UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CADERNOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
SÉRIE B: TRABALHO DE APOIO DIDÁTICO

ATIVIDADES EM GEOMETRIA USANDO RECORTES

PARTE I - TEOREMA DE PITÁGORAS

MARLUSA BENEDETTI
PATRÍCIA PICOLO GIL
SHIRLEY ISABEL TECHERA

PARTE II - TEOREMA DE EQUIDECOMPOSIÇÃO DE POLÍGONOS

ANGELA ANDREOTTI
MILENE MILAN
MARLISE MORAES
LUCIANA SANTOS
AUGUSTINHO ZIMMERMANN

COORDENAÇÃO: PROFª MARIA ALICE GRAVINA

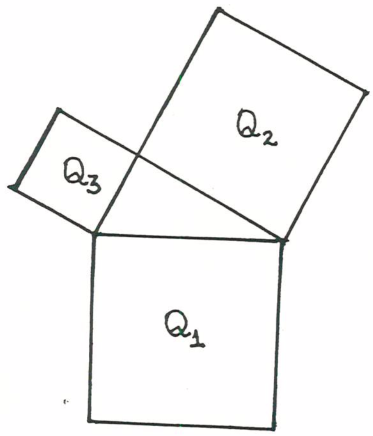
SÉRIE B, Nº 19
PORTO ALEGRE, OUTUBRO DE 1993

APRESENTAÇÃO

Este caderno apresenta dois resultados importantes em Geometria Plana :

TEOREMA DE PITÁGORAS

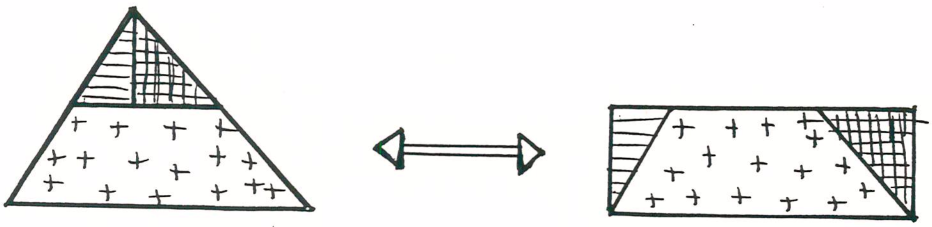
Num triângulo retangulo a área do quadrado que tem como um dos lados a hipotenusa e igual a soma das áreas dos quadrados que tem como lados os catetos.



área de Q_1 = área de Q_2 + área de Q_3

TEOREMA DE EQUIDECOMPOSIÇÃO DE POLÍGONOS

Dados dois polígonos de mesma área sempre é possível decompor um deles em polígonos menores de forma a compor o outro.



Os teoremas são trabalhados através da técnica de recortes. O material aqui apresentado pode ser utilizado de diversas maneiras dependendo do público a que se dirige :

* Uma abordagem lúdica - são quebra -cabeças que transformam triângulos em retângulos, retângulos em quadrados, dois quadrados num quadrado e polígono qualquer em quadrado. Podemos explorar as formas geométricas já a partir das primeiras séries do 1º grau.

* Uma abordagem intuitiva - triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, retas paralelas e perpendiculares são alguns dos conceitos desenvolvidos na construção dos quebra -cabeças. O desenho geométrico é trabalhado, já que a precisão das figuras é fundamental na montagem dos quebra-cabeças. É um trabalho que pode ser desenvolvido já a partir da 4ª série 1º grau.

* Uma abordagem dedutiva - são apresentadas as demonstrações que nos garantem que, de fato , os quebra-cabeças estão matemáticamente corretos. Nesta fase utilizamos vários conceitos da geometria : ângulos retos, complementares suplementares, retas perpendiculares e paralelas, soma dos ângulos internos de um triângulo, triângulos congruentes e semelhantes, comprimento e área.

Estas notas pretendem ser uma contribuição ao estudo da Geometria, especialmente nos 1º e 2º graus, já que todos os conteúdos aqui desenvolvidos fazem parte do currículo de matemática de nossas escolas.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido por alunos do curso de Licenciatura em Matemática como parte das atividades do 1º Salão do Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, realizado em outubro de 1992.

Os teoremas são trabalhados através da técnica de recortes. O material aqui apresentado pode ser utilizado de diversas maneiras dependendo do público a que se dirige :

* Uma abordagem lúdica - são quebra -cabeças que transformam triângulos em retângulos, retângulos em quadrados, dois quadrados num quadrado e polígono qualquer em quadrado. Podemos explorar as formas geométricas já a partir das primeiras séries do 1º grau.

* Uma abordagem intuitiva - quadrados, triângulos, retas paralelas, retas perpendiculares, paralelogramos são alguns dos conceitos desenvolvidos na construção dos quebra-cabeças. O desenho geométrico é trabalhado, já que a precisão das figuras é fundamental na montagem dos quebra-cabeças. É um trabalho que pode ser desenvolvido já a partir da 4ª série do 1º grau.

* Uma abordagem dedutiva - são apresentadas as demonstrações que justificam o funcionamento de cada um dos quebra-cabeças. Nesta fase utilizamos vários conceitos da geometria : ângulos retos, complementares e suplementares, retas perpendiculares e paralelas, soma dos ângulos internos de um triângulo, triângulos congruentes e semelhantes.

Estas notas pretendem ser uma contribuição ao estudo da Geometria, já que todos os conteúdos aqui desenvolvidos fazem parte do currículo de matemática de nossas escolas.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido por alunos do curso de Licenciatura em Matemática como parte das atividades do 1º Salão do Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, realizado em 1992.

NOTAÇÃO UTILIZADA NO TEXTO

$\overline{AB}$	segmento de extremos A e B
$\overrightarrow{AB}$	semi-reta de origem A passando por B
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	segmentos paralelos
$\overline{AB} \perp \overline{CD}$	segmentos perpendiculares
$\overline{AB} \simeq \overline{CD}$	segmentos congruentes
$B\hat{A}C$ ou $\hat{A}$	ângulo de vértice A e lados AB e AC
$\hat{A} \simeq \hat{O}$	ângulos congruentes
$B\hat{A}C \simeq N\hat{O}P$	ângulos congruentes
$\triangle\ ABC$	triângulo de vértices A,B e C.
$\triangle\ ABC \simeq \triangle\ DEF$	triângulos congruentes
L.L.L.	critério de congruência lado,lado,lado
A.L.A.	critério de congruência ângulo,lado,ângulo
L.A.A_o.	critério de congruência lado,âng.,âng.oposto
$\square$ ABCD	quadrilátero de vértices A,B,C e D.

Teorema dos 180 :
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

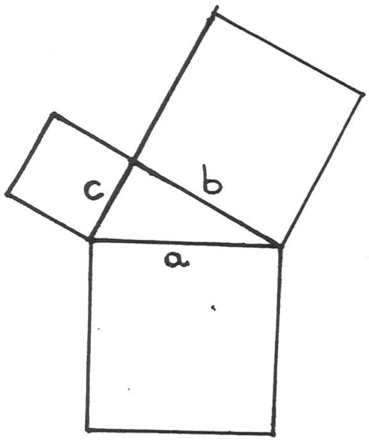
Observação:
Todas as demonstrações estão feitas na forma afirmação X razão. A coluna da esquerda são as afirmações e a da direita são as razões.

PARTE I

PARTE I
TEOREMA DE PITÁGORAS

Vamos aqui trabalhar com o teorema na forma enunciada no início deste caderno:

"Num triângulo retângulo a área do quadrado que tem como um dos lados a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados que tem como lados os catetos".



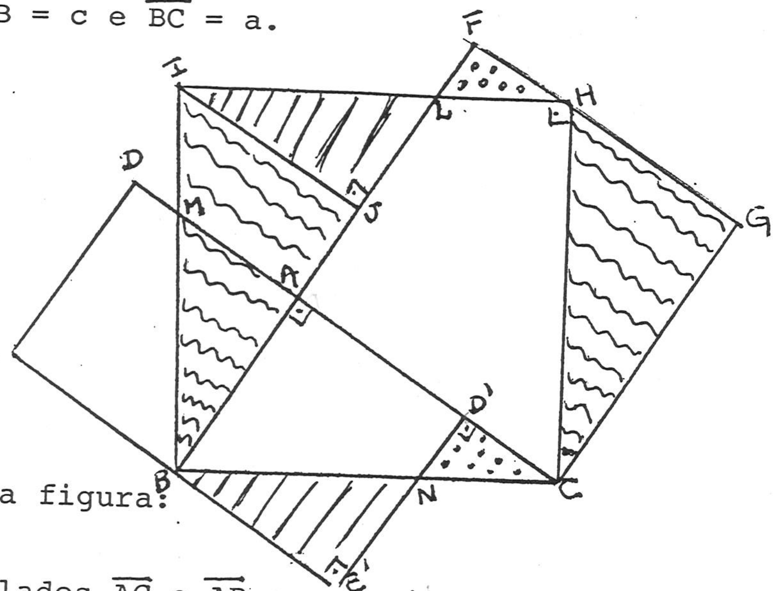
$a^2 = b^2 + c^2$

Vamos apresentar aqui quatro demonstrações. Em todas elas o procedimento é recortar os três quadrados de maneira tal que podemos compor o quadrado maior a partir dos dois menores. Nas três primeiras demonstrações iniciamos com as instruções de recortes (ou seja, a construção do quebra-cabeça) e finalizamos com a demonstração que nos garante que de fato é possível compor o quadrado grande a partir dos dois menores (ou seja, o quebra-cabeça de fato está certo). Na última demonstração o raciocínio usado é o que aparece no primeiro dos treze livros de Euclides : mostra-se que o quadrado maior se decompõe em dois retângulos, cada um com área igual a um dos quadrados menores,e o quebra-cabeça transforma estes retângulos em quadrados.

No final das demontrações anexamos os mapas dos quebra-cabeças.

1ª DEMONSTRAÇÃO

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em A e os segmentos $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e $\overline{BC} = a$.



Construção da figura:

1) Sobre os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ construir os quadrados ACGF e ABEP, de lados respectivamente b e c.

2) Traçar uma perpendicular ao lado $\overline{BC}$ passando por C e chamar de H a intersecção com o segmento $\overline{FG}$.

3) Traçar uma paralela a $\overline{BC}$ passando por H.

4) Traçar uma perpendicular a $\overline{BC}$ passando por B e chamar de I a intersecção com a reta construída em 2.

5) Traçar uma perpendicular a $\overline{BF}$ partindo de I e chamar de J a intersecção com $\overline{BF}$.

6) Marcar sobre $\overline{AC}$ um segmento $\overline{AD'}$ de comprimento igual a c

7) Prolongar $\overline{EB}$ e marcar um segmento $\overline{BE'}$ de comprimento igual a c

8) Ligar D' a E' formando um novo quadrado ABE'D' de lado igual a c.

9) Considere L a intersecção $\overline{FA}$ com $\overline{IH}$.

10) Considere M a intersecção de $\overline{IB}$ com $\overline{DA}$.

11) Considere N a intersecção de $\overline{BC}$ com $\overline{E'D'}$.

Provaremos agora que a figura IBCH é quadrado:

1) $\hat{B} = \hat{C} = 90°$	1) Por construção
2) $\hat{H} = 90 = \hat{I}$	2) $\overline{IH} \parallel \overline{BC}$, $\overline{BC} \perp \overline{HC}$ e $\overline{IB} \perp \overline{BC}$
3) IBCH é retângulo	3) Por 1 e 2
4) $\overline{AC} \cong \overline{CG}$	4) lados do quadrado ACGF
5) $B\hat{C}A + A\hat{C}H = 90°$	5) Por construção
6) $H\hat{C}G + A\hat{C}H = 90°$	6) Pois é vértice do quadrado ACGF

7) $B\hat{C}A \cong H\hat{C}G$	7) Por 5 e 6
8) $\triangle\ ABC \cong \triangle\ GHC$	8) Por 4, 7 e A.L.A.
9) IBCH é quadrado	9) Por 3 e 8

Queremos mostrar que os quadrados DEBA e ACGF conseguem cobrir exatamente o quadrado IBCH.

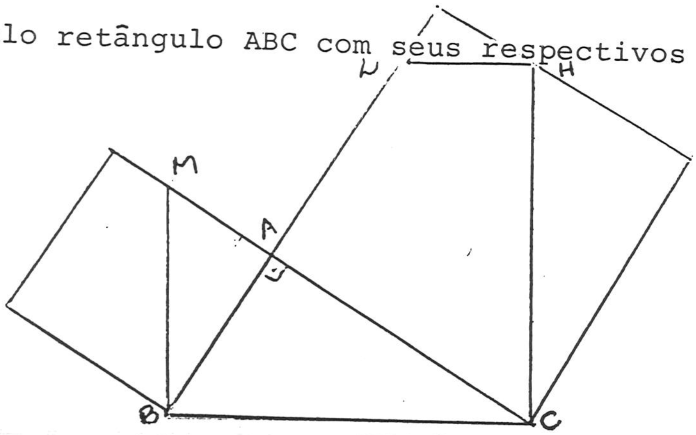
De acordo com a construção, as figuras ABND' e ACHL já estão dentro deste quadrado. Falta mostrar que o restante das figuras encaixam-se nos espaços que sobram:

10) $\overline{BI} \cong \overline{HC}$	10) Lados do quadrado
11) $J\hat{I}B + A\hat{B}I = 90°$	11) Teorema dos 180°
12) $A\hat{B}C + A\hat{B}I = 90°$	12) Por construção
13) $J\hat{I}B \cong A\hat{B}C$	13) Por 11 e 12
14) $\triangle\ IJB \cong \triangle\ ABC \cong \triangle\ GHC$	14) Por 8, 10, 13 e L.A.Ao.
15) $\overline{IJ} \cong \overline{AB} \cong \overline{BE'}$	15) Por 14 e por construção
16) $E'\hat{B}N + A\hat{B}C = 90°$	16) Pois são vértices do quadrado
17) $L\hat{I}J + J\hat{I}B = 90°$	17) Pois são vértices do quadrado.
18) $E'\hat{B}N \cong L\hat{I}J$	18) Por 16,17 e 13
19) $\triangle\ IJL \cong \triangle\ B\hat{E}'N$	19) Por 15, 18 e L.A.Ao.
20) $\overline{FH} + \overline{HG} = \overline{AD'} + \overline{D'C}$	20) Lados do quadrado ACGH
21) $\overline{FH} = \overline{D'C}$	21) Por 14
22) $\hat{F} = \hat{D} = 90°$	22) Vértice de quadrados
23) $F\hat{L}H = I\hat{L}J = C\hat{N}D'$	23) ângulos opostos pelo vértice e por 19
24) $\triangle\ FLH \cong \triangle\ D'NC$	24) Por 23, 21 e L.A.Ao.

Logo, está comprovado que as figuras encaixam-se exatamente no quadrado.

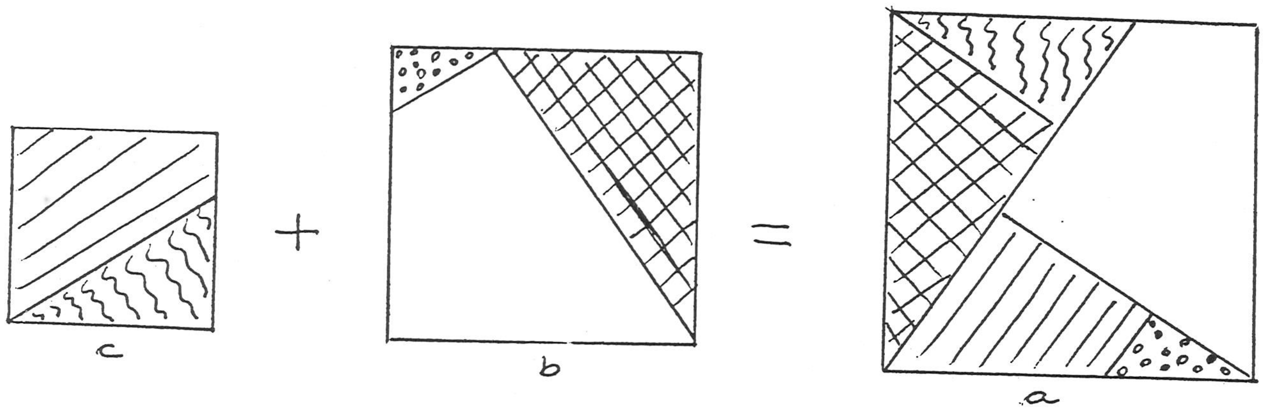
QUEBRA-CABEÇA

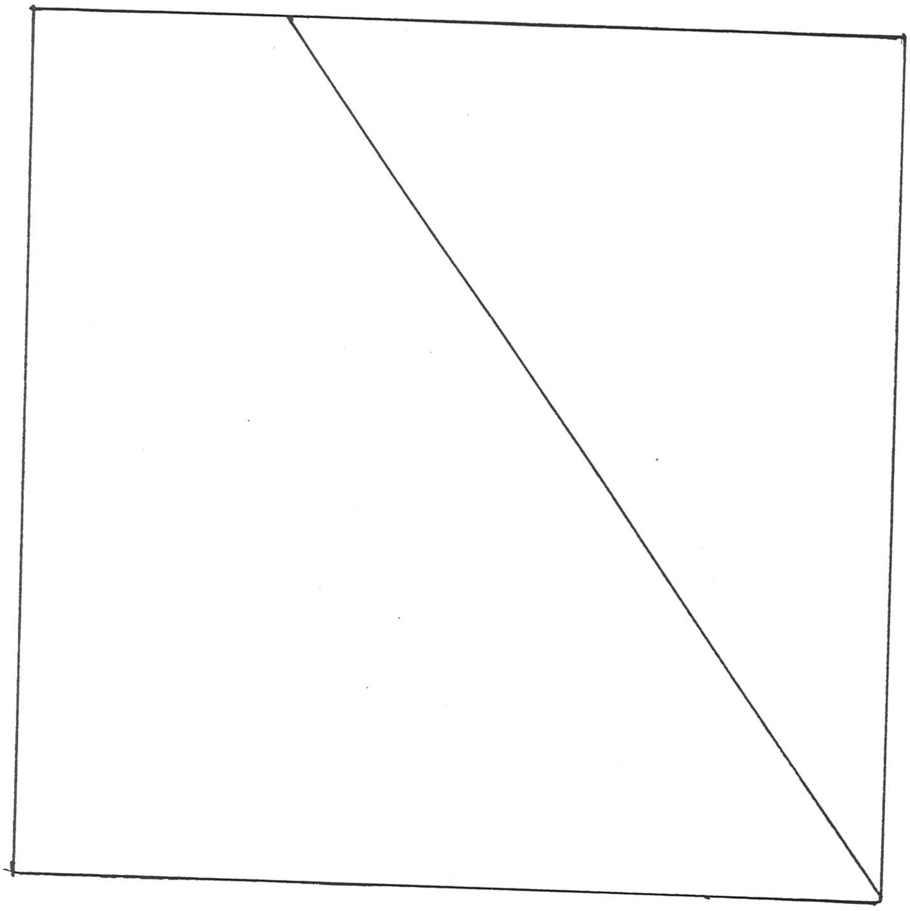
* Tome o triângulo retângulo ABC com seus respectivos quadrados:

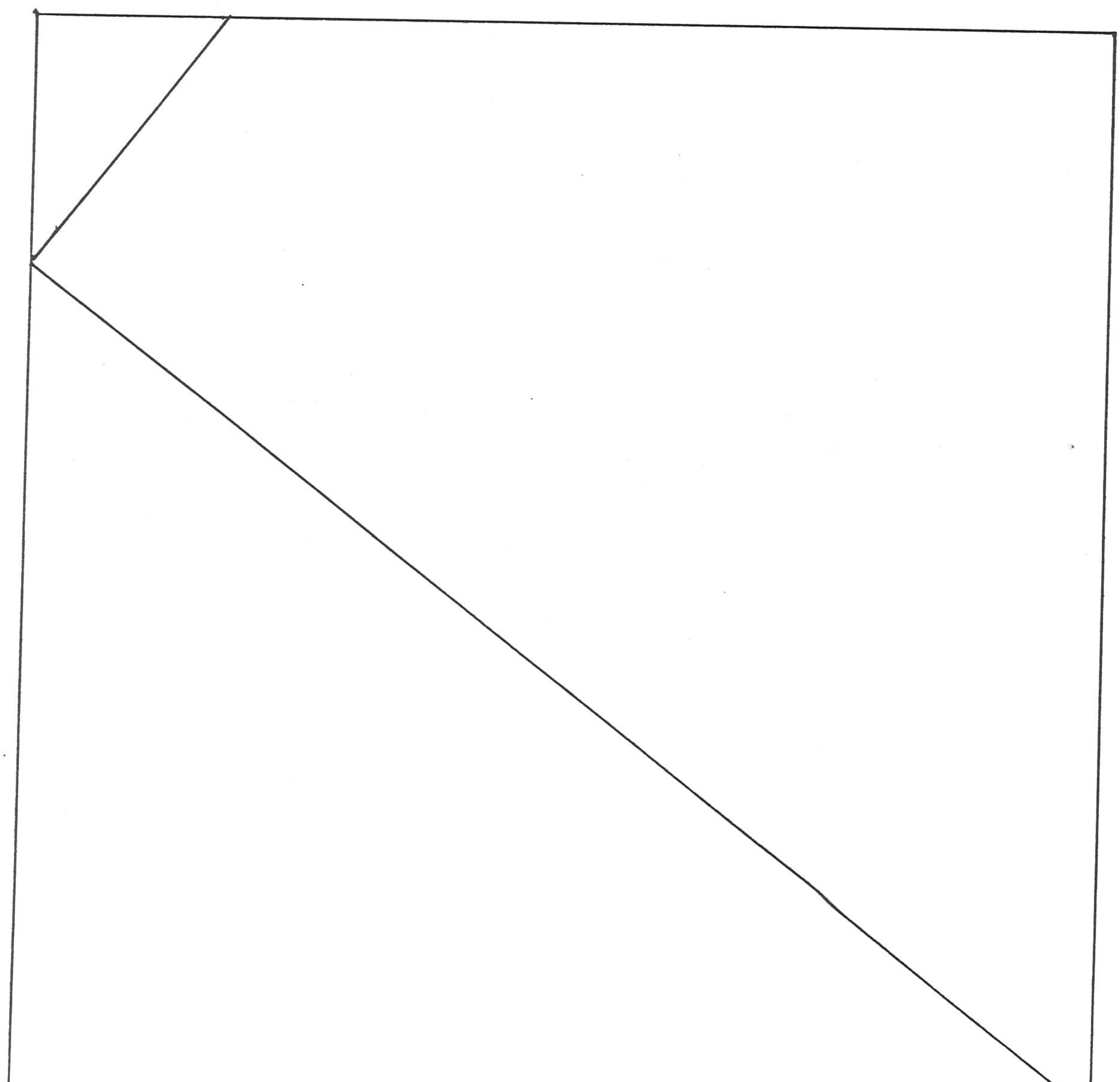


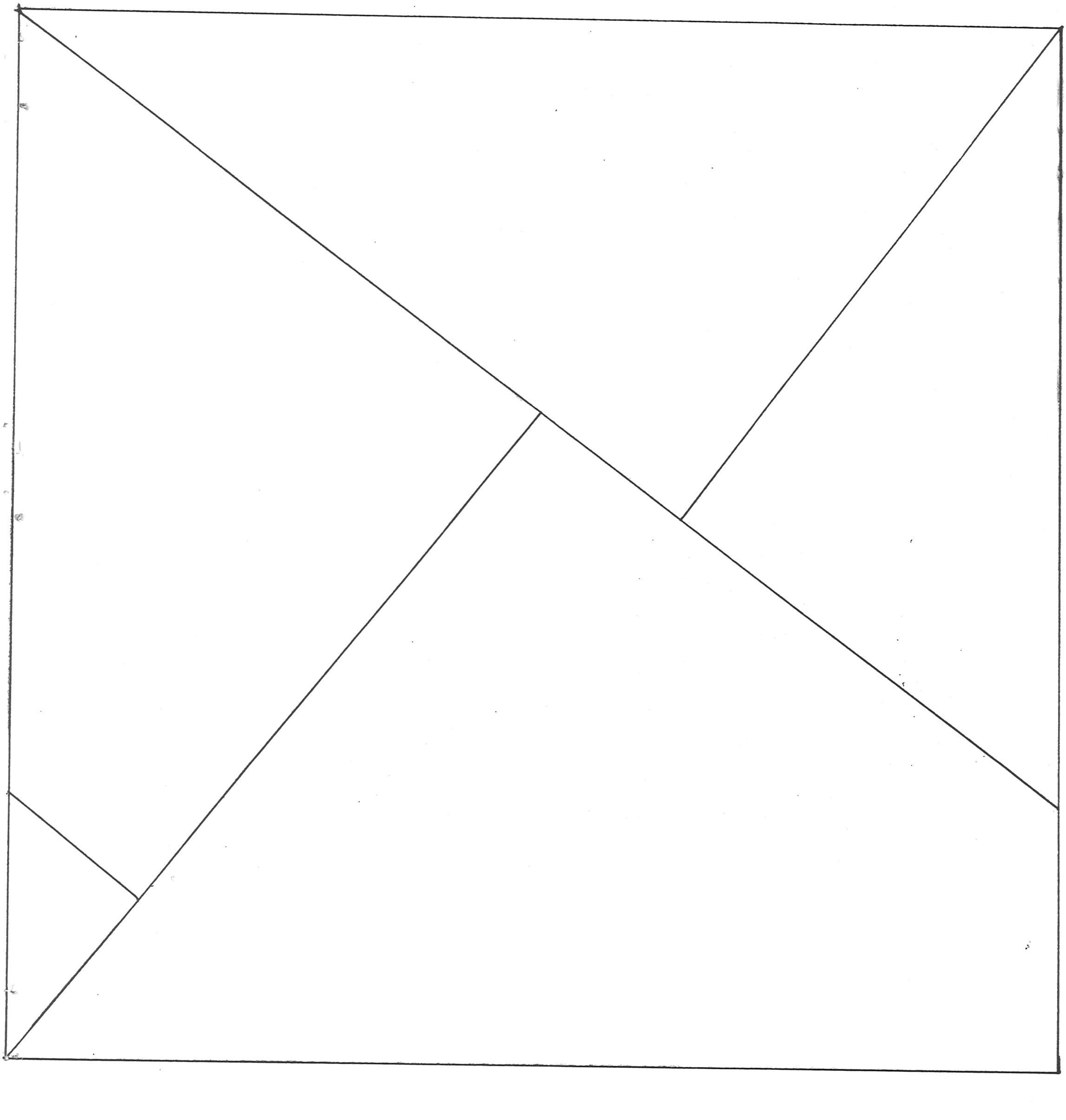
1) Trace $\overleftrightarrow{BM}$ perpendicular a $\overline{BC}$ passando por B.
2) Trace $\overleftrightarrow{CH}$ perpendicular a $\overline{BC}$ passando por C.
3) Trace $\overleftrightarrow{HL}$ paralela a $\overline{BC}$ passando por H.

* Recorte os quadrados conforme foi montado e componha o quadrado de lado a de acordo com a figura abaixo:





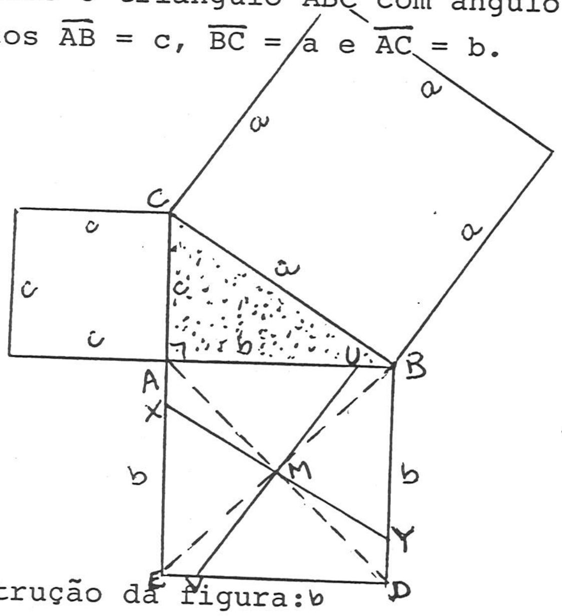




2º DEMONTRAÇÃO

Demonstração feita por Perigal.

Considere o triângulo ABC com ângulo reto em A e com medidas dos segmentos $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.



* Construção da figura:

a) Desenhe quadrados sobre os lados do triângulo inicial.

b) Desenhe as diagonais do quadrado ABED (tracejado na figura). Chame de M a intersecção das diagonais.

c) Divida o quadrado em quatro partes iguais, traçando os segmentos $\overrightarrow{XY}$ e $\overrightarrow{UV}$, que passam pelo centro de ABDE paralelos aos lados do quadrado de lado $\overline{BC}$. Sendo assism, temos 4 peças com ângulo reto.

d) Assinale em cada peça os ângulos retos com os números 1, 2, 3 e 4.

Será que, recortando estas quatro peças e juntando-as com o quadrado de lado c conseguiremos cobrir o quadrado de lado a?

Mostraremos que sim:

1) $\triangle AMB \cong \triangle ABM \cong \triangle DME \cong \triangle EMA$	1) Por L.L.L.
2) $\triangle EMV \cong \triangle DMY \cong \triangle BMU \cong \triangle AMX$	2) Por A.L.A.
3) $AXMU \cong BUMY \cong DYMV \cong VMXE$	3) Por 1 e 2
4) $\overline{XM} \cong \overline{YM} \cong \overline{UM} \cong \overline{MV}$	4) Por 3
5) $\overline{XE} \cong \overline{VD} \cong \overline{YB} \cong \overline{UA}$	5) Por 3
6) $\overline{AX} \cong \overline{EV} \cong \overline{DY} \cong \overline{BU}$	6) Por 3
7) $\overline{XM} + \overline{MY} = \overline{CB} = \overline{UM} + \overline{UV}$	7) $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{CX} \parallel \overline{BY}$ lados de um paralelog.
8) $\overline{XA} + \overline{AC} = \overline{YB}$	8) lados do paralelogramo CXYB

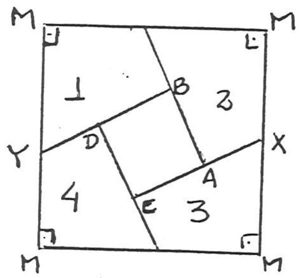


Figura 2.

Conseguiremos encaixar os quatro pedaços no quadrado de lado CB como mostra a figura 2.

1) 1, 2, 3 e 4 são ângulos retos	1) Por construção
2) $2\overline{MY} = 2\overline{MV} = 2\overline{MX} = 2\overline{MU} = \overline{CB}$	2) Por 4 e 7

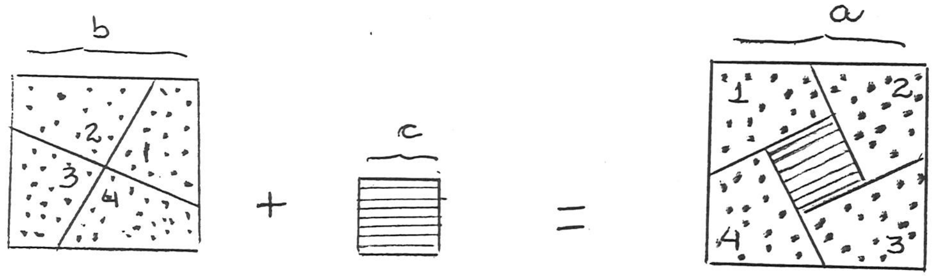
Sobra, no entanto a figura de lado DEAB. Mostraremos então que é um quadrado de lado AC.

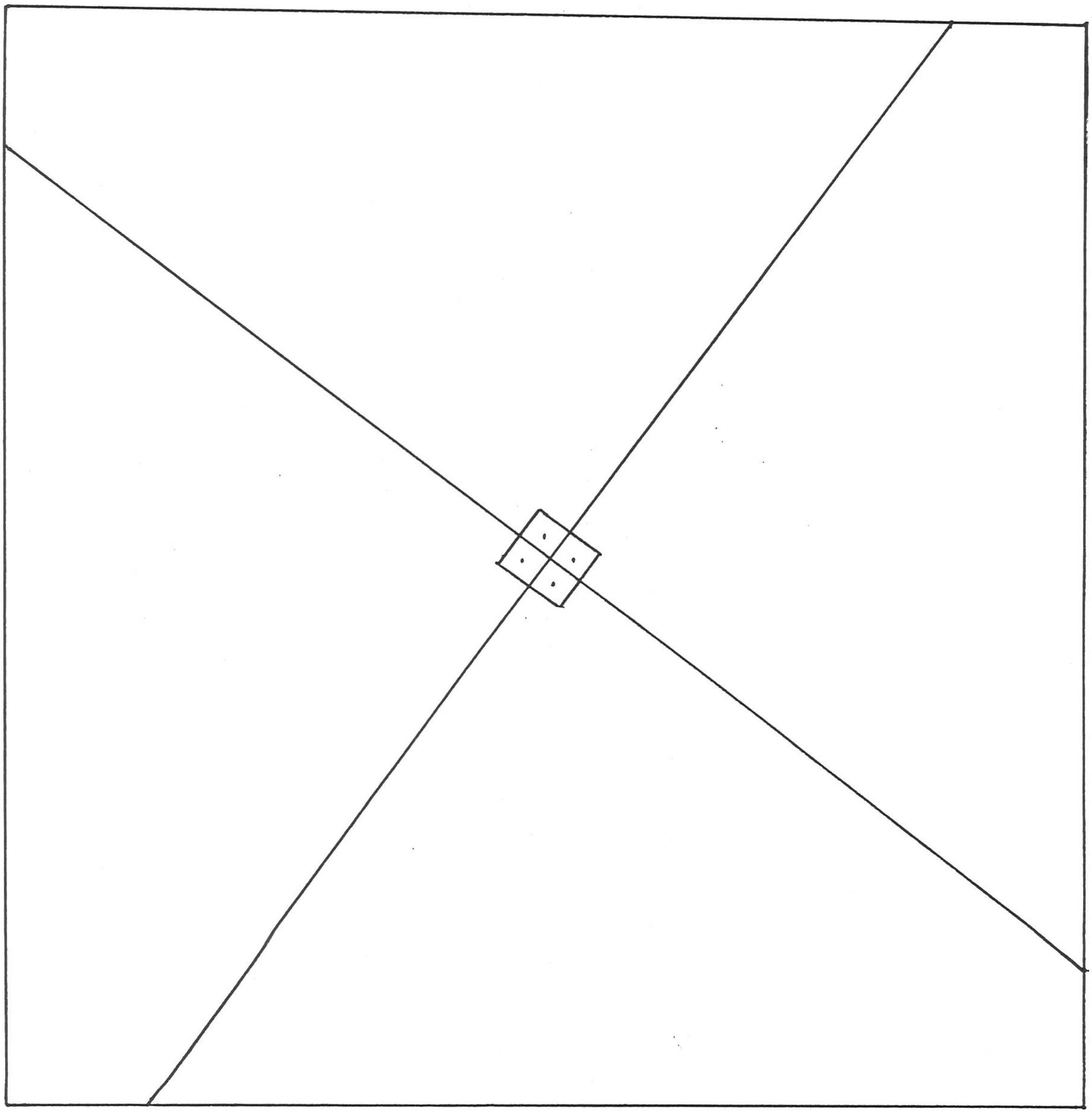
3) $\hat{A} \cong \hat{E} \cong \hat{D} \cong \hat{B} \cong 90^{o}$	3) Vértices do quadrado AEDB
4) $\overline{AC} = \overline{YB} - \overline{XA} = \overline{VD} - \overline{EV}$	4) Por 5, 6 e 8

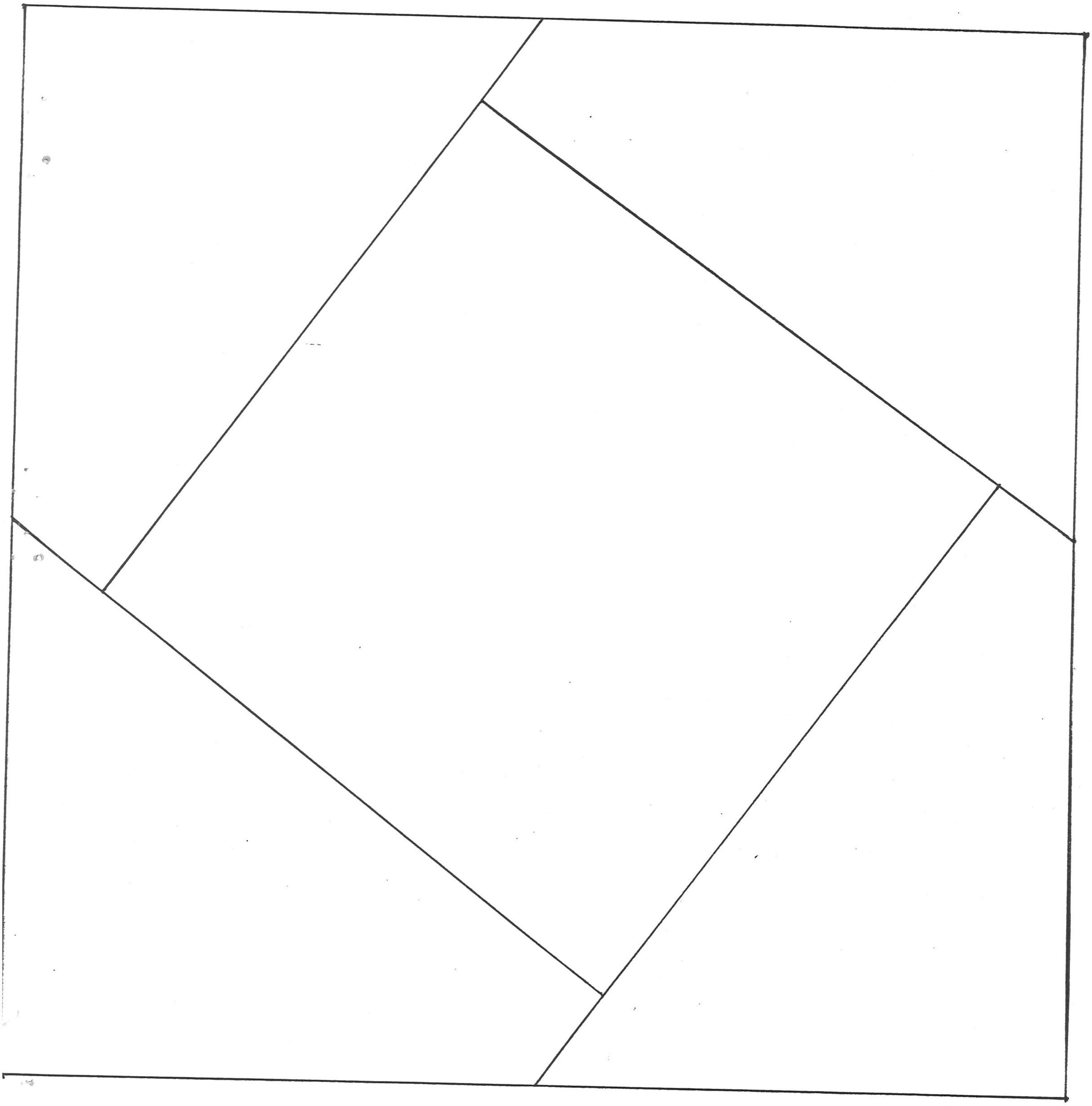
Logo, por 3 e 4, DEAB é quadrado com lado igual a $\overline{AC}$.

QUEBRA-CABEÇA

* Para fazermos o quebra-cabeça precisamos apenas recortar o quadrado de lado b de acordo com a orientação dada em b, c e d, utilizada na construção da figura 1.

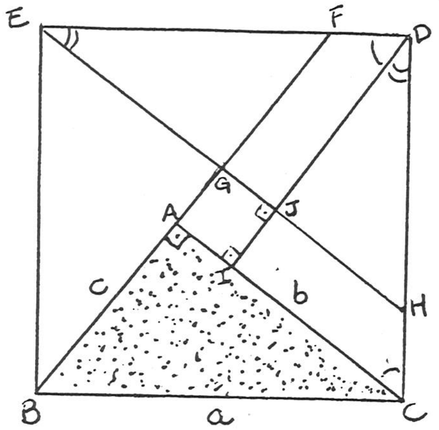






3º DEMONSTRAÇÃO

Dado o triângulo ABC retângulo com ângulo reto em A:



Consideremos as seguintes medidas para os segmentos $\overline{AC}$ = b, $\overline{BC}$ = a e $\overline{BA}$ = c.

Construção da figura desejada:

1) Levantar duas perpendiculares ao segmento $\overline{BC}$. Uma passando pelo vértice B do $\triangle$ ABC e a outra passando pelo vértice C do $\triangle$ ABC.

2) Marcar o ponto D sobre a perpendicular que passa por C de forma que $\overline{CD}$ = a e o ponto E sobre a perpendicular por B de forma que $\overline{BE}$ = a.

3) Unir os pontos D e E.

Por construção, o quadrilátero BCDE é um quadrado.

4) Prolongar o segmento $\overline{AB}$ até que encontre o lado $\overline{DE}$ e chame de F a intersecção.

5) Traçar uma perpendicular ao segmento $\overrightarrow{BF}$ que passe pelo vértice E do quadrado e chame de G a intersecção deste segmento com o segmento $\overrightarrow{BF}$ e de H a intersecção com o segmento $\overline{DC}$.

6) Traçar uma perpendicular à $\overline{AC}$ e $\overline{EH}$ que passe pelo vértice D do quadrado e chame de I a intersecção com o segmento $\overline{AB}$ e J a intersecção com o segmento $\overline{EH}$.

Temos agora:

1) $\hat{A} \cong \hat{G} \cong \hat{J} \cong \hat{I} = 90°$	1) Por construção
2) $\overline{DE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BC} \cong \overline{BE}$	2) Por construção
3) $D\hat{E}J + B\hat{E}G = 90°$	3) Por construção
4) $E\hat{D}J + C\hat{D}I = 90°$	4) Por construção
5) $D\hat{E}J + E\hat{D}J = 90°$	5) Teor. da soma dos ângulos internos de um triângulo
6) $B\hat{E}G \cong J\hat{D}C$	6) Por 5 e 3
7) $C\hat{D}I \cong D\hat{E}J$	7) Por 5 e 4
8) $C\hat{D}I + C\hat{D}J = 90°$	8) Teor. da soma dos ângulos internos de um triângulo
9) $E\hat{D}J \cong D\hat{C}I$	9) Por 8 e 4
10) $\triangle\ JED \cong \triangle\ IDC$	10) Por 9,7,2 e A.L.A.

Analogamente conseguiremos mostrar que:

11) $\triangle\ ABC \cong \triangle\ GEB \cong \triangle\ JDE \cong \triangle\ ICD$

Sabemos que o quadrilátero AIJG é retângulo pois as retas foram construídas perpendicularmente. Porém sabemos, por 11), que $AI = (b-c)$ e $IJ = (b-c)$. Logo, ele é quadrado.

Analisaremos agora a área do quadrado maior:

A área do quadrado grande é igual a soma das áreas dos 4 triângulos + área do quadradinho, então:

$$a^2 = (b-c)^2 + \frac{\cancel{4}bc}{\cancel{2}}$$

$$a^2 = b^2 - \cancel{2bc} + c^2 + \cancel{2bc}$$

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2}$$

Com esta afirmação, podemos concluir que a área do quadrado grande pode ser decomposto em dois quadrados menores com lados b e c.

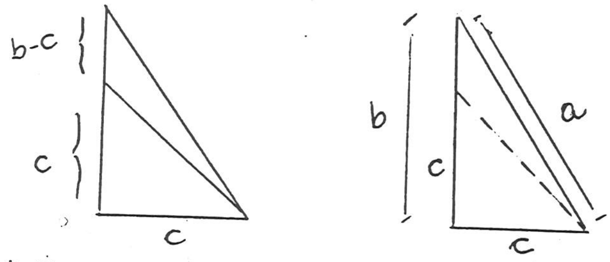
QUEBRA-CABEÇA

Consideremos a figura construída inicialmente.

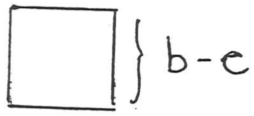
* Corte dois destes triângulos em outros dois, sendo um deles retângulo e isósceles.

* Tome dois dos triângulos retângulos da figura.

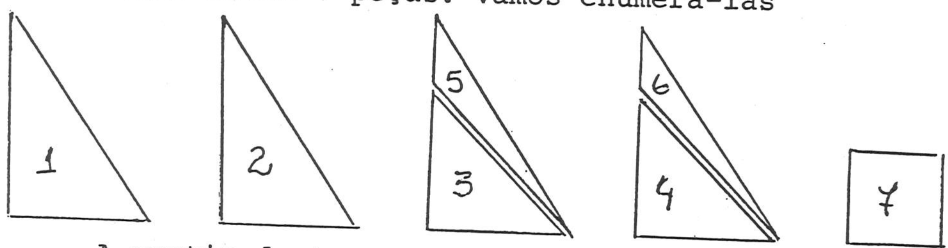
Recorte em cada um destes retângulos um triângulo isósceles de lado c conforme indicado:



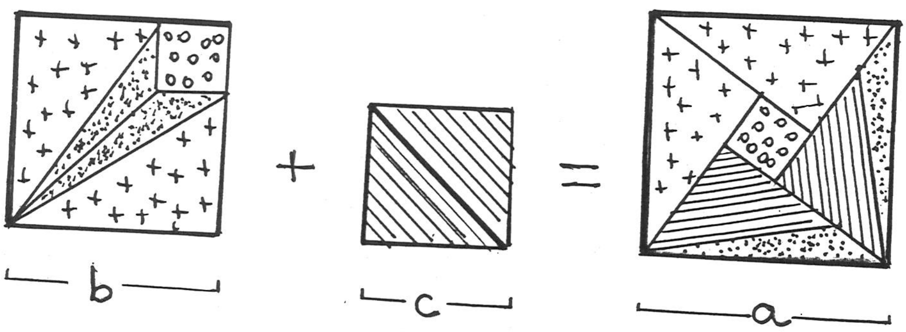
* Tome o quadrado central de lado b-c

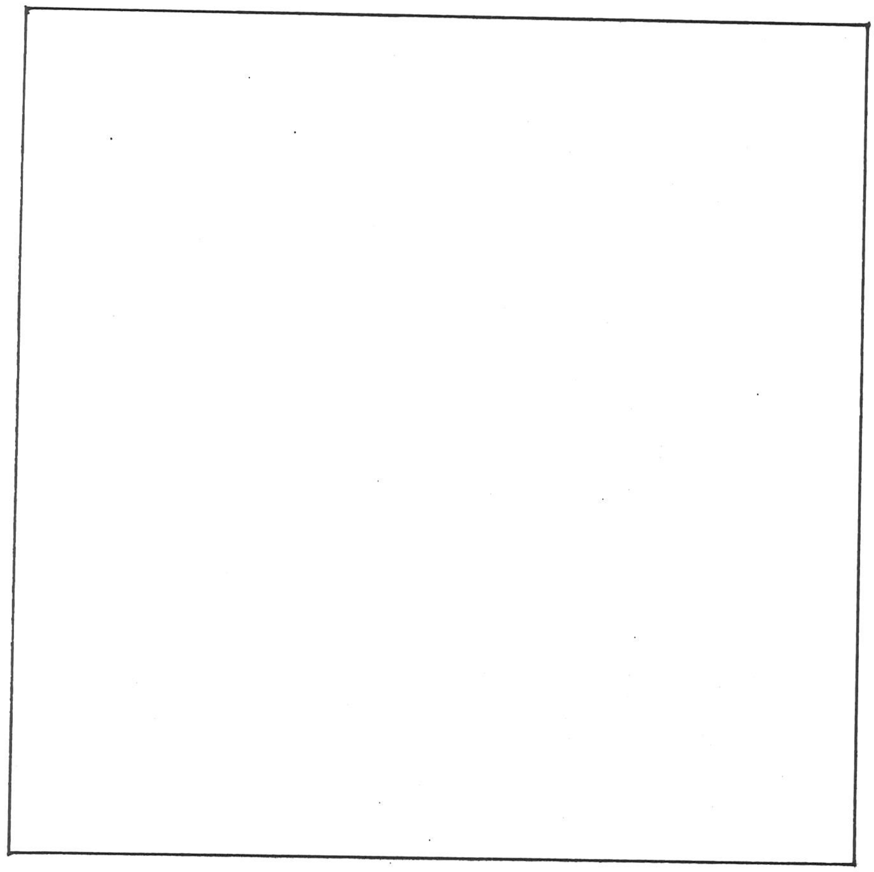


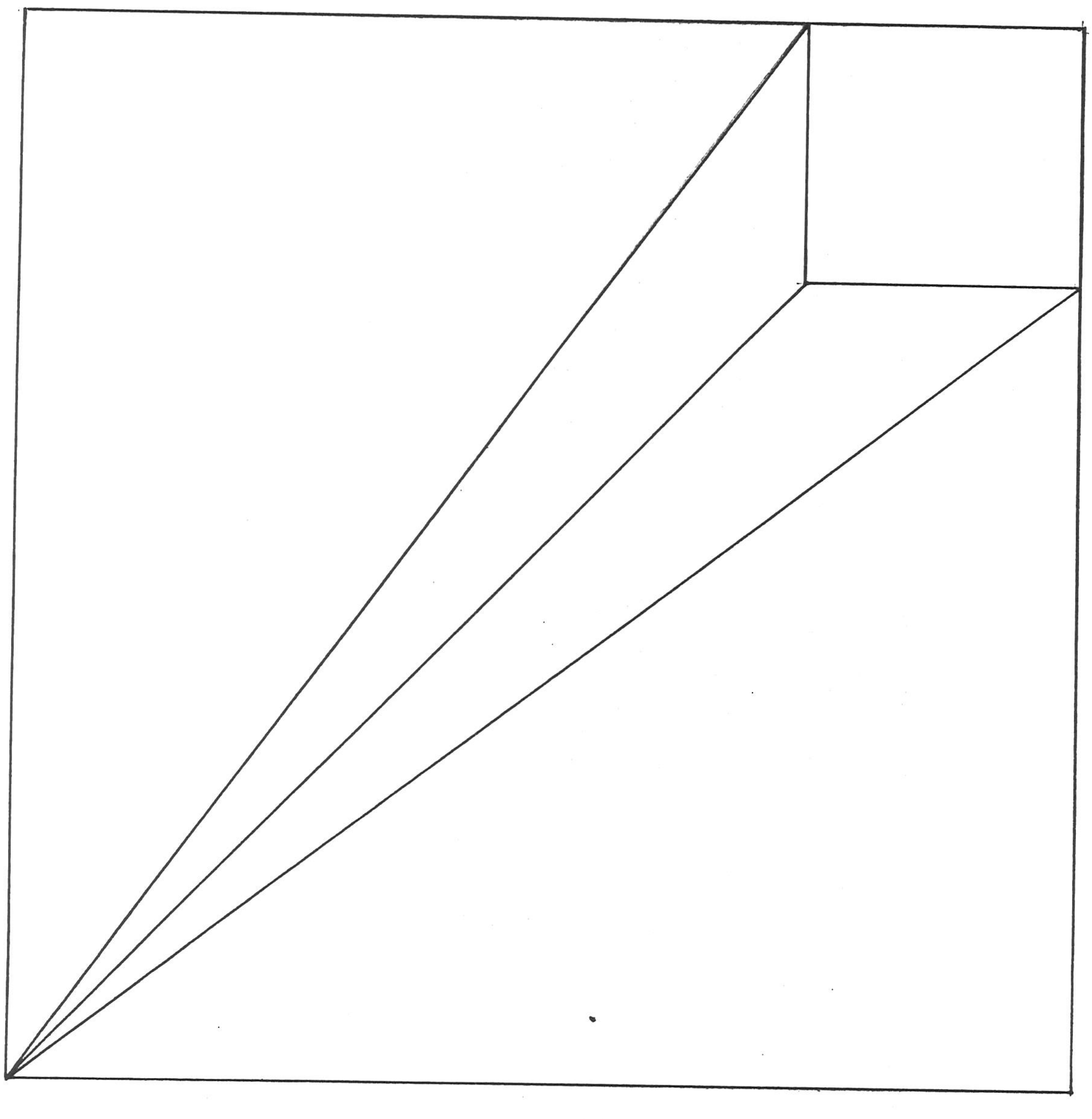
Temos então 7 peças. Vamos enumerá-las

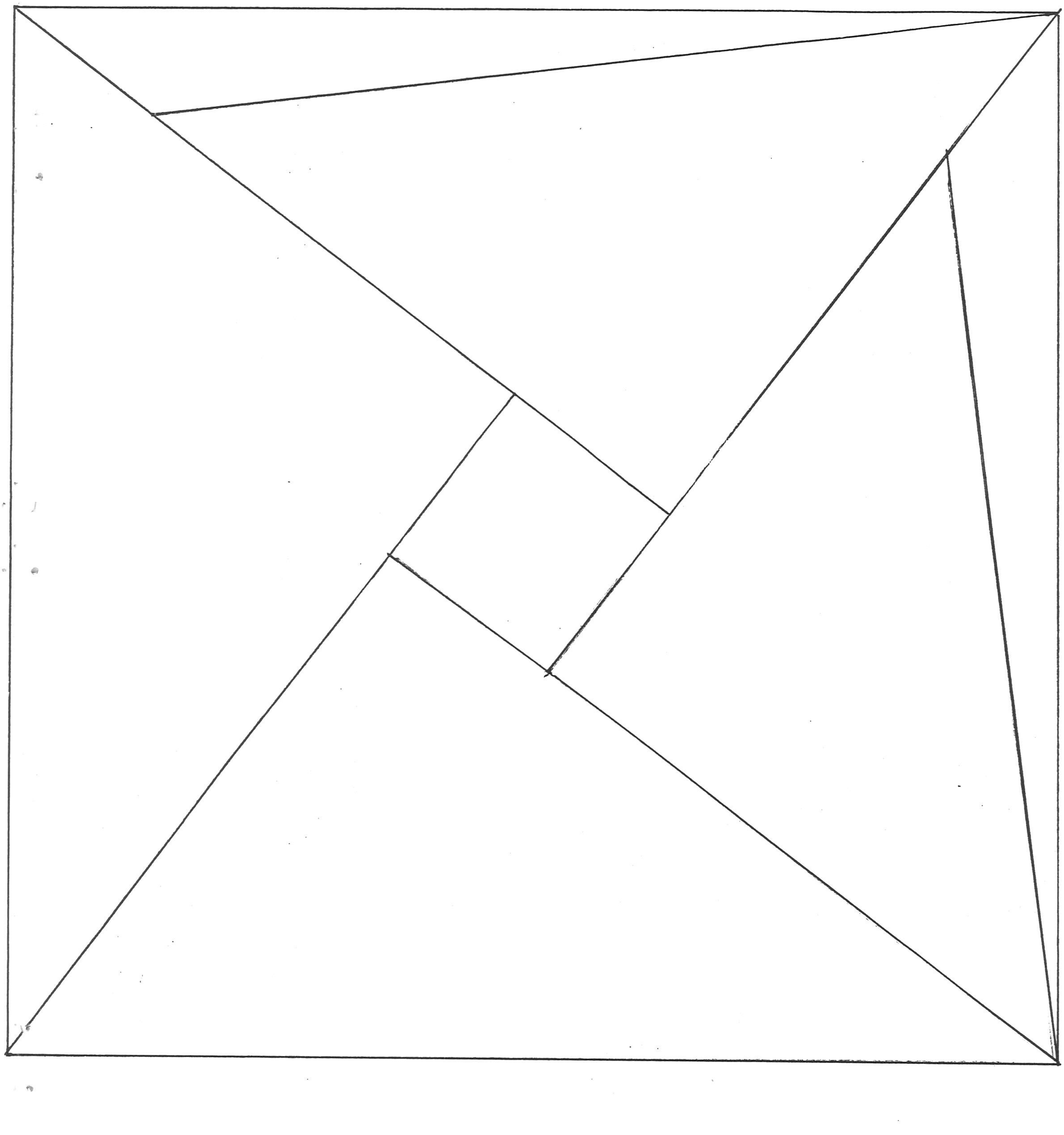


A partir destas peças, que originalmente formavam um quadrado de lado a, vamos conseguir construir 2 quadrados de lados respectivamente b e c.





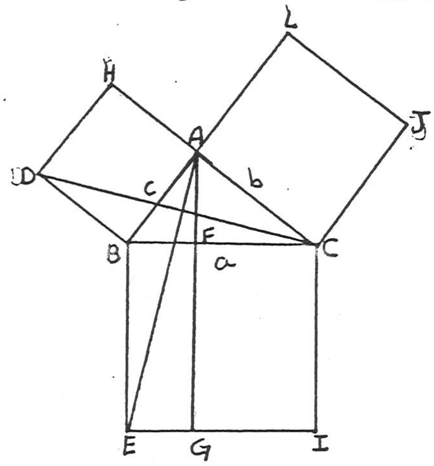




4º DEMONSTRAÇÃO

Demonstração feita por Euclides:

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto em A e os segmentos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.



Construção da figura:

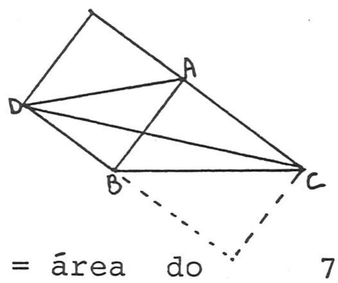
1) Construir quadrados sobre os lados do triângulo.

2) Traçar uma perpendicular à BC partindo de A e prolongar até EI. Chamar de F a intersecção com BC e G a intersecção com EI.

3) Traçar AE e CD

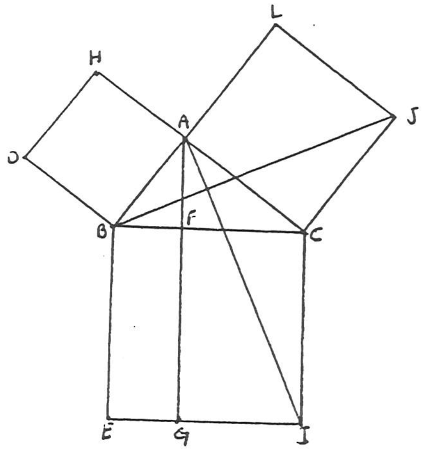
1) $\overline{BE} = \overline{BC}$	1) lados do quadrado de lado a
2) $\overline{DB} = \overline{AB}$	2) lados do quadrado de lado c
3) $D\hat{B}C \cong A\hat{B}E$	3) DBC = 90 + ABC = ABE
4) $\triangle$ ABE $\cong$ $\triangle$CBD	4) Por 1, 2, 3 e L.A.L.
5) $\triangle$ ABE e $\triangle$CBD possuem a mesma área	5) Por 4
6) área $\triangle$ABE = área $\triangle$FBE, que é a metade da área do retângulo BEGF	6) Tomando BE como base dos triângulos, a altura será igual a BF

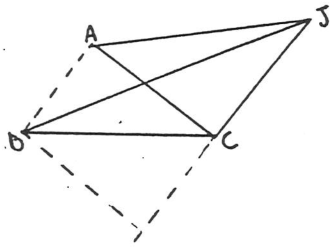
Observe a figura 2:



7) área do $\triangle$CDB = área do $\triangle$ADB, que é a metade da área do quadrado HDBA	7) Tomando como base DB, a altura será AB
8) área HDAB = área BEFG	8) Por 5 e 6

Comprovaremos agora que a área do retângulo FGIC é igual à área do quadrado LACJ:





* Traçar BJ e AI

1) $\overline{BC} = \overline{CI}$	1) lados do quadrado de lado a
2) $\overline{AC} = \overline{CJ}$	2) lados do quad. de lado b
3) $A\hat{C}I = B\hat{C}J$	3) BCJ = 90 + ACB = ACI
4) $\triangle$ ACI = $\triangle$ BCJ	4) Por 1, 2, 3 e L.A.L.
5) Os triângulos ACI e BCJ possuem mesma área	5) Por 4

* Traçar FI e AJ:

6) área $\triangle$ FCI = $\triangle$ área ACI, que é a metade da área do retângulo FGIC	6) Tomando como base CI, a altura será FC
7) área $\triangle$ ACJ = $\triangle$ área BCJ, que é a metade da área do quadrado LACJ	7) Tomando como base CJ, a altura será AC
8) área de FGIC = área LACJ	8) Por 5 e 6.

Já sabemos que a área do quadrado maior de lado a é igual a soma das áreas dos quadrados menores de lados b e c; provando a relação apresentada no Teorema de Pitágoras ; porém, fica a pergunta:

" Como recortar os quadrados pequenos de forma que se encaixem no quadrado grande ? "

Foi demonstrado anteriormente que a área de BEFG é igual à área de HDBA.

É conhecido que : dado um quadrado que possui a mesma área de um retângulo, este pode ser recortado de forma a encaixar-se no primeiro.

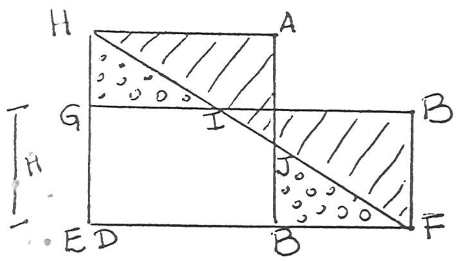
QUEBRA-CABEÇA

- Procedimento:

Devemos analisar estes casos:

1º caso : $2H > R$

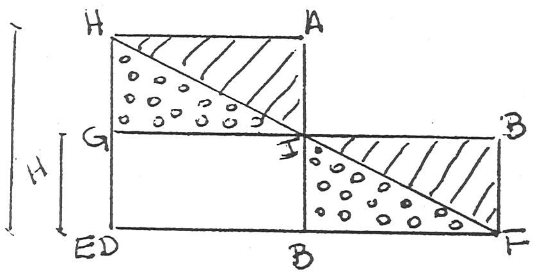
Dados um quadrado e um retângulo de mesma área, a largura do retângulo ultrapassa a metade da medida do lado do quadrado.



* Trace uma reta unindo os vértices H a F. Chame de I a intersecção com GB e J a intersecção com AB.
* Recorte sobre a reta.
* Sobreponha o triângulo AHJ sobre IBF.
* Justaponha o triângulo HGI sobre JBF

2º caso: $2H = R$

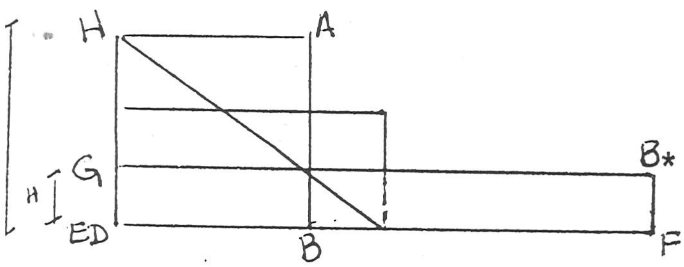
Dados um quadrado e um retângulo de mesma área, a largura do retângulo é exatamente a metade da medida do lado do quadrado.



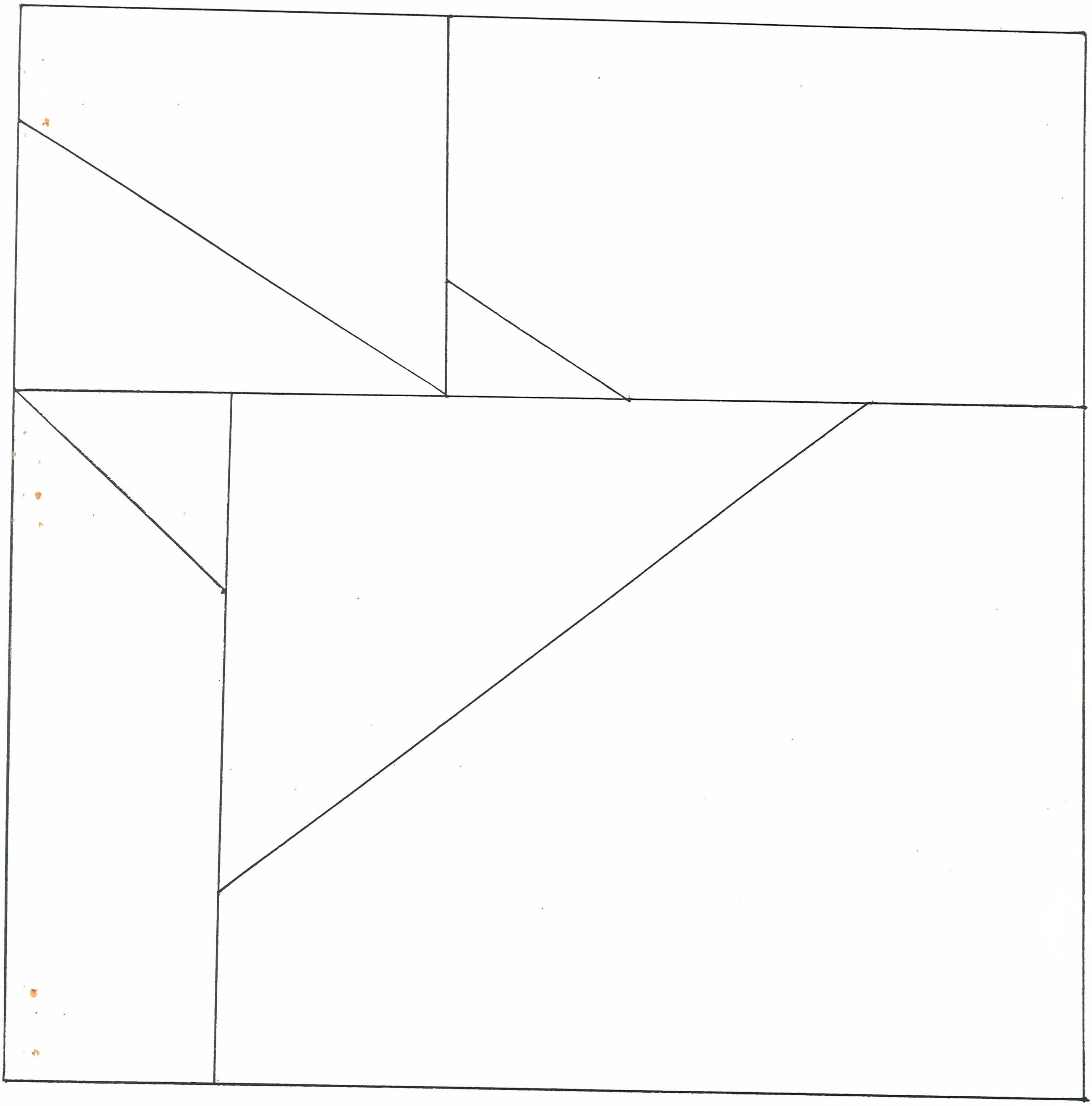
* Trace uma reta unindo os vértices H a F. Chame de I a intersecção com GB.
* Recorte sobre a reta traçada.
* Sobreponha o triângulo HAI no triângulo IBF e o $\triangle$ HGI no $\triangle$ IBF.

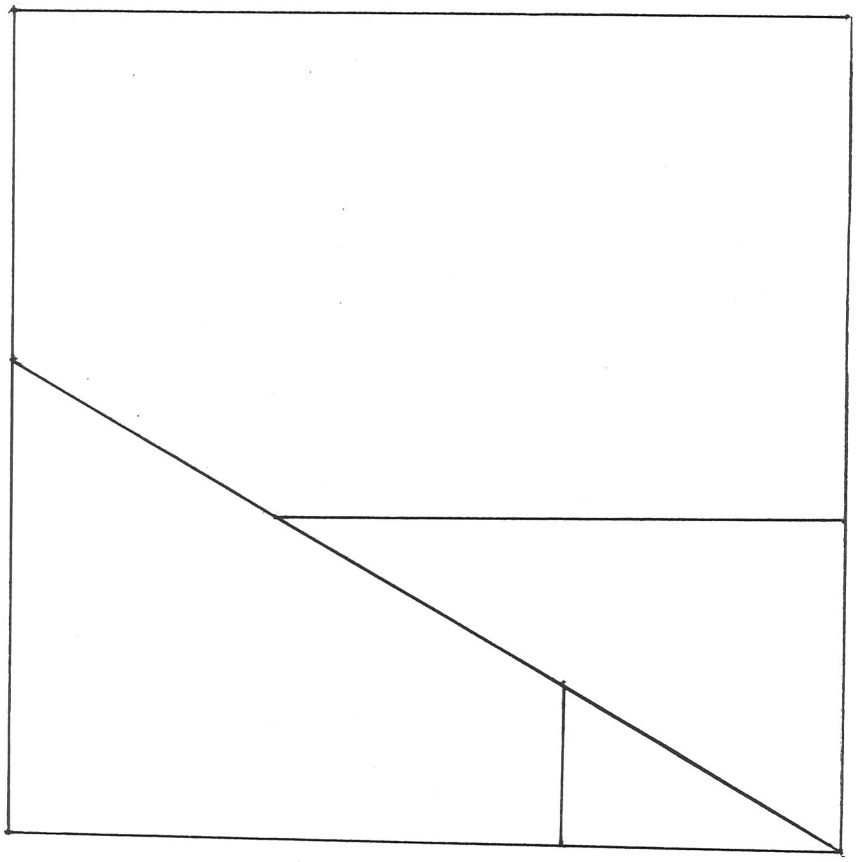
3º caso: $2H < R$

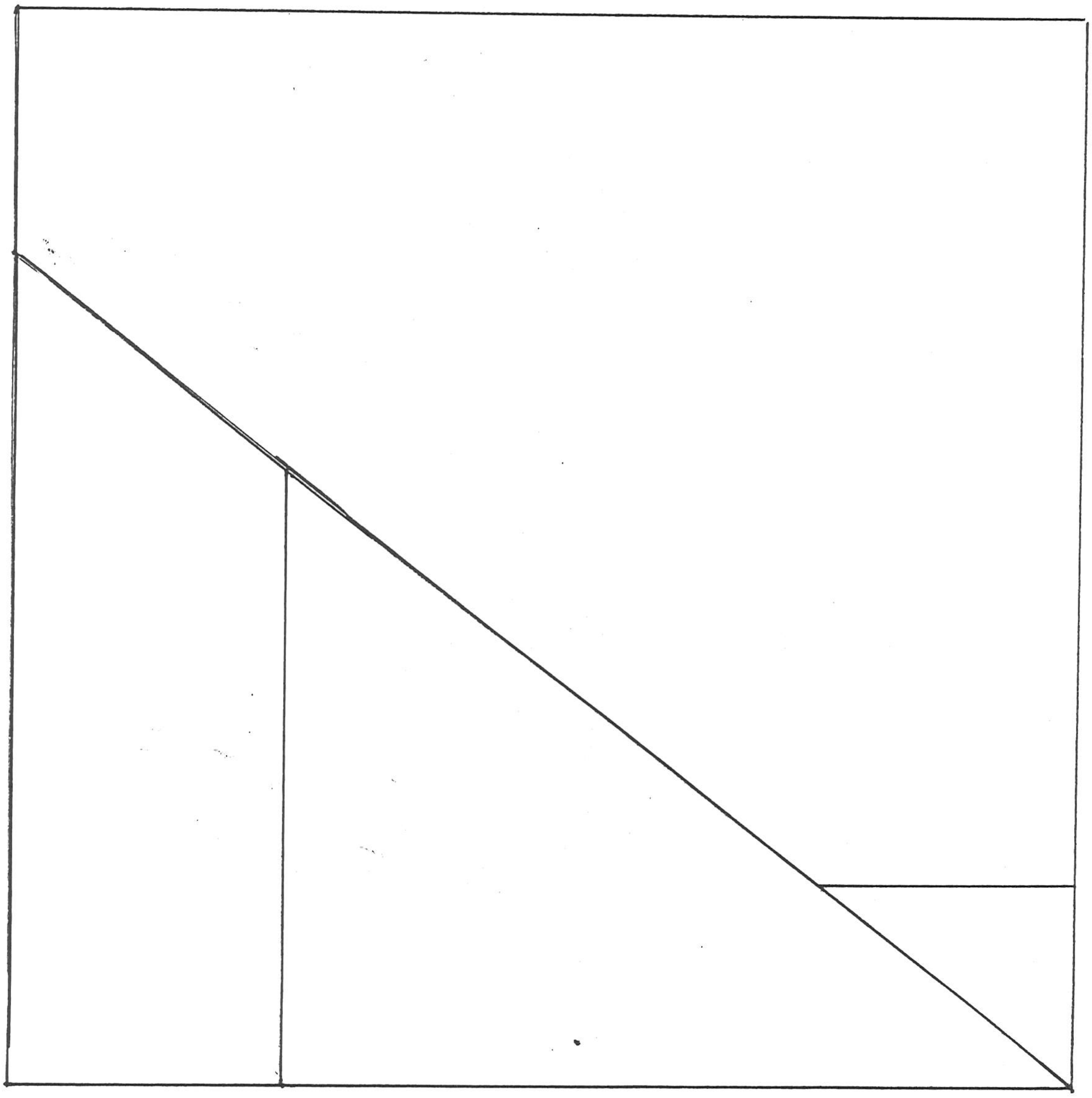
Dado um quadrado e um retângulo de mesma área, a largura do retângulo é menor que a metade da medida do lado do quadrado.



* Sendo assim, corta-se o retângulo no ponto médio do seu comprimento total e "empilha-se" as duas partes sobre o quadrado.
* Repete-se o procedimento até que a largura da "pilha" de retângulos alcance a metade da medida do quadrado ou ultarpasse-a , recaindo numa situação do 1º ou 2º caso.







PARTE II

PARTE II
TEOREMA DA EQUIDECOMPOSIÇAO DE POLÍGONOS

O teorema que vamos trabalhar nos diz que:

"Se dois polígonos tem a mesma área sempre é possível decompor um deles em polígonos menores de modo a compor o outro".

Em outras palavras, podemos decompor os dois polígonos em polígonos menores, dois a dois congruentes. Daí porque o nome equidecomponíveis.

Para obter este resultado vamos mostrar como transformar um polígono qualquer num quadrado de mesma área. E isto será feito através da seguinte cadeia de tansformações:

* triângulo em retângulo
* retângulo em quadrado
* dois quadrado em um quadrado

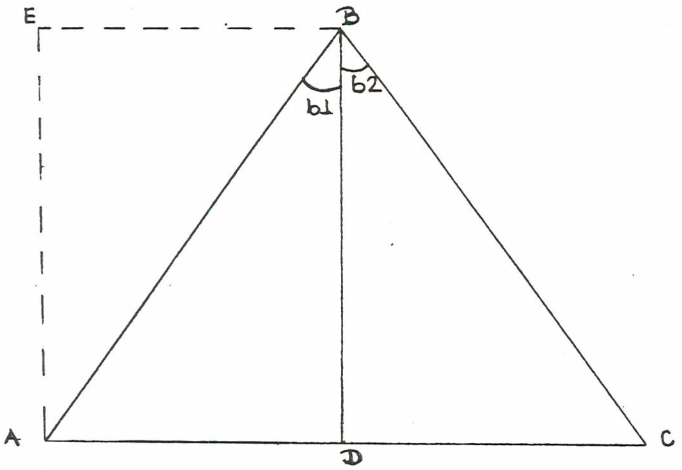
A partir destas transformações obtemos o resultado desejado : dividimos o polígono em triângulos, transformamos os triângulos em retângulos, os retângulos em quadrados, e tomando pares de quadrados, sucessivamente, vamos transformando todos os quadrados num único quadrado.

E se dois polígonos tem a mesma área podemos transformá-los em quadrados de mesmas áreas , e sobrepondo os recortes dos quadrados (isto é ,ambos devem ter os mesmos recortes) transformamos um polígono no outro.

Este teorema foi demonstrado por F.Bolyai em 1832 e, independentemente, em 1833 por G.Gerwien. F.Bolyai era o pai do famoso matemático húngaro Janos Bolyai, descobridor da Geometria Hiperbólica (que também foi descoberta por Lobatchevski e Gauss). Gerwien era um matemático amador alemão.

E natural perguntar se resultado análogo é verdadeiro para poliedros. Max Dehn, aluno de D. Hilbert, provou em 1900 que isto não e verdade: um tetraedro regular e um cubo de mesmo volume não são equidecomponíveis.

TRIÂNGULO ISÓSCELES -------------> RETÂNGULO



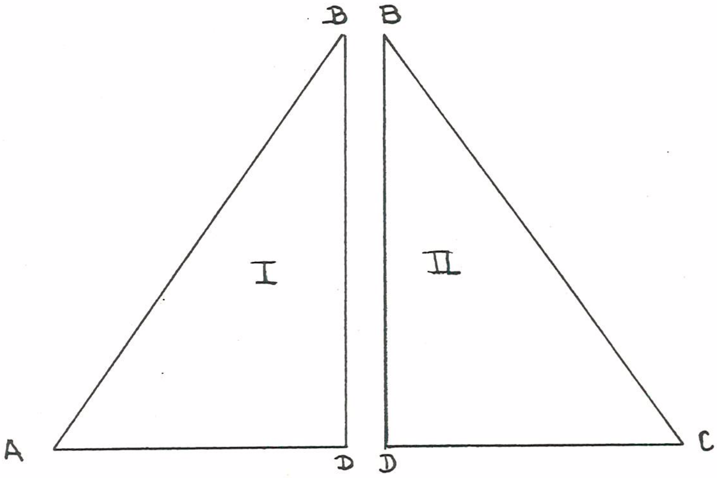
CONSTRUÇÃO - Traçar a altura do triângulo ($\overline{BD}$).

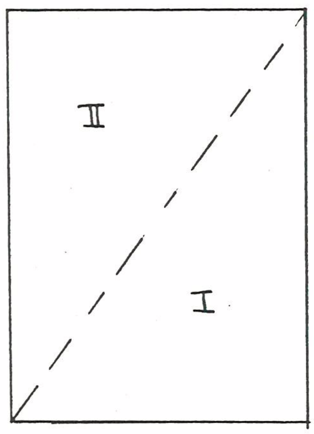
HIPÓTESE - Δ ABC isósceles.

TESE - $\square$ AEBD retângulo de mesma área do Δ ABC.

AFIRMAÇÃO	RAZÃO
1) $\hat{A} \simeq \hat{C}$	1) Por hipótese
2) $A\hat{D}B \simeq C\hat{D}B = 90^{\circ}$	2) Altura $\overline{BD} \perp \overline{AC}$
3) $\hat{b1} \simeq \hat{b2}$	3) Teorema dos 180°
4) Δ ADB $\simeq$ Δ CDB	4) ALA - de 1,3 e $\overline{AB} \simeq \overline{CB}$

Ao separarmos os pedaços do Δ isósceles acima montaremos um retângulo:

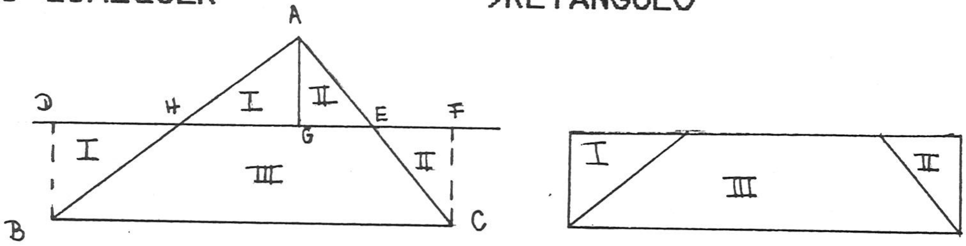




5) $\hat{E} \simeq C\hat{D}B = 90^{\circ}$	5) Por montagem
6) $\hat{G} \simeq A\hat{D}B = 90^{\circ}$	6) Por montagem
7) $\hat{b1} + \hat{A} = 90^{\circ}$	7) De 2 e teorema dos 180°
8) $\hat{b2} + \hat{C} = 90^{\circ}$	8) Idem ao 7
9) $\hat{F} = \hat{b1} + \hat{C} = 90^{\circ}$	9) De 1 e 7
10) $\hat{H} = \hat{b2} + \hat{A} = 90^{\circ}$	10) De 3 e 8

Se $\square$ AEBD ($\square$ EFGH) foi construído com os pedaços do Δ ABC então eles têm a mesma área.

TRIÂNGULO QUALQUER ------------->RETÂNGULO



CONSTRUÇÃO- 1) Traçar os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

2) Traçar reta passando pelos pontos médios.

3) Traçar a altura do Δ AHE.

HIPÓTESE- Δ ABC qualquer.

TESE- □ DBFC tem área igual ao Δ ABC.

AFIRMAÇÃO	RAZÃO
1) $\overline{BH} \simeq \overline{AH}$	1) Por construção (H ponto médio)
2) $D\hat{H}B \simeq G\hat{H}A$	2) Opostos pelo vértice H
3) $B\hat{D}H \simeq A\hat{G}H = 90^{o}$	3) $\overline{DB}$ e $\overline{GA}$ são ⊥ à $\overline{DF}$
4) $D\hat{B}H \simeq G\hat{A}H$	4) Teorema dos 180^{o}
5) Δ DBH ≃ Δ GAH	5) ALA - de 1,2 e 4
6) $\overline{DF} \parallel \overline{BC}$	6) Teorema do segmento médio
7) $H\hat{B}C \simeq A\hat{H}E$	7) Angulos correspondentes em retas ǁ
8) $A\hat{H}G + H\hat{A}G = 90^{o}$	8) Teorema dos 180^{o} ($H\hat{G}A = 90^{o}$)
9) $D\hat{B}C = D\hat{B}H + H\hat{B}C = 90^{o}$	9) De 4 e 7
10) Δ AGE ≃ Δ CFE	10) ALA $A\hat{E}G \simeq C\hat{E}F$ (opostos pelo vértice) $\overline{AE} \simeq \overline{CE}$ (E ponto médio) $G\hat{A}E \simeq F\hat{C}E$ (Teorema dos 180^{o})
11) $A\hat{G}E \simeq C\hat{F}E = 90^{o}$	11) $\overline{AG}$ e $\overline{CF}$ ⊥ à $\overline{DF}$
12) $B\hat{C}E \simeq G\hat{E}A$	12) Ângulos correspondentes em retas ǁ
13) $B\hat{C}E + E\hat{C}F = 90^{o} = B\hat{C}F$	13) Conforme a figura

Se □ DBFC se forma com os pedaços do Δ ABC, então eles tem a mesma área.

2ª PARTE:

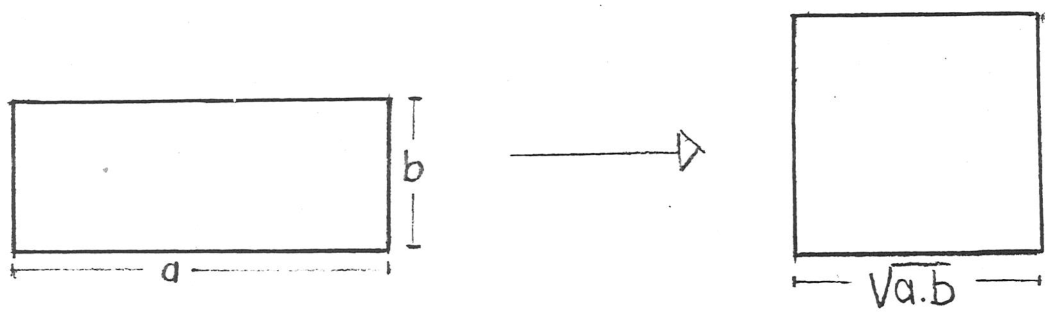
HIPÓTESE- Idem a 1ª parte,
$\overline{BG} \parallel \overline{ED} \parallel \overline{FC}$ e $\overline{EB} \simeq \overline{JG} \simeq \overline{FI}$

TESE- Δ GJD $\simeq$ Δ IFC e Δ DCH $\simeq$ Δ JFE

AFIRMAÇÃO	RAZÃO
1) Δ GJD $\simeq$ Δ IFC	1) ALA ($\overline{EB} \simeq \overline{JG}$, $G\hat{J}D \simeq I\hat{F}C$ $D\hat{G}J \simeq C\hat{I}F = 90^o$
2) $J\hat{E}F \simeq D\hat{H}C$ e $E\hat{J}F \simeq H\hat{D}C$	2) Ângulos corresponden- tes em retas $\parallel$
3) $\square$ FJDC é paralelogramo	3) $\overline{FC} \parallel \overline{JD}$ (hipótese) $\overline{FJ} \parallel \overline{CD}$ ($\perp$ à $\overline{AD}$)
4) $\overline{FJ} \simeq \overline{CD}$	4) De 3
5) Δ DCH $\simeq$ Δ JFE	5) ALA $E\hat{F}I \simeq H\hat{C}D = 90^o$ $\overline{FJ} \simeq \overline{CD}$ (de 4) $E\hat{J}F \simeq H\hat{D}C$ (de 2)

RETÂNGULO -------------> QUADRADO

Antes da demonstração da passagem do retângulo para quadrado de mesma área vamos construir o lado de tal quadrado.



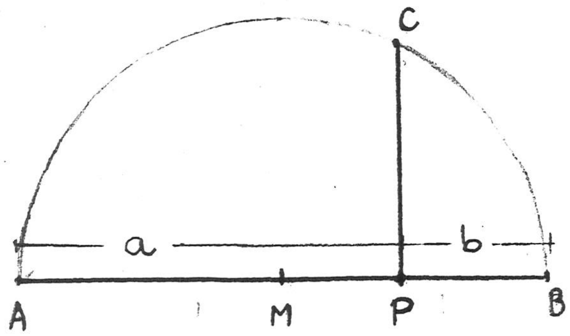
CONSTRUCÃO:

1) Traçamos lados a e b de R conforme a figura;

2) Marcamos M ponto médio deste segmento;

3) Traçamos meio círculo com raio MA e centro M;

4) Traçamos perpendicular passando por P até encontrar o círculo no ponto C.



DEMONSTRACÃO:

AFIRMACÃO:	RAZÃO:
1) Δ ABC retângulo	1) Inscrito em um circulo
2) $AC^2 = a^2 + CP^2$	2) Hipotenusa Δ CPA
3) $BC^2 = b^2 + CP^2$	3) Hipotenusa Δ CPB

4) $(a+b)^2 = AC^2 + BC^2$	4) De 1
5) $(a+b)^2 = a^2 + CP^2 + b^2 + CP^2$	5) De 2,3,4
6) $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2CP^2$ $ab = CP^2$ $\sqrt{ab} = CP$	6) De 5 e álgebra

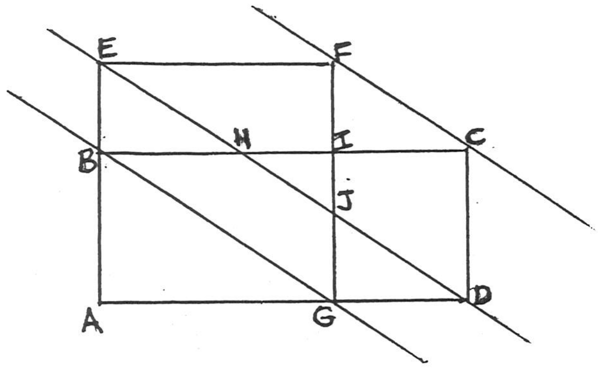
Assim mesmo desconhecendo os valores numéricos dos lados a e b do retângulo R. podemos construir quadrado de mesma área que R.

Vamos agora transformar o retangulo em quadrado:

CONSTRUÇÃO :

1) Construir sobreposto ao retângulo um quadrado de mesma área, conforme a figura
2) Traçar as retas $\overleftrightarrow{CF}$, $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BG}$ conforme a figura

A demonstração de transformação de retângulo em quadrado será dividida em duas partes:



1ª PARTE:

HIPÓTESE- Área do retângulo ABCD é igual a área do quadrado AEFG.

TESE- $\overline{BG} \parallel \overline{ED} \parallel \overline{FC}$.

AFIRMAÇÃO	RAZÃO
1) Área do retângulo = $\overline{AB} \times \overline{AD}$	1) Conforme a figura
2) Área do quadrado = $\overline{AE} \times \overline{AG}$	2) Conforme a figura
3) Área do retângulo = área do quadrado	3) Hipótese
4) $\overline{AB} \times \overline{AD} = \overline{AE} \times \overline{AG}$	4) De 1,2 e 3
5) $\overline{AD}/\overline{AG} = \overline{AE}/\overline{AB}$	5) De 4
6) $\Delta EAD \sim \Delta BAG$	6) LAL - de 5 e $\hat{A}$
7) $A\hat{E}D \simeq A\hat{B}G$ e $A\hat{D}E \simeq A\hat{G}B$	7) De 6
8) $\overline{BG} \parallel \overline{ED}$	8) De 7 (ângulos correspondentes)
9) ▫ EBGJ é paralelogramo	9) $\overline{EB} \parallel \overline{JG}$ (lados do quadrado), $BG \parallel EJ$

10) $EB \simeq JG$	10) De 9
11) $\overline{EB} \simeq \overline{FI}$	11) EBIF é paralelogramo ($\overline{EB} \parallel \overline{FI}$ e $\overline{EF} \parallel \overline{BI}$)
12) $\overline{JG} \simeq \overline{FI}$	12) De 10 e 11
13) $\overline{IC} \simeq \overline{GD}$	13) ICDG é paralelogramo ($\overline{IC} \parallel \overline{GD}$ e $\overline{GI} \parallel \overline{DC}$)
14) $\Delta GJD \simeq \Delta IFC$	14) LAL - de 12,13 e $F\hat{I}C \simeq J\hat{G}D = 90^{o}$
15) $G\hat{J}D \simeq I\hat{F}C$ e $G\hat{D}J \simeq I\hat{C}F$	15) De 14
16) $\overline{FC} \parallel \overline{JD}$ É portanto $\overline{FC} \parallel \overline{ED} \parallel \overline{BG}$	16) De 15 (ângulos correspondentes)

2ª PARTE:

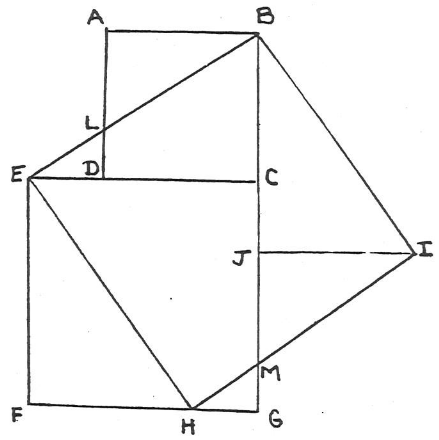
HIPÓTESE- Idem a 1ª parte,
$\overline{BG} \parallel \overline{ED} \parallel \overline{FC}$ e $\overline{EB} \simeq \overline{JG} \simeq \overline{FI}$

TESE- $\Delta GJD \simeq \Delta IFC$ e $\Delta DCH \simeq \Delta JFE$

AFIRMAÇÃO	RAZÃO
1) $\Delta GJD \simeq \Delta IFC$	1) ALA ($\overline{EB} \simeq \overline{JG}$, $G\hat{J}D \simeq I\hat{F}C$ $D\hat{G}J \simeq C\hat{I}F = 90^{o}$
2) $J\hat{E}F \simeq D\hat{H}C$ e $E\hat{J}F \simeq H\hat{D}C$	2) Ângulos correspondentes em retas $\parallel$
3) ▫ FJDC é paralelogramo	3) $\overline{FC} \parallel \overline{JD}$ (hipótese) $\overline{FJ} \parallel \overline{CD}$ ($\perp$ à $\overline{AD}$)
4) $\overline{FJ} \simeq \overline{CD}$	4) De 3
5) $\Delta DCH \simeq \Delta JFE$	5) ALA $E\hat{F}I \simeq H\hat{C}D = 90^{o}$ $\overline{FJ} \simeq \overline{CD}$ (de 4) $E\hat{J}F \simeq H\hat{D}C$ (de 2)

Observação: Na demonstração feita estamos admitindo que a base do retângulo é menor do que o dobro do lado do quadrado. Se isto não acontece devemos cortar o retângulo ao meio, "empilhar" os dois retângulos e repetir o mesmo raciocínio para este novo retângulo.

DOIS QUADRADOS -------------> UM QUADRADO



1 PARTE:

HIPÓTESE- □ ABCD e □ ECGF quadrados.

TESE- □ EBIH quadrado.

CONSTRUÇÃO- Dados os quadrados os □ ABCD e □ ECGF:

1) Traçar reta entre E e B.

2) Traçar ⊥ à $\overline{EB}$ passando por E.

3) Traçar ⊥ à $\overline{EB}$ passando por B.

4) Traçar ⊥ à reta resultante de 2), passando pelo ponto de intersecção desta com $\overline{FG}$.

5) Está construído o □ EBHI, retângulo.

6) Traçar ⊥ à $\overline{BG}$ passando por I.

AFIRMAÇÃO	RAZÃO
1) $F\hat{E}G \simeq J\hat{B}I$	1) $\overline{EF} \parallel \overline{BJ}$ $\overline{EH} \parallel \overline{BI}$
2) $J\hat{I}B \simeq F\hat{H}E$	2) $\overline{JI} \parallel \overline{FH}$ $\overline{BI} \parallel \overline{EH}$
3) $\overline{EH} \simeq \overline{BI}$	3) Lados opostos de um retângulo (por construção)
4) $\triangle$ EFH $\simeq$ $\triangle$BJI	4) ALA- De 1,2 e 3
5) $\overline{EF} \simeq \overline{EC}$	5) Lados de um quadrado (□ ECGH)
6) $B\hat{E}C \simeq H\hat{E}F$	6) $H\hat{E}F + H\hat{E}C = 90^o$ $B\hat{E}C + H\hat{E}C = 90^o$
7) $\triangle$ BEC $\simeq$ $\triangle$HEF	7) ALA- De 4 e 5 EFH $\simeq$ ECB $= 90^o$
8) $\overline{EB} \simeq \overline{EH}$	8) De 7

2 **PARTE:**

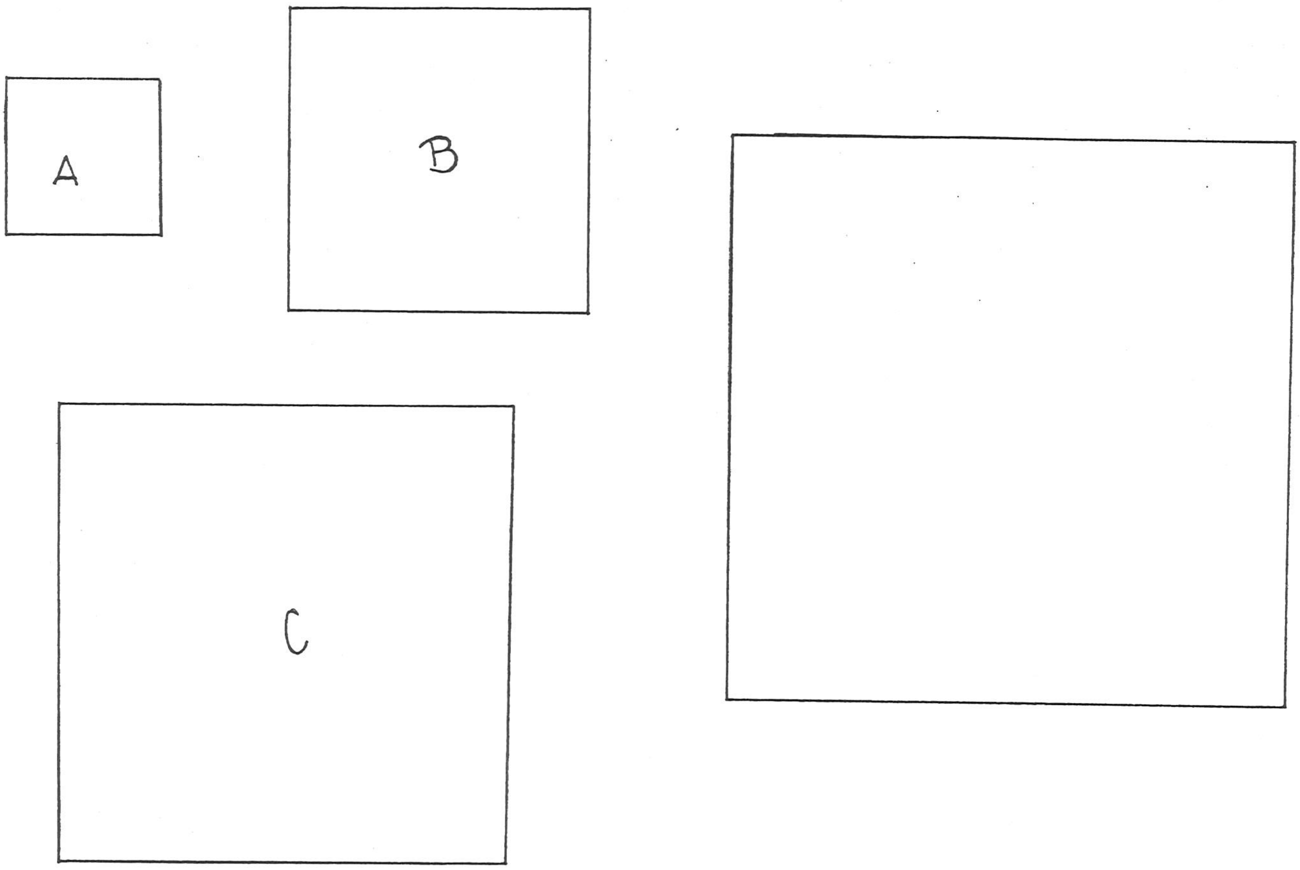
HIPÓTESE- $\square$ ABCD, $\square$ CGFE, $\square$ EBHI quadrados.

TESE- A $\square$ ABCD + A $\square$ CGFE = A $\square$ EBIH

9) $\triangle EFH \simeq \triangle BJI$	9) 1ª parte- de 4
10) $\triangle ECB \simeq \triangle EFH$	10) 1ª parte- de 7
11) $\triangle EFH \simeq \triangle BJI$	11) De 9 e 10
12) $\overline{BC} \simeq \overline{JI}$	12) De 11
13) $\overline{AB} \simeq \overline{BC}$	13) Lados do $\square$ ABCD
14) $\overline{AB} \simeq \overline{JI}$	14) De 12 e 13
15) $A\hat{B}L \simeq J\hat{I}M$	15) $\overline{AB} \parallel \overline{JI}$ e $\overline{EB} \parallel \overline{HI}$
16) $\triangle LAB \simeq \triangle MJI$	16) ALA- De 14 e 15 $L\hat{A}B \simeq M\hat{J}I = 90^{o}$
17) $\overline{EL} \simeq \overline{HM}$	17) $\overline{EL} = \overline{EB} - \overline{BL}$ $\overline{HM} = \overline{HI} - \overline{MI}$ $\overline{EB} \simeq \overline{HI}$ $\overline{BL} \simeq \overline{IM}$
18) $\triangle EDL \simeq \triangle HGM$	18) De 17 $L\hat{E}D \simeq M\hat{H}G$ ($\overline{BE} \parallel \overline{IH}$) ($\overline{EC} \parallel \overline{FG}$) $E\hat{L}D \simeq H\hat{M}G$ ($\overline{EB} \parallel \overline{HI}$) ($\overline{AD} \parallel \overline{JG}$)

Como os dois primeiros quadrados (menores) preenchem corretamente o espaço (àrea) do $\square$ maior, temos que a soma das àreas dos quadrados menores é igual a área do quadrado maior.

TRÊS QUADRADOS ------------> UM QUADRADO



1ª PARTE:

Transformar quadrado A e quadrado B em um único quadrado (quadrado D).

CONSTRUÇÃO e DEMONSTRAÇÃO vide "DOIS QUADRADOS ----> UM QUADRADO".

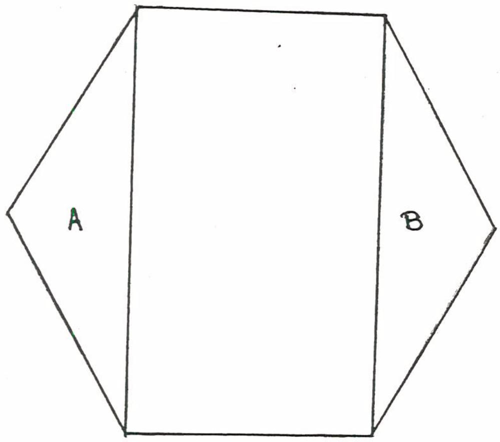
2ª PARTE:

Transformar o D (resultante da primeira parte) e quadrado C em um único quadrado, que será o quadrado de área igual a soma das áreas dos quadrados A, B e C.

HEXÁGONO -------------> UM QUADRADO

1ª PARTE:

Dividir o hexágono conforme a figura.



Destes cortes resultarão dois triângulos (Δ A e Δ B) congruentes (LAL) e um retângulo.

2ª PARTE:

Transformar o retângulo num quadrado de mesma área.
CONSTRUÇÃO e DEMONSTRAÇÃO vide "RETÂNGULO-----> QUADRADO"

3ª PARTE:

Transformar cada triângulo (Δ A e Δ B) em um retângulo.
CONSTRUÇÃO e DEMONSTRAÇÃO vide "TRIÂNGULO------> RETÂNGULO".

4ª PARTE:

Transformar cada retângulo resultante da 3ª parte em um quadrado.
CONSTRUÇÃO e DEMONSTRAÇÃO vide "RETÂNGULO-----> QUADRADO".

5ª PARTE:

Transformar os quadrados resultantes da 1ª parte e da 2ª parte num único quadrado.
CONSTRUÇÃO e DEMONSTRAÇÃO vide "TRÊS QUADRADOS--> UM QUADRADO".

BIBLIOGRAFIA

1. Burlet,O. - Géométrie, Editions L.E.P. Loisirs et Pédagogie.

2. Lima,E.L. - Medida e Forma em Geometria , IMPA & VITAE , 1991 .

3. Lima,E.L. - Polígonos Equidecomponíveis, Revista do Professor de Matemática, nº 11, 1987.

Publicações do Instituto de Matemática da UFRGS
Cadernos de Matemática e Estatística

<u>Série B: Trabalho de Apoio Didático</u>

1. Elsa Mundstock - Curso Básico Sobre Wordstar 3.45 - MAR/89

2. Jaime B. Ripoll Introdução ao Cálculo Diferencial Via Funções de Uma Variável Real - OUT/89

3. Edmund R. Puczylowski - Dimension of Modular Lattices - JUN/90

4. Marcos Sebastiani - Geometrias Não Euclidianas - JUL/90

5. Sandra R. C. Pizzatto - Cálculo Numérico - AGO/91

6. Vera Clotilde G. Carneiro - Elementos de Cálculo para Biologia - AGO/91

7. Elsa Mundstock - Iniciação ao SPSS/PC - SET/91

8. Elisa Hagg, Loiva C. de Zeni, Maria Alice Gravina e Vera Carneiro - Notas da 1ª Oficina de Matemática da UFRGS - JAN/92

9. Paulo Werlang de Oliveira, Elisabete Rambo, Suzana Lima dos Santos, Coordenação: Profª Maria Alice Gravina - A Tartaruga no Espaço Tridimensional - FEV/92

10. Silvio Possoli - Análise Multivariada - JUL/92

11. Dinara Westphalen Fernandez - Números Índices - OUT/92

12. Maria Teresinha Albanese - Coeficiente de Fidedignidade de um Instrumento de Medida - OUT/92

13. Vera Clotilde Carneiro e Sérgio Cláudio Ramos - Gráficos na Escola - DEZ/92

14. João Riboldi - Elementos Básicos de Estatística - JAN/93

15. Paulo W. de Oliveira e M. Alice Gravina - Logo: Manual do Usuário - MAR/93

16. Ruben Markus, Elsa C. de Mundstock, Dinara W. X. Fernandez e João Riboldi - Exercícios de Métodos Estatísticos - AGO/93

17. Loiva C. de Zeni e M. Alice Gravina - Sugestões de Atividades no Ambiente Logo para a Exploração de Conteúdos Matemáticos dos Currículos Escolares de 1º e 2º Grau - SET/93

18. João Riboldi - Delineamentos Experimentais de Campo, Parte 1 - SET/93

19. Marlusa Benedetti, Patrícia P. Gil, Shirley Techera, Angela Andreotti, Milene Milan, Marlise Moraes, Luciana Santos, Augustinho Zimmermann, Coordenação: Profª. M. Alice Gravina - Atividades em Geometria Usando Recortes - OUT/93

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRA CURRICULARES

Os Cadernos de Matemática e Estatística publicam as seguintes séries:

Série A: Trabalho de Pesquisa

Série B: Trabalho de Apoio Didático

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

Série D: Trabalho de Graduação

Série F: Trabalho de Divulgação

Série G: Textos para Discussão

Toda correspondência com solicitação de números publicados e demais informações deverá ser enviada para:

NAEC - NÚCLEO DE ATIVIDADES EXTRA CURRICULARES
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRGS
AV. BENTO GONÇALVES, 9500 - PRÉDIO 43111
CEP 91509 - 900 AGRONOMIA - POA/RS
FONE: 336 92 22 OU 339 13 55 OU 228 16 33
RAMAL 6197
FAX: 336 15 12