \mathbb{R}$ for um ponto de acumulação de $(\sigma - 1, \sigma) \cap X$ e de $(\sigma, \sigma + 1) \cap X$ e se f for limitada em $X \cap (\sigma - 1, \sigma + 1)$, então existem ambos limites laterais de f em σ e vale $\lim\limits_{x \to \sigma -} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to \sigma +} f(x)$. Enuncie e demonstre resultados análogos para funções não crescentes. Conclua que sempre existem todos os limites laterais possíveis de funções monótonas limitadas.

3.4.22. Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto X ilimitado superiormente e $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$.

(2) Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe algum $M > 0$ tal que $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$ com $M \leqslant x$.

(3) $f(x_n) \longrightarrow \lambda$ qualquer que seja a sequência (x_n) crescente de X que diverge a $+\infty$.

Enuncie resultados análogos para conjuntos ilimitados inferiormente e limites em $-\infty$.

3.4.23. Considere uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num conjunto X ilimitado superiormente. Mostre que se existir o limite de $f(x)$ em $+\infty$, então existe $r > 0$ tal que a função f é limitada em $X \cap [r, +\infty)$. Mostre que a recíproca é falsa. Enuncie resultados análogos para limites em $-\infty$.

3.4.24. Considere uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ não decrescente definida num conjunto X ilimitado superiormente. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes.

(1) Existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

(2) Existe alguma sequência crescente (x_n) de X divergente a $+\infty$ tal que $\big(f(x_n)\big)$ converge.

Mostre que se f for limitada superiormente em $X \cap [r, +\infty)$, com algum $r > 0$, então sempre existe o limite de f em $+\infty$. Enuncie e demonstre resultados análogos para limites de funções não decrescentes em $-\infty$. Obtenha resultados análogos para funções não crescentes.

3.4.25. Dado $0 < c < 1 < d$, mostre que

$$\lim_{x \to -\infty} \Big(\frac{1 + d^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \Big(\frac{1 + c^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Conclua que, com $0 < a < b$, valem

$$\lim_{x \to -\infty} \Big(\frac{a^x + b^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = a \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \Big(\frac{a^x + b^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = b.$$

3.4.26. Considere uma função f derivável num intervalo $(r, +\infty)$, com algum $r > 0$, e tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = M$. Mostre que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = M.$$

3.4.27. Considere uma função f contínua num intervalo $(r, +\infty)$, com algum $r > 0$. Mostre que se existir o limite quando x tende a $+\infty$ de alguma primitiva de f, então esse limite existe com qualquer primitiva de f. Suponha, agora, que $f(x) \geqslant 0$ com $x > r$ e que g seja alguma primitiva de f em $(r, +\infty$.) Mostre que existe $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ se, e só se, a sequência $\big(g(n)\big)$ converge. (*Sugestão*: o Exercício 3.4.24 pode ser útil.)

3.4.28. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja não crescente em $(-\infty, 0)$ e não decrescente em $(0, +\infty)$. Mostre que se existir $\lim_{x \to 0} f(x) = L$, então $f(x) \geqslant L$ qualquer que seja $x \neq 0$. Mostre que se f também for contínua em 0, então 0 é um ponto de mínimo global. Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em cada $x \neq 0$, tal que $f'(x) < 0$, com $x < 0$ e $f'(x) > 0$, com $x > 0$, mas tal que 0 não seja ponto de extremo local de f.

3.4.29. Considere a função definida por $f(x) = x \cdot \log x$, com $x > 0$. Mostre que f possui um único ponto crítico; mostre que esse crítico é um ponto de mínimo, com valor mínimo negativo. Mostre que $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ e que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3.4.30. Sejam $a, b \in (0, +\infty)$ fixados. Dado $r \neq 0$, defina a *média de potência* r de a, b por

$$M(r) = M(r, a, b) = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Observe que $M(1, a, b) = A(a, b)$ é a média aritmética de a, b e $M(-1, a, b) = H(a, b)$ é a média harmônica de a, b. (Ver Exercício 1.6.15.) Mostre que, definindo $M(0, a, b) = G(a, b)$ como a média geométrica de a, b, a função $M(r)$ resulta contínua em $\mathbb{R}$ ou seja, mostre a continuidade de $M(r)$ em cada $r \neq 0$ e que

$$\lim_{r \to 0} M(r, a, b) = \sqrt{ab} = G(a, b).$$

3.4.31. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que exista $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Mostre que o limite da média de f em $[0, x]$, quando x tende a $+\infty$ coincide com o limite de f quando x tende a $+\infty$, isto é, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = L.$$

(*Sugestão*: Mostre que, qualquer que seja $0 < N < x$, vale

$$\int_N^x [f(t) - L]\, dt = \int_N^x f(t)dt - x \cdot L + N \cdot L,$$

e estabeleça que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - L &= \frac{1}{x} \int_0^N f(t)dt + \frac{1}{x} \int_N^x f(t)dt - L \\ &= \frac{1}{x} \int_0^N f(t)dt + \frac{1}{x} \int_N^x [f(t) - L]\, dt - \frac{N \cdot L}{x}. \end{aligned}$$

Conclua o exercício, lembrando que, pelo Exercício 3.4.23, podemos tomar $M > 0$ tal que $|f(t)| \leqslant M$, qualquer que seja $x \geqslant 0$.)

3.4.32. (Teste da Integral – TI) Seja $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e não crescente e denote $f(k) = u_k$, com $k \in \mathbb{N}$. Mostre que a série numérica $\sum u_k$ converge se, e só se, com alguma primitiva g de f em $[1, +\infty)$, existe

$$\lim_{x \to +\infty} g(x).$$

(*Sugestão*: use os Exercícios 3.4.27 e 3.3.8.)

3.4.33. Usando o TI, mostre que as séries

$$\sum \frac{1}{k^c} \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{k(\log k)^c}$$

convergem se, e só se, $c > 1$.

3.5. Integral

Nesta seção, construimos a *integral* de Riemann de funções contínuas em intervalos limitados e fechados do domínio.

Daqui em diante, seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua qualquer no intervalo X de $\mathbb{R}$. Para simplificar, passamos a utilizar t como a variável independente de f. Fixemos, de uma vez por todas, um intervalo $[a, b] \subseteq X$, com $a < b$, e os valores mínimo m e máximo M de f em $[a, b]$, cortesia do Teorema 3.18 de Weierstrass: $m \leqslant f(t) \leqslant M$, com $t \in [a, b]$.

Tomando um ponto $c \in (a, b)$ arbitrário, obtemos dois subintervalos e o mesmo Teorema de Weierstrass fornece dois valores mínimos m_1 e m_2 e dois valores máximos M_1 e M_2 de f nos subintervalos $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente. Os dois valores mínimos não são menores do que m e os dois valores máximos não são maiores do que M, de modo que

$$\begin{aligned} m \cdot (b-a) &= m \cdot (c-a) + m \cdot (b-c) \\ &\leqslant m_1 \cdot (c-a) + m_2 \cdot (b-c) \\ &\leqslant M_1 \cdot (c-a) + M_2 \cdot (b-c) \leqslant M \cdot (b-a). \end{aligned}$$

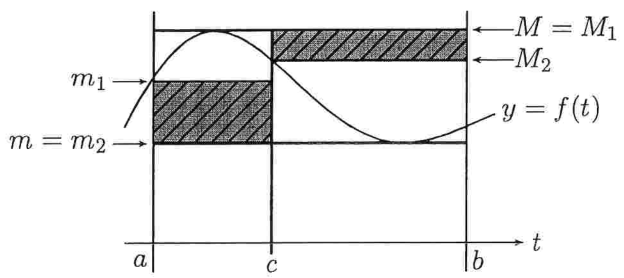


Figura 3.18. Um ponto adicional não pode diminuir os mínimos nem aumentar os máximos

Generalizando de um para mais pontos intermediários, convém dizer que uma coleção finita $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ de $n + 1$ pontos é uma *partição* do intervalo $[a, b]$ se

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Tomando, com $1 \leqslant k \leqslant n$, o valor mínimo m_k e o valor máximo M_k de f no subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$, obtemos, com $t_{k-1} < t < t_k$,

$$m \leqslant m_k \leqslant f(t) \leqslant M_k \leqslant M.$$

A *soma inferior* e a *soma superior* de f em relação à partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ são denotadas e definidas, respectivamente, por

$$I(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (t_k - t_{k-1})$$

e

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Exemplo 3.70. Se $v = v(t)$ indica a velocidade de um objeto ao longo de um intervalo de tempo $[0, T]$, então cada parcela $v_{\min} \cdot (t_k - t_{k-1})$ e $v_{\max} \cdot (t_k - t_{k-1})$ das somas inferior e superior tem a interpretação de distância percorrida, já que essas velocidades são constantes e

$$\text{velocidade constante} \times \text{tempo decorrido} = \text{distância percorrida}.$$

Assim, tanto as somas inferiores da velocidade v de um objeto quanto as superiores representam distâncias percorridas pelo objeto. ⊚

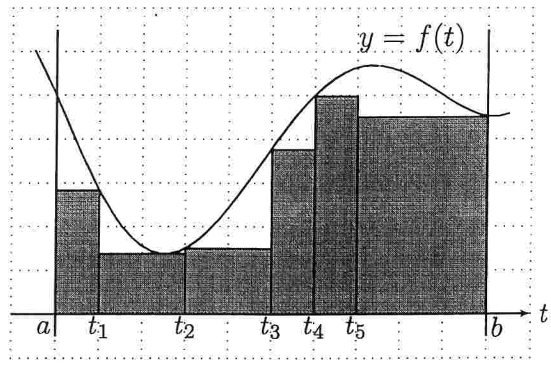


Figura 3.19. Uma soma inferior $I(f, \mathcal{P})$

Tomando a partição $\mathcal{P}_0 = \{a, b\}$ de dois pontos, temos $I(f, \mathcal{P}_0) = m \cdot (b - a) \leqslant M \cdot (b - a) = S(f, \mathcal{P}_0)$ e, tomando a partição $\mathcal{P}_1 = \{a, c, b\}$ de três pontos, vimos anteriormente o que pode ser traduzido por

$$m \cdot (b - a) \leqslant I(f, \mathcal{P}_1) \leqslant S(f, \mathcal{P}_1) \leqslant M \cdot (b - a).$$

Repetindo aquele argumento — em que havia um ponto c adicional no intervalo $[a, b]$ — com cada ponto adicional em cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ e observando que

$$\sum (t_k - t_{k-1}) = t_n - t_0 = b - a,$$

podemos verificar (por indução) que, sempre,

$$m \cdot (b - a) \leqslant I(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{P}) \leqslant M \cdot (b - a). \tag{3.7}$$

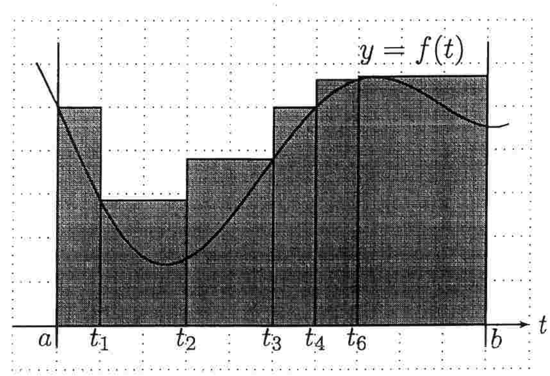


Figura 3.20. Uma soma superior $S(f, \mathcal{P})$

A diferença entre as somas superior e inferior de f em relação a uma partição $\mathcal{P}$ é dada por

$$0 \leqslant S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

Lema 3.71. *Dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ tal que*

$$0 \leqslant S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) \leqslant \varepsilon.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.20, as oscilações $M_k - m_k$ de f nos intervalos $[t_{k-1}, t_k]$ podem ser controladas: dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher $r > 0$ de tal modo que

$$0 \leqslant M_k - m_k = \omega\big(f, [t_{k-1}, t_k]\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a},$$

em cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ de $[a,b]$ tal que $t_k - t_{k-1} \leqslant r$.

Fixado, pois, $\varepsilon > 0$, basta tomar $r > 0$ fornecido pela Proposição 3.20 e escolher uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ tal que $t_k - t_{k-1} \leqslant r$, qualquer que seja $1 \leqslant k \leqslant n$, com a qual obtemos

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\cdot(t_k - t_{k-1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = \varepsilon.$$

Uma tal partição pode ser obtida tomando, por exemplo,

$$a = t_0 < a + r = t_1 < \cdots < a + (n-1)r = t_{n-1} < t_n = b,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ é o único natural que satisfaz $a + (n-1)r < b \leqslant a + nr$, pela propriedade arquimediana. □

Não só as somas inferiores aumentam e as superiores diminuem sempre que passarmos de uma dada partição para uma outra que a contenha, mas até

$$m\cdot(b-a) \leqslant I(f,\mathcal{Q}) \leqslant S(f,\mathcal{R}) \leqslant M\cdot(b-a), \tag{3.8}$$

quaisquer que sejam duas partições $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ de $[a,b]$, já que sempre podemos comparar as somas relativas às partições $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ com as somas relativas à partição $\mathcal{Q}\cup\mathcal{R}$, que contém ambas, e observando que

$$I(f,\mathcal{Q}) \leqslant I(f,\mathcal{Q}\cup\mathcal{R}) \leqslant S(f,\mathcal{Q}\cup\mathcal{R}) \leqslant S(f,\mathcal{R}).$$

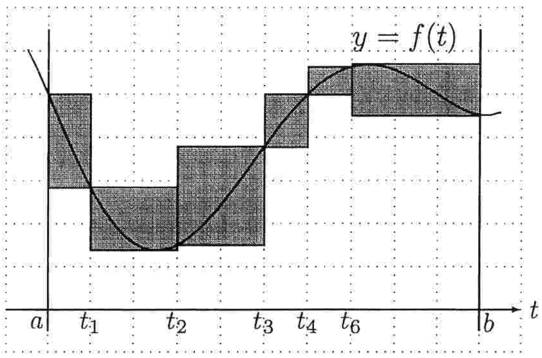


Figura 3.21. A diferença $S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P})$

Assim, não só são limitados o conjunto de todas somas inferiores e o de todas somas superiores de f em $[a,b]$, mas nenhuma soma inferior é maior do que qualquer soma superior. A *integral inferior* e a *integral superior* de f em $[a,b]$ são denotadas e definidas por

$$I(f,[a,b]) = \sup\big\{I(f,\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \text{ é uma partição de } [a,b]\big\}$$

e

$$S(f,[a,b]) = \inf\big\{S(f,\mathcal{R}) : \mathcal{R} \text{ é uma partição de } [a,b]\big\},$$

respectivamente. Por (3.8), sempre temos $I(f,[a,b]) \leqslant S(f,[a,b])$ e, por virtude do Lema 3.71, obtemos $I(f,[a,b]) = S(f,[a,b])$. (Ver Exercício 1.4.18.) Destacamos esse resultado.

Teorema 3.72. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado qualquer intervalo $[a, b] \subseteq X$, temos*

$$I(f, [a, b]) = S(f, [a, b]).$$

Dizemos que esse valor comum das integrais inferior e superior é a *integral de f em $[a, b]$*, denotada por

$$\int_a^b f.$$

Proposição 3.73. *A integral de uma função contínua tem as propriedades de monotonicidade* I1 e aditividade I2.

Demonstração. Por (3.7), vale a propriedade I1. Para conferir a propriedade I2, observamos que a adição de uma soma inferior de f em $[a, c]$ com uma soma inferior de f em $[c, b]$ é igual a uma soma inferior de f em $[a, b]$ e, reciprocamente, dada qualquer soma inferior de f em $[a, b]$, sempre podemos acrescentar o ponto c à partição e verificar que a soma inferior f em $[a, b]$ não é maior do que a adição da soma inferior de f em $[a, c]$ com a soma inferior de f em $[c, b]$ induzidas pelas restrições da partição a esses subintervalos. Isso nos permite concluir que $I(f, [a, c]) + I(f, [c, b]) = I(f, [a, b])$, de modo que vale I2. (Ver Exercício 1.4.17.) $\square$

Capítulo 4

Sequências de Funções

4.1. Convergência Uniforme

Fixado um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ e dado um natural n, consideremos alguma função $f_n : C \to \mathbb{R}$. Essas funções, todas de mesmo domínio C, constituem uma *sequência de funções*, que denotamos, como antes, no caso numérico, por $(f_n)_C$ ou, simplesmente, (f_n). Às vezes, é preferível deixar n variar a partir de 0 ou, até, a partir de algum outro inteiro qualquer. Em alguns exemplos, os domínios (naturais) das funções f_n são, possivelmente, distintos. Nesse caso, consideramos algum conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ comum a todos os domínios e tratamos da sequência das restrições a C.

Dado um ponto $\sigma \in C$, dizemos que a sequência de funções (f_n) *converge em* σ se a sequência $\big(f_n(\sigma)\big)$ das imagens de σ pelas funções f_n for uma sequência numérica convergente. Nesse caso, dizemos que (f_n) converge em σ *para* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Dado um subconjunto $D \subseteq C$, dizemos que a sequência (f_n) de funções *converge simplesmente em* D ou, então, *pontualmente em* D, se (f_n) converge em cada ponto $\sigma \in D$. Nesse caso, obtemos uma nova função $f : D \to \mathbb{R}$, definida, em cada $x \in D$ fixado, por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{4.1}$$

dizemos que a sequência (f_n) *converge simplesmente para* f *em* D e escrevemos $f_n \xrightarrow{s} f$ em D. Pela unicidade do limite de sequências numéricas, é claro que dada qualquer sequência (f_n) de funções e qualquer $D \subseteq C$, existe, no máximo, uma única função $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \xrightarrow{s} f$ em D; essa função é denominada *função limite* da sequência de funções, ou simplesmente *limite*.

O conjunto de todos os pontos em que a sequência converge é denominado *domínio de convergência* da sequência, sendo, portanto, o maior subconjunto de C em que a sequência converge simplesmente.

Considerando as operações ponto a ponto de funções, é claro que $f_n \xrightarrow{s} f$ em D equivale a $f_n - f \xrightarrow{s} 0$ em D. Em particular, $f_n \xrightarrow{s} f$ em D significa que, dado $x \in D$ qualquer, é nula a sequência numérica definida por $(f_n - f)(x)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1. Tomando $C = \mathbb{R}$, definamos $f_n(x) = 2^{-n}\operatorname{sen}(2^n x)$, com $n \geqslant 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Observe os gráficos das funções dessa sequência: cada função f_n tem a metade da amplitude e o dobro da frequência da função f_{n-1} anterior. Temos $|f_n(x)| = |2^{-n}\operatorname{sen}(2^n x)| \leqslant 2^{-n} \longrightarrow 0$, pois $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$, qualquer que seja x, de modo que $f_n \xrightarrow{s} 0$ em $\mathbb{R}$. ◎

Exemplo 4.2. Tomando $C = \mathbb{R}$, definimos uma função *serra* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $s(x) = |2m - x|$, em cada x tal que $2m - 1 \leqslant x \leqslant 2m + 1$, com $m \in \mathbb{Z}$. Desse modo, o gráfico de $s(x) = |x|$ em

$-1 \leqslant x \leqslant 1$ se repete a cada intervalo de comprimento 2. Mais precisamente, s é periódica de período 2, ou seja, $s(x+2n) = s(x)$, quaisquer que sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Para verificar isso, observe que se $2m-1 \leqslant x \leqslant 2m+1$, então $2(m+n)-1 \leqslant x+2n \leqslant 2(m+n)+1$ e, portanto, $s(x+2n) = |2(m+n)-(x+2n)| = |2m-x| = s(x)$. Além disso, s é contínua e limitada, com $0 \leqslant s(x) \leqslant 1$, sendo que s se anula em cada inteiro par e vale 1 em cada ímpar. Dessa forma, é uma versão "retificada" da função $y = |\operatorname{sen}(\pi x)|$. A vantagem sobre essa função seno é que podemos calcular facilmente que

$$s(x) - s(y) = \pm(x-y), \quad \text{com quaisquer } k \leqslant x, y \leqslant k+1 \text{ e } k \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

De fato, por simetria e pela periodicidade, basta provar isso no caso $-1 \leqslant x < y \leqslant 1$. Caso $-1 \leqslant x < y \leqslant 0$, por definição, $s(x) = -x$ e $s(y) = -y$, de modo que $s(x) - s(y) = y - x$. Caso $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, por definição, $s(x) = x$ e $s(y) = y$, de modo que $s(x) - s(y) = x - y$. Adiante, no Exemplo 4.23, usamos essa propriedade da função serra.

Agora definimos $f_n(x) = s(10^n x)/2^n$, com $n \geqslant 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Observe que f_{n+1} tem a metade da amplitude e dez vezes a frequência de f_n. Temos $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 2^{-n} \longrightarrow 0$, pois $|s(x)| \leqslant 1$, qualquer que seja x, de modo que $f_n \xrightarrow{s} 0$ em $\mathbb{R}$. ◎

Exemplo 4.3. Tomando $C = \mathbb{R}$, definamos $f_n(x) = x^n$, com $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Até aqui, a sequência geométrica foi tratada como uma sequência numérica *a um parâmetro*. Esse parâmetro, interpretado como uma *variável*, é o que faz dela uma sequência de funções. No Capítulo 2, vimos que a sequência geométrica (x^n) é nula com $-1 < x < 1$, constante e igual a 1 com $x = 1$, divergente oscilante a ± 1 com $x = -1$, divergente oscilante a $\pm\infty$ com $x < -1$ e divergente crescente a $+\infty$ com $x > 1$. Assim, o domínio de convergência dessa sequência é o intervalo $D = (-1, 1]$ e, definindo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(1) = 1$ e $f(x) = 0$, com $x \neq 1$, temos que $f_n(x) = x^n \longrightarrow f(x)$, qualquer que seja $x \in D$ fixado, isto é, $f_n \xrightarrow{s} f$ em D. ◎

Exemplo 4.4. Tomando $C = \mathbb{R}$, definamos $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Claramente, $f_n(0) = 0$ e $f_n(2) = (-1)^n 2n^2$ diverge oscilando a $\pm\infty$. Temos $0 \leqslant |1-x| \leqslant \sqrt{|1-x|} < 1$, qualquer que seja $x \in (0, 2)$, de modo que (ver Exemplo 2.16)

$$n^2|1-x|^n = \left[n\left(\sqrt{|1-x|}\right)^n\right]^2 \longrightarrow 0^2 = 0$$

e, portanto, a sequência numérica $\big(f_n(x)\big)$ é nula. Por outro lado, se $x < 0$ ou se $x > 2$, temos $|1-x| > 1$ e, portanto, $|f_n(x)|$ diverge a ∞. Assim, o domínio de convergência dessa sequência é o intervalo $D = [0, 2)$ e $f_n \xrightarrow{s} 0$ em D. ◎

No Exemplo 4.3, cada $f_n(x) = x^n$ define uma função contínua em $\mathbb{R}$, mas a função limite $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ dessas funções é descontínua em 1. Isso acarreta, em particular, que não vale

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty} f_n(x_m)\right] = \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x_m)\right], \tag{4.3}$$

com qualquer sequência (x_m) de $(-1, 1)$ que convirja a 1. Para ver isso, observe que $0 < x_m < 1$ com $m \gg 0$ e que, portanto,

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x_m)\right] = \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}(x_m)^n\right] = \lim_{m\to\infty} 0 = 0,$$

mas

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty} f_n(x_m)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}(x_m)^n\right] = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

No entanto, (4.3) é válido se a função limite for contínua em σ. (Ver Exercício 4.1.4.) Por exemplo, se (x_m) for uma sequência de $[0, 2)$ com $x_m \longrightarrow \sigma \in [0, 2)$, então (4.3) é válido com as funções f_n do Exemplo 4.4, sendo $f(\sigma) = 0$ o valor comum dos dois limites.

Observe que, no Exemplo 4.3, os gráficos das funções f_n tendem pontualmente ao gráfico da função f dada, mas não de maneira *uniforme*, ou seja, quanto mais próximo estiver $|x|$ da extremidade 1, mais lenta é a convergência de $(f_n(x))$. Exceto pelo ponto $\sigma = 1$, em que todas as f_n e f coincidem, por maior que tomemos n, nunca ocorre que todo o gráfico de $f_n(x) = x^n$ em $(-1, 1)$ esteja a uma distância pequena do gráfico de f, pois aquele sai de qualquer faixa $|y| < \varepsilon$ em torno do gráfico de f. Em termos analíticos, observe que, fixados $0 < |x| < 1$, $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos ($\log |x| < 0$ e)

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x|^n < \varepsilon \iff n > \frac{\log \varepsilon}{\log |x|}.$$

Portanto, tomando $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que $N \geqslant \frac{\log \varepsilon}{\log |x|}$, resulta $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ com $n \geqslant N$.

Quanto mais próximo de 1 tomarmos $|x|$, maior precisará ser $N(\varepsilon, x)$ para garantir a validade de $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ com $n \geqslant N(\varepsilon, x)$. Isso significa que a convergência $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, embora válida em cada $x \in (-1, 1)$, é cada vez *mais lenta* quanto mais próximo de 1 tomarmos $|x|$, ou seja, essa convergência depende de x, não sendo *uniforme* em $x \in (-1, 1)$.

Para caracterizar uma *uniformidade* na convergência de todas as sequências $\big(f_n(x)\big)$, convém introduzir uma espécie de distância entre as funções f_n e f ou, mais geometricamente, entre os gráficos dessas funções. Para isso, passamos a denotar

$$\mu = \mu(D) = \mu(g, D) = \sup\big\{|g(x)| : x \in D\big\} \tag{4.4}$$

sempre que $g : C \to \mathbb{R}$ for uma função *limitada* e $D \subseteq C$. Também convencionamos que sempre que escrevermos $\mu(g, D)$, fica entendido que g é, de fato, limitada em D, ou seja, que a imagem de D pela função g é um conjunto limitado e que, portanto, existe em $\mathbb{R}$ o supremo em (4.4).

Dados uma sequência (f_n) de funções de domínio comum $C \subseteq \mathbb{R}$ e $D \subseteq C$ um conjunto qualquer, dizemos que a sequência (f_n) *converge uniformemente em D* se existir uma função $f : D \to \mathbb{R}$ tal que seja nula a sequência numérica (μ_n) definida, com qualquer $n \in \mathbb{N}$, pela distância vertical máxima entre os gráficos de f_n e f, ou seja,

$$\mu_n = \mu_n(D) = \mu(f_n - f, D) = \sup\big\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\big\}.$$

Isso significa que todas as funções $f_n - f$ são limitadas em D e, uma vez fornecido um número real positivo $\varepsilon > 0$ qualquer, por menor que seja, vale $\mu_n < \varepsilon$ com $n \gg 0$. Em outras palavras, com $n \gg 0$, os gráficos das funções f_n estão totalmente dentro de faixas "horizontais" de largura vertical arbitrariamente pequena centrada no gráfico de f, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, vale

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

com quaisquer $x \in D$ e $n \geqslant N$, em que $N = N(\varepsilon)$ (geralmente) depende de ε, mas vale *uniformemente* em cada $x \in D$, *não* dependendo, portanto, de $x \in D$.

Em particular, da convergência uniforme decorre, como era de se esperar, a convergência simples e, pela unicidade do limite desta, novamente é única a função limite da convergência uniforme. Se (f_n) convergir uniformemente em D e $f : D \to \mathbb{R}$ for a função limite, dizemos que a sequência (f_n) *converge uniformemente para f em D* e escrevemos $f_n \xrightarrow{u} f$ em D.

Exemplo 4.5. É imediato verificar que a sequência (f_n) do Exemplo 4.1 converge uniformemente à função nula em $\mathbb{R}$, pois $0 \leqslant \mu_n \leqslant 2^{-n}$ e, portanto, pelo critério do confronto, (μ_n) é uma sequência nula. Assim, $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $\mathbb{R}$. ◎

Exemplo 4.6. A sequência das funções serra do Exemplo 4.2 converge uniformemente à função nula em $\mathbb{R}$, pois $0 \leqslant \mu_n \leqslant 2^{-n}$ e, portanto, pelo critério do confronto, (μ_n) é uma sequência nula. Assim, $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $\mathbb{R}$. ◎

Exemplo 4.7. A sequência (f_n) do Exemplo 4.3 converge simplesmente em $(-1, 1]$, mas não uniformemente em $(-1, 1]$, nem em $(-1, 1)$. De fato, pelo Exercício 3.1.14, dado qualquer n, temos

$$\mu_n\big((-1,1)\big) = \mu_n\big((-1,1]\big) = f_n(1) = 1.$$

No entanto, fixado $0 < r < 1$, a sequência (f_n) converge uniformemente no intervalo $[-r, r]$. Para ver isso, basta observar que $|f_n(x)| = |x|^n \leqslant r^n$ com $|x| \leqslant r$, de modo que $0 \leqslant \mu_n \leqslant r^n \longrightarrow 0$. ◎

Exemplo 4.8. A sequência (f_n) do Exemplo 4.4 converge simplesmente em $[0,2)$, mas não uniformemente em $[0,2)$, nem em $(0,2)$. De fato, como cada f_n é uma função contínua em $\mathbb{R}$, com $f_n(2) = (-1)^n 2n^2$, temos (ver Exercício 3.1.14)

$$\mu_n((0,2)) = \mu_n([0,2]) \geqslant |f_n(2)| = 2n^2 \not\longrightarrow 0.$$

Entretanto, $f_n \xrightarrow{s} 0$ em $[0,2)$ e poderíamos esperar que, como no exemplo precedente, resultasse convergência uniforme à função nula se cortássemos o domínio de convergência à esquerda de 2, ponto em que parece residir o impedimento à convergência uniforme.

Ocorre que tampouco $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[0, 2-r]$, com $0 < r < 2$. De fato, cada $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$ é uma função derivável tal que

$$f_n'(x) = 0 \iff n^2(1-x)^n = n^2xn(1-x)^{n-1} \iff x = 1 \text{ ou } 1 = (n+1)\cdot x$$

e podemos verificar que $1/(n+1)$ é um ponto de máximo local de f_n em $\mathbb{R}$, com

$$f_n\big(1/(n+1)\big) = \frac{n^2}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n = n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+1} \sim n\frac{1}{e} \longrightarrow +\infty.$$

Assim, $\mu_n([0, 2-r]) \geqslant f_n(1/(n+1)) \not\longrightarrow 0$, de modo que $f_n \stackrel{u}{\not\longrightarrow} 0$ em $[0, 2-r]$.

Finalmente, obtemos convergência uniforme à função nula cortando o domínio de convergência à direita de 0. De fato, mostremos que $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[r, 2-r]$, com $0 < r < 1$. Observe que o único ponto crítico em $[r, 2-r]$ da função derivável f_n é 1, com $n \gg 0$. Assim, os valores máximo e mínimo absolutos da função f_n são atingidos nesse crítico ou nas extremidades r e $2-r$ desse intervalo. Como $f_n(1) = 0$, estabelecemos

$$0 \leqslant \mu_n \leqslant \max\big\{|f_n(r)|, |f_n(2-r)|\big\}.$$

Como a convergência simples garante que ambas sequências $\big(f_n(r)\big)$ e $\big(f_n(2-r)\big)$ são nulas, (μ_n) é uma sequência nula pelo critério do confronto, de modo que $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[r, 2-r]$. ◎

Usando os mesmos argumentos utilizados na Proposição 2.3.6, é fácil concluir que a soma e o produto de sequências de funções simplesmente convergentes converge simplesmente para a soma e o produto das funções limite, respectivamente.

Suponha que $f_n \xrightarrow{u} f$ e $g_n \xrightarrow{u} g$ em D. Não é difícil conferir que, fixados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, decorre que $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{u} \alpha f + \beta g$ em D. Em particular, temos que $f_n \xrightarrow{u} f$ em D equivale a $f_n - f \xrightarrow{u} 0$ em D. No entanto, nada garante que $f_n \cdot g_n \xrightarrow{u} f \cdot g$ em D. (Ver Exercício 4.1.6.)

No Exemplo 4.7, cada $f_n(x) = x^n$ define uma função contínua em $\mathbb{R}$, mas o limite simples $f : (-1,1] \to \mathbb{R}$ dessas funções é descontínua (em 1). Com a convergência uniforme, isso não pode ocorrer, como segue do nosso próximo resultado.

Proposição 4.9. *Seja (f_n) uma sequência de funções que converge uniformemente em $D \subseteq \mathbb{R}$. Se cada f_n for contínua* (em $\sigma \in D$), então a função limite é contínua (em σ).

Demonstração. Vamos supor que $f_n \xrightarrow{u} f$ em D e que f não seja contínua em algum ponto de D e mostrar que existe n arbitrariamente grande com f_n descontínua em algum ponto de D. Fixado $\sigma \in D$, vamos supor que f não seja contínua em σ, de modo que, pelo Exercício 3.1.4, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência (x_n) de D que converge a σ, mas tal que $|f(x_n) - f(\sigma)| \geqslant \varepsilon_0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Como $f_n \xrightarrow{u} f$ em D, temos (μ_n) nula e, como $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}\varepsilon_0 > 0$, podemos escolher $N \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande tal que $\mu(f_N - f, D) < \varepsilon_1$, de modo que temos $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon_1$ com qualquer $x \in D$. Mostremos que f_N não é contínua em σ. De fato, se f_N fosse contínua em σ, pela convergência $x_n \longrightarrow \sigma$ poderíamos escolher $p \in \mathbb{N}$ tal que $|f_N(x_p) - f_N(\sigma)| < \varepsilon_1$, mas então teríamos

$$\varepsilon_0 \leqslant |f(x_p) - f(\sigma)| \leqslant |f(x_p) - f_N(x_p)| + |f_N(x_p) - f_N(\sigma)| + |f_N(\sigma) - f(\sigma)| < 3\varepsilon_1 = \varepsilon_0,$$

o que é uma impossibilidade. Logo f_N não é contínua em σ. □

Dessa forma, a continuidade da função limite de uma sequência uniformemente convergente é herdada da continuidade de cada função da sequência, o que se configura como um bom teste para a convergência não uniforme: a sequência dada por $f_n(x) = x^n$ realmente não poderia convergir uniformemente em $(-1, 1]$ pois cada f_n é contínua, enquanto que a função limite (Exemplo 4.3) não é contínua (em 1). No entanto, esse argumento não prova que a convergência não possa ser uniforme em $(-1, 1)$, pois a função identicamente nula é contínua (em $\mathbb{R}$).

Decorre do resultado precedente que se $f_n \xrightarrow{u} f$ em D e $\sigma \in D$, então a continuidade de cada f_n em σ garante que, com $x_m \longrightarrow \sigma$ em D, vale

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\lim_{m\to\infty} f_n(x_m)\Big] = f(\sigma) = \lim_{m\to\infty}\Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x_m)\Big], \tag{4.5}$$

o que não conseguimos garantir com a convergência simples. Com a convergência uniforme, isso decorre da obrigatória continuidade em σ da função limite. (Ver Exercício 4.1.4.)

Também todas integrais da função limite de uma sequência uniformemente convergente são herdadas das integrais de cada função da sequência, o que se configura como mais um bom teste para a convergência não uniforme.

Exemplo 4.10. A sequência (f_n) dos Exemplos 4.4 e 4.8 converge simplesmente em $[0, 1]$, mas

$$\int_0^1 f_n = \int_0^1 n^2 x(1-x)^n dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 1,$$

onde usamos a primitiva do Exemplo 3.53. ◎

No exemplo precedente, cada $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ define uma função contínua em $\mathbb{R}$, o limite simples f dessas funções é a função contínua nula em $[0, 1]$, mas $\displaystyle\int_0^1 f_n \not\longrightarrow \int_0^1 f = 0$. Com a convergência uniforme, isso não pode ocorrer.

Proposição 4.11. *Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente para uma função f em $D \subseteq \mathbb{R}$. Se $[a, b] \subseteq D$, então*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,.$$

Demonstração. Fixemos $[a, b] \subseteq D$. Dado $\varepsilon > 0$, a convergência uniforme garante que existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $x \in D$ e $n \in \mathbb{N}$, vale

$$n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \mu_n < \varepsilon/(b-a).$$

Suponha que cada f_n seja contínua; pela Proposição 4.9, f também é contínua e, pela monotonicidade da integral (Corolário 3.57), dado $n \geqslant N$, temos

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b [f_n - f]\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \int_a^b \varepsilon/(b-a) = \varepsilon.$$

Assim, a sequência numérica das integrais de f_n em $[a, b]$ converge à integral de f em $[a, b]$. □

A sequência do Exemplo 4.5 mostra que $f_n \xrightarrow{u} f$ não implica $f_n' \xrightarrow{u} f'$. De fato, dada $f_n(x) = 2^{-n}\operatorname{sen}(2^n x)$, temos $f_n'(x) = \cos(2^n x)$, portanto a sequência das derivadas não converge uniformemente a função alguma, que dirá à derivada do limite. No entanto, basta que $f_n \xrightarrow{s} f$ e que (f_n') convirja *uniformemente* para que $f_n' \xrightarrow{u} f'$. Mais precisamente, vale o resultado seguinte.

Proposição 4.12. *Sejam (f_n) uma sequência de funções deriváveis num intervalo $[a,b]$ e g uma função de $[a,b]$. Se cada função derivada f_n' for contínua em $[a,b]$, se a sequência (f_n') das derivadas convergir uniformemente para g em $[a,b]$ e se a sequência numérica $\big(f_n(\sigma)\big)$ for convergente com algum ponto $\sigma \in [a,b]$, então (f_n) converge uniformemente em $[a,b]$. Além disso, a função limite é derivável e é uma primitiva de g em $[a,b]$.*

Demonstração. Seja ξ o limite da sequência numérica convergente $\big(f_n(\sigma)\big)$ com algum ponto $\sigma \in [a,b]$ dado. Sendo $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável com f_n' contínua, o TFCII garante que, qualquer que seja $x \in [a,b]$, temos $f_n(x) = f_n(\sigma) + \int_\sigma^x f_n'$. Se $f_n' \xrightarrow{u} g$ em $[a,b]$, então g é contínua e, pela Proposição 4.11, sabemos que $\int_\sigma^x f_n' \longrightarrow \int_\sigma^x g$, qualquer que seja $x \in [a,b]$. Assim, dado $x \in [a,b]$,

$$f_n(x) = f_n(\sigma) + \int_\sigma^x f_n' \longrightarrow \xi + \int_\sigma^x g,$$

de modo que, definindo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ em cada $x \in [a,b]$ por

$$f(x) = \xi + \int_\sigma^x g,$$

resulta que $f_n \xrightarrow{s} f$ e que f é derivável em $[a,b]$, com $f' = g$, pelo TFCI. Mostremos que $f_n \xrightarrow{u} f$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N_1 \Longrightarrow |f_n(\sigma) - \xi| < \frac{1}{2}\varepsilon$ e $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant N_2 \Longrightarrow |f_n'(x) - g(x)| \leqslant \mu\big(f_n' - g, [a,b]\big) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

qualquer que seja $x \in [a,b]$. Assim, dado $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$, a linearidade da integral e o Corolário 3.57 garantem que

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(\sigma) + \int_\sigma^x f_n' - \xi - \int_\sigma^x g \right| \leqslant |f_n(\sigma) - \xi| + \left| \int_\sigma^x f_n' - \int_\sigma^x g \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \int_\sigma^x |f_n' - g| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon|x-\sigma|}{2(b-a)} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,\end{aligned}$$

qualquer que seja $x \in [a,b]$. Concluímos que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a,b]$. □

Geralmente utilizamos esse resultado num contexto um pouco mais amigável, como segue.

Corolário 4.13. *Sejam (f_n) uma sequência de funções deriváveis num intervalo $[a,b]$ e f, g duas funções de $[a,b]$. Se $f_n \xrightarrow{s} f$ em (a,b), cada função derivada f_n' for contínua em $[a,b]$ e a sequência (f_n') das derivadas convergir uniformemente para g em $[a,b]$, então $f_n \xrightarrow{u} f$ em $[a,b]$ e f é derivável em $[a,b]$, com $f' = g$.* □

Para uso futuro, destacamos uma maneira muito conveniente de verificar a convergência uniforme de uma sequência de funções sem necessidade de conhecer a função limite.

Proposição 4.14. (Critério de Cauchy) *Uma sequência (f_n) de funções de C converge uniformemente em $D \subseteq C$ se, e só se, dado qualquer número real positivo $\varepsilon > 0$, por menor que seja, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{quaisquer que sejam } m, n \geqslant N \text{ e } x \in D. \tag{4.6}$$

Demonstração. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ em C então, dado $\varepsilon > 0$, temos $\mu_k < \frac{1}{2}\varepsilon$ com $k \gg 0$ e, portanto,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant \mu_n + \mu_m < \varepsilon$$

com quaisquer $x \in C$ e $n, m \gg 0$, do que decorre a condição dada em (4.6). Reciprocamente, suponha que valha essa condição de Cauchy. Fixado $\varepsilon > 0$, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

com quaisquer $m, n \geqslant N$ e $x \in C$. Fixado $x \in C$, decorre que a sequência numérica $\big(f_k(x)\big)$ é de Cauchy, portanto convergente: denotemos $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ e mostremos que $f_n \xrightarrow{u} f$ em C. Dados $n \geqslant N$ e $x \in C$, temos

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Assim, $\mu_n < \varepsilon$ com $n \geqslant N$ e, portanto, $f_n \xrightarrow{u} f$ em C. □

Exercícios 4.1

4.1.1. Encontre o domínio de convergência D de cada uma das sequências obtidas com as funções dadas. Verifique que D não contém intervalo algum. Verifique se, fora de D, a divergência é oscilante finita, oscilante infinita, crescente a infinito ou decrescente a infinito.

$$(1)\ f_n(x) = n^2x(1 - x^n); \qquad (2)\ f_n(x) = nx(1 - x); \qquad (3)\ f_n(x) = nx^2(1 - x);$$

$$(4)\ f_n(x) = n^2x^2(1 - x^n); \qquad (5)\ f_n(x) = n^2x^2(1 - x^n)^2.$$

4.1.2. Encontre o domínio de convergência D de cada uma das sequências obtidas com as funções dadas. Mostre que D contém o intervalo $(-1, 1)$. Verifique o que ocorre com μ_n em D. Verifique se há convergência uniforme em algum conjunto do tipo $(-1, 1 - r]$, $[r - 1, 1)$ ou $[r - 1, -s] \cup [s, 1 - r]$, com $0 \leqslant r, s < 1$ fixados arbitrariamente, mas tais que $0 \leqslant r + s < 1$.

$$(1)\ f_n(x) = x^n(1 - x^n); \qquad (2)\ f_n(x) = nx^n(1 - x^n); \qquad (3)\ f_n(x) = n^2x^n(1 - x^n);$$

$$(4)\ f_n(x) = nx(1 - x^2)^n; \qquad (5)\ f_n(x) = nx^2(1 - x^2)^n.$$

4.1.3. Mostre que cada uma das sequências obtidas com as funções dadas converge uniformemente a 0 em $\mathbb{R}$.

$$(1)\ f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}; \qquad (2)\ f_n(x) = \frac{1/n}{1 + \operatorname{sen}^2(\pi x)}; \qquad (3)\ f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\log n};$$

$$(4)\ f_n(x) = \frac{1 + 3\operatorname{sen}^2(nx)}{\sqrt{n}}; \qquad (5)\ f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2\log n}.$$

4.1.4. Suponha que $f_n \xrightarrow{s} f$ em D e que f e cada f_n sejam contínuas num ponto $\sigma \in D$. Mostre que vale (4.5) com qualquer sequência (x_m) de D convergente a σ.

4.1.5. Seja (f_n) uma sequência de funções ilimitadas definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$. Mostre que $f_n \overset{u}{\not\longrightarrow} 0$. Mais geralmente, mostre que (f_n) não converge uniformemente em D a alguma função limitada.

4.1.6. Considere $f(x) = f_n(x) = x$, $g_n(x) = 1/n$ e $g(x) = 0$, quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$ e $g_n \xrightarrow{u} g$ em $\mathbb{R}$, mas que $f_n \cdot g_n \overset{u}{\not\longrightarrow} f \cdot g$ em $\mathbb{R}$.

4.2. Séries de Funções

Dada uma sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções definidas em $C \subseteq \mathbb{R}$, formamos a sequência (s_n) das somas parciais de (f_k) definindo, com $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n : C \to \mathbb{R}$$

por $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, com $x \in C$. Se a sequência (f_n) começar com $n = 0$ (ou outro inteiro), continuamos tomando $s_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$, sempre somando até f_n.

Dizemos que a *série de funções* $\sum f_n$ *converge em um ponto* $\sigma \in C$ se a sequência (s_n) das somas parciais convergir nesse ponto. O conjunto de todos os pontos de C em que a série converge é denominado *domínio de convergência* da série. Nesse caso, a função limite f da sequência das somas parciais definida no domínio de convergência é única, sendo denominada *função soma* da série de funções e escrevemos

$$f = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_k = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots .$$

Em cada ponto σ do domínio de convergência da série de funções $\sum f_k$, a série numérica $\sum f_k(\sigma)$ pode convergir absoluta ou condicionalmente; se convergir absolutamente, dizemos que a série de funções $\sum f_k$ *converge absolutamente em* σ e se convergir condicionalmente, dizemos que $\sum f_k$ *converge condicionalmente* em σ.

Dizemos que a série de funções $\sum f_k$ *converge simplesmente em* D se $D \subseteq \mathbb{R}$ estiver contido no domínio de convergência da série de funções. Dizemos que a série de funções $\sum f_k$ *converge uniformemente em* D se a sequência (s_n) das somas parciais convergir uniformemente em D; nesse caso, é claro que D será um subconjunto do domínio de convergência da série de funções, ou seja, a série de funções $\sum f_k$ também convergirá simplesmente em D. Finalmente, dizemos que a série de funções $\sum f_k$ converge *normalmente* em D se a série numérica $\sum \mu(f_k, D)$ for convergente.

Como no caso de séries numéricas, temos aqui o equivalente ao TD, como segue.

Proposição 4.15. (Teste da Divergência – TD) *Se a série* $\sum f_k$ *convergir simplesmente em* D *então* $f_k \xrightarrow{s} 0$ *em* D. *Se a série* $\sum f_k$ *convergir uniformemente em* D *então* $f_k \xrightarrow{u} 0$ *em* D.

De fato, basta observar que $f_k = s_k - s_{k-1}$. É claro que a recíproca continua sendo falsa (basta tomar funções constantes).

Existem pelo menos duas grandes famílias de séries de funções, as séries de potências e as séries trigonométricas. As séries de potências serão tratadas na próxima seção, mas as trigonométricas, que são séries do tipo

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\big],$$

com (a_k) e (b_k) sequências numéricas nulas, não serão abordadas aqui. Nossos métodos sequer são suficientes para decidir a convergência de uma série trigonométrica específica, como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k},$$

que converge simplesmente à função periódica de período 2π definida, no intervalo $[0, 2\pi]$, por $f(x) = 0$, em $x = 0$ e $x = 2\pi$ e $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, em $0 < x < 2\pi$, cujo gráfico é uma "serra" descontinua em cada múltiplo par de π. Esse mundo das *séries de Fourier* pode ser desbravado em obras mais avançadas de Análise Matemática, como, por exemplo, "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", de Djairo Guedes de Figueiredo, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

No nosso estudo de séries numéricas, no Capítulo 2, já nos deparamos com, pelo menos, duas séries de funções, a saber, a série geométrica, que será considerada na próxima seção, como um exemplar conspícuo de série de potências, e a série harmônica de expoente c. Essa série, que até aqui foi tratada como uma série numérica *a um parâmetro*, na realidade constitui uma série de funções muito famosa que, entretanto, não faz parte nem da família das séries de potências nem da das séries trigonométricas.

Exemplo 4.16. Definamos $f_k(x) = k^{-x}$, com quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. No Exemplo 2.67 (à página 86) vimos que a série harmônica de expoente c dada por $\sum \frac{1}{k^c}$ converge se, e só se, $c > 1$. Assim, $D = (1, +\infty)$ é o domínio de convergência da série de funções $\sum f_k$ e, definindo $\zeta : D \to \mathbb{R}$ por

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots, \quad \text{com } x > 1,$$

obtemos (uma parte da) *função zeta* de Riemann, cujo domínio é estendido ao plano dos números complexos, exceto $x = 1$. Num trabalho que marcou época, Riemann obteve, em 1859, uma fórmula analítica para a quantidade de números primos, menores do que uma cota dada, em termos dos zeros (não triviais) dessa função, sendo importante lembrar que a distribuição dos números primos dentre os naturais não segue qualquer padrão de regularidade. O entendimento dessa particular função zeta é o objeto do trabalho de pesquisa de muitos dos melhores matemáticos da atualidade, envolve um prêmio milionário (`www.claymath.org`) e tem consequências até na criptografia, que é a base da segurança da internet. ◎

Usando os resultados de sequências de funções, obtemos resultados análogos aos da seção precedente, relativos à continuidade, integral e derivada da soma de séries de funções uniformemente convergentes. Basta observar que da continuidade ou derivabilidade de cada f_n decorre a de cada soma parcial s_n, já que o limite, a integral e a derivada de uma soma *finita* é a soma dos limites, integrais e derivadas.

Proposição 4.17. *Seja (f_k) uma sequência de funções contínuas em $D \subseteq \mathbb{R}$. Se a série $\sum f_k$ convergir uniformemente em D, então a função soma $\sum f_k$ será contínua em D e*

$$\int_a^b \sum f_k = \sum \int_a^b f_k,$$

em qualquer $[a, b] \subseteq D$. □

Proposição 4.18. *Seja (f_k) uma sequência de funções e $D \subseteq \mathbb{R}$. Se a série de funções $\sum f_k$ convergir simplesmente em D, cada função f_k for derivável em D com função derivada f_k' contínua em D e a série $\sum f_k'$ convergir uniformemente em D, então a função soma $\sum f_k$ será derivável em D e*

$$\left(\sum f_k\right)'(x) = \sum f_k'(x),$$

qualquer que seja $x \in D$. □

Também temos o critério de Cauchy, aplicado a séries de funções.

Proposição 4.19. (Critério de Cauchy) *Sejam (f_k) uma sequência de funções definidas em C e $D \subseteq C$. A série $\sum f_k$ converge uniformemente em D se, e só se, dado qualquer número real positivo $\varepsilon > 0$, por menor que seja, existir $K \in \mathbb{N}$ tal que, com qualquer $k \geqslant K$, valer*

$$|f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + \cdots + f_{k+p}(x)| < \varepsilon, \quad \text{com quaisquer } p \in \mathbb{N} \text{ e } x \in D. \tag{4.7}$$

Demonstração. Basta observar que $f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + \cdots + f_{k+p}(x) = s_{k+p}(x) - s_k(x)$ e usar o critério de Cauchy com a sequência (s_n) das somas parciais. □

Muitas vezes estabelecemos a convergência uniforme de séries de funções (pelo menos, quando houver convergência absoluta) com o teste seguinte, que é uma versão turbinada do Teste da Comparação (TCD) de séries numéricas e não tem análogo para *sequências* quaisquer de funções.

Teorema 4.20. (Teste M, de Weierstrass) *Toda série normalmente convergente é uniformemente convergente. Mais precisamente, seja* (f_k) *uma sequência de funções tal que existam* $D \subseteq \mathbb{R}$ *e uma série numérica convergente* $\sum M_k$ *que majore* $\sum \mu(f_k, D)$ *ou seja, tal que*

$$|f_k(x)| \leqslant M_k, \quad \textit{quaisquer que sejam } x \in D \textit{ e } k \gg 0. \tag{4.8}$$

Então a série $\sum f_k$ *converge uniformemente em* D.

Demonstração. Denotemos por $S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k$ as somas parciais da série numérica $\sum M_k$. Como $M_k \geqslant 0$, com $k \gg 0$, a convergência de $\sum M_k$ garante que, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_{k+1} + M_{k+2} + \cdots + M_{k+p} \leqslant \sum_{\ell=k+1}^{\infty} M_\ell = \sum M_\ell - S_k < \varepsilon,$$

quaisquer que sejam $k \geqslant K$ e $p \in \mathbb{N}$. Resta observar que a desigualdade triangular garante

$$\begin{aligned} |f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + \cdots + f_{k+p}(x)| &\leqslant |f_{k+1}(x)| + |f_{k+2}(x)| + \cdots + |f_{k+p}(x)| \\ &\leqslant M_{k+1} + M_{k+2} + \cdots + M_{k+p} < \varepsilon, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $x \in D$, $k \geqslant K$ e $p \in \mathbb{N}$. Assim, vale (4.7) e, portanto, pelo critério de Cauchy, a série $\sum f_k$ converge uniformemente. □

Exemplo 4.21. Definamos $f_k(x) = k^{-x}$, com $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. Cada função f_k é contínua em $\mathbb{R}$ e a função soma, definida por

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots, \quad \text{com } x > 1,$$

é contínua em seu domínio de convergência $D = (1, +\infty)$. (Ver Exemplo 4.16.) De fato, dado $\sigma > 1$, tomamos $1 < r < \sigma$ e temos

$$f_k(x) = \frac{1}{k^x} \leqslant \frac{1}{k^r} = M_k,$$

qualquer que seja $r \leqslant x$. Como a série harmônica de expoente $c = r$ converge, o Teste M garante que a convergência é uniforme em $[r, +\infty)$. Assim, a função zeta é contínua nesse intervalo e, em particular, em σ. ⊚

Exemplo 4.22. Tomando $C = \mathbb{R}$, consideremos $f_k(x) = k^{-3} \cdot \operatorname{sen}(kx)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Observe que $|f_k(x)| \leqslant k^{-3}$ e que $f_k'(x) = k^{-2} \cdot \cos(kx)$, com $|f_k'(x)| \leqslant k^{-2}$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Lembrando que uma série harmônica de expoente c é convergente se $c > 1$, o Teste M garante que ambas as séries $\sum f_k$ e $\sum f_k'$ são uniformemente convergentes, de modo que a função soma $\sum f_k$, dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k^3}, \quad \text{com } x \in \mathbb{R},$$

é contínua e derivável em $\mathbb{R}$, sendo

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \quad \text{com } x \in \mathbb{R},$$

sua derivada. ⊚

Consta que Riemann, em uma de suas aulas, em 1861, comentou que a função soma

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k^2 x)}{k^2}, \quad \text{com } x \in \mathbb{R},$$

que certamente é contínua, dada a convergência uniforme dessa série, não possui derivada em ponto algum. Não conseguindo provar isso, Weierstrass publicou, em 1872, uma demonstração de que a função contínua $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a^k \cdot \cos(b^k x)$, com $x \in \mathbb{R}$, em que $0 < a < 1$ e b é um número inteiro ímpar e tal que $ab > 1 + 3\pi/2$, não possui derivada em ponto algum. Até hoje, parece que não se sabe se a função dada por Riemann tem, ou não, derivada, sequer no ponto $x = 0$. Mas sabe-se, hoje, que B. Bolzano já havia construído uma função com essas propriedades em 1834, que permaneceu ignorada na época, junto com sua obra; depois de Weierstrass, foram construídos muitos exemplos, como o que segue, essencialmente devido a G. Faber, de 1908. Atualmente, constroem-se muitos exemplos desses com características *fractais.*

Exemplo 4.23. Tomando $C = \mathbb{R}$, consideremos as funções serra $f_k(s) = s(10^k x)/2^k$ dos Exemplos 4.2 e 4.6. Como a serra $f_0 = s$ é contínua em $\mathbb{R}$, cada f_n também é contínua em $\mathbb{R}$. É imediato verificar que $|s(x)| \leqslant 1$ e que, portanto, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant 1/2^k = M_k$. Como a série geométrica de razão $\frac{1}{2}$ converge, o Teste M garante que a série $\sum f_k$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ e, em particular, é contínua em $\mathbb{R}$ a função soma dessas serras, definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} s(10^k x), \quad \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

No entanto, $f_0 = s$ não é derivável nos pontos $\sigma \in \mathbb{Z}$ e, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, f_n não é derivável nos pontos σ tais que $10^n \sigma \in \mathbb{Z}$. Assim, entre cada dois pontos consecutivos de não derivabilidade de uma função dessa sequência, a função seguinte apresenta nove novos pontos de não derivabilidade, mas a função limite é derivável em todos pontos, por ser constante. No entanto, essa função tem tantos "dentes", que acaba não sendo derivável em ponto algum!

De fato, fixemos um ponto $\sigma \in \mathbb{R}$ qualquer e mostremos que f não é derivável em σ. Fixado um número natural $n \in \mathbb{N}$, escolhamos o único $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leqslant 10^n \sigma < m + 1$ e definamos

$$x_n = 10^{-n} m, \qquad y_n = 10^{-n}(m+1) = x_n + 10^{-n}.$$

Obtemos, assim, duas sequências (x_n) e (y_n) que, como é imediato constatar, são convergentes a σ e satisfazem $0 < y_n - x_n = 10^{-n}$ e $x_n < \sigma < y_n$. Resta mostrar que a sequência dada por

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \tag{4.9}$$

não é convergente para concluir (pelo Exercício 3.2.4) que f não é derivável em σ.

Dado $k \in \mathbb{N}$, a periodicidade da função serra s garante que

$$s(10^k x_n) - s(10^k y_n) = s\big(10^{k-n} m\big) - s\big(10^{k-n} m + 10^{k-n}\big) = 0,$$

se $k > n$ já que, nesse caso, 10^{k-n} é um inteiro par. Em particular,

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(y_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} s(10^k x_n) - \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} s(10^k y_n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{2^k} \left[s(10^k x_n) - s(10^k y_n) \right] = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{2^k} \left[s(10^k x_n) - s(10^k y_n) \right]. \end{aligned}$$

Também temos $s(10^n x_n) - s(10^n y_n) = s(m) - s(m+1) = \pm 1$ e, se $0 \leqslant k < n$,

$$\big| s(10^k x_n) - s(10^k y_n) \big| = \big| s\big(10^{-(n-k)} m\big) - s\big(10^{-(n-k)}(m+1)\big) \big| = 10^{-(n-k)}.$$

Isso decorre da propriedade (4.2) da função serra, já que $0 \leqslant k < n$ garante que $10^{-(n-k)}m$ e $10^{-(n-k)}(m+1)$ estão entre dois inteiros consecutivos.

Assim,

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - f(y_n)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{2^k}\left[s(10^k x_n) - s(10^k y_n)\right]\right| \quad \text{(desigualdade triangular)}\\
&\geqslant \frac{1}{2^n}\left|s(10^n x_n) - s(10^n y_n)\right| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{2^k}\left[s(10^k x_n) - s(10^k y_n)\right]\right|\\
&\geqslant \frac{1}{2^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{2^k}\left|s(10^k x_n) - s(10^k y_n)\right|\\
&= \frac{1}{2^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{2^k} 10^{-(n-k)} = \frac{1}{10^n}\left[5^n - \sum_{k=0}^{n-1} 5^k\right]
\end{aligned}$$

e, portanto, como $y_n - x_n = 10^{-n}$, resulta

$$\left|\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right| \geqslant 5^n - \sum_{k=0}^{n-1} 5^k = \frac{3 \cdot 5^n + 1}{4}.$$

Como a sequência (5^n) diverge ao infinito, resulta que diverge a sequência dada em (4.9). ◎

Exercícios 4.2

4.2.1. Para cada uma das séries de funções dadas, verifique que a série converge uniformemente, no domínio indicado, para uma função contínua.

$$(1)\ \sum_{k=1}^{\infty} x^k e^{-kx},\ \text{em } [0,+\infty); \quad (2)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k^2 + \cos kx},\ \text{em } \mathbb{R}; \quad (3)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2},\ \text{em } \mathbb{R};$$

$$(4)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{k^3(2-\cos x)}},\ \text{em } \mathbb{R}; \qquad (5)\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k,\ \text{em } [-c,c],\ \text{com } 0 < c < 1.$$

4.2.2. Mostre que a série $\sum x^k/(1+x^k)$ converge uniformemente em qualquer intervalo $[-c, c]$, com $0 < c < 1$, mas não em $(-1, 1)$. Mostre que $f(x) = \sum x^k/(1+x^k)$ é uma função contínua em $(-1,1)$.

4.2.3. Mostre que a série $\sum 1/(1+k^2x)$ define uma função contínua em toda reta $\mathbb{R}$, exceto nos pontos $x = 0$ e $x = -k^{-2}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Mostre, também, que essa função é derivável em cada ponto de continuidade, sendo sua derivada dada pela série obtida por derivação termo a termo da série original.

4.2.4. Mostre que a série $\sum 1/(k^2 - x^2)$ define uma função contínua em toda reta $\mathbb{R}$, exceto nos pontos $x \in \mathbb{Z}$. Mostre, também, que essa função é derivável em cada ponto de continuidade, sendo sua derivada dada pela série obtida por derivação termo a termo da série original.

(*Sugestão*: considere a série $\displaystyle\sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{k^2 - x^2}$ restrita ao intervalo $[-L, L]$, com $L < K$.)

4.2.5. Encontre o domínio de convergência, o de continuidade e o de derivabilidade termo a termo da série de funções $\sum(1 - \cos \frac{x}{k})$. (*Sugestão*: ver Exercício 3.2.12.)

4.2.6. Encontre o domínio de convergência, o de continuidade e o de derivabilidade termo a termo da série de funções $\sum(\frac{x}{k} - \operatorname{sen}\frac{x}{k})$. (*Sugestão*: ver Exercício 3.2.13.)

4.2.7. Considere a função serra s do Exemplo 4.2 e defina $f_k(s) = a^k \cdot s(b^k x)$, com $x \in \mathbb{R}$. Mostre que a função soma $\sum f_k$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ sem derivada em ponto algum, sempre que $0 < a < 1 < b$ satisfaçam $ab > 2$. (*Sugestão*: imite a prova do Exemplo 4.23, em que $a = \frac{1}{2}$ e $b = 10$.)

4.3. Séries de Potências

Quando cada função f_k de uma série de funções for um monômio, obtemos um caso particularíssimo de série de funções. Tão particular que casos estranhos, como o de uma função contínua sem derivada em ponto algum (Exemplo 4.23), estão sumariamente proibidos: no mundo desses *polinômios infinitos*, tudo funciona como nos acostumamos a esperar de todas as funções no Cálculo.

Dada uma sequência $(c_k)_{k \geqslant 0}$ de números reais, definimos f_0 como a função constante igual a c_0 em $\mathbb{R}$ e, quaisquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = c_k x^k.$$

Observe que cada f_k é um monômio de grau $\leqslant k$, portanto derivável em $\mathbb{R}$. A série de funções $\sum f_k$, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

é denominada *série de potências de coeficientes c_k*. Toda série de potências tem índices variando a partir de $n = 0$ e, por conveniência, definimos $c_0 x^0 = c_0$, em cada $x \in \mathbb{R}$, inclusive $x = 0$. É claro, entretanto, que podemos ter (alguns, ou muitos) coeficientes nulos. Aliás, os exemplos mais simples de séries de potências são os polinômios, em que $c_k = 0$ com $k \gg 0$.

Como ocorre com toda série de funções, podemos ter divergência ou convergência condicional ou absoluta num ponto fixado e convergência simples, uniforme ou normal num conjunto dado. Tomando $x = 0$, a série se reduz a $c_0 + 0 + \cdots$, portanto $x = 0$ está no domínio de convergência de toda série de potências.

Exemplo 4.24. Seja $\sum x^k$ a série de potências de coeficientes $c_k = 1$, qualquer que seja k. Sabemos desde o Capítulo 2 (ver Exemplo 2.5.8) que essa *série geométrica* converge se, e só se, $|x| < 1$. Assim, o domínio de convergência dessa série é $(-1, 1)$ e a série de potências converge simplesmente em $(-1, 1)$. Mais que isso, dado $0 < r < 1$, temos $|x^k| \leqslant r^k = M_k$, portanto o Teste M garante que a série converge uniformemente em $[-r, r]$. Como cada monômio é contínuo, a soma da série é uma função contínua em $[-r, r]$. Como r é arbitrário, a soma da série resulta ser uma função contínua em cada ponto de $(-1, 1)$. É claro que isso não constitui novidade, pois já sabemos que a soma da série geométrica é dada por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \text{ com } -1 < x < 1.$$

Dizemos que o domínio de convergência $(-1, 1)$ é *intervalo de convergência* dessa série. [Cuidado: a convergência da série geométrica *não* é uniforme em $(-1, 1)$, pelo Exercício 4.3.1(1).] ◎

Exemplo 4.25. Seja $\sum \frac{1}{k!} x^k$ a série de potências de coeficientes $c_k = \frac{1}{k!}$, qualquer que seja k. Dado $x \in \mathbb{R}$ com $|x| \leqslant r$, temos

$$|f_k(x)| = \left| \frac{1}{k!} x^k \right| = \frac{|x|^k}{k!} \leqslant \frac{r^k}{k!} = M_k,$$

sendo que a série numérica $\sum M_k$ converge (Exercício 2.4.2). Pelo Teste M, decorre que essa série converge uniformemente em $[-r, r]$, portanto, a função soma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \text{com } x \in \mathbb{R},$$

é contínua nesse intervalo. Como $r > 0$ foi dado arbitrariamente, a função é contínua em $\mathbb{R}$. Dizemos que o domínio de convergência $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ é o intervalo de convergência dessa série. [Cuidado: a convergência *não* é uniforme em $\mathbb{R}$, pelo Exercício 4.3.1(2).] ◎

Exemplo 4.26. Seja $\sum k!\, x^k$ a série de potências de coeficientes $c_k = k!$, qualquer que seja k. Denotando $u_k = k!\, x^k$ e tomando $x \neq 0$, temos

$$t_k = \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{\left|(k+1)!\, x^{k+1}\right|}{\left|k!\, x^k\right|} = (k+1)\,|x| \longrightarrow +\infty,$$

de modo que o TRCA garante que essa série diverge, qualquer que seja $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. É claro que essa série converge em $x = 0$, como toda série de potências. Assim, essa série de potências converge simplesmente apenas em $C = \{0\}$, que é o domínio de convergência dessa série. ◎

Os três exemplos precedentes são representativos do comportamento geral de séries de potências: quando não é somente $\{0\}$, como no último exemplo, o domínio de convergência de uma série de potências sempre é um intervalo, denominado *intervalo de convergência*, que até pode ser toda a reta real, como no Exemplo 4.25; nesse último caso, incluem-se os polinômios, que são séries de potências que sempre "convergem" em cada ponto.

Proposição 4.27. *Se uma série de potências $\sum c_k x^k$ convergir num ponto σ, então o intervalo simétrico $(-|\sigma|, |\sigma|)$ está contido no domínio de convergência dessa série. Além disso, a série numérica $\sum c_k x^k$ converge absolutamente em cada $x \in (-|\sigma|, |\sigma|)$ e a série de potências $\sum c_k x^k$ converge uniformemente em $[-r, r]$, qualquer que seja $0 < r < |\sigma|$.*

Demonstração. Vamos supor que a série numérica $\sum c_k \sigma^k$ convirja em $0 \neq \sigma \in \mathbb{R}$. Então é nula a sequência numérica $(c_k \sigma^k)$ de seus termos e, em particular, limitada, de modo que podemos tomar $M \in \mathbb{R}$ tal que $|c_k \sigma^k| \leqslant M$ com $k \in \mathbb{N}$. Dados $x, r \in \mathbb{R}$, com $|x| \leqslant r$, obtemos

$$|c_k x^k| = |c_k \sigma^k| \left| \frac{x^k}{\sigma^k} \right| \leqslant M \left| \frac{x}{\sigma} \right|^k \leqslant M \left(\frac{r}{|\sigma|} \right)^k = M_k.$$

A série geométrica $\sum M_k$ converge se, e só se, a razão $\frac{r}{|\sigma|}$ for menor do que 1, ou seja, $0 < r < |\sigma|$. Assim, o TCD e o TCA garantem a convergência absoluta da série numérica $\sum c_k x^k$ e o Teste M garante que essa série de potências converge uniformemente no intervalo $[-r, r]$. □

Corolário 4.28. *Se uma série de potências $\sum c_k x^k$ divergir em σ, então a série de potências diverge em cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > |\sigma|$, ou seja, o domínio de convergência dessa série de potências está contido no intervalo simétrico $\big[-|\sigma|, |\sigma|\big]$.*

Demonstração. Caso contrário, se a série $\sum c_k x^k$ convergisse em x, com $|x| > |\sigma|$, então, pela proposição precedente, a série de potências $\sum c_k x^k$ convergiria em σ. □

Teorema 4.29. *Se uma série de potências $\sum c_k x^k$ não converge em cada ponto de $\mathbb{R}$ nem diverge em cada $x \neq 0$, então existe um único $0 < R < +\infty$ tal que*

(1) *dado qualquer $x \in (-R, R)$, a série numérica $\sum c_k x^k$ converge* absolutamente*;*

(2) *dado $0 < r < R$, a série de potências converge uniformemente em $[-r, r]$;*

(3) *a série de potências diverge em cada x tal que $|x| > R$.*

Demonstração. Seja $D \subseteq \mathbb{R}$ o domínio de convergência da série de potências $\sum c_k x^k$ e suponhamos que existam $\sigma_1 \in D - \{0\}$ e $\sigma_2 \in \mathbb{R} - D$. Pela proposição e corolário precedentes, podemos supor que $0 < \sigma_2$, $0 < \sigma_1$ e $D \subseteq [-\sigma_2, \sigma_2]$. Assim, D é limitado superiormente e podemos tomar

$$R = \sup D.$$

Pelo visto, $0 < \sigma_1 \leqslant R \leqslant \sigma_2$. Se $|x| > R$, então $x \notin D$. Dado $0 < r < R$, podemos escolher $\sigma \in D$ tal que $r < \sigma < R$, de modo que, pela Proposição 4.27, $(-\sigma, \sigma) \subseteq D$, a série de potências converge uniformemente em $[-r, r]$ e, qualquer que seja $x \in (-\sigma, \sigma)$, a série numérica $\sum c_k x^k$ converge absolutamente. □

Seja $\sum c_k x^k$ uma série de potências qualquer. Se o domínio de convergência for $\{0\}$, definimos $R = 0$ e se for $\mathbb{R}$, definimos $R = +\infty$. Assim cada série de potências tem um *raio de convergência* R, com $0 \leqslant R \leqslant +\infty$. Pelos resultados que acabamos de provar, o intervalo de convergência de qualquer série de potências é dado por $\{0\}$, $\mathbb{R}$ ou um dos quatro intervalos $(-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R)$ ou $[-R, R]$, sendo que a série de potências converge absolutamente em cada $x \in (-R, R)$ e uniformemente em qualquer intervalo fechado e limitado $[-r, r]$, com $0 < r < R$.

O procedimento padrão para encontrar o raio e o intervalo de convergência de uma série de potências é o TRCA. É importante observar que para testar a convergência nas extremidades, *não serve* o TR.

Já vimos exemplos de séries de potências com intervalos de convergência dados por $\{0\}$, $\mathbb{R}$ e $(-R, R)$. Vejamos exemplos dos outros três tipos.

Exemplo 4.30. A série de potências $\sum \frac{(-1)^k}{k} x^k$ tem raio de convergência $R = 1$, pelo TRCA. De fato,

$$\left|\tfrac{(-1)^{k+1}}{k+1} x^{k+1}\right| / \left|\tfrac{(-1)^k}{k} x^k\right| = \tfrac{k}{k+1}|x| \longrightarrow |x|,$$

portanto, essa série converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. Além disso, em $x = 1$ obtemos a SHA $\sum \frac{(-1)^k}{k}$, que converge e, em $x = -1$, a SH $\sum \frac{1}{k}$, que diverge. Assim, $I = (-1, 1]$. ◎

Exemplo 4.31. A série de potências $\sum \frac{1}{k} x^k$ tem raio de convergência $R = 1$, pelo TRCA. De fato,

$$\left|\tfrac{1}{k+1} x^{k+1}\right| / \left|\tfrac{1}{k} x^k\right| = \tfrac{k}{k+1}|x| \longrightarrow |x|,$$

portanto, essa série converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. Além disso, em $x = 1$ obtemos a SH $\sum \frac{1}{k}$, que diverge e, em $x = -1$, a SHA $\sum \frac{(-1)^k}{k}$, que converge. Assim, $I = [-1, 1)$. ◎

Exemplo 4.32. A série de potências $\sum \frac{1}{k^2} x^k$ tem raio de convergência $R = 1$, pelo TRCA. De fato,

$$\left|\tfrac{1}{(k+1)^2} x^{k+1}\right| / \left|\tfrac{1}{k^2} x^k\right| = \tfrac{k^2}{(k+1)^2}|x| \longrightarrow |x|,$$

portanto, essa série converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. Além disso, em $x = 1$ obtemos uma série harmônica convergente de expoente $2 > 1$ e, em $x = -1$, a série $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$, que converge absolutamente. Assim, $I = [-1, 1]$. ◎

Exemplo 4.33. Considere fixado algum número real α que não seja um inteiro não negativo. A série de potências *binomial*

$$\sum \binom{\alpha}{k} x^k$$

tem raio de convergência $R = 1$ pelo TRCA. De fato, pelo Exercício 1.3.29,

$$\left|\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}\right| \Big/ \left|\binom{\alpha}{k} x^k\right| = \frac{|\alpha - k|}{k+1}\,|x| \longrightarrow |x|.$$

portanto, essa série converge se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$. O intervalo de convergência dessa série depende de α, como segue.

(1) Se $\alpha \leqslant -1$, então $I = (-1, 1)$, pelos Exercícios 2.4.14 e 2.5.11.

(2) Se $-1 < \alpha < 0$, então $I = (-1, 1]$, pelo Exemplo 2.89. De fato, basta lembrar que a sequência binomial é alternada e que é condicionalmente convergente a série

$$\sum \binom{\alpha}{k} = \sum \left|\binom{\alpha}{k}\right| (-1)^k.$$

(3) Se $0 < \alpha$, então $I = [-1, 1]$, pelo Exemplo 2.88. ◎

Lema 4.34. *Dada qualquer sequência (c_k) em $\mathbb{R}$, as séries de potências*

$$\sum c_k x^k, \quad \sum (k+1) \cdot c_{k+1}\, x^k \quad e \quad \sum \frac{c_{k-1}}{k}\, x^k$$

têm o mesmo raio de convergência (mas possivelmente intervalos de convergência distintos).

Demonstração. Denotemos o raio de convergência de $\sum c_k x^k$ por R e o de $\sum (k+1) \cdot c_{k+1}\, x^k$ por R'. Dado $x \in (-R', R')$, temos que $\sum (k+1) \cdot c_{k+1}\, x^k = \sum k \cdot c_k\, x^{k-1}$ converge absolutamente e, como

$$|c_k x^k| = \tfrac{1}{k}|x|\, |k \cdot c_k\, x^{k-1}| \leqslant |x|\, |k \cdot c_k\, x^{k-1}|,$$

o TCD garante que a série $\sum c_k x^k$ converge absolutamente, de modo que $x \in (-R, R)$. Isso mostra que $R \geqslant R'$.

Reciprocamente, dado $x \in (-R, R)$ tal que $x \neq 0$, tomemos $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x| < r < R$. Sabemos que $\sum c_k r^k$ converge absolutamente. Logo, a sequência de seus termos é nula e, em particular, limitada, de modo que $|c_k r^k| \leqslant M$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$ e algum $M \in \mathbb{R}$. Assim,

$$|k \cdot c_k x^{k-1}| = \frac{|c_k r^k|}{|x|}\, k\, \frac{|x|^k}{r^k} \leqslant \frac{M}{|x|}\, k\, \frac{|x|^k}{r^k} = C\, k\, a^k,$$

onde $C = M/|x|$ é constante em k e $a = |x|/r$. Como $0 < a < 1$, o TR garante que $\sum k a^k$ converge, portanto o TCD garante que a série $\sum k \cdot c_k\, x^{k-1}$ converge absolutamente, de modo que $|x| \leqslant R'$. Isso mostra que $R \leqslant R'$.

Pelo visto, estabelecemos que $R = R'$. Em particular, decorre que $\sum \frac{c_{k-1}}{k}\, x^k$ tem o mesmo raio de convergência do que $\sum k \cdot (\frac{c_{k-1}}{k}) x^{k-1} = \sum c_{k-1}\, x^{k-1} = \sum c_k x^k$. □

Exemplo 4.35. No Exemplo 4.31 vimos que a série de potências $\sum \frac{1}{k} x^k$ tem intervalo de convergência $[-1, 1)$. A série das derivadas $\sum x^k$ tem intervalo de convergência $(-1, 1)$ e a série das integrais $\sum \frac{1}{k(k+1)} x^{k+1}$ tem intervalo de convergência $[-1, 1]$. ◎

Corolário 4.36. *Se uma série de potências $\sum c_k x^k$ tem raio de convergência $R > 0$, então a função soma $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots, \quad \textit{com } |x| < R,$$

tem derivadas de todas ordens em $(-R, R)$, dadas, em cada $x \in (-R, R)$, por

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot c_{k+1}\, x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k\, x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots,$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \cdot c_{k+2}\, x^k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot c_k\, x^{k-2} = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \cdots,$$

e assim por diante. Em particular, $f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2 \cdot c_2$ e, com $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(0) = k! \cdot c_k.$$

Demonstração. Fixado $x \in (-R, R)$, tomamos $0 < r < R$ tal que $|x| < r$. Pelo Lema 4.34 e a Proposição 4.27, as séries $\sum c_k x^k$ e $\sum (k+1) c_{k+1}\, x^k$ convergem uniformemente em $[-r, r]$, portanto, pela Proposição 4.18, a derivada da série é a série das derivadas. Assim, a função derivada é a soma de uma série de potências de mesmo raio de convergência e podemos, por indução, repetir o procedimento para as derivadas de todas as ordens. □

Corolário 4.37. *Se uma série de potências $\sum c_k x^k$ tem raio de convergência $R > 0$, então a função soma $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ possui a primitiva $F : (-R, R) \to \mathbb{R}$ dada, em cada $|x| < R$, por*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}\, x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k}\, x^k = c_0 x + \tfrac{1}{2} c_1 x^2 + \tfrac{1}{3} c_2 x^3 + \cdots = \int f.$$

Assim, dado $[a, b] \subseteq (-R, R)$, vale

$$\int_a^b f = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b c_k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}\, x^{k+1} \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Pelos mesmos resultados invocados na demonstração do corolário precedente, as séries $\sum c_k x^k$ e $\sum (c_{k-1}/k)\, x^k$ convergem uniformemente em $[-r, r]$, portanto, a derivada termo a termo dessa última série de potências é a série original e, pela Proposição 4.17, a integral da série é a série das integrais. □

Corolário 4.38. *Se duas séries de potências $\sum c_k x^k$ e $\sum d_k x^k$ têm raios de convergência positivos, então $\sum c_k x^k = \sum d_k x^k$ em cada $|x| < r$ e algum $r > 0$ se, e só se, $c_k = d_k$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Denotemos $f(x) = \sum c_k x^k$ e $g(x) = \sum d_k x^k$, com $|x| \leqslant r$. Se $f(x) = g(x)$ em cada $|x| < r$, então essas funções têm derivadas de todas ordens iguais em 0 e, portanto, $k! \cdot c_k = f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0) = k! \cdot d_k$, ou seja, $c_k = d_k$, com $k \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, se $c_k = d_k$ com $k \in \mathbb{N}$, evidentemente $f(x) = g(x)$, qualquer que seja x no domínio de convergência dessa série. □

Podemos considerar, também, séries de potências centradas em algum $\sigma \in \mathbb{R}$ qualquer, dadas por

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - \sigma)^k.$$

Essas séries têm *centro* em σ e seus intervalos de convergência são centrados em σ, nada mais sendo do que uma translação das séries de potências que estamos considerando. De fato, $\sum c_k(x-\sigma)^k$ tem raio de convergência R se, e só se $\sum c_k x^k$ tem raio de convergência R e a função soma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-\sigma)^k, \quad \text{com } |x-\sigma| < R,$$

é derivável termo a termo no intervalo $(\sigma - R, \sigma + R)$.

Exercícios 4.3

4.3.1. Mostre que a série de potências

(1) $\sum x^k$ não converge uniformemente em $(-1,1)$;

(2) $\sum \frac{1}{k!} x^k$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$;

(3) $\sum \frac{1}{k^2} x^k$ converge uniformemente em $[-1,1]$;

(4) $\sum \frac{1}{k^2 \cdot 2^k} x^k$ converge uniformemente em $[-2,2]$;

(5) $\sum \frac{1}{2^k} x^k$ não converge uniformemente em $(-2,2)$.

4.3.2. Encontre o raio e o intervalo de convergência, com extremidades explicitadas, de cada uma das séries de potências dadas.

$$(1)\ \sum kx^k; \quad (2)\ \sum k^2x^k; \quad (3)\ \sum \frac{k^2}{2^k}x^k; \quad (4)\ \sum 2^kx^k; \quad (5)\ \sum \frac{1}{2^k}x^k;$$

$$(6)\ \sum \frac{1}{k^2 2^k}x^k; \quad (7)\ \sum \frac{3^k}{k^3}x^k; \quad (8)\ \sum \frac{2^k}{k^2}x^k; \quad (9)\ \sum \frac{3^k}{k4^k}x^k; \quad (10)\ \sum \frac{k^3}{3^k}x^k;$$

$$(11)\ \sum (\log k)\, x^k; \quad (12)\ \sum \frac{\log k}{k}x^k; \quad (13)\ \sum \frac{1}{k\log k}x^k; \quad (14)\ \sum \frac{1}{k(\log k)^2}x^k;$$

$$(15)\ \sum \frac{\log k}{\sqrt{k}}x^k; \quad (16)\ \sum \frac{1}{2^k}x^{3k}; \quad (17)\ \sum \frac{k^3}{8^k}x^{3k}; \quad (18)\ \sum \frac{3^k}{\sqrt{k}}x^{2k+1};$$

$$(19)\ \sum \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}; \quad (20)\ \sum \frac{8^k}{k^3}x^{3k}; \quad (21)\ \sum \frac{(-1)^k}{k^2 4^k}x^{2k}; \quad (22)\ \sum \frac{(-1)^k}{3^k\sqrt{k}}x^{2k};$$

$$(23)\ \sum \frac{(-1)^k}{3\sqrt{k}}x^{2k+1}; \quad (24)\ \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{k+2}; \quad (25)\ \sum \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}.$$

4.3.3. Encontre o raio e o intervalo convergência, com extremidades explicitadas, de cada uma das séries de potências dadas.

$$(1)\ \sum \frac{(-2)^k}{2k+3}x^k; \qquad (2)\ \sum \frac{(-2)^k}{3k+2}x^{2k}; \qquad (3)\ \sum \frac{25^k}{k+1}x^{2k};$$

$$(4)\ \sum \frac{(-2)^{3k}}{k^2+2}x^{3k}; \qquad (5)\ \sum \frac{(-3)^{3k}}{k+2}x^{3k}.$$

4.3.4. Sem utilizar a informação dada no Exemplo 4.33, obtenha o raio e o intervalo convergência, com extremidades explicitadas, de cada uma das séries de potências binomiais dadas.

$$(1)\ \sum \binom{\frac{1}{2}}{x} x^k; \quad (2)\ \sum \binom{-\frac{1}{2}}{x} x^k; \quad (3)\ \sum \binom{-\frac{3}{2}}{x} x^k;$$

$$(4)\ \sum \binom{-\frac{1}{3}}{x} x^k; \quad (5)\ \sum \binom{\frac{1}{3}}{x} x^k.$$

4.4. Funções Elementares

Nesta seção, definimos precisamente as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Consideremos a série de potências $\sum \frac{1}{k!} x^k$ que, pelo Exemplo 4.13, tem raio de convergência $R = \infty$, de modo que sua função soma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, em cada $x \in \mathbb{R}$, por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots, \tag{4.10}$$

é uma função contínua e derivável em toda reta real e sua derivada é dada por

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = f(x), \quad \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, a derivada da função f é a própria função f. Além dessa propriedade especial, valem as propriedades seguintes.

Teorema 4.39. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por (4.10) tem as propriedades seguintes.*

(1) $f(0) = 1, \quad f(x) > 0$ *em qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *e* $\quad f(1) = \sum \frac{1}{k!} = e$;

(2) $f(x) \cdot f(-x) = 1$ *em qualquer* $x \in \mathbb{R}$;

(3) $f(x) \neq 0, \quad f(-x) = 1/f(x)$ *em qualquer* $x \in \mathbb{R}$;

(4) f *é a única função real* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável tal que* $g' = g$ *e* $g(0) = 1$;

(5) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, *quaisquer que sejam* $x, y \in \mathbb{R}$;

(6) f *é uma função crescente e côncava para cima em* $\mathbb{R}$;

(7) $f(r \cdot x) = \big(f(x)\big)^r$, *quaisquer que sejam* $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$;

(8) $f(x) > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k \geqslant 1 + x$, *quaisquer que sejam* $x > 0$ *real e* $k \in \mathbb{N}$;

(9) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad$ *e* $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^k}{f(x)} = 0$, *qualquer que seja* $k \in \mathbb{N}$.

Em virtude das propriedades (1) e (7) do teorema precedente, temos

$$f(r) = e^r, \text{ qualquer que seja } r \in \mathbb{Q}. \tag{4.11}$$

Daqui em diante, passamos a escrever

$$e^x = \exp(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots, \tag{4.12}$$

e a função f passa a ser denominada *a função exponencial* real. Pela propriedade (7), a exponencial real é injetora e, por (10), define uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $(0, +\infty)$. A função inversa da exponencial, denotada por $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, é denominada *a função logaritmo* real, ou *logaritmo natural*, ou, ainda *logaritmo neperiano*, sendo dada pela relação

$$\log x = y \iff e^y = x, \text{ quaisquer que sejam } x, y \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

As principais propriedades da função logaritmo são as seguintes.

Teorema 4.40. *A função* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *dada por* (4.13), *tem as propriedades seguintes.*

(1) $\log 1 = 0$, $\log e = 1$;

(2) $\log(1/x) = -\log x$, *qualquer que seja* $x > 0$;

(3) $\log$ *é a única função real* $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *derivável tal que* $g'(x) = 1/x$ *e* $g(1) = 0$;

(4) $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$, *quaisquer que sejam* $x, y > 0$;

(5) $\log$ *é uma função crescente e côncava para baixo em* $(0, +\infty)$;

(6) $\log(x^r) = r \cdot \log x$, *quaisquer que sejam* $x > 0$ *e* $r \in \mathbb{Q}$;

(7) $\lim\limits_{x \to 0+} \log(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$, *e* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log(x)}{x} = 0$.

Em virtude das propriedades (4.11) e (6) do teorema precedente, temos

$$e^{r \log b} = e^{\log(b^r)} = b^r, \text{ quaisquer que sejam } b > 0, r \in \mathbb{Q}. \tag{4.14}$$

Além disso, dada qualquer sequência (r_k) em $\mathbb{Q}$, tal que $r_k \longrightarrow c$, temos $r_k \log b \longrightarrow c \log b$ e, portanto, pela continuidade da exponencial, obtemos

$$e^{c \log b} = \lim_{n \to \infty} e^{r_k \log b} = \lim_{n \to \infty} b^{r_k} = \inf\{b^r : r > c, r \in \mathbb{Q}\} = \sup\{b^r : r < c, r \in \mathbb{Q}\},$$

o que fornece nossa definição formal da potenciação real de base positiva, a saber,

$$b^c = e^{c \log b}, \text{ com quaisquer } b > 0, c \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Evidentemente, $b^0 = 1$, $b^1 = b$ e, dados quaisquer $b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, $b^{-c} = 1/b^c$ e

$$\log(b^c) = c \cdot \log b\,.$$

Além disso temos as propriedades operacionais

$$b^{c+d} = b^c \cdot b^d, \quad b^c \cdot v^c = (b \cdot v)^c \quad \text{e} \quad \left(b^c\right)^d = b^{c \cdot d},$$

válidas quaisquer que sejam $b, v > 0$, e $c, d \in \mathbb{R}$.

A partir da definição (4.15), obtemos as funções potenciação e exponenciação generalizadas, definidas com $c \in \mathbb{R}$ e $b > 0$ fixados, por

$$f(x) = x^c = e^{c \log x}\,, \text{ com } x > 0, \text{ e}$$
$$g(x) = b^x = e^{x \log b}\,, \text{ com } x \in \mathbb{R}\,.$$

Todas essas funções são deriváveis (pela regra da cadeia) e, com $b > 1$, temos

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$$

e, com $0 < b < 1$, temos

$$\lim_{x \to -\infty} b^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} b^x = 0.$$

Também obtemos as funções logarítmicas de bases (positivas) generalizadas, a saber, fixado $b > 0$ tal que $b \neq 1$, o logaritmo na base b é caracterizada por

$$\log_b x = y \iff b^y = x, \text{ quaisquer que sejam } b > 0 \text{ e } x, y \in \mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Assim, $\log_b x = \frac{1}{\log b} \log x$ com $x > 0$, e é claro que $\log_e = \log$. Cada $\log_b : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, com

$$\log_b' x = \tfrac{1}{x \log b}.$$

Consideremos as séries de potências $\sum \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ e $\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$, ambas com raio de convergência $R = \infty$, e suas funções soma $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas, em cada $x \in \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned} c(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \cdots \text{ e} \\ s(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \tfrac{1}{7!}x^7 + \cdots, \end{aligned} \tag{4.17}$$

que são funções contínuas e deriváveis em toda reta real e suas derivadas satisfazem

$$\begin{aligned} c'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}2kx^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} = -s(x) \text{ e} \\ s'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = c(x), \end{aligned}$$

com $x \in \mathbb{R}$. Assim, a derivada da função s é a função c e a da função c é $-s$. Além dessas propriedades especiais, valem as seguintes.

Proposição 4.41. *As funções $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por (4.17) têm as propriedades seguintes.*

(1) $(c(x))^2 + (s(x))^2 = 1$ *em qualquer* $x \in \mathbb{R}$, *com* $c(0) = 1,\ s(0) = 0$;

(2) $c(-x) = c(x)$ *e* $s(-x) = -s(x)$ *em qualquer* $x \in \mathbb{R}$;

(3) $c(x + y) = c(x) \cdot c(y) - s(x) \cdot s(y)$, *quaisquer que sejam* $x, y \in \mathbb{R}$;

(4) $s(x + y) = s(x) \cdot c(y) + c(x) \cdot s(y)$, *quaisquer que sejam* $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.42. *As funções $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por (4.17) são as únicas funções reais $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváveis tais que $g' = -h$, $h' = g$, $g(0) = 1$ e $h(0) = 0$.*

Teorema 4.43. *As funções $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por (4.17) têm a propriedade seguinte: existe um único $\lambda \in (0, 2)$ tal que*

(1) $c(\lambda) = 0,\ s(\lambda) = 1$;

(2) $0 < c(x), s(x) < 1$, *com* $0 < x < \lambda$;

(3) $c(x + \lambda) = -s(x)$ *e* $s(x + \lambda) = c(x)$ *em cada* $x \in \mathbb{R}$.

A partir das propriedades das funções c e s arroladas no teorema precedente, vemos que essas funções têm, praticamente, todas as propriedades das "conhecidas" funções trigonométricas cosseno e seno. Para estabelecer isso, passamos a definir

$$\pi = 2\lambda \tag{4.18}$$

e terminar a relação de propriedades dessas funções c e s como segue.

Corolário 4.44. *As funções $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por (4.17) e o número definido por (4.18) têm as propriedades seguintes.*

(1) $c(x + \pi) = -c(x)$ *e* $s(x + \pi) = -s(\pi)$ *em cada* $x \in \mathbb{R}$;

(2) $c(x + 2\pi) = c(x)$ *e* $s(x + 2\pi) = s(x)$ *em cada* $x \in \mathbb{R}$;

(3) *dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a^2 + b^2 = 1$, *existe um único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 \leqslant x < 2\pi$ *e*

$$c(x) = a,\ s(x) = b.$$

Demonstração. Pelo teorema, $c(x+\frac{\pi}{2}) = -s(x)$ e $s(x+\frac{\pi}{2}) = c(x)$; segue que $c(x+\pi) = c(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = -s(x+\frac{\pi}{2}) = -c(x)$ e, portanto, $c(x+2\pi) = c(x+\pi+\pi) = -c(x+\pi) = c(x)$, em cada $x \in \mathbb{R}$. Analogamente obtemos as duas identidades para $s(x+\pi)$ e $s(x+2\pi)$.

Sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a^2+b^2 = 1$. Se $a = 1$, então $b = 0$ e $x = 0$ é o único $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leqslant x < 2\pi$ e $c(0) = 1$, $s(0) = 0$; se $a = -1$, novamente $b = 0$ e $x = \pi$ é o único $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leqslant x < 2\pi$ e $c(0) = -1$, $s(0) = 0$. Analogamente obtemos $x = \frac{\pi}{2}$ com $b = 1$ e $x = 3\frac{\pi}{2}$ com $b = -1$. O caso geral ocorre com $0 < a^2, b^2 < 1$ e temos quatro opções de pares (a, b), relativamente aos sinais de $a, b \in (-1,0) \cup (0,1)$. □

Em virtude das propriedades dessas funções c e s, é natural passar a definir

$$\cos x = c(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = s(x) = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \cdots,$$

em cada $x \in \mathbb{R}$. Essas funções têm *período* (positivo mínimo) 2π e a última afirmação do corolário precedente mostra que, dado $0 < x < \frac{\pi}{2}$, podemos interpretar $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ como a medida dos catetos adjacente e oposto ao ângulo de medida x de um triângulo retângulo de hipotenusa de medida igual a 1, conforme a definição geométrica dessas funções.

A partir do cosseno e seno, definimos todas as outras funções trigonométricas, inclusive as inversas (ver exercícios). Por exemplo, pelas propriedades do cosseno, sabemos que $0 < \cos x$ com $|x| < \frac{\pi}{2}$, portanto o domínio natural da função tangente, definida por $\operatorname{tg} x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$, é o intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nesse intervalo, a tangente é crescente, com imagem $\mathbb{R}$, portanto sua inversa, a função arco tangente, está definida em toda a reta (Exercício 4.4.8).

Exercícios 4.4

4.4.1. Cada função $f(x)$ dada tem domínio $\mathbb{R}$. Calcule seu valor em $x = 0$ e $x = 1$, os limites com $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$, os intervalos de crescimento e decrescimento e esboce seu gráfico.

$$(1)\ e^{-x}; \quad (2)\ e^{-x^2}; \quad (3)\ xe^{x}; \quad (4)\ x^2e^{x}; \quad (5)\ x^2e^{-x}.$$

4.4.2. Estude o domínio, o gráfico e os limites nos pontos de fronteira do domínio das funções dadas.

$$(1)\ \log\left(1+\tfrac{1}{x}\right); \quad (2)\ x\log\left(1+\tfrac{1}{x}\right); \quad (3)\ \tfrac{1}{x}\log(1+x); \quad (4)\ \tfrac{1}{x}\log x; \quad (5)\ \tfrac{1}{x}\log\left(1+\tfrac{1}{x}\right).$$

4.4.3. Estude o domínio, o gráfico e os limites nos pontos de fronteira do domínio das funções dadas.

$$(1)\ e^{-\frac{1}{x}}; \quad (2)\ \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}; \quad (3)\ (1+x)^{\frac{1}{x}}; \quad (4)\ \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}; \quad (5)\ x^{x}.$$

4.4.4. Mostre que a função cosseno, restrita ao intervalo $(0, \pi)$, é decrescente, com imagem $(-1,1)$. Mostre que a função inversa $\arccos : (-1,1) \to \mathbb{R}$ tem derivada dada por $\arccos' x = -(1-x^2)^{-1/2}$, em cada $x \in (-1,1)$.

4.4.5. Mostre que a função cosseno, restrita ao intervalo $(\pi, 2\pi)$, é crescente, com imagem $(-1,1)$. Mostre que a função inversa $\arccos : (-1,1) \to \mathbb{R}$ tem derivada dada por $\arccos' x = (1-x^2)^{-1/2}$, em cada $x \in (-1,1)$.

4.4.6. Mostre que a função seno, restrita ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, é crescente, com imagem $(-1,1)$. Mostre que a função inversa $\operatorname{arcsen} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ tem derivada dada por $\operatorname{arcsen}' x = (1-x^2)^{-1/2}$, em cada $x \in (-1,1)$.

4.4.7. Mostre que a função seno, restrita ao intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, é decrescente, com imagem $(-1,1)$. Mostre que a função inversa $\operatorname{arcsen} : (-1,1) \to \mathbb{R}$ tem derivada dada por $\operatorname{arcsen}' x = -(1-x^2)^{-1/2}$, em cada $x \in (-1,1)$.

4.4.8. Mostre que a função tangente, restrita ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, é crescente, com imagem $\mathbb{R}$. Mostre que a função inversa $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem derivada dada por $\operatorname{arctg}' x = 1/(1+x^2)$, em cada $x \in \mathbb{R}$.

4.5. Funções Analíticas

Na seção precedente, definimos as funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas a partir de séries de potências especiais. O caminho inverso, qual seja, o de dada uma série de potências, encontrar a expressão de sua soma, a rigor, só é conhecido para uma única série de potências, a saber, a série geométrica $\sum x^k$, cuja soma nos é conhecida desde o Exemplo 1.41 da Seção 1.5. Pelos corolários no final da Seção 4.3, podemos derivar e integrar ambos os lados de

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad \text{com } |x| < 1,$$

estabelecendo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots, \quad \text{com } |x| < 1,$$

e

$$-\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} x^k = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots, \quad \text{com } |x| < 1.$$

Nessa última série podemos trocar o sinal de lado e substituir x por $-x$, obtendo

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots, \quad \text{com } |x| < 1, \tag{4.19}$$

e, na série original, substituindo x por $-x^2$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots, \quad \text{com } |x| < 1. \tag{4.20}$$

Essas substituições são permitidas, já que as igualdades são válidas em cada valor no intervalo dado. É claro que se substituirmos, por exemplo, x por $-3x^2$ numa das expressões acima, a igualdade só permanece válida se $|-3x^2| < 1$, ou seja, se $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Assim, obtemos

$$\frac{1}{(1+3x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (-3)^{k-1} \cdot x^{2k-2} = 1 - 6x^2 + 27x^4 - \cdots, \quad \text{com } |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Em geral, dada uma série de potências $\sum c_k x^k$ de raio de convergência $R > 0$, podemos multiplicá-la por constantes (que independam de k) e substituir x por qualquer expressão $\alpha(x)$, desde que tenhamos $|\alpha(x)| < R$. Substituindo, por exemplo, x por $x - \sigma$, obtemos as séries de potências *de centro* σ, mencionadas à página 182, de mesmo raio de convergência da série original e de intervalo de convergência transladado por σ (com, ou sem, as extremidades).

Exemplo 4.45. Em (4.19) vimos que $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ se $|x| < 1$. Substituindo x por $x - 1$, obtemos a série de potências

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots, \quad \text{com } |x-1| < 1,$$

de centro $\sigma = 1$ e mesmo raio $R = 1$, mas com intervalo de convergência $(0, 2)$. Evidentemente, a função logaritmo não pode ser a soma de uma série de potências centrada na origem, pois sequer está definida na origem. Por esse motivo que tomamos o desenvolvimento em série de potências centrada em $\sigma = 1$ ou, o que é a mesma coisa, o desenvolvimento em série de potências da função transladada $\log(1+x)$. ◎

Exemplo 4.46. Observe que a série de potências da derivada $(1+x)^{-1}$ de $\log(1+x)$ tem intervalo de convergência $(-1,1)$, mas o intervalo de convergência da série de potências de $\log(1+x)$ inclui a extremidade à direita, já que a série de potências dada em (4.19) converge em $x=1$, por ser a SHA. A priori, não há motivo para que a igualdade entre a função $\log(1+x)$ e a série de potências seja válida também nessa extremidade. Entretanto, nesse caso, isso ocorre e, efetivamente, as igualdades em (4.19) são válidas em $(-1,1]$, de modo que, em particular, obtemos (novamente, ver Exemplo 2.79) a soma da SHA, a saber,

$$\log 2 = \log(1+1) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots . \tag{4.21}$$

Para verificar isso, lembre que, da Fórmula (1.6) da soma de uma progressão geométrica finita, com quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $t \neq -1$, decorre

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-t)^{k-1} + \frac{(-t)^k}{1+t}.$$

Assim, dado qualquer $x > -1$, podemos integrar todas essas expressões de 0 a x, obtendo

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \log(1+x) - \log(1+0) = \int_0^x \log'(1+t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \\ &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{k-1}\tfrac{1}{k}\,x^k + \int_0^x \frac{(-t)^k}{1+t}\,dt,\end{aligned}$$

e, em particular, com $x = 1$,

$$\log 2 = \log(1+1) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^k \int_0^1 \frac{t^k}{1+t}\,dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Big|\log 2 - \big[1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{(-1)^{k-1}}{k}\big]\Big| &= \Big|(-1)^k \int_0^1 \frac{t^k}{1+t}\,dt\Big| \\ = \int_0^1 \frac{t^k}{1+t}\,dt \leqslant \int_0^1 t^k\,dt = \tfrac{1}{k+1} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

e vale (4.21). Observe que, também a expansão do logaritmo em série de potências centrada em 1, vista no Exemplo 4.46, tem intervalo de convergência igual a $(0,2]$. ◎

Exemplo 4.47. No Exercício 4.4.8 vimos que a derivada da função arco tangente, a inversa da tangente, é dada por $\operatorname{arctg}' x = 1/(1+x^2)$ em cada $x \in \mathbb{R}$. Usando a expansão (4.20), podemos integrar ambos lados de 0 a x para obter

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots ,\end{aligned} \tag{4.22}$$

em cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$. Observe que a série de potências da derivada $1/(1+x^2)$ de $\operatorname{arctg} x$ tem intervalo de convergência $(-1,1)$, mas o intervalo de convergência da série de potências de $\operatorname{arctg} x$ inclui ambas extremidades, já que a série de potências dada em (4.22) converge em $x = \pm 1$, como é fácil de constatar. A priori, não há motivo para que a igualdade entre a função $\operatorname{arctg} x$ e a série de potências seja válida também nas extremidades. Entretanto, nesse caso, isso ocorre e, efetivamente, as igualdades em (4.22) são válidas em $[-1,1]$, de modo que, em particular, obtemos a famosa fórmula de Leibniz que dá uma expansão de π, a saber,

$$\tfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \cdots. \tag{4.23}$$

Para verificar isso, partimos da fórmula da soma de uma progressão geométrica finita

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-t^2)^{k-1} + \frac{(-t^2)^k}{1+t^2},$$

válida com quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$, e integramos ambos lados de 0 a x, obtendo

$$\operatorname{arctg} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots + \tfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\, x^{2k-1} + \int_0^x \frac{(-t^2)^k}{1+t^2}\, dt.$$

pelo TFC, já que $\operatorname{arctg}' t = 1/(1+t^2)$. Em particular, com $x = 1$,

$$\tfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots + (-1)^{k-1}\tfrac{1}{2k-1} + \int_0^1 \frac{(-t^2)^k}{1+t^2}\, dt$$

e, portanto, como no exemplo precedente,

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{\pi}{4} - \left[1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots + (-1)^{k-1}\tfrac{1}{2k-1}\right]\right| \\ &\quad = \int_0^1 \frac{t^{2k}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^1 t^{2k}\, dt = \tfrac{1}{2k+1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

e vale (4.23). ◎

Nos dois exemplos precedentes, a fórmula da soma de uma PG finita nos forneceu diretamente o assim chamado polinômio de Taylor de grau k com resto integral da função soma, a partir do qual conseguimos mostrar que o valor da soma da série de potências na extremidade coincide com o valor da função soma nessa extremidade. Em geral, não podemos contar com tanta sorte.

Não obstante, o caso geral é verdadeiro, mas em virtude de um resultado muito geral e profundo, o Teorema de Abel, que afirma que, se o intervalo de convergência de uma série de potências $\sum c_k x^k$ de raio de convergência $R > 0$ incluir a extremidade $x = R$, então a convergência é uniforme em $[0, R]$ (valendo resultado análogo na outra extremidade). Em particular, a função soma f dessa série é contínua nesse intervalo fechado $[0, R]$ e, portanto, por (4.5),

$$f(R) = \sum c_k R^k.$$

Apêndice

Nesta parte final, elaboramos alguns tópicos do texto que, mesmo tendo sido tratados de maneira totalmente satisfatória para um primeiro contato, não o foram com o rigor exigido pelo método axiomático. Além disso, desenvolvemos alguns outros tópicos que apenas foram insinuados no texto, não por apresentarem um grau muito maior de dificuldade, mas por estarem fora da ementa de uma disciplina introdutória de Análise Matemática na reta.

A1. Definição Recursiva

Na Seção 1.1, utilizamos indução não só para demonstrar resultados, como também para definir conceitos, tais como a soma e o produto de naturais, o fatorial e as potências de naturais e, finalmente, as sequências recursivas. Convém destacar que a validade essas *definições recursivas* depende de um resultado mais sutil da Teoria de Conjuntos, denominado Teorema da Definição Recursiva – TDR. Vejamos o que está em jogo.

No Exemplo 1.5 da torre de Hanoi, definimos a sequência (s_n) indutivamente por $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = 2s_n + 1$, para $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, certamente obtemos valores bem definidos para $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 7$, $s_4 = 15$ e, pelo PIM, o conjunto dos n para os quais obtemos um valor bem definido para s_n é igual a $\mathbb{N}$. Isso não está sendo questionado.

O que se questiona é o uso da palavra "sequência" que, nesse caso, significa uma aplicação $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para que os valores $(1, 3, 7, 15, \ldots, s_n, \ldots)$ definam uma aplicação s de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ é necessário saber o valor de s_n em termos de n somente e não em termos de s_{n-1}, ou seja, $s(n) = s_n = 2s_{n-1} + 1$ não define uma aplicação. Assim, para poder dizer que $(1, 3, 7, 15, \ldots, s_n, \ldots)$ *é* uma sequência, precisamos de uma aplicação $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$s(n) = s_n, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

ou seja, precisamos de uma *fórmula fechada* para s_n.

Reforçamos que isso não significa que $(1, 3, 7, 15, \ldots, s_n, \ldots)$ não seja uma sequência. Até porque, nesse caso particular, temos muita sorte, pois podemos constatar (ver Exercício 1.1.32) que $s(n) = 2^n - 1$ com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, (s_n) é uma sequência autêntica. Mas o que dizer das outras definições recursivas dadas na Seção 1.1? Teremos a mesma sorte? É muito difícil imaginar uma *forma fechada* para aquelas definições, em que fixamos $m \in \mathbb{N}$ e definimos

- a soma $m + n$, a partir do sucessor $m + 1$ de m, com $m + (n + 1) = (m + n) + 1$,
- o produto $m \cdot n$, a partir de $m \cdot 1 = m$, com $m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$,
- a potência m^n, a partir de $m^1 = m$, com $m^{n+1} = m^n \cdot m$.

Todas essas definições são do mesmo estilo da torre de Hanoi. De fato, em todas, temos uma aplicação $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ específica, escolhemos s_1 e definimos, *indutivamente*,

$$s_{n+1} = \psi(s_n), \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

No caso da torre de Hanoi, usamos $s_1 = 1$ e $\psi(n) = 2n + 1$ e nos três casos arrolados, fixamos $m \in \mathbb{N}$ e tomamos

- a aplicação sucessor $\psi(n) = n + 1$ e escolhemos $s_1 = m + 1$ para a soma $m + n$,
- a soma $\psi(n) = n + m$ e escolhemos $s_1 = m$ para o produto $m \cdot n$ e
- o produto $\psi(n) = n \cdot m$ e escolhemos $s_1 = m$ para a potência m^n.

Existe um resultado geral da Teoria de Conjuntos, que depende dos três axiomas P1, P2 e o PIM e que afirma que toda sequência indutiva é, de fato, uma autêntica sequência.

Teorema A.1 (Teorema da Definição Recursiva – TDR). *Dados uma aplicação $\psi : X \to X$ e um elemento $a \in X$ quaisquer, existe uma única aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to X$ tal que $\varphi(1) = a$ e, dado $n \in \mathbb{N}$,*

$$\varphi(n+1) = \psi\big(\varphi(n)\big).$$

É por virtude do TDR que nos é permitido dizer que sequências definidas recursivamente são sequências. Como ocorre com tantos resultados de *existência*, o TDR não fornece a fórmula fechada explícita, só garante que ela *existe*, ou seja, existe uma maneira de definir o enésimo termo da sequência em função somente de n. De fato, tomando $X = \mathbb{N}$ e $a = s_1$, decorre do TDR que $s = \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, já que $s_1 = a = \varphi(1)$, $s_2 = \psi(s_1) = \psi\big(\varphi(1)\big) = \varphi(2)$, $s_3 = \psi(s_2) = \psi\big(\varphi(2)\big) = \varphi(3)$, $s_4 = \psi(s_3) = \psi\big(\varphi(3)\big) = \varphi(4)$ e, em geral,

$$s_n = \varphi(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Para uma demonstração do TDR, recomendamos a leitura da Seção 12 do clássico *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, de Paul R. Halmos (1916–2006). Em todo caso, a unicidade da aplicação φ do TDR é uma consequência imediata do PIM (ver Exercício 1.1.40) e o Exercício 1.1.41 encaminha a prova da existência, que consiste em mostrar que a interseção de um conjunto específico de relações em $\mathbb{N} \times X$, por ser *mínima*, é uma relação funcional de $\mathbb{N}$ em X.

A importância de termos um resultado teórico desses à disposição é inquestionável. Basta observar que uma das funções mais conspícuas da Análise é a exponencial $y = b^x$ de base fixa $b > 0$ e expoente x variável. Tomando $b = 2$ e $x \in \mathbb{N}$, temos a *aplicação* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\varphi(n) = 2^n$. Seria constrangedor ter que esperar até a definição da função exponencial em $\mathbb{R}$ para obter a aplicação φ por restrição a $\mathbb{N}$. (A definição de potência como função da base e não do expoente pode ser dada por meio do produto cartesiano finito, conforme Exercício 1.1.36.)

O TDR também garante que a iteração de aplicações é um conceito bem definido. Trata-se de *iterar* uma aplicação $f : Y \to Y$, ou seja, definir a *sequência das iteradas*

$$f^1 = f \quad \text{e} \quad f^{n+1} = f^n \circ f, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Para isso, tomamos X como o espaço de todas aplicações $g : Y \to Y$ e $\psi(g) = g \circ g$, para $g \in X$. Então $a = f \in X$ e o TDR garantem que a composta de f com f "n vezes" é o valor bem definido $\varphi(n) = f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ em n de uma certa aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to X$.

Para garantir que a definição recursiva de fatorial é uma sequência, usamos uma generalização do TDR, como segue.

Corolário A.2. *Dado $k \in \mathbb{N}$, seja $\psi_k : X \to X$ uma aplicação qualquer. Dado $a \in X$, existe uma única aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to X$ tal que $\varphi(1) = a$ e $\varphi(n+1) = \psi_n\big(\varphi(n)\big)$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. O TDR, aplicado ao espaço $\mathbb{N} \times X$, ao elemento $(1,a) \in \mathbb{N} \times X$ e à aplicação $\Psi : \mathbb{N} \times X \to \mathbb{N} \times X$ definida por $\Psi(n,x) = \big(n, \psi_n(x)\big)$, fornece uma aplicação $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times X$ tal que $\Phi(1) = (1,a)$ e $\Phi(n+1) = \Psi\big(\Phi(n)\big)$. Basta escrever $\Phi(n) = \big(\alpha(n), \varphi(n)\big)$ e observar que ($\alpha(n) = 1$ é constante e que) o segundo componente φ de Φ satisfaz $\varphi(1) = a$ e $\varphi(n+1) = \psi_n\big(\varphi(n)\big)$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. □

Para obter o fatorial, usamos o corolário com $X = \mathbb{N}$, $\psi_k(n) = (k+1) \cdot n$ e $a = 1$, obtendo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi(1) = 1$ e $\varphi(n+1) = \psi_k\big(\varphi(n)\big) = (k+1) \cdot \varphi(n)$, ou seja, $\varphi(n) = n!$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Resta justificar definições recursivas como as dos Exemplos 1.6 e 1.7, em que são dados dois valores iniciais s_1, s_2 e depois s_{n+2} é definido em termos de s_{n+1} e de s_n. Por exemplo, para a sequência de Fibonacci, $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$. Em geral, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos uma regra explícita

$$s_{k+1} = \psi_k(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k)$$

que fornece o (único) termo seguinte a partir de *alguns* ou *todos* os termos anteriormente obtidos.

Novamente, não está sendo questionado se os valores de s_3, s_4, $s_5, \ldots$ estão bem definidos. O que se questiona é, novamente, o uso da palavra "sequência", ou seja, se existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) = s_n$. A unicidade dos valores de s_n (e de φ) decorre do PIM, mas a *existência* de φ é mais sutil. Nesse contexto geral, em vez de construir a sequência de *valores* $\varphi(k)$, construímos a sequência de *restrições* de φ a $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Como na Seção 1.2, dado $k \in \mathbb{N}$, escrevemos

$$I_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\} = \{i \in \mathbb{N} : i \leqslant k\}$$

para o *segmento* inicial de k elementos de $\mathbb{N}$. Dado um conjunto X qualquer, definamos $\mathcal{X}$ como o conjunto de todas as aplicações de segmentos de $\mathbb{N}$ em X, ou seja, $f \in \mathcal{X}$ se, e só se, existir $k \in \mathbb{N}$ tal que f é uma aplicação de I_k em X. Por exemplo, se $g : \mathbb{N} \to X$ for uma aplicação, então cada restrição $g|_{I_k}$ é um elemento de $\mathcal{X}$.

Corolário A.3. *Seja* $\Psi : \mathcal{X} \to X$ *uma aplicação qualquer. Dado* $a \in X$, *existe uma única aplicação* $\varphi : \mathbb{N} \to X$ *tal que* $\varphi(1) = a$ *e* $\varphi(n+1) = \Psi\big(\varphi|_{I_n}\big)$, *qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$.

Antes de demonstrar esse corolário, vejamos como obter as sequências do tipo Fibonacci. Dados dois valores iniciais s_1 e s_2 temos, para cada $k \in \mathbb{N}$, alguma fórmula explícita $s_{k+2} = \psi_{k+1}(s_{k+1}, s_k)$. Agora definimos $\Psi : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$ em cada $f : \{1\} \to \mathbb{N}$ por $\Psi(f) = s_2$ e em cada $f : I_k \to \mathbb{N}$, com $2 \leqslant k$, por $\Psi(f) = \psi_k\big(f(k), f(k-1)\big)$. Pelo corolário, existe uma única aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi(1) = s_1$ e $\varphi(n+1) = \Psi\big(\varphi|_{I_n}\big)$, com $n \in \mathbb{N}$. Então $\varphi(2) = \Psi\big(\varphi|_{I_1}\big) = s_2$,

$$\varphi(3) = \Psi\big(\varphi|_{I_2}\big) = \psi_2\big(\varphi(2), \varphi(1)\big) = \psi_2(s_2, s_1) = s_3,$$

$$\varphi(4) = \Psi\big(\varphi|_{I_3}\big) = \psi_3\big(\varphi(3), \varphi(2)\big) = \psi_3(s_3, s_2) = s_4,$$

e, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tendo obtido $\varphi(n) = s_n$ e $\varphi(n+1) = s_{n+1}$, resulta

$$\varphi(n+2) = \Psi\big(\varphi|_{I_{n+1}}\big) = \psi_{n+1}\big(\varphi(n+1), \varphi(n)\big) = \psi_{n+1}(s_{n+1}, s_n) = s_{n+2}.$$

Para sequência recursivas em que cada termo depende de vários ou todos os termos anteriores, como, por exemplo, a sequência $(2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$ dos primos, o procedimento é análogo.

Demonstração do Corolário A.3. Sejam $f_a : \{1\} \to X$ definida por $f_a(1) = a$ e $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ a aplicação que a um elemento $f : I_k \to X$ qualquer de $\mathcal{X}$ associa o elemento $\psi(f) : I_{k+1} \to X$ de $\mathcal{X}$ dado por

$$\psi(f)(i) = \begin{cases} f(i), & \text{se} \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \\ \Psi(f), & \text{se} \quad i = k+1. \end{cases}$$

O TDR, aplicado ao espaço $\mathcal{X}$, ao elemento $f_a \in \mathcal{X}$ e à aplicação $\psi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ fornece uma aplicação $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ tal que $\Phi(1) = f_a$ e $\Phi(n+1) = \psi\big(\Phi(n)\big)$. Resta observar que $\Phi(n)$ tem domínio

I_n e que, pela definição de ψ, $\Phi(n+1)|_{I_n} = \Phi(n)$, com $n \in \mathbb{N}$. Agora definimos $\varphi(n) = \Phi(n)(n)$ e obtemos a aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to X$ tal que $\varphi|_{I_n} = \Phi(n)$, $\varphi(1) = \Phi(1)(1) = f_a(1) = a$ e

$$\varphi(n+1) = \Phi(n+1)(n+1) = \psi\big(\Phi(n)\big)(n+1) = \Psi\big(\Phi(n)\big) = \Psi\big(\varphi|_{I_n}\big),$$

com $n \in \mathbb{N}$. □

A2. Axioma da Escolha

Convém destacar que na demonstração da Proposição 1.15 e do Teorema 1.16 utilizamos, sem maiores comentários, um dos axiomas mais importantes da Teoria de Conjuntos, o que nos permite escolher "simultaneamente" um elemento de cada um de uma infinidade de conjuntos. Na proposição, para cada $k \in \mathbb{N}$, obtivemos alguma aplicação sobrejetora $\varphi_k : \mathbb{N} \to X_k$ e o que fizemos foi tomar *todas* essas aplicações simultaneamente para definir $\varphi(n,m) = \varphi_n(m)$, com $n, m \in \mathbb{N}$. No teorema, para cada $k \in \mathbb{N}$, obtivemos um subconjunto X_k de X com $\operatorname{card} X_k = k$ e o que fizemos foi tomar *todos* esses conjuntos simultaneamente para formar sua união $\cup X_k$.

Escolher um elemento de cada um de uma quantidade *finita* de conjuntos é fácil e escolher um elemento de cada um de uma infinidade de subconjuntos de $\mathbb{N}$ não requer axioma algum, pois podemos escolher, simplesmente, o *menor* elemento de cada conjunto — isso foi feito na construção de (1.4). No entanto, nossos conjuntos de aplicações e de subconjuntos não são finitos nem têm alguma ordem conhecida em que valha o PBO. A esse respeito, existe um exemplo clássico devido a Bertrand Russel (1872–1970).

Exemplo A.4. Considere uma coleção infinita de pares de sapatos. Então sabemos escolher um sapato de cada par, digamos, o sapato *esquerdo* de cada par. Considere uma coleção infinita de pares de meias (idênticas). Podemos escolher uma meia de cada par? ◎

Para resolver esse tipo de dúvida é que um dos axiomas da Teoria de Conjuntos é o *Axioma da Escolha*, que afirma que é possível escolher, de uma só vez, um elemento de cada um de uma infinidade de conjuntos. No exemplo de B. Russel, esse axioma garante que existe uma coleção de meias que contenha exatamente uma das duas meias de cada um dos infinitos pares.

Consideremos uma coleção não vazia qualquer de conjuntos não vazios X_λ, indexada por $\lambda \in \Lambda$, em que Λ é um conjunto, finito ou não, de índices, e denotemos por $\cup X_\lambda$ a união de todos os conjuntos X_λ dessa coleção. Dizemos que uma aplicação $\varphi : \Lambda \to \cup X_\lambda$ é uma *função escolha* da coleção X_λ se valer $\varphi(\lambda) \in X_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$.

Axioma da Escolha

Existe alguma função escolha para cada coleção não vazia de conjuntos não vazios.

Exemplo A.5. Seja X um conjunto não vazio qualquer e denotemos por $\mathcal{P}^*(X) = \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$ a coleção de todos subconjuntos não vazios de X. Nesse caso, $\mathcal{P}^*(X)$ é uma coleção não vazia de conjuntos não vazios indexada por $\mathcal{P}^*(X)$ cuja união é o próprio X. Uma função escolha de $\mathcal{P}^*(X)$ é uma aplicação $\Phi : \mathcal{P}^*(X) \to X$ tal que $\Phi(A) \in A$, para cada $\emptyset \neq A \subseteq X$. ◎

O axioma da escolha e suas equivalências aparecem em todos as áreas da Matemática. Não é por acaso que esse axioma também seja equivalente ao *Axioma da Boa Ordenação*, que garante que todo e qualquer conjunto pode ser (linearmente) ordenado. Definindo o produto cartesiano de uma coleção como o conjunto de todas as funções escolha da coleção (como no Exercício 0.0.25 no caso de Λ finito), o Axioma da Escolha afirma que é não vazio o produto cartesiano de uma coleção não vazia qualquer de conjuntos não vazios.

Exemplo A.6. Seja $\varphi : X \to Y$ uma aplicação sobrejetora qualquer. Dado qualquer $y \in Y$, seja X_y o conjunto de todos $x \in X$ tais que $\varphi(x) = y$. Então X_y é uma coleção não vazia de conjuntos não vazios indexada por Y cuja união é o próprio X. Uma função escolha dessa coleção é uma aplicação $\rho : Y \to X$ tal que $\rho(y) \in X_y$, ou seja, tal que $\varphi(\rho(y)) = y$, para cada $y \in Y$. Assim, ρ é uma "inversa à direita" de φ. (Ver Exercício 0.0.9.) ◎

É interessante observar que essa afirmação "toda aplicação sobrejetora tem uma inversa à direita", bem como a afirmção "toda relação contém (o gráfico de) alguma aplicação de mesmo domínio" são equivalentes ao axioma da escolha.

Ocorre que na demonstração que apresentamos no texto nem utilizamos toda a força do axioma da escolha. Somente utilizamos sua versão enumerável, como segue.

Axioma da Escolha Enumerável

Existe alguma função escolha para cada coleção enumerável de conjuntos não vazios.

Com esse axioma já garantimos as demonstrações da Proposição 1.15 (ver Exemplo A.7) e do Teorema 1.16 (ver Exemplo A.8).

Exemplo A.7. Seja X_k uma coleção enumerável de conjuntos não vazios e denotemos por $\mathcal{S}_k$ a coleção de todas as aplicações sobrejetoras de $\mathbb{N}$ em X_k. Se cada X_k for finito não vazio ou enumerável, $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_k, \ldots$ é uma coleção enumerável de conjuntos não vazios e uma função escolha dessa coleção é uma sequência $\varphi : \mathbb{N} \to \cup\mathcal{S}_k$ da união desses conjuntos de aplicações tal que $\varphi_n \in \mathcal{S}_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Agora, sim, podemos definir a aplicação $(n,m) \mapsto \varphi_n(m)$ ◎

Exemplo A.8. Seja X um conjunto não vazio qualquer e denotemos por $\mathcal{P}_n(X)$ a coleção de todos subconjuntos de X com cardinal n. Se X for infinito, $\mathcal{P}_1(X), \mathcal{P}_2(X), \ldots, \mathcal{P}_n(X), \ldots$ é uma coleção enumerável de conjuntos não vazios e uma função escolha dessa coleção é uma sequência $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(X)$ do conjunto das partes de X tal que $\varphi(n) = X_n \in \mathcal{P}_n(X)$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Agora, sim, podemos tomar a união $\cup X_n$. ◎

Observe, que para demonstrar o Teorema 1.16 não precisamos de *duas* aplicações do axioma da escolha enumerável. Bastaria uma única função escolha φ que a cada n associa uma aplicação $\varphi_n : \mathbb{N} \to X$ cuja imagem é um subconjunto X_n de cardinal n de X. Então a imagem de $(n,m) \mapsto \varphi_n(m)$ é um subconjunto enumerável de X.

Finalmente, vamos reforçar o que está em jogo entre o PIM e o axioma da escolha enumerável. Se pudermos escolher, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, um subconjunto X_n de algum universo X, então o PIM garante que, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar, a união $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$, mas o PIM *não* garante que podemos tomar a união $\cup X_k = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n \cup \cdots$ de *todos* X_k, com $k \in \mathbb{N}$. É o axioma da escolha enumerável que garante que podemos considerar, *simultaneamente*, todos X_k e tomar, por exemplo, sua união enumerável $\cup X_k$. Observe também que o TDR e seus corolários (ver Seção A1) não podem ser aplicados, pelo simples fato de garantirem a *unicidade* de uma certa sequência. Só que, nesse caso, não há unicidade alguma em escolher subconjuntos de algum universo.

O mesmo ocorre se, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, pudermos *escolher* algum elemento $x_{n+1} \in X_{n+1} \subseteq X$. O PIM não nos dá uma sequência de X, mas somente aplicações $\varphi_n : I_n \to X$, com $n \in \mathbb{N}$. Para passar da coleção φ_n de aplicações para uma aplicação $\varphi : \mathbb{N} \to X$, precisamos do axioma da escolha enumerável da família X_n. Diferente disso é se pudermos escolher $x_{n+1} \in X_{n+1}$ sem ambiguidade, de maneira bem determinada. Por exemplo, se o índice $n+1$ de x_{n+1} for o *mínimo* dentre todos os $k \in \mathbb{N}$ tais que $x_k \in X_{n+1}$, basta lembrar que o TDR já garante que (x_n) é uma autêntica *sequência*.

A3. Cardinais

Observamos, na Seção 1.2, que os cardinais de conjuntos definem uma relação de ordem. A reflexividade $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} X$ e a transitividade $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} Z \Longrightarrow \operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Z$ são bastante evidentes. No entanto, a antissimetria não é, de modo algum, imediata.

Naquela mesma Seção 1.2 vimos que conjuntos X infinitos podem ter aplicações injetoras $\varphi : X \to X$ que não são sobrejetoras. É claro que φ continua definindo uma bijeção sobre a imagem $\varphi(X)$. Existe uma construção notável, devida a Felix Bernstein (1878–1956), aluno de Cantor, que mostra muito mais, que é possível definir uma bijeção de X sobre qualquer subconjunto Y de X que contenha a imagem $\varphi(X)$, como segue.

Teorema A.9. (Bernstein) *Sejam $\varphi : X \to X$ uma aplicação injetora e $Y \subseteq X$ um subconjunto tal que $\varphi(X) \subseteq Y \subseteq X$. Então existe alguma bijeção de X sobre Y.*

Demonstração. Se $Y = X$, sempre existe a aplicação identidade $\xi_X : X \to X$ de X, de modo que podemos supor que $Y \neq X$, ou seja, que existe uma aplicação injetora $\varphi : X \to X$ tal que $\varphi(X) \subseteq Y \subseteq X$ para algum subconjunto $Y \neq X$. A partir de $Z_1 = X - Y \neq \emptyset$ definimos $Z_2 = \varphi(Z_1) \subseteq Y \subseteq X$, $Z_3 = \varphi(Z_2) \subseteq Y \subseteq X$, $Z_4 = \varphi(Z_3) \subseteq Y \subseteq X$ e assim por diante, obtendo uma coleção Z_n de subconjuntos de X indexada pelos naturais. Consideremos a união $Z = \bigcup Z_n$ de todos esses conjuntos. Temos $Z_1 \subseteq Z$, do que decorre

$$X - Z \subseteq X - Z_1 = Y.$$

Também $\varphi(Z) \subseteq Y$, de modo que está bem definida a aplicação $\psi : X \to Y$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x \in Z, \\ x, & \text{se } x \in X - Z. \end{cases}$$

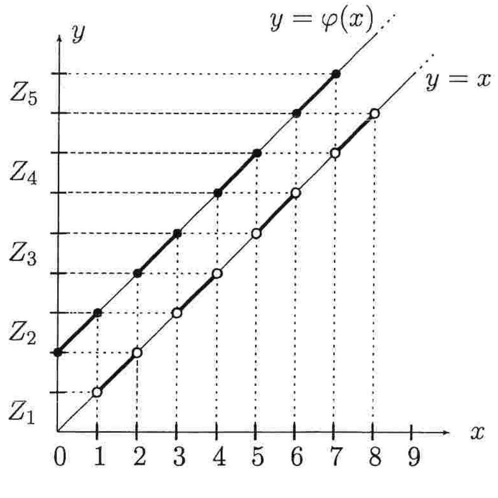


Figura A.1. A bijeção ψ com $X = [0, +\infty), Y = (1, +\infty)$ e $\varphi(x) = x + 2$

Mostremos que ψ é uma bijeção. Dado $x \in Z$, obtemos $\varphi(x) \in Z$, de modo que a restrição de ψ a Z é a restrição injetora de φ a Z; como a restrição de ψ a $X - Z$ é a identidade, o Exercício 0.0.24 garante que também ψ é injetora. Resta mostrar que ψ é sobre $Y = X - Z_1$. Seja $y \in Y$ dado. Se $y \in X - Z$, então $y = \psi(y)$, logo $Y \cap (X - Z) \subseteq \psi(X)$. Se $y \in Y \cap Z$, necessariamente $y \notin Z_1$ e, portanto, existe algum N tal que $y \in Z_{N+1} = \varphi(Z_N)$. Disso decorre que $y = \varphi(x)$, para algum $x \in Z_N \subseteq X$, ou seja, estabelecemos que $Y \cap Z \subseteq \psi(X)$. Como $Y = [Y \cap (X - Z)] \cup [Y \cap Z]$, segue que $Y \subseteq \psi(X)$ e, portanto, ψ é sobre Y. □

Corolário A.10. *Sejam X e Y conjuntos quaisquer. Se existirem aplicações injetoras de X em Y e também de Y em X, então exsite alguma bijeção de X sobre Y.*

Demonstração. Sejam $\rho : X \to Y$ e $\eta : Y \to X$ duas aplicações injetoras. Então a composta $\varphi = \eta \circ \rho : X \to X$ é injetora, com $\varphi(X) = \eta(\rho(X)) \subseteq \eta(Y) \subseteq X$. Pelo teorema, existe alguma bijeção $\psi : X \to \eta(Y)$. Como η define uma bijeção ξ de Y sobre $\eta(Y)$, a composta $\xi^{-1} \circ \psi : X \to Y$ também é uma bijeção. □

A4. Corpos Ordenados

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são corpos, mas $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, bem como o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, são. Em geral, dizemos que um conjunto $\mathbb{K}$ qualquer é um *corpo* se $\mathbb{K}$ possuir dois elementos distintos bem determinados, que denotamos 0 e 1, e duas operações binárias, denominadas *adição* e *multiplicação*, que a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{K}$ associam dois elementos $x + y$ e $x \cdot y$ de $\mathbb{K}$, que denominamos *soma* e *produto* de x e y, respectivamente, satisfazendo as propriedades seguintes.

(C1) *Associatividade*. Dados quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$,
$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{e} \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$
(C2) *Comutatividade*. Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.

(C3) *Distributividade*. Dados quaisquer $x, y, z \in \mathbb{K}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

(C4) *Elementos neutros*. Dado qualquer $x \in \mathbb{K}$, $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$.

(C5) *Elementos inversos*. Dado qualquer $x \in \mathbb{K}$ existe algum $y \in K$ tal que $x + y = 0$ e, se $x \neq 0$, existe algum $z \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot z = 1$.

Pela propriedade C4, o elemento especial 0 de $\mathbb{K}$ é o *neutro da adição*, denominado *zero*, e 1 é o o elemento *neutro da multiplicação*, denominado *unidade*. Mostra-se que 0 e 1 são os únicos elementos de um corpo que satisfazem C4. Finalmente, também são únicos os elementos inversos $y, z \in \mathbb{K}$, cuja existência é garantida para cada $x \in \mathbb{K}$, sendo denotados por $-x$ e x^{-1} e denominados elemento *simétrico* e *recíproco*, respectivamente.

Escrevendo $x - y = x + (-y)$ para a *subtração* e $x/y = x \cdot y^{-1}$ para o *quociente* num corpo qualquer, como sempre o fizemos em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, obtemos todas as regras usuais da aritmética (ver Exercício A0.1). Por exemplo, mostra-se que $0 \cdot x = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{K}$. Assim, o simétrico -1 de 1 satisfaz $(-1) \cdot x = -x$, para cada $x \in \mathbb{K}$. De fato, $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1 + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$, portanto, $(-1) \cdot x = -x$, pela unicidade do elemento simétrico. Também pela unicidade do simétrico, $-(-x) = x$ e, em particular, $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Também podemos introduzir a notação de potenciação num corpo qualquer, definindo $x^1 = x$ e $x^2 = x \cdot x$ e, mais geralmente,
$$x^{n+1} = x \cdot x^n,$$
para cada natural n.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Por definição, $\mathbb{K}$ contém, pelo menos, os elementos distintos 0 e 1. Além desses, podemos formar, sempre, a soma de 1 consigo mesmo, obtendo $1 + 1 = 2 \cdot 1$, $1 + 1 + 1 = 3 \cdot 1$, etc. Assim obtemos todos os elementos "naturais"
$$\mathbb{N} = \{n \cdot 1 : n = 1, 2, 3, \dots\}$$
de $\mathbb{K}$. Observe que esse subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{K}$ pode ser caracterizado como o menor subconjunto S de $\mathbb{K}$ tal que $1 \in S$ e satisfaz a afirmação $s \in S \Longrightarrow (s + 1) \in S$, para cada $s \in S$. (Ver Exercício A0.3.) Além disso, temos $0 \in \mathbb{K}$ e cada simétrico $-n = (-1) \cdot n \in \mathbb{K}$, portanto obtemos os elementos "inteiros" de $\mathbb{K}$. Finalmente, como $m/n = m \cdot (1/n) \in \mathbb{K}$, obtemos os elementos "racionais" de $\mathbb{K}$.

No entanto, num corpo $\mathbb{K}$ qualquer, pode ocorrer que esses elementos não sejam todos distintos, de modo que não podem desempenhar sua função usual conhecida de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo A.11. O conjunto $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\cdot\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{p-1}\}$ tem uma estrutura de corpo (quociente) sempre que p for um inteiro primo. Por exemplo, $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ é um corpo "mínimo", constituído de dois elementos, apenas. A soma e o produto de $\mathbb{Z}_p$ são definidos como em $\mathbb{Z}$, mas sempre tomando o resto na divisão por p, ou, como se diz, *congruência módulo p*. Por exemplo, temos $6 = 1 \pmod 5$ e $8 = 3 \pmod 5$ em $\mathbb{Z}$, portanto, em $\mathbb{Z}_5$, valem $\overline{3}+\overline{3} = \overline{6} = \overline{1}$ e $\overline{4}\cdot\overline{2} = \overline{8} = \overline{3}$.

Assim, $5\cdot\overline{1} = \overline{5} = \overline{0}$ em $\mathbb{Z}_5$ e, em geral, sempre $p\cdot\overline{1} = \overline{p} = \overline{0}$ em $\mathbb{Z}_p$, de modo que, em $\mathbb{Z}_p$, os "naturais", os "inteiros" e os "racionais" de $\mathbb{Z}_p$ coincidem, todos, com $\mathbb{Z}_p$. ◎

Dizemos que um corpo tem *característica* 0 se seus "naturais" são todos distintos, ou seja, se $n\cdot 1 \neq 0$ com $n \in \mathbb{N}$. Isso equivale a exigir que $0 \notin \mathbb{N}$. Os corpos $\mathbb{Z}_p$ não têm, mas $\mathbb{Q}$ tem característica 0, sendo o *menor* desses corpos.

Se um corpo $\mathbb{K}$ tem característica 0, podemos construir autênticas cópias (isomorfas) de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{K}$, da mesma maneira pela qual construímos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{N}$. Assim,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K},$$

sempre que $\mathbb{K}$ for um corpo de característica 0.

Corpos Ordenados

No entanto, a característica 0, em si, não determina o corpo dos reais, pois também o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais e o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos têm característica 0. A propriedade que falta num corpo $\mathbb{K}$ de característica 0 para ser útil em Análise é a da ordem. Dizemos que um corpo $\mathbb{K}$ é *ordenado* se existir um subconjunto $P \subseteq \mathbb{K}$ com as duas propriedades seguintes.

(O1) *Tricotomia*: dado $x \in \mathbb{K}$, vale exatamente uma das três opções:

$$x \in P, \quad x = 0, \quad \text{ou} \quad -x \in P.$$

(O2) *Fechamento*: dados $x, y \in P$, também $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$.

Pensando em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, o conjunto P é, simplesmente, o conjunto dos números positivos. Assim, escrevendo $-P = \{x \in \mathbb{K} : -x \in P\}$, dizemos que os elementos de P são *positivos* e os de $-P$ são *negativos*. Observe que a exigência O1 afirma que

$$\mathbb{K} = P \cup \{0\} \cup (-P)$$

é uma união disjunta. Logo, 0 é o único elemento de $\mathbb{K}$ que não é positivo nem negativo.

Como fizemos no caso de $\mathbb{Q}$, dados $x, y \in \mathbb{K}$, dizemos que y é *menor do que* x, ou que x é *maior do que* y, se $x - y \in P$, e escrevemos $y < x$ ou $x > y$. Em particular, $x > 0$ significa $x \in P$, ou seja, que x é positivo. As expressões $y \leqslant x$ e $x \geqslant y$ têm os significados esperados.

As propriedades da ordem num corpo ordenado são as que conhecemos de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Para referência futura, reunimos todas no resultado seguinte.

Proposição A.12. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. As afirmações seguintes são relativas a elementos $x, y, z, t \in \mathbb{K}$ quaisquer.*

(O3) *Tricotomia: vale exatamente uma das opções:*

$$x < y, \quad x = y, \quad \text{ou} \quad x > y.$$

(O4) $0 < x^2$, *para cada* $x \neq 0$; *em particular*, $0 < 1$.

(O5) *Transitividade: se* $x < y$ *e* $y < z$, *então* $x < z$.

(O6) *Se* $x < y$ *e* $z \leqslant t$, *então* $x + z < y + t$.

(O7) *Se* $x < y$ *e* $z > 0$, *então* $x \cdot z < y \cdot z$;
analogamente, se $x < y$ *e* $z < 0$, *então* $x \cdot z > y \cdot z$.

(O8) *Se* $0 < x$ *e* $0 < x \cdot y$, *então* $0 < y$ *e* $0 < 1/x$.

(O9) *Se* $0 < x < y$, *então* $0 < 1/y < 1/x$.

Demonstração. Sejam x, y, z elementos quaisquer do corpo ordenado $\mathbb{K}$. Por O1, $x - y \in P$, $x - y = 0$ ou $y - x = -(x - y) \in P$, ou seja, vale O3. Se $x \neq 0$, então $x \in P$ ou $-x \in P$, portanto O2 garante $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x) \in P$. Isso mostra O4. Para mostrar O5, O6 e O7, basta observar que $z - x = (z - y) + (y - x)$, $(y + t) - (x + z) = (y - x) + (t - z)$, $y \cdot z - x \cdot z = (y - x) \cdot z$ e $x \cdot z - y \cdot z = (y - x) \cdot (-z)$.

Provemos O8. Sejam x, y dados, com $0 < x$. Se $y = 0$, então $x \cdot y = 0$ e, se $0 < -y$, então $0 < x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$, ou seja, $x \cdot y < 0$. Logo, $0 < y$ decorre de $0 < x \cdot y$. Em particular, $0 < 1/x$ decorre de $0 < 1 = x \cdot (1/x)$. Finalmente, $1/x - 1/y = (y - x) \cdot (1/x \cdot y) > 0$, sempre que $0 < x < y$, mostrando O9. □

Observe que, por O4, $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado, pois $i^2 = -1 < 0$. As propriedades O3, O5, O6 e O7 são suficientes para que um corpo com uma *ordem total* seja ordenado. (Ver Exercício A0.2.)

Todo corpo ordenado tem característica 0, pois $0 < 1$ fornece $1 < 1 + 1 = 2$, que fornece $2 < 2 + 1 = 3$, e assim por diante. Assim, nos corpos ordenados, as inclusões $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ respeitam, inclusive, a ordem de $\mathbb{K}$.*

Dado $x \in \mathbb{K}$, definimos o *valor absoluto* de x por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{se} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Sempre $|x| \geqslant 0$, com $|x| = 0$ se, e só se, $x = 0$. Essa propriedade, junto com V2 e V4 a seguir, caracterizam a noção de valor absoluto em corpos arbitrários, ordenados ou não.

As propriedades do valor absoluto num corpo ordenado são as que conhecemos de $\mathbb{R}$. Para referência futura, reunimos todas no resultado seguinte.

Proposição A.13. *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo ordenado. As afirmações seguintes são válidas para quaisquer* $x, y \in \mathbb{K}$.

(V1) $|-x| = |x|$.

(V2) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$.

(V3) $|x| \leqslant y$ *se, e só se,* $-y \leqslant x \leqslant y$.

(V4) *Desigualdade triangular:* $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

(V5) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$.

Demonstração. Sejam x, y elementos quaisquer do corpo ordenado $\mathbb{K}$. Lembrando que $-(-x) = x$ e que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$, as duas primeiras afirmações decorrem diretamente da definição. Para provar a terceira, basta observar que de $0 \leqslant x \leqslant y$ decorre $-y \leqslant 0 \leqslant x \leqslant y$ e, de $x \leqslant 0 \leqslant -x \leqslant y$, decorre $-y \leqslant x \leqslant 0 \leqslant y$. Reciprocamente, se $-y \leqslant x \leqslant y$, então $x \leqslant y$ e $-x \leqslant -(-y) = y$, de modo que $|x| \leqslant y$.

Para mostrar V4, observe que $x \leqslant |x|$ e $y \leqslant |y|$, portanto, $x + y \leqslant |x| + |y|$, pela propriedade O6. Como também $-x \leqslant |x|$ e $-y \leqslant |y|$, a mesma propriedade de ordem garante que $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$. Por definição, decorre a propriedade V4. Por V3, a primeira desigualdade de V5 equivale a

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

*Ver demonstração do Teorema A.20, no Apêndice A5.

que, por sua vez, equivale a

$$|y| \leqslant |x| + |x-y| \quad \text{e} \quad |x| \leqslant |y| + |x-y|.$$

Escrevendo $y = x+(y-x)$ e $x = y+(x-y)$, ambas decorrem de V1 e V4. A segunda desigualdade de V5 também segue de V1 e V4. □

De posse da noção de valor absoluto, podemos introduzir em $\mathbb{K}$ as noções de distância e intervalos e, com elas, todos os conceitos básicos da Análise Matemática, tais como sequências convergentes, funções contínuas, funções deriváveis e a integral. Mesmo assim, existem corpos ordenados que são um pouco diferentes do que se poderia imaginar.

Exemplo A.14. Seja $\mathbb{Q}(t)$ o conjunto das funções racionais $p(t)/q(t)$ numa variável t com coeficientes em $\mathbb{Q}$. Observe que, tomando a função constante $q(t) = 1$ como denominador, $\mathbb{Q}(t)$ inclui todas as funções polinomiais com coeficientes em $\mathbb{Q}$; em particular, todos os racionais, como funções constantes, ou seja, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(t)$. É possível verificar que as operações usuais de funções fazem de $\mathbb{Q}(t)$ um corpo. Observe, também que as funções $y = t$ e $y = t^2/t$ de $\mathbb{Q}(t)$ são consideradas iguais no corpo $\mathbb{Q}(t)$, embora, como funções, tenham domínios diferentes.

Definimos uma ordem de $\mathbb{Q}(t)$ por $p(t)/q(t) > 0$ se, e só se, $a_n b_m > 0$ em $\mathbb{Q}$, onde $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ e $q(t) = b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$, com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Nessa ordem, uma função racional $f(t)$ é maior do que uma função racional $g(t)$ se, e só se, o gráfico de $f(t)$ no plano de abscissa t e ordenada $\mathbb{Q}$ está acima do de $g(t)$, a partir de algum ponto da reta racional (ver Exercício A0.5).

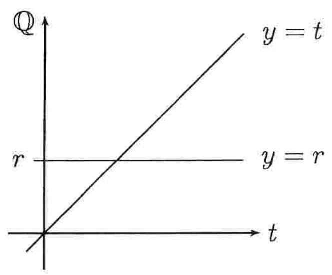


Figura A.2. A função $y = t$ é maior do que qualquer função $y = r$

Em particular, $t > r$, para cada $r \in \mathbb{Q}$, já que $1 > 0$ em $\mathbb{Q}$, portanto, $t - r = (1t - r)/1 > 0$. Isso significa que qualquer polinômio não constante é maior de que qualquer elemento de $\mathbb{Q}$ e, em particular, que $\mathbb{N}$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{Q}(t)$, pois $\mathbb{N}$ cabe no intervalo limitado $(0, t) = \{x \in \mathbb{Q}(t) : 0 < x < t\}$ de $\mathbb{Q}(t)$. ◎

Corpos Arquimedianos

Dizemos que um corpo ordenado é *arquimediano* se valer alguma das quatro propriedades da proposição seguinte (portanto, as quatro; ver a Proposição A.16 na próxima seção para mais duas propriedades equivalentes). Sabemos que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são arquimedianos, mas o corpo ordenado das funções racionais do Exemplo A.14 não é.

Proposição A.15. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(E1) *Se $x \in \mathbb{K}$ é positivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.*

(E2) *Se $x, y \in \mathbb{K}$ são positivos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < y < n \cdot x$.*

(E3) *Dado qualquer $x \in \mathbb{K}$, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.*

(E4) *Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$ com $x < y$, existe algum $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

Demonstração. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado com a propriedade E1. Dados $x, y \in \mathbb{K}$ positivos, temos que $x/y \in \mathbb{K}$ é positivo, portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < x/y$. Isso significa que $0 < y < n \cdot x$ e prova E2. Supondo que valha E2, temos $x < 1$ para cada $x \in \mathbb{K}$ que não seja positivo; se x é positivo, $1/x > 0$ e E2 fornece n tal que $\frac{1}{n} < 1/x$, ou seja, $x < n$ e vale E3. Supondo que valha E4 e que $x \in \mathbb{K}$ seja positivo, obtemos $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{m}{n} < x$, de modo que vale E1. Resta provar que E3 $\Rightarrow$ E4.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado com a propriedade E3 e sejam $x, y \in \mathbb{K}$ quaisquer tais que $x < y$. A hipótese E3 garante que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/(y-x) < n$, ou seja, $1 < n\cdot(y-x) = n\cdot y - n\cdot x$. Logo, $n \cdot y > 1 + n \cdot x$.

Supomos, agora, que $x > 0$. Então existe, por E3, algum natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x < m$. O conjunto desses naturais m tem algum menor elemento $m \in \mathbb{N}$ que satisfaz $n \cdot x < m$. Agora, de duas, uma: ou $m - 1 = 0$ ou $m - 1 \in \mathbb{N}$. Em ambos casos, $m - 1 \leqslant n \cdot x < m$. Assim, obtemos

$$n \cdot x < m \leqslant n \cdot x + 1 < n \cdot y,$$

do que decorre $n \cdot x < m < n \cdot y$, ou seja, $r = \frac{m}{n}$ satisfaz E4, nesse caso $x > 0$.

Finalmente, se $x \leqslant 0$, E3 fornece $k \in \mathbb{N}$ tal que $-x < k$ e, portanto, $0 < x + k < y + k$. Pela parte que acabamos de provar, existe $r \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x + k < r < y + k$, do que obtemos $x < r - k < y$, com $r - k \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$. Isso mostra que E3 $\Rightarrow$ E4. □

A5. Os Completamentos de um Corpo

Nesta seção, mostramos que existem várias opções para caracterizar o que distingue $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, todas equivalentes num corpo ordenado arquimediano $\mathbb{K}$ qualquer e também mostramos que todos corpos ordenados completos são isomorfos.

Conforme vimos na seção precedente, num corpo ordenado qualquer podemos introduzir as noções de valor absoluto e intervalos e, com elas, todos os conceitos básicos da Análise Matemática, tais como sequências convergentes, funções contínuas, funções deriváveis e a integral. O cuidado é que, em $\mathbb{K}$ até podemos usar números racionais mas certamente não podemos usar números reais; em particular, todos os epsilons também devem ser elementos de $\mathbb{K}$. Por exemplo, dizemos que uma sequência (s_n) de $\mathbb{K}$ é *de Cauchy* se, dado qualquer $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo, existir $N \in \mathbb{N}$ tal que vale $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant N$. Com esse cuidado em mente, podemos usar todas as nossas definições do texto, bastando trocar $\mathbb{R}$ por $\mathbb{K}$, não havendo a necessidade de reproduzir todas no presente contexto de um corpo ordenado arbitrário.

Começamos ampliando as equivalências da Proposição A.15.

Proposição A.16. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(E) *$\mathbb{K}$ é um corpo arquimediano.*

(E5) *Toda sequência monótona e limitada é de Cauchy.*

(E6) *Toda sequência limitada tem uma subsequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado com a propriedade E5 e consideremos qualquer sequência limitada de $\mathbb{K}$. Sabemos (Lema 1.62) que toda sequência limitada possui alguma subsequência monótona, que também é limitada, portanto, por hipótese, de Cauchy. Assim, vale E6. Se $\mathbb{K}$ for não arquimediano, então a sequência (n) dos naturais é limitada (ver E3) e, evidentemente, não é de Cauchy, pois $|(n+p) - n| = p \geqslant 1$, para $n \in \mathbb{N}$. Em particular, nenhuma subsequência de (n) é de Cauchy, portanto, não vale E6. Resta mostrar que vale E5 em corpos arquimedianos.

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo ordenado arquimediano e (s_n) uma sequência não decrescente e limitada qualquer de $\mathbb{K}$. Seja $c \in \mathbb{K}$ uma cota superior dos termos s_n da sequência. Para mostrar que (s_n) é de Cauchy, fixemos, arbitrariamente, algum $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo. Consideremos os elementos $c, c-\varepsilon, c-2\varepsilon, \ldots$ de $\mathbb{K}$. Como c é cota superior de $\{s_n\}$ e $\mathbb{K}$ é arquimediano, existe um único $m \in \mathbb{N}$ tal que $c-(m-1)\varepsilon$ ainda é cota superior de $\{s_n\}$, mas $c - m\varepsilon$ não é mais cota superior de $\{s_n\}$. Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $c - m\varepsilon < s_N$ e lembrando que (s_n) é não decrescente, obtemos

$$c - m\varepsilon < s_N \leqslant s_n \leqslant s_{n+p} \leqslant c-(m-1)\varepsilon,$$

para cada $n \geqslant N$ e $p \in \mathbb{N}$. Como ε é arbitrário, (s_n) resulta ser de Cauchy. Pelo Exercício A0.8, resulta que vale E5 em corpos ordenados arquimedianos. □

Uma das opções de caracterizar corpos ordenados completos é por meio de cortes de Dedekind, que ainda não definimos. No caso de $\mathbb{Q}$, a motivação para esse conceito pode ser encontrada na próxima seção. Em geral, dado um corpo ordenado $\mathbb{K}$ qualquer, dizemos que um subconjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ é um *corte* de $\mathbb{K}$ se

(D1) X não é vazio nem igual a K,

(D2) $(-\infty, x] \subseteq X$, para cada $x \in X$, e

(D3) X não tem maior elemento.

Um elemento $\sigma \in \mathbb{K}$ é um *elemento separador* de um corte X se $X = (-\infty, \sigma)$.

Exemplo A.17. Dado qualquer $\sigma \in \mathbb{K}$, o intervalo $(-\infty, \sigma)$ de $\mathbb{K}$ é um corte com elemento separador σ.

Dado um corte X qualquer de $\mathbb{K}$, mostremos que X é não vazio e limitado superiormente e mais, se o corte X possuir supremo em $\mathbb{K}$, então $\sup X$ é o elemento separador de X.

Pela propriedade D1, existe pelo menos algum $c \in \mathbb{K}$ que não pertence a X. Se existisse $x \in X$ tal que $c \leqslant x$, então D2 acarretaria $c \in X$. Logo, cada $c \in \mathbb{K} - X$ é uma cota superior de X. Segue que todo corte é não vazio e limitado superiormente. Se existir $c = \sup X$ em $\mathbb{K}$, então $X \subseteq (-\infty, c]$ e, por D3, $c \notin X$, de modo que c é o elemento separador de X. ◎

Teorema A.18. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado arquimediano. As afirmações seguintes, todas relativas a $\mathbb{K}$, são equivalentes.*

(K1) *Todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.*

(K2) *Todo corte tem elemento separador.*

(K3) *Toda sequência monótona e limitada converge.*

(K4) *Toda sequência limitada tem subsequência convergente.*

(K5) *Toda sequência de intervalos encaixados fechados e limitados tem interseção não vazia.*

(K6) *Toda sequência de Cauchy converge.*

(K7) *Toda função contínua tem a propriedade do valor intermediário.*

Demonstração. No exemplo precedente, vimos que K1 $\Rightarrow$ K2. Reciprocamente, seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado no qual todo corte tem elemento separador e mostremos que vale K1. Seja $Y \subseteq \mathbb{K}$ um subconjunto não vazio e limitado superiormente arbitrário. Se Y possuir elemento máximo, então esse elemento é o supremo de Y e nada mais há a mostrar. Supomos, então, que Y não possui elemento máximo e consideramos a união X de todos os intervalos $(-\infty, y]$, com $y \in Y$,

$$X = \{x \in \mathbb{K} : \text{ existe algum } y \in Y \text{ tal que } x \leqslant y\}.$$

Praticamente por definição, X satisfaz D2 e, como Y não é vazio e limitado superiormente, é fácil verificar que X também satisfaz D1. Dado $x \in X$, seja $y \in Y$ tal que $x \leqslant y$. Como Y não tem maior elemento, existe $y < y' \in Y$. Então o ponto médio $x' = \frac{1}{2}(y + y')$, que é maior do que y, é maior do que x e pertence a X, ou seja, x não é o maior elemento de X.

Dessa forma mostramos que X é um corte de $\mathbb{K}$ e, por hipótese, $X = (-\infty, \sigma)$, para algum $\sigma \in \mathbb{K}$. Dado $z < \sigma$, existe $x \in X$ tal que $z < x$, portanto, existe $y \in Y$ tal que $x \leqslant y$ e decorre que $z < y$, mostrando que z não é cota superior de Y. Como $Y \subseteq X$, resulta que $\sigma = \sup Y$. Assim, mostramos que K1 $\Longleftrightarrow$ K2 em corpos ordenados.

No Teorema 2.35 demonstramos que K1 $\Rightarrow$ K3, no Exercício 2.2.29 demonstramos que K3 $\Rightarrow$ K5, no Teorema 2.41 demonstramos que K3 $\Rightarrow$ K4, no Teorema 2.47 demonstramos que K4 $\Rightarrow$ K6 e, no Capítulo 3, demonstramos que K1 $\Rightarrow$ K7. A bem da verdade, tudo isso foi provado em $\mathbb{R}$, mas o leitor é convidado para reproduzir as provas pertinentes em $\mathbb{K}$ e mais, constatar que para obter K1 $\Rightarrow$ K3 $\Rightarrow$ K4 não se utiliza a propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$.

A prova de K6 $\Rightarrow$ K3 é imediata, pela Proposição A.16. De fato, seja (s_n) uma sequência monótona e limitada de $\mathbb{K}$. Pela Proposição A.16, (s_n) é de Cauchy e, portanto, por K6, convergente. Assim, resta provar que K7 $\Rightarrow$ K3 e que K5 $\Rightarrow$ K1, para concluir a demonstração do teorema.

Seja, pois, $\mathbb{K}$ um corpo arquimediano com a propriedade do valor intermediário K7 e mostremos que vale K3. Seja (s_n) uma sequência não decrescente e limitada qualquer de $\mathbb{K}$ e mostremos que (s_n) converge. Consideremos a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é cota superior de } \{s_n\}, \\ 0, & \text{se } x \text{ não é cota superior de } \{s_n\}. \end{cases}$$

Suponha que $\sigma \in \mathbb{K}$ não seja uma cota superior de $\{s_n\}$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma < s_N$ e, portanto, nenhum elemento de $(-\infty, s_N)$ pode ser cota superior de $\{s_n\}$; em particular, ψ é constante e igual a 0 nesse intervalo de $\mathbb{K}$ e, portanto, é contínua em σ.

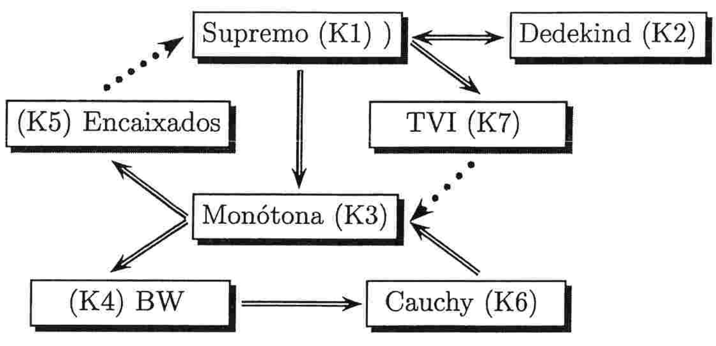


Figura A.3. A demonstração do Teorema A.18

Como a imagem $\psi(\mathbb{K}) = \{0, 1\}$ de ψ não é um intervalo e $\mathbb{K}$ tem a propriedade do valor intermediário, necessariamente existe algum ponto $c \in \mathbb{K}$ no qual ψ é descontínua. Pelo que acabamos de verificar, c é cota superior de $\{s_n\}$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo dado arbitrariamente. Se $c - \varepsilon$ fosse uma cota superior de $\{s_n\}$, então cada elemento de $(c - \varepsilon, \infty)$ também seria uma cota superior de $\{s_n\}$ e, portanto, ψ seria constante e igual a 1 nesse intervalo de $\mathbb{K}$; em particular, ψ seria contínua em σ, o que é impossível. Logo, $c - \varepsilon$ não é cota superior de $\{s_n\}$, ou seja, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c - \varepsilon < s_N$. Como (s_n) é não decrescente e c é cota superior, resulta

$$c - \varepsilon < s_N \leqslant s_n \leqslant c,$$

para cada $n \geqslant N$. Como ε é arbitrário, concluímos que $\lim s_n = c \in \mathbb{K}$. Assim, $\mathbb{K}$ tem a propriedade K3.

Finalmente, mostremos que vale o axioma fundamental em corpos ordenados arquimedianos com a propriedade K5 dos intervalos encaixados. Seja, pois $X \subseteq \mathbb{K}$ um conjunto limitado superiormente e escolhamos dois elementos $x_1, y_1 \in \mathbb{K}$ tais que x_1 não é, mas y_1 é cota superior de X. Escrevendo $I_1 = [x_1, y_1]$, temos que I_1 é um intervalo compacto. Se y_1 é a menor cota superior de X, nada mais há para provar. Caso contrário, tomamos o ponto médio $\sigma = \frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ de x_1 e y_1 e verificamos se σ é cota superior de X. Se σ for cota superior de X, definimos $x_2 = x_1$ e $y_2 = \sigma$; se σ não for cota superior de X, definimos $x_2 = \sigma$ e $y_2 = y_1$. Em ambos casos, escrevemos $I_2 = [x_2, y_2]$. Assim, $I_2 \subseteq I_1$ e o comprimento do intervalo compacto I_2 é a metade do de I_1, isto é, $y_2 - x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - x_1)$.

Continuando, se y_2 é a menor cota superior de X, nada mais há para provar. Caso contrário, tomamos o ponto médio $\sigma = \frac{1}{2}(x_2 + y_2)$ de x_2 e y_2 e verificamos se σ é cota superior de X. Se σ for cota superior de X, definimos $x_3 = x_2$ e $y_3 = \sigma$; se σ não for cota superior de X, definimos $x_3 = \sigma$ e $y_3 = y_2$. Em ambos casos, escrevemos $I_3 = [x_3, y_3]$. Assim, $I_3 \subseteq I_2$ e o comprimento do intervalo compacto I_3 é a metade do de I_2, isto é, $y_3 - x_3 = \frac{1}{2}(y_2 - x_2) = \frac{1}{2^2}(y_1 - x_1)$.

Dessa forma, chegamos num y_n que é o supremo de X ou, então, (usando indução matemática), obtemos uma sequência $I_n = [x_n, y_n]$ de intervalos compactos *encaixados* tais que cada x_n não é, mas cada y_n é uma cota superior de X, com $y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2^n}(y_1 - x_1)$.

Por hipótese, essa sequência possui algum *ponto limite* $c \in \mathbb{K}$, ou seja, $c \in I_n$ com $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{K}$ é arquimediano, temos $\frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$, portanto, de $x_n \leqslant c \leqslant y_n$ decorre que $x_n \longrightarrow c$ e $y_n \longrightarrow c$. Mostremos que $c = \sup X$. Como cada y_n é cota superior, c é cota superior.

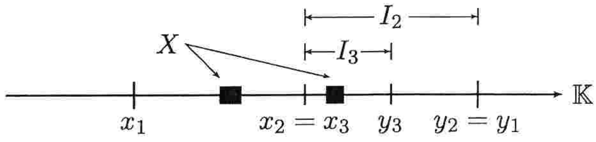


Figura A.4. O começo da sequência de intervalos encaixados

Dado $\varepsilon \in \mathbb{K}$ positivo, escolhemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $I_N \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, de modo que $c - \varepsilon < x_N$. Como x_N não é cota superior, resulta que $c - \varepsilon$ tampouco pode ser cota superior. Já que ε foi arbitrário, concluímos que $c = \sup X$. Assim, vale o axioma fundamental K1 em $\mathbb{K}$. □

Essas sete equivalências não contam toda a história. Introduzindo o conceito de derivada de funções definidas em intervalos de um corpo ordenado $\mathbb{K}$ qualquer, podemos mostrar que as sete equivalências do teorema são equivalentes, ainda, às quatro condições seguintes, que também foram tratadas neste texto.

A afirmação K8 e K9 compõe o Corolário 4.22, a afirmação K10 é o Exercício 4.9 e a afirmação K11 é o Teorema 4.20 do valor médio, de Lagrange.

(K8) *Toda função derivável com derivada nula num intervalo é constante.*

(K9) *Toda função derivável com derivada não negativa num intervalo é não decrescente.*

(K10) *Toda função derivável num intervalo satisfaz a desigualdade do valor médio.*

(K11) *Toda função derivável num intervalo satisfaz a igualdade do valor médio.*

Nas afirmações K10 e K11 utilizamos a terminologia seguinte. Seja $f : I \to \mathbb{K}$ uma função qualquer derivável num intervalo $I \subseteq \mathbb{K}$.

Dizemos que f *satisfaz a desigualdade do valor médio* se dado qualquer $M \in \mathbb{K}$ não negativo tal que valha $f'(x) \leqslant M$, para cada $x \in I$, então

$$f(b) - f(a) \leqslant M \cdot (b - a),$$

para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$.

Dizemos que f *satisfaz a igualdade do valor médio* se dados quaisquer $a, b \in I$ distintos, existir c entre a e b tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Convém observar que as quatro primeiras afirmações do teorema são equivalentes em corpos ordenados quaisquer.

Corolário A.19. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. As afirmações seguintes, todas relativas a $\mathbb{K}$, são equivalentes.*

(K1) *Todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.*

(K2) *Todo corte tem elemento separador.*

(K3) *Toda sequência monótona e limitada converge.*

(K4) *Toda sequência limitada tem subsequência convergente.*

Se valer qualquer uma dessas afirmações, $\mathbb{K}$ é arquimediano.

Demonstração. Na prova do teorema precedente, observamos que K1 e K2 são equivalentes em quaisquer corpos ordenados. No mesmo teorema também mostramos que K1 $\Rightarrow$ K3 $\Rightarrow$ K4, sem usar essa propriedade. Finalmente, seja $\mathbb{K}$ um corpo com a propriedade de BW, ou seja, K4. Então é evidente que vale E6 e, portanto $\mathbb{K}$ é arquimediano. Pelo teorema precedente, já sabemos que K4 $\Rightarrow$ K1 é uma afirmação válida em corpos arquimedianos. $\square$

Dizemos que um corpo ordenado é *completo* se vale o axioma fundamental, ou seja, se todo subconjunto não vazio e limitado superiormente possuir supremo. Sabemos que $\mathbb{R}$ é completo, mas não $\mathbb{Q}$. Pelo último resultado enunciado, todo corpo ordenado completo é arquimediano.

Unicidade

Dois corpos ordenados quaisquer não têm motivo para serem considerados iguais: basta olhar para $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. No entanto, dois corpos ordenados *completos* quaisquer sempre podem ser considerados iguais, ou seja, do ponto de vista algébrico, *isomorfos*. Assim, podemos dizer que $\mathbb{R}$ é o *único* corpo ordenado completo.

Teorema A.20. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo. Então existe um isomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de corpos ordenados, ou seja, uma bijeção que satisfaz as propriedades seguintes.*

(1) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.*

(2) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.*

(3) *Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x < y$, então $\varphi(x) < \varphi(y)$.*

Assim, podemos identificar $\mathbb{R}$ com $\mathbb{K}$ via $x \equiv \varphi(x)$.

Demonstração. Apresentamos apenas um esboço da demonstração. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer e denotemos por $0_{\mathbb{K}}$ e $1_{\mathbb{K}}$ os elementos zero e unidade de $\mathbb{K}$. Evidentemente, começamos definindo φ por $\varphi(0) = 0_{\mathbb{K}}$ e $\varphi(1) = 1_{\mathbb{K}}$ e, mais geralmente, $\varphi(n) = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}} = n \cdot 1_{\mathbb{K}}$ e $\varphi(-n) = (-n) \cdot 1_{\mathbb{K}}$ e mostramos que φ satisfaz (i)–(iii) para $n, m \in \mathbb{Z}$. Observe que, por ser $\mathbb{K}$ ordenado, $\varphi(n) \neq 0$ e, portanto, $\varphi(n)$ é invertível em $\mathbb{K}$. Em seguida, definimos $\varphi(r) = \varphi(m/n) = \varphi(m)/\varphi(n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)^{-1}$, para cada racional $r \in \mathbb{Q}$, mostramos que essa definição independe da particular representação m/n do racional r e verificamos que, agora, φ satisfaz (i)–(iii) para $x, y \in \mathbb{Q}$.

Assim, chegamos num isomorfismo φ do corpo ordenado $\mathbb{Q}$ sobre os "racionais" de $\mathbb{K}$, justificando a afirmação à página 199.

Para estender φ a $\mathbb{R}$, passamos a supor que $\mathbb{K}$ é completo (portanto, arquimediano). Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\varphi(x) = \sup\{\varphi(r) : r \in \mathbb{Q} \text{ e } r < x\} \in \mathbb{K}.$$

Inicialmente conferimos que essa definição coincide com a anterior no caso $x \in \mathbb{Q}$. Ora, pelo Exercício 1.4.19, sabemos que, para cada $r \in \mathbb{Q}$, vale $r = \sup\{s \in \mathbb{Q} : s < r\}$. De maneira totalmente análoga, mostramos que, também no corpo arquimediano $\mathbb{K}$, cada "racional" $\varphi(r)$ é o supremo do conjunto dos "racionais" menores do que $\varphi(r)$, de modo que φ está bem definida em $\mathbb{Q}$. Também é fácil observar que realmente existe o supremo $\varphi(x)$ em $\mathbb{K}$ e que $\varphi(x) \leqslant \varphi(r)$ se $x < r$, com $x \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$.

Mostremos que vale (iii) em $\mathbb{R}$. Dados $x < y$ em $\mathbb{R}$, escolhemos $r, s \in \mathbb{Q}$ tais que $x < r < s < y$ e então, como já sabemos que $\varphi(r) < \varphi(s)$, resulta $\varphi(x) \leqslant \varphi(r) < \varphi(s) \leqslant \varphi(y)$, pelo que acabamos de explicitar. Isso mostra (iii). Finalmente, a demonstração de que φ é sobrejetora e satisfaz (i) e (ii) é deixada a cargo do leitor. $\square$

A6. Completamentos de $\mathbb{Q}$

Nesta seção final, esboçamos as duas construções de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$ mais famosas, devidas a R. Dedekind e G. Cantor. Assim, finalmente podemos dizer que o corpo ordenado completo $\mathbb{R}$ existe e é único; o axioma fundamental, então, passa a ser um teorema.

Dedekind

Inspirado na teoria de proporções de Eudoxo, conforme exposta no Livro V do mais famoso livro de Matemática, *Os Elementos*, de Euclides, R. Dedekind concebeu a noção de *corte* como uma maneira de identificar cada elemento de $\mathbb{Q}$ e também cada "furo" de $\mathbb{Q}$ com um elemento bem determinado de um novo conjunto, que então é $\mathbb{R}$.

Essencialmente, a observação básica é que a coleção dos intervalos ilimitados $(-\infty, b)$ de $\mathbb{Q}$ fornece uma cópia de $\mathbb{Q}$, pois cada $b \in \mathbb{Q}$ define exatamente um desses intervalos, que sempre são não vazios ($b - 1 < b$), distintos de $\mathbb{Q}$ e desprovidos de elemento máximo. No entanto, cada "furo" de $\mathbb{Q}$, como $\sqrt{2}$, também pode ser caracterizado como um subconjunto não vazio, distinto de $\mathbb{Q}$ e desprovido de elemento máximo, por exemplo, $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$. É claro que, uma vez conhecido $\mathbb{R}$, sabemos que esse conjunto é, simplesmente, $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$, mas a percepção crucial é que esse conjunto pode ser caracterizado totalmente usando só $\mathbb{Q}$.

Generalizando esses intervalos limitados, definimos um *corte de Dedekind* de $\mathbb{Q}$ como um subconjunto X não vazio e distinto de $\mathbb{Q}$ que não tenha maior elemento e que contenha o intervalo $(-\infty, x]$, para cada $x \in X$ (ver definição à página 202).

Dado $b \in \mathbb{Q}$, o intervalo ilimitado $(-\infty, b)$ de $\mathbb{Q}$ é um corte de $\mathbb{Q}$. Pelo Exercício 1.3.11, sabemos que, também $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$ é um corte. A diferença crucial desses cortes é que $(-\infty, b)$ tem o *elemento separador* b em $\mathbb{Q}$, ao passo que $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\}$ não tem, ou seja, $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 < 2\} \neq (-\infty, b)$, para qualquer $b \in \mathbb{Q}$.

Agora *definimos* $\mathbb{R}$ como a totalidade dos cortes de $\mathbb{Q}$, ou seja,

$$\mathbb{R} = \{X : X \text{ é um corte de } \mathbb{Q}\}.$$

Em primeiro lugar, podemos encontrar $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, ou melhor, uma cópia de $\mathbb{Q}$, que é a coleção dos cortes com elemento separador, ou seja, a coleção dos intervalos ilimitados $(-\infty, b)$ de $\mathbb{Q}$. Também vemos, em $\mathbb{R}$, muitos dos "furos" de $\mathbb{Q}$, como as raízes enésimas de naturais, dadas pelos cortes $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^n < m\}$, com $m \in \mathbb{N}$.

No entanto, esse $\mathbb{R}$ é só um conjunto de cortes e certamente ainda não é um corpo ordenado em que vale a propriedade do supremo. Para isso, precisamos definir no conjunto $\mathbb{R}$ as operações de adição e multiplicação e a ordem e verificar cada uma das exigências C1–C5, O1, O2 e a validade do axioma fundamental. Além disso, precisamos cuidar para que essas operações e a ordem resultem exatamente nas operações e ordem usuais de $\mathbb{Q}$ quando tratarmos dos elementos de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Como $b \leqslant c$ em $\mathbb{Q}$ se, e só se, $(-\infty, b) \subseteq (-\infty, c)$, temos uma indicação da ordem "natural" de $\mathbb{R}$: definimos $X \preccurlyeq Y$ por $X \subseteq Y$. Assim $b \leqslant c$ em $\mathbb{Q}$ se, e só se, $(-\infty, b) \preccurlyeq (-\infty, c)$ em $\mathbb{R}$ e é bastante fácil mostrar que $\preccurlyeq$ define uma ordem total em $\mathbb{R}$ (ver definição no Exercício A0.2), com a qual então já podemos definir cota superior e supremo em $\mathbb{R}$, segundo $\preccurlyeq$. O espantoso é que até já podemos mostrar que, realmente, qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que possua cota superior possui supremo!

Seja $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio qualquer de $\mathbb{R}$. Digamos que $X_0 \in \mathcal{X}$ e que $Y \in \mathbb{R}$ seja uma cota superior de $\mathcal{X}$. Se um corte S fosse o supremo de $\mathcal{X}$, teríamos $X \preccurlyeq S$, ou $X \subseteq S$, pra cada elemento X de $\mathcal{X}$. Então é natural considerar a união de todos os cortes X de $\mathcal{X}$ como candidato a supremo de $\mathcal{X}$, ou seja,

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : \text{ existe } X \in \mathcal{X} \text{ tal que } x \in X\} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X.$$

Como $X_0 \in \mathcal{X}$, temos $X_0 \subseteq S$, de modo que S é não vazio, e também $X \preccurlyeq Y$, para cada $X \in \mathcal{X}$, pois Y é cota superior, do que decorre que $S \subseteq Y$. Mas Y é um corte, portanto, $Y \neq \mathbb{Q}$ e, em particular, $S \neq \mathbb{Q}$. Dado $x \in S$, existe algum $X \in \mathcal{X}$ tal que $x \in X$. Como X é corte, temos que $(-\infty, x] \subseteq X$ e existe algum $z \in X$ que é maior do que x, portanto obtemos $(-\infty, x] \subseteq X \subseteq S$ e $x < z \in X \subseteq S$. Assim, S é um corte de $\mathbb{Q}$.

Por definição, $X \preccurlyeq S$, para cada $X \in \mathcal{X}$, ou seja, S é uma cota superior de $\mathcal{X}$. Mostremos que é a menor cota superior. Se algum corte Z de $\mathbb{Q}$ for uma cota superior de S, então $X \preccurlyeq Z$, ou seja, $X \subseteq Z$, para cada $X \in \mathcal{X}$, de modo que $S \subseteq Z$, ou seja, $S \preccurlyeq Z$. Assim, $S = \sup \mathcal{X}$.

Resta, portanto, definir a estrutura de corpo ordenado para $\mathbb{R}$. A ordem está quase pronta e a adição é bastante simples, mas a multiplicação requer trabalho. Nada disso será visto aqui. ◎

Cantor

A construção de $\mathbb{R}$ devida a G. Cantor é completamente diferente da de Dedekind.

Na primeira metade do século XIX, B. Bolzano e A. L. Cauchy, de maneira independente, caracterizaram a convergência de uma sequência sem mencionar seu (possivelmente desconhecido) limite, por meio do conceito da sequência agora denominada *de Cauchy*. Por exemplo, todas sequências de racionais cujos limites são irracionais não têm limite em $\mathbb{Q}$, mas são de Cauchy. Ambos Bolzano e Cauchy utilizavam a convergência de toda sequência de Cauchy, sem se darem conta de que isso não estava provado.

Basta observar que para os matemáticos da época, todo número irracional era o limite de alguma sequência de racionais, mas não é logicamente coerente definir $\sqrt{2}$, por exemplo, como sendo o limite de uma sequência, digamos, de $x_0 = 1; x_1 = 1{,}4; x_2 = 1{,}41; x_3 = 1{,}414; x_4 = 1{,}4142; \ldots$ se, para provar a *convergência* dessa sequência de Cauchy, precisamos, antes de tudo, da própria *existência* do número $\sqrt{2}$, que é o limite dessa sequência.

O problema básico é que não se conseguia compreender corretamente a estrutura dos números reais. A bem da verdade, só aos poucos os matemáticos começaram a entender a necessidade de uma formalização – ou *aritmetização* – de $\mathbb{R}$ que possibilitasse entender a natureza dos números reais e a convergência das sequências de Cauchy. Então, em 1872, G. Cantor publicou sua idéia genial de definir os números reais, não como o limite de sequências de racionais, mas sim como as próprias sequências!

Essa construção também exige muito trabalho, mas uma vez na vida de todo estudante de Matemática isso deveria ser desenvolvido passo a passo. Aqui só veremos o esboço da idéia de Cantor, por total falta de espaço.

Começamos observando que podemos definir sequências de Cauchy e sequências convergentes dentro de $\mathbb{Q}$, da mesma forma que o fizemos em $\mathbb{R}$, na Seção 2.3. O cuidado é que, como queremos construir $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$, não podemos usar números reais daqui em diante. Em particular, todos os epsilons também devem ser racionais. No entanto, como podemos encontrar várias sequências de racionais convergindo a um mesmo irracional, e queremos identificar todas essas sequências com esse irracional, precisamos decidir quando duas dessas sequências serão consideradas iguais ou, mais precisamente, equivalentes. Isso é parecido com a construção do próprio corpo $\mathbb{Q}$, em que identificamos as frações $4/6$ e $6/9$, por exemplo, como sendo o mesmo número racional.

Dadas sequências (x_n) e (y_n) de Cauchy de $\mathbb{Q}$, dizemos que (x_n) e (y_n) são *equivalentes*, e escrevemos $(x_n) \sim (y_n)$, se $\lim(x_n - y_n) = 0$. É bastante simples verificar que $\sim$ define uma relação de equivalência no conjunto de todas as sequências de Cauchy de $\mathbb{Q}$ que, portanto, divide esse conjunto de todas as sequências de Cauchy de $\mathbb{Q}$ em classes de equivalência (disjuntas). Denotamos por

$$[x_n] = \{(y_n) : (x_n) \sim (y_n)\}$$

a classe de equivalência da sequência de Cauchy (x_n) de $\mathbb{Q}$ e definimos

$$\mathbb{R} = \{[x_n] : (x_n) \text{ é uma sequência de Cauchy de } \mathbb{Q}\}.$$

Em primeiro lugar, podemos encontrar $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, ou melhor, uma cópia de $\mathbb{Q}$, que é a coleção das classes definidas pelas sequências constantes de racionais. Por exemplo, o racional $0 \in \mathbb{Q}$ é identificado com a classe $[0] \in \mathbb{R}$ da sequência constante definida por $x_n = 0$, para $n \in \mathbb{N}$. Também vemos, em $\mathbb{R}$, muitos dos "furos" de $\mathbb{Q}$, como $\sqrt{2}$, que é a classe de equivalência da sequência definida por $x_1 = 1{,}4; x_2 = 1{,}41; x_3 = 1{,}414; x_4 = 1{,}4142; \ldots$, que é igual à classe da sequência dos babilônios definida indutivamente por $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + 2/x_n\big)$, para $n \in \mathbb{N}$.

No entanto, esse $\mathbb{R}$ é só um conjunto de classes e certamente ainda não é um corpo ordenado em que vale a propriedade do supremo. Para isso, precisamos definir no conjunto $\mathbb{R}$ as operações de adição e multiplicação e a ordem e verificar cada uma das exigências C1–C5, O1, O2 e a validade do axioma fundamental. Além disso, precisamos cuidar para que essas operações e a ordem resultem exatamente nas operações e ordem usuais de $\mathbb{Q}$ quando tratarmos dos elementos de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Graças às propriedades algébricas das sequências convergentes (e pensando que sequências de Cauchy são, no fim do dia, sequências convergentes) é muito fácil definir as operações de corpo de $\mathbb{R}$. Dados dois elementos $[x_n]$ e $[y_n]$ de $\mathbb{R}$, definimos

$$[x_n] + [y_n] = [x_n + y_n] \quad \text{e} \quad [x_n] \cdot [y_n] = [x_n \cdot y_n].$$

Agora precisamos conferir se isso realmente resulta em operações para o corpo, antes de podermos verificar as propriedades dessas operações. Assim, precisamos mostrar, primeiro, que soma e produto termo a termo de sequências de Cauchy são sequências de Cauchy, para fazer sentido as definições. (Isso foi indicado no Exercício 2.3.21 para sequências reais; a mesma demonstração funciona em $\mathbb{Q}$.) Agora, se $(x_n) \sim (y_n)$ e $(x'_n) \sim (y'_n)$, então $x_n - y_n \longrightarrow 0$ e $x'_n - y'_n \longrightarrow 0$, de modo que $(x_n + x'_n) - (y_n + y'_n) = (x_n - y_n) - (x'_n - y'_n) \longrightarrow 0$ pelas regras operacionais do limite de sequências e, portanto, $(x_n + x'_n) \sim (y_n + y'_n)$, de modo que a adição independe das particulares sequências usadas em sua definição. Da mesma forma, como sequências de Cauchy são limitadas, decorre que a multiplicação de $\mathbb{R}$ está bem definida (ver Exercício 2.1.23).

As propriedades C1–C5 são todas razoavelmente fáceis de demonstrar, exceto a existência de recíproco, que requer mais trabalho. Depois disso, podemos afirmar que $\mathbb{R}$ é um corpo. A ordem de $\mathbb{R}$ não é de todo evidente, já que não basta ter $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ para concluir que $[x_n] < [y_n]$. De fato, basta tomar $x_n = 0 < \frac{1}{n} = y_n$ e observar que $[x_n] = [y_n]$.

A ordem de $\mathbb{R}$ depende de uma observação crucial (vista, em sua versão para $\mathbb{R}$, no Exercício 2.3.20): se $[x_n] \neq [0]$, como (x_n) não converge a 0 mas é de Cauchy, podemos escolher $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ positivo e $N \in \mathbb{N}$ tais que $x_n > \varepsilon$, para cada $n \geqslant N$, ou então tais que $x_n < -\varepsilon$, para cada $n \geqslant N$. Como a classe de cada subsequência de uma sequência de Cauchy coincide com a classe da própria sequência, isso significa que para toda classe $[x_n] \neq [0]$ existe algum $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que, para algum representante (y_n) dessa classe, $y_n > \varepsilon$, com $n \in \mathbb{N}$, ou então $y_n < -\varepsilon$, com $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso, definimos $[x_n] > [0]$ e, no segundo, $[x_n] < [0]$. Agora devemos mostrar que essa relação independe da particular sequência escolhida e que satisfaz as propriedades O1 e O2 de uma ordem.

Finalmente, de posse da estrutura de corpo ordenado $\mathbb{R}$, podemos mostrar que vale o axioma fundamental. No caso dessa construção é mais conveniente mostrar que $\mathbb{R}$ é arquimediano e que toda sequência de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge. Qualquer corpo ordenado que satisfaça essas duas propriedades, necessariamente satisfaz o axioma fundamental do supremo (ver Teorema A.18, na Seção A5).

Demonstrar que $\mathbb{R}$ é arquimediano é bastante simples. De fato, dado $[x_n] \in \mathbb{R}$, obtemos uma sequência (x_n) de $\mathbb{Q}$ que, por ser de Cauchy, é limitada. Basta tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant N - 1 < N$, com qualquer $n \in \mathbb{N}$, e concluir que, na ordem de $\mathbb{R}$, resulta $[x_n] < [N]$, onde $[N]$ é a classe da sequência constante e igual a N, identificada com o natural N.

Observe que, em particular, pela propriedade arquimediana, daqui em diante tanto faz tomar epsilons em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{Q}$, pois, dado qualquer $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, sempre existe $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$.

Em seguida, demonstramos o lema especial seguinte. Dada qualquer sequência de Cauchy (r_n) em $\mathbb{Q}$, consideramos, para cada $m \in \mathbb{N}$, o real $[x_n]$ definido pela sequência constante (y_n) de $\mathbb{Q}$ — dada por $y_n = r_m$, com $n \in \mathbb{N}$ — e mostramos que a sequência $([x_n])$ de $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$, com limite $[r_n]$. A partir desse lema, não resta muito para mostrar que toda sequência de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge em $\mathbb{R}$, mas tampouco isso será visto aqui. ◎

A7. Exercícios

A0.1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer (ver definição à página 197). Mostre que, para quaisquer $x, y, z, t \in \mathbb{K}$, valem as afirmações seguintes.

(1) $0 \cdot x = 0$.

(2) $x + (y - z) = (x + y) - z$ e $x - (y + z) = (x - y) - z$.

(3) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ e $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(4) $-(-x) = x$ e $(x^{-1})^{-1} = x$, para $x \neq 0$.

(5) Se $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

(6) Se $z \neq 0$ e $x \cdot z = y \cdot z$, então $x = y$.

(7) Se $y, t \neq 0$, então $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{z}{t} = \dfrac{x \cdot z}{y \cdot t}$.

(8) Se $y, z, t \neq 0$, então $\dfrac{x}{y} \Big/ \dfrac{z}{t} = \dfrac{x \cdot t}{y \cdot z}$.

(9) Se $y, t \neq 0$, então $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{t} = \dfrac{x \cdot t + y \cdot z}{y \cdot t}$.

(10) Se $y, t \neq 0$, então $\dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{t} = \dfrac{x \cdot t - y \cdot z}{y \cdot t}$.

A0.2. Seja $\mathbb{K}$ um conjunto qualquer e considere uma relação binária $\preccurlyeq$ entre pares de elementos de $\mathbb{K}$ com as propriedades seguintes.

(1) *Total*: para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, vale $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

(2) *Antissimétrica*: se $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq x$, então $x = y$.

(3) *Transitiva*: se $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq z$, então $x \preccurlyeq z$.

Nesse caso, dizemos que $\preccurlyeq$ define uma *ordem total* no conjunto $\mathbb{K}$. Suponha, agora, que $\mathbb{K}$ tenha uma estrutura de corpo com uma ordem total que satisfaz as propriedades adicionais seguintes.

(4) *Monótona na soma*: se $x \preccurlyeq y$ e $z \in \mathbb{K}$, então $x + z \preccurlyeq y + z$.

(5) *Monótona no produto*: se $0 \preccurlyeq x$ e $0 \preccurlyeq y$, então $0 \preccurlyeq x \cdot y$.

Defina $P \subseteq \mathbb{K}$ por $x \in P$ se, e só se, $0 \preccurlyeq x$ e $x \neq 0$. Mostre que P tem as propriedades O1 e O2 de corpo ordenado (ver definição à página 198), de modo que $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado.

A0.3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. Mostre que o menor subconjunto S de $\mathbb{K}$ tal que $1 \in S$ e, para cada $s \in S$, $(s+1) \in S$ decorre de $s \in S$, é dado por $S = \{n \cdot 1 : n \in \mathbb{N}\}$.

A0.4. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Mostre que as afirmações seguintes, relativas a elementos $x, y, z, t \in \mathbb{K}$ quaisquer, são verdadeiras.

(1) Se $0 \leqslant x < y$ e $0 < z \leqslant t$, então $0 \leqslant x \cdot z < y \cdot t$.

(2) Se $x, y \geqslant 0$, então $x < y$ se, e só se, $x^2 < y^2$.

(3) Se $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \geqslant 0$, então $x < y$ se, e só se, $x^n < y^n$.

(4) $x^2 + y^2 \geqslant 0$.

(5) $x^2 + y^2 > 0$ se, e só se, $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

A0.5. Sejam $p(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$ e $q(t) = b_m t^m + \cdots + b_1 t + b_0$, com a_n e b_m racionais não nulos, dois polinômios de coeficientes racionais e uma variável t. Mostre que a função racional $f = p/q$ pode ser fatorada como

$$f(t) = \frac{a_n}{b_m} t^{n-m} \left[1 + h(t)\right],$$

onde $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 0$ (a definição desse limite pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo).

Como $t^p > 0$ para cada $t > 0$ e $p \in \mathbb{Z}$, mostre que $a_n/b_m > 0$ se, e só se, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que em $f(s) > 0$, para cada $s \in \mathbb{Q}$ com $s \geqslant r$. Conclua que a ordem no corpo $\mathbb{Q}(t)$ das funções racionais $f = p/q$ dada no Exemplo A.14, à página 200, satisfaz $f < g$ se, e só se, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que em $f(s) < g(s)$, para cada $s \in \mathbb{Q}$ com $s \geqslant r$.

A0.6. Seja $X \subseteq \mathbb{K}$ um subconjunto não vazio e denotemos o simétrico de X por $Y = \{y \in \mathbb{K} : -y \in X\}$. Dado qualquer $z \in \mathbb{K}$, mostre que

(1) z é cota superior de Y se, e só se, $-z$ é cota inferior de X;

(2) z é cota inferior de Y se, e só se, $-z$ é cota superior de X;

(3) $z = \min Y$ se, e só se, $-z = \max X$;

(4) $z = \max Y$ se, e só se, $-z = \min X$;

(5) $z = \inf Y$ se, e só se, $-z = \sup X$ e

(6) $z = \sup Y$ se, e só se, $-z = \inf X$.

A0.7. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. Mostre que são equivalentes as propriedades seguintes, relativas a subconjuntos de $\mathbb{K}$.

(1) Todo conjunto não vazio e limitado inferiormente tem ínfimo.

(2) Todo conjunto não vazio e limitado superiormente tem supremo.

(3) Todo conjunto não vazio e limitado tem ínfimo e supremo.

A0.8. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. Mostre que são equivalentes as propriedades seguintes.

(1) Toda sequência monótona e limitada é de Cauchy.

(2) Toda sequência não decrescente e limitada é de Cauchy.

(3) Toda sequência não crescente e limitada é de Cauchy.

A0.9. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado qualquer. Mostre que são equivalentes as propriedades seguintes.

(1) Toda sequência monótona e limitada converge.

(2) Toda sequência não decrescente e limitada converge.

(3) Toda sequência não crescente e limitada converge.

A0.10. Dizemos que um conjunto munido de duas operações binárias é um anel comutativo com unidade se valerem todas as propriedades C1-C5 de um corpo exceto (possivelmente) a exigência da existência de elementos inversos da multiplicação; tampouco é necessário ter $0 \neq 1$. Mostre que o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ das sequências $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de um corpo $\mathbb{K}$ munido das operações de soma e produto definidas termo a termo constitui um anel comutativo com unidade $1 \neq 0$.

Índice Remissivo