

FINITE ELEMENT IMPLEMENTATION OF AN ELASTOPLASTIC-VISCOPLASTIC CONSTITUTIVE LAW FOR TUNNELS

Felipe Pinto da Motta Quevedo

Denise Bernaud

Samir Maghous

motta.quevedo@ufrgs.br

denise.bernaud@ufrgs.br

samir.maghous@ufrgs.br

University of Rio Grande do Sul/PPGEC

Oswaldo Aranha 99, Zip-Code, RS, Brazil

Abstract. The paper presents an efficient numerical integration scheme for coupled elastoplasticity-viscoplasticity constitutive behavior with internal-state variables standing for irreversible processes. In most quasi-static structural analyses, the solution to boundary value problems involving materials that exhibit time-dependent constitutive behavior proceeds from the equations integration handled at two distinct levels. On the one hand, the first or local level refers to the numerical integration at each Gaussian point of the rate constitutive stress/strain relationships. For a given strain increment, the procedure of local integration is iterated for stresses and associated internal variables until convergence of the algorithm. On the other hand, the second or global level is related to structure equilibrium between internal and external forces achieved by the Newton-Raphson iterative scheme. A review of the elastoplastic and viscoplastic model will be shown, following the coupling between these models. Particular emphasis is given in this contribution to address the first level integration procedure, also referred to as algorithm for stress and internal variable update, considering a general elastoplastic-viscoplastic constitutive behavior. The formulation is described for semi-implicit Euler schemes. The efficacy of the numerical formulation is assessed by comparison with analytical solution derived for deep tunnel in coupled elastoplasticity-viscoplasticity.

Keywords: Constitutive models; Elastoplasticity; Viscoplasticity; Deep Tunnel; Finite Element Method;

1 Introdução

Um modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico torna-se importante quando o comportamento do material não pode ser descrito apenas com os modelos usuais da elastoplasticidade ou viscoplasticidade. Esse tipo de problema é comum em túneis profundos escavados em maciços argilosos, como demonstrado por Rousset [1]. Nesses casos, a plastificação no entorno do maciço, o fechamento gradual da seção do túnel, a extrusão da face de escavação e a sobrecarga sobre o revestimento podem se desenvolver ao longo do tempo construtivo (curto prazo), ou ainda, meses e anos após a construção do túnel (longo prazo), podendo levar a deformações excessivas [2], aprisionamento da máquina de tunelamento [3] e danos no revestimento [4].

Além do presente trabalho, modelos elastoplásticos-viscoplásticos aplicados à problemática de túneis profundos podem ser encontrados em: Rousset [1], Piei [5], Purwodihardjo e Cambou [6], Kleine [7], Shafiqu et al. [8], Debernardi & Barla [9], Souley et al. [10], Manh et al. [11] e Vrakas & Anagnostou [12].

Esse trabalho apresenta um esquema de integração numérica para o comportamento constitutivo elastoplástico-viscoplástico. Para tanto, será feita uma breve revisão bibliográfica sobre cada modelo separadamente e posteriormente o seu acoplamento. Por fim, será apresentado a validação desse modelo comparando sua solução numérica com a solução analítica obtida por Piepi [5] de um túnel escavado sem revestimento em condições axissimétricas.

2 Modelo constitutivo elastoplástico

Para problemas com evolução isotérmica, quase-estáticos em pequenas transformações, o modelo constitutivo elastoplástico pode ser descrito através da decomposição do tensor de deformação total, da superfície de escoamento, da regra de fluxo plástico, da lei de endurecimento/amolecimento e das condições de carregamento e descarregamento.

2.1 Decomposição do tensor de deformação total

Considerando a hipótese das pequenas transformações (que inclui a hipótese das pequenas deformações) tem-se que a taxa de deformação total pode ser decomposta em uma componente elástica e outra plástica:

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}} = \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^e + \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^p. \quad (1)$$

Dentro do contexto de processos termodinâmicos determinísticos, a energia livre específica, considerando uma evolução isotérmica, pode ser decomposta conforme:

$$\psi(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^p, \underline{\underline{\underline{\alpha}}}) = \psi^e(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^p) + \psi^p(\underline{\underline{\underline{\alpha}}}) = \psi^e(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^e) + \psi^p(\underline{\underline{\underline{\alpha}}}), \quad (2)$$

em que $\underline{\underline{\underline{\alpha}}}$ é o conjunto de variáveis internas (coesão, ângulo de atrito, etc) relacionadas com o fenômeno de endurecimento/amolecimento. A partir da Eq.(2) tem-se as seguintes relações constitutivas:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}}}^e}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{q}}}}} = \frac{\partial \psi^p}{\partial \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\alpha}}}}}}, \quad (3)$$

sendo $\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{q}}}}}$ é o conjunto das forças termodinâmicas associadas às variáveis internas (escalares ou tensoriais). Da Eq.(1) e Eq.(3) obtém-se a seguinte relação constitutiva linearizada:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}}}^{ep} : \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}}}^e = \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}}} : (\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}}}^p), \quad (4)$$

em que $\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}}}$ e $\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}}}^{ep}$ são tensores de quarta ordem que representam os módulos elástico e elastoplástico, respectivamente.

2.2 Superfície de escoamento

Uma característica fenomenológica observada nos materiais elastoplásticos é a existência de um limite dentro do qual o material se comporta elasticamente. Em materiais isotrópicos esse domínio é delimitado por uma hipersuperfície no espaço das tensões principais, conforme:

$$\partial\Gamma = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) = 0 \}, \quad (5)$$

em que f é a função de escoamento. Essa superfície delimita o conjunto de tensões que são elasticamente admissíveis (E. A.) e o conjunto de tensões que são plasticamente admissíveis (P. A.), conforme:

$$\Gamma^* = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) < 0 \} \text{(E.A.)}, \quad \Gamma = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) \leq 0 \} \text{(P.A.)}. \quad (6)$$

A Figura 1 ilustra de forma genérica esse domínio.

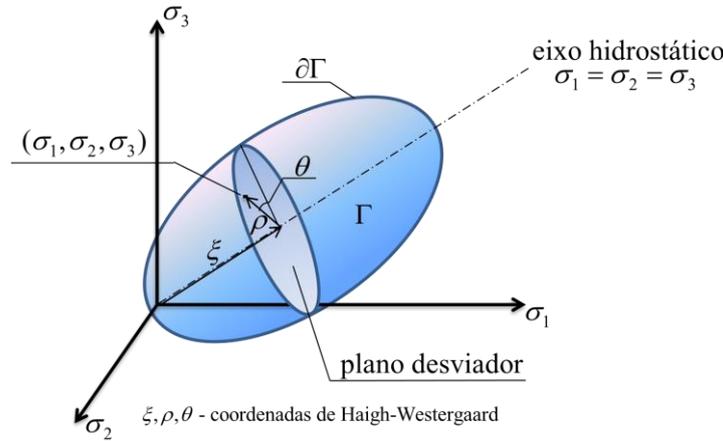


Figura 1. Domínio genérico plasticamente admissível Γ no espaço das tensões principais.

A função de escoamento é comumente descrita em função dos invariantes do tensor de tensões e das forças associadas às variáveis internas referente ao fenômeno de endurecimento e amolecimento, de modo que

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) = f(I_1, J_2, J_3, \underline{q}) = f(\xi, \rho, \theta, \underline{q}) = f(p, q, \theta, \underline{q}) = f(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta, \underline{q}) \quad (7)$$

sendo

$$\begin{aligned} I_1 &= tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad J_3 = \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{s}}^3) = \det(\underline{\underline{s}}), \\ J_2 &= \frac{1}{2} tr(\underline{\underline{s}}^2) = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2, \\ \xi &= p = \sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1, \quad \rho = \sqrt{\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = \sqrt{2J_2}, \quad \theta = \frac{1}{3} \arcsen \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \right); \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \\ q &= \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} = \sqrt{3J_2}, \quad \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}, \quad \text{e} \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{p}{3} \underline{\underline{1}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Nas Eqs.(8), (ξ, ρ, θ) são as coordenadas de Haigh-Westergaard (em que θ também é conhecido como ângulo de Lode), p a pressão hidrostática, q a tensão equivalente de von-Mises, $(\sigma_{oct}, \tau_{oct})$ a tensão normal e cisalhante octaédrica, respectivamente e $\underline{\underline{s}}$ o tensor de tensões desviadoras [13].

Quando a função de escoamento não depende de I_1 diz-se que a plasticidade é independente da pressão, sendo determinada apenas pelo estado de tensões ao longo do plano desviador (Fig. 1). Diversas

funções de escoamentos podem ser encontradas na literatura, como em [13], [14] e [15].

2.3 Regra de fluxo plástico

A lei de evolução das deformações plásticas (conhecido como fluxo plástico) é postulada conforme

$$\underline{\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}^p = \dot{\lambda} \underline{\underline{\underline{g}}}_\sigma \quad \text{sendo} \quad \underline{\underline{\underline{g}}}_\sigma = \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}}, \quad (9)$$

em que λ é o multiplicador plástico e $\underline{\underline{\underline{g}}}_\sigma$ é o tensor que dá a direção do fluxo plástico através do gradiente de uma função potencial g análoga à f . Tal como a função de escoamento, o potencial plástico geralmente é descrito através dos invariantes do tensor de tensões e pode ser determinado através da regra da cadeia. Por exemplo, se $g(I_1, \sqrt{J_2}, J_3, \underline{q})$, tal como em [16], tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{g}}}_\sigma &= C_1 \underline{\underline{\underline{g}}}_1 + C_2 \underline{\underline{\underline{g}}}_2 + C_3 \underline{\underline{\underline{g}}}_3, \\ \underline{\underline{\underline{g}}}_1 &= \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} = \underline{\underline{\underline{1}}}, \quad \underline{\underline{\underline{g}}}_2 = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \underline{\underline{\underline{s}}}, \quad \underline{\underline{\underline{g}}}_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} = \frac{4J_2}{3} \underline{\underline{\underline{1}}}, \\ C_1 &= \frac{\partial g}{\partial I_1}, \quad C_2 = \frac{\partial g}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\tan(3\theta)}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad C_3 = \frac{\sqrt{3}}{2\cos(3\theta)} - \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{\partial g}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Como pode-se ver nas Eqs.(10), as constantes C_1 , C_2 e C_3 são particularidades de cada tipo de função potencial. Em [16] é possível obter o valor dessas constantes para diversas funções, tal como von-Mises, Tresca, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Cap Models, etc.

2.4 Lei de endurecimento/amolecimento

A lei de endurecimento/amolecimento caracteriza a dependência das variáveis internas durante a evolução das deformações plásticas. Essa lei é postulada da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\underline{\dot{q}}}} = \dot{\lambda} \underline{\underline{\underline{h}}}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}, \underline{q}) \quad (11)$$

em que $\underline{\underline{\underline{h}}}$ é conhecido como módulo de endurecimento. Como a função de escoamento f é dependente das forças termodinâmicas associadas ao conjunto de variáveis internas $\underline{\alpha}$, a mudança dessas ao longo da deformação plástica irá alterar a posição e/ou a forma da superfície de escoamento. Quando a superfície de escoamento é estática, ou seja, $\underline{\underline{\underline{\dot{q}}}} = \underline{\underline{\underline{0}}}$, tem-se a plasticidade perfeita, quando aumenta tem-se o endurecimento isotrópico e quando se desloca tem-se o endurecimento cinemático, sendo mista, quando composta das duas últimas.

2.5 Condições de carregamento e descarregamento

A evolução da Eq.(9) e da Eq.(11) estão sujeitas à três condições (condições de Kuhn-Tucker), que são:

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\lambda} f = 0. \quad (12)$$

Essas condições estabelecem que apenas ocorre fluxo plástico quando o estado de tensões está sobre a superfície de escoamento e, neste caso, não há variação da função de escoamento em relação às tensões, ou seja:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\underline{\sigma}}}} : \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \cdot \underline{\underline{\underline{\dot{q}}}} = \underline{\underline{\underline{f}}}_\sigma : \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}} + \underline{\underline{\underline{f}}}_q \cdot \underline{\underline{\underline{\dot{q}}}} = 0. \quad (13)$$

A Eq.(13) é conhecida como condição de consistência.

2.6 Multiplicador plástico e módulo elastoplástico contínuo

Introduzindo na Eq.(13) a Eq.(4) e a Eq.(11), juntamente com a Eq.(9), e isolando o multiplicador plástico tem-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{\underline{f}}_{\sigma} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}{\underline{\underline{f}}_{\sigma} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{g}}_{\sigma} - \underline{\underline{f}}_q \cdot \underline{\underline{h}}} \quad (14)$$

que introduzido na Eq.(4) leva à:

$$\underline{\underline{D}}^{ep} = \underline{\underline{D}} - \frac{\left(\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{g}}_{\sigma} \right) \otimes \left(\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{f}}_{\sigma} \right)}{\underline{\underline{f}}_{\sigma} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{g}}_{\sigma} - \underline{\underline{f}}_q \cdot \underline{\underline{h}}} \quad (15)$$

em que \otimes representa o produto tensorial. Através da Eq.(15) pode-se notar que se a plasticidade for associada $f = g$, o tensor constitutivo elastoplástico é simétrico. Também, pelo sinal do segundo termo, pode-se ver que a plasticidade representa uma redução no módulo de elasticidade do material.

3 Modelo constitutivo viscoplástico

3.1 Decomposição do tensor de deformações

O modelo constitutivo viscoplástico possui um raciocínio análogo ao da elastoplasticidade, o que leva a seguinte relação constitutiva linearizada:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}^{vp} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^e} = \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^{vp}}) \quad (16)$$

em que $\underline{\underline{D}}^{vp}$ é o tensor constitutivo de quarta ordem viscoplástico.

3.2 Superfície de escoamento

Nem sempre a viscoplasticidade possui um domínio elástico, por exemplo, a altas temperaturas certos materiais podem fluir sempre sobre tensão, ou seja, a função de escoamento é zero. Para esses materiais existem funções explícitas [17], [18] e [19]. Porém, em problemas que envolvem túneis profundos, o fenômeno ocorre a partir de um determinado nível de tensões, conforme descrito por [1]. Para esses casos, superfícies análogas às da elastoplasticidade são utilizadas.

3.3 Regra de fluxo viscoplástico e lei de endurecimento/amolecimento

De forma análoga à elastoplasticidade, a regra de fluxo viscoplástico e a lei de endurecimento/amolecimento são postulados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} &= \dot{\lambda} \underline{\underline{g}}_{\sigma}, \\ \underline{\underline{q}} &= \underline{\underline{h}}(\bar{\varepsilon}^{vp}) \quad \text{e} \quad \bar{\varepsilon}^{vp} = \int_0^t |\dot{\lambda}| dt \end{aligned} \quad (17)$$

em que $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp}$ é o fluxo viscoplástico (ou taxa de deformação viscoplástica), $\dot{\lambda}$ a magnitude da deformação viscoplástica e $\underline{\underline{g}}_{\sigma}$ o vetor de fluxo viscoplástico, definido de forma igual ao da elastoplasticidade, ou seja, através do gradiente de uma função potencial g , porém viscoplástica. A lei de endurecimento pode ser descrita como uma função da deformação viscoplástica equivalente $\bar{\varepsilon}^{vp}$ ao longo do tempo.

3.4 Multiplicador viscoplástico

Diferentemente da elastoplasticidade, as deformações viscoplásticas ocorrem mesmo quando $f > 0$, e portanto, não há a imposição da condição de consistência. Dessa forma, tem-se que a taxa do multiplicador viscoplástico $\dot{\lambda}$ não pode ser obtida de uma condição do tipo $\dot{f} = 0$. Portanto, existem modelos que fornecem uma expressão explícita para $\dot{\lambda}$, e na presente dedução será adotado o modelo de Perzyna [20], conforme descrito em Zienkiewicz e Corneau [15]:

$$\dot{\lambda} = \frac{\Phi(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{q}})}{\eta} \quad \text{e} \quad \Phi = \left\langle \frac{f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{q}})}{f_0} \right\rangle^n \quad (18)$$

em que Φ é a função de sobretensão, η é a constante de viscosidade dinâmica, n é o parâmetro adimensional que dá a forma da lei de potência, f_0 parâmetro convenientemente adotado e $\langle * \rangle$ é a função de McCauley, que é nula quando $* < 0$, ou seja, apenas ocorrerá fluxo viscoplástico quando o critério f for positivo.

4 Modelo constitutivo elastoplástico-viscoplástico

O modelo elastoplástico-viscoplástico proposto, compreende justamente a associação em série dos modelos constitutivos descritos acima e, portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^e} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^{vp}} \quad \text{e} \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}} &= \underline{\underline{D}}^{epvp} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^e} = \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p} - \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^{vp}}). \end{aligned} \quad (19)$$

Essa associação pode ser vista na representação unidimensional da Fig.2.

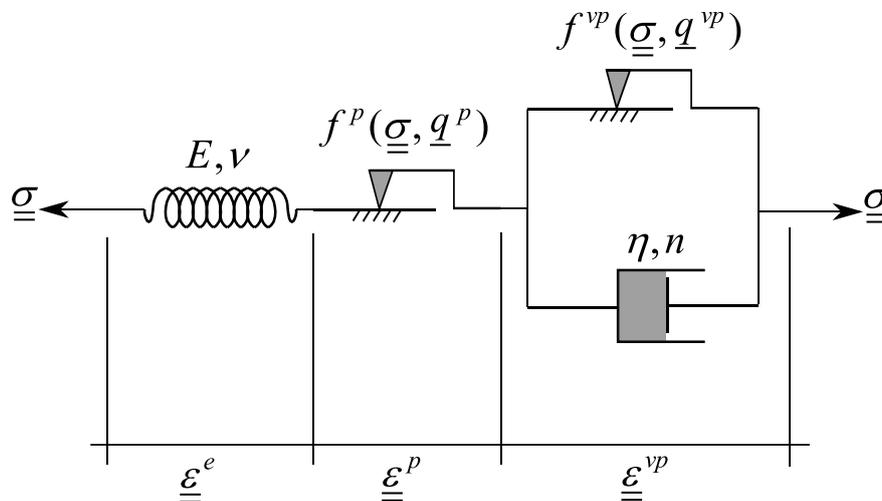


Figura 2. Representação reológica do modelo elastoplástico-viscoplástico [1]

Uma observação importante é que as superfícies de escoamentos e as variáveis internas que definem a parcela elastoplástica e viscoplástica desse modelo podem ser diferentes entre si, incluindo a associação das suas respectivas funções potenciais com suas superfícies de escoamento. Geralmente escolhe-se parâmetros da viscoplasticidade fazendo com que sua superfície viscoplástica fique dentro da superfície elastoplastic-viscoplastic, tendo dessa forma, os domínios representados na Fig.3.

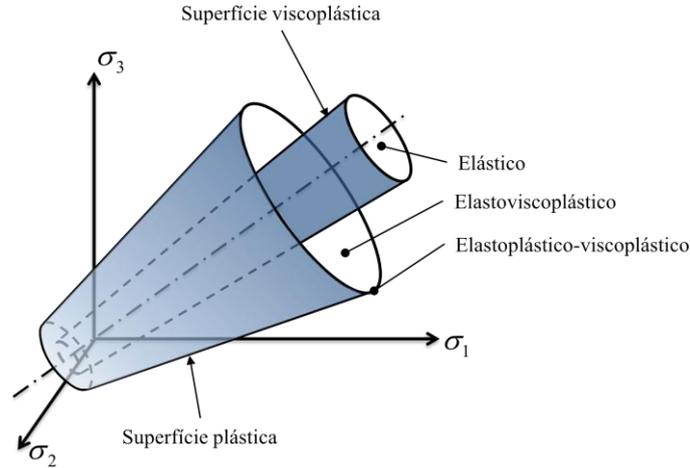


Figura 3. Domínios e superfícies do modelo elastoplástico-viscoplástico

5 Solução de problemas constitutivos não lineares em elementos finitos

Através da forma fraca das equações de campo que governam o problema e da discretização espacial do domínio em elementos finitos, para problemas quase-estáticos, isotérmicos em pequenas transformações, tem-se o seguinte conjunto de equações nodais para se resolver:

$$\left(\underline{\underline{K}} \underline{u} \right) - \left(\underline{F}_V + \underline{F}_S + \underline{F}_N \right) = \underline{F}_{int} - \underline{F}_{ext} = \underline{f}(\underline{u}) = \underline{0}, \quad (20)$$

em que $\underline{\underline{K}}$ é a matriz de rigidez global resultante da montagem das matrizes de rigidezes $\underline{\underline{K}}_e$ de cada elemento, \underline{u} é o vetor incógnito de deslocamentos nodais global proveniente da montagem dos deslocamentos nodais \underline{u}_e de cada elemento, $(\underline{F}_V, \underline{F}_S, \underline{F}_N)$ são as forças globais resultantes de volume, superfície e nodais, da montagem das respectivas forças de cada elemento.

Quando há uma não linearidade envolvendo as leis constitutivas do material (tal como na plasticidade e viscoplasticidade, em que o problema depende da trajetória das tensões e do tempo), a matriz de coeficientes $\underline{\underline{K}}$ passa a depender dos deslocamentos nodais incógnitos \underline{u} , tornando o sistema não linear. O método de Newton-Raphson é o processo iterativo comumente utilizado para resolver esse sistema. Portanto, aproximando o sistema $\underline{f}(\underline{u}) = \underline{0}$ por uma série de Taylor truncada na primeira ordem tem-se a seguinte expressão iterativa para aproximar \underline{u} :

$$\underline{u}_{i+1} = \underline{u}_i - \underline{\underline{K}}(\underline{u}_i)^{-1} \left(\underline{F}_{int}(\underline{u}_i) - \underline{F}_{ext} \right) = \underline{u}_i - \underline{\underline{K}}_i^{-1} \left(\underline{F}_{int_i} - \underline{F}_{ext} \right) = \underline{u}_i + \underline{\underline{K}}_i^{-1} \underline{R}_i = \underline{u}_i + \Delta \underline{u}_i, \quad (21)$$

em que $\Delta \underline{u}_i$ é o incremento de deslocamentos nodais da iteração atual i , \underline{F}_{int_i} são as forças internas (ou forças restauradoras) da iteração atual (calculadas com \underline{u}_i), \underline{R}_i é o vetor de carga desbalanceado (também chamado de resíduo) para a iteração atual, $\underline{\underline{K}}_i$ matriz de rigidez global tangente na iteração atual, \underline{u}_i os deslocamentos nodais na iteração atual e \underline{u}_{i+1} os deslocamentos nodais atualizados.

Para incorporar a dependência do histórico de cargas (ou do tempo), a Eq.(21) é discretizada em $1 \leq n \leq ns$ subpassos em que a carga externa e/ou o tempo são incrementados linearmente e, portanto:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{u}_{n,i} &= \underline{\underline{K}}_{n,i}^{-1} \left(\underline{F}_{ext_{n+1}} - \underline{F}_{int_{n,i}} \right) = \underline{\underline{K}}_{n,i}^{-1} \underline{R}_{n,i}, & \underline{u}_{n,i+1} &= \underline{u}_{n,i} + \Delta \underline{u}_{n,i} \\ \underline{F}_{ext_{n+1}} &= \underline{F}_{ext_n} + \Delta \underline{F}_{ext}, & t_{n+1} &= t_n + \Delta t, & \underline{F}_{int_{n,i}} &= \left(\int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\sigma} d\Omega \right)_{n,i} \\ \Delta \underline{F}_{ext} &= \frac{\underline{F}_{ext_p}}{ns}, & \Delta t &= \frac{t_p}{ns} \end{aligned} \quad (22)$$

em que $\underline{\underline{B}} = \nabla \underline{\underline{N}}$ e $\underline{\underline{N}}$ a matriz contendo as funções de forma do elemento finito. Na implementação

computacional é comum utilizar a forma matricial dada pelas regras de Voigt [25] ao invés da representação tensorial. No restante desse artigo será utilizado a notação de Voigt porém com a mesma simbologia da notação tensorial.

Nas Eqs.(22) \underline{F}_{ext_p} e t_p são as forças externas e o tempo no final do passo, respectivamente. No início do processo iterativo, $\underline{u}_{0,0}$, $\underline{F}_{int_{0,0}}$, \underline{F}_{ext_0} e t_0 são nulos. Para os próximos subpassos os valores de $\underline{u}_{n,0}$ e $\underline{F}_{int_{n,0}}$, correspondem aos valores da solução convergente anterior $n - 1$, conforme Fig.4.

O método de Newton-Raphson também possui três variações conforme a estratégia de atualização da matriz de rigidez: completo ($\underline{K}_{n,i} \leftarrow \underline{K}_{n,i}$), modificado ($\underline{K}_{n,i} \leftarrow \underline{K}_{n,0}$) e inicial ($\underline{K}_{n,i} \leftarrow \underline{K}_{0,0}$). Sendo que a primeira apresenta menor número de iterações de equilíbrio (convergência quadrática), porém, exige a montagem e fatorização da matriz de rigidez a cada iteração. Contudo, essa convergência só é efetivamente obtida se for utilizado o módulo consistente \underline{D}^{alg} com o algoritmo de integração das tensões, conforme Simo e Taylor [24]. De qualquer forma, é possível utilizar o módulo elastoplástico contínuo ou o elástico, porém com o custo de maiores iterações de equilíbrio.

Em cada subpasso as iterações de equilíbrio continuam até que um determinado critério de convergência seja satisfeito ou ainda um determinado número de iterações seja atingido. Geralmente esse critério se dá sobre o vetor resíduo e o vetor de incrementos nodais, da seguinte forma:

$$\|\underline{R}_i\| \leq \varepsilon_R R_{ref}, \quad \|\Delta \underline{u}_i\| \leq \varepsilon_u u_{ref} \quad (23)$$

em que ε_R e ε_u são as tolerâncias para o resíduo (de 0.5%) e deslocamentos (de 5%), respectivamente. Os valores de referência R_{ref} e u_{ref} são $\|\underline{F}_{ext_n}\|$ e $\|\underline{u}_{n,i}\|$, respectivamente. A norma pode ser calculada através do maior valor absoluto, soma absoluta ou ainda da norma euclidiana. A Fig.5 apresenta o algoritmo das iterações de equilíbrio global juntamente com os testes de convergência.

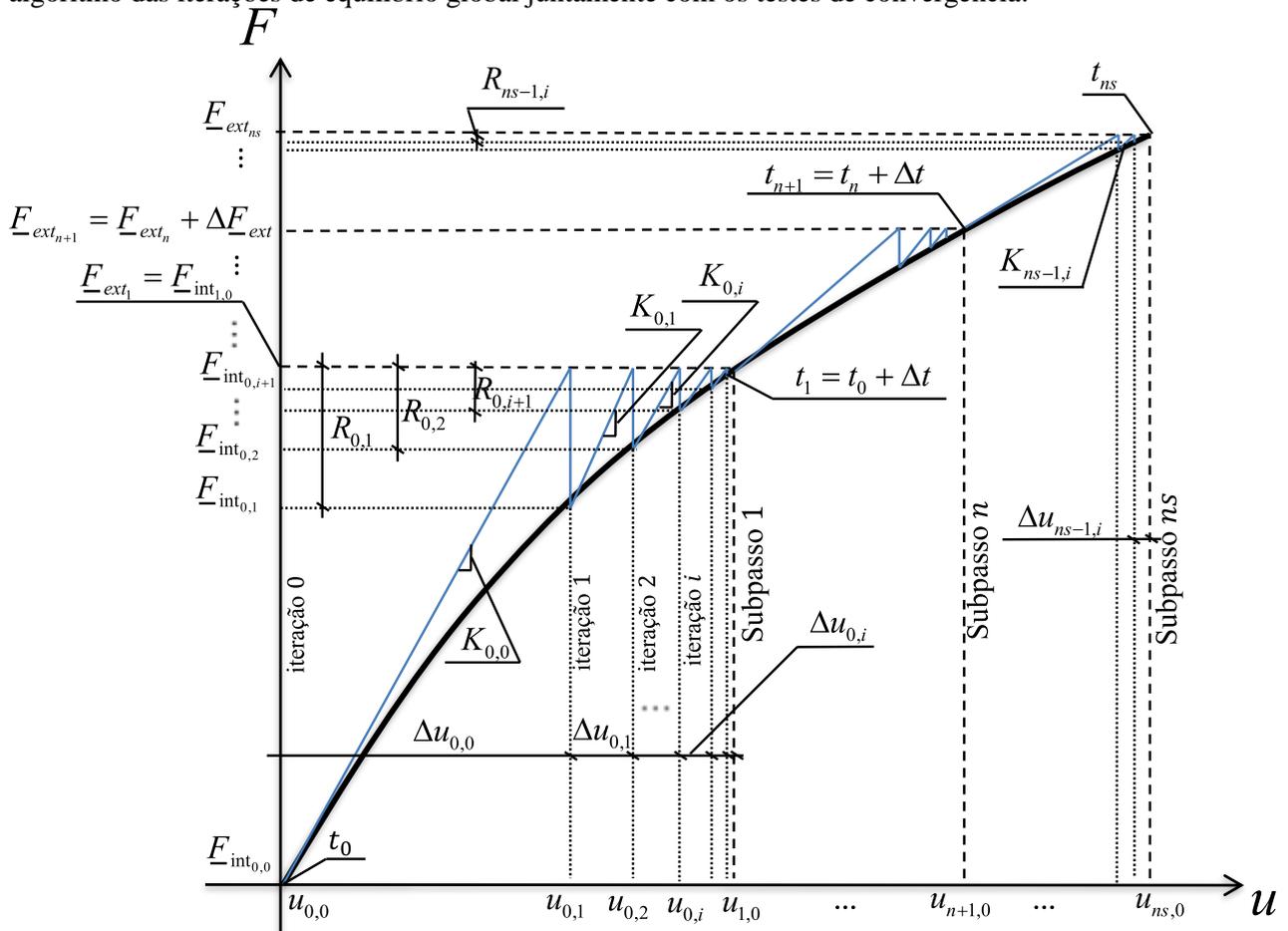


Figura 4. Ilustração das iterações de Newton-Raphson (adaptado de Chen e Han [13])

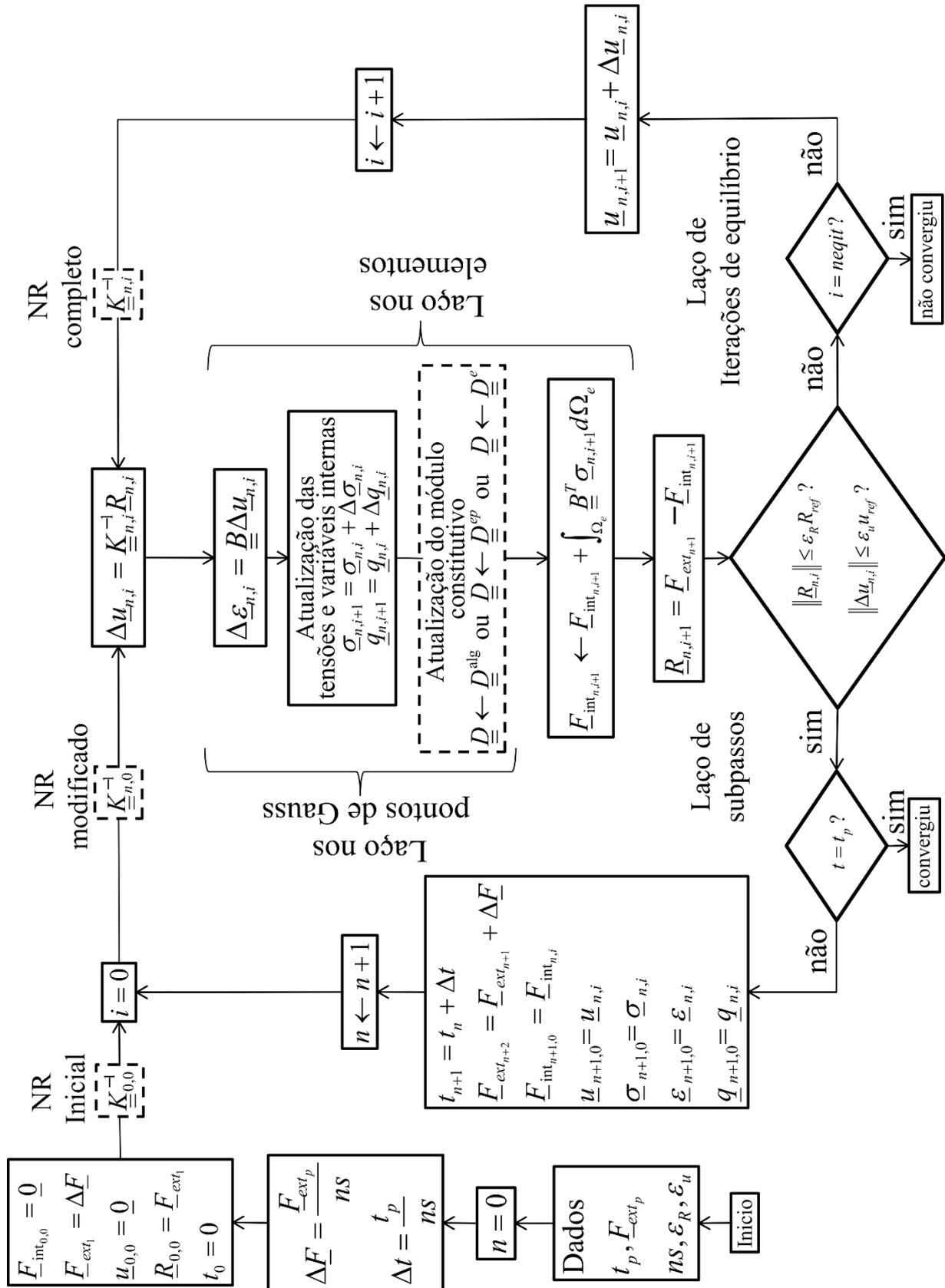


Figura 5. Algoritmo das interações de equilíbrio do método Newton-Raphson para a solução do sistema global

6 Algoritmo de atualização das tensões e variáveis internas

Os algoritmos de atualização das tensões e variáveis internas se propõe a resolver o sistema de equações diferenciais que envolvem as relações constitutivas através de algum esquema de integração (geralmente de Runge-Kutta). Como pode se ver na Fig.5 o algoritmo ocorre para cada ponto de Gauss de cada elemento durante as iterações de equilíbrio e, dado um conjunto conhecido de $\{\underline{\varepsilon}_i, \underline{\varepsilon}_i^{in}, \underline{\sigma}_i, \underline{q}_i\}$ na iteração i e o incremento de deformação total $\Delta \underline{\varepsilon}_i$, tenta-se obter os valores da iteração seguinte $\{\underline{\varepsilon}_{i+1}, \underline{\varepsilon}_{i+1}^{in}, \underline{\sigma}_{i+1}, \underline{q}_{i+1}\}$, em que $\underline{\varepsilon}^{in}$ é a deformação inelástica (plástica ou visoplástica).

6.1 Integração das equações constitutivas elastoplásticas

Utilizando o método de Runge-Kutta de primeira ordem (equivalente ao método de Euler) tem-se o seguinte esquema de integração das equações constitutivas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}_{i+1} = \underline{\varepsilon}_i + \Delta \underline{\varepsilon}_i \\ \underline{\varepsilon}_{i+1}^p = \underline{\varepsilon}_i^p + \left[(1-\theta)\Delta \lambda_i \underline{g}_{\sigma_i} + \theta \Delta \lambda_{i+1} \underline{g}_{\sigma_{i+1}} \right] \\ \underline{q}_{i+1} = \underline{q}_i + \left[(1-\theta)\Delta \lambda_i \underline{h}_i + \theta \Delta \lambda_{i+1} \underline{h}_{i+1} \right] \\ \underline{\sigma}_{i+1} = \underline{D} \underline{\varepsilon}_{i+1}^e = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_{i+1} - \underline{\varepsilon}_{i+1}^p) \\ f_{i+1} = f(\underline{\sigma}_{i+1}, \underline{q}_{i+1}) = 0 \end{array} \right. \quad (24)$$

em que $\Delta \lambda = \dot{\lambda} \Delta t$ e $0 \leq \theta \leq 1$ fornece a regra trapezoidal generalizada para o fluxo plástico e evolução das variáveis internas. Quando $\theta = 0$ tem-se a forma completamente explícita (*fully explicit forward Euler*) e $\theta = 1$ completamente implícita (*fully implicit backward Euler*). Os algoritmos semi-implícitos adotam $0 < \theta < 1$ ou ainda uma combinação implícita e explícita de $\Delta \lambda$, \underline{g}_{σ} e \underline{h} .

Os esquemas completamente explícitos, por exemplo, adotados em [21], [22] e [23], foram muito usados até que Simo e Taylor [24] propuseram um método implícito de dois passos preditor-corretor. Isso pois, os esquemas completamente explícitos não satisfaziam a condição de consistência $f_{i+1} = f(\underline{\sigma}_{i+1}, \underline{q}_{i+1}) = 0$ no final do passo, uma vez que o multiplicador plástico e os vetores de fluxo eram calculados com as tensões do passo anterior i . Atualmente se utiliza algoritmos completamente implícitos ou semi-implícitos que satisfazem $f_{i+1} = 0$, sendo que alguns semi-implícitos evitam a necessidade de se calcular os gradientes de segunda ordem dos vetores de fluxo \underline{g}_{σ} e \underline{h} , porém necessita de mais iterações de equilíbrio em relação ao esquema completamente implícito. Diversos esquemas de integração para elastoplasticidade podem ser encontrados em [14], [25] e [26].

Neste trabalho será utilizado um esquema de integração semi-implícito, desenvolvido por Moran et al. [27], em que o multiplicador plástico é integrado através de um esquema implícito e os vetores de fluxo são integrados explicitamente. Portanto, tem-se das Eqs.(24) o seguinte esquema de integração:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}_{i+1} = \underline{\varepsilon}_i + \Delta \underline{\varepsilon}_i \\ \underline{\varepsilon}_{i+1}^p = \underline{\varepsilon}_i^p + \Delta \lambda_{i+1} \underline{g}_{\sigma_i} \\ \underline{q}_{i+1} = \underline{q}_i + \Delta \lambda_{i+1} \underline{h}_i \\ \underline{\sigma}_{i+1} = \underline{D} \underline{\varepsilon}_{i+1}^e = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_{i+1} - \underline{\varepsilon}_{i+1}^p) \\ f_{i+1} = f(\underline{\sigma}_{i+1}, \underline{q}_{i+1}) = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

Os esquemas de integração de dois passos possuem duas etapas: a primeira, calcula-se o preditor elástico e, se necessário, o corretor plástico. Definindo $\Delta \underline{\varepsilon}_{i+1}^p \equiv \underline{\varepsilon}_{i+1}^p - \underline{\varepsilon}_i^p$, o preditor elástico pode ser explicitados da Eq.(24)₄ ou Eq.(25)₄ conforme:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{i+1} &= \underline{D}(\underline{\varepsilon}_{i+1} - \underline{\varepsilon}_{i+1}^p) = \underline{D}(\underline{\varepsilon}_i + \Delta \underline{\varepsilon}_i - \underline{\varepsilon}_i^p - \Delta \underline{\varepsilon}_{i+1}^p) \\ &= \underline{D}(\underline{\varepsilon}_i + \Delta \underline{\varepsilon}_i) - \underline{D} \Delta \underline{\varepsilon}_{i+1}^p = \underline{\sigma}_{i+1}^{trial} + \Delta \underline{\sigma}_{i+1} \end{aligned} \quad (26)$$

em que $\underline{\sigma}_{i+1}^{trial} = \underline{\sigma}_i + \underline{D}\Delta\underline{\varepsilon}_i$ é o preditor elástico (também conhecido como tensão tentativa). Dessa forma, no primeiro passo calcula-se a tensão tentativa e testa-se a função de escoamento f . Caso $f < 0$ o estado de tensões está no domínio elástico e não há necessidade de aplicar o corretor plástico. Contudo, se $f > 0$, ou seja, o estado de tensões está fora do domínio plasticamente admissível, é necessário aplicar a etapa do corretor plástico.

O corretor plástico, nada mais é do que o procedimento de solução do sistema (24)_{2,3,5} ou (25)_{2,3,5} que determinará os incrementos $\Delta\underline{\sigma}_{i+1}$ e $\Delta\underline{q}_{i+1}$. Quando não é possível obter uma solução analítica para esse sistema, o procedimento de solução comumente utilizado é o de Newton-Raphson que itera k vezes no espaço das tensões e variáveis internas até que o estado de tensões retorne sobre a superfície de escoamento. Por isso esses esquemas também são conhecidos como algoritmos de retorno mapeado (*return mapping algorithm*). A Fig.6 ilustra geometricamente essa solução.

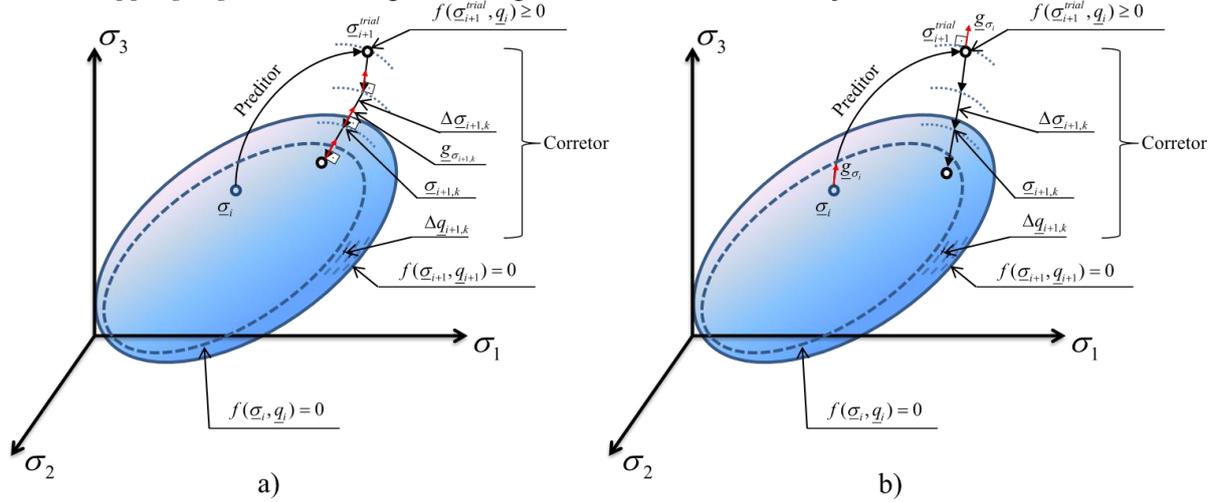


Figura 6. Ilustração do algoritmo de retorno mapeado: a) totalmente implícito e b) semi-implícito com k iterações locais de Newton-Raphson

Portanto, para se resolver por Newton-Raphson o sistema que dá origem ao corretor plástico, se escreve as Eqs.(25)_{2,3,5} na seguinte forma residual (omitindo-se o índice $i + 1$):

$$\begin{cases} \underline{a} = -\underline{\varepsilon}^p + \underline{\varepsilon}_i^p + \Delta\lambda \underline{g}_{\sigma_i} = \underline{0} \\ \underline{b} = -\underline{q} + \underline{q}_i + \Delta\lambda \underline{h}_i = \underline{0} \\ f = f(\underline{\sigma}, \underline{q}) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Linearizando o sistema (27) em relação a $\Delta\lambda$, sendo que $\Delta\underline{\varepsilon}^p = -\underline{D}^{-1}\Delta\underline{\sigma}$ tem-se:

$$\begin{cases} \underline{a}_k + \underline{D}\Delta\underline{\sigma}_k + \delta\lambda_k \underline{g}_{\sigma_i} = \underline{0} \\ \underline{b}_k - \Delta\underline{q}_k + \delta\lambda_k \underline{h}_i = \underline{0} \\ \underline{f}_k + \underline{f}_{\sigma_k}^T \Delta\underline{\sigma}_k + \underline{f}_{q_k}^T \Delta\underline{q}_k = 0 \end{cases} \quad (28)$$

As Eqs.(28) compreendem um sistema de três equações com três incógnitas: $\Delta\underline{\sigma}_k$, $\Delta\underline{q}_k$ e $\delta\lambda_k$ e, como os vetores de fluxo \underline{g}_{σ} e \underline{h} são calculados no passo inicial i , seus gradientes não apareceram nas formulações. Reorganizando esse sistema tem-se a seguinte solução para o corretor plástico:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\underline{\sigma}_k \\ \Delta\underline{q}_k \end{Bmatrix} = -\delta\lambda_k \begin{bmatrix} \underline{A}_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{g}_{\sigma_i} \\ \underline{h}_i \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\delta\lambda_k = \frac{f_k}{\begin{bmatrix} f_{\sigma_k}^T & f_{q_k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_k \\ \underline{h}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{g}_{\sigma_i} \\ \underline{h}_i \end{Bmatrix}} \quad (31)$$

Devido a esse tratamento explícito dos vetores de fluxo tem-se na Eq.(30) uma expressão fechada para $\begin{bmatrix} \underline{A}_k \end{bmatrix}$ envolvendo apenas o módulo elástico. Além disso, como o sistema (28) é composto de funções lineares em relação à $\Delta\lambda$ os resíduos \underline{a}_k e \underline{b}_k serão automaticamente nulos, dispensando sua verificação no critério de convergência, conforme apontado por [25]. O fluxograma pode ser visto na Fig.7.

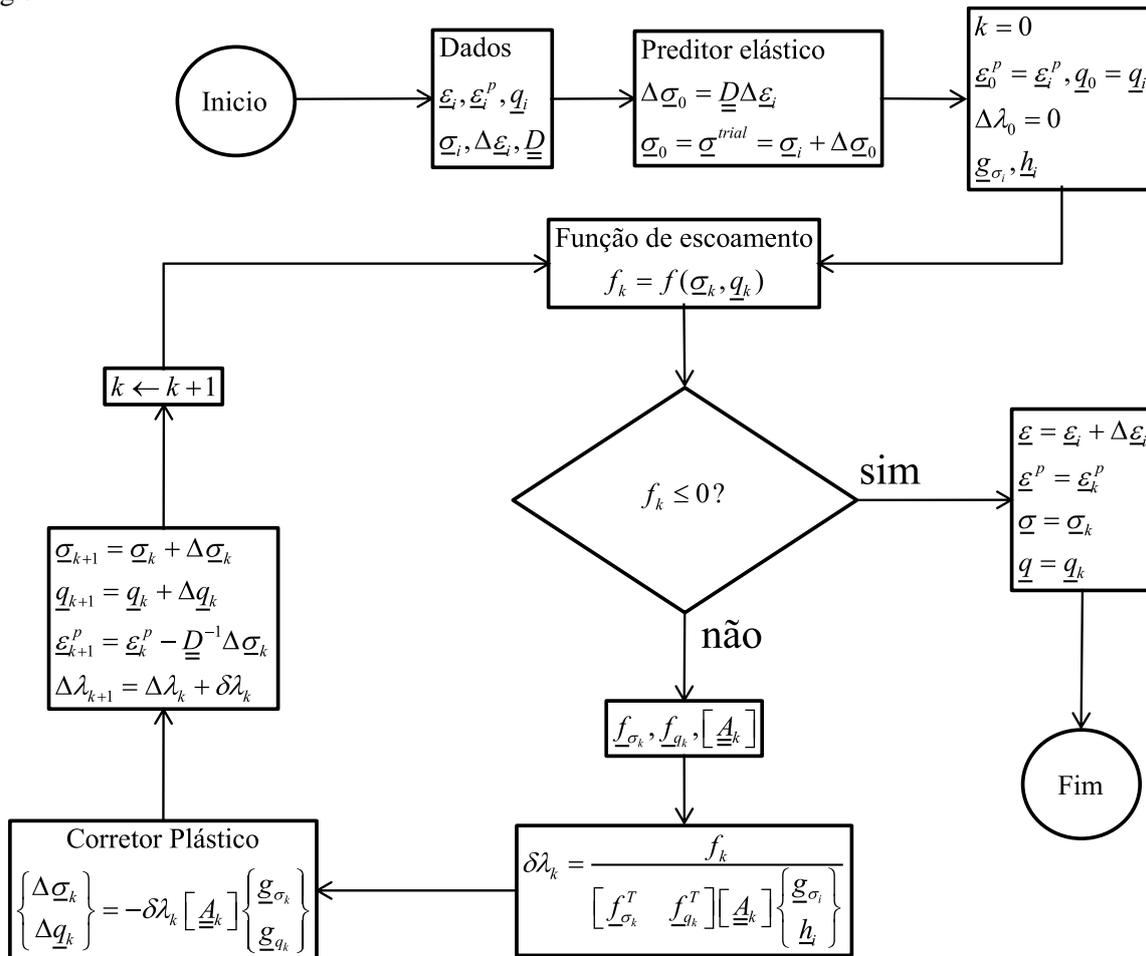


Figura 7. Algoritmo de integração para elastoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito (omitindo-se o índice $i + 1$)

6.2 Integração das equações constitutivas viscoplásticas

Diferentes algoritmos de integração podem ser encontrados na literatura, tais como em [28], [29], [30], [31], [32] e alguns dos mais utilizados em [25], [14], [33] e [34]. Para o presente trabalho será utilizado um esquema introduzido por Pierce et al. [31] conhecido como método da taxa do módulo tangente (*Rate Tangent Modulus Method*) que compreende um esquema de Euler explícito para todas as variáveis, exceto $\Delta\lambda$ que é integrado de acordo com a regra trapezoidal generalizada. Portanto tem-se o seguinte esquema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\varepsilon}_{i+1} = \underline{\varepsilon}_i + \Delta \underline{\varepsilon}_i \\ \underline{\varepsilon}_{i+1}^{vp} = \underline{\varepsilon}_i^{vp} + \Delta \lambda_{i+1} \underline{g}_{\sigma_i} \\ \underline{q}_{i+1} = \underline{q}_i + \Delta \lambda_{i+1} \underline{h}_i \\ \underline{\sigma}_{i+1} = \underline{D} \underline{\varepsilon}_{i+1}^e = \underline{D} (\underline{\varepsilon}_{i+1} - \underline{\varepsilon}_{i+1}^{vp}) \\ \Delta \lambda = \frac{\Delta t}{\eta} [(1-\theta)\Phi_i + \theta\Phi_{i+1}] \end{array} \right. \quad (32)$$

Linearizando a função de sobreensão da Eq.(18) tem-se:

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \underline{\Phi}_{\sigma_i} \Delta \underline{\sigma} + \underline{\Phi}_{q_i} \Delta \underline{q}. \quad (33)$$

Substituindo a Eq.(33) na Eq.(32)₅ obtém-se:

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta t}{\eta} \Phi_i + \frac{\theta \Delta t}{\eta} (\underline{\Phi}_{\sigma_i} \Delta \underline{\sigma} + \underline{\Phi}_{q_i} \Delta \underline{q}) \quad (34)$$

e introduzindo a Eq.(32)₂ na Eq.(32)₄ e reescrevendo a Eq.(32)₃ tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \underline{\sigma} \\ \Delta \underline{q} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{D} (\Delta \underline{\varepsilon}_i - \Delta \lambda \underline{g}_{\sigma_i}) \\ \Delta \lambda \underline{h}_i \end{array} \right\} \quad (35)$$

Por fim, substituindo a Eq.(35) na Eq.(34) isola-se $\Delta \lambda$:

$$\Delta \lambda = \frac{\Phi_i + \theta \underline{\Phi}_{\sigma_i}^T \underline{D} \Delta \underline{\varepsilon}_i}{\frac{\eta}{\Delta t} + \theta (\underline{\Phi}_{\sigma_i}^T \underline{D} \underline{g}_{\sigma_i} - \underline{\Phi}_{q_i}^T \underline{h}_i)} \quad (36)$$

Quando $0 < \theta < 1$ tem-se um algoritmo semi-implícito e quando $\theta = 0$ tem-se um algoritmo totalmente explícito, com $\Delta \lambda = \Delta t \Phi_i / \eta$. Como pode-se ver nessa dedução, ao contrário da integração das equações constitutivas da elastoplasticidade, não há necessidade de resolver um sistema de forma iterativa. Esse aspecto facilitará o acoplamento entre o algoritmo da viscoplasticidade e o da elastoplasticidade. O fluxograma desse método pode ser visto na Fig.8.

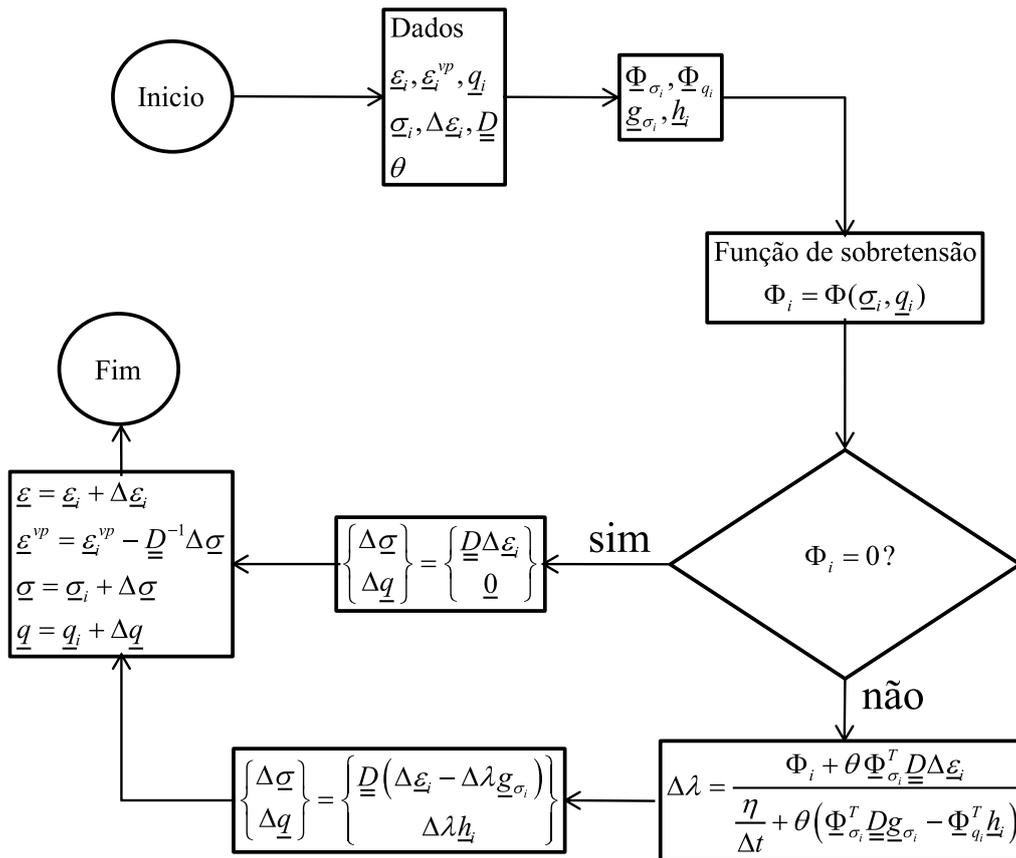


Figura 8. Algoritmo de integração para viscoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito (omitindo-se o índice $i + 1$)

6.3 Integração das equações constitutivas elastoplásticas-viscoplásticas

Como a viscoplasticidade é integrada através de uma regra semi-implícita na qual todas as variáveis são calculadas no passo i , ou seja, com a tensão conhecida, o incremento de deformação viscoplástica pode ser descontado diretamente do incremento de deformação total na etapa de predição elástica do algoritmo de elastoplasticidade. O algoritmo para integração das equações constitutivas elastoplástica-viscoplásticas pode ser visto no fluxograma da Fig.9.

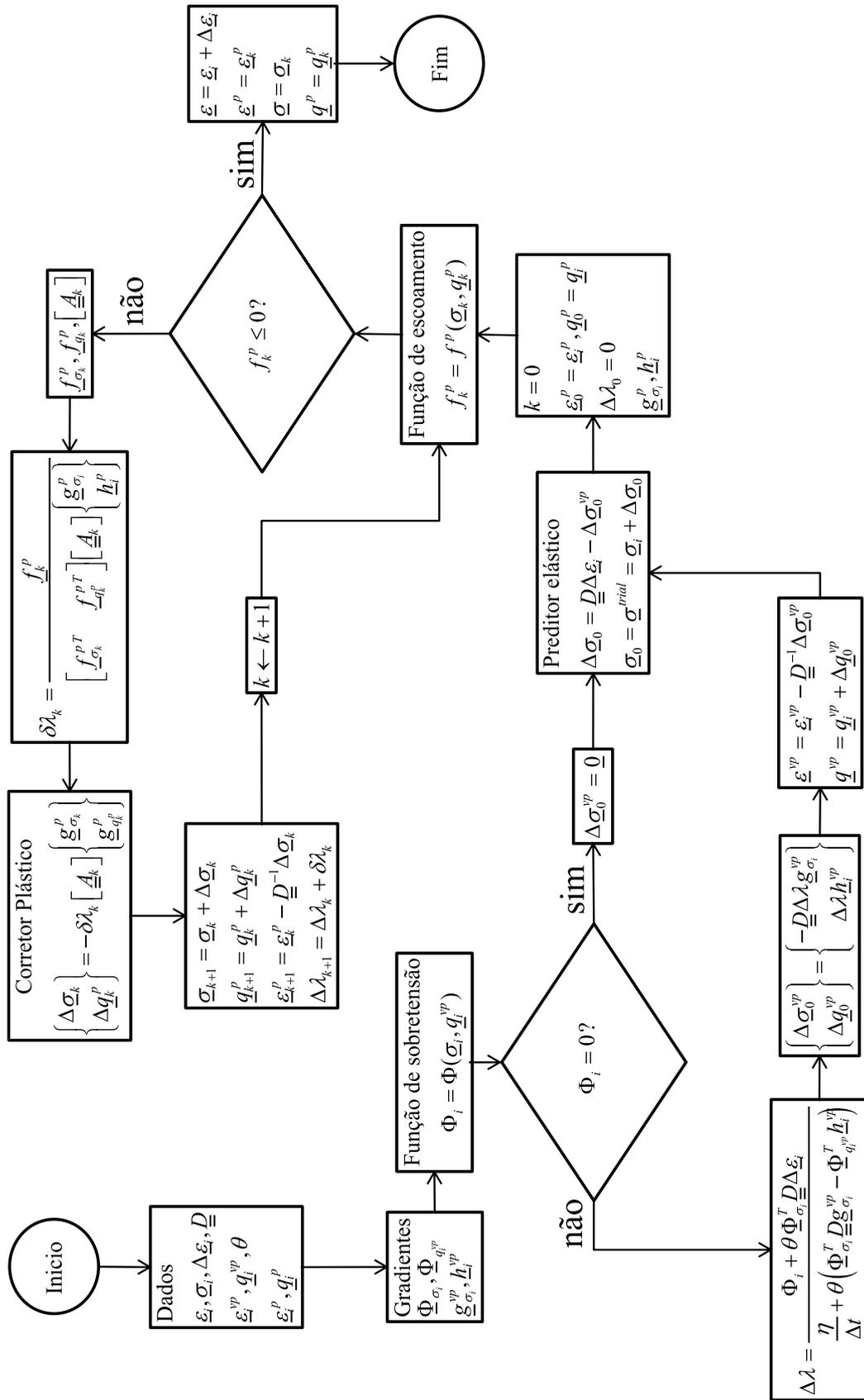


Figura 9. Algoritmo de integração para elastoplasticidade-viscoplasticidade utilizando um esquema de Euler semi-implícito (omitindo-se o índice $i + 1$)

7 Validação do modelo

Como validação será feita a comparação com a solução analítica deduzida por Piepi [5] para um modelo elastoplástico-viscoplástico perfeito com critério de Tresca aplicado em maciços argilosos profundos. Essa solução analítica foi escolhida por utilizar o mesmo princípio da associação da Fig.2 e será comparada com a solução numérica em axissimetria. Além disso, é considerada a mesma superfície para plasticidade e viscoplasticidade, e seus vetores de fluxos são totalmente associados $f^p = g^p = f^{vp} = g^{vp}$.

A malha (Fig.10) compreende 1222 elementos quadráticos *serendipity* de oito nós, dois graus de liberdade por nó e quatro pontos de integração. O domínio foi dividido em quatro áreas para o controle da discretização espacial. O tamanho do sistema, após a aplicação das condições de contorno, é de 7626 equações. O método de escavação consistiu na técnica de desativação dos elementos através da multiplicação do módulo de elasticidade do elemento por um fator de 10^{-6} (eliminando sua contribuição na matriz de rigidez) e zerando as tensões nos pontos de Gauss durante a integração das forças internas (eliminando sua contribuição no vetor de carga desbalanceado).

O fenômeno viscoso evolui através do tempo entre os passos de escavação. Esse tempo é calculado através da razão entre o tamanho do passo e a velocidade de escavação. Após a última escavação o modelo continua incrementando o tempo até que o incremento de deformação fique na ordem de 10^{-8} .

Os parâmetros geométricos e físicos constam na Tabela 1 e Tabela 2, respectivamente. Nesta última pode-se notar que o modelo elastoplástico possui uma coesão maior do que o modelo viscoplástico. Isso faz com que as deformações viscoplásticas tenham início antes mesmo do maciço plastificar.

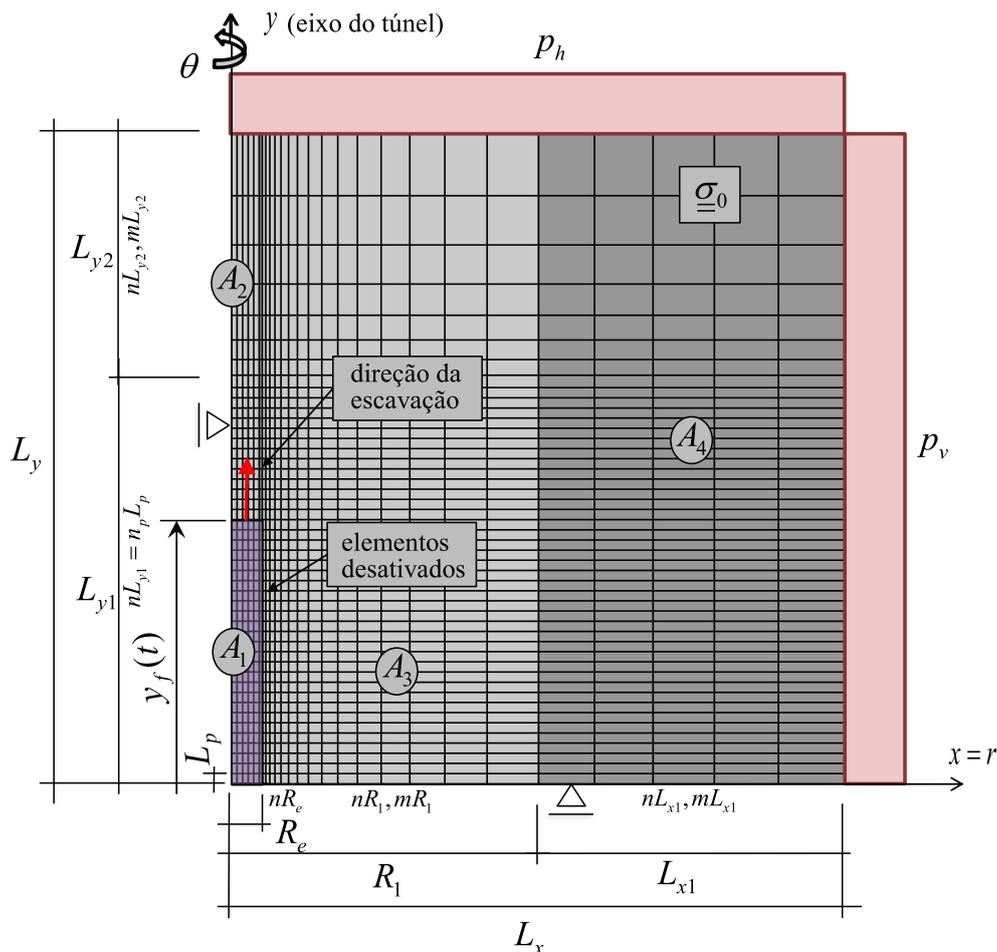


Figura 10. Domínio, parâmetros, condições de contorno e malha do modelo numérico axissimétrico

Tabela 1. Parâmetros geométricos do modelo axissimétrico

PARÂMETROS	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES
GEOMETRIA			
Raio externo da seção	R_e	m	1
Raio total do domínio	L_x	m	$20R_e$
Raio da região A3 (próxima ao túnel)	R_l	m	$10R_e$
Comprimento do passo de escavação	L_p	m	$1/3R_e$
Trecho do raio além da região A3	L_{x1}	m	$L_x - R_l$
Comprimento longitudinal total do domínio	L_y	m	$L_{y1} + L_{y2}$
Comprimento do trecho escavado	L_{y1}	m	$np * L_p$
Comprimento do trecho não escavado	L_{y2}	m	$25L_p$
ESCAVAÇÃO E COLOCAÇÃO DO REVESTIMENTO			
Número de passos de escavação	np	un	39
Número de passos na primeira escavação	np_1	un	3
Tamanho do passo de escavação	L_p	m	$1/3R_e$
Cota da face de escavação	y_f	m	$ip * L_p$
DISCRETIZAÇÃO			
Elementos ao longo de R_e	nR_e	un	6
Elementos ao longo de R_l	nR_l	un	15
Razão primeiro e o último elemento de R_l	mR_l	adm	15
Elementos ao longo de L_{x1}	nL_{x1}	un	5
Razão primeiro e o último elemento de L_{x1}	mL_{x1}	adm	1,2
Número de elementos ao longo de L_{y2}	nL_{y2}	un	8
Razão primeiro e o último elemento de L_{y2}	mL_{y2}	adm	5

Tabela 2. Parâmetros físicos do maciço

PARÂMETROS	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES
Módulo de Young	E	MPa	2000
Coefficiente de Poisson	ν	adm	0,498
Tensão hidrostática geostática	p_v, p_h, σ_0	MPa	9
Coesão (modelo elastoplástico)	C^p	MPa	4
Coesão (modelo viscoplástico)	C^{vp}	MPa	3
Constante de viscosidade dinâmica	η	MPa dia	$4 * 10^4$
Parâmetro da lei de potência	n	adm	1
Parâmetro convenientemente adotado	f_0	MPa	1
Velocidade de escavação	V	m/dia	1

O perfil de convergências (fechamento da seção do túnel ao longo do comprimento longitudinal) no longo prazo, ou seja, após cessarem os efeitos diferidos no tempo, pode ser visto na curva EP-VP da Fig.11. Há uma excelente concordância entre a solução numérica proposta e a solução analítica obtida por Piepi [5]. Além disso, foi plotado o perfil de convergências para cada modelo individual (E – Elástico, EP – Elastoplástico e VP – Viscoplastico), mostrando a relevância dos fenômenos diferidos no tempo. Para o modelo VP foi utilizado a mesma coesão do modelo EP, o que faz com que no longo prazo, as convergências do modelo VP se igualem ao modelo EP.

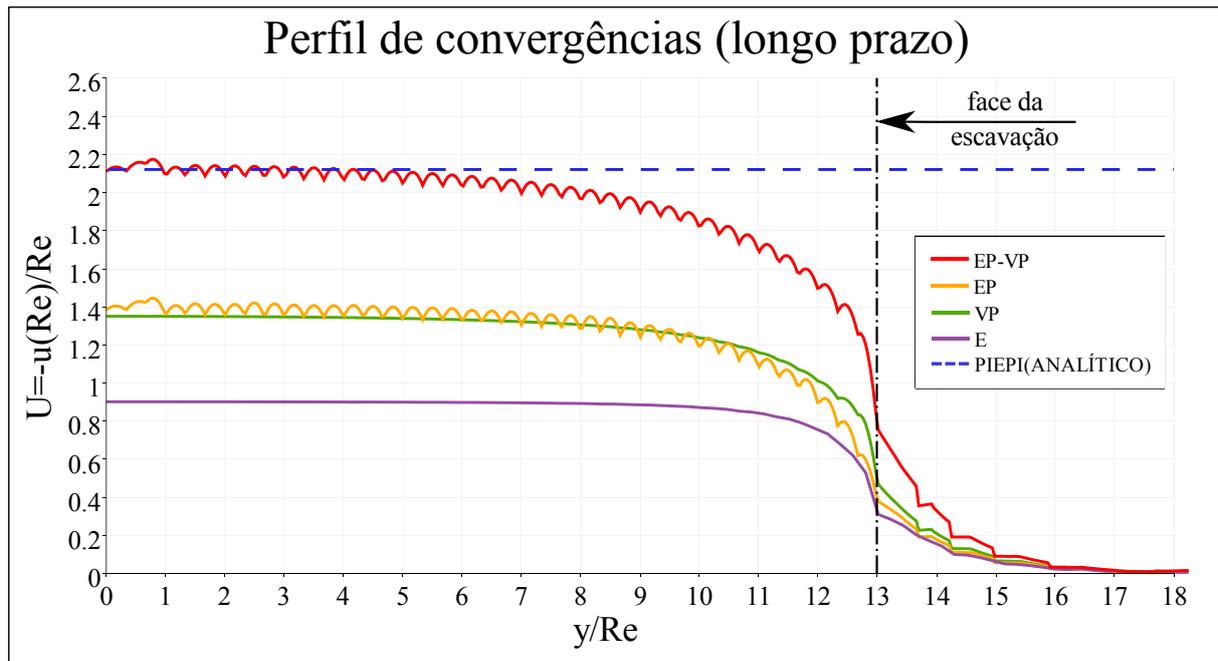


Figura 11. Perfil de convergências (longo prazo)

8 Conclusão

Esse trabalho buscou apresentar um esquema de integração numérica eficaz para o comportamento constitutivo elastoplástico-viscoplástico com variáveis de estado internas que representam processos irreversíveis. Para tanto, foi feita uma breve revisão bibliográfica sobre cada modelo em separado e, posteriormente, feito seu acoplamento. Também foi descrito os esquemas iterativos globais (iterações de equilíbrio) e locais que envolvem a solução desse tipo de problema. A comparação com uma solução analítica considerando o comportamento dos materiais perfeitos demonstrou a eficácia do algoritmo acoplado. Além disso, no exemplo aplicado, a convergência da seção do túnel após atingido a estabilização, utilizando o maciço elastoplástico-viscoplástico se mostrou 53% maior do que os modelos isolados mostrando a relevância desse comportamento acoplado.

Referencias

- [1] Rousset, G. *Comportement Mecanique des Argiles Profondes: application au stockage de déchets radioactifs*. 1988. Tese de Doutorado. École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. 1988.
- [2] Barla, G.; Bonini, M.; Debernardi, D. Time dependent deformations in squeezing tunnels. *The 12th international conference of International association for computer methods and advances in geomechanics (IACMAG)*, 2008, Goa, India.
- [3] Ramoni, M.; Anagnostou, G. Thrust force requirements for TBMs in squeezing ground. *Tunnelling and Underground Space Technology*, v. 25, n. 4, p.433-455, 2010b.
- [4] Manchao, H.; Xin, C.; Guofeng, Z.; Ziberio e Souza, L. Large deformation analysis in deep coal mines in china. *Innovative Numerical Modelling in Geomechanics. Innovative Numerical Modelling in Geomechanics*. CRC Press, p.333-353, 2012.
- [5] G. T. Piepi. *Comportement viscoplastique avec rupture des argiles raides*. 1995. Tese de Doutorado. École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris. 1995.
- [6] A. Purwodihardjo; B. Cambou. Effect of strain-softening on settlement due to tunnelling in soft soil. *New Paradigms in Subsurface Prediction*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2003, p. 173-188.
- [7] A. Kleine. *Modélisation numérique du comportement des ouvrages souterrains par une approche viscoplastique*. 2007. Tese de Doutorado. Institut National Polytechnique de Lorraine.

- [8] M. S. Q. Shafiq; M. R. Taha; Z. H. Chik. Finite element analysis of tunnels using the elastoplastic-viscoplastic bounding surface model. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, v. 3, n. 3, p. 36-42, 2008.
- [9] D. Debernardi; G. Barla. New viscoplastic model for design analysis of tunnels in squeezing conditions. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, v. 42, n. 2, p.259-288, 2009.
- [10] M. Souley; G. Armand; K. Su; M. Ghoreychi. Modeling the viscoplastic and damage behavior in deep argillaceous rocks. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, v. 36, n. 17-18, p. 1949-1959, 2011.
- [11] H. T. Manh; J. Sulem; D. Subrin; D. Billiaux. Anisotropic Time-Dependent Modeling of Tunnel Excavation in Squeezing Ground. *Rock Mechanics and rock Engineering*, v. 48, n. 6, p. 2301-2317, 2015.
- [12] A. Vrakas; G. Anagnostou. A simple equation for obtaining finite strain solutions from small strain analyses of tunnels with very large convergences. *Géotechnique*, v. 65, n. 11, p. 936-944, 2015.
- [13] W. F. Chen e D. Han. *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, 1988.
- [14] E. A. de Souza Neto; D. Peric e D. R. J. Owen. *Computational Methods for plasticity: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2008.
- [15] O. C. Zienkiewicz e I. C. Cormeau. Visco-plasticity and creep in elastic solids: a unified numerical solution approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 8, n. 4, p. 821-845, 1974.
- [16] M. N. viladkar; J. Noorzai e Godbole, P. N. Convenient forms of yield criteria in elasto-plastic analysis of geological materials. *Computers & Structures*, v. 54, n. 2, p. 327-337, 1995.
- [17] F. H. Norton. *The creep of steels at high temperatures*. Mc-Graw-Hill, New York, 1929.
- [18] J. Lemaitre; J. L. Caboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1996.
- [19] J. J. Skrzypek. *Plasticity and creep. Theory, examples and problems*. London: CRC Press, 1993.
- [20] P. Perzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. In: *Advances in applied mechanics*. Elsevier, 1966, p. 243-377.
- [21] G. C. Nayak e O. C. Zienkiewicz. Elastic-plastic stress analysis: a generalization for various constitutive relations including strain softening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 5, n. 1, p. 113-135, 1972.
- [22] O. C. Zienkiewicz; S. Valliapan; I. P. King. Elasto-plastic solutions of engineering problems – the initial stress finite element approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 1, n. 1, p. 75-100, 1969.
- [23] J. Owen; E. Hinton. *Finite Elements in Plasticity – Theory and Practice*. Pinebridge Press, 1980.
- [24] J. C. Simo e R. L. Taylor. Consistent tangente operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, v. 49, n. 2, p. 221-245.
- [25] T. Belytschko; W. K. Liu; B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Jhon Wiley & Sons, 2000.
- [26] J. C. Simo; T. J. R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [27] B. Moran; M. Ortiz; C. F. Shih. Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 29, n. 3, p. 483-514, 1990.
- [28] I. C. Cormeau. Numerical stability in quasi-static elasto/visco-plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 9, n. 1, p.109-127, 1975.
- [29] T. J. R. Hughes e R. L. Taylor. Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/viscoplastic finite element analysis. *Computers & Structures*, v. 8, n. 2, p.169-173, 1978.
- [30] J. M. M. C. Marques e D. R. J. Owen. Strain hardening representation for implicit quasistatic elasto-viscoplastic algorithms. *Computers & Structures*, v. 17, n. 2, p.301-304, 1983.
- [31] D. Pierce; C. F. Shih; A. Needleman. A tangent modulus method for rate dependent solids, *Computers & Structures*, v. 18, n. 5, p. 875-887, 1984.
- [32] D. Bernaud. *Tunnels profonds dans les milieux viscoplastiques: approches expérimentale et numérique*. 1991. Tese de Doutorado. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [33] J. Huang; D. V. Griffiths. Return mapping algorithms and stress predictors for failure analysis in geomechanics. *Journal of engineering mechanics*, v. 135, n. 4, p. 276-284, 2009.
- [34] I. M. Smith; D. V. Griffiths; L. Margetts. *Programming the Finite Element Method*. 5. Ed, John Wiley & Sons, 2014.