Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Variações sobre o shift de Haydn e propriedades do shift em alfabetos gerais

Tese de Doutorado

Fernanda Ronssani de Figueiredo

Porto Alegre, dezembro de 2019

Fernanda Ronssani de Figueiredo

Variações sobre o shift de Haydn e propriedades do shift em alfabetos gerais

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção de Título de Doutora em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Porto Alegre
2019

Tese submetida por Fernanda Ronssani de Figueiredo [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador
Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Banca Examinadora
Prof. Dr. Fagner Bernardini Rodrigues (UFRGS)
Prof. Dr. Leonardo Fernandes Guidi (PPGMAP-UFRGS)
Prof. Dr. Marcelo Sobottka (UFSC)

Data da defesa: 16 de dezembro de 2019

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Agradecimentos

Agradeço ao professor Alexandre por ter me aceitado como orientanda e pelas inúmeras vezes que me auxiliou neste trabalho, com muita paciência durante esses anos. Agradeço também aos membros da banca, pela disponibilidade e pelas importantes colocações realizadas. Agradeço aos demais professores que de alguma forma estiveram presente durante minha trajetória no doutorado. Agradeço aos meus pais, Marco e Adriana, e ao meu irmão, Matheus, por todo o apoio que me deram durante toda minha trajetória acadêmica. Agradeço também ao meu namorado Evandro, por toda paciência, atenção e amor. Agradeço aos meus amigos que de alguma forma contribuíram com sua amizade e companhia. Agradeço à Capes pelo apoio financeiro. A todos o meu muito obrigada!

"Do or do not.

There is no try.

"In a dark place we find ourselves

and a little more knowledge lights our way."

(Mestre Yoda)

Resumo

Neste trabalho faremos um apanhado de resultados sobre dinâmica simbólica, principalmente em alfabetos infinitos compactos.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Dinâmica simbólica, Alfabetos infinitos.

Abstract

In this paper we will make a collection of results about symbolic dynamics, mainly in compact infinite alphabets.

Keywords: Dynamical systems, Symbolic dynamics, Infinite alphabets.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos teve origem na necessidade de modelar as equações diferenciais de fenômenos físicos, como o movimento dos planetas e das moléculas. E, com a ideia de simplificar os modelos, começou a ser utilizada a discretização do tempo, olhar os sistemas como se fossem filmes feitos quadro a quadro. A partir daí surgiu a dinâmica simbólica, onde a ideia é dividir o conjunto de possíveis estados em um número finito de pedaços, e acompanhar o caminho de cada um desses estados. Cada peça é associada a um símbolo, e dessa forma a evolução do sistema é descrita por uma sequência infinita de símbolos. Esse sistema simbólico ajuda a entender de forma mais simplificada a dinâmica do sistema original. O primeiro trabalho onde a dinâmica simbólica aparece foi publicado em 1898 por Jacques Hadamard intitulado 'Les surfaces a courbures opposees et leurs lignes geodesiques', onde ele aplica essa ideia a fluxos geodésicos em superfícies de curvatura negativa. A partir da década de 20 outros matemáticos, como Morse e Hedlund, começaram a mostrar que outros sistemas também aceitavam essa discretização do tempo e desde então a teoria se desenvolveu de forma exponencial com o trabalho de grandes matemáticos da atualidade. Na primeira parte desse trabalho, iremos propor uma generalização do exemplo Haydn, [6], onde é possível construir mais de uma medida de máxima entropia, em particular infinitas, considerando o mesmo modelo construído por Haydn agora com subshifts definidos a partir de uma matriz de adjacência. No capítulo seguinte, faremos resultados para o shift usual em alfabetos infinitos compactos. No capítulo 5, o falaremos sobre o shift modificado de Muir e Urbanski, introduzido em [10]. No capítulo 6, falaremos sobre a relação entre as condições de Walters e de Dini. No capítulo 7, adaptaremos o resultado proposto por Bowen em [3], mostrando que existe potencial que também será Hölder e cohomologo ao potencial dado mas que depende somente das coordenadas positivas do ponto. E, no capítulo 8, mostraremos alguns resultados sobre os shifts em $\mathbb{Z}^2$.

Capítulo 2

Background

Neste capítulo inicial recordaremos definições e alguns resultados que serão úteis ao longo do texto.

2.1 Tópicos de Dinâmica Simbólica

As definições e os resultados dessa seção podem ser encontrados em [7].

Espaços Shift

Definição 2.1. Se $\mathcal{A}$ é um alfabeto, então o full $\mathcal{A}$ shift é a coleção de todas as sequências bi-infinitas de símbolos de $\mathcal{A}$, ou seja,

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \; x_i \in \mathcal{A} \; para \; todo \; i \in \mathbb{Z}\}$$

Definição 2.2. O shift map σ no full shift $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ leva o ponto x no ponto $y = \sigma(x)$ cuja i-ésima coordenada é $y_i = x_{i+1}$.

Definição 2.3. Seja $\mathcal{F}$ um conjunto de blocos de $\mathcal{A}$ chamado de conjunto de palavras proibidas. Para qualquer $\mathcal{F}$, defina $X_{\mathcal{F}}$ subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que não contém nenhum bloco de $\mathcal{F}$. Um espaço shift é um subconjunto X de um full shift $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$, para algum conjunto $\mathcal{F}$ de palavras proibidas.

Definição 2.4. Uma matriz quadrada $n \times n$ $A = (a)_{(i,j)}$ é dita redutível se os índices $1, 2, ..., n$ podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos não vazios $i_1, i_2, ..., i_\mu$ e $j_1, j_2, ..., j_\nu$, com $\mu + \nu = n$, tal que

$$a_{(i_\alpha j_\beta)} = 0$$

para $\alpha = 1, 2, ..., \mu$ e $\beta = 1, 2, ..., \nu$.

Uma matriz é redutível se, e somente se, pode ser escrita como uma matriz triangular superior por permutações de linhas colunas e linhas.

Uma matriz quadrada que não é redutível é dita irredutível.

Mais ainda, a matriz é dita irredutível se é associada a um grafo fortemente conexo.

Definição 2.5. Um shift X é dito irredutível se dadas quaisquer u, v palavras permitidas em X, então existe uma palavra w também em X tal que a palavra uwv é palavra permitida em X.

Entropia

Definição 2.6. Seja X um espaço shift. A entropia de X é definida por

$$h(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |\mathbb{B}_n(X)|$$

onde $|\mathbb{B}_n(X)|$ é o número de blocos de tamanhos n em X.

Proposição 2.1. *Sejam X e Y espaços shift. Uma aplicação $\phi : X \to Y$ é um sliding block code se, e somente se, $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$ e existe $N > 0$ tal que $\phi(x)_0$ é uma função de $x_{[-N,N]}$.*

Definição 2.7. Se o sliding block code $\phi : X \to Y$ é sobrejetivo, então ϕ é chamado um factor code de X em Y, e então dizemos que Y é um fator de X.

Proposição 2.2. *Se Y é fator de X, então $h(Y) \leq h(X)$.*

Corolário 2.1. Se X é conjugado a Y, então $h(X) = h(Y)$.

2.2 Tópicos de Teoria da Medida

As definições e demonstrações dos resultados apresentados nesta seção podem ser encontradas em [4] ou [11].

Espaços Mensuráveis

Definição 2.8. Uma **álgebra** de X é uma família $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que é fechada para as operações elementares de conjuntos e contém o conjunto vazio, ou seja,

a) $\emptyset \in \mathcal{B}$;

b) $A \in \mathcal{B}$ *implica* $A^c \in \mathcal{B}$;

c) $A, B \in \mathcal{B}$ *implica* $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Definição 2.9. Dizemos que uma álgebra é uma **σ-álgebra** de X se também for fechada para uniões enumeráveis.

$$A_j \in \mathcal{B} \textit{ para } j = 1, 2, \ldots, n, \ldots \textit{ implica } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}.$$

Definição 2.10. Um **espaço mensurável** é uma dupla $(X, \mathcal{B})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de conjuntos de X. Os elementos de $\mathcal{B}$ são ditos **conjuntos mensuráveis** do espaço.

Definição 2.11. A **σ-álgebra de Borel** (ou boreliana) de um espaço topológico é a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ gerada pela topologia τ, ou seja, é a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de τ. Os elementos de $\sigma(\mathcal{E})$ são ditos borelianos.

Espaços de medida

Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável.

Definição 2.12. Uma **medida** em $(X, \mathcal{B})$ é uma função $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- μ é σ-aditiva, ou seja, $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ para quaisquer $A_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dois-a-dois.

A tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é chamada **espaço de medida**.

Quando vale $\mu(x) < \infty$ dizemos que μ é uma medida finita e se $\mu(x) = 1$ dizemos que μ é uma **probabilidade**. Se μ é uma probabilidade, dizemos que $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um **espaço de probabilidade**.

Definição 2.13. Um espaço de medida é dito **completo** se todo subconjunto de um conjunto mensurável com medida nula também é mensurável.

Definição 2.14. Dados espaços mensuráveis $(X, \mathcal{B})$ e $(Y, \mathcal{C})$, dizemos que uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é **mensurável** se $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$, para todo $C \in \mathcal{C}$.

Medidas Invariantes

Definição 2.15. Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável. Dizemos que a medida μ é **invariante** por f se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

para todo conjunto mensurável $E \subset X$. Também podemos dizer que f preserva μ.

Intuitivamente a definição nos diz que a probabilidade de um ponto estar em um conjunto qualquer é igual à probabilidade de que a imagem desse ponto esteja nesse mesmo conjunto.

2.3 Tópicos de Teoria Ergódica

Definição 2.16. Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos com X e Y espaços métricos. Dizemos que a função $\pi : X \to Y$ é uma semiconjugação entre (X, f) e (Y, g) se é sobrejetica, contínua e satisfaz $\pi \circ f = g \circ \pi$. Caso π seja invertível e sua inversa seja contínua, dizemos que é uma conjugação.

Ergocidade

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação que preserva medida.

Definição 2.17. Um conjunto é dito invariante para f se

$$f^{-1}(A) = A, \ em\ \mu - quase\ todo\ ponto.$$

Definição 2.18. Uma medida μ que preserva a transformação f em um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é **ergódica** se, e somente se, para qualquer conjunto mensurável $A \subset \mathcal{B}$ tal que $f^{-1}(A) = A$ então $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Definição 2.19. O sistema (f, μ) é dito mixing se

$$\lim_{n \to \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

para A e B conjuntos mensuráveis.

Proposição 2.3. *Todo sistema mixing é ergódico.*

Temos uma versão topológica da noção de misturador, onde dado X espaço topológico, dizemos que um sistema dinâmico $f : X \longrightarrow X$ é **topologicamente misturador** se para um par de abertos U e V em X temos um inteiro $N = N(U, V)$ tal que

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset, \ para\ todo\ n \geq N.$$

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \{\bigcap_n P_n : P_n \in \mathcal{P}_n para\ cada\ n\}.$$

Entropia Topológica

Seja X um espaço topológico. Entendemos por cobertura aberta uma família α de abertos cuja união é todo X. Dadas duas coberturas abertas α e β, dizemos que α é *menos fina* que β, $\alpha \prec \beta$, se todo elemento de β está contido em algum elemento de α.

Dadas coberturas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ denotamos por $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ o refinamento, ou seja, a cobertura cujos elementos são as interseções $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ com $A_j \in \alpha_j$ para cada j. Note que $\alpha_j \prec \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$, $\forall\ j$.

Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua. Se α é uma cobertura aberta, então $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$ também é uma cobertura aberta.

Dada α uma cobertura aberta de X, por compacidade, admite uma subcobertura finita.

Chamamos de *entropia da cobertura* α o número

$$H_n(\alpha) = \log\ \#\{\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\alpha)\}$$

Observe que a sequência $\{H_n(\alpha)\}$ é subaditiva, sabemos então que o limite

$$h_{top}(f, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\ H_n(\alpha)$$

sempre existe e é chamado de *entropia de f relativa à cobertura α.*

Então, definimos a **entropia topológica** de f como sendo

$$h_{top}(f) = \sup\ \{h_{top}(f, \alpha) : \alpha\ cobertura\ aberta\ de\ X\}.$$

Observe que se β é subcobertura de α então $h_{top}(f, \alpha) \leq h_{top}(f, \beta)$. Portanto podemos restringir a definição às coberturas abertas finitas.

Teorema 2.1. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e f transformação contínua. Se $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência de cobertura abertas com diâmetro indo a zero, então*

$$h_{top}(f) = \lim_{n\to\infty} h_{top}(f, \alpha_n).$$

Alguns resultados

Teorema 2.2 (Princípio Variacional)**.** *Seja X espaço métrico compacto e $f : X \longrightarrow X$ transformação contínua. Então a entropia topológica $h_{top}(f)$ coincide com o supremo das entropias $h_\mu(f)$ da transformação f relativamente a todas as probabilidade invariantes.*

Sejam $f : X \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow Y$ transformações contínuas em espaços topológicos compactos X e Y.

Se existe um homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$ satisfazendo $h \circ f = g \circ h$, dizemos que as duas transformações são **topologicamente conjugadas**, e chamamos h de **conjugação topológica** entre f e g.

Proposição 2.4. *Se $f : X \longrightarrow X$ e $g : Y \longrightarrow Y$ são topologicamente conjugadas então*

$$h_{top}(f) = h_{top}(g).$$

Definição 2.20. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto X. Uma medida μ invariante é dita **medida de máxima entropia** para f se $h_\mu(f) = h_{top}(f)$.

Definição 2.21. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação contínua num espaço compacto. Chamaremos de **potencial** qualquer função contínua $A : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Capítulo 3

Generalização do Shift de Haydn

Em [6], Haydn propôs um espaço shift onde é possível construir mais de uma medida de máxima entropia. Nesse capítulo iremos propor uma generalização desse exemplo considerando o mesmo modelo construído agora com subshifts definidos a partir de uma matriz de adjacência. A ideia da construção é aglutinar dois subshifts de mesma entropia unidos por um símbolo neutro, que resultará em um subshift com a mesma entropia que os originais.

3.1 Generalização para shifts bilaterais com alfabetos finitos e com a mesma matriz de adjacência

Seja $\nu \geq 2$ um inteiro positivo e $\tau > 0$. Vamos construir um subshift sobre o conjunto de símbolos $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, 2\nu\}$.

Iremos nos referir aos símbolos $\{1, 2 \ldots, \nu\}$ como sendo os símbolos azuis e iremos denotá-los por $\mathcal{A}$. Da mesma forma, chamaremos $\{\nu + 1, \ldots, 2\nu\}$ de símbolos rosas e denotaremos por $\mathcal{R}$. Então $\mathcal{S} = \{0\} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{R}$. Além disso, seja P matriz de adjacência de um grafo irredutível, denotaremos $\Sigma_{\mathcal{A}} = X_P^{\mathcal{A}}$ o shift sobre $\mathcal{A}$ com matriz de adjacência P. Da mesma forma, chamaremos $\Sigma_{\mathcal{R}} = X_P^{\mathcal{R}}$ o shift sobre $\mathcal{R}$ com a mesma matriz de adjacência P.

O espaço shift $\Sigma \subset \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ será formado pela união de dois espaços shift monocromáticos $\Sigma_{\mathcal{A}}$ e $\Sigma_{\mathcal{R}}$ e iremos adicionar sequências bicolores da seguinte forma: uma sequência em Σ na qual uma palavra α de uma cor (azul ou rosa) é seguida por uma palavra β de outra cor (rosa ou azul) deve conter uma cadeia de zeros γ separando as palavras α e β. O tamanho $|\gamma|$ dessa cadeia de zeros deve ser no mínimo $\tau(a + b)$

onde $a = |\alpha|$ e $b = |\beta|$ são os comprimentos das palavras α e β.

Mais precisamente,

Definição 3.1. O espaço shift $\Sigma \subset \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ é definido da seguinte forma. Teremos $x \in \Sigma$ se:

i) $x \in \Sigma_{\mathcal{A}} \cup \Sigma_{\mathcal{R}}$, nesse caso chamaremos x um ponto monocromático;

ii) x pertencer a um bloco bicolor da forma

$$\dots 0 d_1 d_2 \dots d_{a-1} d_a 0^{\lambda} y_1 y_2 \dots y_{b-1} y_b 0 \dots$$

ou

$$\dots 0 y_1 y_2 \dots y_{a-1} y_a 0^{\lambda} d_1 d_2 \dots d_{b-1} d_b 0 \dots$$

onde $\lambda \geq \tau(a+b)$ (0^{λ} é uma cadeia de zeros de comprimento λ), $\tau > 0$ e $d_i \in \mathcal{A},\ y_i \in \mathcal{R}$.

Observe que Σ é de fato um subshift onde utilizaremos a topologia usual gerada pelos cilindros. Observe que, $\Sigma_{\mathcal{I}},\ \mathcal{I} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{R}\}$ é shift irredutível, já que a matriz P é irredutível. Então, pelo Teorema de Perron-Frobenius existe autovalor $\lambda_P > 0$ tal que $h_{top}(X_P^{\mathcal{I}}) = \log \lambda_P$, para $\mathcal{I} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{R}\}$.

Enunciamos então o seguinte resultado:

Lema 3.1. Se $\lambda_P \geq 2$ e $\tau \geq \left(\frac{\log 3\nu}{\log \lambda_P} - 1\right)$ então a entropia topológica do shift $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ é igual a $\log \lambda_P$.

Demonstração. Vamos encontrar uma cota inferior para a entropia topológica h_{top} de Σ. Observe que como Σ contém dois subshifts, $\Sigma_{\mathcal{A}}$ e $\Sigma_{\mathcal{R}}$, a entropia topológica de Σ deve ser pelo menos $\log \lambda_P$.

$$h_{top}(\Sigma) \geq h_{top}(\Sigma_{\mathcal{I}}) = \log \lambda_P.$$

Agora, vamos estimar o número de palavras de tamanho n restantes em Σ. Observe que para o subshift Σ temos menos palavras permitidas de tamanho n do que no full shift. Agora, observe que para o full shift temos dois casos para considerar:

i) Palavras monocromáticas que também podem conter zeros. De acordo com a definição, palavras dessa forma devem começar ou terminar com zeros. Então obtemos palavras azuis ou rosas, de tamanho $k = 0, \dots, n$ com pelo menos uma das pontas formada por zeros. E o número de palavras desse tipo pode ser estimado por

$$2\sum_{k=0}^{n}(n-k)\nu^k.$$

Obtemos então

$$2\sum_{k=0}^{n}(n-k)\nu^k \leq 2\sum_{k=0}^{n} n\nu^k \leq 2n\nu^n \sum_{k=0}^{n} \nu^{-k}$$

que apresenta uma taxa de crescimento exponencial $\log \nu$.

ii) Para estimar o número de palavras de tamanho n que contém símbolos das duas cores, observe que como qualquer palavra assim deve possuir no mínimo uma transição de azul para rosa, ou vice-versa, deve então conter também mais que $\left[n\frac{\tau}{\tau+1}\right]$ zeros, ou seja, no máximo $n' = \frac{n}{\tau+1}$ inteiro símbolos coloridos.

Os símbolos coloridos vêm em blocos monocromáticos de cores alternadas. Denote por $P_{k,l}$ o número de possibilidades em que podemos formar palavras com l símbolos em k blocos (separados pelo apropriado número de zeros), onde $k = 1, 2, \dots, l$. Encontramos que

$$P_{k,l} = \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \frac{(l-1)!}{(k-1)!\ (l-k)!}$$

que é o número de possibilidades de escolher o primeiro elemento de cada bloco, exceto o primeiro elemento da palavra.

O número de palavras de tamanho n em Σ que contém l símbolos coloridos arranjados em $k \leq l$ blocos monocromáticos de cores alternadas é $2P_{k,l}\nu^l$.

A distribuição de l símbolos coloridos em k blocos pode ser feita de $P_{k,l}$ diferentes modos, onde $1 \leq k \leq l \leq n'$. Isso nos dá $m = n-(\tau+1)l$ zeros para serem distribuídos em $k+1$ intervalos, ou seja, as $k-1$ lacunas entre os blocos de símbolos coloridos mais as duas extremidades da palavra. Existem

$$Q_{k,m} = \begin{pmatrix} m+k \\ k \end{pmatrix} = \frac{(m+k)!}{k!\ m!}$$

possibilidades. A fórmula de Stirling nos diz que

$$a! = \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a\left(1+\frac{c}{a}\right), onde\ c\ \ constante.$$

Então, teremos

$$
\begin{aligned}
\binom{a}{\frac{a}{2}} &= \frac{a!}{\left(\frac{a}{2}\right)!\ \left(\frac{a}{2}\right)!} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi a}\left(\dfrac{a}{e}\right)^{a}\left(1+\dfrac{c}{a}\right)}{\sqrt{2\pi\frac{a}{2}}\left(\dfrac{\frac{a}{2}}{e}\right)^{\frac{a}{2}}\left(1+\dfrac{c}{\frac{a}{2}}\right)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\frac{a}{2}}\cdot\frac{\left(\dfrac{a}{e}\right)^{a}}{\left(\dfrac{\frac{a}{2}}{e}\right)^{a}}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{c}{a}\right)}{\left(1+\dfrac{c}{\frac{a}{2}}\right)^{2}} \\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\left(\frac{a}{e}\cdot\frac{e}{\frac{a}{2}}\right)^{a}\cdot\frac{\frac{a+c}{a}}{\left(\frac{a+2c}{a}\right)^{2}} \\
&\leq c\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 2^{a}\cdot\frac{a}{a+c} \\
&\leq c_1\sqrt{a}\ 2^{a}
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$
\begin{aligned}
Q_{k,m} &= \binom{n-(\tau+1)l+k}{k} \\
&\leq \binom{n-(\tau+1)l+k}{\frac{1}{2}(n-(\tau+1)l+k)} \\
&\leq c_1 2^{n-(\tau+1)l+k}\sqrt{n-(\tau+1)l+k} \\
&\leq c_1 2^{n-(\tau+1)l+k}\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

Podemos então estimar o número total de faixas bicolores de tamanho n por

$$
\begin{aligned}
Q(n) &\leq 2\sum_{l=2}^{n'}\nu^{l}\sum_{k=2}^{l}\binom{l-1}{k-1}\binom{n-(\tau+1)l+k}{k} \\
&\leq 2\sum_{l=2}^{n'}\nu^{l}\sum_{k=2}^{l}c_1 2^{n-(\tau+1)l+k}\sqrt{n}\binom{l-1}{k-1} \\
&= 2c_1\sqrt{n}\sum_{l=2}^{n'}\nu^{l}\ 2^{n-(\tau+1)l}\sum_{k=2}^{l}2^{k}\binom{l-1}{k-1}
\end{aligned}
$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{l} 2^k \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} &= 2\sum_{k=2}^{l} 2^{k-1} \begin{pmatrix} l-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \\
&= 2\sum_{q=1}^{l-1} 2^q \begin{pmatrix} l-1 \\ q \end{pmatrix} \\
&\leq 2\sum_{q=0}^{l-1} \begin{pmatrix} l-1 \\ q \end{pmatrix} 2^q 1^{q-l+1} \\
&= 2\cdot(2+1)^{l-1} = 2\cdot 3^{l-1} \leq 3^l
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior, temos

$$\begin{aligned}
Q(n) &\leq 2c_1\sqrt{n}\sum_{l=2}^{n'} \nu^l \; 2^{n-(\tau+1)l} \; 3^l \\
&\leq 2c_1\sqrt{n}\sum_{l=2}^{n'} 2^n \left(3\nu 2^{-\tau-1}\right)^l \\
&\leq c_2\sqrt{n} \begin{cases} 2^n & se \; 3\nu 2^{-\tau-1} < 1 \\ 2^n (3\nu 2^{-\tau-1})^{\frac{n}{\tau+1}} & se \; 3\nu 2^{-\tau-1} \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Então, observe que

$$\begin{aligned}
\log Q(n) &\leq \log c_2\sqrt{n}2^n \\
&= \log c_2 + \log n^{\frac{1}{2}} + \log 2^n \\
&= \log c_2 + \frac{1}{2}\log n + n\log 2
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log Q(n) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log c_2 + \frac{1}{2n}\log n + \log 2\right) = \log 2$$

e

$$\begin{aligned}
\log Q(n) &\leq \log\left(c_2\sqrt{n}\; 2^n \left(3\nu 2^{-\tau-1}\right)^{\frac{n}{\tau+1}}\right) \\
&= \log c_2 + \log n^{\frac{1}{2}} + \log 2^n + \log\left(3\nu 2^{-\tau-1}\right)^{\frac{n}{\tau+1}} \\
&= \log c_2 + \frac{1}{2}\log n + n\log 2 + \frac{n}{\tau+1}\log 3\nu + \frac{n(-1-\tau)}{\tau+1}\log 2 \\
&= \log c_2 + \frac{1}{2}\log n + \frac{n}{\tau+1}\log 3\nu
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log Q(n) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log c_2 + \frac{1}{2n}\log n + \frac{\log 3\nu}{\tau+1}\right) = \frac{\log 3\nu}{\tau+1}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q(n)\leq \max\left(\log 2, \frac{\log 3\nu}{\tau+1}\right)$$

Então, considerando $\mathcal{B}_n$ o número de palavras permitidas de tamanho n em Σ, como a quantidade de palavras permitidas para o full shift é maior do que para Σ, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathcal{B}_n\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q(n)\leq \max\left(\log 2, \frac{\log 3\nu}{\tau+1}\right)$$

Portando, usando que $\lambda_P\geq 2$ e $\tau\geq\left(\frac{\log 3\nu}{\log\lambda_P}-1\right)$ obtemos

$$h_{top}(\Sigma)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathcal{B}_n\leq\log\lambda_P$$

Portanto,

$$h_{top}(\Sigma)=\log\lambda_P$$

□

Sendo λ_P o raio espectral de P, $(u_0,...,u_{k-1})$ é autovetor estritamente positivo a esquerda e $(v_0,...,v_{k-1})$ é autovetor estritamente positivo a direita com $\sum_{i=0}^{k-1}u_iv_i=1$ então obtemos o vetor probabilidade $(p_0,...,p_{k-1})$ e a matriz estocástica (b_{ij})

$$p_i=u_iv_i \;\; e \;\; b_{ij}=\frac{P_{ij}v_j}{\lambda_P v_i}.$$

Chamamos essa medida de Medida de Parry.

Teorema 3.1 (Walters)**.** *Se Σ é Cadeia de Markov topológica bilateral, onde P é matriz de adjacência irredutível, então a Medida de Parry é a única medida que atinge entropia máxima.*

Agora, podemos definir uma medida de Parry $\mu_{\mathcal{A}}$ suportada em $\mathcal{A}=\{1,2,...,\nu\}$ e outra medida de Parry $\mu_{\mathcal{R}}$ suportada em $\mathcal{R}=\{\nu+1,\nu+2,...,2\nu\}$. E observe que $\mu_{\mathcal{A}}$ e $\mu_{\mathcal{R}}$ são medidas diferentes mas ambas são medidas de máxima entropia para o subshift Σ.

Portanto, vemos que é possível generalizar o resultados proposto por Haydn através de subshiftts definidos a partir da mesma matriz de adjacência. Deixamos aqui algumas perguntas ainda em aberto: é possível adotar subshifts sosbre alfabetos com cardinalidade diferente? e com matrizes de adjacência diferentes?

Capítulo 4

O shift usual

Nesse capítulo vamos recordar alguns conceitos para o shift usual em alfabetos infinitos compactos. Vamos considerar o shift usual sobre o alfabeto $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$, depois discutiremos como o alfabeto $[0,1]$ pode ser substituído por um espaço métrico mais geral.

Lembremos que a aplicação $\sigma : X \to X$ conhecida como o sihft usual é definida por

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$$

A distância no espaço X é definida por

$$d(x,y) = \sum_{k \geq 1} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}$$

A topologia induzida por essa distância é equivalente com a topologia produto, onde os abertos são gerados pelos cilindros.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] \times \cdots$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e cada A_i é um aberto de $[0,1]$.

Lema 4.1. A aplicação σ é não expansiva.

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$ tome $x = (0,0,0,\ldots)$ e $y = (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \ldots)$, então $d(\sigma^n(x), \sigma^n(y)) = \varepsilon$ para todo $n \geq 0$, e $x \neq y$. $\square$

Lema 4.2. A aplicação σ é topologicamente transitiva.

Demonstração. Tome os abertos U e V. Sabemos que

$$U = U_1 \times \cdots \times U_j \times [0,1] \times \cdots \qquad \text{e} \qquad V = V_1 \times \cdots \times V_k \times [0,1] \times \cdots$$

Como $\sigma^{-1}(U) = [0,1] \times U_1 \times \cdots \times U_j \times [0,1] \times \cdots$, precisamos tomar $N(U,V) \geq k$ e então temos $\sigma^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N(U,V)$. □

Lema 4.3. A aplicação σ possui órbita densa.

Demonstração. De fato, como X é espaço métrico completo com base enumerável e σ é função contínua, então por [5], σ possui órbita densa. □

Agora, fixe uma função $f : [0,1] \to [0,1]$ comtínua. E considere o conjunto

$$X_f = \{(x, f(x), f^2(x), \ldots),\ x \in [0,1]\} \subset X$$

Podemos ver que esse conjunto é σ-invariante. Definindo a projeção $\pi\colon X_f \to [0,1]$, $\pi(x_1, x_2, \ldots) = x_1$ podemos ver que $f\pi = \pi\sigma$; em outras palavras, f e $\sigma_{|X_f}$ são semiconjugados, mostrando que $h_{top}(\sigma) \geq h_{top}(f)$. Como f é arbitrária, é fácil ver que $h_{top}(\sigma)$ não pode ser limitada.

Mais geralmente, seja $f : [0,1]^k \to [0,1]^k$ uma função, e considere

$$X_f = \{((x_1, x_2, \ldots, x_k), f(x_1, x_2, \ldots, x_k), f^2(x_1, x_2, \ldots, x_k), \ldots) :\ (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in [0,1]^k\}$$

Esse conjunto não é σ-invariante, mas claramente é σ^k-invariante. Considerando a projeção

$$\pi_k : X_f \to [0,1]^k \qquad \pi_k(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

então podemos ver que $f\pi_k = \pi_k\sigma^k$, logo, σ^k e f são semiconjugadas.

4.1 Algumas propriedades mensuráveis

Vamos considerar $\mathcal{B}(X)$ os borelianos de X, ou seja a σ-álgebra gerada pelos cilindros está definida. Agora considere uma medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{P}([0,1])$. A medida produto $m = \mu \times \mu \times \mu \times \cdots$ definida em $\mathcal{B}(X)$ é σ-invariante, podendo ser facilmente verificado para os cilindros, e então estendido para todo $\mathcal{B}(X)$, já que

$$\begin{aligned} & m(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] \times \cdots) \\ &\quad = \mu(A_1)\mu(A_2)\cdots\mu(A_n) \\ &\quad = m([0,1] \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] \times \cdots) \\ &\quad = m(\sigma^{-1}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times [0,1] \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] \times \cdots)) \end{aligned}$$

Lema 4.4. A medida m é mixing.

Demonstração. Sejam U e V cilindros,

$$U = U_1 \times \cdots \times U_j \times [0,1] \times \cdots \qquad e \qquad V = V_1 \times \cdots \times V_k \times [0,1] \times \cdots$$

Então, para n suficientemente grande, temos

$$\sigma^{-n}(U) \cap V = V_1 \times \cdots \times V_k \times [0,1] \times \cdots \times [0,1] \times U_1 \times \cdots \times U_j \times [0,1] \times \cdots$$

Logo,

$$m(\sigma^{-n}(U) \cap V) = \mu(V_1) \cdots \mu(U_j) = m(U)m(V)$$

Em particular,

$$\lim_{k \to \infty} m(\sigma^{-k}(U) \cap V) = m(U)m(V)$$

$\square$

Corolário 4.1. A medida m é ergódica.

Observe que a escolha de $\mu \in \mathcal{P}([0,1])$ foi completamente arbitrária, então podemos obter inúmeros exemplos de medidas ergódicas para o shift σ.

4.2 Representação de pontos de X

Um ponto em $x \in X$ pode ser representado por uma função descontínua $f : [0,1] \to [0,1]$ da seguinte forma: considerando os intervalos

$$I_1 = \left(\frac{1}{2^1}, 1\right], I_2 = \left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^1}\right], \ldots, I_k = \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right], \ldots$$

Dado $x \in X$, podemos definir a função $f_x = x_i$ no intervalo I_i para todo $i \geq 1$ e considerar $f_x(0) = 0$. Então, a distância entre x e y pode ser reescrita como

$$d(x,y) = \int_{[0,1]} |f_x(t) - f_y(t)| dt$$

4.3 Espaços métricos gerais

Se trocarmos $[0,1]$ por um espaço métrico compacto (M,d), podemos considerar o espaço $X = M^{\mathbb{N}}$ com a métrica

$$D(x,y) = \sum_{k \geq 1} \frac{d(x_k, y_k)}{2^k} \leq diam(M)$$

e considerar a aplicação shift da mesma forma que no caso anterior.

$$\sigma : X \to X \qquad \sigma(x_1, x_1, ...) = (x_2, x_3, ...)$$

Podemos então obter resultados semelhantes aos anteriores e as demonstrações serão feitas de maneira análoga às que foram feitas anteriormente.

Capítulo 5

O shift modificado

Vamos considerar (E, d) espaço métrico (possivelmente compacto) e uma aplicação contínua e sobrejetiva $T : E \to E$. Consideraremos a topologia usual gerada pelos cilindros. Definimos o espaço de sequências de E por $X = E^{\mathbb{N}}$, então existe uma aplicação shift usual,

$$\sigma : X \to X \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

Em [10], Muir e Urbanski introduziram um shift modificado que é definido por

$$\sigma_T : X \to X \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mapsto (T(x_2), x_3, x_4, \ldots)$$

5.1 Algumas propriedades

Observe primeiramente, que se considerarmos $T = Id : E \to E$ o shift modificado equivale ao shift usual, definido no capítulo anterior.

Considerando $T : E \to E$ contínua e sobrejetiva e um conjunto $\mathcal{E} \subset X$ definido por

$$\mathcal{E} = \{(x, x, T(x), T^2(x), T^3(x), \ldots) : x \in E\}$$

Esse espaço pode ser claramente identificado com o espaço métrico E. A dinâmica de σ_T em $\mathcal{E}$ é

$$\sigma_T(x, x, T(x), T^2(x), T^3(x), \ldots) = (T(x), T(x), T^2(x), T^3(x), \ldots)$$

Então o ponto correspondente a x é levado por σ_T no ponto correspondente a $T(x)$, e então a dinâmica de σ_T restrita a $\mathcal{E}$ é de fato equivalente à dinâmica de T; então a entropia topológica de T é um limite inferior para a entropia de σ_T.

Agora, vamos supor que T é uma bijeção, assim podemos então definir a aplicação

$$h : X \to X \qquad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (T^{-1}(x_1), x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

Essa aplicação é também uma bijeção. É fácil ver que

$$\sigma \circ h = h \circ \sigma_T$$

Se T é ainda um homeomorfismo h é também um homeomorfismo e então as aplicações σ e σ_T são conjugadas, possuindo a mesma entropia topológica. Nesse caso, também é possível mostrar que se μ é uma probabilidade invariante pela ação de σ então $\mu \circ h$ é uma probabilidade σ_T-invariante.

5.2 Relação entre σ e σ_T

Vamos considerar o espaço X, a aplicação $\sigma : X \to X$ o shift usual e $\sigma_T : X \to X$ o shift modificado.

Lema 5.1. Existe semi conjugação $H_T : X \to X$ entre σ e σ_T.

Demonstração. Considere a aplicação

$$H_T\colon X \to X \qquad (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (T(x_1), x_2, x_3, \ldots)$$

Então é claro que $\sigma_T = H_T \sigma$; também é fácil ver que $\sigma H_T = \sigma$ e então $\sigma_T^n = H_T \sigma^n$. Então temos

$$\sigma_T^{-1} = \sigma^{-1} H_T^{-1} \qquad \sigma^{-1} = H_T^{-1} \sigma^{-1}$$

Temos também que $\sigma_T H_T = \sigma_T$; então $\sigma_T H_T = H_T \sigma$ e então H_T é uma semi conjugação entre σ e σ_T. □

Dizemos que σ_T é um fator de σ e sabemos que

$$h_{top}(\sigma) \geq h_{top}(\sigma_T)$$

Lema 5.2. Uma medida de probabilidade μ sobre X é σ-invariante se, e somente se, $\mu_T = \mu \circ H_T^{-1}$ é σ_T-invariante.

Demonstração. De fato, considere A um aberto, então

$$\begin{aligned}\mu_T(\sigma_T^{-1}(A)) = \mu_T(\sigma^{-1} H_T^{-1}(A)) &= \mu(H_T^{-1} \sigma^{-1} H_T^{-1}(A)) \\ &= \mu(\sigma^{-1} H_T^{-1}(A)) = \mu(H_T^{-1}(A) = \mu_T(A)\end{aligned}$$

Da mesma forma, se μ_T é probabilidade σ_T-invariante então a medida $\mu = \mu_T H_T$ é σ-invariante.

$$\mu(\sigma^{-1}(A)) = \mu_T(H_T \sigma^{-1}(A)) = \mu_T(\sigma_T^{-1} H_T(A)) = \mu_T(H_T(A)) = \mu(A)$$

$\square$

Lema 5.3. Considere um potencial $V : X \to \mathbb{R}$ e $V_T = V \circ H_T$. Então o limite, se existir, das somas de Birkhoff para σ e σ_T são iguais.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V \circ \sigma_T^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V_T \circ \sigma^k$$

Demonstração. Considere n termos da soma de Birkhoff para σ_T,

$$\frac{1}{n}[V(x_1, x_2, \ldots) + V(T(x_2), x_3, \ldots) + \cdots + V(T(x_n), x_{n+1}, \ldots)] =$$

$$\frac{1}{n}[V(x) + V(\sigma_T(x)) + \cdots + V(\sigma_T^{n-1}(x))]$$

Considere o potencial $V_T = V \circ H_T$ e os n termos da soma de Birkhoff para σ,

$$\frac{1}{n}[V \circ H_T(x) + V \circ H_T(\sigma(x)) + \cdots + V \circ H_T \sigma^{n-1}(x)] =$$

$$\frac{1}{n}[V \circ H_T(x) + V(\sigma_T(x)) + \cdots + V(\sigma_T^{n-1}(x))]$$

Comparando as somas podemos ver que somente os primeiros termos são diferentes. Então ambas possuem o mesmo limite quando n vai para infinito, se o limite existir.

$\square$

5.3 Variações do shift modificado

Podemos definir agora outro sistema dinâmico $\sigma_{T,T} : X \to X$ da seguinte forma:

$$\sigma_{T,T}(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (T(x_2), T(x_3), x_4, x_5, \ldots)$$

Considere a aplicação $H_{T,T} : X \to X$ dada por

$$H_{T,T}(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (T(x_1), T(x_2), x_3, x_4, \ldots)$$

Então temos que $\sigma_{T,T} = H_{T,T}\sigma$.

Por outro lado, observe que

$$
\begin{aligned}
\sigma_{T,T} H_{T,T}(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) &= \sigma_{T,T}(T(x_1), T(x_2), x_3, x_4, \ldots) \\
&= (T^2(x_2), T(x_3), x_4, x_5, \ldots) \\
&= H_{T,T}(T(x_2), x_3, x_4, x_4, \ldots) \\
&= H_{T,T}\sigma_T(x_1, x_2, x_3, \ldots)
\end{aligned}
$$

e então temos $\sigma_{T,T} H_{T,T} = H_{T,T}\sigma_T$, mostrando que $\sigma_{T,T}$ e σ_T são semiconjugadas. Logo $\sigma_{T,T}$ é um fator de σ_T e

$$
h_{top}(\sigma_{T,T}) \leq h_{top}(\sigma_T) \leq h_{top}(\sigma).
$$

Lema 5.4. As aplicações $\sigma_{T,T}$ e σ são semi conjugadas, e vale

$$
\sigma_{T,T} H_{T,T} H_T = H_{T,T} H_T \sigma
$$

Demonstração. De fato,

$$
\begin{aligned}
H_{T,T} H_T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) &= H_{T,T}(T(x_1), x_2, x_3, x_4, \ldots) \\
&= (T^2(x_1), T(x_2), x_3, x_4, \ldots)
\end{aligned}
$$

e então

$$
\begin{aligned}
\sigma_{T,T} H_{T,T} H_T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) &= \sigma_{T,T}(T^2(x_1), T(x_2), x_3, x_4, \ldots) \\
&= (T^2(x_2), T(x_3), x_4, x_4, \ldots) \\
&= H_{T,T} H_T(x_2, x_3, x_4, \ldots) \\
&= H_{T,T} H_T \sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots)
\end{aligned}
$$

□

Seguindo essa mesma ideia, podemos definir uma sequência de aplicações $\sigma_{T,T,T}$, $\sigma_{T,T,T,T}, \ldots$. Vamos denotar essas aplicações como sendo $S_2 = \sigma_{T,T}, S_3 = \sigma_{T,T,T}$ e assim por diante. Também podemos definir o produto dinâmico

$$
P(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (T(x_1), T(x_2), T(x_3), \ldots)
$$

e

$$
F(x_1, x_2, \ldots) = (T(x_2), T(x_3), \ldots) = \sigma P = P\sigma
$$

Então, P e F comutam com o shift; e como são contínuas são autômatos celulares. É fácil ver que $S_n \to F$ com $n \to \infty$.

5.4 O shift modificado bilateral

Vamos considerar agora o caso do shift bilateral, onde o espaço considerado é $Y = E^{\mathbb{Z}}$, onde (E, d) é um espaço métrico. Esse espaço é equipado com a distância

$$dist(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{d(x_i - y_i)}{2^{|i|}}$$

Denotamos por σ o shift bilateral usual

$$\sigma(\ldots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, \ldots) = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0; x_1, x_2, \ldots).$$

Note que para uma bijeção contínua, e fixando uma aplicação $T : E \to E$ podemos definir a aplicação

$$H_T : Y \to Y \qquad (\ldots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\ldots, x_{-2}, x_{-1}; T(x_0), x_1, x_2, \ldots)$$

Portanto, podemos definir o sistema dinâmico $\sigma_T : Y \to Y$ como sendo $\sigma_T = H_T \circ \sigma$; logo

$$\sigma_T((\ldots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, x_2, \ldots)) = (\ldots, x_{-1}, x_0; T(x_1), x_2, \ldots)$$

Lema 5.5. σ e σ_T são semi conjugadas.

Demonstração. Considerando a função

$$h(\ldots, x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, x_2, \ldots) = (\ldots, T(x_{-2}), T(x_{-1}); T(x_0), x_1, x_2, \ldots)$$

É fácil vermos que $\sigma_T h = h\sigma$, e então σ_T e σ são semi conjugadas. □

Como é σ_T é uma bijeção, podemos definir sua inversa como sendo

$$\sigma_T^{-1}(\ldots, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \ldots) = (\ldots, a_{-3}, a_{-2}; a_{-1}, T^{-1}(a_0), a_1, \ldots)$$

E, iterando, obtemos que

$$\sigma_T^{-n}(\ldots, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \ldots) = (\ldots, a_{-n-1}; a_{-n}, T^{-1}(x_{-n+1}), \ldots, T^{-1}(a_0), a_1, a_2, \ldots)$$

5.4.1 Medidas Invariantes

Lema 5.6. Vamos considerar μ uma medida de probabilidade T-invariante em E; então a medida produto $m = \ldots \times \mu \times \mu \times \ldots$ é σ_T invariante.

Demonstração. De fato, considere o cilindro

$$\cdots \times A_{-2} \times A_{-1} \times ; A_0 \times A_1 \times \cdots$$

Temos que

$$\sigma_T(\cdots \times A_{-2} \times A_{-1} \times ; A_0 \times A_1 \times \cdots) = (\cdots \times A_{-2} \times ; A_{-1} \times T^{-1}(A_0) \times A_1 \times \cdots)$$

A medida de ambos cilindros é $\cdots \mu(A_{-2})\mu(A_{-1})\mu(A_0)\mu(A_1)\cdots$, já que $\mu(T^{-1}(A_0)) = \mu(A_0)$. □

5.4.2 Operador de Transferência

O operador de transferência $L_V : C(E^{\mathbb{N}}) \to C(E^{\mathbb{N}})$ está definido no conjuntos das funções contínuas de $E^{\mathbb{N}}$, e $V, \varphi : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$. E, como cada ponto possui mais de uma pré-imagem por σ_T, podemos defini-lo do modo usual.

$$L_V \varphi(x) = \sum_{y \in \sigma_T^{-1}(x)} e^{V(y)} \varphi(y)$$

5.5 Outras variações

Vamos considerar uma família de aplicações $\mathcal{T} = \{T_x\}_{x \in E}$ onde $T_x : E \to E$ para qualquer $x \in E$. O sistema dinâmico considerado agora é $\sigma_{\mathcal{T}} : X \to X$ definido como sendo

$$\sigma_{\mathcal{T}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (T_{x_1}(x_2), x_3, x_4, x_5, \ldots)$$

Então,

$$\sigma_{\mathcal{T}^{-1}}(z_1, z_2, z_3, \ldots) = \bigcup_{x \in E} (x, T_x^{-1}(z_1), z_2, z_3, \ldots)$$

Exemplo 5.1. Considere $E = \{0, 1\}$, $T_0(x) = 0$ e $T_1(x) = x$. Então,

$$\sigma_{\mathcal{T}}(0, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (0, x_3, x_4, \ldots)$$

$$\sigma_{\mathcal{T}}(1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

Nesse caso, 1^∞ é um ponto fixo, todas as outras órbitas vão para o cilindro $[0]$ onde a dinâmica é igual à do shift usual.

Exemplo 5.2. Considere $E = \{0, 1, 2\}$ e as aplicações $T_0(x) = T_1(x) = 2$, $T_2(x) = (x+1) mod(3)$. Então

$$\sigma_{\mathcal{T}}(0, x_2, x_3, \ldots) = (2, x_3, x_4, \ldots)$$

$$\sigma_{\mathcal{T}}(1, x_2, x_3, \ldots) = (2, x_3, x_4, \ldots)$$

$$\sigma_{\mathcal{T}}(2, x_2, x_3, \ldots) = (T_2(x_2), x_3, x_4, \ldots)$$

Exemplo 5.3. Considere $E = [0, 1]$ e as aplicações $T_x(y) = 4xy(1 - y)$ (digamos, a família quadrática em y cujos parâmetros são $4x \in [0, 4]$). Então

$$\sigma_{\mathcal{T}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (T_{x_1}(x_2), x_3, x_4, \ldots) = (4x_1x_2(1 - x_2), x_3, x_4, \ldots)$$

Capítulo 6

Relação entre as Condições de Dini e de Walters

Em [10], Muir e Urbanski utilizaram a hipótese de os potenciais satisfazerem a condição de Dini para obterem seus resultados, condição essa muito utilizadas nos resultados da área de análise matemática. Já em [9], Lopes et al. utilizaram a hipótese de o potencial satisfazer a condição de Walters, condição mais utilizada em resultados da área de sistemas dinâmicos. Ao nos perguntarmos de existiria algum tipo de relação entre essas duas condições, conseguimos obter que todo potencial que satisfaz a condição de Dini também satisfaz a condição de Walters. Mas a recíproca não é verdadeira como mostramos no contra-exemplo abaixo.

Seja (E, d) espaço métrico compacto e considere $X = E^{\mathbb{N}}$.

Definição 6.1. Dizemos que o potencial $\phi : X \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Dini se

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(\phi, 2^{-n}) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ 0 < q < 1,\ \sum_{n=0}^{\infty} m(\phi, q^{-n}) < \infty$$

onde $m(\phi, t) = \sup\{|\phi(x) - \phi(y)| :\ d_X(x, y) \leq t\}$ é o módulo de continuidade e $d_X(x, y) = \sum_{i \geq 1} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}$ a métrica de X.

Definição 6.2. Dizemos que o potencial $\phi : X \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Walters se

$$\lim_{d_X(x,y) \to 0} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\sup_{a \in E^n} \left| S_n\phi(ax) - S_n\phi(ay) \right| \right] \right\} = 0$$

onde $S_n\phi(z) = \sum_{k=0}^{n} \phi \circ \sigma^k(z)$.

Lema 6.1. Se $\phi : X \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Dini, então satisfaz a condição de Walters.

Demonstração. Supondo que ϕ satisfaz Dini, então pelo Lema 2.1 de [Urbanski e Muir], $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\phi, tq^n)$ define uma função decrescente com $h(t) \to 0$ quando $t \to 0$. Agora, observe que

$$dist(a_1a_2...a_nx_1x_2..., a_1a_2...a_ny_1y_2...) = \frac{1}{2^n}dist(x,y)$$

$$dist(a_2...a_nx_1x_2..., a_2...a_ny_1y_2...) = \frac{1}{2^{n-1}}dist(x,y)$$

$$\vdots$$

$$dist(a_nx_1x_2..., a_ny_1y_2...) = \frac{1}{2}dist(x,y)$$

Então, podemos reescrever

$$\big|S_n\phi(ax) - S_n\phi(ay)\big|$$

$$\leq |\phi(a_1...a_nx_1...)-\phi(a_1...a_ny_1...)|+|\phi(a_2...a_nx_1...)-\phi(a_2...a_ny_1...)|+\ldots+|\phi(a_nx_1...)-\phi(a_ny_1...)|$$

$$\leq m(\phi, 2^{-n}d_X(x,y)) + \ldots + m(\phi, 2^{-1}d_X(x,y))$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} m(\phi, 2^{-n}d_X(x,y))$$

Então, tomando o supremo com relação a n e fazendo $dist(x,y) \to 0$ obtemos pelo resultado citado acima que

$$\lim_{dist(x,y)\to 0} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\sup_{a\in E^n} \big|S_n\phi(ax) - S_n\phi(ay)\big| \right] \right\} = 0$$

Ou seja, ϕ satisfaz a condição de Walters. □

Lema 6.2. Existe potencial contínuo que satisfaz a condição de Walters mas não satisfaz a condição de Dini.

Demonstração. Vamos fixar o alfabeto como sendo $E = [0,1]$. Vamos considerar o potencial

$$\Phi(x) = \sum_{k\geq 1} A_kx_k \quad com\ A_1 = 1, A_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)^{\alpha}} \quad k \geq 2, \quad \text{para algum } \alpha \in (1,2) \text{ fixo}$$

Sabemos que $\sum_{k\geq 1} |A_k| < \infty$ assegura que Φ está bem definida e é contínua, pelo teste M de Weierstrass. Observe que Φ satisfaz a condição de Walters. De fato, para investigar a condição de Walters precisamos estimar a soma de Birkhoff. Vemos que

$$\Phi(a_1a_2\ldots a_nx_1x_2\ldots) = A_1a_1 + A_2a_2 + \ldots + A_na_n + A_{n+1}x_1 + A_{n+2}x_2 + \ldots$$

$$\Phi(\sigma(a_1a_2\ldots a_nx_1x_2\ldots)) = \Phi(a_2a_3\ldots) = A_1a_2+A_2a_3+\ldots+A_{n-1}a_n+A_nx_1+A_{n+1}x_2+\ldots$$

$$\vdots$$

$$\Phi(\sigma^{n-1}(a_1\ldots a_nx_1\ldots)) = \Phi(a_nx_1x_2\ldots) = A_1a_n + A_2x_1 + \ldots$$

Então

$$\begin{aligned}
&|S_n(\Phi)(a_1a_2\ldots a_nx_1x_2\ldots) - S_n(\Phi)(a_1a_2\ldots a_ny_1y_2\ldots)| = \\
&\quad = |A_{n+1}(x_1-y_1) + A_{n+2}(x_2+y_2) + A_{n+3}(x_3-y_3) + \ldots + \\
&\qquad + A_n(x_1-y_1) + A_{n+1}(x_2-y_2) + A_{n+2}(x_3-y_3) + \ldots + \\
&\qquad + A_2(x_1-y_1) + A_3(x_2-y_2) + A_4(x_3-y_3) + \ldots| \\
&\quad = |(A_2+A_3+\ldots+A_{n+1})(x_1-y_1) + (A_3+\ldots+A_{n+2})(x_2-y_2)+\ldots| \\
&\quad = \left|\sum_{i\geq 1}\left[\sum_{k=i+1}^{i+n} A_k\right](x_i-y_i)\right| \\
&\quad \leq \sum_{i\geq 1}\left(\left|\left[\sum_{k=i+1}^{i+n} A_k\right]\right| |x_i-y_i|\right).
\end{aligned}$$

Como para qualquer k temos $|A_k| > |A_{k+1}|$, temos então que o valor absoluto de cada soma parcial é limitada pelo valor absoluto do primeiro termo.

$$\left|\left[\sum_{k=i+1}^{i+n} A_k\right]\right| \leq |A_{i+1}| = \frac{1}{i^\alpha}.$$

Então

$$|S_n(\Phi)(a_1a_2\ldots a_nx_1x_2\ldots) - S_n(\Phi)(a_1a_2\ldots a_ny_1y_2\ldots)| \leq \sum_{i\geq 1}\frac{|x_i-y_i|}{i^\alpha}.$$

E essa expressão é claramente limitada por $\sum_{i\geq 1}\frac{1}{i^\alpha} < \infty$ e vai para zero quando $dist(x,y)$ vai para zero. De fato, seja $d(x,y) \leq 2^{-N}$; isso implica que $|x_i - y_i| \leq \frac{2^i}{2^N}$ para todo $i = 1,\ldots,\frac{N}{2}$ e consideramos $|x_i - y_i| \leq 1$. Então temos que o seguinte limitante para a soma acima

$$\sum_{i\geq 1}\frac{|x_i-y_i|}{i^\alpha} \leq \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\frac{2^i}{2^N} + \sum_{i>\frac{N}{2}}\frac{1}{i^\alpha} \leq \frac{1}{2^{\frac{N}{2}-1}} + \sum_{i>\frac{N}{2}}\frac{1}{i^\alpha}.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$ basta tomar N grande o suficiente tal que

$$\frac{1}{2^{\frac{N}{2}-1}} < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{i>\frac{N}{2}}\frac{1}{i^\alpha} < \frac{\epsilon}{2}.$$

.

Agora, observe que Φ definida dessa forma não satisfaz a condição de Dini. De fato, calculando o módulo de continuidade temos $m(\Phi, 2^{-n}) \geq |A_{n+1}| + |A_{n+2}| + |A_{n+3}| + \ldots$ e então

$$\begin{aligned}
m(\Phi, 2^{-1}) + m(\Phi, 2^{-2}) + m(\Phi, 2^{-3}) + \ldots &\geq |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + \ldots + \\
&\quad |A_3| + |A_4| + |A_5| + \ldots + |A_4| + |A_5| + \ldots \\
&= |A_2| + 2|A_3| + 3|A_4| + 4|A_5| + \ldots \\
&= \sum_{k \geq 2} (k-1)|A_k| \\
&= \sum_{k \geq 2} (k-1)\frac{1}{(k-1)^\alpha} = \infty
\end{aligned}$$

.

□

Capítulo 7

Cohomolgia

Vamos considerar nessa seção o espaço $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ e o shift usual $\sigma : X \to X$.

Definição 7.1. Sejam $\phi_1, \phi_2 \in C(X)$ funções contínuas. Dizemos que ϕ_1 é cohomologa a ϕ_2 se elas diferem por um cobordo, ou seja, se existe $h \in C(X)$ tal que $\phi_1 - \phi_2 = h - h \circ \sigma$.

Dado $\nu > 0$, seja $\Phi : [0,1]^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ ν-Hölder, ou seja, existe uma constante positiva $c(\Phi)$ tal que

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq c(\Phi) dist(x,y)^{\nu}$$

Queremos definir um potencial ϕ que também será Hölder, mas talvez com um expoente diferente, e cohomologo a Φ e que depende somente das coordenadas não negativas de x, ou seja, depende somente de $(x_0, x_1, \ldots)$.

A ideia do teorema seguinte é adaptar um resultado proposto por Bowen em [3].

Teorema 7.1. *Se Φ é potencial ν-Hölder, então Φ é cohomologo a algum potencial $\frac{\nu}{2}$-Hölder ϕ com $\phi(x) = \phi(y)$ sempre que $x_i = y_i$, para todo $i \geq 0$.*

Demonstração. Vamos considerar $x = (..., x_{-2}, x_{-1}; x_0, x_1, ...)$ e $\bar{x} = (..., 0, 0; x_0, x_1, x_2, ...)$. Agora defina

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\Phi(\sigma^j(x)) - \Phi(\sigma^j(\bar{x})) \right)$$

Podemos ver que

$$dist(\sigma^j(x), \sigma^j(\bar{x})) \leq \frac{1}{2^j} \qquad \text{para qualquer } j \geq 0$$

Observe que a desigualdade inversa, possivelmente com uma constante, não é possível já que podemos facilmente dar exemplos de pontos tais que $dist(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ mas

$dist(x,y) > 0$. Também podemos ver facilmente, que para qualquer $j \geq 0$

$$dist(\sigma^j(x), \sigma^j(y)) \leq 2^j dist(x,y)$$

E

$$dist(\bar{x}, \bar{y}) \leq dist(x,y)$$

Como Φ is ν-Hölder,

$$\begin{aligned} |\Phi(\sigma^j(x)) - \Phi(\sigma^j(\bar{x}))| &\leq c(\Phi) dist(\sigma^j(x), \sigma^j(\bar{x}))^\nu \\ &\leq c(\Phi) \frac{1}{(2^\nu)^j} \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=0}^{\infty} c(\Phi) \frac{1}{2^{j\nu}} < \infty$, u está bem definida e é contínua. Note que u é Hölder. De fato, tome qualquer $x, y \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$, então fixe n onde $dist(x,y) = \frac{1}{2^n}$. Então,

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| = &\left| \sum_{j=0}^{\infty} \left(\Phi(\sigma^j(x)) - \Phi(\sigma^j(\bar{x})) \right) - \sum_{j=0}^{\infty} \left(\Phi(\sigma^j(y)) - \Phi(\sigma^j(\bar{y})) \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} |\Phi(\sigma^j(x)) - \Phi(\sigma^j(y))| + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} |\Phi(\sigma^j(\bar{x})) - \Phi(\sigma^j(\bar{y}))| \\ &\quad + \sum_{j \geq \frac{n}{2}} |\Phi(\sigma^j(x)) - \Phi(\sigma^j(\bar{x}))| + \sum_{j \geq \frac{n}{2}} |\Phi(\sigma^j(y)) - \Phi(\sigma^j(\bar{y}))| \end{aligned}$$

Separadamente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} |\Phi(\sigma^j(x)) - \Phi(\sigma^j(y))| &\leq \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} c(\Phi) dist(\sigma^j(x), \sigma^j(y))^\nu \\ &\leq c(\Phi) \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \left(2^j dist(x,y) \right)^\nu \\ &\leq c(\Phi) dist(x,y)^\nu \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} (2^\nu)^j \\ &\leq c(\Phi) dist(x,y)^\nu \frac{2^{\nu(\frac{n}{2}+1)} - 1}{2^\nu - 1} \\ &\leq \frac{2^\nu c(\Phi)}{2^\nu - 1} \left(dist(x,y) 2^{\frac{n}{2}} \right)^\nu \\ &\leq \frac{2^\nu c(\Phi)}{2^\nu - 1} \left(\frac{1}{2^n} 2^{\frac{n}{2}} \right)^\nu \\ &\leq \frac{2^\nu c(\Phi)}{2^\nu - 1} \left(\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \right)^\nu \\ &\leq \frac{2^\nu c(\Phi)}{2^\nu - 1} dist(x,y)^{\frac{\nu}{2}}. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} |\Phi(\sigma^j(\bar{x})) - \Phi(\sigma^j(\bar{y}))| &\leq \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} c(\Phi) dist(\sigma^j(\bar{x}), \sigma^j(\bar{y}))^\nu \\ &\leq c(\Phi) \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} \left(2^j dist(\bar{x}, \bar{y})\right)^\nu \\ &\leq c(\Phi) dist(x,y)^\nu \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}} (2^\nu)^j \\ &\leq \frac{2^\nu c(\Phi)}{2^\nu - 1} dist(x,y)^{\frac{\nu}{2}},\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\sum_{j \geq \frac{n}{2}} |\Phi(\sigma^j(x)) - \Phi(\sigma^j(\bar{x}))| &\leq \sum_{j \geq \frac{n}{2}} c(\Phi) \frac{1}{2^{j\nu}} \\ &\leq c(\Phi) \sum_{j \geq \frac{n}{2}} \frac{1}{2^{j\nu}} \\ &\leq c(\Phi) \frac{1}{(2^\nu)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^\nu}} \\ &\leq \frac{2^\nu c(\Phi)}{2^\nu - 1} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{\nu}{2}} \\ &\leq \frac{2^\nu c(\Phi)}{2^\nu - 1} dist(x,y)^{\frac{\nu}{2}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|u(x) - u(y)| \leq 4 \frac{2^\nu c(\Phi)}{2^\nu - 1} dist(x,y)^{\frac{\nu}{2}}$$

Ou seja, u é $\frac{\nu}{2}$-Hölder. Então $\phi = \Phi - u + u \circ \sigma$ também é Hölder. Mais ainda,

$$\begin{aligned}\phi &= \Phi(x) - \sum_{j=0}^{\infty} \Phi(\sigma^j(x)) - \Phi(\sigma^j(\bar{x})) + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi(\sigma^{j+1}(x)) - \Phi(\sigma^j(\overline{\sigma(x)}))) \\ &= \Phi(x) - \sum_{j=0}^{\infty} \Phi(\sigma^{j+1}(x)) - \sum_{j=-1}^{\infty} \Phi(\sigma^{j+1}(x) + \sum_{j=-1}^{\infty} \Phi(\sigma^{j+1}(\bar{x})) - \sum_{j=0}^{\infty} \Phi(\sigma^j(\overline{\sigma(x)})) \\ &= \Phi(\bar{x}) + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi(\sigma^{j+1}(\bar{x})) - \Phi(\sigma^j(\overline{\sigma(x)}))\end{aligned}$$

Isto é, $\phi(x)$ depende somente de $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, como gostaríamos. □

Observação 7.1. Se considerarmos um espaço métrico compacto mais geral $X = M^{\mathbb{N}}$, como feito em 4.3, podemos obter esse resultado de forma análoga.

Capítulo 8

Shifts em $\mathbb{Z}^2$

Faremos nesse capítulo um resultado análogo ao do capítulo anterior mas agora para shifts em $\mathbb{Z}^2$. A ideia é generalizar o resultado apresentado por Artuso em [1].

Antes, considere a família de aplicações $\sigma^{(m,n)}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, definida sobre o conjunto $X = [0,1]^{\mathbb{Z}^2}$; poderíamos também considerar um espaço métrico mais geral. As aplicações são definidas da seguinte forma

$$(\sigma^{(m,n)}(x))_{(i,j)} = x_{(i+m,j+n)}$$

Essas aplicações correspondem a ação de $\mathbb{Z}^2$ sobre X gerada pelas aplicações $\sigma_1 = \sigma^{e_1} = \sigma^{(1,0)}$ e $\sigma_2 = \sigma^{e_2} = \sigma^{(0,1)}$. Observe que $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

Definimos a métrica em X da seguinte forma: tome $|(i,j)| := \max\{|i|,|j|\}$ e fixe algum $\theta \in (0,1)$, então definimos

$$d_\theta(x,y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |x_k - y_k| \theta^{|k|}$$

Observe que a cardinalidade das bolas $B_k = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : |(i,j)| = k\}$ é $8k$ para qualquer $k \geq 1$ e B_0 possui cardinalidade 1. Também observe que

$$\sum_{k \geq 0} \theta^k = \frac{1}{1-\theta} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k \geq 1} k\theta^k = \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

Então, o diâmetro de X, com respeito a distância acima

$$1 + \sum_{k \geq 1} 8k\theta^k = 1 + 8\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

Se $d_\theta(x,y) \leq \varepsilon$ então podemos dizer que

$$|x_{(0,0)} - y_{(0,0)}| \leq \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |x_k - y_k| \leq \varepsilon\theta^{-|k|}$$

Claramente, se $|k|$ é suficientemente grande então $\varepsilon\theta^{-|k|} > 1$. Isso nos mostra que a distância d é compatível com a topologia produto, cujos abertos são gerados pelos cilindros

$$\prod_{i \in \mathbb{Z}^2} A_i$$

onde cada A_i é um aberto de $[0,1]$ e , no máximo, um número finito de A_i são distintos de $[0,1]$.

Também é possível mostrar que as aplicações σ_1 e σ_2 são contínuas com respeito a d_θ.

Lema 8.1. σ_1 e σ_2 são contínuas para d_θ.

Demonstração. Primeiro, observe que para qualquer par $(i_1, i_2) \in \mathbb{Z}$ temos que

$$|(i_1, i_2)| - 1 \leq |(i_1 + 1, i_2)| \leq |(i_1, i_2)| + 1$$

Agora, considere σ_1 e então temos que

$$\begin{aligned}
d_\theta(\sigma_1(x), \sigma_1(y)) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |\sigma_1(x)_{(i_1,i_2)} - \sigma_1(y)_{(i_1,i_2)}| \theta^{|i|} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_{(i_1+1,i_2)} - y_{(i_1+1,i_2)}| \theta^{|(i_1,i_2)|} \\
&\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_{(i_1+1,i_2)} - y_{(i_1+1,i_2)}| \theta^{|(i_1+1,i_2)|-1} \\
&= \theta^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_{(i_1+1,i_2)} - y_{(i_1+1,i_2)}| \theta^{|(i_1+1,i_2)|} \\
&= \theta^{-1} d_\theta(x, y)
\end{aligned}$$

Para σ_2 o raciocínio é análogo e é deixado para o leitor. □

Dessa forma, podemos mostrar que

$$d_\theta(\sigma_1^j(x), \sigma_1^j(y)) \leq \left(\frac{1}{\theta}\right)^j d_\theta(x, y) \qquad \textit{para } j \geq 0$$

8.1 A métrica d_θ

Vamos considerar $0 < \theta < \psi < 1$. Então

$$d_\theta(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_i - y_i| \theta^{|i|} \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_i - y_i| \psi^{|i|} = d_\psi(x, y)$$

ou seja, a convergência na métrica d_ψ implica na convergência na métrica d_θ.

Lema 8.2. As métricas d_θ e d_ψ não são equivalentes, mas definem a mesma noção de convergência.

Demonstração. Considere $p \in (1, \infty)$ tal que

$$p > \frac{\log \theta}{\log \psi}$$

e $q \in (1, \infty)$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

.

Lembremos a desigualdade de Hölder,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k b_k \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Podemos encontrar $\omega < 1$ tal que $\psi = \theta^{\frac{1}{p}} \omega^{\frac{1}{q}}$. Então

$$\begin{aligned}
d_\psi(x, y) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_i - y_i| \psi^{|i|} \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_i - y_i| \left(\theta^{\frac{1}{p}} \omega^{\frac{1}{q}} \right)^{|i|} \\
&\leq \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_i - y_i|^p \theta^{|i|} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \omega^{|i|} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^2} |x_i - y_i| \theta^{|i|} \right)^{\frac{1}{p}} C(\omega) \\
&\leq C(\omega) d_\theta(x, y)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

onde

$$C(\omega) = \left(1 + 8 \frac{\omega}{(1 - \omega)^2} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{e} \quad \omega = \psi^q \theta^{-\frac{q}{p}}$$

Portanto,

$$d_\theta(x, y) \leq d_\psi(x, y) \leq C(\omega) d_\theta(x, y)^{\frac{1}{p}}$$

ou seja, as métricas d_θ e d_ψ não são equivalentes, mas definem a mesma noção de convergência. $\square$

8.2 Cohomologia

Vamos agora definir a aplicação $\pi_1 : X \to X$ tal que

$$(\pi_1(x))_{(i_1,i_2)} = \begin{cases} x_{(i_1,i_2)} & se\ i_1 \geq 0 \\ 0 & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Observe que valem as seguintes desigualdades

$$d(x, \pi_1(x)) \leq \sum_{k\geq 1}(4k-1)\theta^k$$

$$d(\sigma_1(x), \sigma_1(\pi_1(x)) \leq \sum_{k\geq 2}(4k-1-2)\theta^k$$

e, mais geralmente, temos

$$d(\sigma_1^l(x), \sigma_1^l(\pi_1(x)) \leq \sum_{k\geq l+1}(4k-1-2l)\theta^k \qquad \text{para todo } l \geq 0$$

Então

$$\begin{aligned}\sum_{l\geq 0} d(\sigma_1^l(x), \sigma_1^l(\pi_1(x))) &\leq \sum_{l\geq 0}\sum_{j\geq 1}(4(j+l)-1-2l)\theta^{j+l} \\ &= \sum_{l\geq 0}\theta^l\left(4\sum_{j\geq 1} j\theta^j + (2l-1)\sum_{j\geq 1}\theta^j\right) \\ &= \sum_{l\geq 0}\theta^l\left(4\frac{\theta}{(1-\theta)^2} + (2l-1)\frac{\theta}{1-\theta}\right) \\ &= \frac{3\theta - 3\theta^2}{(1-\theta)^3}\end{aligned}$$

Vamos considerar um potencial $\Phi : X \to \mathbb{R}$ que é $\nu-$Hölder, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq Cd(x,y)^\nu$$

para algum $\nu \in (0,1]$, o caso $\nu = 1$ é conhecido como uma função Lipschitz. Agora, defina a $u : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^+}\Big(\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x)))\Big)$$

Lema 8.3. A função u, definida acima, está bem definida.

Demonstração. De fato, observe que

$$|\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x)))| \leq Cd(\sigma_1^j(x), \sigma_1^j(\pi_1(x)))^\nu$$

E, pela desigualdade acima, para qualquer $j \geq 0$

$$
\begin{aligned}
|\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x)))| &\leq C \left(\sum_{k \geq j+1} (4k - 1 - 2j)\theta^k \right)^{\nu} \\
&= C \left(\theta^{j+1} \sum_{l \geq 0} (2j + 4l + 3)\theta^l \right)^{\nu}
\end{aligned}
$$

onde $k = j + 1 + l$ para $l \geq 0$. Mas

$$
\sum_{l \geq 0} (2j + 4l + 3)\theta^l = (2j+3) \sum_{l \geq 0} \theta^l + 4 \sum_{l \geq 0} l\theta^l = (2j+3)\frac{1}{1-\theta} + 4\frac{\theta}{(1-\theta)^2}
$$

Logo,

$$
|\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x)))| \leq C(\theta^{\nu})^{j+1} \left((2j+3)\frac{1}{1-\theta} + 4\frac{\theta}{(1-\theta)^2} \right)^{\nu}
$$

A série

$$
\sum_{j \geq 0} (\theta^{\nu})^{j+1} \left((2j+3)\frac{1}{1-\theta} + 4\frac{\theta}{(1-\theta)^2} \right)^{\nu}
$$

converge, já que $\theta \in (0,1)$ e então a função u está bem definida, como gostaríamos.

$\square$

Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

Lema 8.4. Se $\Phi : X \to \mathbb{R}$ é potencial ν-Hölder, então existe um potencial $\frac{\nu}{4}$-Hölder u tal que

$$
\Phi = \phi + u - u \circ \sigma_1
$$

com $\phi(x) = \phi(y)$ sempre que $x_{(i,j)} = y_{(i,j)}$ para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Observe que

$$
u(x) - u(\sigma_1(x)) = \Phi(x) + \sum_{j \geq 0} \Big(\Phi(\sigma_1^j(\pi_1(\sigma_1(x)))) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x))) \Big)
$$

E, é fácil ver que a função

$$
\sum_{j \geq 0} \Big(\Phi(\sigma_1^j(\pi_1(\sigma_1(x)))) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x))) \Big)
$$

não depende de qualquer ponto $x_{(k_1,k_2)}$ para $k_1 < 0$. Queremos agora mostrar que essa função é Hölder. Faremos isso mostrando que u é Hölder. Sabemos que para qualquer $j \geq 0$

$$
d(\sigma_1^j(x), \sigma_1^j(y)) \leq \left(\frac{1}{\theta}\right)^j d(x,y) \quad \text{e} \quad d(\sigma_1^j(\pi_1(x)), \sigma_1^j(\pi_1(y))) \leq \left(\frac{1}{\theta}\right)^j d(\pi_1(x), \pi_1(y))
$$

Mas, como $d(\pi_1(x),\pi_1(y)) \leq d(x,y)$, podemos ver a segunda desigualdade como sendo

$$d(\sigma_1^j(\pi_1(x)),\sigma_1^j(\pi_1(y))) \leq \left(\frac{1}{\theta}\right)^j d(x,y)$$

Considere $x,y \in X$ onde $d(x,y) \leq \theta^n$ para qualquer n.

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| = |&\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x)))\Big) - \sum_{j=0}^{\infty}\big(\Phi(\sigma^j(y)) - \Phi(\sigma^j(\pi_1(y)))\big)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}|\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(y))| + \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}|\Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(y)))| \\
&\quad + \sum_{j\geq[\frac{n}{2}]}|\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x)))| + \sum_{j\geq[\frac{n}{2}]}|\Phi(\sigma_1^j(y)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(y)))|
\end{aligned}$$

Olhando cada somatório separadamente, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}|\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(y))| &\leq \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]} c(\Phi) d(\sigma_1^j(x),\sigma_1^j(y))^{\nu} \\
&\leq c(\Phi)\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\left(\frac{1}{\theta^j}d(x,y)\right)^{\nu} \\
&\leq c(\Phi)d(x,y)^{\nu}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\left(\frac{1}{\theta^{\nu}}\right)^j \\
&\leq c(\Phi)d(x,y)^{\nu}\frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\nu([\frac{n}{2}]+1)}-1}{\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\nu}-1} \\
&\leq \frac{\theta^{-\nu}c(\Phi)}{\theta^{-\nu}-1}\left(d(x,y)\left(\frac{1}{\theta}\right)^{[\frac{n}{2}]}\right)^{\nu} \\
&\leq \frac{\theta^{-\nu}c(\Phi)}{\theta^{-\nu}-1}\left(\theta^n\left(\frac{1}{\theta}\right)^{[\frac{n}{2}]}\right)^{\nu} \\
&\leq \frac{\theta^{-\nu}c(\Phi)}{\theta^{-\nu}-1}\left(\theta^{[\frac{n}{2}]}\right)^{\nu} \\
&\leq \frac{\theta^{-\nu}c(\Phi)}{\theta^{-\nu}-1}d(x,y)^{\frac{\nu}{2}}
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |\Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x))) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(y)))| &\leq \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c(\Phi) d(\sigma_1^j(\pi_1(x)), \sigma_1^j(\pi_1(y)))^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\left(\frac{1}{\theta}\right)^j d(x,y) \right)^{\nu} \\
&\leq \frac{\theta^{-\nu} c(\Phi)}{\theta^{-\nu} - 1} d(x,y)^{\frac{\nu}{2}}
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq J} k\theta^k &= J\theta^J + (J+1)\theta^{(J+1)} + \cdots \\
&= J\theta^J \left(1 + \frac{J+1}{J}\theta + \frac{J+2}{J}\theta^2 + \dots\right) \\
&= J\theta^J \left(1 + \left(1 + \frac{1}{J}\right)\theta + \left(1 + \frac{2}{J}\right)\theta^2 + \dots\right) \\
&\leq J\theta^J \left(1 + 2\theta + 3\theta^2 + \dots\right) \\
&\leq \frac{J\theta^J}{\theta} \left(\theta + 2\theta^2 + \dots\right) \\
&\leq \frac{J\theta^J}{\theta} \sum_{i \geq 0} i\theta^i \\
&\leq \frac{J\theta^J}{\theta} \frac{\theta}{(1-\theta)^2} \\
&\leq \frac{J\theta^J}{(1-\theta)^2}
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq J} \theta^k &= \theta^J + \theta^{(J+1)} + \theta^{(J+2)} \cdots \\
&= \theta^J \left(1 + \theta + \theta^2 + \dots\right) \\
&\leq \theta^J \sum_{i \geq 0} \theta^i \\
&\leq \theta^J \frac{1}{1-\theta}
\end{aligned}$$

Lema 8.5. Se $\theta \leq \frac{1}{16}$, temos que

$$\frac{n}{2}\theta^{\frac{n}{2}} \leq \theta^{\frac{n}{4}}$$

Demonstração. De fato, queremos mostrar que $n \leq 2(\theta^{\frac{-1}{4}})^n$. Mas, sabemos que $n \leq 2^n$ é sempre verdade. Logo, se temos $\theta^{\frac{-1}{4}} \geq 2$, que é verdade quando $\theta \leq \frac{1}{16}$. Portanto, vale a desigualdade. $\square$

Portanto, considerando $\theta \leq \frac{1}{16}$ no que segue, temos,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j \geq \frac{n}{2}} |\Phi(\sigma_1^j(x)) - \Phi(\sigma_1^j(\pi_1(x)))| &\leq \sum_{j \geq \frac{n}{2}} c(\Phi) \left(\sum_{k \geq j+1} (4k - 1 - 2j)\theta^k \right)^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \sum_{j \geq \frac{n}{2}} \left[4 \sum_{k \geq j+1} k\theta^k - (2j+1) \sum_{k \geq j+1} \theta^k \right]^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \sum_{j \geq \frac{n}{2}} \left[4 \frac{(j+1)\theta^{(j+1)}}{(1-\theta)^2} - (2j+1) \frac{\theta^{(j+1)}}{1-\theta} \right]^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \sum_{j \geq \frac{n}{2}} \left(\frac{2j(1+\theta) + 3 + \theta}{(1-\theta)^2} \right)^{\nu} (\theta^{(j+1)})^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \left(\sum_{j \geq \frac{n}{2}} \frac{2j(1+\theta) + 3 + \theta}{(1-\theta)^2} \theta^{(j+1)} \right)^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \left(\frac{2\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^2} \sum_{j \geq \frac{n}{2}} j\theta^j + \frac{\theta(3+\theta)}{(1-\theta)^2} \sum_{j \geq \frac{n}{2}} \theta^j \right)^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \left(\frac{2\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^2} \frac{\frac{n}{2}\theta^{\frac{n}{2}}}{(1-\theta)^2} + \frac{\theta(3+\theta)}{(1-\theta)^2} \frac{\theta^{\frac{n}{2}}}{1-\theta} \right)^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \left(\frac{2\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^4} \frac{n}{2}\theta^{\frac{n}{2}} + \frac{(\theta-\theta^2)(3+\theta)}{(1-\theta)^4} \theta^{\frac{n}{2}} \right)^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \left(\frac{2\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^4} \theta^{\frac{n}{4}} + \frac{(\theta-\theta^2)(3+\theta)}{(1-\theta)^4} \theta^{\frac{n}{2}} \right)^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \left(\frac{2\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^4} \theta^{\frac{n}{4}} + \frac{(\theta-\theta^2)(3+\theta)}{(1-\theta)^4} \theta^{\frac{n}{4}} \right)^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \left(\frac{2\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^4} + \frac{(\theta-\theta^2)(3+\theta)}{(1-\theta)^4} \right)^{\nu} (\theta^{\frac{n}{4}})^{\nu} \\
&\leq c(\Phi) \left(\frac{2\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^4} + \frac{(\theta-\theta^2)(3+\theta)}{(1-\theta)^4} \right)^{\nu} (\theta^n)^{\frac{\nu}{4}} \\
&\leq c(\Phi) \left(\frac{2\theta(1+\theta)}{(1-\theta)^4} + \frac{(\theta-\theta^2)(3+\theta)}{(1-\theta)^4} \right)^{\nu} d(x,y)^{\frac{\nu}{4}}
\end{aligned}
$$

□

Agora, vamos definir as aplicações $\pi_2 : X \to X$ tal que

$$
(\pi_2(x))_{(i_1,i_2)} = \begin{cases} x_{(i_1,i_2)} & if \ i_2 \geq 0 \\ 0 & caso \ contr\acute{a}rio \end{cases}
$$

E, $v : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$
v(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^+} \left(\Phi(\sigma_2^j(x)) - \Phi(\sigma_2^j(\pi_2(x))) \right)
$$

Então, podemos enunciar o seguinte resultado

Lema 8.6. Se $\Psi : X \to \mathbb{R}$ é um potencial ν-Hölder, então existe um potencial $\frac{\nu}{4}$-Hölder v tal que

$$\Psi = \psi + v - v \circ \sigma_2$$

com $\psi(x) = \psi(y)$ sempre que $x_{(i,j)} = y_{(i,j)}$ para todo $j \geq 0$.

A prova é análoga a do caso anterior. E então, podemos enunciar o principal resultado desse capítulo.

Teorema 8.1. *Se $\Phi : X \to \mathbb{R}$ é um potencial ν-Hölder, com $\nu \in (0, 1]$. Então existem u, v, ϕ potenciais $\frac{\nu}{16}$-Hölder tal que*

$$\Phi = \phi + u - u \circ \sigma_1 + v - v \circ \sigma_2$$

com $\phi(x) = \phi(y)$ sempre que $x_{(i,j)} = y_{(i,j)}$ para todo $i, j \geq 0$.

Demonstração. Pelos lemas 8.4 e 8.6, existem potenciais Ψ, u $\frac{\nu}{4}$-Hölder tais que

$$\Phi = \Psi + u - u \circ \sigma_1$$

com $\Psi(x) = \Psi(y)$ sempre que $x_{(i,j)} = y_{(i,j)}$ para todo $i \geq 0$. E, aplicando o lema seguinte, para Ψ, temos ϕ, v potenciais $\frac{\nu}{16}$-Hölder tal que

$$\Psi = \phi + v - v \circ \sigma_2$$

com $\psi(x) = \psi(y)$ sempre que $x_{(i,j)} = y_{(i,j)}$ para todo $j \geq 0$. Portanto,

$$\Phi = \phi + u - u \circ \sigma_1 + v - v \circ \sigma_2$$

com $\phi(x) = \phi(y)$ sempre que $x_{(i,j)} = y_{(i,j)}$ para todo $i, j \geq 0$. $\square$

8.3 Somas de Birkhoff

Considere uma caixa Λ_L de lado L dada por

$$\Lambda_L = \begin{matrix} x_{(0,n)} & \cdots & x_{(n,n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(0,0)} & \cdots & x_{(n,)} \end{matrix}$$

Como $\Phi = \phi + u - u \circ \sigma_1 + v - v \circ \sigma_2$, a soma de Birkhoff em Λ_L, para $x \in \Lambda_L$ é dada por

$$\sum_{i,j=1-L}^{L-1} \Phi(\sigma_1^i \sigma_2^j(x)) = \sum_{i,j=0}^{L-1} \phi(\sigma_1^i \sigma_2^j(x)) + \sum_{i,j=0}^{L-1} \left(u\sigma_1^0\sigma_2^i - u\sigma_1^L\sigma_2^i + v\sigma_1^i\sigma_2^0 - v\sigma_1^i\sigma_2^L \right)(x)$$

Defina

$$c = c(x) = \max_{1 \leq i \leq L-1} \{|u(\sigma_1^0\sigma_2^i)(x)|; |u(\sigma_1^L\sigma_2^i)(x)|; |v(\sigma_1^i\sigma_2^0)(x)|; |v(\sigma_1^i\sigma_2^L)(x)|\}$$

Observe que a função ϕ depende de L^2 pontos, enquanto as funções u, v dependem de no máximo $4L$ pontos. E, como $|\Lambda_L| = L^2$, temos

$$\frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{i,j=0}^{L-1} \left(u(\sigma_1^0\sigma_2^i) - u(\sigma_1^L\sigma_2^i) + v(\sigma_1^i\sigma_2^0) - v(\sigma_1^i\sigma_2^L) \right)(x) \leq \frac{4Lc}{L^2} = \frac{4c}{L}$$

Fazendo $L \to \infty$, ou seja, quando $\Lambda^L \nearrow \mathbb{N}^2$, temos

$$\lim_{L \to \infty} \frac{1}{|\Lambda_L|} \sum_{i,j=0}^{L-1} \left(u(\sigma_1^0\sigma_2^i) - u(\sigma_1^L\sigma_2^i) + v(\sigma_1^i\sigma_2^0) - v(\sigma_1^i\sigma_2^L) \right)(x) \leq \lim_{L \to \infty} \frac{4c}{L} = 0$$

Para L suficientemente grande e todo x temos

$$\frac{1}{2L^2 - L} \sum_{i,j=1-L}^{L-1} \Phi(\sigma_1^i \sigma_2^j(x)) = \frac{1}{L^2} \sum_{i,j=0}^{L-1} \phi(\sigma_1^i \sigma_2^j(x)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)$$

Bibliografia

[1] ARTUSO, E. **Deslocamentos em $\mathbb{Z}^2$: equação cohomológica e operadores de transferência**. 2016. Tese(Doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática e Estatística. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura, Porto Alegre, 2016.

[2] BOUSCH, T. **La condition de Walters**. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, serie 4, volume 34, no. 2, pages 287-311, 2001.

[3] BOWEN, R. **Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms**. Lect. Notes in Math. 470. Springer, 1975.

[4] CASTRO JR, A. A. de. **Curso de Teoria da Medida**. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[5] DEGIRMENCI, N.; KOCAK, S. **Existence of a dense orbit and topological transitivity: When are they equivalent?**. Acta Mathematica Hungarica, volume 99, pages 185-187, may 2003.

[6] HAYDN, N. **Phase Transition in one-dimensional subshifts**. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, volume 33, issue 5, pages 1965-1973, may 2013.

[7] LIND, D.; MARCUS, B. **An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding**. Cambridge University Press, 2003.

[8] LOPES, A. O. **Thermodynamic Formalism, Maximizing Probabilities and Large Deviations**.
Disponível em: < http://mat.ufrgs.br/ alopes/pub3/notesformteherm.pdf >. Acesso em: 14/07/2019.

[9] LOPES, A.; MENGUE, J.; MOHR, J.; SOUZA, R. **Entropy and variational principle for one-dimensional lattice systems with a general a priori probability: Positive and zero temperature**. Ergodic Theory and Dynamical Systems, volume 35, issue 6, pages 1925-1961, september 2015.

[10] MUIR, S.; URBANSKI, M. **Thermodynamic formalism for a modified shift map**. Stochastics and Dynamics, volume 14, march 2014.

[11] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. 3º ed. New York: McGraw-Hill, 1986.

[12] VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Fundamentos de Teoria Ergódica**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[13] WALTERS, P. **An Introduction to Ergodic Theory**. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1982.

[14] WALTERS, P. **Invariant measures and equilibrium states for some mappings which expand distances**. Transactions of the American Mathematical Society, volume 236, pages 121-153, february 1978.