

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

ELTON GONÇALVES TEIXEIRA

**Estimação em Processos Estocásticos  
Advindos da Solução da Equação de  
Langevin**

Trabalho de Conclusão apresentado como  
requisito parcial para a obtenção do grau de  
Bacharel em Estatística

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Gabriela B. Cybis  
Orientador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sílvia Regina Costa Lopes  
Co-orientador

Porto Alegre, dezembro de 2014

## CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Teixeira, Elton Gonçalves

Estimação em Processos Estocásticos Advindos da Solução da Equação de Langevin / Elton Gonçalves Teixeira. – Porto Alegre: Curso de Bacharelado em Estatística da UFRGS, 2014.

49 f.: il.

Orientador: Gabriela B. Cybis

Co-orientadora: Sílvia Regina Costa Lopes.

Trabalho de Conclusão de curso (Graduação)– Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Curso de Bacharelado em Estatística, Porto Alegre, BR-RS, 2014.

1. Equação de Langevin. 2. Movimento Browniano. 3. Processo dos Cossenos. 4. Método de Estimação por Mínimos Quadrados. I. B. Cybis, Gabriela, orient. II. Lopes, Sílvia Regina Costa, coorient. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. Carlos Alexandre Netto

Vice-Reitor: Prof. Rui Vicente Oppermann

Pró-Reitor de Graduação: Prof. Sérgio Roberto Kieling Franco

Diretor do Instituto de Matemática: Prof<sup>a</sup>. Suzi Alves Camey

Coordenador do Curso: Prof. Álvaro Vigo

Bibliotecário-Chefe do Instituto de Matemática: Juliano Leal Camargo

*“O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.”*

— ALBERT EINSTEIN

## Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado saúde para que eu pudesse seguir em frente e por ter me iluminado ao melhor caminho.

Agradeço e dedico este trabalho à minha família que sempre me apoiou em todas as minhas decisões bem como me forneceu subsídio para que eu pudesse sempre ir adiante. Há minha mãe Beatriz Gonçalves que apesar das dificuldades conseguiu criar três filhos mostrando a importância da determinação e do respeito para com o próximo. Ao meu pai Gelson Teixeira, que sempre esteve presente nos aconselhando em quais os melhores caminhos a seguir.

Agradeço aos meus irmãos Débora e Guilherme por sempre estarem juntos nos almoços de domingo, nos proporcionando alegrias e o convívio em família. A minha avó Dinete por sempre estar por perto. Aos meus tios e primos pelo companheirismo.

A minha namorada Eduarda, por sempre fazer parte desta trajetória desde o início ao fim, pelo carinho e paciência nos momentos mais difíceis.

Aos professores e funcionários da UFRGS que desempenharam com dedicação suas tarefas. Em especial a Sílvia Lopes que desde o início da graduação me aconselhou e me mostrou a importância das boas notas e a dedicação que teve por mim. A Lisiane Selau por ser uma ótima professora e pela sua amizade. Ao Cléber Bisognin pela a amizade e por sempre estar disposto a ajudar e a Gabriela Cybis pelo aceite em ser minha orientadora.

## Lista de Abreviaturas e Siglas

OU	Ornstein-Uhlenbeck
i.i.d.	Independentes e identicamente distribuídas
cos	Cosseno
sen	Seno
arccos	Arco cosseno
<i>dp</i>	Desvio Padrão
<i>eqm</i>	Erro quadrático médio
<i>var</i>	Variância
<i>re</i>	Número de replicações
ACF	Função de autocorrelação amostral
AR(1)	Auto-Regressivo de Ordem 1

## Lista de Figuras

2.0.1	Gráficos da Densidade da Distribuição Normal Padrão, Cauchy e Lévy. . . . .	17
6.0.1	Geração do Processo (4.1.9) para $a = 0.1$ , $n = 1000$ e $h = 0.8$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.	33
6.0.2	Geração do Processo (4.1.9) para $a = 0.1$ , $n = 1000$ e $h = 1$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.	33
6.0.3	Geração do Processo (4.1.9) para $a = 0.1$ , $n = 1000$ e $h = 3$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.	33
7.1.1	Série Temporal da Mortalidade Cardiovascular em Los Angeles: (a) Série Original; (b) Função de Autocorrelação Amostral. . . . .	37
7.1.2	Geração do Processo (4.1.9) para $a = \frac{2\pi}{52}$ , $n = 508$ , $m = 1000$ e $h = 0.9$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral. . . . .	37
7.1.3	Geração do Processo (4.1.9) para $a = \frac{2\pi}{52}$ , $n = 508$ , $m = 1000$ e $h = 0.95$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral. . . . .	37
7.1.4	Geração do Processo (4.1.9) para $a = \frac{2\pi}{52}$ , $n = 508$ , $m = 1000$ e $h = 0.8$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral. . . . .	38
7.1.5	Geração do Processo (4.1.9) para $a = \frac{2\pi}{52}$ , $n = 508$ , $m = 1000$ e $h = 0.85$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral. . . . .	38
7.2.6	Série da Mortalidade Cardiovascular em Los Angeles e sua Previsão para 6 passos à frente: (a) Simulação quando $\hat{a} = 0.2094$ ; (b) Simulação quando $\hat{a} = 0.1670$ ; (c) Simulação quando $\hat{a} = 0.2987$ . . . . .	40
A.0.1	Geração do Processo (4.1.9) para $a = 0.4$ , $n = 1000$ e $h = 0.8$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.	44
A.0.2	Geração do Processo (4.1.9) para $a = 0.9$ , $n = 1000$ e $h = 0.8$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.	44

- A.0.3 Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.4$ ,  $n = 1000$  e  $h = 1$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral. 45
- A.0.4 Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.9$ ,  $n = 1000$  e  $h = 1$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral. 45
- A.0.5 Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.4$ ,  $n = 1000$  e  $h = 3$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral. 45
- A.0.6 Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.9$ ,  $n = 1000$  e  $h = 3$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral. 46

## Lista de Tabelas

2.0.1	Comparação das probabilidades de cauda para as distribuição Normal padrão, Cauchy e Lévy. . . . .	17
6.0.1	Resultado das estimativas do parâmetro $a$ , quando $n = 1000$ , $re = 100$ , para diferentes valores de $h$ . . . . .	34
6.0.2	Resultado das Estimativas do Parâmetro $a$ Utilizando as Funções Periodograma e Periodograma Suavizado, quando $n = 1000$ , $re = 100$ , para diferentes tamanhos de $h$ . . . . .	34
7.1.1	Resultado das Estimativas do Parâmetro $a$ , quando $a = 0.1208$ e $n = 508$ , para diferentes valores de $re$ e de $h$ . . . . .	38
7.1.2	Resultado das Estimativas do Parâmetro $a$ Utilizando as Funções Periodograma e Periodograma Suavizado quando $n = 508$ , e $h \in \{0.80, 0.85, 0.90, 0.95\}$ . . . . .	39
7.2.3	Resultado das Estimativas de Previsão e do Erro de Previsão Referente aos valores (a) $\hat{a} = 0.2094$ ; (b) $\hat{a} = 0.1670$ ; (c) $\hat{a} = 0.2987$ . . . . .	41
7.2.4	Resultado das Estimativas do Parâmetro $a$ , quando $n = 508$ , $re = 500$ e $\hat{a} \in \{0.2094, 0.1670, 0.2987\}$ . . . . .	41
B.0.1	Resultado das Estimativas do Parâmetro $a$ , quando $n = 1000$ , $re = 500$ , para diferentes valores de $h$ . . . . .	47
B.0.2	Resultado das Estimativas do Parâmetro $a$ , quando $n = 2000$ , $re = 100$ , para diferentes valores de $h$ . . . . .	48
B.0.3	Resultado das Estimativas do Parâmetro $a$ , quando $n = 2000$ , $re = 500$ , para diferentes valores de $h$ . . . . .	48
B.0.4	Resultado das Estimativas do Parâmetro $a$ Utilizando as Funções Periodograma e Periodograma Suavizado, quando $n = 2000$ , para diferentes valores de $h$ . . . . .	49



## Sumário

<b>Resumo</b> . . . . .	11
<b>Abstract</b> . . . . .	12
<b>1 Introdução</b> . . . . .	13
<b>2 Distribuições Estáveis</b> . . . . .	14
<b>2.1 MOVIMENTO BROWNIANO</b> . . . . .	18
<b>2.2 PROCESSOS DE LÉVY</b> . . . . .	19
<b>3 Equação de Langevin</b> . . . . .	22
<b>3.1 EQUAÇÃO DE LANGEVIN GENERALIZADA</b> . . . . .	22
<b>3.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN GENERALIZADA</b> . . . . .	23
<b>4 Processo Estocástico Geral</b> . . . . .	25
<b>4.1 PROCESSO DOS COSSENOS</b> . . . . .	26
<b>5 Método de Estimação</b> . . . . .	28
<b>5.1 ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS</b> . . . . .	28
<b>5.2 ESTIMADOR PELA TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMÉTRICA</b> . . . . .	29
<b>5.3 FUNÇÕES PERIODOGRAMA E PERIODOGRAMA SUAVIZADO</b> . . . . .	30
<b>6 Simulações</b> . . . . .	32
<b>7 Aplicação</b> . . . . .	36
<b>7.1 ESTIMAÇÃO DA FREQUÊNCIA</b> . . . . .	36

<b>7.2</b>	<b>PREVISÃO</b>	<b>39</b>
	<b>Conclusões</b>	<b>42</b>
	<b>Referências</b>	<b>43</b>
	<b>Apêndice A Figuras</b>	<b>44</b>
	<b>Apêndice B Tabelas</b>	<b>47</b>

## Resumo

Este trabalho apresenta uma breve discussão sobre as distribuições estáveis, bem como sobre a equação de Langevin e suas derivações. Apresentamos o processo estocástico geral obtido da solução da equação de Langevin. O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo da estimação dos parâmetros em um tipo de processo advindo da solução da equação de Langevin, cujo ruído é o movimento Browniano. Estudamos a estimação do parâmetro da frequência, denotado por  $a$ , vinculado ao processo dos cossenos. A metodologia deste trabalho foi aplicado a um conjunto de dados reais, que descreve a mortalidade por doença cardiovascular na cidade de Los Angeles, Califórnia, no período de 1970 à 1979. Também estudamos a previsão 6 passos à frente para esta série temporal considerando quatro diferentes medidas de erro de previsão.

**Palavras-chave:** Equação de Langevin, Movimento Browniano, Processo dos Cossenos, Método de Estimação por Mínimos Quadrados.

## Abstract

In this work we briefly present the stable distributions, the Langevin equation and its generalization. The general stochastic process derived from the solution of the generalized Langevin equation (GLE) is discussed. The main goal is to analyze and to estimate the parameter of interest for a particular case of these processes derived from the solution of GLE driven by the Brownian motion. We study the estimation of the parameter that describe the frequency in cosine processes. The methodology is applied to the time series of cardiovascular mortality in Los Angeles during the period of 1970 to 1979. We also consider the 6 step-ahead forecast for this time series considering four different forecast error measures.

**Keywords:** Langevin Equation, Brownian Motion, Cosine Processes, Estimation Method for Least Squares.

# 1 Introdução

Em 1908, o matemático francês Paul Langevin, iniciou o estudo das equações de Langevin, com o objetivo de modelar a dinâmica do movimento irregular e imprevisível de uma partícula imersa em um meio líquido.

Em 1965, com Hazime Mori, e em 1966, com Ryogo Kubo, surge uma generalização do modelo proposto por Langevin conhecida como equação de Langevin generalizada, para uma partícula de massa unitária. A partir daí surgiram inúmeros estudos com a equação de Langevin, a equação de Langevin generalizada e por sua vez com a solução da equação de Langevin generalizada (ver Medino, 2005).

Estudos dos processos estocásticos de Ornstein-Uhlenbeck (processo resultante da equação clássica de Langevin) ganharam maior evidência com aplicações à séries temporais financeiras como uma importante ferramenta para modelar taxas de juros, taxas de câmbio, preços de mercadorias, etc. Este processo ganhou este nome devido aos físicos teóricos Leonard Ornstein e George Eugene Uhlenbeck.

Surgiram diversas derivações do processo, tais como os modelos propostos por Barndorff-Nielsen e Shephard (2000), que apresentam a aplicação destes processos cujo ruído é dado por um processo de Lévy para modelar séries temporais nas áreas de finanças e econometria.

Apresentamos neste trabalho duas famílias de processos estocásticos, o movimento Browniano e o processo de Lévy (ver Capítulo 2), posteriormente introduzimos os conceitos necessários ao estudo dos processos estocásticos resultantes da solução da equação de Langevin generalizada (ver Capítulo 3).

O objetivo deste trabalho é a estimação do parâmetro vinculado a frequência de um caso particular do processo estocástico obtido da solução da equação de Langevin generalizada quando  $f(t) = a^2$  (ver Capítulo 4). Este processo é aqui denominado de *processo dos cossenos*.

A estimação é feita em dois passos: o primeiro é através do método de mínimos quadrados e o segundo por uma transformação trigonométrica (ver Capítulo 5).

Neste trabalho realizamos simulações de Monte Carlo variando diversos parâmetros do processo e analisamos os resultados analiticamente e graficamente (ver Capítulo 6).

Este trabalho foi aplicado em dados reais, o qual foi possível descrever a trajetória da série temporal, estimar a frequência e prever alguns passos à frente.

## 2 Distribuições Estáveis

As distribuições estáveis foram caracterizadas por Paul Lévy em meados de 1920 ao estudar a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Sua principal característica é possuir assimetria e cauda pesada, isto é,  $\mathbb{P}(|X| > x) \sim x^{-\alpha}$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , para  $0 < \alpha < 2$ . Por consequência, pode ocorrer a não existência de todos os momentos finitos. Definimos o  $r$ -ésimo momento absoluto de uma variável aleatória  $X$  como

$$\mathbb{E}(|X|^r) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X|^r > x) dx, \quad (2.0.1)$$

onde  $r \in \mathbb{N}$ .

Hoje em dia, apesar das distribuições estáveis não possuírem fórmulas fechadas para a grande maioria das funções de distribuições e densidades, essa classe é muito utilizada na área de séries temporais financeiras e em sistemas de comunicações. As aplicações se tornaram possíveis por existirem muitos programas computacionais confiáveis que nos possibilitam calcular estas distribuições.

**Definição 2.0.1.** (Estabilidade, Estabilidade Estrita e Estabilidade Simétrica). Uma variável aleatória  $X$  é dita *estável* se dadas duas amostras aleatórias independentes  $X_1$  e  $X_2$  de  $X$  e quaisquer  $a, b$  constantes reais positivas, existem  $c, d \in \mathbb{R}$ , com  $c \neq 0$ , tais que

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} cX + d. \quad (2.0.2)$$

Se  $d = 0$  para toda escolha de  $a$  e  $b$ , dizemos que  $X$  é estritamente estável. Para o caso em que  $X$  é estável e  $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} -X$ , então dizemos que  $X$  é *simetricamente estável*. Aqui  $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$  indica igualdade em distribuição.

Embora esta definição seja intuitiva, existe uma definição mais interessante, sobre estabilidade que é equivalente e nos permite conhecer a estrutura da variável aleatória. A demonstração dessa equivalência pode ser vista em Gnedenko e Kolmogorov (1954).

**Definição 2.0.2.** ( $\alpha$ -estável). Uma variável aleatória  $X$  é dita ser  $\alpha$ -estável se existe um índice de estabilidade  $\alpha \in (0, 2]$ , um parâmetro de assimetria  $\beta \in [-1, 1]$ , um parâmetro de escala  $\sigma > 0$  e um parâmetro de locação  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que  $X$  tem função

característica, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , dada por

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \begin{cases} \exp\{-\sigma|t|[1 + i\beta\frac{2}{\pi}S(t)\ln(|t|)] + i\mu t\}, & \text{se } \alpha = 1, \\ \exp\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha[1 - i\beta S(t)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})] + i\mu t\}, & \text{se } \alpha \neq 1, \end{cases} \quad (2.0.3)$$

onde  $S(\cdot)$  é a função sinal, definida por

$$S(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } t < 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ 1, & \text{se } t > 0. \end{cases} \quad (2.0.4)$$

Portanto, quando uma distribuição  $X$  for  $\alpha$ -estável ela é descrita por quatro parâmetros e denotamos  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ .

Quando  $\beta = \mu = 0$  dizemos que  $X$  é  $\alpha$ -estável simétrica, denotada por  $S_\alpha S$ , e sua função característica é dada por

$$\varphi_X(t) = e^{-\sigma^\alpha|t|^\alpha}, \quad (2.0.5)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

A principal característica das distribuições  $\alpha$ -estáveis é que a soma de variáveis aleatórias independentes  $\alpha$ -estáveis também é  $\alpha$ -estável. A seguir, damos algumas propriedades básicas das distribuições  $\alpha$ -estáveis (ver Nolan, 2009).

**Proposição 2.0.3.** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias independentes tais que  $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$ , conforme a Definição 2.0.2. Então,  $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , onde*

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha} \quad e \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

**Proposição 2.0.4.** *Para  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  temos as seguintes propriedades:*

*i. Se  $a$  é uma constante real, então  $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$ .*

*ii. Se  $a$  é uma constante real não nula, então*

$$\begin{aligned} aX &\sim S_1(|a|\sigma, S(a)\beta, a\mu - \frac{2a}{\pi}\ln(|a|)\sigma\beta), & \text{se } \alpha = 1, \\ aX &\sim S_\alpha(|a|\sigma, S(a)\beta, a\mu), & \text{se } \alpha \neq 1, \end{aligned} \quad (2.0.6)$$

*onde a função  $S(\cdot)$  está definida em (2.0.4).*

*iii. Se  $0 < \alpha < 2$ , então  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$  se e somente se  $-X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$ .*

iv.  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  é simétrica sobre  $\mu$  se e somente se  $\beta = 0$ .

v. Se  $\alpha \neq 1$ , então  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  é simétrica estável se e somente se  $\mu = 0$ . Se  $\alpha = 1$ , então  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  é estritamente estável se e somente se  $\beta = 0$ .

**Proposição 2.0.5.** Seja  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ , com  $0 < \alpha < 2$ . Se  $\mathbb{E}(|X|^r)$  é definido por (2.0.1), então

$$\mathbb{E}(|X|^r) < \infty, \text{ para todo } 0 < r < \alpha,$$

$$\mathbb{E}(|X|^r) = \infty, \text{ para todo } r \geq \alpha.$$

As demonstrações das Proposições 2.0.3, 2.0.4 e 2.0.5, são encontradas em Samorodnitsky e Taqu (1994).

Segundo Nolan (2009) se considerarmos para as distribuições Normal, Cauchy e Lévy, e suas respectivas formas fechada da função densidade é possível verificar que elas são estáveis. Veremos nos exemplos a seguir.

**Exemplo 2.0.1.** Distribuição Normal ou Gaussiana. Considere  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  cuja função densidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.0.7)$$

A função de distribuição acumulada, para a qual existe uma expressão em forma fechada, é  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \Phi((x-\mu)/\sigma)$ , onde  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição de probabilidade de uma normal padrão, isto é  $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right)$ . Então,  $X \sim S_2(1, 0, 0)$ . Em Nolan (2009) é possível encontrar a demonstração que torna esta distribuição estável.

**Exemplo 2.0.2.** Distribuição Cauchy. Considere  $X \sim Cauchy(\gamma, \delta)$  cuja função densidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.0.8)$$

Esta é também chamada de distribuição de Lorentz na Física. Então,  $X \sim S_1(1, 0, 0)$ . Em Nolan (2009) é possível encontrar a demonstração que torna esta distribuição estável.

**Exemplo 2.0.3.** Distribuição Lévy. Considere  $X \sim Lévy(\gamma, \delta)$  cuja função densidade é dada por

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}\right), \quad \delta < x < \infty. \quad (2.0.9)$$

Alguns autores usam o termo distribuição Lévy para todas as somas de leis estáveis. Aqui consideramos o termo apenas para esta distribuição em particular. Então,  $X \sim S_{0.5}(1, 1, 0)$ . Em Nolan (2009) é possível encontrar a demonstração que prova que esta distribuição estável.

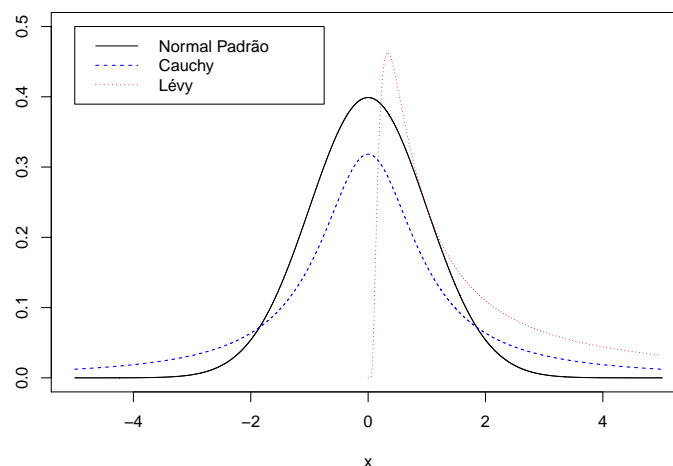


Na Tabela 2.0.1 temos um comparativo de caudas, entre as distribuições Normal Padrão, Cauchy e Lévy. Analizando a distribuição Normal Padrão e a Cauchy vemos que a principal diferença entre elas é que a Cauchy tem caudas mais pesadas. Em particular, a distribuição Normal Padrão possui uma pequena probabilidade superior ao valor 3.0 e a Cauchy uma probabilidade significativa superior 3, ou seja, em um exemplo de dados haverá (em média), mais do que 100 vezes o número de valores superiores a 3 para o caso da Cauchy do que para a Normal Padrão. Por esta razão, as distribuições estáveis são chamadas de distribuições de caudas pesadas. Em contraste com a distribuição Normal Padrão e a Cauchy, a distribuição Lévy é altamente convergente, com toda a probabilidade concentrada em  $x > 0$ , e que tem ainda cauda mais pesada do que a de Cauchy.

**Tabela 2.0.1:** Comparação das probabilidades de cauda para as distribuição Normal padrão, Cauchy e Lévy.

x	$\mathbb{P}(X > x)$		
	Normal Padrão	Cauchy	Lévy
0	0.5000	0.5000	1.0000
1	0.1587	0.2500	0.6827
2	0.0228	0.1476	0.5205
3	0.001347	0.1024	0.4363
4	0.00003167	0.0780	0.3829
5	0.0000002866	0.0628	0.3453

Podemos analisar os resultados graficamente conforme a Figura 2.0.1 que mostra um gráfico das três densidades. Ambas as distribuições, Normal Padrão e Cauchy, são curvas em forma de sino e simétricas.



**Figura 2.0.1:** Gráficos da Densidade da Distribuição Normal Padrão, Cauchy e Lévy.

Distribuições estáveis gerais permitem diferentes graus de peso de cauda e diferentes graus de assimetria.

## 2.1 MOVIMENTO BROWNIANO

Enquanto estudava a vida das plantas nos mares do sul em 1827, o botânico Robert Brown, observou que os grãos de pólen, suspensos em uma substância aquosa, mantinham um rápido movimento oscilatório. A partir daí iniciou-se a primeira noção do movimento Browniano. A primeira pessoa a descrever matematicamente o movimento Browniano foi Thorvald N. Thiele em um trabalho sobre o método dos mínimos quadrados publicado em 1880. A partir deste trabalho foram surgindo inúmeros estudos sobre este movimento aleatório, tanto na Matemática como na Física. Podemos dizer que este movimento tem um papel fundamental na teoria da Probabilidade, nos Processos Estocásticos e na Física. Neste capítulo definiremos o movimento Browniano e algumas de suas propriedades mais importantes.

**Definição 2.1.1.** (Movimento Browniano). Um processo estocástico  $B = \{X(t)\}_{t \geq 0}$  é chamado *movimento Browniano ou processo de Wiener* se satisfaz as seguintes condições

- i.  $X(0) = 0$ .
- ii. Possui incrementos estacionários, isto é

$$X(t) - X(s) \stackrel{\mathcal{D}}{\rightarrow} X(t+h) - X(s+h), \quad (2.1.10)$$

para todo  $t, s \in [0, \infty)$  e  $h$  tal que  $t+h, s+h \in [0, \infty)$ .

- iii. Possui incrementos independentes, isto é, para toda escolha de  $t_i \in [0, \infty)$ , para  $i = 1, \dots, n$ , com  $t_1 < \dots < t_n$  e  $n \geq 1$ , temos que

$$X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}) \quad (2.1.11)$$

são variáveis aleatórias independentes.

- iv.  $X(t)$  tem distribuição  $\mathcal{N}(0, t)$ , para todo  $t > 0$ ; isto é,  $X(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ .
- v.  $X(t)$  é função contínua de  $t$ , para todo  $t > 0$ .

Com base na Definição 2.1.1, podemos notar que as variáveis aleatórias  $X(t) - X(s)$  e  $X(t-s) - X(0)$  tem distribuição  $\mathcal{N}(0, t-s)$ , para  $s < t$ . Isso segue da estacionaridade dos incrementos. De fato, a partir dessa definição,  $X(t) - X(s)$  tem a mesma distribuição que  $X(t-s) - X(0) = X(t-s)$ , que é uma variável aleatória com média zero e variância  $t-s$ .

A proposição a seguir determina a função de autocovariância do processo  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  dado na Definição 2.1.1.

**Proposição 2.1.2.** *Seja  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  o processo movimento Browniano. Então, para todo  $s, t \geq 0$  temos que a função de autocovariância do processo é dada por*

$$\gamma_X(s, t) = \mathbb{E}(X(s)X(t)) = \min(s, t). \quad (2.1.12)$$

**Demonstração:** Considere  $s, t$  não negativos tais que  $s \leq t$ . Então, pela propriedade de independência do movimento Browniano, temos que

$$\begin{aligned} \gamma_X(s, t) &= \mathbb{E}(X(s)X(t)) \\ &= \mathbb{E}[X(s)(X(t) - X(s)) + (X(s))^2] \\ &= \mathbb{E}[X(s)(X(t) - X(s))] + \mathbb{E}(X(s)^2) \\ &= \mathbb{E}[(X(s) - X(0))(X(t) - X(s))] + \text{Var}(X(s)) \\ &= \mathbb{E}(X(s) - X(0))\mathbb{E}(X(t) - X(s)) + s = s. \end{aligned}$$

Analogamente, vale para o caso  $t \leq s$ . □

## 2.2 PROCESSOS DE LÉVY

Nesta seção definimos o processo de Lévy e mostramos alguns exemplos.

Seja  $Y = \{Y(t)\}_{t \geq 0}$  um processo estocástico definido em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Dizemos que ele tem *incrementos independentes* se para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada  $0 \leq t_1 < t_2 \leq \dots < t_{n+1} < \infty$  as variáveis aleatórias  $X(t_{j+1}) - X(t_j)$ , para  $j = 1, \dots, n$  são independentes e que tem *incrementos estacionários* se cada  $X(t_{j+1}) - X(t_j) \stackrel{\mathcal{D}}{=} X(t_{j+1} - t_j) - X(0)$ . Na Definição 2.1.1 foi apresentado a definição de incrementos independentes e estacionários.

A seguir, definimos os processos de Lévy.

**Definição 2.2.1.** (Processos de Lévy). Um processo estocástico  $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$  é um *processo de Lévy* se

- i)  $Y(0) = 0$ ;
- ii) possui incrementos independentes e estacionários;
- iii) possui trajetórias contínuas à direita, com limites à esquerda finitos.

**Proposição 2.2.2.** Seja  $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$  um processo de Lévy, conforme a Definição 2.2.1. Então, o processo de Lévy é equivalente a satisfazer a condição

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{P}(|Y(t)| > a) = 0,$$

para todo  $a > 0$ .

O teorema abaixo caracteriza a função característica de  $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$  (ver Applebaum, 2004).

**Teorema 2.2.3.** Se  $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo de Lévy, então

$$\phi_{Y(t)}(u) = e^{t\eta(u)}$$

para cada  $u \in \mathbb{R}, t \geq 0$ , onde  $\eta(\cdot)$  é o símbolo de Lévy para  $Y(1)$ .

Para ilustrar melhor, descrevemos abaixo alguns exemplos de processos de Lévy.

**Exemplo 2.2.1.** *Processo Gama.* Seja  $X \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$  uma variável aleatória com distribuição gama. Sua função densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \text{ para todo } x > 0,$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  denota a função gama usual.

O processo gama com parâmetros  $\mu$  e  $v$ , denotado  $\{G_{\mu,v}(t)\}_{t \geq 0}$ , é um processo contínuo, com incrementos independentes e estacionários, tais que, para todo  $t$  não negativo e todo  $h$  positivo,

$$G_{\mu,v}(t+h) - G_{\mu,v}(t) \sim \mathcal{G}\left(\mu^2 h, \frac{v}{\mu}\right).$$

Logo, o processo gama  $\{G_{\mu,v}(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo de Lévy.

**Exemplo 2.2.2.** *Movimento Browniano e Processo Gaussiano.* Um movimento Browniano padrão na reta é um processo Lévy  $Y = \{Y(t)\}_{t \geq 0}$  para os quais

**B1.**  $Y(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ , para  $t \geq 0$ ,

**B2.**  $Y$  tem trajetórias contínuas.

Segue imediatamente por **B1** que se  $Y$  é um movimento Browniano padrão sua função característica é dada por

$$\phi_{Y(t)}(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}t|u|^2\right)$$

para  $u \in \mathbb{R}, t \geq 0$ .

**Exemplo 2.2.3.** *Processo de Poisson composto.* Seja  $\{Z(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com valores em  $\mathbb{R}$  com lei comum  $\mu_Z$  e seja  $N$  um processo de Poisson de potência  $\lambda$  que é independente de todo  $Z(n)$ . O processo de Poisson composto  $Y$  é definido como

$$Y(t) = Z(1) + \cdots + Z(N(t))$$

para  $t \geq 0$ , de modo que cada  $Y(t) \sim \mathcal{N}(\lambda t, \mu_Z)$ . Este é um exemplo de processo de Lévy não contínuo cuja função de distribuição contém saltos (ver Karlin e Taylor, 1975, páginas 22 e 118).

**Proposição 2.2.4.** *O processo de Poisson composto  $Y$  é um processo de Lévy.*

**Demonstração:** Ver Applebaum (2004), proposição 1.3.11.  $\square$

**Exemplo 2.2.4.** *Processo de Lévy estável.* Um processo Lévy estável é um processo de Lévy conforme a Definição 2.2.1, em que cada  $Y(t)$  é uma variável aleatória estável. De particular interesse é o caso invariante, em que o símbolo de Lévy é dado por

$$\eta(u) = -\sigma^\alpha |u|^\alpha,$$

onde  $0 < \alpha \leq 2$  é o índice de estabilidade e  $\sigma > 0$  é o parâmetro de escala.

### 3 Equação de Langevin

De acordo com a segunda lei de Newton, Paul Langevin iniciou a escrever a equação do movimento da partícula Browniana. Langevin assume que a força de atrito segue a lei de Stokes, que afirma que a força de atrito desacelerando uma partícula esférica é proporcional ao coeficiente de viscosidade do fluido, onde  $v(t)$  é a posição da partícula e  $v(t)'$  é a velocidade. Assume ainda que  $\eta(t)$  é independente de  $v(t)$  e que a variação de  $\eta(t)$  é extremamente rápida quando comparada com a variação de  $v(t)$ . Dessa forma, é obtida a equação de Langevin apresentada a seguir

$$v(t)' = -\gamma v(t) + \sigma \eta(t), \quad (3.0.1)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva,  $\{\eta(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo de ruído branco Gaussiano com média zero e variância igual a um.

#### 3.1 EQUAÇÃO DE LANGEVIN GENERALIZADA

Utilizar a equação de Langevin não é muito viável computacionalmente, com isso foram sendo criados a partir dela muitos estudos como por exemplo a sua forma generalizada.

A equação generalizada de Langevin é dada por

$$v(t)' = - \int_0^t \gamma(t-s) v(s) ds + \varepsilon(t), \quad (3.1.2)$$

onde  $\{\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo ruído que pode ser de Lévy, Browniano, Browniano fracionário ou até mesmo um processo  $\alpha$ -estável, isto é, um processo com incrementos independentes e estacionários,  $\varepsilon(0) = 0$  e  $\varepsilon(t)$ , para  $t \geq 0$ , tem trajetórias que são contínuas à direita, com limites finitos à esquerda. Stein et al. (2014) apresenta um estudo utilizando o ruído como uma distribuição  $\alpha$ -estável.

Na equação (3.1.2),  $\gamma(\cdot)$  é chamada de *função memória*. Se considerarmos

$$\gamma(t-s) = \gamma \delta(t-s) = \begin{cases} \gamma, & \text{se } t = s \\ 0, & \text{se } t \neq s, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

onde  $\gamma > 0$ , então a função memória é uma extensão daquela definida na expressão

(3.0.1) e ela tem a propriedade de ser hiperbolicamente “esticada”, isto é,  $\gamma(\cdot)$  tem uma ordem de convergência com decaimento dado por  $\exp(-|h|^\delta)$ , para algum  $\delta > 0$ .

### 3.2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LANGEVIN GENERALIZADA

A partir da equação generalizada de Langevin podemos obter sua solução. O processo resultante da solução da equação generalizada de Langevin é dado por

$$v_t = v_0 e^{-\lambda t} + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dB_s, \quad (3.2.4)$$

onde  $\lambda$  e  $\sigma$  são constantes positivas,  $\{B(t)\}$   $t \in [0, T]$  é o movimento Browniano e  $v_0$  independente de  $B(t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

É a partir do processo (3.2.4) que vamos dar suas formas, recursiva e discretizada, e fazer o estudo de estimação.

**Definição 3.2.1.** (Processo de Ornstein-Uhlenbeck). O processo  $\{X(t)\}$   $t \in [0, T]$ , dado pela expressão (3.2.4), para uma condição inicial  $X_0$ , é chamado processo de Ornstein-Uhlenbeck (ou processo OU).

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$  o processo OU dado na expressão (3.2.4). Então,*

i. *a esperança do processo é dada por*

$$\mathbb{E}(X(t)) = e^{-\lambda t} \mathbb{E}(X(0)), \quad \text{para todo } t \in [0, T];$$

ii. *a variância do processo é dada por*

$$\text{Var}(X(t)) = e^{-2\lambda t} \left[ \text{Var} \left( X(0) - \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right) \right] + \frac{\sigma^2}{2\lambda}, \quad \text{para todo } t \in [0, T];$$

iii. *a forma recursiva da equação (3.2.4) é dada por*

$$X(t+h) = e^{-\lambda t} \left( X(t) + \sigma e^{-\lambda t} \int_t^{t+h} e^{\lambda s} dB(s) \right), \quad \text{para } h \in \mathbb{R} \text{ tal que } h > 0; \quad (3.2.5)$$

iv. *se  $X(0) \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right)$ , então  $X(t) \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right)$ ;*

v. *se  $X(0) \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right)$ , o processo é estacionário e tem função de autocovariância dada por*

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= e^{-\lambda|h|} \left[ e^{-2\lambda t} \left( \text{Var}(X(0)) - \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right) + \frac{\sigma^2}{2\lambda} \right] \\ &= \frac{\sigma^2 e^{-\lambda|h|}}{2\lambda}, \quad \text{para todo } h \in [0, T]; \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

vi. a função de autocorrelação do processo é dada por

$$\rho_X(h) = \text{Corr}(X(t+h), X(t)) = e^{-\lambda|h|}, \text{ para todo } t, t+h \in [0, T]; \quad (3.2.7)$$

vi. a função de densidade espectral do processo é dada por

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{4\pi\lambda} \left( \frac{e^{2\lambda} - 1}{1 + e^{2\lambda} - 2e^\lambda \cos(\omega)} \right), \text{ para todo } \omega \in [0, \pi]. \quad (3.2.8)$$

**Demonstração:** Ver Pinto (2010). □

Aqui encerramos o estudo das equações de Langevin.



## 4 Processo Estocástico Geral

Neste capítulo introduzimos um sistema de equações diferenciais necessário para definir o *processo dos cossenos* que será estudado nos próximos capítulos.

Considerando  $\mu_t = \mu$ , para todo  $t \geq 0$  e  $\mu \ll \lambda$ , onde  $\lambda$  é a medida de Lebesgue, que é  $d\mu_t(s) = d\mu(s) = f(s)ds$ , para todo  $t, s \geq 0$ , onde

$$f(s) = \frac{d\mu}{d\lambda}(s) \quad (4.0.1)$$

é a derivada de Radon–Nikodym. Para o caso onde temos

$$\rho'(t) = - \int_0^t \rho(s)f(s)ds \quad (4.0.2)$$

obtemos o sistema de equações diferenciais com condições iniciais dado por

$$\begin{cases} \rho''(t) &= -\rho(t)f(t); \\ \rho'(0) &= 0 \text{ e } \rho(0) = 1, \end{cases} \quad (4.0.3)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \rho''(t) + \rho(t) f(t) = 0; \\ \rho'(0) = 0 \text{ e } \rho(0) = 1. \end{cases} \quad (4.0.4)$$

A solução da equação diferencial ordinária (4.0.4) existe e é única (ver Stein 2016). Pode ser obtida a partir do método de série de potências. Dependendo da escolha da função  $f(\cdot)$ , teremos a forma explícita da função  $\rho(\cdot)$ , conforme Medino et al. (2012) e Stein et al. (2014).

Considerando  $\lambda > 0$  e a medida do sinal  $\mu_t(\cdot)$  dada por

$$\mu_t(E) = \begin{cases} \lambda, & \text{se } t \in E; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.0.5)$$

Então,

$$\rho'(t) = - \int_0^t \rho(s) d\mu_t(s) = -\lambda\rho(t). \quad (4.0.6)$$

Uma vez que  $\rho'(t) = -\lambda\rho(t)$  e  $\rho(0) = 1$ , temos  $\rho(t) = e^{-\lambda t}$ .

Com esta  $\rho(\cdot)$ , o processo  $V(\cdot)$  é um processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU), dado por

$$V(t) = V(0)e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dL(s), \quad (4.0.7)$$

onde  $L \equiv B$  pode ser o movimento Browniano fracionário, processo de Lévy ou o processo  $\alpha$ -estável. Quando  $L \equiv B$ , o processo movimento Browniano, então o processo  $\{V(t)\}_{t \geq 0}$  é o processo clássico de OU.

Quando  $f(t) = a^2$ , nós temos  $\mu = \lambda =$  medida de Lebesgue definida na reta. A equação (4.0.4) nos fornece  $\rho(t) = \cos(at)$ . Um estudo dos processos  $\{V(t)\}_{t \geq 0}$  dado por

$$V(t) = V(0) \cos(at) + \int_0^t \cos(a(t-s)) dL(s), \quad (4.0.8)$$

que será apresentado na seção a seguir.

## 4.1 PROCESSO DOS COSSENOS

O processo dos cossenos é obtido ao se considerar  $\rho(t) = \cos(at)$  no sistema (4.0.4). Nesse caso, o processo  $\{V(t)\}_{t \geq 0}$  é definido pela equação (4.0.8), onde  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$  pode ser o movimento Browniano, ou o processo de Lévy, ou o processo movimento Browniano fracionário ou o processo  $\alpha$ -estável. Para o processo (4.0.8) queremos a expansão  $V(t+h)$  ou  $V(th)$ . Ou seja, desejamos dar uma fórmula de recorrência para o processo dos cossenos (ver Stein, 2016).

**Proposição 4.1.1.** *Considere o processo estocástico dado na expressão (4.0.8). Então, uma fórmula de recorrência para esse processo é dada por*

$$V(t+h) = \cos(ah)V(t) - V_0 \operatorname{sen}(ah)\operatorname{sen}(at) + \varepsilon(t, h, a), \quad (4.1.9)$$

onde  $V_0 \equiv V(0)$  e  $\varepsilon(t, h, a)$  é dado por

$$\varepsilon(t, h, a) = \cos(ah) \int_t^{t+h} \cos(a(t-s)) dL(s) - \operatorname{sen}(ah) \int_0^{t+h} \operatorname{sen}(a(t-s)) dL(s).$$

**Demonstração:** Considere o processo dos cossenos dado na equação (4.0.8). Então, para todo  $t, h > 0$ ,

$$\begin{aligned}
V(t+h) &= V_0 \cos(a(t+h)) + \int_0^{t+h} \cos(a(t+h-s))dL(s) \\
&= V_0 \cos(at) \cos(ah) - V_0 \operatorname{sen}(at) \operatorname{sen}(ah) + \int_0^{t+h} \cos(ah) \cos(a(t-s))dL(s) \\
&\quad - \int_0^{t+h} \operatorname{sen}(ah) \operatorname{sen}(a(t-s))dL(s) \\
&= \cos(ah) \left\{ V_0 \cos(at) + \int_0^t \cos(a(t-s))dL(s) + \int_t^{t+h} \cos(a(t-s))dL(s) \right\} \\
&\quad - V_0 \operatorname{sen}(at) \operatorname{sen}(ah) - \int_0^{t+h} \operatorname{sen}(ah) \operatorname{sen}(a(t-s))dL(s) \\
&= \cos(ah) \left\{ V(t) + \int_t^{t+h} \cos(a(t-s))dL(s) \right\} \\
&\quad + \operatorname{sen}(ah) \left\{ V_0(-\operatorname{sen}(at)) + \int_0^{t+h} [-\operatorname{sen}(a(t-s))]dL(s) \right\} \\
&= \cos(ah)V(t) - V_0 \operatorname{sen}(ah) \operatorname{sen}(at) + \cos(ah) \left\{ \int_t^{t+h} \cos(a(t-s))dL(s) \right\} \\
&\quad - \operatorname{sen}(ah) \int_0^t \operatorname{sen}(a(t-s))dL(s).
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão  $V(t+h)$  é dada por

$$V(t+h) = \cos(ah)V(t) - V_0 \operatorname{sen}(ah) \operatorname{sen}(at) + \varepsilon(t, h, a) \quad (4.1.10)$$

onde

$$\varepsilon(t, h, a) = \cos(ah) \int_t^{t+h} \cos(a(t-s))dL(s) - \operatorname{sen}(ah) \int_0^t \operatorname{sen}(a(t-s))dL(s). \quad \square$$

Com esta proposição finalizamos a definição formal do *processo dos cossenos*.

## 5 Método de Estimação

Nosso objetivo é estimar o parâmetro  $a$  que aparece no processo dos cossenos, dado em (4.0.8), através da expressão (4.1.9). Para tal objetivo, precisamos seguir um método dado em dois passos, isto é, estimarmos  $\cos(ah)$  pelo método de mínimos quadrados e após estimarmos o parâmetro  $a$ . Descreveremos essa estimação, a dois passos, a seguir.

### 5.1 ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS

Após ser introduzido por Gauss em 1794, seus primeiros resultados foram publicados somente em 1809, em Hamburgo. Antes disto, o nome deste estimador apareceu primeiro no apêndice do tratado de Legendre, *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Comètes*, publicado em Paris em 1806. Ambos utilizaram o princípio em conexão com problemas de Astronomia e Física. O objetivo do método de regressão por mínimos quadrados, é escrever uma sequência de variáveis aleatórias  $\{Y_t\}_{t=1}^n$  como uma combinação afim de uma sequência de dados  $\{X_t\}_{t=1}^n$ , ou seja

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t, \quad (5.1.1)$$

onde  $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^n$  é o conjunto de erros, independente e identicamente distribuídos e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais. Neste trabalho consideremos  $Y_t$  o processo  $V(t+h)$ ,  $\alpha = -V_0 \sin(ah)\sin(at)$  e  $\beta = \cos(ah)$  e  $\varepsilon_t = \varepsilon(t, h, a)$ , conforme descrito em (4.1.9). O objetivo é estimar  $\alpha$  e  $\beta$  de forma a minimizar a soma dos erros ao quadrado, ou seja, calcular

$$\min_{\alpha, \beta} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \min_{\alpha, \beta} \sum_{t=1}^n (Y_t - \alpha - \beta X_t)^2. \quad (5.1.2)$$

Para solucionar, basta resolver as seguintes equações equivalentes

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial \sum_{t=1}^n (Y_t - \alpha - \beta X_t)^2}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{\partial \sum_{t=1}^n (Y_t - \alpha - \beta X_t)^2}{\partial \beta} = 0. \quad (5.1.3)$$

Da equação (5.1.3) obtemos que

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \alpha - \beta X_t) \quad (5.1.4)$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \beta} = -2 \sum_{t=1}^n X_t (Y_t - \alpha - \beta X_t). \quad (5.1.5)$$

Dividindo a equação (5.1.4) por  $2n$  temos

$$\begin{aligned} \frac{-2 \sum_{t=1}^n Y_t}{2n} + \frac{2 \sum_{t=1}^n \alpha}{2n} + \frac{2 \sum_{t=1}^n \beta X_t}{2n} &= 0 \\ \iff -\frac{\sum_{t=1}^n Y_t}{n} + \frac{\sum_{t=1}^n \alpha}{n} + \frac{\sum_{t=1}^n \beta X_t}{n} &= 0 \\ &\iff -\bar{Y} + \alpha + \hat{\beta} \bar{X} = 0 \\ &\iff \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

onde  $\hat{\alpha}$  é o estimador de  $\alpha$  da equação (5.1.1),  $\bar{Y}$  é a média amostral de  $Y$  e  $\bar{X}$  é a média amostral de  $X$ . Substituindo a equação (5.1.6) na (5.1.5) temos

$$\begin{aligned} -2 \sum_{t=1}^n X_t (Y_t - \bar{Y} + \hat{\beta} \bar{X} - \beta X_t) &= 0 \\ \iff \sum_{t=1}^n [X_t (Y_t - \bar{Y}) + X_t \hat{\beta} (\bar{X} - X_t)] &= 0 \\ \iff \sum_{t=1}^n X_t (Y_t - \bar{Y}) + \hat{\beta} \sum_{t=1}^n X_t (\bar{X} - X_t) &= 0 \\ \iff \hat{\beta} &= \frac{\sum_{t=1}^n X_t (Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n X_t (\bar{X} - X_t)}. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Na literatura é utilizada uma fórmula equivalente dada por

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}, \quad (5.1.8)$$

onde  $\hat{\beta}$  é o estimador de  $\beta$  da equação (5.1.1).

## 5.2 ESTIMADOR PELA TRANSFORMAÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Precisamos utilizar o estimador pela transformação trigonométrica para obter a estimativa do parâmetro  $a$  dado em (4.1.9). Ele se baseia na relação com o cosseno, isto é,

$$b = \cos(ah) \quad (5.2.9)$$

onde  $h$  e  $b$  são constantes.

O parâmetro  $a$  é estimado através da expressão

$$\hat{a} = \frac{\arccos(\hat{b})}{h}, \quad (5.2.10)$$

onde  $\hat{b}$  é dado pela expressão

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2}. \quad (5.2.11)$$

### 5.3 FUNÇÕES PERIODOGRAMA E PERIODOGRAMA SUAVIZADO

Outra maneira de estimar a frequência de um série temporal é utilizar um estimador assintoticamente não viesado para a função densidade espectral conhecido como função periodograma. A função periodograma é obtida através da transformada de Fourier discreta da função de autocovariância amostral, e é dada por

$$I_1(\omega_i) = \frac{1}{2\pi} \left[ \hat{\gamma}(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \hat{\gamma}(j) \cos(j\omega_i) \right], \text{ para } \omega_i \in [0, \pi] \quad (5.3.12)$$

onde  $\hat{\gamma}(\cdot)$  é a função de autocovariância amostral,  $\omega_i = \frac{2\pi i}{n}$  são as frequências de Fourier com  $i \in \{1, \dots, [\frac{n}{2}]\}$ ,  $n$  é o tamanho da série temporal e  $[x]$  denota a parte inteira de  $x$ .

Como o periodograma não é um estimador consistente, é recomendado utilizar o periodograma suavizado que nada mais é do que utilizar uma janela, ou seja, uma função peso. Varias janelas são sugeridas na literatura para a suavização do periodograma, dentre elas a de Bartlett, Parzen, Tukey, entre outras. A função periodograma suavizado é dada por

$$I_2(\omega_i) = \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{|j| \leq m} \lambda \left( \frac{j}{m} \right) \hat{\gamma}(j) \cos(j\omega_i) \right], \text{ para } \omega_i \in [0, \pi], \quad (5.3.13)$$

onde  $\hat{\gamma}(\cdot)$  é a função de autocovariância amostral,  $\omega_i = \frac{2\pi i}{n}$  são as frequências de Fourier com  $i \in \{1, \dots, [\frac{n}{2}]\}$ ,  $n$  é o tamanho da série temporal,  $[x]$  denota a parte inteira de  $x$  e  $\lambda(\cdot)$  é uma função de ponderação conhecida como *janela espectral*. Neste trabalho utilizamos a *janela de Bartlett* que é dada por

$$\lambda(k) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{k}{m}\right)^2 + 6 \left(\frac{|k|}{m}\right)^3, & \text{se } |k| \leq \frac{m}{2}, \\ 2 \left(1 - \frac{|k|}{m}\right)^3, & \text{se } \frac{m}{k} < |k| \leq m, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.3.14)$$

onde  $m$  é definido como o *ponto de truncamento da janela* e depende do número  $n$  de observações da série temporal através de  $m = n^\beta$ , para algum  $\beta \in (0, 1)$ . Um estudo mais completo sobre esses estimadores da função densidade espectral pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991).

## 6 Simulações

Neste capítulo apresentamos simulações do processo advindo da solução dada em (4.0.8), considerando o ruído  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$  como um movimento Browniano. Apresentamos os resultados da estimação do parâmetro  $a$  através dos estimadores propostos no Capítulo 5, o estimador de mínimos quadrados e o estimador pelo método trigonométrico. A parte computacional deste capítulo foi realizada através do aplicativo R-project.

Os estimadores (5.1.8) e (5.2.10) propostos no Capítulo 5, denotados por  $\hat{b}_j$  e  $\hat{a}_j$ , respectivamente, são definidos por

$$\hat{b}_j = \frac{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad e \quad \hat{a}_j = \frac{\arccos(\hat{b}_j)}{h},$$

onde  $Y_t$  é o processo  $V(th)$  descrito em (4.1.9),  $X_t$  é o processo  $V(th)$  no seu passo anterior, ou seja,  $V((t-1)h)$ ,  $\bar{Y}_t$  é a média amostral do processo  $Y_t$  e  $\bar{X}_t$  é a média amostral do processo  $X_t$ . O sub-índice  $j$  indica a aplicação na  $j$ -ésima replicação do processo  $\{V_{th}\}_{t=0}^n$  e  $n$  é o tamanho amostral.

Contudo considerando  $re$  o número de replicações do processo, definimos a estimativa

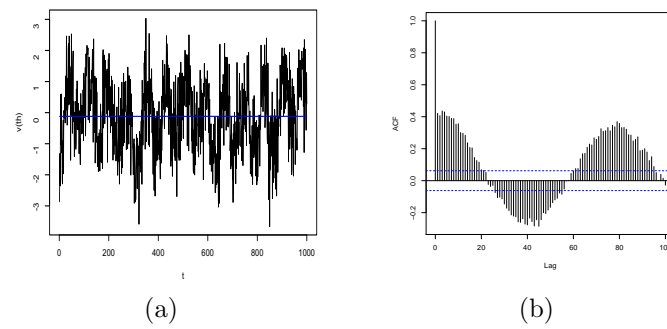
$$\hat{a} = \frac{1}{re} \sum_{j=1}^{re} \hat{a}_j, \quad (6.0.1)$$

onde  $\hat{a}_j$  é o estimador do parâmetro  $a$  na  $j$ -ésima replicação.

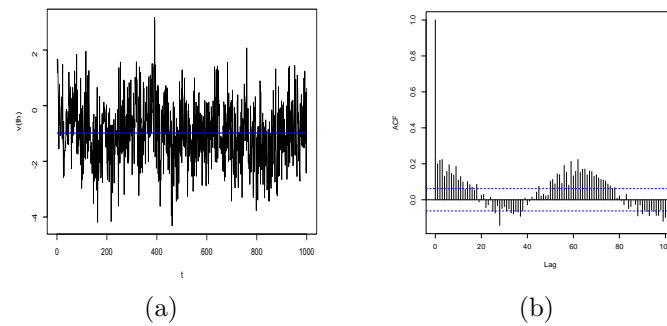
Os resultados serão analisados através da estimativa ( $\hat{a}$ ) em conjunto com seu vício (vício), erro quadrático médio (eqm), desvio padrão (dp) e variância (var).

A seguir, apresentamos as simulações de Monte Carlo para o caso  $n \in \{1000, 2000\}$ ,  $h \in \{0.1, 0.5, 0.8, 1, 3\}$ ,  $a \in \{0.1, 0.4, 0.9\}$  e  $re \in \{100, 500\}$ , onde  $n$  é o tamanho amostral,  $h$  é o tamanho dos intervalos igualmente espaçados e  $a$  é o parâmetro a ser estimado.

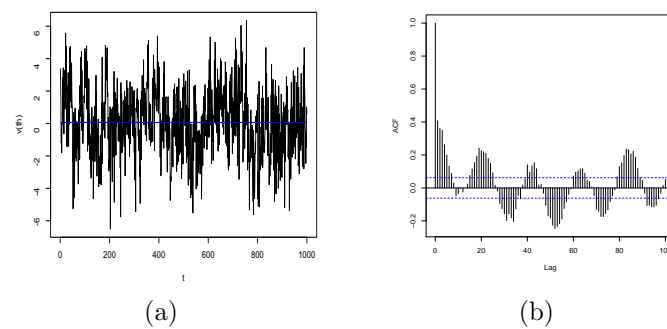




**Figura 6.0.1:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.1$ ,  $n = 1000$  e  $h = 0.8$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



**Figura 6.0.2:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.1$ ,  $n = 1000$  e  $h = 1$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



**Figura 6.0.3:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.1$ ,  $n = 1000$  e  $h = 3$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.

Conforme podemos observar nas Figuras 6.1(a), 6.2(a) e 6.3(a) os dados ao longo do tempo estão em torno de uma média, nestes casos próxima de zero. É perceptível que as séries não possuem tendência. Utilizamos as Figuras 6.1(b), 6.2(b) e 6.3(b) para verificar se há presença de ondas na série que caracteriza a presença de alguma frequência, que neste caso é o valor de  $a$ , o parâmetro de interesse.

**Tabela 6.0.1:** Resultado das estimativas do parâmetro  $a$ , quando  $n = 1000$ ,  $re = 100$ , para diferentes valores de  $h$ .

$a$	$\hat{a}$	$vcio$	$eqm$	$var$	$dp$
$h = 0.1$					
0.1	1.5255	1.4255	203.2129	8.32e-34	2.88e-17
0.4	1.4233	1.0233	104.7064	1.36e-32	1.16e-16
0.9	1.1533	0.2533	6.4166	7.50e-33	8.66e-17
$h = 0.5$					
0.1	0.4675	0.3675	13.5084	2.77e-34	1.66e-17
0.4	0.4857	0.0857	0.7342	3.75e-36	1.94e-18
0.9	0.8979	-0.0021	0.0004	1.78e-33	4.22e-17
$h = 0.8$					
0.1	0.3034	0.2034	4.1388	2.59e-34	1.61e-17
0.4	0.4064	0.0064	0.0041	1.30e-33	3.61e-17
0.9	0.8997	-0.0003	6.93e-06	1.51e-33	3.88e-17
$h = 1$					
0.1	0.2116	0.1116	1.2443	2.25e-34	1.50e-17
0.4	0.4031	0.0031	0.0010	7.88e-35	8.88e-18
0.9	0.9033	0.0033	0.0011	3.86e-33	6.22e-17
$h = 3$					
0.1	0.0983	-0.0017	0.0003	1.77e-37	4.21e-19
0.4	0.3994	-0.0006	4.11e-05	1.36e-34	1.17e-17
0.9	0.9025	0.0025	0.0006	5.44e-34	2.33e-17

**Tabela 6.0.2:** Resultado das Estimativas do Parâmetro  $a$  Utilizando as Funções Periodograma e Periodograma Suavizado, quando  $n = 1000$ ,  $re = 100$ , para diferentes tamanhos de  $h$ .

$a$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$
	$h=0.1$		$h=0.5$		$h=0.9$		$h=1$		$h=3$	
0.1	0.0942	0.1068	0.0503	0.0534	0.0842	0.0944	0.0063	0.1005	0.0471	0.2985
0.4	0.0408	0.0510	0.2011	0.2125	0.3613	0.3651	0.3990	0.4021	1.2001	1.2169
0.9	0.0911	0.0912	0.4492	0.4561	0.8105	0.9048	0.8985	0.9016	1.4169	0.7100

Na Tabela 6.0.1 apresentamos os resultados das estimativas, variando o valor de  $a$  e  $h$ , para valor de  $re$  e  $n$  fixos. Para  $h = 0.1$  obtivemos estimativas não muito boas, independente do valor de  $a$ , ou seja, o processo de estimação é sensível ao valor de  $h$ . Nas estimativas obtidas, é possível observar que foram boas com vício e erro quadrático médio pequenos. Utilizando as funções periodograma e periodograma suavizado, conforme Seção 5.3, obtivemos as estimativas na Tabela 6.0.2. Para valores de  $h$  pequenos ambas as funções não conseguem captar o valor da frequência ( $a$ ), mas quando  $h = 0.9$  e  $h = 1$  obtivemos boas estimativas e o periodograma suavizado apresenta melhor estimativa do que a função periodograma. No entanto quando  $h = 3$  as duas funções não captam o valor verdadeiro de  $a$ .

Neste trabalho aumentamos o tamanho de  $n$  e  $re$  e notamos que não obtivemos melhoras significativas. Os resultados dessa análise, juntamente com as respectivas figuras encontram-se no Apêndice A. No Apêndice B estão as tabelas apresentando essas análises.

Utilizamos dois métodos de estimação o de mínimos quadrados a função periodograma e a periodograma suavizado, ambos com o mesmo objetivo, estimar a frequência do *processo dos cossenos*.

## 7 Aplicação

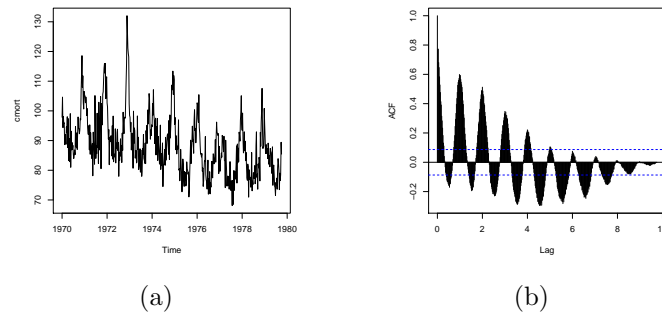
Neste capítulo apresentamos uma aplicação da teoria do processo dos cossenos advindo da solução da equação de Langevin generalizada. Consideramos a série temporal que descreve a mortalidade cardiovascular na cidade de Los Angeles, Califórnia. Esta série temporal foi estudada em Shumway et al. (1988) em conjunto com outras duas séries temporais (temperatura e poluição) com o objetivo de avaliar os possíveis efeitos da temperatura e poluição na mortalidade de residentes e não residentes na cidade de Los Angeles.

Shumway et al. (1988) mostram que os dados podem ser modelados por modelos lineares e não-lineares, usados para investigar possíveis associações entre a mortalidade e outros fatores como poluição e efeitos climáticos na cidade de Los Angeles.

### 7.1 ESTIMAÇÃO DA FREQUÊNCIA

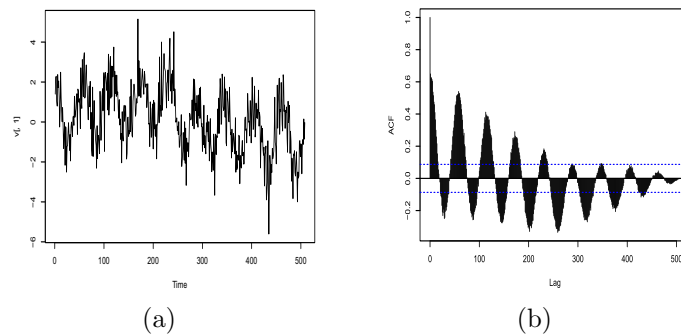
Os dados aqui apresentados se referem ao período de 10 anos, de 1970 a 1979, coletados semanalmente, gerando uma série temporal de 508 observações. No Exemplo 2.2 em Shumway e Stoffer (2006) os autores dizem que o período da série temporal é de 52 unidades. Consequentemente, sua frequência é  $a = \frac{2\pi}{52} \cong 0.1208$ .

A Figura 7.1(a) mostra a forte componente sazonal da série de dados correspondendo à variação inverno-verão do hemisfério norte e ainda uma tendência decrescente na mortalidade cardiovascular ao longo do período de 10 anos.

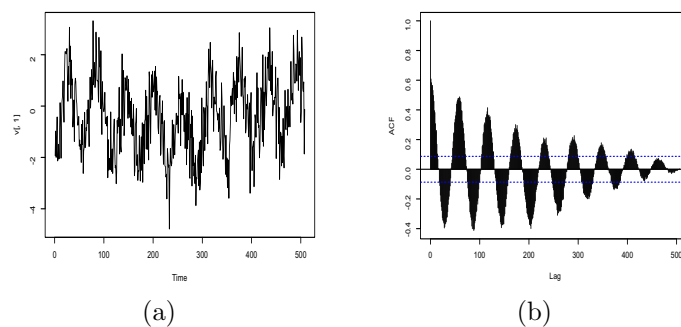


**Figura 7.1.1:** Série Temporal da Mortalidade Cardiovascular em Los Angeles: (a) Série Original; (b) Função de Autocorrelação Amostral.

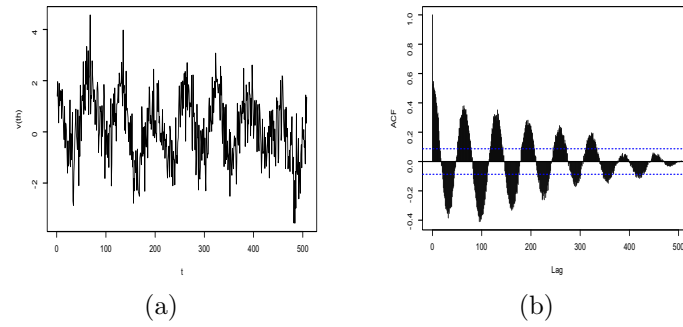
Apresentamos simulações do *processo dos cossenos* dado por (4.1.9) para  $a = \frac{2\pi}{52}$ ,  $n = 508$  e valores de  $h = \{0.80, 0.85, 0.90, 0.95\}$  e  $re \in \{100, 500, 1000\}$ . O objetivo é verificar para qual valor de  $h$  temos  $\hat{a}$  o mais próximo de  $a = \frac{2\pi}{52} \cong 0.1208$ . Os resultados destas simulações se encontram nas Figuras 7.1.2 - 7.1.5 e na Tabela 7.1.1.



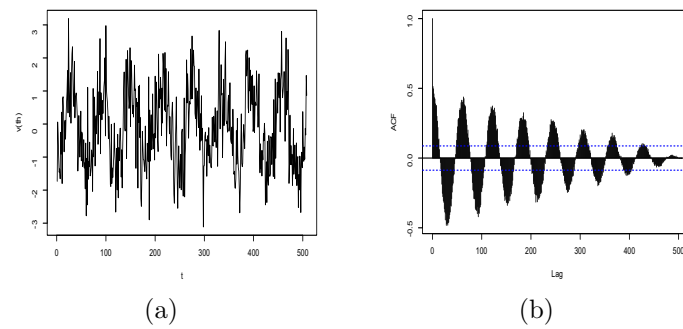
**Figura 7.1.2:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = \frac{2\pi}{52}$ ,  $n = 508$ ,  $m = 1000$  e  $h = 0.9$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



**Figura 7.1.3:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = \frac{2\pi}{52}$ ,  $n = 508$ ,  $m = 1000$  e  $h = 0.95$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



**Figura 7.1.4:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = \frac{2\pi}{52}$ ,  $n = 508$ ,  $m = 1000$  e  $h = 0.8$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



**Figura 7.1.5:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = \frac{2\pi}{52}$ ,  $n = 508$ ,  $m = 1000$  e  $h = 0.85$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.

**Tabela 7.1.1:** Resultado das Estimativas do Parâmetro  $a$ , quando  $a = 0.1208$  e  $n = 508$ , para diferentes valores de  $re$  e de  $h$ .

$h$	$a$	$\hat{a}$	$vício$	$eqm$	$var$	$dp$
re = 100						
0.80	0.1208	0.3567	0.2359	5.5647	4.45e-34	2.11e-17
0.85	0.1208	0.2312	0.1104	1.2178	1.02e-35	3.19e-18
0.90	0.1208	0.2094	0.0885	0.7839	7.87e-38	2.81e-19
0.95	0.1208	0.2576	0.1368	1.8719	1.29e-34	1.14e-17
re = 500						
0.80	0.1208	0.2629	0.1421	10.0988	4.57e-34	2.14e-17
0.85	0.1208	0.2609	0.1401	9.8095	3.33e-36	1.82e-18
0.90	0.1208	<b>0.1670</b>	<b>0.0462</b>	<b>1.0655</b>	<b>4.82e-34</b>	<b>2.20e-17</b>
0.95	0.1208	0.2301	0.1093	5.9706	1.01e-36	1.01e-18
re = 1000						
0.80	0.1208	0.3535	0.2327	54.1281	2.06e-33	4.54e-17
0.85	0.1208	0.3074	0.1865	34.7929	1.49e-34	1.22e-17
0.90	0.1208	0.2987	0.1779	31.6322	4.59e-34	2.14e-17
0.95	0.1208	0.3133	0.1924	37.0253	1.01e-34	1.00e-17

**Tabela 7.1.2:** Resultado das Estimativas do Parâmetro  $a$  Utilizando as Funções Periodograma e Periodograma Suavizado quando  $n = 508$ , e  $h \in \{0.80, 0.85, 0.90, 0.95\}$ .

$h$	$a$	$\hat{a}_{I_1}$	$\hat{a}_{I_2}$
Série Original			
-	0.1208	0.1137	<b>0.1205</b>
Série Temporal Simulada			
0.80	0.1208	0.0989	0.1051
0.85	0.1208	0.1051	0.1051
0.90	0.1208	<b>0.1175</b>	<b>0.1175</b>
0.95	0.1208	0.1113	0.1105

Conforme os resultados apresentados nas Figuras 7.1.2 - 7.1.5 a que melhor descreve a trajetória da série de mortalidade cardiovascular de Los Angeles dada na Figura 7.1.1 (a) é a série temporal considerando os parâmetros como na Figura 7.1.2, além disso as funções de autocorrelação, Figuras 7.1.1 (b) e 7.1.2 (b), apresentam comportamento semelhante em relação as ondas senoidais da série temporal original. A Tabela 7.1.1 foi construída considerando os estimadores propostos no Capítulo 5. Analisando os resultados, a parametrização que melhor estima o valor de  $a$  é obtida quando  $h = 0.9$ , com menor *vício*, *eqm*, *var* e *dp*. Neste caso, quando  $\hat{a} = 0.1670$  ainda temos *vício* grande. A Tabela 7.1.2 foi construída com estimativas da frequência utilizando as funções periodograma e periodograma suavizado conforme expressões (5.3.12) e (5.3.13), respectivamente. Com base nos resultados obtidos observamos que a estimação da frequência pela função periodograma suavizado é superior aquela obtida pela função periodograma, quando  $h = 0.90$ . Neste caso obtivemos as mesmas estimativas para ambas as funções.

## 7.2 PREVISÃO

Nesta seção apresentamos a equação de previsão para o *processo dos cossenos*. O objetivo é prever  $p$ -passos à frente para o *processo dos cossenos*. Apresentamos quatro medidas para avaliar o erro de previsão, ou seja, para medirmos o quanto estamos errando. Esses resultados são apresentados graficamente e pontualmente.

Considerando o processo (4.1.9), as equações de previsão para  $p = rh$  passos à frente são dadas por

$$V(\widehat{t+h+p}) = \cos(\hat{a}h)V(t+h) - V_0 \text{sen}(\hat{a}h) \text{sen}(\hat{a}t), \quad \text{para } r = 1 \quad (7.2.1)$$

e

$$V(\widehat{t+h+p}) = \cos(\hat{a}h)V(\widehat{t+h+p}) - V_0 \text{sen}(\hat{a}h) \text{sen}(\hat{a}t), \quad \text{para } r \geq 2. \quad (7.2.2)$$

Após obter as estimativas das previsões, analisamos o *erro de previsão*, dado por

$$e_t(p) = V(t+h) - V(\widehat{t+h+p}) \quad (7.2.3)$$

onde  $V(t)$  é o valor da série original correspondente a previsão realizada definida por  $V(t + h + p)$ . Para avaliar o *erro de previsão* analisamos a *porcentagem média do erro* ( $MPE$ ) conhecida como medida de vício de previsão, e dada por

$$MPE = \left( \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p \frac{e_t(p)}{V(t)} \right) 100\%$$

onde  $p$  é o número de passos a serem preditos. Temos a *raiz do erro quadrático médio* ( $RMSE$ ) dada por

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{t=1}^p [e_t(p)]^2},$$

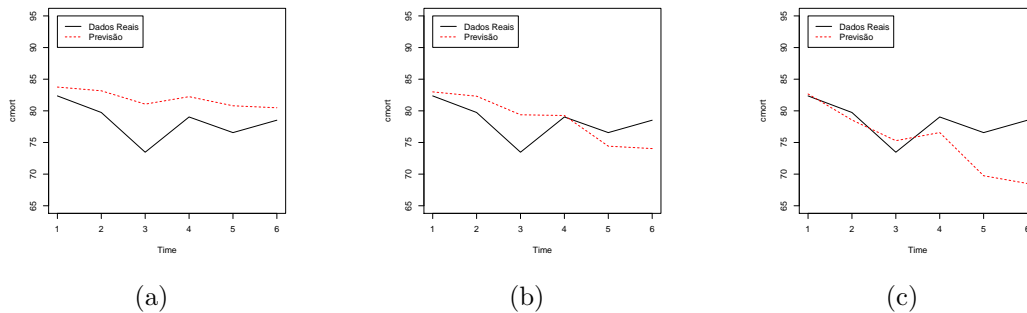
o *erro médio absoluto* ( $MAE$ ) que é dado por

$$MAE = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p |e_t(p)|.$$

E a *porcentagem média do erro absoluto* ( $MAPE$ ) que é dada por

$$MAPE = \left( \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p \left| \frac{e_t(p)}{V(t)} \right| \right) 100\%.$$

A seguir apresentamos a previsão para a série da mortalidade cardiovascular em Los Angeles, considerando  $p = 6$ , ou seja, 6 passos à frente. Simulando o *processo dos cossenos* considerando  $a = \frac{2\pi}{52}$ ,  $h = 0.9$ ,  $n = 508$ ,  $m = 1000$  e  $re \in \{100, 500, 1000\}$ , obtivemos a estimativa de  $a$  dada  $\hat{a} \approx 0.2094, 0.1670$  e  $0.2987$ , respectivamente.



**Figura 7.2.6:** Série da Mortalidade Cardiovascular em Los Angeles e sua Previsão para 6 passos à frente: (a) Simulação quando  $\hat{a} = 0.2094$ ; (b) Simulação quando  $\hat{a} = 0.1670$ ; (c) Simulação quando  $\hat{a} = 0.2987$ .

Os resultados apresentados na Figura 7.2.6 foram satisfatórios, pois considerando o *processo dos cossenos* como um AR(1) a função de previsão só depende da última observação da série temporal em estudo, e nesta aplicação obtivemos boa previsão



para os 6 passos. Comparando as três figuras, a que aparentemente nos apresenta melhor estimativa é a Figura 7.2.6 (b), pois a linha da previsão está bem próxima a dos dados reais. Já a Figura 7.2.6 (c) tem boas estimativas apenas até o 4 passo, à frente, após possui erro muito grande.

**Tabela 7.2.3:** Resultado das Estimativas de Previsão e do Erro de Previsão Referente aos valores (a)  $\hat{a} = 0.2094$ ; (b)  $\hat{a} = 0.1670$ ; (c)  $\hat{a} = 0.2987$ .

$p$	<i>Real</i>	<i>Predito(a)</i>	<i>EP(a)</i>	<i>Predito(b)</i>	<i>EP(b)</i>	<i>Predito(c)</i>	<i>EP(c)</i>
1	83.91	83.76	0.1522	82.57	1.3449	82.67	1.2416
2	82.36	83.17	-0.8079	82.15	0.2094	78.56	3.8048
3	79.74	81.06	-1.3218	77.59	2.1522	75.29	4.4542
4	73.46	82.24	-8.7807	80.11	-6.6507	76.57	-3.1074
5	79.03	80.80	-1.7688	76.24	2.7921	69.74	9.2859
6	76.56	80.48	-3.9244	75.13	1.4253	68.52	8.0427

A Tabela 7.2.3 apresenta o resultado das estimativas de previsão e seus respectivos erros de previsão (EP) para cada um dos valores de  $\hat{a} \in \{0.2094, 0.1670, 0.2987\}$ , onde  $EP$  é a diferença entre o valor da série no tempo  $t$  subtraído do valor predito.

**Tabela 7.2.4:** Resultado das Estimativas do Parâmetro  $a$ , quando  $n = 508$ ,  $re = 500$  e  $\hat{a} \in \{0.2094, 0.1670, 0.2987\}$ .

$\hat{a}$	<i>MPE(%)</i>	<i>RMSE</i>	<i>MAE</i>	<i>MAPE(%)</i>
0.2094	<b>-2.7218</b>	3.5010	2.0945	2.7671
0.1670	0.1122	<b>2.7510</b>	<b>1.8218</b>	<b>2.3755</b>
0.2987	3.7138	4.9551	3.7421	4.7713

Analisando os resultados apresentados na Tabela 7.2.4, quando  $re = 500$  e  $\hat{a} = 0.1670$  temos os menores erros de previsão, para as três últimas medidas analisadas.

## Conclusões

Apresentamos neste trabalho, algumas das propriedades das distribuições estáveis, bem como os processos de Lévy e movimento Browniano (ver Capítulo 2), fundamentais para o entendimento e caracterização dos processos advindos da solução da equação de Langevin.

No Capítulo 3 apresentamos a equação de Langevin e suas derivações, com ruído Browniano. No Capítulo 4 apresentamos o processo estocástico geral, advindo da solução da equação de Langevin generalizada. No Capítulo 5 apresentamos os principais estimadores para a frequência vinculada ao processo estocástico dos cossenos. Na Seção 5.1 apresentamos o estimador de mínimos quadrados como sendo o primeiro passo para a estimação da frequência do processo. Em seguida, na Seção 5.2, apresentamos o estimador obtido por uma transformação trigonométrica como sendo o segundo passo para a estimação do parâmetro de interesse. Na Seção 5.3 apresentamos as funções periodograma e periodograma suavizado, que também foram utilizadas para estimar a frequência do processo.

Nas simulações apresentadas no Capítulo 6 obtivemos ótimos resultados. Utilizando o movimento Browniano, o processo descrito na equação (4.1.9) tem um comportamento sazonal, observado graficamente, com exceção de quando o valor de  $h$  é grande, não conseguindo captar o valor de  $a$  com as funções periodograma e periodograma suavizado, nos levando a conclusão que o processo é sensível ao tamanho do passo  $h$ . Já para as estimativas de  $a$  obtivemos bons resultados até mesmo para valores de  $h$  grandes ( $h = 1$ ).

No Capítulo 7, realizamos uma aplicação do processo dos cossenos em dados reais. A série temporal estudada representa a mortalidade cardiovascular média semanal da cidade de Los Angeles, Califórnia, no período de 1970 a 1979. Considerando alguns parâmetros, conseguimos descrever a trajetória da série temporal através de simulações, bem como estimar sua frequência (ver Capítulo 7). Além disso, realizamos a previsão para 6 passos à frente e obtivemos bons resultados, conforme análise de quatro diferentes medidas do erro de previsão (ver Tabela 7.2.4).

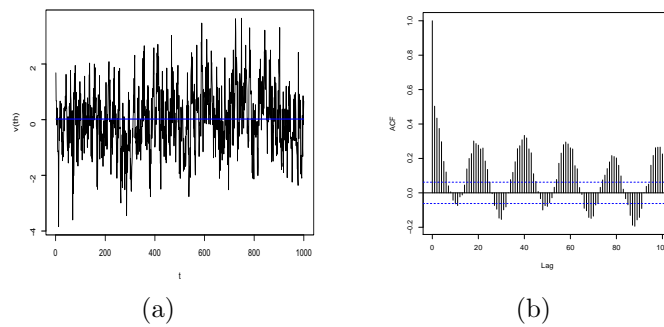
Para trabalho futuro pretendemos estudar a estimação do processo dos cossenos através do método da máxima verossimilhança. A partir desta estimativa, obter a previsão do processo para  $p$  passos à frente.

## Referências

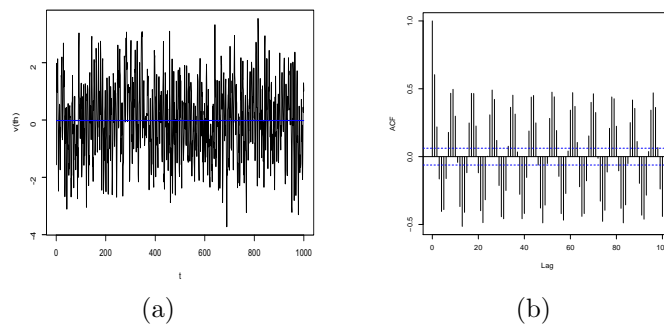
- Applebaum, D. (2004). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. New York: Cambridge.
- Barndorff-Nielsen, O.E. e Shephard, N. (2000). “Modelling by Lévy Process for Financial Econometrics”. Em Barndorff-Nielsen, O.E., Mikosch, T. e Resnick, S. (eds.): *Lévy Process: Theory and Application*. New York: Birkhauser.
- Brockwell, P.J. e Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Gnedenko, B.V. e Kolmogorov, A.N. (1954). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Cambridge: Addison-Wesley.
- Karlin, S. e Taylor, H.M. (1975). *A First Course in Stochastic Process*. London: Academic Press.
- Langevin, P. (1908). “On the Theory of Brownian Motion (Sur la théorie du mouvement brownien)”. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **146**, 530-533.
- Medino, A.V. (2005). “Índice de Difusão Anômala, Processos de Lévy e Equação de Langevin Generalizada”. *Tese de Doutorado*. Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da UnB, Brasília.
- Medino, A.V., Lopes, S.R.C., Morgado, R. e Dorea, C.C.Y. (2012). “Generalized Langevin equation driven by Lévy processes: A probabilistic, numerical and time series based approach”. *Physica A*, **391**, 572-581.
- Nolan, J.P. (2015). *Stable Distributions-Models for Heavy Tailed Data*. Boston: Birkhäuser. In progress, Chapter 1 online at [academic2.american.edu/~jpnolan](http://academic2.american.edu/~jpnolan).
- Onalan, O. (2010). “Fractional Ornstein-Uhlenbeck Process Driven by Stable Lévy Motion in Finance”. *International Research Journal of Finance and Economics*, **42**, 129-138.
- Pinto, D.R. (2010). “Estimação em Processos Advindos da Solução da Equação de Langevin”. *Dissertação de Mestrado*. Programa de Pós-Graduação em Probabilidade e Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Samorodnitsky, G. e Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. New York: Chapman & Hall.
- Shumway, R.H. e Stoffer, D.S. (2006). *Time Series Analysis and Its Applications With R Examples*. 2ª edição. New York: Springer.
- Shumway, R.H., Azari, R.S. e Pawitan, Y. (1988). “Modeling mortality fluctuations in Los Angeles as functions of pollution and weather effects”. *Environmental Research*, **45**, 224-241.
- Stein, J., Lopes, S.R.C. e Medino, A.V. (2014). “Estimation in Ornstein-Uhlenbeck processes driven by  $\alpha$ -stable motions”. Submetido.
- Stein, J. (2016). “Estimação e Previsão em Processos Estocásticos Advindos da Equação de Langevin”. *Tese de Doutorado*. Programa de Pós-Graduação em Probabilidade e Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

## Apêndice A Figuras

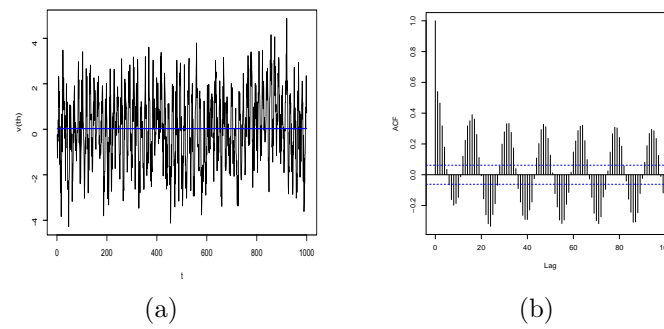
Neste apêndice apresentamos resultados gráficos da série para identificar algum tipo de tendência. Utilizamos a função de autocorrelação para verificar a presença de ondas do processo, variando o valor de  $a$ , com o objetivo de complementar os resultados do Capítulo 6.



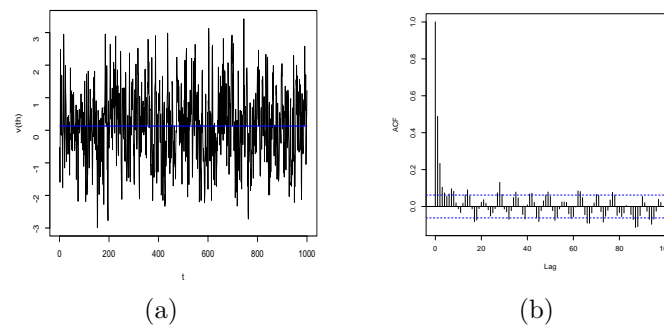
**Figura A.0.1:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.4$ ,  $n = 1000$  e  $h = 0.8$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



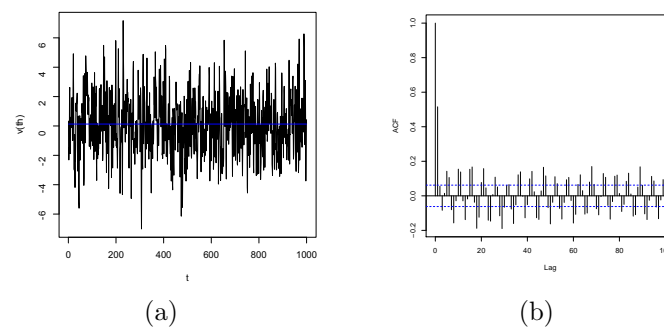
**Figura A.0.2:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.9$ ,  $n = 1000$  e  $h = 0.8$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



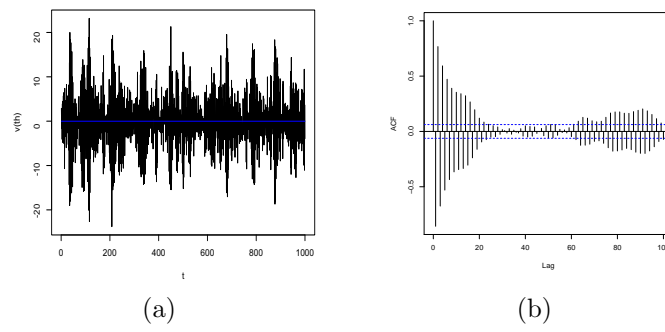
**Figura A.0.3:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.4$ ,  $n = 1000$  e  $h = 1$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



**Figura A.0.4:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.9$ ,  $n = 1000$  e  $h = 1$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



**Figura A.0.5:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.4$ ,  $n = 1000$  e  $h = 3$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.



**Figura A.0.6:** Geração do Processo (4.1.9) para  $a = 0.9$ ,  $n = 1000$  e  $h = 3$ : (a) Série Temporal Simulada; (b) Função de Autocorrelação Amostral.

## Apêndice B Tabelas

Neste apêndice apresentamos resultados das estimativas variando os valores de  $re, n, a$  e  $h$ , complementando os resultados do Capítulo 6.

Conforme as Tabelas B.0.1, B.0.2 e B.0.3 os melhores resultados ocorrem para  $h \in \{1, 3\}$ .

**Tabela B.0.1:** Resultado das Estimativas do Parâmetro  $a$ , quando  $n = 1000$ ,  $re = 500$ , para diferentes valores de  $h$ .

$a$	$\hat{a}$	$vício$	$eqm$	$var$	$dp$
$h = 0.1$					
0.1	0.9179	0.8179	334.5007	1.11e-33	3.33e-17
0.4	1.7304	1.3304	885.0452	2.87e-32	1.69e-16
0.9	0.8855	-0.0145	0.1053	6.40e-34	2.53e-17
$h = 0.5$					
0.1	0.3807	0.2807	39.3999	2.93e-36	1.71e-01
0.4	0.3913	-0.0087	0.0379	9.04e-34	3.01e-17
0.9	0.8997	-0.0003	3.28e-05	2.28e-34	1.51e-17
$h = 0.8$					
0.1	0.2462	0.1462	10.6843	7.26e-35	8.52e-18
0.4	0.3942	-0.0058	0.0170	9.13e-35	9.55e-18
0.9	0.9007	0.0007	0.0002	4.43e-35	6.66e-18
$h = 1$					
0.1	0.2046	0.1046	5.4677	1.67e-35	4.08e-18
0.4	0.4006	0.0006	0.0002	1.49e-34	1.22e-17
0.9	0.9005	0.0005	0.0001	2.41e-36	1.55e-18
$h = 3$					
0.1	0.0982	-0.0018	0.0016	2.56e-35	5.06e-18
0.4	0.3997	-0.0003	5.04e-05	1.84e-33	4.29e-17
0.9	0.8999	-0.0001	6.46e-06	3.16e-36	1.78e-18

**Tabela B.0.2:** Resultado das Estimativas do Parâmetro  $a$ , quando  $n = 2000$ ,  $re = 100$ , para diferentes valores de  $h$ .

$a$	$\hat{a}$	$vício$	$eqm$	$var$	$dp$
$h = 0.1$					
0.1	1.4677	1.3677	187.0687	1.21e-36	1.10e-18
0.4	1.8496	1.4496	210.1412	5.23e-33	7.23e-17
0.9	0.9579	0.0579	0.3351	3.86e-33	6.22e-17
$h = 0.5$					
0.1	0.3467	0.2467	6.0871	1.20e-33	3.47e-17
0.4	0.4385	0.0385	0.1480	8.49e-34	2.91e-17
0.9	0.9070	0.0070	0.0049	4.45e-34	2.11e-17
$h = 0.8$					
0.1	0.2642	0.1642	2.6959	2.76e-35	5.25e-18
0.4	0.3892	-0.0108	0.0116	1.92e-36	1.39e-18
0.9	0.9057	0.0057	0.0033	3.59e-33	5.99e-17
$h = 1$					
0.1	0.1784	0.0784	0.6144	1.85e-34	1.36e-17
0.4	0.4084	0.0084	0.0070	7.70e-34	2.78e-17
0.9	0.9017	0.0017	0.0003	1.49e-34	1.22e-17
$h = 3$					
0.1	0.0994	-0.0006	3.03e-05	3.51e-36	1.87e-18
0.4	0.3980	-0.0020	0.0004	1.78e-34	1.33e-17
0.9	0.8997	-0.0003	1.06e-05	7.10e-34	2.66e-17

**Tabela B.0.3:** Resultado das Estimativas do Parâmetro  $a$ , quando  $n = 2000$ ,  $re = 500$ , para diferentes valores de  $h$ .

$a$	$\hat{a}$	$vício$	$eqm$	$var$	$dp$
$h = 0.1$					
0.1	0.8280	0.7280	264.9814	1.59e-33	3.98e-17
0.4	0.8009	0.4009	80.3720	4.16e-33	6.45e-17
0.9	1.6664	0.7664	293.6703	2.73e-33	5.23e-17
$h = 0.5$					
0.1	0.3487	0.2487	30.9275	2.98e-34	1.73e-17
0.4	0.4124	0.0124	0.0770	1.16e-35	3.40e-18
0.9	0.8967	-0.0033	0.0053	1.87e-33	4.33e-17
$h = 0.8$					
0.1	0.1843	0.0843	3.5572	1.85e-35	4.30e-18
0.4	0.3993	-0.0007	0.0002	4.01e-35	6.33e-18
0.9	0.8996	-0.0004	0.0001	1.78e-33	4.22e-17
$h = 1$					
0.1	0.1895	0.0895	4.0038	2.57e-34	1.60e-17
0.4	0.4013	0.0013	0.0008	3.23e-34	1.80e-17
0.9	0.9002	0.0002	1.18e-05	2.32e-33	4.82e-17
$h = 3$					
0.1	0.0992	-0.0008	0.0003	1.32e-35	3.64e-18
0.4	0.4001	0.0001	5.94e-06	6.63e-34	2.58e-17
0.9	0.9003	0.0003	3.84e-05	5.23e-34	2.29e-17



**Tabela B.0.4:** Resultado das Estimativas do Parâmetro  $a$  Utilizando as Funções Periodograma e Periodograma Suavizado, quando  $n = 2000$ , para diferentes valores de  $h$ .

a	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$	$I_1(\cdot)$	$I_2(\cdot)$
	$h=0.1$		$h=0.5$		$h=0.9$		$h=1$		$h=3$	
0.1	0.0094	0.0094	0.0503	0.0031	0.0031	0.0895	0.1005	0.1005	0.0456	0.0110
0.4	0.0393	0.0393	0.1995	0.1995	0.3412	0.3597	0.4006	0.4006	1.2001	1.2001
0.9	0.0895	0.0895	0.4508	0.4508	0.8090	0.8105	0.9001	0.9001	0.3173	0.7540

Conforme a Tabela B.0.4, os melhores resultados são obtidos quando  $h = 1$ .