



## Teoremas-en-acto y conceptos-en-acto en dos situaciones relativas a la noción de sistema cuántico

Theorems-in-action and concepts-in-action in two situations regarding the notion of quantum system

**Maria de los Ángeles Fanaro**

Niecyt- Unicen-Argentina; CONICET-Argentina  
[mfanaro@exa.unicen.edu.ar](mailto:mfanaro@exa.unicen.edu.ar)

**Maria Rita Otero**

Niecyt- Unicen-Argentina; CONICET-Argentina  
[rotero@exa.unicen.edu.ar](mailto:rotero@exa.unicen.edu.ar)

**Marco Antonio Moreira**

UFRGS  
[moreira@if.ufrgs.br](mailto:moreira@if.ufrgs.br)

### Resumen

Se presentan los resultados de una parte de una investigación relativa a la Enseñanza de la Mecánica Cuántica en la Escuela Media<sup>1</sup>, en la cual desde referenciales didácticos y cognitivos se analiza la viabilidad y adaptabilidad de una secuencia de situaciones diseñada para reconstruir conceptos y principios fundamentales. La secuencia comienza y termina con la Experiencia de la Doble Rendija, produciendo la emergencia del comportamiento cuántico, pues la experiencia se analiza con proyectiles cuya masa se va reduciendo sucesivamente hasta llegar a los electrones. Se considera al electrón como el sistema cuántico más simple, se adapta el enfoque *Caminos Múltiples de Feynman* utilizando *software* de simulación. Se introduce el principio de superposición, y el de correspondencia a partir del análisis del cociente entre la masa y la constante de Planck. Los resultados presentados aquí son relativos al análisis de la conceptualización, a partir de la identificación de los posibles teoremas-en-acto (Vergnaud, 1990; Moreira, 2002) que

<sup>1</sup> La tesis se realizó en el marco del Doctorado Internacional en Enseñanza de las Ciencias de la Universidad de Burgos, UBU, España, en convenio con la, UFRGS, Brasil bajo la dirección del Dr. Marco Antonio Moreira y la Dra. María Rita Otero

utilizaron los estudiantes al abordar las primeras situaciones, y las inferencias que éstos permitieron u obstaculizaron. Se destaca el carácter oportunista de la conceptualización señalado por Vergnaud, y la necesidad de complementar la mirada didáctica y cognitiva cuando se trata de investigar la viabilidad y adaptabilidad de propuestas didácticas.

**Palabras-clave:** mecánica cuántica; escuela media; experiencia de la doble rendija; teoremas-en-acto

## Resumo

Apresenta-se resultados de parte de uma investigação relative ao ensino de Mecânica Quântica na escola media. Com base em referenciais didáticos e cognitivos analisa-se a viabilidade e adaptabilidade de uma sequência de situações desenhadas para reconstruir conceitos e princípios fundamentais. A sequência começa e termina com o experimento da dupla fenda produzindo a emergência do comportamento quântico pois a experiência se realiza com projéteis cuja massa é reduzida sucessivamente até chegar aos electrons. Considera-se os electrons como o sistema quântico mais simples e adapta-se os Caminhos Múltiplos de Feynman utilizando um software de simulação. Introduce-se o princípio da superposição e da correspondência partir da análise do quociente entre massa e a constante de Planck. Os resultados apresentados aqui são relativos à análise da conceitualização a partir da identificação dos possíveis teoremas-em-ato (VERGNAUD, 1990; MOREIRA 2002) utilizados pelos estudantes ao abordar as primeiras situações e as inferências que estes permitiram ou obstaculizaram. Destaca-se o caráter oportunista da conceitualização assinalado por Vergnaud e a necessidade de um olhar didático e cognitivo quando se trata de investigar a variabilidade e adaptabilidade de propostas didáticas.

**Palavras-Chave:** Mecânica quântica; ensino médio; experiência de dupla fenda; teoremas em ato.

## Abstract

The results of a part of an investigation regarding the Teaching of Quantum Mechanics at high school level are presented. Base upon didactic and cognitive frameworks it analyzes the viability and adaptability of a sequence of situations designed to reconstruct fundamental concepts and principles. The sequence begins and finishes with the Double-Slit Experiment, producing the emergence of the quantum behavior, because the experience is analyzed with projectiles whose mass is reduced successively until arriving at electrons. The electron is considered as the simpler quantum system and Feynman's Multiple Paths approach is adapted using simulation software. The principle of superposition and correspondence from the analysis of the quotient between the mass and the Planck's constant are introduced. The results presented here refer to the analysis of conceptualization, from the possible identification of the theorem-in-act (Vergnaud, 1990; Moreira, 2002) used by the students when approaching the first situations, and the inferences that these allowed or prevented. The opportunistic character of the conceptualization indicated by Vergnaud stands out, as well as the necessity to complement the didactic and cognitive framework when investigating the viability and adaptability of didactic proposals.

**Keywords:** quantum mechanics; high school education; double slit experience; knowledge-in-action.

## Introducción

Este trabajo forma parte de una investigación sobre la enseñanza de nociones fundamentales de Mecánica Cuántica en la Escuela Media. (Fanaro, 2009). Se elaboró una secuencia didáctica para estudiantes del último año de la escuela secundaria y se implementó en un curso de treinta estudiantes. La propuesta es alternativa a la tradicional, que se encuentra en los libros de texto, y no tiene una estructura estrictamente histórica (Fanaro, Otero y Moreira, 2007a). La investigación en su totalidad analiza la viabilidad y adaptabilidad de la propuesta a partir de las acciones de los estudiantes y aporta a la comprensión del proceso de construcción de conocimiento en el aula (Fanaro, y Otero 2008; Fanaro y Otero, 2009). Se utilizaron varios instrumentos para analizar la viabilidad: un test escrito realizado al final, las respuestas escritas de los alumnos en cada situación y los protocolos originados en el registro de audio de las clases relativos a la actividad grupal y un test diseñado para analizar las opiniones de los estudiantes sobre la secuencia. El proceso de conceptualización se analiza a partir de la identificación de los posibles teoremas en acto utilizados por los estudiantes y las inferencias realizadas. Aquí se presentan los resultados relativos a la Experiencia de la Doble Rendija, que es la primera etapa de la secuencia didáctica.

La secuencia completa comienza y culmina con la Experiencia de la Doble Rendija (EDR), porque ésta permite dar sentido a la formulación probabilística que explica los resultados – de otro modo “inexplicables” – de la distribución de electrones. La distinción fundamental entre el comportamiento de las partículas clásicas y de los sistemas cuánticos se plantea en las situaciones posteriores, cuando se realiza el cálculo de probabilidades para partículas libres y electrones libres utilizando la técnica “Caminos Múltiples” de Feynman (Arlego, 2008) en un marco geométrico-vectorial, adaptado al conocimiento de los estudiantes (Fanaro, Otero y Arlego 2007b). Luego, los resultados se aplican al cálculo de probabilidades de la EDR, y se encuentra la expresión matemática que explica la curva de probabilidad, tanto para electrones como para bolillas. Esto conduce a colocar a la constante de Planck en un lugar privilegiado, pues es la relación entre dicha constante y la masa, lo que decide si se distinguen los efectos cuánticos o no. En la Figura 1 se presentan los conceptos y principios clave que se pretendían abordar con la secuencia.

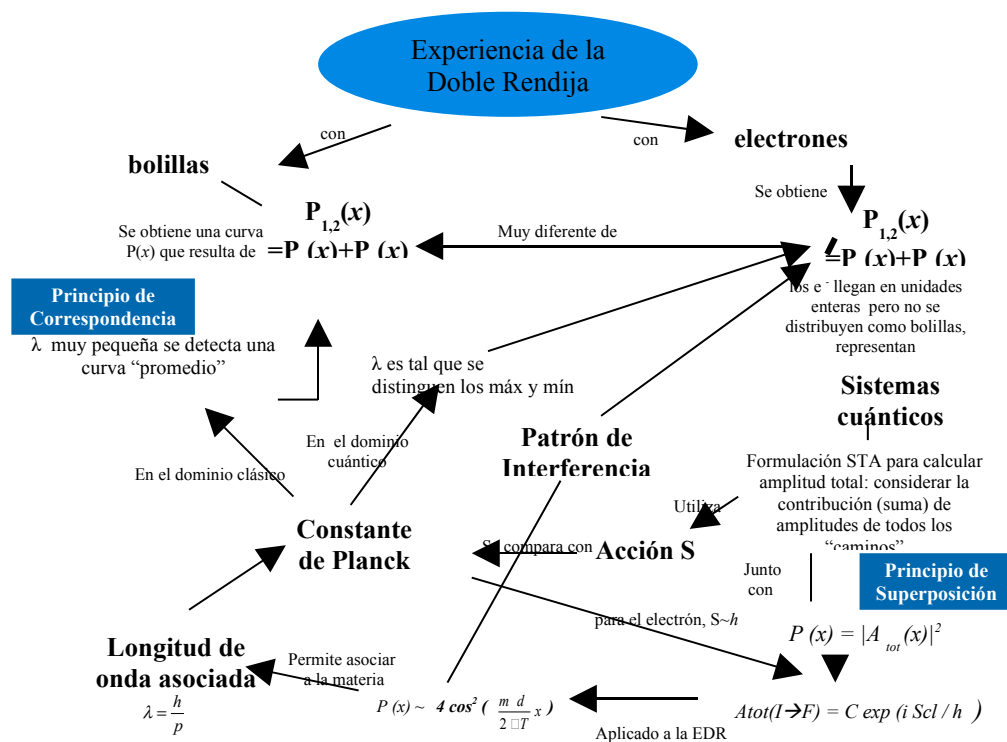


Figura 1: Conceptos y Principios a ser enseñados (Fanaro, 2009)

En particular, este trabajo explora y analiza los invariantes operatorios – teoremas y conceptos-en-acto – identificados en la etapa donde los estudiantes debían imaginar y anticipar los resultados de la EDR cuando se utilizan bolillas, y contrastarlos después con bolillas y electrones. Esto se realizó utilizando el *software* “Doppelspalt”<sup>2</sup>, que permite fijar las condiciones iniciales de la experiencia (ancho y separación de rendijas, etc.) y visualizar los impactos y la curva de probabilidad  $P(x)$ . El diseño de la secuencia incluye un conjunto de tareas para analizar el efecto en la forma de la curva cuando se varía el ancho de las rendijas y su separación. Luego, se propone cambiar bolillas por electrones para poner en evidencia el comportamiento radicalmente distinto, e introducir la idea de electrón como sistema cuántico. En el Anexo se presentan ambas situaciones tal como fueron presentadas a los estudiantes.

Interesa conocer los teoremas en acto utilizados por los estudiantes al abordar las dos primeras situaciones para comprender las inferencias que los estudiantes realizaron, y los posibles obstáculos que surgieron en la conceptualización del electrón como sistema cuántico. Por otro lado, ya que la secuencia es un instrumento en el cual cada etapa se sostiene en la anterior, resulta fundamental que los estudiantes no sean superados por estas primeras situaciones, y así hasta llegar al final. Por lo tanto, el buen funcionamiento de estas situaciones constituye un primer indicador de viabilidad de la propuesta.

## Marco teórico

<sup>2</sup> “Experimento de la doble rendija en Mecánica Cuántica” (2003). Creado por Muthsam, K (Versión 3.3 traducido al español por Wolfamann y Brickmann) Physics Education Research Group of the University of Munich. Obtenido en Internet de <http://www.physik.unimuenchen.de/didaktik/Downloads/doppelspalt/dslit.html>

Desde el punto de vista teórico en enseñanza y aprendizaje, los registros presentados en este trabajo son interpretados en términos de la teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud (1990; Moreira, 2002). Según Vergnaud la conceptualización es el núcleo del desarrollo cognitivo e involucra una relación dialéctica con situaciones-problema: son las situaciones que dan sentido a los conceptos pero cuanto más se desarrollan, en el sujeto, los conceptos más situaciones (y más complejas) él o ella es capaz de dominar.

En el marco de esa teoría, conceptos son definidos por tres conjuntos: un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (son su *referente*); un conjunto de representaciones simbólicas que constituyen su *significante*; un conjunto de invariantes en los que se basa la operatividad del concepto (le dan *significado*). Son esos invariantes que hacen operatoria la acción del individuo frente a las situaciones-problema. Son elementos cognitivos que Vergnaud denomina como *conocimientos-en-acción* que, a su vez, están constituidos por *conceptos-en-acción* y *teoremas-en-acción*. Un concepto-en-acción es una categoría, una propiedad, un predicado que se considera relevante a la situación y teorema-en-acción es una regla, una proposición que se da como verdadera respecto a dicha situación. Sin embargo, un concepto-en-acción no es un concepto ni un teorema-en-acción es un principio científico. Además de presentar un status diferente (psicológicos vs. científicos) los conceptos y teoremas-en-acción son largamente implícitos. Conceptos y teoremas científicos son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su validez, pero no es el caso para los invariantes operatorios. Por eso, es necesario investigar cómo son y cómo se generan los conceptos y teoremas-en-acción para poder llevar al alumno desde su conocimiento implícito hacia el conocimiento científico explícito que la enseñanza pretende, proceso que se lleva a cabo a largo plazo.

Por otro lado, según Vergnaud (2008) los invariantes operatorios permiten comprender la doble característica propia de la acción: ser sistemática y a la vez contingente. Sistemática porque, en muchas situaciones, la acción está sujeta a reglas unívocas. Es el caso, entre otros, de los algoritmos en matemáticas (las cuatro operaciones de la aritmética, la solución de algunas categorías de ecuaciones, etc.), y para los procesos impuestos a los operadores en ciertos puestos de trabajo (por ejemplo el pilotaje de aviones, etc.). Contingente porque las reglas generan acciones y conductas diferentes según las situaciones en que se presentan. Esta contingencia de la acción es aún más notable para las situaciones nuevas, cuando el sujeto no dispone de esquemas en su repertorio, y debe improvisar para enfrentarlo. La contingencia se convierte en oportunismo, y el sujeto busca una solución en todos sus recursos cognitivos, es decir en los esquemas anteriormente formados, susceptibles de abrir un camino hacia la búsqueda la solución.

En la adaptación a nuevas situaciones y a la resolución de problemas, los invariantes operatorios cumplen una función esencial: o ya existen en los recursos del sujeto, y están descompuestos y recompuestos, o aún no existen, emergen en situación, y se van articulando con los invariantes anteriormente formados. Las situaciones propuestas para reconstruir conocimientos de Mecánica Cuántica son nuevas para los estudiantes, representan un salto con relación a la percepción y a la intuición, debido a las características propias de los sistemas cuánticos. La identificación de los teoremas en acto que pudieron ser utilizados por los estudiantes para resolver las cuestiones y los problemas propuestos permite analizar la conceptualización, y comprender el funcionamiento de las situaciones en los estudiantes.

## Metodología

Luego de decidir y analizar los conceptos y principios que serían enseñados, se implementó la secuencia diseñada en un curso de Física de treinta (30) estudiantes de 17-18 años de edad. Los estudiantes formaron seis grupos, que permanecen fijos durante toda la secuencia. En los encuentros áulicos se planteó la siguiente forma de trabajo:

- El material de estudio impreso se entregaba a los estudiantes clase a clase, para regular apropiadamente la introducción de novedades y problemas. Al finalizar cada clase los estudiantes entregaban sus producciones al profesor.
- El material impreso consistía en preguntas y problemas, para los cuales los estudiantes debían conversar con los integrantes de su grupo, consensuar y formular respuestas escritas a las cuestiones planteadas.
- Los momentos de síntesis y consenso se planteaban con todos los grupos en forma simultánea procurando la formulación por parte de los estudiantes.
- Las preguntas de los estudiantes se respondían con preguntas, para devolver la responsabilidad al alumno.
- Se acordaron fechas para la entrega de sus producciones escritas, y de evaluación final.

Durante el desarrollo de cada una de las situaciones propuestas, se registraron en audio las conversaciones de cada grupo en cada encuentro. También se recogió todo el material completo que se les había ido entregando clase a clase, lo que constituyó su carpeta de estudio; las evaluaciones, los cuestionarios realizados y las notas del profesor. Los registros en audio fueron transcritos, constituyendo los protocolos de análisis. En cada encuentro y para cada grupo se identificaron secuencialmente los turnos de habla correspondientes a cada estudiante. A partir del análisis de los protocolos, de las conversaciones y de sus representaciones externas (respuestas, gráficos, síntesis, etc.), se identificaron algunos de los teoremas y conceptos en acto, e inferencias de los estudiantes al abordar las situaciones. Los resultados se presentan en la siguiente sección.

## Análisis: identificación de los invariantes operatorios

En esta sección se describen y analizan los teoremas en acto que posiblemente utilizaron los estudiantes al abordar las dos primeras situaciones. Las situaciones propuestas son “nuevas” para ellos y entonces tienen que reflexionar, explorar, dudar, intentar, para poder formular explicaciones. En todos estos procesos, la utilización de los teoremas en acto es esencial para la conceptualización, ya que estos son parte de los esquemas de los alumnos, que pueden entrar en competición, ser acomodados, separados y re combinados. La identificación de los invariantes operatorios se realiza situación a situación debido a que son las situaciones las que moldean los conocimientos de los estudiantes, y las que dotan de sentido los conceptos que se quieren enseñar (Fanaro y Otero, 2008)

### Situación 1: “Imaginando la Experiencia de la Doble Rendija con bolillas”

Esta situación requería primero a anticipar los resultados de la EDR con bolillas y luego, introducir la idea de probabilidad. Los estudiantes se enfocaron en el proceso aleatorio de

emisión de la fuente y la llegada individual de los proyectiles, por lo tanto inferimos que se llamó de forma reiterada al concepto en acto de azar. Los teoremas en acto relacionados con el problema de predecir en qué lugar de la pared se detectarían impactos se denominaron: “Teoremas de los impactos ( $T_i$ )”:

**$T_1$ : “Si las bolillas son disparadas al azar, la distribución es uniforme”.**

**$T_2$ : “Las rendijas imponen la forma en la distribución”**

Ambos teoremas fueron utilizados por todos los subgrupos del grupo de clase. Aún los estudiantes que utilizaron el teorema en acto que establece que la distribución aleatoria de impactos se relaciona con la presencia de las rendijas, ( $T_2$ ) solían volver al teorema en acto de la uniformidad ( $T_1$ ), como si el concepto en acto azar les impidiera reconocer la presencia de las rendijas y pensar en términos probabilísticos. El hecho de que en la situación se usaran los términos “aleatorio” y “azar” y que se expresara el desconocimiento del lugar de impacto de “cada” bolilla, habrían obstaculizado inicialmente la comprensión de la distribución. Solo después de introducir la definición de distribución de probabilidad y la curva, el azar perdió su posición dominante y los estudiantes interpretaron adecuadamente los máximos, y mínimos de la curva de probabilidad. Esto ha sido corroborado en las replicaciones realizadas, donde al no hacer referencia al azar, ninguno de los estudiantes utilizó el  $T_i$ .

El siguiente fragmento de conversaciones de los estudiantes interesa porque permite inferir el uso del teorema  $T_1$ :

*A<sub>8</sub><sup>3</sup>: Si una cosa, la rendija o lo que sea, se proyecta en la pared de madera con una línea así pero una bolita puede ir así y va a otro lugar porque dice en distintas direcciones(...) el disparador dijo que era para cualquier lado(...)Acá te dice, una bolilla que se dirige hacia una de las rendijas puede rebotar en el borde y terminar en cualquier lugar, o sea, rebota y se va para cualquier lugar*

*A<sub>6</sub>: Rebota en el bordecito de la rendija y sale para cualquier lugar (...)*

*A<sub>8</sub>: Esta es la pared rebota en un bordecito acá y la hace desviar, pasa y la hace desviar...*

El protocolo siguiente corresponde a otro grupo de estudiantes muestra cómo se usan  $T_1$  y  $T_2$  alternadamente, sin lograr consenso entre los estudiantes. Parecería que el concepto en acto azar “llama” a  $T_1$  en varias ocasiones, y hace que se ignore el efecto de las rendijas sobre la probabilidad de impacto:

*A<sub>11</sub>: Al azar, al azar!!! Si tira al azar, llegan al azar!!*

*A<sub>15</sub>: ¿al zar?*

*A<sub>11</sub>: y... con la misma dirección de las rendijas, con la dirección que tira el coso*

*A<sub>13</sub>: Para mí van a llegar a la misma dirección que en la cual llegan, si salen....*

*A<sub>11</sub>: Va a llegar en la misma dirección de la cual salen, la misma dirección!!! Claro! La misma*

Otro de los grupos que también inicialmente utilizó  $T_1$ , luego continuó sus razonamientos en base a  $T_2$ :

*A<sub>27</sub>: Bueno, ehm...si pasan en todas las direcciones decía, no?*

*A<sub>28</sub>: Sí...Pero en todas no van a pasar porque están las...las cosas...las rendijas...*

<sup>3</sup> Se identifica a cada estudiante con un subíndice numérico

Ambos teoremas en acto se utilizarían alternativamente dependiendo de la inicialización del esquema que se use para enfrentar a la situación: si prevalece el concepto de azar, se llama a  $Ti_1$ , y si se privilegian las rendijas, se llama a  $Ti_2$ . Los estudiantes del mismo grupo, un poco más adelante en la conversación:

*A<sub>13</sub>: No! van a caer todas en el mismo lugar, o sea...si te está diciendo que se disparan al azar...*

*A<sub>14</sub>: Pará, pará!!!no ves? hay dos rendijas!!, dos rendijas...Una y otra! como son dos, va a haber pelotitas... Va a haber más acá! por eso va a haber más acá y acá que acá... ponele, que están en las rendijas!!!*

Era esencial que los estudiantes abandonasen  $Ti_1$ , porque es clave para entender que las rendijas evitan una distribución uniforme de los impactos en la pared, que se produciría solo si estas no estuvieran. Además, es clave para comprender que la distribución de probabilidad para las bolillas resulta radicalmente distinta cuando se utilizan electrones y están las rendijas.

A continuación de esta primer instancia de predicción para las bolillas, se definió el cociente: *Nº de bolillas que impactan a una distancia "x" del centro de la pared /Nº bolillas disparadas en total*, para interpretar la ley de probabilidad que rige este fenómeno.

Cuando los estudiantes trazaron la curva de  $P(x)$ , en general, no fueron consecuentes con sus predicciones iniciales sino con las definiciones de probabilidad ofrecidas. Éstas modificaron la forma en que se estaban interpretando los resultados, es decir reformularon la forma en que los estudiantes entendían la experiencia. Así en el trazado de curvas intervendrían los siguientes dos teoremas en acto (Teoremas de la forma de la curva ( $Tc$ )):

*Tc<sub>1</sub>: Proporcionalidad entre nº de rendijas y máximos, y*

*Tc<sub>2</sub>: Superposición de efectos individuales en el centro*

A continuación se presentan evidencias de la utilización del teorema en acto  $Tc_1$ : **Proporcionalidad entre nº de rendijas y máximos**, que fue utilizado casi en todos los grupos. Este teorema llevaría a inferir que **"como hay dos rendijas, las bolillas copian la forma en la pared de madera y forman dos franjas de concentración, dos máximos en la curva de  $P(x)$ "**.

*A<sub>8</sub>: Porque nos dimos cuenta acá que en esta zona es menos probable que haya bolillas*

*A<sub>6</sub>: O sea, mucho menos probable que en el medio*

*A<sub>8</sub>: ...acá se va acercando a la zona más probable*

*A<sub>7</sub>: (..) la curva es como la que hicimos antes porque va menos, menos, mas, mas, es gradual pero como son dos rendijas va a ser nada, nada, un poco, algo y en el borde como hay pared una cosa rara (...)*

*A<sub>6</sub>: De esta forma la curva va muy baja porque la probabilidad es mínima.*

*A<sub>7</sub>: En la curva se manifiesta que en la pared habrá más probabilidad de impacto en las líneas de las rendijas mientras que en el centímetro que dista entre línea y línea ... pared la probabilidad de impacto es nula*

Los gráficos realizados por estos estudiantes se presentan en la Figura 2 y son coherentes con la conversación:



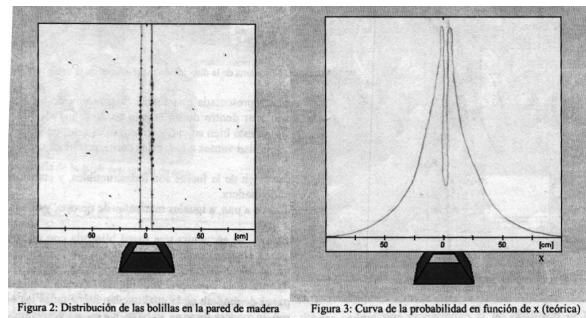


Figura 2: Dibujo de la distribución de las bolillas en la pared y curva  $P(x)$  utilizando el  $Tc_1$

Otro grupo de estudiantes en cambio, parecen utilizar el teorema en acto  $Tc_2$ : **Superposición de efectos individuales en el centro** concluyendo que “**aunque hay dos rendijas, en el centro hay un máximo**”. Implícitamente estarían aceptando que el centro es el lugar que tiene el efecto de ambas rendijas. En la conversación, ellos habían acordado que la forma de la concentración sería en dos “bandas” relacionadas con la presencia de las rendijas. Sin embargo, cuando dibujaron los impactos, los concentraron en una sola región. En la curva de probabilidad, dibujaron un único máximo central indicando que la probabilidad es máxima en el lugar correspondiente al medio de las rendijas.

*A<sub>14</sub>: ...que...el máximo..que tenés, que supuestamente es el centro ...*

*A<sub>16</sub>: ..indica máxima probabilidad*

*A<sub>14</sub>: El máximo...coma.. que se encuentra en el centro indicado por la curva..... una mayor concentración de bolillas en el centro de la pared.*

*A<sub>15</sub>: muestra que habrá una mayor concentración... de bolillas en el centro de la pared!*

*A<sub>14</sub>: sí, a medida que nos alejamos del centro de las rendijas*

*A<sub>13</sub>: Mientras que...la probabilidad disminuirá... a medida que nos alejemos del centro de las rendijas*

Los estudiantes de este grupo realizaron los siguientes gráficos, acorde a lo que previamente habían conversado:

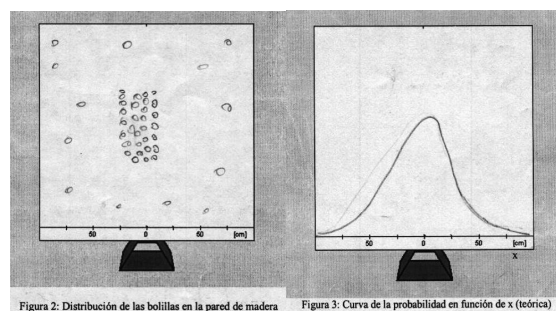


Figura 3: Dibujo de la distribución de las bolillas en la pared y curva  $P(x)$  utilizando el  $Tc_2$

Acerca de la Situación 1 se concluye que:

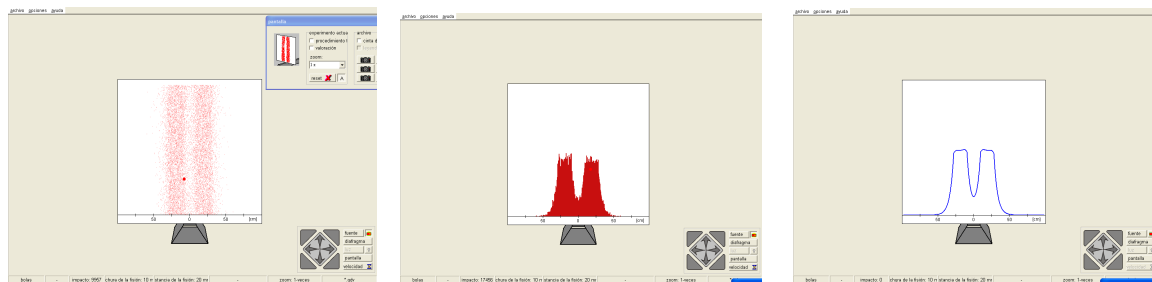
- Cuando los estudiantes tuvieron que anticipar los resultados de la EDR utilizaron inicialmente el teorema en acto en acto de la distribución uniforme  $Ti_1$ . Posiblemente  $Ti_1$  resulta “gatillado” por la referencia explícita al azar, que se menciona dos veces en Situación 1. Luego, cuando logran reconocer la presencia de las rendijas y su influencia en

la distribución de impactos, utilizan  $Ti_2$  (***“Las rendijas imponen la forma en la distribución”***)

- Después de introducir la definición de probabilidad, cuando los estudiantes tienen que representar gráficamente la curva de distribución de probabilidad, la evidencia de la que disponemos indica que solo utilizarían  $Ti_2$ . Es decir, parecería que los estudiantes atribuyen la forma de la curva de probabilidad a la presencia de las rendijas, bien colocando uno, o dos máximos, esto es utilizando  $Tc_1$  ó  $Tc_2$ . Es importante destacar que los estudiantes llegan a esta conclusión a partir del análisis cualitativo de la experiencia, antes de realizar la simulación. Por otro lado, los protocolos muestran que los teoremas en acto  $Ti_1$ ,  $Ti_2$ ,  $Tc_1$ ,  $Tc_2$ , son inestables y que la necesidad de dar una respuesta escrita común, genera un consenso que también es inestable. Sin embargo, desde un punto de vista didáctico las conclusiones de los estudiantes satisfacen las anticipaciones realizadas en el diseño de la secuencia.

## Situación 2: “Simulación la EDR con software”

Esta situación proponía a los estudiantes como tarea inicial, simular la Experiencia de la Doble Rendija con el software “Doppelspalt” seleccionando bolillas como proyectiles, y contrastar las predicciones que habían formulado en la Situación 1. Las pantallas del software muestran los impactos de las bolillas en la pared, la distribución de frecuencias según la dirección  $x$ , la curva  $P(x)$ , respectivamente como se presenta en la Figura 4:



(a) El software muestra los impactos de las bolillas en la pared colectora  
(b) Histograma generado por la distribución de las frecuencias según  $x$   
(c) Curva teórica de  $P(x)$

A medida que los estudiantes disminuyen el parámetro “separación de las rendijas” el software muestra un máximo central, como se muestra en la Figura 5:

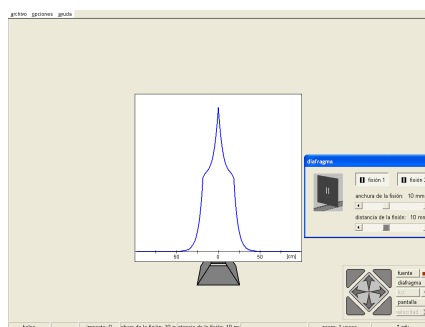


Figura 5: Curva  $P(x)$  obtenida con el software, configurando la distancia entre las rendijas del mismo valor que su ancho

El programa no permite que la separación de las rendijas sea menor que su ancho, para evitar la simulación con una sola rendija. Al reducir la distancia de separación a determinado valor, el programa disminuye simultáneamente el ancho de las rendijas. Se busca generar a los estudiantes el problema de explicar ¿porqué es máximo el valor en el centro de las rendijas, cuando por allí no pasan las bolillas? iniciando la idea de suma o superposición de curvas.

Antes de realizar la simulación de la experiencia con electrones, los estudiantes tenían que anticipar si los electrones se distribuirán igual que las bolillas. Como ellos sólo disponen del concepto de electrón como “pequeñas bolillas”, su respuesta sería afirmativa, y deliberadamente se busca que expliciten esta idea. Si simulan esta experiencia seleccionando electrones de 100 *KEv*, rendijas cuyo ancho es 10 nm y separadas a una distancia de 10 nm, la salida del *software* muestra una gráfica con efectos de difracción y de interferencia, como los de la Figura 6:

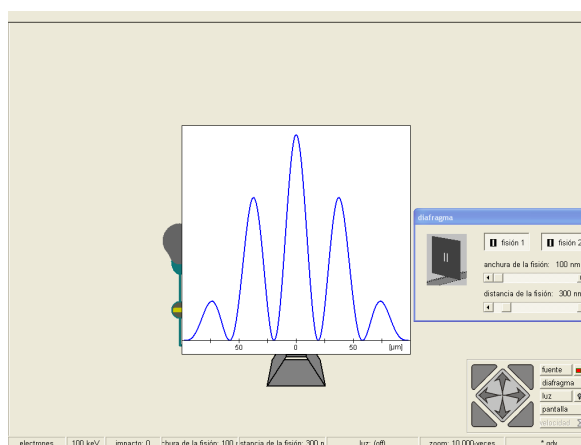


Figura 6: Curva  $P(x)$  obtenida con el software, seleccionando como fuente a electrones

Como se puede observar en la figura anterior, el *software* cambia las unidades de  $x$  (que en bolillas estaba en centímetros), a nanómetros, aunque no es posible que muestre en la interfaz gráfica el cambio en las dimensiones de las rendijas, para que éstas sigan siendo visibles al usuario. El objetivo de esta simulación es que los estudiantes perciban la diferencia entre el gráfico para electrones y para bolillas, interpretando los máximos y mínimos como aquellos lugares donde habrá máxima concentración o no habrá ninguna, respectivamente. Para propósitos de esta propuesta sería deseable que el *software* obviara los efectos de la difracción, pues así resulta más notable el contraste entre ambos gráficos, pues de esta forma el valor máximo sigue siendo en el centro.

El *software* también permite colocar en la simulación una fuente luminosa, variando el color (frecuencia) y la intensidad lumínica. Si bien es posible analizar el efecto de la luz e introducir el principio de incerteza, esta situación no utiliza la fuente de luz para no apartarse de la cuestión central: ¿cómo se puede describir el comportamiento de los electrones? y de allí, introducir la noción de sistema cuántico. Luego, la secuencia continúa con la presentación y utilización de la técnica de Caminos Múltiples para calcular la probabilidad de que un electrón libre se encuentre en un estado inicial de posición y tiempo a otro final. (Fanaro, Otero y Arlego, 2008).

Cuando se solicitó a los estudiantes abrir de a una de las rendijas y notar la superposición de curvas, lo cual fue aceptado por el grupo de clase sin dificultades. En el momento en

que los estudiantes tenían que anticipar si en esta experiencia al cambiar las bolillas por electrones, habría cambios en la distribución, y luego simular la experiencia. Como se suponía que ellos sólo disponían del concepto de electrón como “pequeñas bolillas” se esperaba que su respuesta fuera afirmativa, y que se produjera una perturbación cuando ellos vieran la distribución en “bandas de concentración de impactos” proporcionada por el software. Este conflicto sería el punto de partida para la introducción de electrones como sistemas cuánticos. En el momento de anticipar, casi todos los estudiantes respondieron que los electrones se comportarían como las bolillas. Sin embargo, cuando observaron los resultados e intentaron explicarlos, utilizaron dos teoremas en acto. (Teoremas de electrones (*Te*)):

*Te<sub>1</sub> “Los electrones tienen una cualidad especial: atravesar paredes”*

*Te<sub>2</sub>: “Los electrones son bolillas muy pequeñas”*

Ambos teoremas en acto están relacionados con el concepto en acto de electrón y el teorema en acto que lo considera una partícula extremadamente diminuta. El primer teorema en acto, les permitió inferir que el electrón puede “atravesar” la pared blindada, y el segundo, que la pequeñez del electrón comparada con las rendijas, hace que éstos no se vean afectados por ellas.

El teorema *Te<sub>1</sub>* fue utilizado por uno de los grupos, que explícitamente aceptan que los electrones *pueden atravesar las paredes blindadas*, y entonces, interpretan que la pantalla colectora muestra una distribución uniforme de electrones. Por una razón enteramente diferente a la esgrimida para las bolillas, los estudiantes insisten en la distribución uniforme de los impactos, también para los electrones. Ellos argumentaron que la distribución uniforme se debe a la propiedad de los electrones de atravesar paredes blindadas, como se aprecia a continuación:

*A<sub>10</sub>- Los electrones son pequeñísimas bolillas de carga eléctrica, ¿se comportan de la misma forma que estos? No, ya que poseen diferentes propiedades y podrán penetrar lugares que las bolillas no pueden. Nos puso...¿Por qué? Contar cómo sucede esto. Y...los electrones pueden atravesar distintos materiales...*

*A<sub>6</sub>- Una vez, una Profesora... de química me dijo que los electrones pueden atravesar distintos materiales...*

*A<sub>10</sub>- ¿Qué, le cuento la historia de cómo aprendí que los electrones pueden atravesar? Tenemos que pensar cómo sabemos que los electrones atraviesan esto.*

*A<sub>6</sub>- ¿Le hacemos el cuento de cómo nos dijo que los electrones podían atravesar diferentes materiales?(...) Casi en todos lados pero más acá, si está en todos lados...*

*A<sub>7</sub>- Los electrones atraviesan...*

*A<sub>6</sub>- ...Pueden pasar la pared*

*A<sub>7</sub>- Se distribuyen en toda la pared de madera coma aunque con más concentración...en la zona central a 50 cm...en el centro*

*A<sub>8</sub>- ¿Cómo interpretas la gráfica?*

*A<sub>7</sub>- Los electrones pueden impactar en cualquier zona de la pared de madera pero en la zona que tienen mayor probabilidad...a medida que se acercan a...al medio de la pared ...*

Los estudiantes se sorprendieron porque las franjas donde se concentran los impactos eran más de dos, y estaban distribuidas en todo el ancho de toda la pared. Como no disponen de conceptos ondulatorios subsumidos para asociar la distribución con un patrón de

interferencia, interpretan el resultado en base a la “increíble” cualidad de que los electrones atraviesan barreras. Esto oculta el conflicto que se esperaba producir al considerar que si los electrones son como bolillas y las bolillas copian la forma de las rendijas, entonces no deberían verse ahora franjas que en modo alguno se corresponden con las ranuras.

El teorema en acto *Te<sub>2</sub>*: “*Los electrones son bolillas muy pequeñas*” fue utilizado por uno de los grupos, quienes desde la primera situación había considerado el tamaño de las rendijas como un factor importante en el análisis. Cuando predicen para los electrones, interpretaron que el reemplazo de bolillas por electrones se realizó dejando el resto de los parámetros iguales (ancho y separación de las rendijas) sin reparar en que se indicaba cambiar los parámetros para adecuar las dimensiones de la experiencia. Por lo tanto, predijeron que si sólo se varía el tamaño de los proyectiles hasta llegar a electrones manteniendo las dimensiones de las rendijas, el comportamiento sería como el de las bolillas:

*A<sub>28</sub>- No, porque...Claro...y que...hay mayor probabilidad en el centro! Porque..al ser más pequeño, es mayor el ángulo de donde..pueden rebotar! Va a ir por ejemplo...*

*A<sub>27</sub>- Ya sé, pero por qué entran todos? Claro, todo es mucho más grandote ahora...Pongamos eso ahora...*

*A<sub>28</sub>- Que depende del tamaño...*

*A<sub>27</sub>- No, porque al ser de menor tamaño..eh....varía el ángulo con que pasa....varía la curva, de probabilidad...*

*A<sub>28</sub>- Y aumenta las zonas de probabilidad porque ahora es mucho más ....*

*A<sub>28</sub>- Para mí es lo mismo que...como si se..se agrandaran las dos rendijas..porque al agrandar las rendijas, es como que las bolas sean más chiquitas, entonces se agrandan... Entonces le ponemos funciona como si, se agrandaran las rendijas*

*A<sub>27</sub>- Entonces le ponemos funciona como si, se agrandaran las rendijas*

*A<sub>27</sub>- Funciona como si se agrandaran las rendijas en el caso de las bolillas*

*A<sub>29</sub>- Le tenemos que poner como si fuera un límite, las bolillas, o sea que cuando atraviesan son bollillas los electrones*

De la Situación 2 se concluye que:

- Para el caso de las bolillas, la suma de curvas fue aceptada en los grupos – más o menos explícitamente – y esto resultó un buen punto de partida para encontrar diferencias con el caso de los electrones mostrado por el *software*.
- Los estudiantes utilizaron *Te<sub>1</sub>* ó *Te<sub>2</sub>* o ambos, para explicar la distribución y la curva  $P(x)$  para electrones que mostraba el *software*. Pero como la salida muestra la curva de interferencia modulada por la difracción – un máximo absoluto en el cero y varios máximos hacia los costados – los estudiantes dirigieron su atención al máximo central, sin sorprenderse por los mínimos de la curva, que no aparecían en el caso de las bolillas. Entonces, en lugar de reconocer las diferencias fundamentales entre las curvas para los electrones y las bolillas, las encontraron parecidas, pues ambas curvas de  $P(x)$  tienen el máximo en el centro.
- Otro punto conflictivo ligado a *Te<sub>1</sub>* es que cuando los estudiantes advierten las franjas de impactos en toda la pared, sólo consiguen explicarlas si los “electrones-bolitas” atraviesan la pantalla en cualquier parte. Evidentemente, no reparan en que hay zonas

con ningún impacto, ni relacionan este patrón con sus conceptos ondulatorios, que evidentemente no están aquí disponibles.

- El obstáculo anterior complicó en parte la continuidad de la secuencia, pero fue sorteado por la intervención de la profesora, quien señaló a los estudiantes la presencia de los mínimos de la curva  $P(x)$  que les habían resultado inadvertidos. Se insistió en que las rendijas afectan a la distribución de los electrones de forma que ya no se copia la forma de las rendijas en la pantalla como lo hacían las bolillas, sino de otra forma, que resulta inesperada. A partir de esto se necesita y se buscará una explicación de tal comportamiento, esto resulta esencial para abordar la siguiente Situación de la secuencia, diseñada para dar sentido a la utilización de la técnica de “Sumar Todas las Alternativas” para el cálculo de probabilidad

En otros protocolos de situaciones posteriores, expresiones de los estudiantes como “*ahora nos estás cambiando nuestro pensamiento de...de toda la vida!...¡los electrones no son bolillas!...*” estarían indicando que ellos al menos dudaron de la idea de los electrones como “pequeñas bolillas” (Fanaro y Otero, 2008). Es decir, si bien las primeras dos situaciones lograron contrastar las ideas que los estudiantes tenían acerca de los electrones, las características esenciales de los sistemas cuánticos se abordan plenamente al analizar el cálculo de probabilidad y modelizar la curva  $P(x)$  mediante de la aplicación de los resultados para el electrón libre (Fanaro, Otero, 2009). Por lo tanto, desde el punto de vista didáctico es posible afirmar que las dos primeras situaciones funcionaron de la manera prevista.

## Reflexiones finales

Conocer los teoremas-en-acto utilizados en estas situaciones, ha permitido mejorarlas para repeticiones ya efectuadas. Se insiste además en que como profesores no es posible ignorar el carácter oportunista de la conceptualización señalado por Vergnaud y se destaca que como investigadores es necesario complementar las miradas didáctica y cognitiva. Complementariedad, para la cual la Teoría de los Campos Conceptuales resulta particularmente adecuada.

Este análisis, realizado desde la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, permitió ver funcionar el carácter oportunista de la conceptualización combinado con la presencia de invariantes operatorios (teoremas-en-acto y conceptos-en-acto) construidos en la historia cognitiva del alumno, tal es el caso del teorema-en-acto relativo a los electrones que los identifica con pequeñísimas bolillas, capaces de “atravesar paredes”. Este teorema-en-acto, construido a lo largo de años de escolaridad, tiene además un correlato mental imagístico y otro pictórico, que está bien documentado en múltiples textos de física y de química. Este trabajo muestra hasta qué punto, está obstaculizando la conceptualización del electrón como un sistema cuántico. A la vez que conduce a advertir acerca de la importancia de evitar esta auténtica creación didáctica, de electrones como bolitas con cualidades extraordinarias como la de “atravesar paredes”.

Finalmente, se destaca por un lado, la necesidad de testear los productos de investigación en aulas reales, modificarlos, y nuevamente implementarlos, y por otro lado la relevancia de la intervención oportuna del profesor imbuido en la tarea que está desarrollando.

## Referencias

- Arlego, M. **Los fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela secundaria utilizando el concepto de integral de camino**. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, (3), 59-66, 2008. Obtenido de [http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio3/num1/REIEC\\_anio3\\_num1\\_art6.pdf](http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio3/num1/REIEC_anio3_num1_art6.pdf)
- Fanaro, M., Otero, M. R; Moreira, M Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar los fundamentos de la Mecánica Cuántica en la escuela. **Actas del V Encuentro Internacional de Aprendizaje Significativo-** Febrero de 2006 Centro Universitario la Salle. Universidad autónoma de Madrid. ESPAÑA Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía VIII, pp. 189-201, 2007 (a).
- Fanaro, M., Otero, M. R Arlego, M. Nociones matemáticas necesarias para reconstruir fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela: la importancia de los vectores y los números complejos. **Actas del I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática**, ISBN 978-950-658-183-1 UNCPBA, ARGENTINA 2007(b).
- Fanaro, M., Otero, M. R Arlego, M. **Software de simulación y reconstrucción de fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela**. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (TE&ET) Universidad Nacional de La Plata N° 2, pp. 4-12., 2007(c). Disponible en <http://teyet-revista.info.unlp.edu.ar/files/No2/TEYET2-invitedpaper.pdf>
- Fanaro, M., Arlego, M., Otero, M. R., El método de caminos múltiples de Feynman para enseñar los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica en la escuela secundaria, **Caderno Catarinense de Ensino de Física** 22, 233-260 2007 (d).
- Fanaro, M., Otero, M. R Basics Quantum Mechanics teaching in Secondary School: One Conceptual Structure based on **Paths Integrals Method** *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 2(2), 103-112. ISSN 1870-9095 (2008) Disponible en [http://journal.lapen.org.mx/may08/LAJPE%20149F-Fan aro%20Otero.pdf](http://journal.lapen.org.mx/may08/LAJPE%20149F-Fan%20Otero.pdf)
- Fanaro, M., Otero, M. R Arlego. Teaching the foundations of quantum mechanics in secondary school: a proposed conceptual structure. **Investigações em Ensino de Ciências** – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, BRASIL.- ISSN 1518-8795 V14(1), pp. 37-64, 2009 (a).
- Fanaro, M., Otero, M. R., Arlego, M., Enseñanza de los Fundamentos de la Mecánica Cuántica en la Secundaria: Propuesta e implementación de una Estructura Conceptual, **Investigações em Ensino de Ciências**. V14(1), pp. 37-64, 2009 (b).
- Fanaro, M., Otero, M. R Teoremas en acto y situaciones de Mecánica Cuántica en la Escuela Media. *Lat. Am. J. Phys. Educ.* 3(2) pp. 307-323, 2009.
- Fanaro, M. **La enseñanza de la Mecánica Cuántica en la Escuela Media**, Tesis Doctoral leída el 23 de Julio de 2009 en la Universidad de Burgos, 2009.
- Moreira M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, (7), 7-29, 2002.

Vergnaud, G. **La teoría de los campos conceptuales. Recherches en Didactique des Mathematiques**, Traducido por Juan D. Godino. (10), 133-170, 1990.

Vergnaud, G. **Functions, concepts and schemes**. A reply to Rita Otero, 2008.

## ANEXO

### Situación 1: Imaginando la experiencia

#### 1) La Experiencia de la Doble Rendija (EDR)

Imaginemos una experiencia como la que muestra esquemáticamente la siguiente figura.

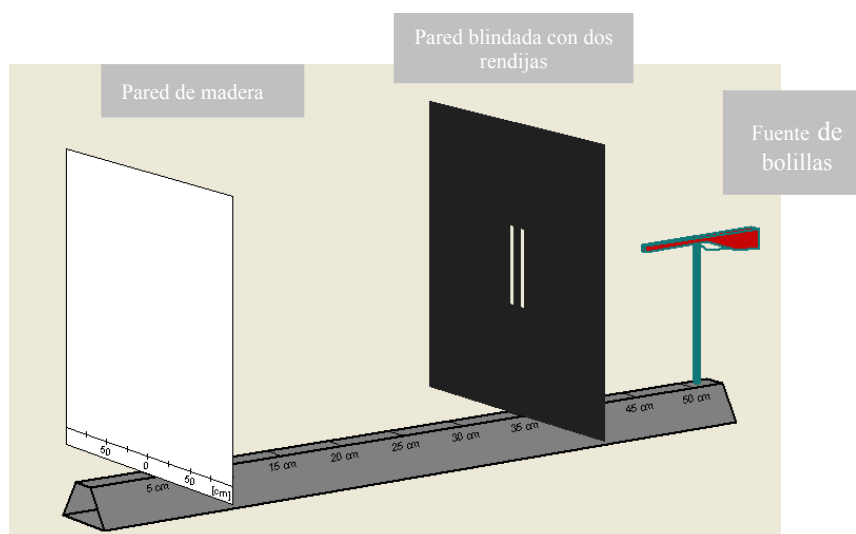


Figura 1: Esquema de la disposición experimental de la doble rendija con bolillas

A la derecha, está representada una fuente disparadora de un chorro de bolillas, que salen disparadas al azar dentro de un ángulo bastante grande porque, supongamos, la fuente disparadora no está bien sujeta, y se mueve al azar, en todas las direcciones. Por cuestiones de simplicidad vamos a hacer dos consideraciones muy importantes:

- 1- Las bolillas que salen de la fuente son indestructibles, y entonces llegan en unidades enteras a la pared de madera.
- 2- Salen disparadas de a una, a iguales intervalos de tiempo, y con la misma rapidez.

A 15 cm de la fuente, se encuentra una pared blindada con dos ranuras de tamaño tal que las bolillas pasan sin que quede trabada ninguna en la rendija. Supongamos que las rendijas tienen un ancho de 10 mm, y ambas rendijas se encuentran separadas a 10 mm también una de la otra. A la izquierda de la Figura 1 (ver la escala de la regleta gris), se representa una pared de madera en la cual quedan incrustadas las bolillas que impacten en ella. Esta pared de madera tiene en su base una escala perpendicular a la regleta gris, en la cual el 0 representa el centro de la pantalla, en esa dirección.

Se pone en funcionamiento la fuente disparadora durante medio minuto aproximadamente. Nuestra cuestión central es: **¿Cómo se distribuirán en la pared de madera las bolillas que impactaron en ella?**

Conversa con tus compañeros acerca de las siguientes cuestiones. Escribe las respuestas a continuación de cada pregunta, en el espacio que te dejamos para eso.



- 1- a) ¿Cómo se distribuirán las bolillas que logren pasar por las rendijas y lleguen a la pared de madera? ¿Habrá más en algún lugar? ¿Por qué?  
 b) Realiza un bosquejo de lo que consideres que tendrá la pared de madera, al cabo de ese tiempo en la siguiente figura:

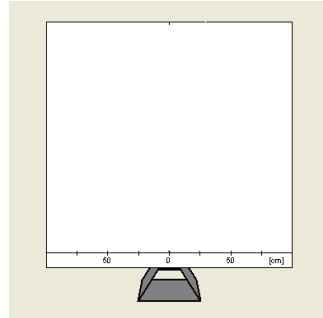


Figura 2: Distribución de las bolillas en la pared de madera

Supongamos que en ese tiempo fijo, contamos cuántas bolillas en total impactaron en la pared de madera, y llamamos a este número  $N$ . Consideremos la fracción

$$f = \frac{\text{N}^\circ \text{ de bolillas que impactan a una distancia "x" del centro de la pared}}{N}$$

No podemos decir exactamente en que lugar de la pared incidirá una bolilla determinada: una bolilla que se dirige hacia una de las rendijas puede rebotar en el borde, y terminar en cualquier lugar.

De esta forma, al realizar la experiencia tomando distintos números de bolillas disparadas, iremos obteniendo gráficos de frecuencias relativas, según  $x$  (estos gráficos se llaman histogramas)

Si disparamos muchísimas bolillas, (es decir hacemos a  $N$  infinitamente grande), en el límite esta fracción representa la “probabilidad” que una bolilla caiga a cierta distancia del centro de la pantalla. En este caso, la gráfica tiende a una curva, que llamaremos “curva de probabilidad”.

2- Ahora pensemos en una curva de probabilidad de llegada a la pared según la distancia al centro de las rendijas  $x$ . Si a cierta distancia  $x$  del centro 0 (sin que nos importe la dirección vertical en la que se encuentre) se encuentran incrustadas muchas bolillas, la probabilidad en esa  $x$  allí será alta. Por el contrario, si hay pocas bolillas, diremos que en esa  $x$  la probabilidad es baja.

- a) ¿Podrías dibujar aquí de forma aproximada la curva que se obtendría?

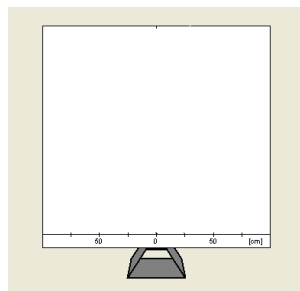


Figura 3: Curva de la probabilidad en función de  $x$  (teórica)

b) Describe aquí la forma de la curva que dibujaste en la Figura 3

3- Ahora imaginemos que en la experiencia anterior tapamos una de las rendijas y realizamos la experiencia. Luego, tapamos esa rendija y abrimos la otra. ¿Podrías dibujar en la parte izquierda de las figuras siguientes, cómo se distribuirán las bolillas en la pared de madera y en la parte derecha, cómo será la curva de probabilidad?

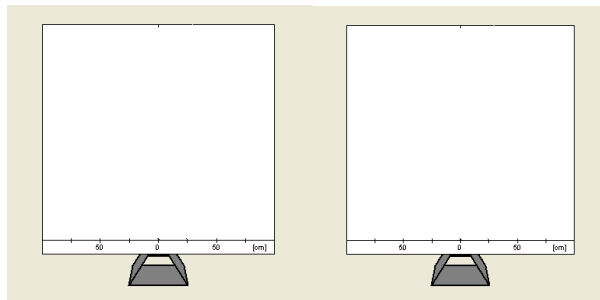


Figura 4: Bloqueando  $R_1$ . Izquierda: Distribución de las bolillas que llegaron a la pantalla. Derecha: Curva de probabilidad según  $x$  cuando se bloquea  $R_1$

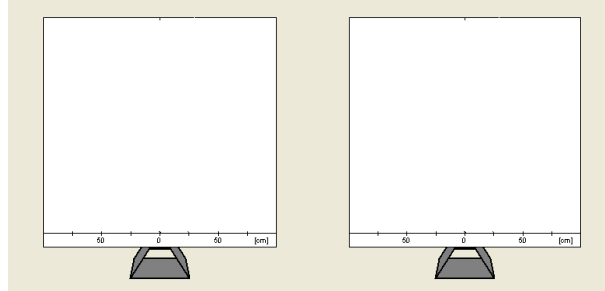


Figura 5: Bloqueando  $R_2$ . Izquierda: Distribución de las bolillas que llegaron a la pantalla. Derecha: Curva de probabilidad según  $x$

4- ¿Podrías explicar el resultado de la experiencia con ambas rendijas abiertas, con relación a lo obtenido en cada una de las situaciones en donde se tapa una de las rendijas? Escribe tu respuesta aquí.

### Situación 2: Simulando la EDR con software

Como es muy complicado realizar la experiencia que antes imaginamos en nuestro laboratorio, te proponemos que la simulemos con un software denominado “Doppelspaltversuch”. Nuestra pregunta central es:

#### ¿Cómo se puede explicar la forma de la curva de Probabilidad según $x$ ?

- 1- Simula la experiencia seleccionando bolillas, y ambas rendijas a la vez, con un ancho de 10mm y una separación de 20mm (Esto significa que las rendijas tienen un ancho de 10mm y están separadas a 10mm una de la otra). Enciende la fuente.
  - a) ¿Cómo fueron tus predicciones con respecto a los resultados mostrados en la simulación en relación a la distribución de bolillas en la pared? Describe si coincidieron o no con lo mostrado en el software.
  - b) Obtén la curva de probabilidad, y dibujala aquí.

2- Ahora mantén fijo el ancho de las rendijas en  $a = 10\text{mm}$ , pero comienza a disminuir gradualmente la distancia de separación.

- a. Describe lo que muestra la simulación en cuanto a los impactos en la pantalla
- b. Describe la forma de la curva de probabilidad en este caso
- c. ¿Cómo interpretas la forma de la curva?
- d. ¿Podrías explicar a que se debe la forma de la curva en el centro ( $x = 0$ )?

3- Cierra de a una las rendijas dejando los demás parámetros constantes y corre la simulación.

- a) Dibuja aquí cada una de las curvas de probabilidad cuando se cierra cada rendija por separado
- b) ¿Cómo podrían relacionarse la curva de probabilidad cuando están ambas rendijas abiertas con cada una de las curvas por separado?

4- ¿Los electrones son pequeñísimas bolillas de carga eléctrica? ¿Se comportarán de la misma forma que ellos?

Nuestra pregunta clave es: **¿Qué se obtiene en la EDR si se realiza con electrones?**

5- Simula la experiencia de la doble rendija con electrones de  $100\text{KeV}$ , con un ancho de rendijas de  $100\text{nm}$ , y una distancia entre los puntos medios de las rendijas de  $300\text{nm}$ .

- a) Describe cómo resultó la distribución de los electrones en la pantalla colectora
- b) Reproduce aquí de manera aproximada como resulta la gráfica de la curva de probabilidad, y describe su forma.
- c) ¿Cómo interpretas esta gráfica?

6- Abre una de las rendijas por vez, y enciende la fuente disparadora de electrones, dejando todos los anteriores parámetros iguales. (ancho  $100\text{nm}$ , distancia  $300\text{nm}$ , energía  $100\text{KeV}$ )

- a) Describe cómo se distribuyen los electrones en la pantalla en cada caso
- b) ¿Cómo son las curvas de probabilidad en cada caso? Dibuja las dos.
- c) ¿Tienen estas curvas alguna relación respecto a las curvas obtenidas con las bolillas?
- d) Con los electrones, ¿se cumple que la curva de probabilidad cuando ambas rendijas están abiertas es la **suma** de cada una de las curvas de probabilidad por separado?

**Recebido em Julho de 2008, aceito em Agosto de 2009.**