

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL BASEADO NA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PARA
MAXIMIZAÇÃO DA RIGIDEZ ESTRUTURAL

por

Alessandro Werner Bucker

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, dezembro de 2019

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO

Bücker, Alessandro Werner
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL BASEADO NA
DISTRIBUIÇÃO NORMAL PARA MAXIMIZAÇÃO DA RIGIDEZ
ESTRUTURAL / Alessandro Werner Bücker. -- 2019.
26 f.
Orientador: Daniel Milbrath De Leon.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2019.

1. otimização topológica. 2. distribuição normal.
3. filtro de densidades. I. Milbrath De Leon, Daniel,
orient. II. Título.

Alessandro Werner Bucker

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL BASEADO NA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PARA
MAXIMIZAÇÃO DA RIGIDEZ ESTRUTURAL

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. MARIO ROLAND SOBCZYK SOBRINHO
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Daniel Milbrath De Leon

Comissão de Avaliação:

Prof. Jackson Manfredini Vassoler

Prof. Herbert Martins Gomes

Prof. Daniel Milbrath De Leon

Porto Alegre, dezembro de 2019

DEDICATÓRIA

Chegar a essa fase do meu desenvolvimento como pessoa só foi possível pelo apoio, amor e carinho que recebi de meus pais e minhas irmãs. Todos sempre sendo o melhor de si e ajudando os outros a também serem. Além disso, nenhuma distância medida em quilômetros foi suficiente para nos afastar, sempre tive todos no meu coração, hoje mais do nunca. Minha família, meus verdadeiros exemplos. Também trago no coração, os bons amigos que fiz nesta fase da minha vida, tão importantes por ajudarem a fazer a vida mais divertida. Também não esqueço daqueles amigos de infância, que são eternos no coração.

EPÍGRAFE

“Se reduzirmos o custo do transporte no espaço, podemos fazer grandes coisas.”

“Se a humanidade não aterrissar em Marte durante a minha vida, ficarei muito desapontado.”

Elon Musk

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2019

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA MULTIMATERIAL BASEADO NA
DISTRIBUIÇÃO NORMAL PARA MAXIMIZAÇÃO DA RIGIDEZ
ESTRUTURAL

Bücker, Alessandro Werner
awbucker@gmail.com

Resumo. *Técnicas de otimização topológica já são bem conhecidas e aplicadas dentro da otimização estrutural. Recentemente, com o desenvolvimento de processos de fabricação avançados, principalmente de impressoras 3D, a aplicação de otimização topológica para problemas de distribuição de materiais com diferentes propriedades dentro do mesmo domínio tem despertado bastante interesse. Formulações que contemplem mais de um material diferente de vazio dentro do problema têm desafiado as formulações clássicas de otimização topológica. Neste trabalho, uma formulação baseada em funções de distribuição normal é estudada para realizar a interpolação de diferentes materiais dentro do mesmo problema. Através de estudos de caso, a proposta é validada e um amplo estudo sobre as variáveis mais importantes do problema é realizada. As variáveis são o desvio padrão mínimo, a redução do desvio padrão adequado por iteração, raio de filtro para eliminar o comportamento de distribuição de xadrez. Com as variáveis estudadas, é validado o ganho de flexibilidade aplicando mais de um material na estrutura.*

Palavras-chave: *otimização topológica, distribuição normal, filtro de densidades.*

Abstract. *Topological optimization techniques are already well defined and applied within structural optimization. Recently, with the development of advanced manufacturing processes, mainly of 3D printers, the application of topological optimization for material distribution problems with different properties within the same domain has aroused much interest. Formulations that contemplate more than one non-void material within the problem have challenged classical topological optimization formulations. In this work, a formulation based on normal distribution functions is studied to perform the interpolation of different materials within the same problem. Through case studies, the proposal is validated and a broad study of the most important variables of the problem is carried out. The variables are the minimum standard deviation, the reduction of the appropriate standard deviation by iteration, filter radius to eliminate chess distribution behavior. With the studied variables, the flexibility gain is validated by applying more than one material to the structure.*

Keywords: *Topology optimization, normal distribution, density filter*

NOMENCLATURA

A	Área	$[m^2]$
B_R	Perímetro do círculo de raio R	$[m]$
C	Matriz de flexibilidade	$[mm/N]$
E_{ijkl}	Componentes do tensor de elasticidade	$[N/m^2]$
E_{ijkl}^m	Tensor de elasticidade de um único material	$[N/m^2]$
E_{ijkl}^{vazio}	Tensor de elasticidade do espaço vazio/sem material	$[N/m^2]$
e	Sub índice que indica que a propriedade pertence a um elemento	
F	Vetor de carregamento	$[N]$
f_v	Função de massa	$[Kg]$
K	Matriz de rigidez	$[N/m]$
K	Matriz de rigidez global	$[N/m]$
m	Índice variável $m = 1, \dots$ que indica um material	
n	Qualquer valor inteiro	
n_e	Número de fases de candidatos a distribuir nos elementos	
p	Redução percentual por iteração	
R	Raio	$[m]$
\mathbb{R}	Domínio viável da otimização	$[m \text{ ou } m^2 \text{ ou } m^3]$
T	Transposto da matriz	
U	Deslocamento global	$[mm]$
V	Volume total	$[m^3]$
v_i	Volume de um elemento	$[m^3]$
γ	Densidade do material	$[Kg/m^3]$
ε	Tensor deformação	$[mm/mm]$
η	Parâmetro de penalização	
ρ	Pseudo densidade	$[Kg/m^3]$
σ	Desvio padrão	
σ_m	Desvio padrão de um único material	
μ	Média	$[Kg/m^3]$
μ_m	Densidade do material	$[Kg/m^3]$

1. INTRODUÇÃO

A utilização eficiente de materiais é importante em diferentes aplicações. A indústria espacial, automotiva e de construção civil podem se valer da otimização topológica de estruturas e elementos mecânicos. Estas técnicas são imprescindíveis para, por exemplo, a exploração espacial, pois naves precisam resistir a condições extremas de esforços mecânicos e temperatura, e ter o menor peso possível. Citam-se os exemplos apontados por Bendsøe (2003) que afirma que as indústrias aeroespaciais e grandes empresas automotivas aplicam dimensionamento e otimização da forma ao projeto de estruturas.

Os primeiros softwares de otimização topológica que fazem o uso de elementos finitos surgem na década de 80. Bendsøe (2003), afirma que o objetivo da otimização topológica é encontrar a forma ideal da estrutura em uma região determinada. A aplicação de otimização pode ter variadas aplicações, com a dissertação de J. B. Lauz (2018) que traz uma abordagem de otimização topológica na aplicação de posicionamento de atuadores pizeletricos, já a publicação de Simonetti, H. L. (2009) apresenta uma otimização topológica de estruturas bidimensionais.

Ananthasuresh (2001) afirma que para determinar o ótimo topológico de estruturas contínuas o trabalho de Bendsøe (1995) se provou bem sucedido. Bendsøe (2003) descreve a aplicação de função interpolação material chamada SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) em um domínio de referência fixo, com método de elementos finitos e um algoritmo simples de otimização. A partir desse momento temos diversos resultados para otimização topológica utilizando, principalmente, apenas um material. Para mais de duas fases, Zuo e Saitou (2016) aplica o método para distribuir multimateriais.

A otimização topológica multimaterial, traz o mesmo conceito de distribuição de um material, porém a solução pode contar com múltiplas fases de materiais distribuídos no domínio. Ananthasuresh (2001), afirma que o método SIMP, para mais de duas fases, se torna complicado, devido ao aumento das variáveis de projeto e da continuidade da função de interpolação, e propõe um modelo alternativo para a interpolação de material, aplicando a função normal na otimização topológica. O trabalho de C.Y. Kiyono (2017), utiliza a função distribuição normal para o método de otimização variando a orientação das camadas de fibras e assim avalia a minimização de flexibilidade. Como a técnica de distribuição multimaterial era pouco explorada até anos atrás, existe pouca bibliografia a respeito.

Quando há a direta implementação do método de elementos finitos no processo de otimização topológica, um padrão de distribuição chamado tabuleiro de xadrez pode aparecer e gerar uma rigidez virtual. Bourdin (2001) propõem um filtro baseado na média da densidade dos elementos vizinhos de maneira a contornar o problema do padrão de tabuleiro de xadrez.

Apesar de existir a bastante tempo, a proposta de interpolação material baseada na distribuição normal de Ananthasuresh foi pouco explorada até hoje principalmente pela dificuldade de se sintetizar peças e componentes feitas de diversos materiais. No trabalho original, uma série de parâmetros relativos à função de interpolação material são poucos explorados, assim como os problemas resolvidos (mecanismos flexíveis).

. O principal parâmetro a ser encontrado é o comportamento do desvio padrão da função normal no problema. Outro parâmetro interessante é o comportamento de tabuleiro de xadrez, explicado anteriormente, quando usada a distribuição normal ao invés do modelo clássico SIMP. Para atingir os objetivos citados, duas estruturas comumente aplicadas em otimização topológica serão usadas, a viga L e uma viga em balanço.

O objetivo principal deste trabalho é abordar as características de otimização topológica, utilizando uma função de distribuição normal para a interpolação material, e realizar análises de distribuição de material, visando observar o comportamento de estruturas frente os diferentes parâmetros e testar a eficiência dos mesmos para um problema de minimização de flexibilidade. Além disso é testado se a função baseado na distribuição normal é aplicável a mais de uma estrutura.

2. FUNDAMENTAÇÃO

Otimização topológica é um método computacional que visa projetar a topologia ótima de estruturas seguindo um critério(s) de custo, como máxima rigidez, menor peso etc. Esse método distribui o material no interior de um domínio fixo de forma a maximizar ou minimizar uma função custo específica. O material em cada ponto do domínio pode variar de vazio, até sólido com presença total de material e podendo assumir densidades intermediárias, que variam entre vazio e sólido de acordo com um modelo de material definido. Para isso um algoritmo de iteração de otimização é utilizado para encontrar a ótima distribuição de materiais. O método de otimização empregado nesse trabalho utiliza derivadas (ou gradientes) da função custo em relação à pseudo-densidade (variável de projeto). A distribuição de material associa um valor de densidade a cada elemento (subdomínio), obtido da discretização do domínio inicial. A otimização topológica é comumente combinada conforme descrito por Bendsøe (1988) com o método de elementos finitos (MEF). Neste trabalho, o MEF será aplicado para a solução das equações de equilíbrio.

2.1. Distribuição normal

Método de interpolação de material serve para definir o ótimo lay-out de uma estrutura ocupando um domínio fixo estendido. A otimização topológica de uma estrutura sólida envolve a determinação de elementos tais como o número, o local e o formato de vazios e as suas conectividades no domínio.

2.1.1. Função normal vs. SIMP

A função de interpolação de distribuição de material utilizada é baseado na função normal. Ela é utilizada alternativamente ao SIMP, que quando aplicado para multimateriais se torna difícil de implementar. A dificuldade é devido a necessidade de obter uma função contínua para cada função que modela cada diferente material que não seja um vazio.

O método SIMP é uma formulação comumente utilizada. O modelo SIMP, conforme Ananthasuresh (2001) tem a sua densidade expressa, para duas fases de material, sendo vazio uma fase material, conforme a equação abaixo:

$$E_{ijkl} = \rho^\eta E_{ijkl}^0 \quad (1)$$

no qual E_{ijkl} é o tensor de propriedades do material no domínio, ρ é a pseudo-densidade do material (que varia de zero a um) e E_{ijkl}^0 é o módulo de Young do material, com o parâmetro de penalização η para as densidades intermediárias. Para um material de três fases (void e dois materiais) temos a fórmula:

$$E_{ijkl} = \rho_1^{\eta_1} (\rho_2^{\eta_2} E_{ijkl}^1 + (1 - \rho_2^{\eta_2}) E_{ijkl}^2) \quad (2)$$

onde o material 1 é representado por E_{ijkl}^1 e o material 2 é representado por E_{ijkl}^2 , com parâmetros de penalização dados por η_1 e η_2 . Assim o número de variáveis do projeto dobra para um modelo de 3 fases de material, comparado ao de 2 fases. A medida que aumentam o número de fases, o número de variáveis aumenta muito no método SIMP.

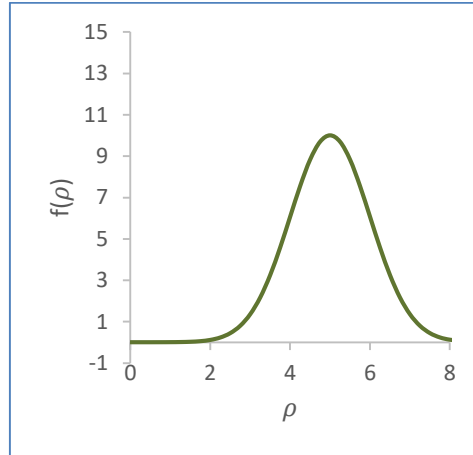
Uma alternativa para não aumentar o número de variáveis com o aumento do número de fases de materiais, é utilizar a distribuição normal para a interpolação de material. Com essa finalidade temos a função baseada na distribuição normal, dada pela função abaixo,

$$f(\rho) = \exp\left[-\frac{(\rho - \mu_m)^2}{2\sigma_m^2}\right] \quad (3)$$

onde ρ continua sendo a variável de projeto, que será distribuída conforme uma função normal, com média μ_m e desvio padrão σ_m .

A equação 3 gera uma curva baseado na distribuição normal representada no formato do Figura 1.

Figura 1 - Curva baseada na função normal, onde ρ é a pseudo-densidade.



A partir da equação 3 é escrita a função de distribuição abaixo, já adequada para a aplicação de diversas fases de materiais:

$$E_{ijkl} = \sum_{m=1}^n E_{ijkl}^m \exp \left[-\frac{(\rho - \mu_m)^2}{2\sigma_m^2} \right] + E_{ijkl}^{vazio} \quad (4)$$

com E_{ijkl} o módulo de Young do elemento, E_{ijkl}^m é o módulo de Young de um material qualquer e E_{ijkl}^{vazio} o módulo de Young do vazio (que teoricamente é zero, mas para fins numéricos agregamos um valor extremamente baixo).

Se o σ_m é pequeno o suficiente, a função da equação 3 aproxima uma função de Dirac centrada em μ_m . A Figura 2 mostra exemplos de distribuições normais para diversos valores de σ . Quando, em algum ponto do espaço, ρ é igual a μ_m , existirá apenas propriedades do material m no i -ésimo elemento finito. O que quer dizer, não haverá a mistura de propriedades de diferentes materiais no mesmo ponto do espaço. Da mesma forma se os desvios padrão σ_m 's são pequenos o suficiente, picos são criados na função para as posições de μ_m . Para a fase que denota vazio E_{ijkl}^{vazio} , é escolhido para ela um valor muito baixo, porém diferente de zero, a fim de evitar problemas numéricos na análise de elementos finitos. Para cada fase de material é escolhido um valor de μ_m . Ou seja, nessa posição está o material m . A variável ρ é utilizada para selecionar entre os diferentes materiais descritos na equação 4.

2.1.2. Método da Distribuição Normal

Para o modelo de distribuição de duas fases, temos então a partir da Equação (4):

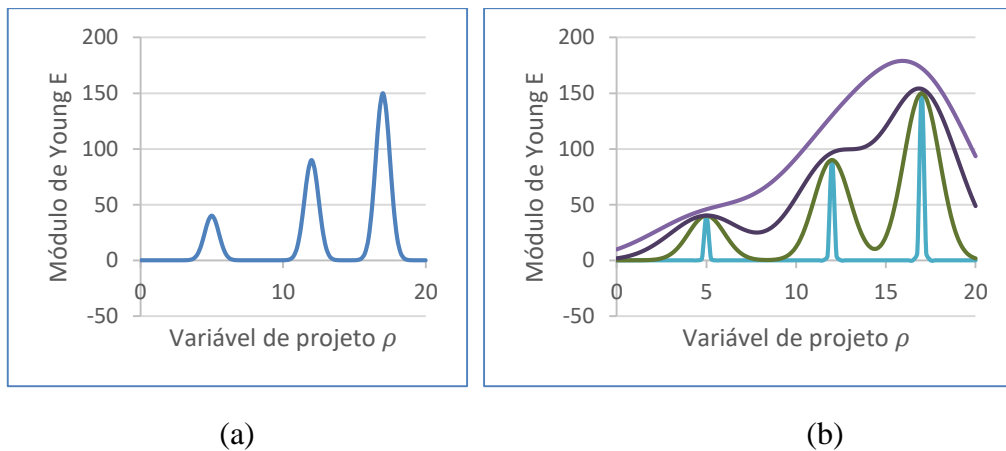
$$E_{ijkl} = E_{ijkl}^1 \exp \left[-\frac{(\rho - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] + E_{ijkl}^{vazio} \quad (5)$$

sendo E_{ijkl}^1 respectivo ao material distribuído pela função normal. Para quatro fases, por exemplo, temos:

$$E_{ijkl} = E_{ijkl}^1 \exp \left[-\frac{(\rho - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] + E_{ijkl}^2 \exp \left[-\frac{(\rho - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right] + E_{ijkl}^3 \exp \left[-\frac{(\rho - \mu_3)^2}{2\sigma_3^2} \right] + E_{ijkl}^{vazio} \quad (6)$$

onde os índices 1, 2 e 3 denotam um único material cada, sendo que é o caso de quatro fases apresentado na Fig. 2 (a) e Fig. 2 (b). Para adicionar 3 fases (Fig. 2 (a)) ou mais na função 4, o procedimento é bastante simples. Nos gráficos (Figura 2) há curvas de distribuição normal, indicando a possibilidade de distribuição de três materiais, totalizando quatro fases (incluindo o void). A Figura 2 (b) representa o mesmo problema, porém com diferentes valores de desvio padrão, partindo de um valor alto (linha roxa) até valores menores.

Figura 2 - (a) curva de distribuição normal para três fases de material mais void: (b) distribuição normal, com diferentes valores de desvio padrão.



Para a Equação 4 são utilizados três materiais isotrópicos e as propriedades que são utilizadas para dimensionar a equação para quatro fases são apresentadas na tabela 1. O termo E_{ijkl}^{vazio} dessa equação terá um valor diferente de zero, mas extremamente baixo, pois se for zero pode ser a fonte de problemas quando os cálculos numéricos são realizados.

Tabela 1 - Dados utilizados na Equação 3 para plotar a curva de distribuição normal da Fig. 2(a) e apresenta três materiais mais void.

Fase	Módulo de Young E	σ escolhido	μ
Fase1	40	0,5	5
Fase2	90	0,5	12
Fase3	150	0,5	17

Os dados da tabela, aplicados na Equação 4, geram a curva plotada na Figura 2(a).

2.1.3. Desvio padrão da função normal

Como há a busca do valor ótimo de ρ , de um elemento, na otimização topológica, o algoritmo pode ter dificuldade de transitar entre uma fase e outra no processo de otimização. Para melhorar a transição entre fases, o valor inicial do desvio padrão é grande para a Equação 4 e gradualmente é reduzido. A redução desse valor pode ser customizado para atender as condições específicas de cada caso. Pode ser reduzido a cada iteração ou a um número especificado de iterações. E a magnitude percentual da redução, do valor do desvio padrão, também é determinada. Na Figura 2(b) há a transição de valores de σ_m apresentado em 4 diferentes curvas. Isso ocorre na otimização com o valor

de σ_m ($m = 1, 2, \dots, k$) que é gradualmente reduzido tendendo a uma função pico, conforme a Equação 7:

$$\sigma_m^{(n+1)2} = \sigma_m^{(n)2} (1 - p) \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, k \quad (7)$$

com n denotando a n -ésima iteração que a função em que a redução do desvio padrão é ativada e p a redução de σ_m^2 , nessa iteração. Esse processo serve para gerar uma transição gradual da fase presente no elemento.

2.2. Otimização: minimizar a flexibilidade

Para obter o formato ótimo na máxima rigidez, é seguido uma formulação para resolver o problema de distribuição de material. É utilizada a aplicação do método de elementos finitos, assumindo que o material é linear elástico, com uma malha do tipo Q4 2D. Para tanto devemos obter a matriz de rigidez dos elementos presentes no domínio analisado, assim, para a rigidez de um elemento:

$$K^e(E_{ijkl}^e) = \int \varepsilon^T C_e(E_{ijkl}^e) \varepsilon dA^e \quad (8)$$

sendo K^e a matriz de rigidez, C_e a matriz de elasticidade e ε é a matriz de deformação. A equação se refere a um único elemento do domínio. Para cada elemento será definido um único E^e referente a um único material. Para o problema de elementos finitos, a seguinte equação de equilíbrio será resolvida:

$$K(E_{ijkl}^e)U = F \quad (9)$$

onde U é o deslocamento global e F é o vetor de carregamento. A função objetivo é minimizar a flexibilidade total da estrutura C :

$$C = U^T K U = F^T U \quad (10)$$

Então, o problema de otimização pode ser escrito como:

$$\min C(E_{ijkl}^e) = F^T U \quad (11)$$

Para garantir preservação de material, uma restrição de massa é colocada no problema:

$$f_v = \frac{\sum_i \rho_i v_i \gamma_i}{V} \quad \text{com } i = 1, \dots, e \quad (12)$$

onde γ é a densidade real do material, v_i volume de um elemento, V é o volume total, e é o número total de elementos. Com restrição ao equilíbrio:

$$K U = F \quad (13)$$

sendo que n_e é o número de materiais candidatos a serem destinados ao elemento.

2.3. Análise de sensibilidade

A derivada da função objetivo, com relação as variáveis de projeto, podem ser escritas como:

$$\frac{\partial C}{\partial \rho^e} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial K}{\partial \rho^e} \mathbf{U} \quad (14)$$

A derivada da função de massa f_v , com relação a pseudo-densidade pode ser definida como:

$$\frac{\partial f_v}{\partial \rho_i} = \frac{v_i \gamma_i}{V} \quad (15)$$

Esses valores são usados no otimizador para escolher o próximo passo de otimização.

2.4. Tabuleiro de xadrez

Padrões em formas de xadrez aparecem frequentemente em soluções obtidas por uma direta implementação do método de distribuição de material em conjunto com o método dos elementos finitos. A densidade do material relacionado aos elementos finitos varia de uma maneira similar a um tabuleiro de xadrez alternando material sólido e buracos (vazio), conforme Figura 3(a), por isso o padrão é chamado desta maneira. O padrão de tabuleiro de xadrez ocorre devido a interpolação do tipo de elemento finito (Q4, 2D) ser linear e a rigidez obtida ser superestimada.

Isso é bem entendido para o projeto baseado em otimização topológica. Mais especificamente devido ao mau modelamento numérico que superestima a rigidez do tabuleiros de xadrez. As restrições do método já são descritas e o efeito tabuleiro de xadrez pode ser tratado conforme Bourdin (2001). O chamado filtro baseado no raio ($R > 0$), conforme proposto no trabalho de Bourdin (2001), é uma função F ,

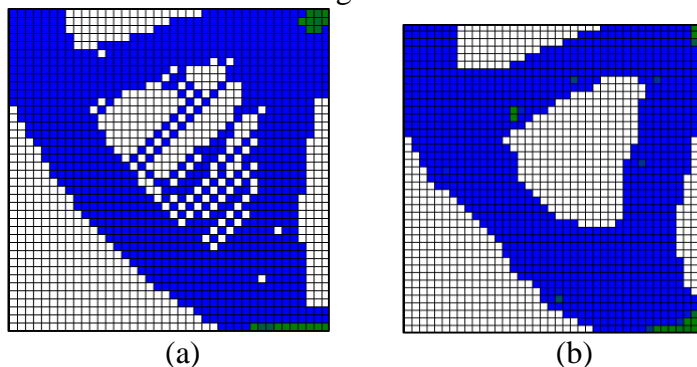
$$\int_{B_R} F dx = 1, \text{ com } F \in \mathbb{R}, \text{ sendo } F \geq 0 \text{ e } F \subset B_R \quad (15)$$

onde \mathbb{R} o domínio viável da otimização e B_R o círculo (para 2D) ou esfera (para 3D) de raio R , centrada em 0, que é o centro do elemento finito. A função filtro é obtida para um plano 2D de \mathbb{R}

$$(F * \rho)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x - y)\rho(y) dy \quad (16)$$

então cada ponto da matriz de densidade é substituída pelo balanceamento da média dos valores das densidades. O balanceamento é feito nos elementos contidos em B_R . Na Figura 3(b) há aplicação do filtro, com raio medindo o dobro do elemento finito, na mesma estrutura da Figura 3(a).

Figura 3 – (a) distribuição é apresenta a formatação chamada de tabuleiro de xadrez; (b) Mesmas condições da Fig. 3(a) porém aplicando um filtro de raio, com dobro do tamanho do elemento finito e assim sem a condição de vazios alternados do material e que então não que confere uma virtual alta rigidez.



3. METODOLOGIA

É utilizada uma função baseada na distribuição normal para interpolar e distribuir o material sobre o domínio viável de estrutura escolhida. Os materiais disponíveis na distribuição podem ser o aço, o alumínio e o silício.

Na distribuição normal há parâmetros e variáveis que devem ser estudados e compreendidos para o desenvolvimento do modelo. O desvio padrão é uma variável que não existe no SIMP, mas possui grande importância no equacionamento para a distribuição de material com a função normal.

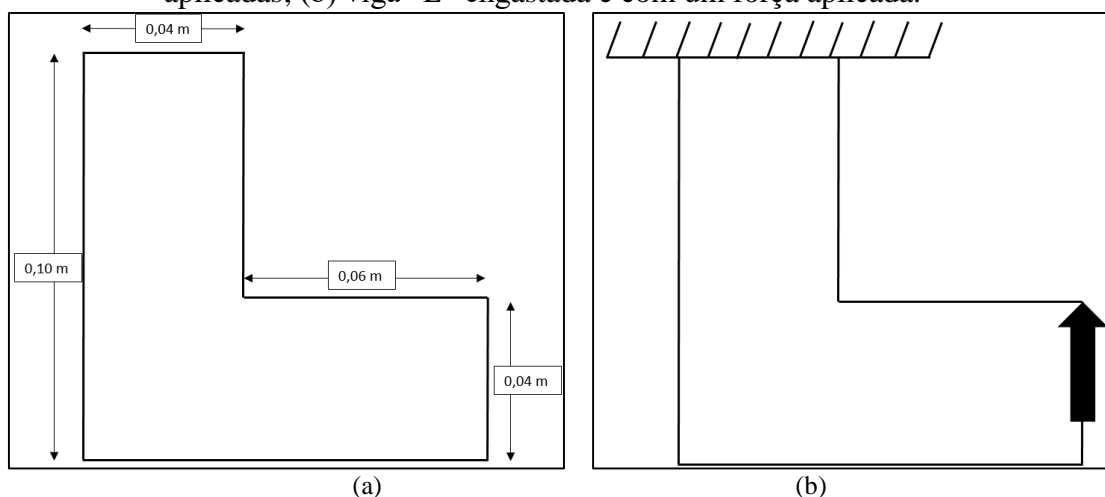
Com o valor estudado de atualização do desvio padrão estabelecido buscamos o valor mínimo ideal do desvio padrão mínimo possível durante as iterações. Assim o valor de atualização do desvio padrão obtido inicialmente é fixado e o valor mínimo de desvio padrão é a variável. O valor mínimo possível é considerado bom, quando de fato, os valores de material distribuído atingem o valor estabelecido inicialmente. Tanto o valor de atualização de desvio padrão a cada iteração, como o desvio padrão mínimo possuem um faixa de aceitabilidade, mas quando adotam alguns valores fora dessa faixa, a otimização falha e retorna um resultado inviável.

Com os dois valores diretamente relacionados ao comportamento de desvio padrão fixados, a partir das análises anteriores e também o raio, eles são aplicados a diferentes combinações de material. Por fim há também a análise da influência do valor do raio do filtro na iteração.

Quando alteramos os materiais utilizados, alteramos a rigidez que cada um carrega consigo para a estrutura. A combinação da rigidez dos materiais presentes na estrutura, bem como a configuração com que é distribuído pelo otimizador, resultará na flexibilidade final da estrutura. Assim é comparado o comportamento de minimização da rigidez e a capacidade do código fazer isso.

O domínio viável do código utilizada para as análises descritas até o momento é uma estrutura em formato de “L” conforme a Figura 4. As dimensões da são mostrados na Figura 4(a) a seção engastada possui para fins de comparação de flexibilidade e aplicabilidade do código, ele é testado em uma barra engastada em um dos lados e com uma força perpendicular no outro.

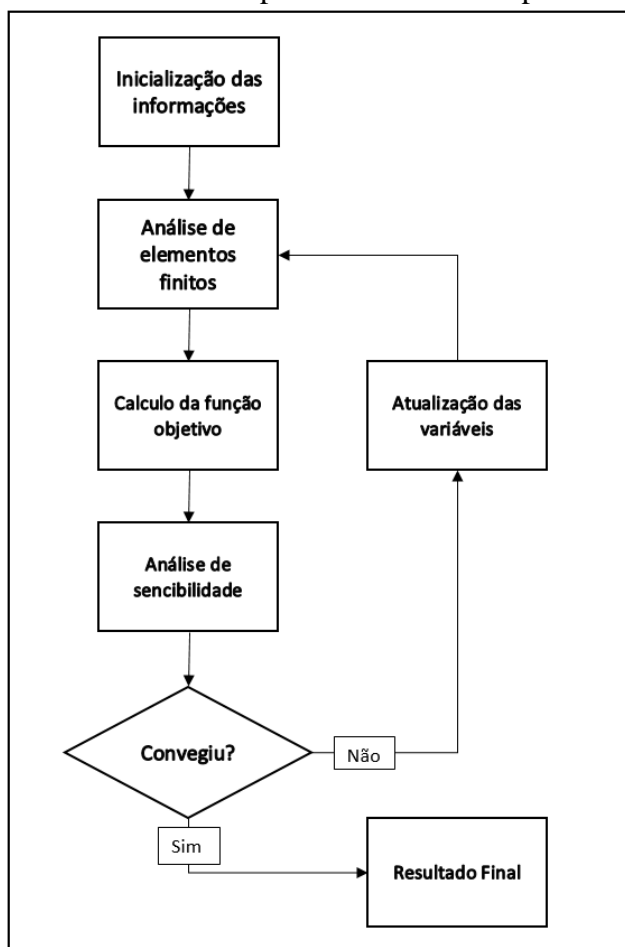
Figura 4 - (a) viga “L”, com as dimensões utilizadas, mas sem condições de contorno ou forças de aplicadas; (b) viga “L” engastada e com um força aplicada.



O processo de otimização topológica usado neste trabalho é representado no fluxograma da Figura 5. As informações são inicializadas, analisadas em elementos finitos, que então calcula a função objetivo aplicando o filtro de raio. Se o resultado convergiu para os parâmetros estabelecidos a análise é encerrada, caso contrário, a análise de sensibilidade é feita e a atualização de variáveis irá reduzir

se possível o valor do desvio padrão. Então é realizada a iteração a partir da análise de elementos finitos até atingir o parâmetro de parar a otimização.

Figura 5 – Fluxo do processo iterativo computacional utilizado para a otimização topológica.



Os resultados focam principalmente nas alterações que ocorrem em uma estrutura em formato de “L”, apresentado na Fig. 4 e apresentados no Capítulo 4.1. No Capítulo 4.2, há exemplos de uma viga engastada. As variáveis de cada análise são descritas nas Tab. (2) a Tab. (6), e as imagens dessas análises se encontram nos resultados ou nos anexos.

4. RESULTADOS

O valor do desvio padrão começa grande nos casos abaixo e é progressivamente reduzido. O valor inicial dele é 0,5 e atualizado a cada iteração. O valor mínimo que ele pode atingir é determinado antes de rodar o código. Assim a cada iteração, uma fração dos 0,5 é reduzida até atingir o valor mínimo.

Em todos os casos apresentados o percentual de material que é destinado a ser distribuído no código é de 40%. Assim, pode variar o percentual de um material entre as análises, mas a soma das frações de todos os materiais, na função objetivo do otimizador, é o mesmo.

Nos casos aplicados para as variações do caso, o raio é avaliado conforme a malha utilizada. Os elementos finitos são quadrados e tem dimensões de 0,001 de lado. Conforme aumenta o valor do raio mais elementos são abrangidos na média aplicada pelo filtro.

As propriedades dos materiais utilizados, são os apresentados na Tabela 2. Nela observamos que o aço é aproximadamente três vezes mais rígido que o alumínio e o silício é 2.22 vezes mais rígido que o alumínio.

Tabela 2- materiais e suas propriedades para os casos dos resultados das otimizações topológicas apresentadas abaixo. Os materiais são isotrópicos.

Material	Alumínio	Silício	Aço
Módulo de Young (E)	$71 * 10^9 Pa$	$158 * 10^9 Pa$	$210 * 10^9 Pa$
Poisson	0,334	0,300	0,300

4.1. Resultados para a viga L

4.1.1. Percentual que o Desvio Padrão decai a cada iteração

Os casos analisados em 4.1.1. o parâmetro variável nos casos estudado é a variação do percentual de redução do desvio padrão a cada iteração. Os demais parâmetros são mantidos constantes, sendo eles estimados para estes casos.

Tabela 3: casos estudados para a viga L. variando a Redução do Desvio Padrão a cada iteração.

Caso	Alumínio	Silício	Aço	Raio	$\sigma_{mínimo}$	p	Figura
Caso 1.1	30%	5%	5%	0,002	0,05	1,5%	Fig. 6
Caso 1.2	30%	5%	5%	0,002	0,05	2,0%	Apêndice 1
Caso 1.3	30%	5%	5%	0,002	0,05	2,5%	Fig. 7
Caso 1.4	30%	5%	5%	0,002	0,05	3,0%	Apêndice 2
Caso 1.5	30%	5%	5%	0,002	0,05	5,0%	Fig. 8

Figura 6- (a) Caso 1.1 da Tabela 3 de uma viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (b) primeiro retângulo é gráfico de flexibilidade e demais retângulos deposição do material ao longo da otimização, sendo a deposição de cada material em azul e o objetivo nas linhas vermelhas.

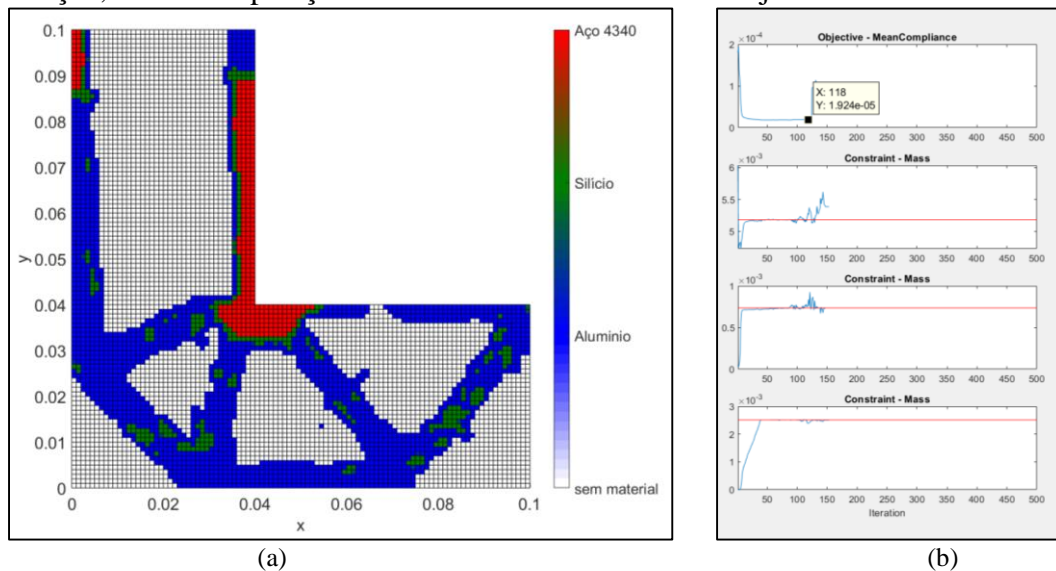


Figura 7- (a) Caso 1.3 da Tabela 3 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (b) primeiro retângulo é gráfico de flexibilidade e demais retângulos deposição do material ao longo da otimização, sendo a deposição de cada material em azul e o objetivo nas linhas vermelhas.

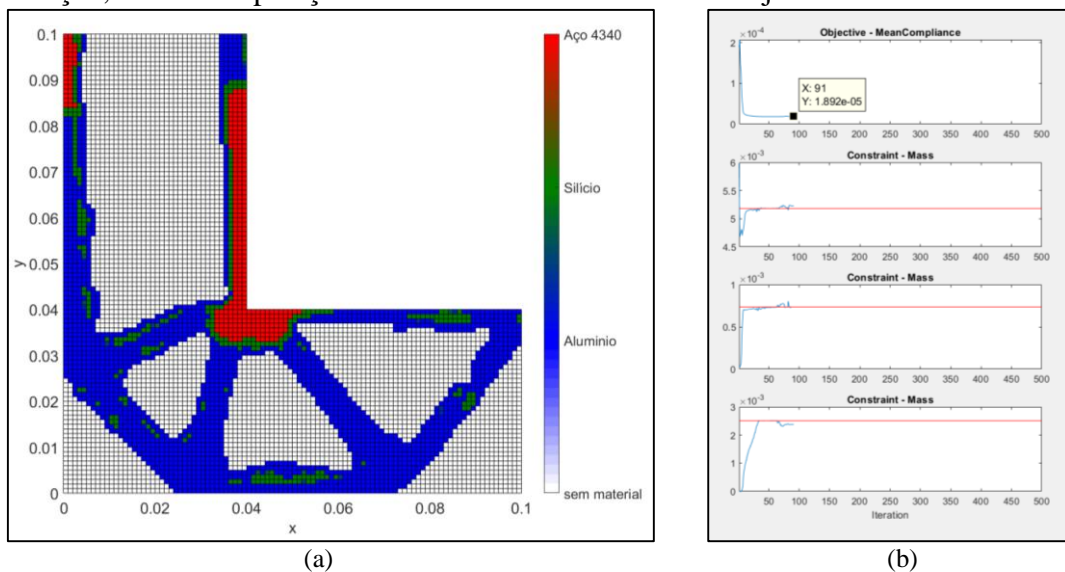
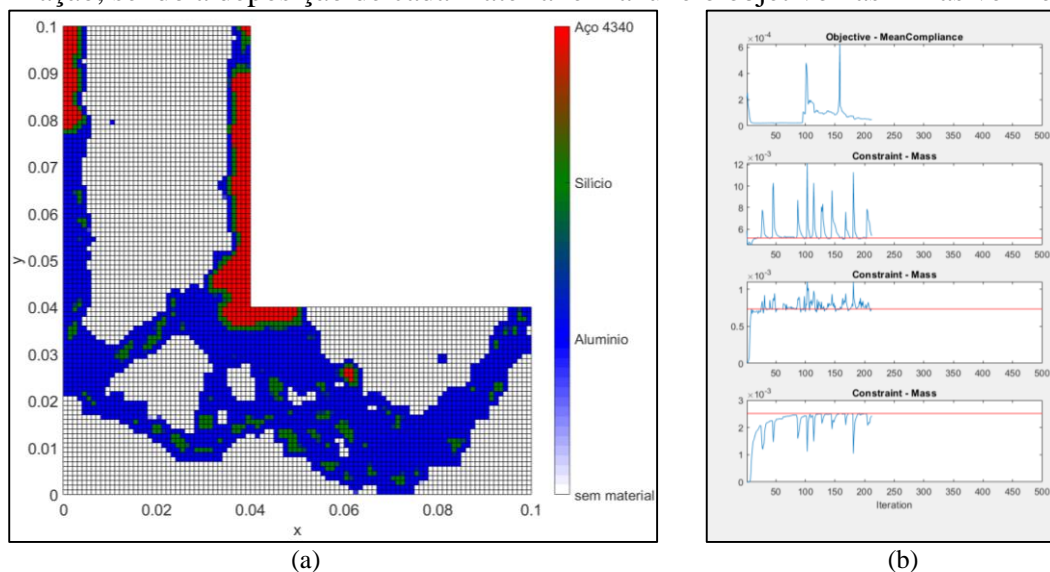


Figura 8 - (a) Caso 1.5 da Tabela 3 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (b) primeiro retângulo é gráfico de flexibilidade e demais retângulos deposição do material ao longo da otimização, sendo a deposição de cada material em azul e o objetivo nas linhas vermelhas.



A Figura 6(a) apresenta uma estrutura que não foi capaz de gerar uma estrutura viável para o caso solicitado com 1,5% de redução do desvio padrão a cada iteração (p). Na aresta perpendicular, na qual a força é aplicada, a deposição de material tem a conectividade interrompida e a rigidez da estrutura reduz drasticamente. Na Figura 6(b) evidencia que a otimização a partir da iteração 118 perdeu todo a rigidez estrutural que possuía.

A Figura 7(a) apresenta uma estrutura viável para o caso solicitado com 2,5% de redução do desvio padrão a cada iteração. Nas regiões em vermelho há a deposição do material mais rígido disponibilizado ao otimizador. Na Figura 6(b) evidencia que a otimização a partir da iteração 91 convergiu e a flexibilidade nesse ponto foi de $C = 1.892 * 10^{-5} [mm/N]$.

A Figura 8(a) apresenta um caso, no qual o otimizador entrou em mínimo local e a partir disso não foi capaz de reestabelecer a uma estrutura regular. Os parâmetros apresentam um comportamento

bastante instável da distribuição de materiais. Logo o caso em que aplicamos $p = 5\%$, não gerou uma estrutura viável. Os casos 1.2 e 1.4 foram capazes de gerar estruturas que convergiram a uma solução de baixa rigidez. O caso 1.2 apresentou $C = 1,927 * 10^{-5} [mm/N]$ e o caso 1.4 apresentou $C = 1,99 * 10^{-5} [mm/N]$. Assim a menor rigidez apresentada nos 5 casos foi para o caso 1.3. O valor de p , do caso de menor flexibilidade, é utilizado para os demais combinações teste. Nenhum dos casos apresentados distribuiu os materiais até atingir a meta da restrição. Isso é observado pois as linhas azuis não estão ao final da iteração sobre a linha vermelha.

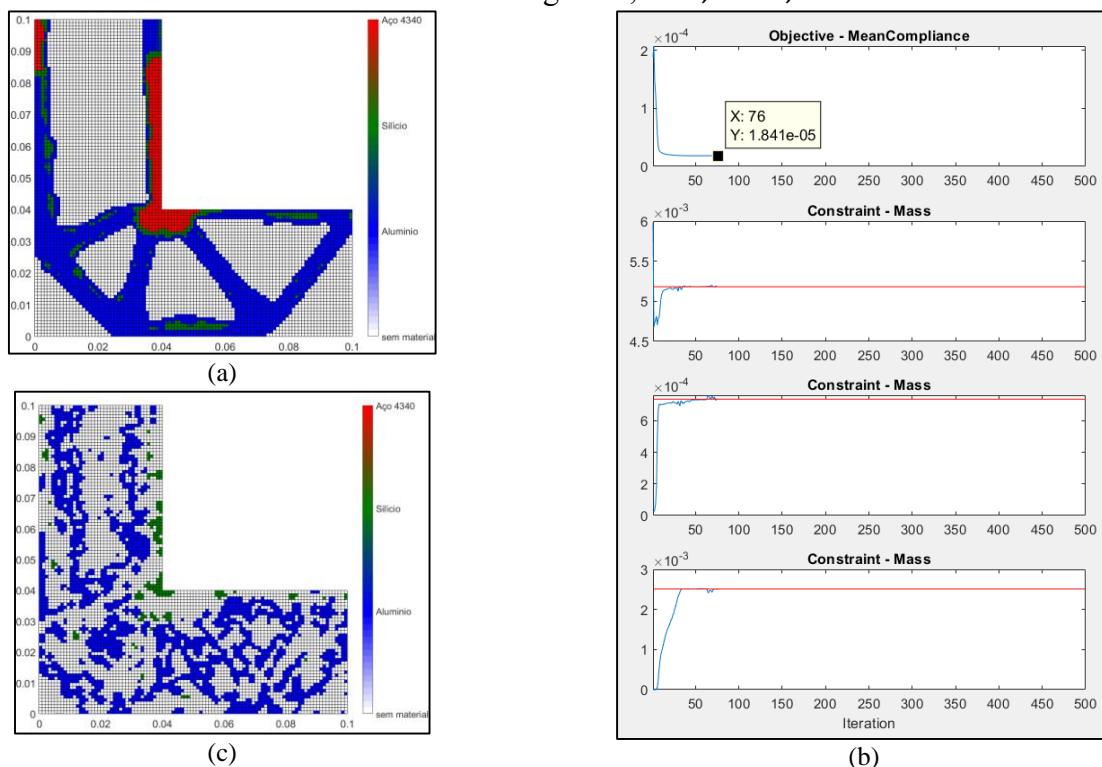
4.1.2. Desvio padrão Mínimo

Variando o desvio padrão, conforme a Tabela 3, até atingir por completo a distribuição do material estipulado na restrição, para obter o menor valor possível de σ_{min} . Utiliza os mesmo valores de massa que os casos iniciais e também o valor de $p = 2,5\%$ (que é o percentual do desvio padrão reduzido por iteração) obtido anteriormente.

Tabela 4- Casos estudados para a viga L, variando apenas o Desvio Padrão mínimo ($\sigma_{mínimo}$) a cada Caso.

Caso	Alumínio	Silício	Aço	Raio	$\sigma_{mínimo}$	p	Figura
Caso 2.1	30%	5%	5%	0,002	0,01	2,5%	Fig. 9(c)
Caso 2.2	30%	5%	5%	0,002	0,03	2,5%	Apêndice 3
Caso 2.3	30%	5%	5%	0,002	0,05	2,5%	Fig. 8
Caso 2.4	30%	5%	5%	0,002	0,07	2,5%	Apêndice 4
Caso 2.5	30%	5%	5%	0,002	0,09	2,5%	Apêndice 5
Caso 2.6	30%	5%	5%	0,002	0,10	2,5%	Fig. 9(a) e Fig. 9(b)

Figura 9- (a) Caso 2.6 da Tabela 4 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (b) gráfico de flexibilidade e gráficos de distribuição de massa de cada material na Fig. 9(a); (c) Caso 2.1 da Tabela 4 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m.



Os casos da Tabela 4, com exceção do caso 2.1, convergem para uma estrutura de baixa flexibilidade. A Figura 9(a) e Figura 9(b) são estrutura para o caso 2.6 da Tabela 4. Esta apresentou a menor flexibilidade ($C = 1.841 * 10^{-5} [mm/N]$) em relação às demais e é a que foi capaz de aproximar, sobre a linha vermelha do gráfico, a linha azul de deposição de material. Assim é o menor valor de σ_{min} capaz de distribuir por completo as taxas de material da restrição de massa. A Figura 9(c) é o resultado para o caso 2.1, mostrando que para valores muito baixos de σ_{minimo} , o otimizador não consegue distribuir o material abaixo da curva normal e convergir para uma estrutura de baixa flexibilidade.

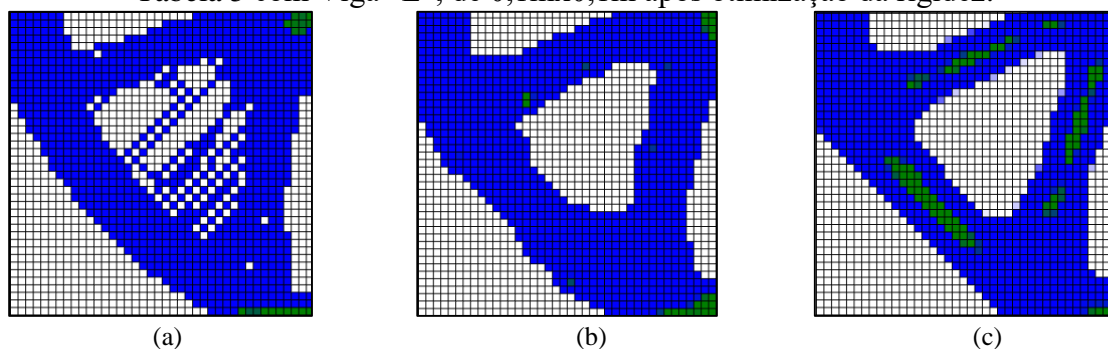
4.1.3. Variar o raio do filtro

Os casos desta seção focam nas alterações que ocorrem em uma estrutura em formato de “L”, variando o raio do filtro. São testadas para duas configurações de combinação de materiais, mas sempre mantendo 40% na somatória do total de materiais possíveis de aplicar na estrutura.

Tabela 5 - Casos estudados para a viga “L” variando apenas o raio do filtro nos casos 3.1, 3.2 e 3.3 e também para os casos 3.4, 3.5 e 3.6, porém com constituição diferente de material.

Anexo	Alumínio	Silício	Aço	Raio	σ_{minimo}	p	Figura
Caso 3.1	35%	0%	5%	0,001	0,10	2,5%	Apêndice 7(a)
Caso 3.2	35%	0%	5%	0,002	0,10	2,5%	Apêndice 7(b)
Caso 3.3	35%	0%	5%	0,004	0,10	2,5%	Apêndice 7(c)
Caso 3.4	40%	0%	0%	0,001	0,10	2,5%	Apêndice 6(a)
Caso 3.5	40%	0%	0%	0,002	0,10	2,5%	Apêndice 6(b)
Caso 3.6	40%	0%	0%	0,004	0,10	2,5%	Apêndice 6(c)

Figura 10 - (a) Caso 3.1 da Tabela 5 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (b) Caso 3.2 da Tabela 5 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (c) Caso 3.3 da Tabela 5 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez.



A Figura 10 apresenta um zoom das imagens dos Apêndices 7, sendo eles os casos 3.1, 3.2 e 3.3 da Tabela 3. Os três casos tem alterados apenas o valor do raio entre si. A primeira imagem (Figura 10(a), que tem o $R = 0,001$, apresenta o padrão de distribuição tabuleiro de xadrez. As demais, tem esse efeito eliminado. O raio também afeta a distribuição de todas as fases de material da estrutura. O raio aplicado na Figura 10(c) mostra o material mais rígido reforçando outras áreas da peça. O raio maior fez com que o aço fosse um material mais abundante para esta área da peça.

Os casos 3.4, 3.5 e 3.6 da Tabela 5, tem apenas um material e os raios do filtro são os mesmos do comparativo anterior. Eles também apresentaram os efeitos do filtro, que eliminou o padrão de tabuleiro de xadrez.

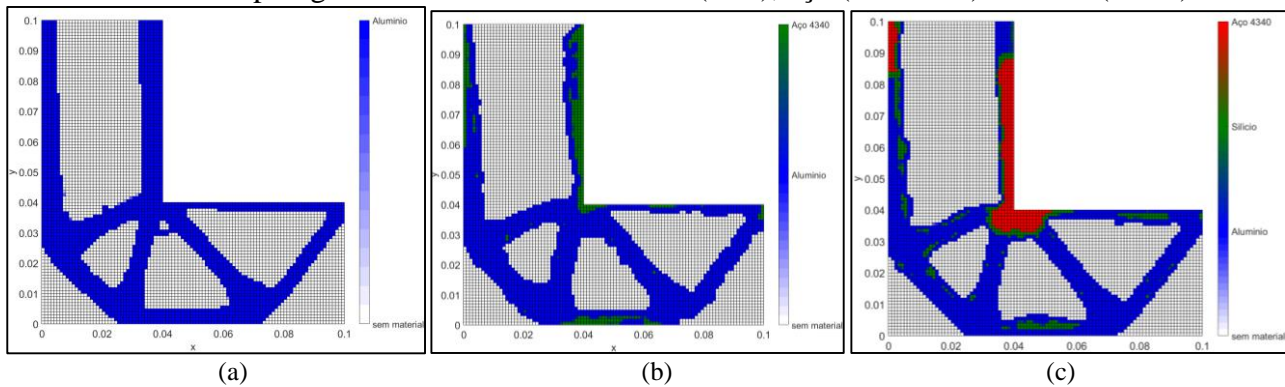
4.1.4. Comportamento da Flexibilidade com materiais diferentes

Para avaliar a flexibilidade são testados três casos, variando a quantidade do materiais da estrutura.

Tabela 6- Casos para a viga “L” variando os materiais utilizados na distribuição de material.

Anexo	Alumínio	Silício	Aço	Raio	$\sigma_{mínimo}$	p	Flexibilidade [C]	Figura
Caso 4.1	40%	0%	0%	0,002	0,10	2,5%	$2.655 \cdot 10^{-5} [mm/N]$	Fig. 9(a)
Caso 4.2	35%	0%	5%	0,002	0,10	2,5%	$2.206 \cdot 10^{-5} [mm/N]$	Fig. 9(b)
Caso 4.3	30%	5%	5%	0,002	0,10	2,5%	$1.841 \cdot 10^{-5} [mm/N]$	Fig. 9(c)

Figura 11- (a) viga “L” otimizada topologicamente contendo apenas alumínio (cor azul); (b) viga “L” otimizada topologicamente contendo apenas alumínio (azul) e aço (verde) (c) viga “L” otimizada topologicamente contendo alumínio (azul), aço (vermelho) e silício (verde).



A estrutura da Figura 11(a) possui apenas alumínio na sua composição, a Figura 11(b) possuiu alumínio e aço. E a Figura 11(c) possuiu alumínio, silício e aço. O material majoritário na três estruturas é o alumínio. Dois materiais mais rígidos são introduzidos para que o otimizador aumentasse a rigidez global. Assim nas regiões mais solicitadas, são aplicados os materiais de rigidez superior.

Na Tabela 6 há o resultado da flexibilidade das estruturas após a otimização. Combinando materiais mais rígidos ao alumínio, o otimizador com a função de distribuição normal foi capaz de minimizar a flexibilidade da Figura 4(a). A redução de flexibilidade da estrutura alterando 5% de alumínio para 5 % de aço, foi de 17%, conforme figura 11(b). Reduzindo mais 5% de alumínio e acrescentando 5% de silício ao caso 4.2, a redução na flexibilidade para a estrutura com apenas alumínio, foi de 31%, caso da Figura 11(c).

4.2. Caso alternativo aplicando o método

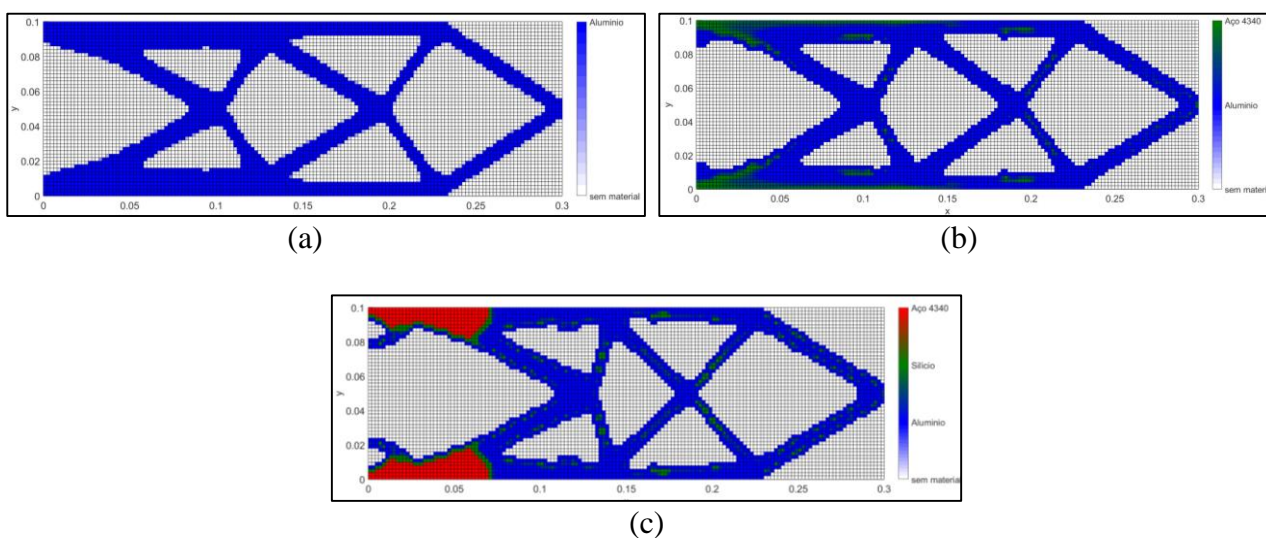
Uma viga engastada analisada com três combinações de materiais, mas mantendo a taxa de preenchimento no domínio de 40%. São utilizados os valores relacionados ao valor mínimo e taxa de atualização por iteração do desvio padrão obtidos no capítulo 4.1.

Tabela 7 - Casos estudados para a viga em balanço variando os materiais utilizados na distribuição de material.

Anexo	Alumínio	Silício	Aço	Raio	p	$\sigma_{mínimo}$	Figura
Caso 5.1	30%	5%	5%	0,002	3%	0,2	Figura 12 (a)
Caso 5.2	30%	5%	5%	0,002	3%	0,2	Figura 12 (b)
Caso 5.3	30%	5%	5%	0,002	3%	0,2	Figura 12 (c)

O método foi capaz de gerar estruturas com baixa rigidez, para uma viga engastada, submetida a uma força aplicada na aresta menor. As estruturas geradas, contaram com as propriedades dos materiais da Tabela 7. Foi capaz de gerar a estrutura mesmo com a aplicação de dois e três materiais nos casos demonstrados em Figura 12 (a) e 12 (b). Os pontos mais próximos ao lado esquerdo, que é onde há o engaste, a tensão devido ao momento é maior. Nestes locais há a utilização do aço nos casos de multimateriais.

Figura 12 - (a) Caso 5.1 da Tabela 7, estrutura com apenas um material; (b) Caso 5.2 da Tabela 7, estrutura com dois materiais. Alumínio em azul e aço em verde; (c) Caso 5.3 da Tabela 7, estrutura com três materiais. Alumínio em azul, aço em vermelho e silício em verde.



5. CONCLUSÃO

Um otimizador não deve ser restrito a um único caso. Deve ser capaz de resolver diferentes problemas, com diferentes variáveis de forma e restrições. O método aplicado é capaz de otimizar diferentes estruturas. Tanto para a viga em formato de L, quanto a viga engastada quando aplicadas na otimização, ocorreu resultados de estruturas de baixa flexibilidade. Além disso, ao aplicar multimateriais nestas estruturas também tivemos boas soluções e com ganho de qualidade.

Encontrar um valor adequado para a redução percentual e valor mínimo de desvio padrão são necessários para que os resultados sejam de qualidade. O SIMP aumenta o número de variáveis com o aumento de fases de material e a conectividade das curvas de distribuição é difícil de encontrar. Já quando é utilizado a função de distribuição baseado na distribuição normal, não tem este aumento de variáveis que exigem estudar a conectividade das curvas de diferentes materiais. Porém é necessário estudar qualitativamente o comportamento do desvio padrão.

As características abordadas, referentes ao comportamento da função de distribuição normal, são respectivas ao desvio padrão e o módulo de Young dos materiais. Quando analisado a característica de reduzir percentualmente uma parte do valor do desvio padrão a cada iteração (p), há uma faixa de valores que possibilitaram resolver o problema. O valor de 2,5% é o mais adequado dentro os testados, para a estrutura analisada em questão, ao aplicar 3 diferentes materiais. Quando o valor de p é pequeno demais, ou grande demais o otimizador não conseguiu convergir para uma estrutura viável. Para casos diferentes, essa faixa também deve ser considerada. Um problema que ocorreu com o valor de 5%, foi entrar em um mínimo local e a estrutura não convergir após 500 iterações. Ou seja, a função de otimização não conseguiu distribuir o material. Tal situação é influenciada pela diminuição da área abaixo da curva normal de distribuição de material, com a redução mais do desvio padrão.

O módulo de Young de cada material é fixo, inclusive para o vazio. Porém, com multimateriais é possibilitado distribuir mais de um material na mesma estrutura. Aplicando materiais distintos, podemos encontrar um que atenda uma condição específica de estrutura e que melhore a qualidade da mesma. Um material mais rígido, é aplicado nas estruturas nas posições de maior flexibilidade. Assim as estruturas tiveram ganho de rigidez. Ao substituir 5% da massa de alumínio por 5% de aço. Houve 17% na redução de flexibilidade. Substituindo mais 5% de alumínio, por silício e a redução de flexibilidade foi de 31%. Quando um material com uma determinada característica é muito custoso e essa característica é necessária em uma estrutura, aplicar de forma pontual em regiões específicas, pode gerar bons ganhos de qualidade para a estrutura final. Assim, o custo de uma estrutura, com as características desejadas, pode ser mais barata, o que a torna comercialmente mais interessante e justifica o uso de multimateriais.

O filtro de raio baseado na média da densidade de elementos, é capaz de eliminar o padrão de tabuleiro de xadrez. Essa técnica melhora a qualidade da estrutura em termos do padrão de tabuleiro de xadrez, mas também afeta a combinação de multimateriais. Conforme resultados com alternância do raio, algumas regiões que inicialmente possuem apenas um material distribuído, incluiu um material mais rígido.

A função normal para a distribuição é viável para o estudo e aplicação da otimização topológica e é uma alternativa válida. Quando aplicado um material apenas não tem ganhos em relação ao SIMP. Porém, para multimateriais, o seu uso pode ser justificado pela redução da variáveis da função de distribuição de material.

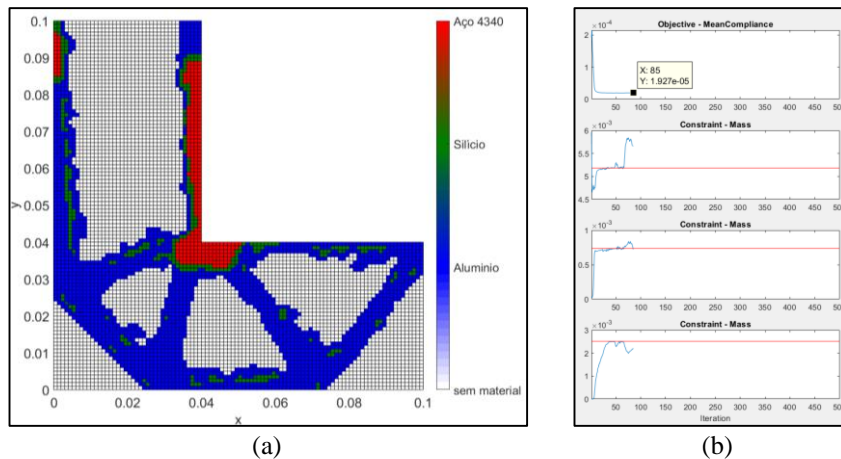
Uma evolução natural do trabalho apresentado é a inclusão de uma restrição de tensão no problema, bem como a conectividade de diferentes materiais. Além disso, o estudo das estruturas em 3D também é uma sugestão para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

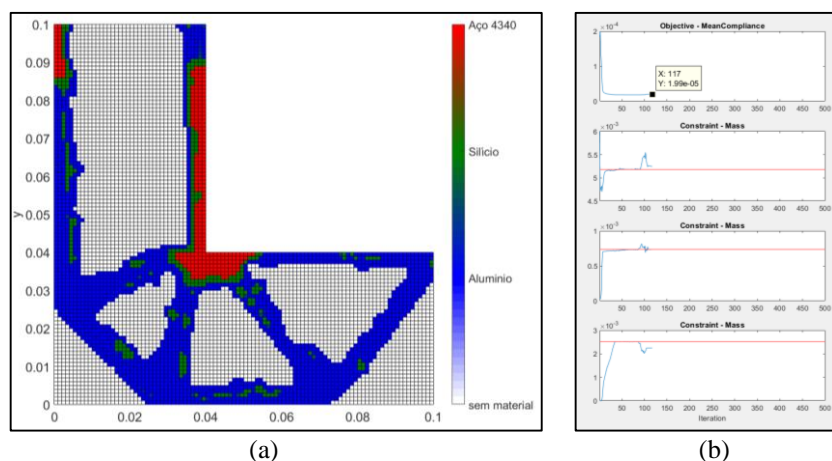
- BOURDIN, B. Filters in topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 50, n. 9, p. 2143–2158, 2001. Disponível em: <<https://www.math.lsu.edu/~bourdin/downloads/Bourdin-2001a.pdf>>
- BENDSØE, M. P., “Optimization of Structural Topology, Shape and Material”, **Springer Berlin Heidelberg**, (1995)
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], pp. 197 – 224, 1988.
- COUTINHO, K. D. Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais. [s. l.], p. 109, 2006.
- KIYONO, C. Y.; SILVA, E. C. N.; REDDY, J. N. A novel fiber optimization method based on normal distribution function with continuously varying fiber path. **Composite Structures**, [s. l.], v. 160, p. 503–515, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.064>>
- SILVA, E. C. N. Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas. **Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos**, [s. l.], v. 5565, n. 11, p. 23, 2005. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf>>
- SIMONETTI, H. L. “Otimização topológica de estruturas bidimensionais”.153 f. **Dissertação (Mestrado em Ciências da Engenharia Civil) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto**, 2009. Disponível em: <<http://livros01.livrosgratis.com.br/cp101453.pdf>>
- YIN, L.; ANANTHASURESH, G. K. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 23, n. 1, p. 49–62, 2001.
- ZUO, W.; SAITOU, K. Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 55, n. 2, p. 477–491, 2017.

APÊNDICE

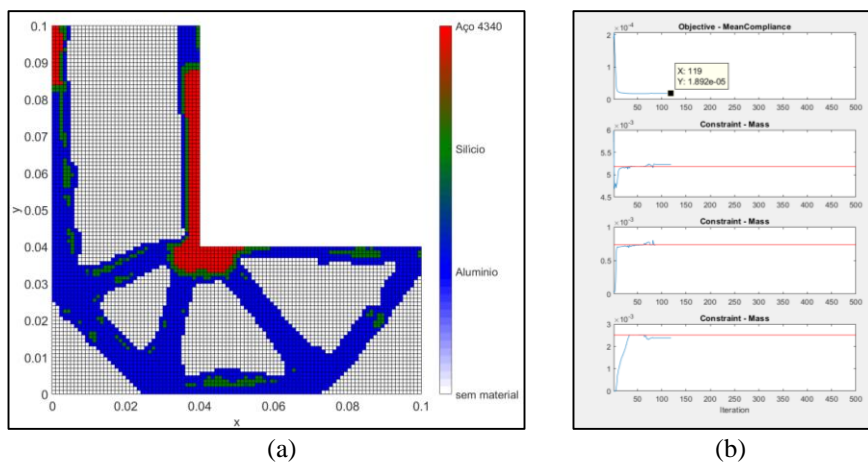
Apêndice 1 - (a) Caso 1.2 para a otimização com três materiais; (b) gráfico de flexibilidade e gráficos de distribuição de massa.



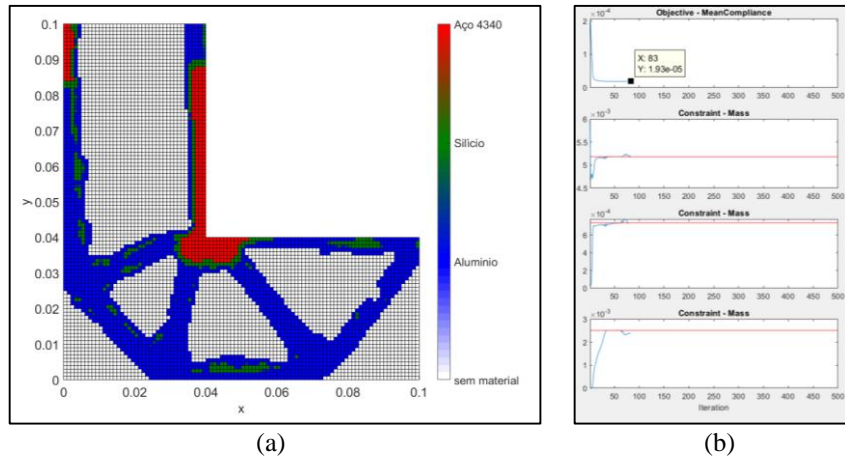
Apêndice 2 - (a) Caso 1.4 para a otimização com três materiais; (b) gráfico de flexibilidade e gráficos de distribuição de massa.



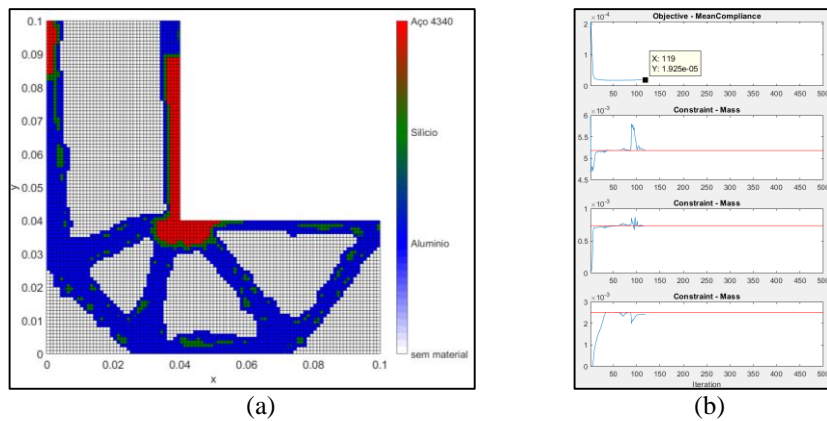
Apêndice 3 - (a) Caso 2.2 para a otimização com três materiais; (b) gráfico de flexibilidade e gráficos de distribuição de massa.



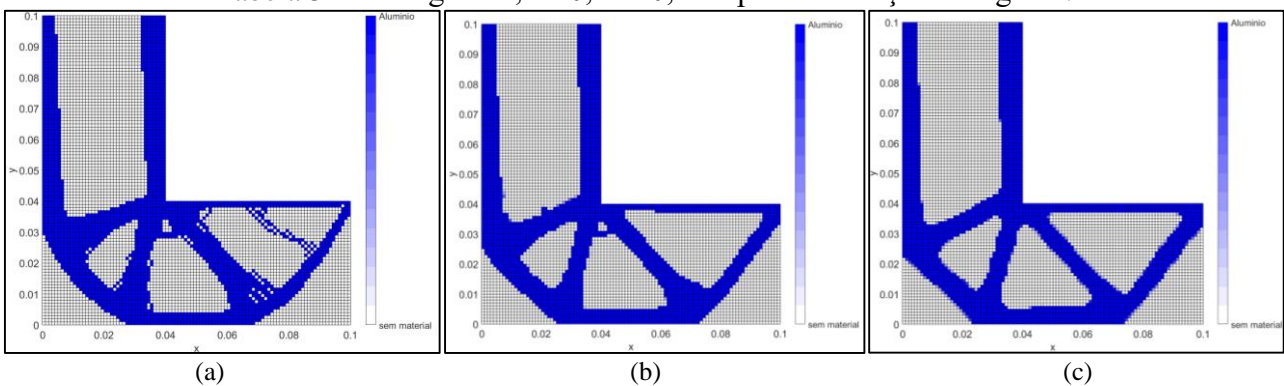
Apêndice 4 - (a) Caso 2.4 para a otimização com três materiais; (b) gráfico de flexibilidade e gráficos de distribuição de massa.



Apêndice 5 - (a) Caso 2.5 para a otimização com três materiais; (b) gráfico de flexibilidade e gráficos de distribuição de massa.



Apêndice 6 - (a) Caso 3.4 da Tabela 3 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (b) Caso 3.5 da Tabela 3 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (c) Caso 3.6 da Tabela 3 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez.



Apêndice 7 - (a) Caso 3.1 da Tabela 5 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (b) Caso 3.2 da Tabela 3 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez; (c) Caso 3.3 da Tabela 5 com Viga “L”, de 0,1mx0,1m após otimização da rigidez.

