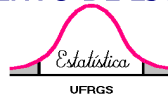




UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA



MODELO DE MISTURA DE DISTRIBUIÇÕES INDEPENDENTE

ANELI TORRES VENTURINI

ORIENTADOR: PROFESSOR DR. CLEBER BISOGNIN

Porto Alegre, 06 de Dezembro de 2013.

ANELI TORRES VENTURINI

MODELO DE MISTURA DE DISTRIBUIÇÕES INDEPENDENTE

Trabalho de Curso submetido à Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Bacharel em Estatística.

Professor Orientador:

Dr. Cleber Bisognin

Banca Examinadora:

Dr. Cleber Bisognin – DEst - PPGMAT (UFRGS)

Dr. Marcio Valk – DEst - PPGMAT (UFRGS)

Data da Defesa: 13 de dezembro de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram no decorrer desta jornada, em especial:

A minha família que sempre me apoiou nos estudos e nas escolhas tomadas.

Ao Leonardo por sempre me incentivar e me compreender nos momentos difíceis.

A todos os professores pelos ensinamentos, em especial ao orientador Prof. Dr. Cleber Bisognin pelo incentivo e pelo papel fundamental na elaboração deste trabalho.

Aos meus colegas, em especial a Thaís Neves pelo companheirismo e disponibilidade para me auxiliar em vários momentos.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os Modelos de Mistura de Distribuições Independente. Estimação dos parâmetros pelo método da máxima verossimilhança e do algoritmo *Expectation Maximization* (EM). Além disso, realizamos estudos de Simulações de Monte Carlo utilizando as distribuições Poisson, Normal e Gama.

ABSTRACT

This paper presents the Independent Mixture Models Distributions. Estimate the parameters of these models from the maximum likelihood and the Expectation Maximization (EM) algorithm method. Furthermore, studies conducted Monte Carlo simulations using the Poisson, Normal and Gamma distributions.

Conteúdo

1. Introdução.....	1
2. Modelo de Mistura de Distribuições Independente	3
2.1 Definições e Notações.....	4
2.2 Identificabilidade.....	6
2.3 Alguns Exemplos de Misturas Finitas	7
2.3.1 Mistura de Densidades Normais	7
2.3.2 Mistura de Densidades Gama	8
2.3.3 Mistura de Distribuições Poisson	9
3. Estimação para Modelos de Mistura de Distribuições Independentes.....	10
3.1 Estimadores de Máxima Verossimilhança	10
3.1.1. Matriz de Informação.....	14
3.1.2. Matriz de Covariância Assintótica dos Estimadores de Máxima Verossimilhança	14
3.2 Algoritmo EM (Expectation Maximization)	15
3.2.1 O Algoritmo EM para Modelos de Mistura	15
4. Um Estudo via Simulações de Monte Carlo.....	17
4.1 Simulações via Estimador de Máxima Verossimilhança para Distribuição Poisson.....	17
4.2 Simulações via Estimador de Máxima Verossimilhança para Distribuição Poisson.....	20
4.3 Simulações via Algoritmo EM para Distribuição Normal	24
4.4 Simulações via Algoritmo EM para Distribuição Gama	29
5. Conclusões	35
Bibliografia.....	37
Apêndice A.....	38
A.1 Estimação dos Parâmetros dos Modelos de Mistura da Distribuição Poisson pelo Método da Máxima Verossimilhança	38
A.2 Estimação dos Parâmetros dos Modelos de Mistura da Distribuição Normal pelo Método da Máxima Verossimilhança	41
A.3 Estimação dos Parâmetros dos Modelos de Mistura da Distribuição Normal pelo Método do Algoritmo EM	49

A.4 Estimação dos Parâmetros do Modelo de Mistura da Distribuição Gama pelo Método do Algoritmo EM	57
--	----

Capítulo 1

Introdução

O conceito de Modelo de Mistura de Distribuições Independente surge como uma alternativa de solucionar o problema da grande disparidade que pode ocorrer, em muitos casos, entre a variância amostral e a variância do modelo (variância teórica) quando adequamos um modelo estatístico a um conjunto de dados amostrais partindo do pressuposto de que tal sequência seja proveniente de uma única distribuição. Esse problema pode ser solucionado partindo da hipótese de que existam subpopulações dentro de uma população geral, conseguindo assim, diminuir consideravelmente a superdispersão. Neste trabalho abordaremos o caso finito, ou seja, cada uma dessas subpopulações é representada por uma quantidade finita de distribuições componentes. A independência do modelo vem da independência das variáveis aleatórias em relação às distribuições componentes as quais estão associadas, essa relação pode ser indicada pela função de autocorrelação amostral. Caso as variáveis aleatórias forem consideradas dependentes entre si, então teríamos um caso de Modelo de Mistura de Distribuições Dependentes, porém neste trabalho abordaremos somente os casos de modelos independentes, especificamente as distribuições componentes do tipo Poisson, Normal e Gama.

Neste trabalho, abordaremos os Modelos de Mistura de Distribuições no caso finito, ou seja, aqueles que consistem em uma finita combinação linear de funções densidades (ou massa) de probabilidade, onde, para cada uma dessas funções, há um parâmetro a ser estimado. A estimação dos parâmetros das distribuições e das probabilidades de mistura será feita neste trabalho através do método de máxima verossimilhança e do algoritmo EM utilizando o *software* R.

Para as propriedades de um estimador de máxima verossimilhança para um Modelo de Mistura podemos dizer que ele é fortemente consistente se o estimador do parâmetro existe como um maximizador global da verossimilhança para uma distribuição de mistura. Para a estimação feita pelo método de máxima verossimilhança, utilizamos as distribuições Poisson e Normal.

O algoritmo EM surge como opção quando precisamos lidar com a falta de dados ou com problemas de densidades de misturas. Ele estima parâmetros que

sejam os mais consistentes com os dados da amostra no sentido de maximizar a função de verossimilhança. Essa estimação será aplicada nesse trabalho utilizando as distribuições Normal e Gama.

As misturas de distribuições são extremamente eficazes na análise de dados por permitirem uma série de combinações de achatamento, assimetria e multimodalidade.

Silva (2013) comenta que alguns autores realizaram aplicações de modelos de distribuições independentes normais como modelos para *outliers*, estudam a decomposição dos modelos utilizando o método do momentos e aplicam os modelos de mistura em dados de economia, pesca, medicina, botânica, entre outros. O próprio autor utiliza os modelos de mistura para estudar a velocidade de ventos e a vazão do curso d'água dos rios de Piracicaba/SP.

Felgueiras (2009) descreve em seu trabalho, um exemplo no uso do modelo de mistura para o processamento de imagem. Podemos também citar a aplicação do modelo de misturas na modelagem do tráfego na internet e na previsão dos seus picos e falhas, nesse caso normalmente com misturas de distribuições exponenciais

Recentemente, autores aplicam os modelos de mistura de distribuição independentes nas mais diversas áreas, como medicina, economia, informática, etc. Isso porque o avanço tecnológico permite um interesse maior para questões de estimação.

No Capítulo 2, apresentaremos inicialmente o estudo sobre os Modelos de Mistura de Distribuições Independentes, mostrando suas definições e notações. A maior parte da primeira seção do Capítulo 2 tem como base teórica referências de Vargas (2011) para as definições.

No Capítulo 3 apresentaremos dois métodos de estimação para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente: o método da máxima verossimilhança e o algoritmo EM.

Já no Capítulo 4, realizaremos um estudo com simulações para obter as estimativas dos parâmetros pelos dois métodos anteriormente vistos, sendo que utilizamos a distribuição Poisson para o método da máxima verossimilhança, a distribuição Normal para ambos os métodos e a distribuição Gama para o método do algoritmo EM. Para a obtenção das estimativas utilizamos o ambiente R.

Capítulo 2

Modelo de Mistura de Distribuições Independente

A motivação para o uso dos Modelos de Mistura ocorre na pressuposição da existência de subpopulações dentro de uma população geral, pois assim, minimizamos a disparidade que ocorre, em muitos casos, entre a variância teórica (calculada a partir do modelo) e a variância amostral (calculada a partir da sequência amostral) quando se supõe que um conjunto de dados amostrais é proveniente de uma única população. Portanto, por ser um método de fácil modelagem, os Modelos de Mistura se tornaram úteis nos casos de heterogeneidade populacional.

Em McLachlan e Peel (2000) tem-se que a história dos Modelos de Mistura vem desde 1894, quando Pearson baseou-se seus estudos em misturas de duas distribuições normais multivariadas.

Vargas (2011) comenta que a primeira referência à mistura de populações baseava-se na variação dos preços de determinados produtos ou serviços durante o ano, em que eram considerados discriminadamente os gastos médios de uma população em determinados produtos ou serviços.

Falkner (1892) baseava-se no cálculo separado, a partir da variação de preços de produtos ou serviços, de diversas médias (média entre o maior e menor valor, média de preços diários, média dos preços na abertura de cada trimestre,...) porém, não considerava a diferença entre o poder aquisitivo de cada indivíduo. Holmes (1892), considerou que a simples comparação entre média de preço de produtos ou serviços era inadequada, uma vez que deveria ser considerada a disparidade de riqueza entre as pessoas, introduzindo assim o Conceito de Mistura de Populações. (VARGAS, 2011, p.23 – 24)

Atualmente, os Modelos de Mistura podem ser encontrados aplicados em diversas áreas da estatística, como, por exemplo, na área de multivariada, em métodos não-paramétricos, dados categóricos, entre outras.

Para Bergot (2006), os Modelos de Mistura vem recebendo cada vez mais atenção por se tratar de um método extremamente flexível de modelagem, sendo muito útil tanto do ponto de vista prático como teórico.

Neste capítulo, serão introduzidas algumas definições dos Modelos de Mistura. Em seguida, os modelos serão tratados sob o ponto de vista de sua identificabilidade e serão apresentados alguns exemplos de misturas de densidades, entre elas, *Normal*, *Poisson* e *Gama*, que serão estudadas nesse trabalho.

2.1 Definições e Notações

Zuchini e Macdonald (2009), define o Modelo de Mistura de Distribuições Independente como uma composição de m distribuições componentes, sendo $m \in \mathbb{N}$ um número finito, em que, para cada uma dessas distribuições associamos uma probabilidade de mistura, denotada aqui por δ_i , onde $0 < \delta_i < 1, 1 \leq i \leq m$ e $\sum_{i=1}^m \delta_i = 1$. A seguir, serão apresentadas algumas definições e proposições formais dos modelos de mistura de distribuição independente. As proposições estão demonstradas em Vargas (2011).

Definição 2.1. A variável aleatória X satisfaz o Modelo de Mistura de Distribuições Independente se a sua função densidade (ou massa) de probabilidade satisfaz a equação

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^m \delta_i f_i(x), \quad (2.1)$$

onde $f_1(x), \dots, f_m(x)$ são as funções densidade (ou massa) de probabilidade, δ_i suas respectivas probabilidades de mistura, $0 \leq \delta_i \leq 1, i = 1, \dots, m$ e m é o número de distribuições envolvidas no modelo.

A Proposição 2.1 a seguir, mostra que a função $f_X(x)$, dada pela equação (2.1) satisfaz as condições para uma função de densidade (ou massa) de probabilidade.

Proposição 2.1. O Modelo de Mistura de Distribuições Independente, ver Definição 2.1, satisfaz as condições de função de densidade (ou massa) de probabilidade.

A Proposição 2.2 a seguir apresenta o valor esperado da variável aleatória X com função densidade (ou massa) de probabilidade dada na equação (2.1).

Proposição 2.2. O valor esperado da variável aleatória X , que segue um Modelo de Mistura de Distribuições Independente, ver Definição 2.1, é dado por

$$E(X) = \sum_{i=1}^m \delta_i E(Y_i), \quad (2.2)$$

onde Y_1, \dots, Y_m são variáveis aleatórias independentes, todas contínuas (ou discretas) definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

A Proposição 2.3 a seguir apresenta o k -ésimo momento da variável aleatória X com função densidade (ou massa) de probabilidade dada na equação (2.1).

Proposição 2.3. Considere uma variável aleatória X satisfazendo as condições de um modelo de mistura de distribuições independentes (Ver Definição 2.1). Considere também que $E|Y_i^k| < \infty$, onde $k \in \mathbb{N}^*$ fixo, sendo $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. Portanto o k -ésimo momento da variável aleatória X , denotado por $E(X^k)$, é dado por

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^m \delta_i E(Y_i^k). \quad (2.3)$$

A Proposição 2.4 a seguir apresenta a variância da variável aleatória X com função densidade (ou massa) de probabilidade dada na equação (2.1).

Proposição 2.4. A variância da variável aleatória X , que segue o Modelo de Mistura de Distribuições Independente, ver Definição 2.1, é dada por

$$Var(X) = \sum_{i=1}^m \delta_i Var(Y_i) + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=j+1}^m \delta_j \delta_i (EY_j - EY_i)^2, \quad (2.4)$$

onde $m \geq 2$ finito.

Na Seção 2.2 a seguir, apresentamos as condições de identificabilidade para os Modelos de Mistura de Distribuições Independentes.

2.2 Identificabilidade

A identificabilidade do modelo serve para garantir que seus parâmetros sejam estimados de maneira única, ou seja, garante que teremos apenas um conjunto de estimativas para uma amostra selecionada. Se o vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ conter valores distintos que determinam valores também distintos para uma família paramétrica \mathcal{F} , cuja função densidade (ou massa) de probabilidade é dada por $f(\cdot; \theta)$, então o modelo satisfaz as condições de identificabilidade.

Definição 2.2. Seja uma família paramétrica \mathcal{F} tal que $\mathcal{F} = \{f(x_i; \theta) : x_i \in \mathbb{R}^p\}$. $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ é identificável se para diferentes valores de θ , as funções de densidades (ou massas) de probabilidade $f(\cdot; \theta)$ também forem distintas.

Basso (2009) traz um exemplo de uma mistura de duas densidades normais e de variâncias unitárias, que, por ser uma família de misturas finitas de densidades, exige uma definição mais específica. Assim temos que

$$f(x_i; \theta) = \frac{\delta_1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_i - \mu_1)^2\right] + \frac{\delta_2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_i - \mu_2)^2\right] \quad (2.6)$$

será identificável e, nesse caso também permutável, se, fixando os parâmetros da equação (2.6), houver permutabilidade nos índices $\Theta = (\theta_1; \theta_2)$, $\theta_i = (\delta_i; \mu_i)$,

$i = 1, 2$, e a sua função densidade (ou massa) de probabilidade $f(\cdot; \Theta)$ permanecer com os mesmos valores para cada $x \in \mathbb{R}$.

Neste trabalho estudaremos componentes de misturas pertencentes à mesma família e, nesse caso, as densidades das famílias serão constantes para as $m!$ permutações dos índices em Θ . Algumas dificuldades podem aparecer, pois nesse caso, se os índices i forem permutados em $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, os valores da densidade de mistura serão os mesmos. Isto é, o vetor Θ não será identificável, mesmo que a mistura seja.

2.3 Alguns Exemplos de Misturas Finitas

Nesta seção serão apresentados os exemplos de Mistura de Distribuições Finitas para densidades Normal, Poisson e Gama, extraídos do trabalho de Silva (2013). Ao longo deste trabalho, essas misturas de distribuições serão aprofundadas com estudos de simulações de Monte Carlo.

2.3.1 Mistura de Densidades Normais

Sejam $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}_N$ tal que

$$\mathcal{F}_N = \left\{ f : f(x; \mu_i, \sigma_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right] \right\},$$

onde $x, \mu_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i > 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

A Figura 1.1 apresenta um exemplo da função densidade de probabilidade de um modelo de distribuição de mistura independente quando as componentes possuem distribuição Normal.

Segundo Silva (2013), Pearson (1894) foi um dos pioneiros no estudo direcionado a um modelo de misturas de normais, onde usou o método de momentos para estimar os parâmetros para uma mistura finita de normais com duas componentes normais na mistura ($m = 2$) e variâncias desiguais.

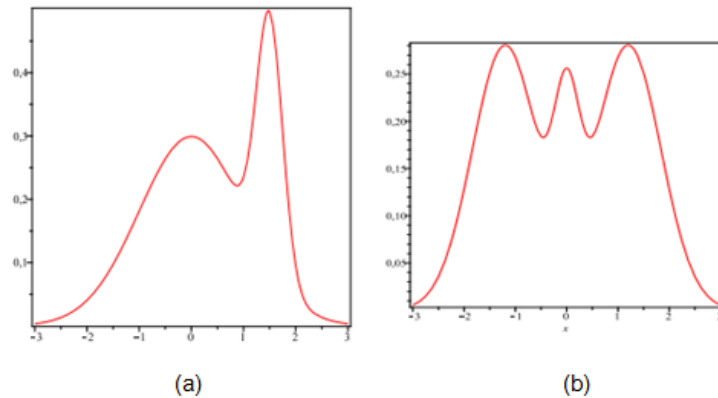


Figura 2.3.1: Modelo de Mistura de Distribuições Independentes: (a) $m = 2$, $f_1(x)$ é a função densidade de uma $N(0,1)$, $f_2(x)$ é a função densidade de uma $N(3/2,1/4)$, $\delta_1 = 3/4$, $\delta_2 = 1/4$; (b) $m = 3$, $f_1(x)$ é a função densidade de uma $N(0,1)$, $f_2(x)$ é a função densidade de uma $N(-6/5,16/25)$, $f_3(x)$ é a função densidade de uma $N(0,1/4)$ $\delta_1 = 9/20$, $\delta_2 = 9/20$; $\delta_3 = 1/10$.

Fonte: Silva, 2013.

2.3.2 Mistura de Densidades Gama

Sejam $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}_G$ tal que

$$\mathcal{F}_G = \left\{ f : f(x; \alpha_i, \sigma_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)\sigma_i^{\alpha_i}} x^{\alpha_i-1} \exp\left[-\frac{x}{\sigma_i}\right] \right\},$$

onde $x, \alpha_i, \sigma_i > 0$, $r_i > 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

Nesse modelo, para $\alpha_i = 1$ e $\sigma_i > 0$, temos a densidade exponencial e para $\alpha_i = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, \dots$ e $\sigma_i = 2$, temos a densidade qui-quadrado com n graus de liberdade.

A Figura 1.3 apresenta um exemplo da função densidade de probabilidade de um modelo de distribuição de mistura independente quando as componentes possuem distribuição Gama.

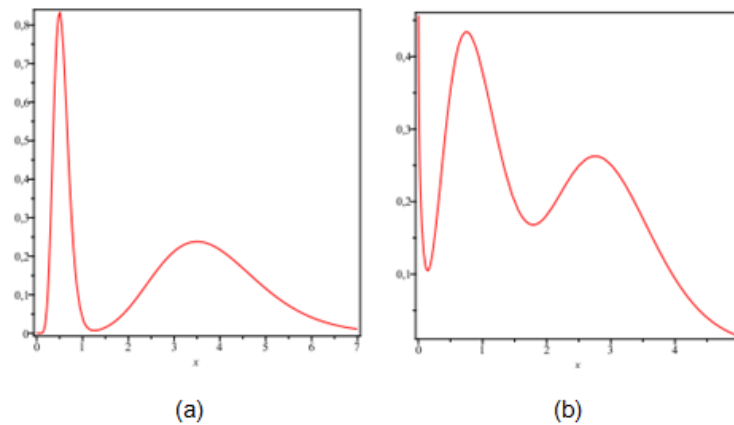


Figura 2.3.2: Modelo de Mistura de Distribuições Independentes: (a) $m = 2$, $f_1(x)$ é a função densidade de uma $G(11,1/20)$, $f_2(x)$ é a função densidade de uma $G(11,7/20)$, $\delta_1 = 2/3$, $\delta_2 = 1/3$; (b) $m = 3$, $f_1(x)$ é a função densidade de uma $G(15/20,3/20)$, $f_2(x)$ é a função densidade de uma $G(4,1/4)$, $f_3(x)$ é a função densidade de uma $G(15,1/5)$ $\delta_1 = 1/30$, $\delta_2 = 29/60$; $\delta_3 = 29/60$.

Fonte: Silva, 2013.

2.3.3 Mistura de Distribuições Poisson

Sejam $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}_P$ tal que

$$\mathcal{F}_P = \left\{ f : f(x; \lambda_i) = \frac{\lambda_i^x e^{-\lambda_i}}{x!} \right\},$$

onde $x > 0, \lambda_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$.

Um exemplo de mistura entre distribuições Poisson é encontrado em Zucchini e MacDonald (2009), onde é analisada uma amostra de tremores de terra onde o modelo de distribuição de misturas independente é formado por 4 componentes, isto é, $m = 4$.

Capítulo 3

Estimação para Modelos de Mistura de Distribuições Independentes

Segundo McLachlan e Peel (2000), várias abordagens têm sido utilizadas ao longo dos anos para estimar os parâmetros dos modelos de mistura de distribuições independentes. Entre elas, métodos gráficos, método dos momentos, método da distância mínima, máxima verossimilhança e abordagens Bayesianas.

Durante as últimas duas décadas, o método da máxima verossimilhança tornou-se o método mais utilizado para o problema de estimação dos parâmetros dos modelos de mistura de distribuições independentes. Neste capítulo, primeiramente, abordaremos a estimativa de máxima verossimilhança e, em seguida, o algoritmo EM, procedimento iterativo para aproximar numericamente as estimativas de máxima verossimilhança para os problemas de densidade de misturas.

3.1 Estimadores de Máxima Verossimilhança

O método da máxima verossimilhança é utilizado para estimar os parâmetros de um modelo estatístico. Para Felgueiras (2009), talvez esse seja o método mais popular de estimação de parâmetros. Dada uma amostra observada X , a estimação por método da máxima verossimilhança visa encontrar um vetor de parâmetros θ que maximiza a probabilidade dos dados da amostra. Ou seja, o objetivo do estimador de máxima verossimilhança é determinar uma estimativa para cada $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ de modo que seja definido um vetor de parâmetros da equação cuja verossimilhança seja consistente e assintoticamente eficiente.

A seguir, definimos a *função de verossimilhança* dos Modelos de Mistura de Distribuições Independente.

Definição 3.1. Seja X uma variável aleatória que segue o Modelo de Mistura de Distribuições Independente, ver Definição 2.1, e seja n o tamanho de uma amostra aleatória observada dada por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Então a função de verossimilhança correspondente a amostra aleatória observada é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \delta_i f_i(x_j, \theta_i), \quad (2.5)$$

onde $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, em que $\boldsymbol{\Theta}$ é o espaço paramétrico, $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros das distribuições componentes e $\boldsymbol{\delta}$ é o vetor das probabilidades de mistura.

A seguir definimos os estimadores de máxima verossimilhança para os Modelos de Mistura de Mistura de Distribuições Independentes apresentados na Definição 2.1.

Definição 3.2. O estimador de máxima verossimilhança para os parâmetros dos modelos de distribuição independentes (ver Definição 2.1) e com função de verossimilhança dada pela Definição 2.2 é dada por

$$\sup_{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x}) = \sup_{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Theta}} \log(L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x})),$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})$, onde $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x}) = \log(L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x}))$ é o logaritmo da função de verossimilhança. Denotamos por $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\delta}})$ o valor estimado do vetor $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})$ pelo método da máxima verossimilhança.

A seguir são apresentados dois exemplos da função de verossimilhança do Modelo de Misturas de Distribuições Independente, ver Definição 2.1, no qual as variáveis aleatórias possuem distribuições Poisson e Normal, respectivamente. A estimação dos parâmetros destas distribuições será estudada no Capítulo 4, via Simulação de Monte Carlo, utilizando estimação via método da máxima verossimilhança e algoritmo EM.

Exemplo 3.1. Seja Y_i , para $i = \{1, 2, \dots, m\}$ variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson com parâmetros λ_i , onde $i = \{1, 2, \dots, m\}$ com m sendo o número de distribuições envolvidas. A função de verossimilhança da variável aleatória X , que segue o Modelo de Mistura de Distribuições Independente, é dada por

$$L(\lambda, \delta, x) = \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \delta_i \frac{\lambda_i^{x_j} e^{-\lambda_i}}{x_j!}.$$

Considerando $m = 1$, ou seja, apenas uma distribuição Poisson envolvida, temos então que a probabilidade de mistura é $\delta_1 = 1$ e que $f_1(x) = \frac{\lambda_1^x e^{-\lambda_1}}{x!}$. Então temos:

$$L(\lambda_1, x) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_1}}{x_i!}.$$

Considerando agora duas distribuições Poisson envolvidas, isto é, $m = 2$, temos então que a probabilidade de mistura da segunda distribuição é dada por $\delta_2 = 1 - \delta_1$, e as funções massa de probabilidades dadas por $f_1(x) = \frac{\lambda_1^x e^{-\lambda_1}}{x!}$ e $f_2(x) = \frac{\lambda_2^x e^{-\lambda_2}}{x!}$. Temos então que a função de verossimilhança do Modelo de Mistura de Distribuições independentes, para duas distribuições Poisson, é dada por

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \delta_1, x) = \prod_{i=1}^n \left(\delta_1 \frac{\lambda_1^{x_i} e^{-\lambda_1}}{x_i!} + (1 - \delta_1) \frac{\lambda_2^{x_i} e^{-\lambda_2}}{x_i!} \right).$$

Exemplo 3.2. Seja Y_1, \dots, Y_m variáveis aleatórias independentes, em que Y_i possui distribuição Normal com parâmetros μ_i, σ_i , para cada $i = 1, \dots, m$. A função de verossimilhança de uma variável aleatória X , que segue o Modelo de Mistura de Distribuições Independentes, é dado por

$$L(\mu, \sigma^2, \delta, x) = \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \delta_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2}(x_j - \mu_i)^2\right).$$

Considerando $m = 1$, temos que $\delta_i = 1$ e $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2\right)$.

Sendo assim:

$$L(\mu_1, \sigma^2, x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_i - \mu_1)^2\right).$$

Considerando $m = 2$, temos $\delta_2 = 1 - \delta_1$, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2\right)$, e $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x - \mu_2)^2\right)$. Neste caso, a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \delta_1, x) &= \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\delta_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_i - \mu_1)^2\right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \delta_1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_i - \mu_2)^2\right) \right). \end{aligned}$$

O princípio da verossimilhança exige que para a estimação dos parâmetros de interesse do modelo, sejam levados todos os dados em consideração, inclusive os que podem fornecer informações incompletas. Por isso, algumas vezes a função de verossimilhança pode ser muito difícil de ser calculada, pois obter as estimativas de máxima verossimilhança e quantificar a incerteza associada pode se tornar muito complicado. Outros fatores que podem dificultar no processo de estimação pelo método da máxima verossimilhança são: função de verossimilhança complexa, com um número grande de parâmetros ou uma forma funcional computacionalmente intratável; maximização pode ser extremamente lenta; não existência de um máximo

único, ou máximo localizado no extremo do espaço dos parâmetros (caso dos modelos de misturas finitas).

3.1.1. Matriz de Informação

Seja X uma observação com função densidade (ou massa) de probabilidade dada por $f(x|\theta)$, temos então que a matriz de informação de Fisher é dada por

$$I(\theta; X) = E_{\theta} \left[-\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta^2} \right].$$

Se tivermos um vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ para a função densidade (ou massa) de probabilidade $f(x|\theta)$, temos então que a matriz de informação de Fisher esperada sobre o vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ é definida como

$$I(\theta; X) = E_{\theta} \left[-\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right].$$

A matriz de informação observada é definida como $I(\hat{\theta}; x)$.

3.1.2. Matriz de Covariância Assintótica dos Estimadores de Máxima Verossimilhança

Segundo McLachlan e Peel (2000), a matriz de variância-covariância assintótica do estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ da função densidade (ou massa) de probabilidade $f(x|\theta)$ é igual ao inverso da matriz de informações esperadas $I(\theta, X)$. Então, a matriz de variância-covariância assintótica do estimador de máxima verossimilhança é dada por

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{11}(\theta, X)} & \cdots & \frac{1}{I_{1j}(\theta, X)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{I_{i1}(\theta, X)} & \cdots & \frac{1}{I_{ij}(\theta, X)} \end{pmatrix}$$

3.2 Algoritmo EM (Expectation Maximization)

Segundo Luna (2004), o nome Algoritmo Expectation Maximization (EM) foi apresentado por Demspster et al. (1977). Esse algoritmo tem como objetivo estimar os parâmetros que sejam mais consistentes com os dados da amostra, maximizando a função de verossimilhança. Em outras palavras, o algoritmo EM busca a existência de um ponto ótimo, ou seja, um ponto que melhor ajusta o modelo. A partir daí não se faz necessário tentar buscar outro modelo, com outros parâmetros e, assim, as iterações terminam. Faria (2011), ressalta que esse algoritmo é mais utilizado para casos de dados incompletos ou quando a maximização da função de verossimilhança se torna complicada.

O algoritmo EM se tornou popular por lidar melhor com dados faltantes e com problemas de misturas de densidades. Esse algoritmo é basicamente definido em dois passos.

Passo E: encontram-se os valores esperados das estatísticas suficientes para os dados completos Y , dado os dados incompletos Z e as estimativas atuais dos parâmetros.

Passo M: utilizam-se essas estatísticas suficientes para fazer uma estimativa de máxima verossimilhança como é usual. (LUNA, 2004, pg.49)

Ou seja, o passo E do algoritmo calcula o valor esperado do logaritmo da verossimilhança, e o passo M encontra seu máximo.

3.2.1 O Algoritmo EM para Modelos de Mistura

Como descrito na seção anterior, o algoritmo EM pode ser utilizado para problemas de densidade de mistura. Nesta seção discutimos brevemente como funciona o algoritmo EM para esses modelos.

Para os casos de modelo de misturas de densidades finitas, primeiramente o algoritmo EM busca incluir os dados que não foram observados ao problema através dos dados observados. Então, para isso, é calculada a esperança da log-verossimilhança completa dos dados, dado os dados observados. Definimos aqui

como h_{ij} sendo os dados faltantes e y os dados observados. Assim, segundo Basso (2009), temos

$$Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \hat{h}_{ij} [\log \delta_j^k + \log f(y_i; \boldsymbol{\theta}_j^{(k)})],$$

em que $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ é o valor de $\boldsymbol{\theta}$ estimado na k -ésima iteração do algoritmo.

Após essa etapa, o algoritmo EM busca a maximização de $Q(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})$ em função de $\boldsymbol{\theta}$. Então, é calculada a estimativa de δ_j na $(k + 1)$ -ésima iteração do algoritmo dada por

$$\delta_j^{(k+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \hat{h}_{ij} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Basso (2009) refere-se a essa estimativa como uma estimativa que contém uma contribuição de cada observação de dados y_i igual a sua probabilidade a posteriori de pertencer a j -ésima componente de mistura do modelo.

Capítulo 4

Um Estudo via Simulações de Monte Carlo

Neste trabalho realizamos um estudo sobre Modelos de Misturas de Distribuições Independente através de Simulações de Monte Carlo utilizando as distribuições Poisson, Normal e Gama. As simulações foram realizadas via Estimador de Máxima Verossimilhança (Poisson e Normal) e Algoritmo EM (Normal e Gama).

Em todas as simulações foram utilizadas um tamanho amostral de $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ componentes. Também utilizamos probabilidade de mistura de $p = 0.3$ e $re = 1000$ replicações.

4.1 Simulações via Estimador de Máxima Verossimilhança para Distribuição Poisson

Na simulação via Estimador de Máxima Verossimilhança, utilizamos primeiramente a distribuição Poisson, isto é, $X_1 \sim P(\lambda_1)$ e $X_2 \sim P(\lambda_2)$, com $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 \in \{2, 3, 5, 7\}$. Analisamos o vício, o erro quadrático médio e a variância do estimador de máxima verossimilhança para cada um dos parâmetros estimados em cada caso. Os gráficos seguintes mostram os resultados obtidos.

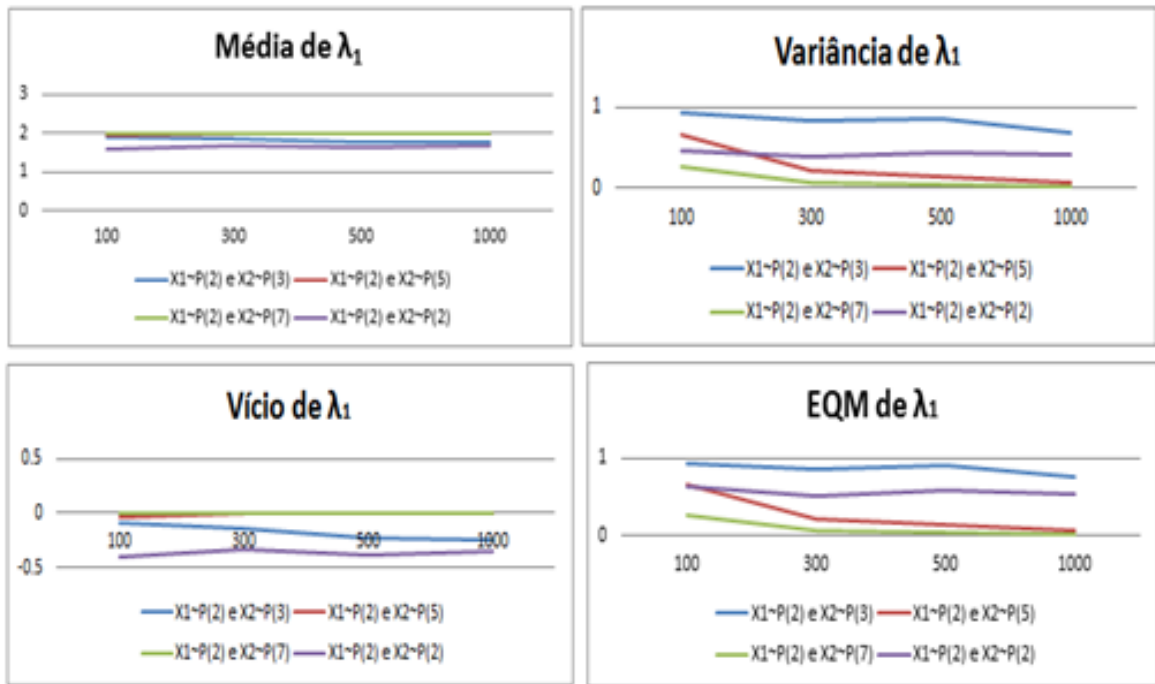


Figura 4.1.1: Gráfico da média, variância, vício e erro médio quadrático para o parâmetro λ_1 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim P(\lambda_i)$ e $X_2 \sim P(\lambda_j)$, sendo $i = 2, j \in \{2,3,5,7\}, n \in \{100, 300, 500, 1000\}, m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

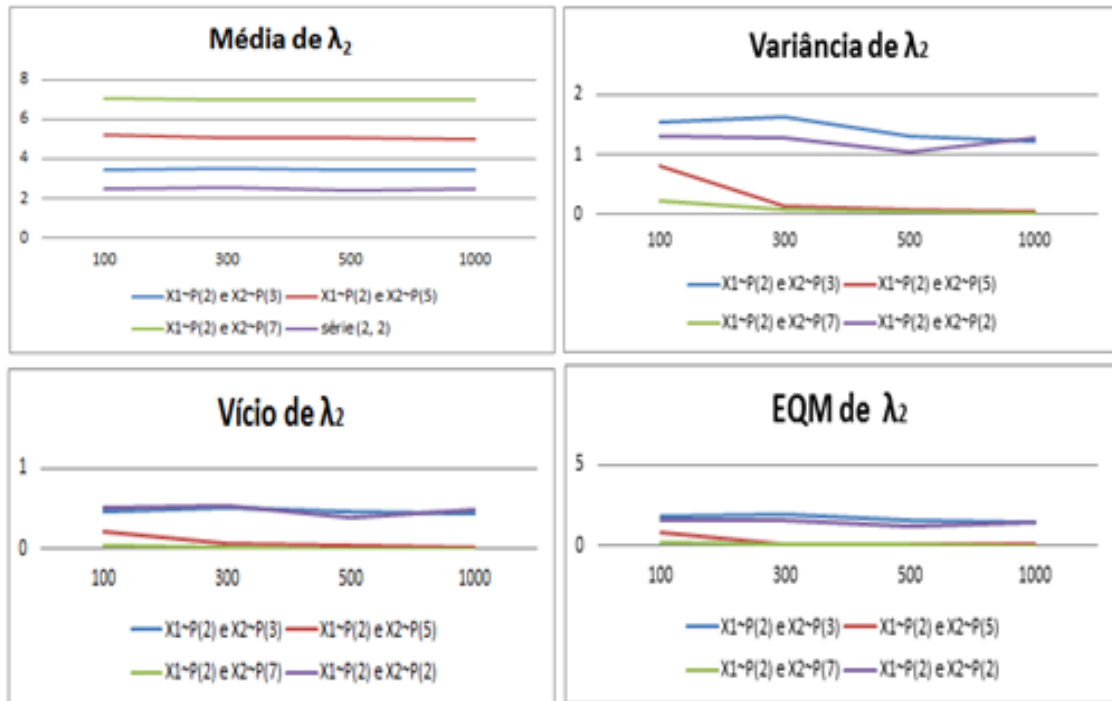


Figura 4.1.2: Gráfico da média, variância, vício e erro médio quadrático para o parâmetro λ_2 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim P(\lambda_i)$ e $X_2 \sim P(\lambda_j)$, sendo $i = 2, j \in \{2,3,5,7\}, n \in \{100, 300, 500, 1000\}, m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

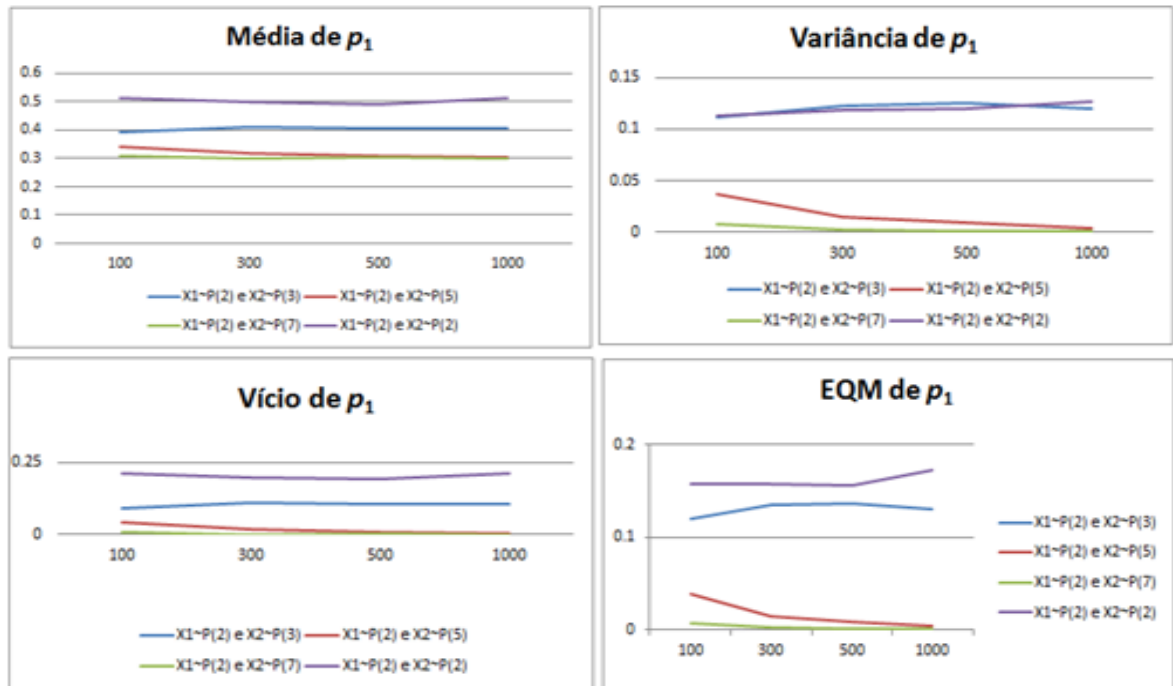


Figura 4.1.3: Gráfico da média, variância, vício e erro médio quadrático para o parâmetro $p_1 = 0.3$ via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim P(\lambda_i)$ e $X_2 \sim P(\lambda_j)$, sendo $i = 2, j \in \{2,3,5,7\}, n \in \{100, 300, 500, 1000\}, m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

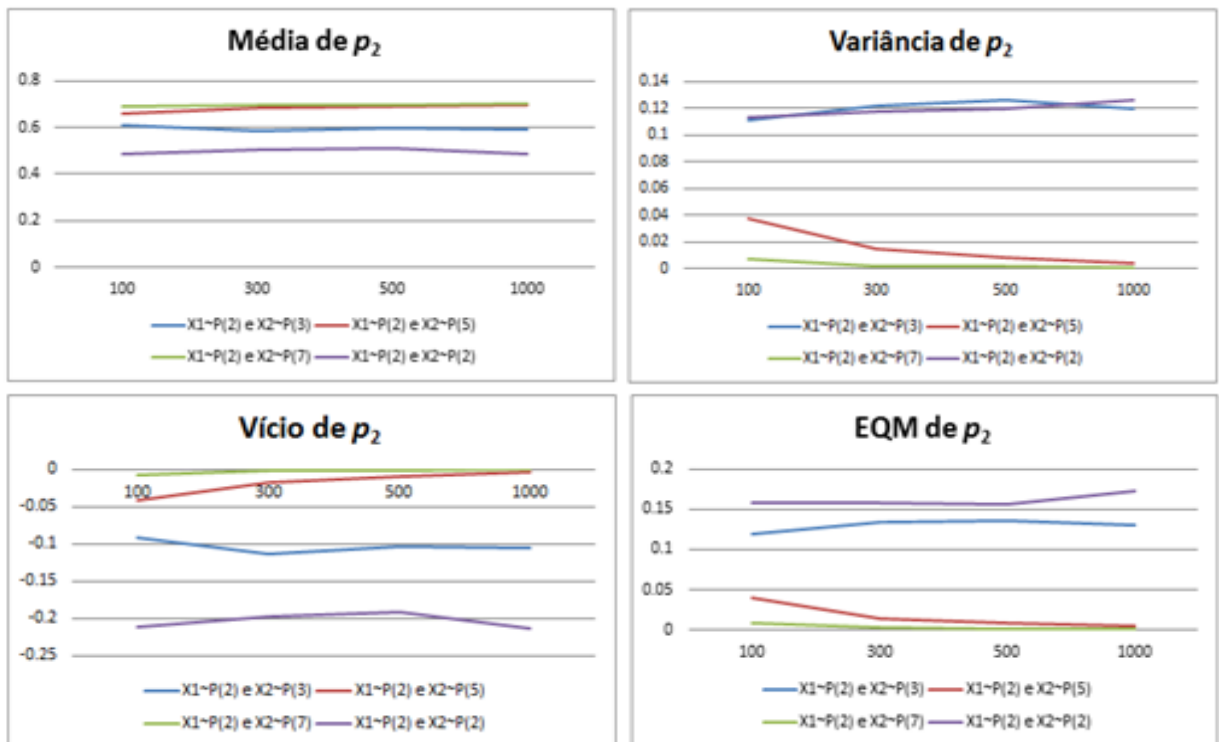


Figura 4.1.4: Gráfico da média, variância, vício e erro médio quadrático para o parâmetro $p_2 = 0.7$ via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim P(\lambda_i)$ e $X_2 \sim P(\lambda_j)$, sendo $i = 2, j \in \{2,3,5,7\}, n \in \{100, 300, 500, 1000\}, m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

Nas Figuras 4.1.1 a 4.1.4, observamos que quando λ_1 e λ_2 são próximos, o vício, o erro quadrático médio e a variância são maiores na estimação de todos os parâmetros. Conforme se distanciam, ambas as características analisadas diminuem sua magnitude. Esta característica ocorre para todos os tamanhos amostrais. Além disso, observamos que, quando aumentamos o tamanho da amostra, o vício tende a diminuir na maioria dos casos. O erro quadrático médio e a variância possuem comportamentos parecidos e, assim, como o vício, tendem a diminuir quando aumentamos o tamanho da amostra, com exceção quando o parâmetro λ_1 é igual ou bem próximo ao parâmetro λ_2 .

4.2 Simulações via Estimador de Máxima Verossimilhança para Distribuição Poisson

Para a simulação Normal via estimador de máxima verossimilhança, utilizamos $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$. Abaixo se encontram os resultados das estimações para as médias e variâncias dos parâmetros estudados.

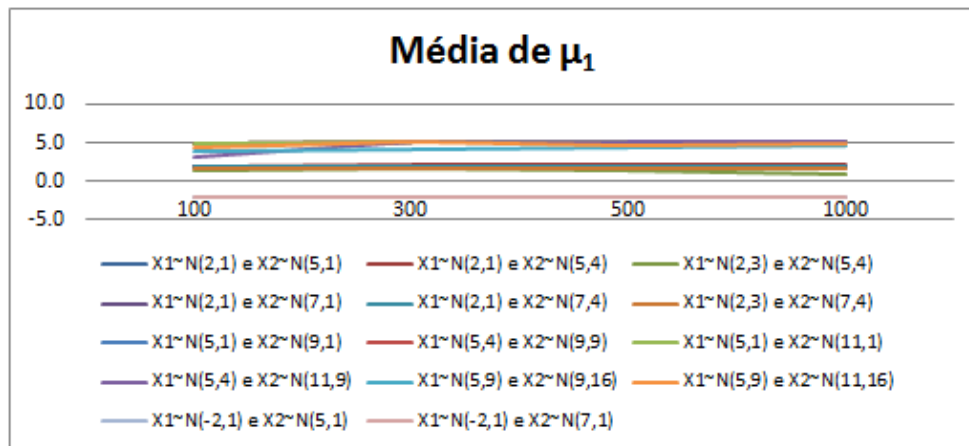


Figura 4.2.1: Gráfico da média de μ_1 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

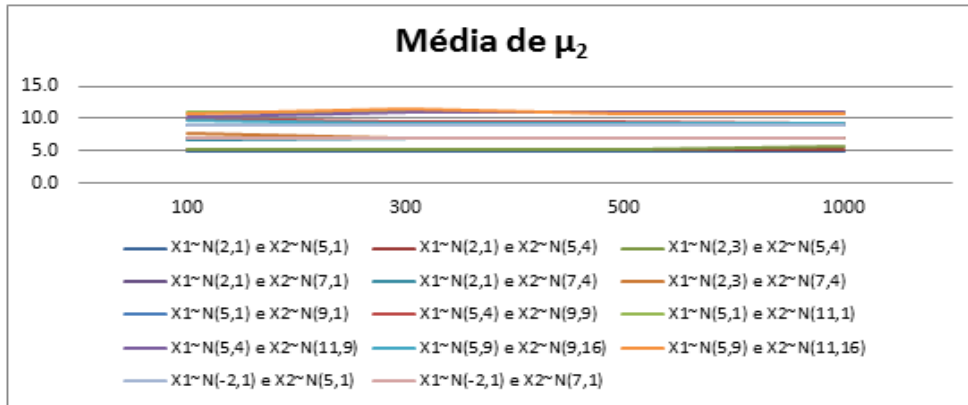


Figura 4.2.2: Gráfico da média de μ_2 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

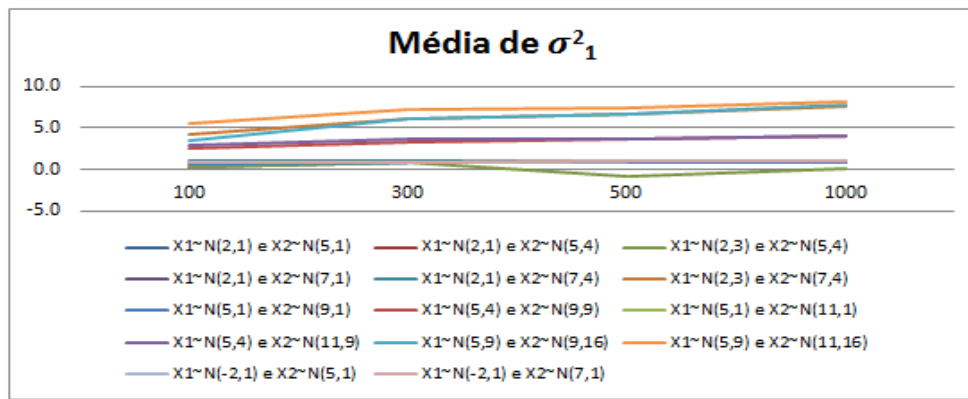


Figura 4.2.3: Gráfico da média de σ_1^2 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

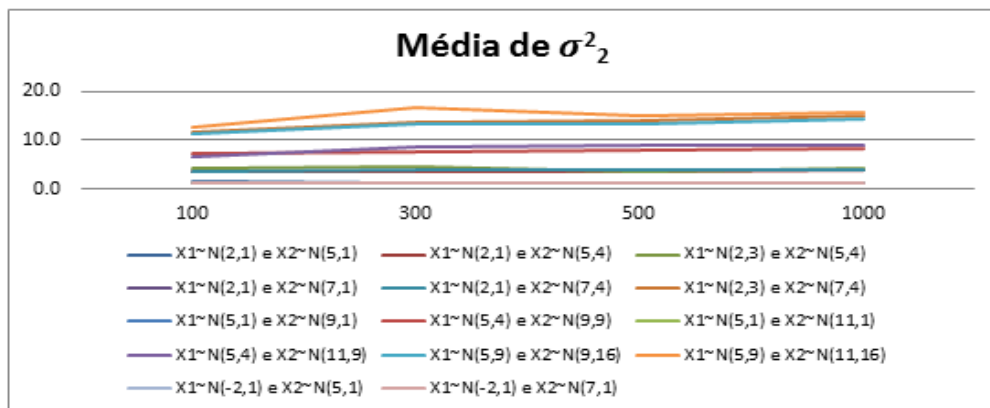


Figura 4.2.4: Gráfico da média de σ_2^2 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

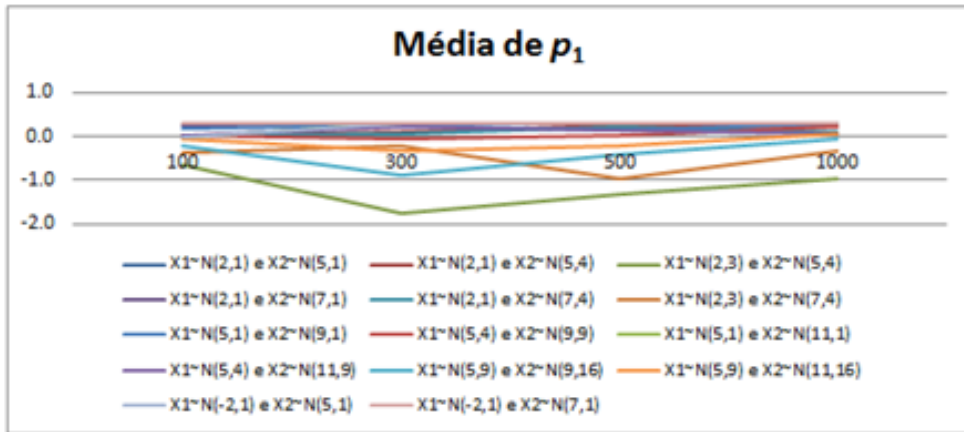


Figura 4.2.5: Gráfico da média de $p_1 = 0.3$ via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

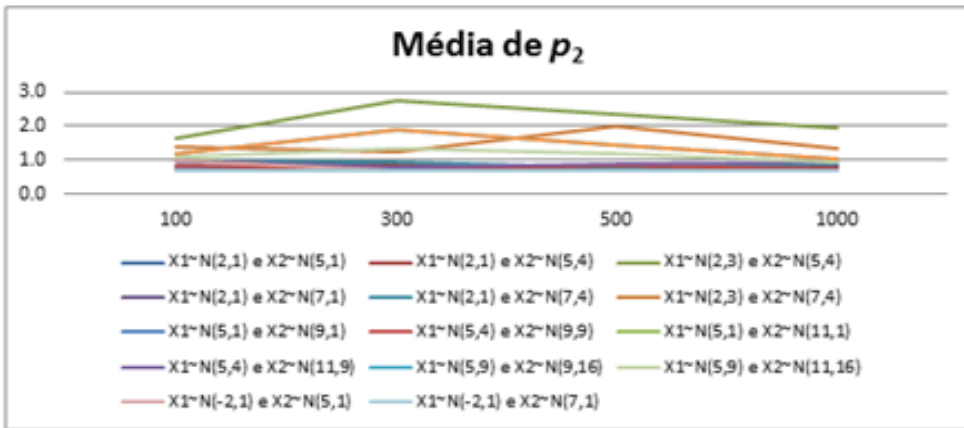


Figura 4.2.6: Gráfico da média de $p_2 = 0.7$ via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

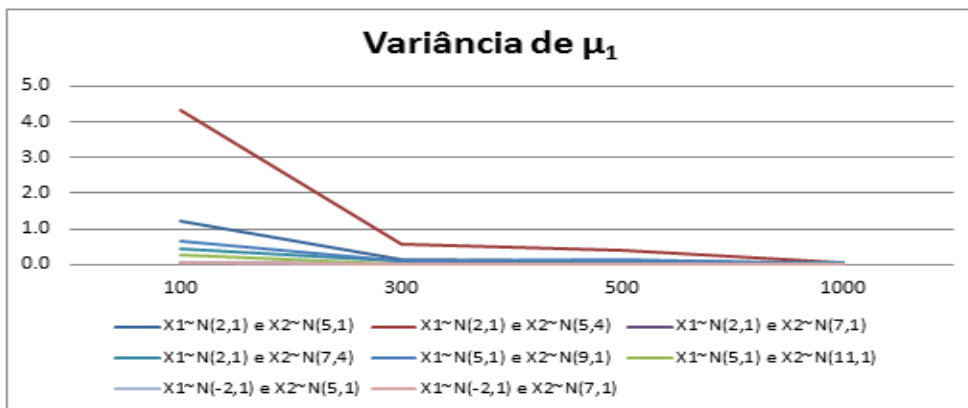


Figura 4.2.7: Gráfico da variância de μ_1 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 4\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

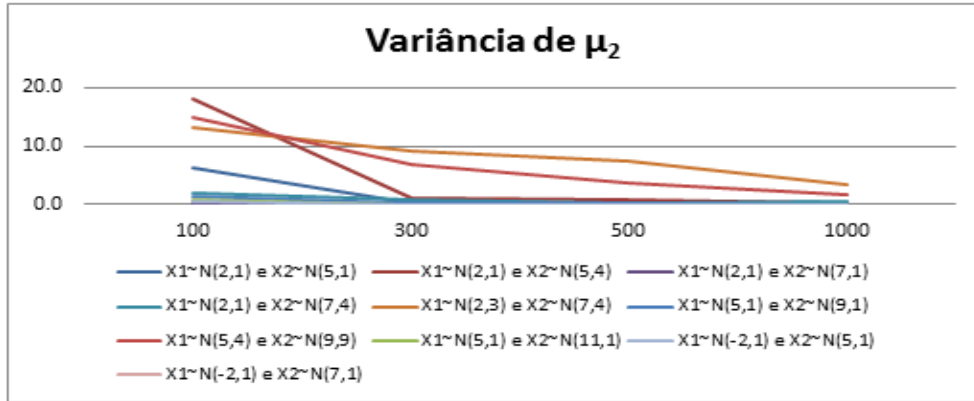


Figura 4.2.8: Gráfico da variância de μ_2 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

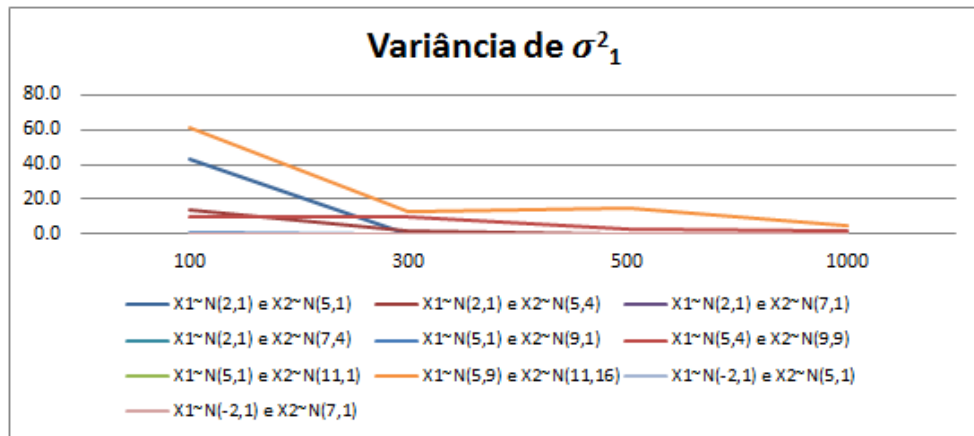


Figura 4.2.9: Gráfico da variância de σ_1^2 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

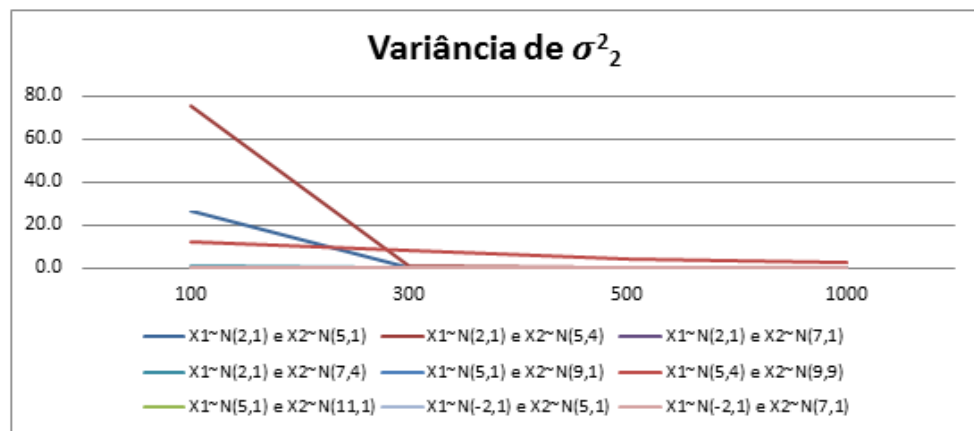


Figura 4.2.10: Gráfico da variância de σ_2^2 via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 4, 9\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

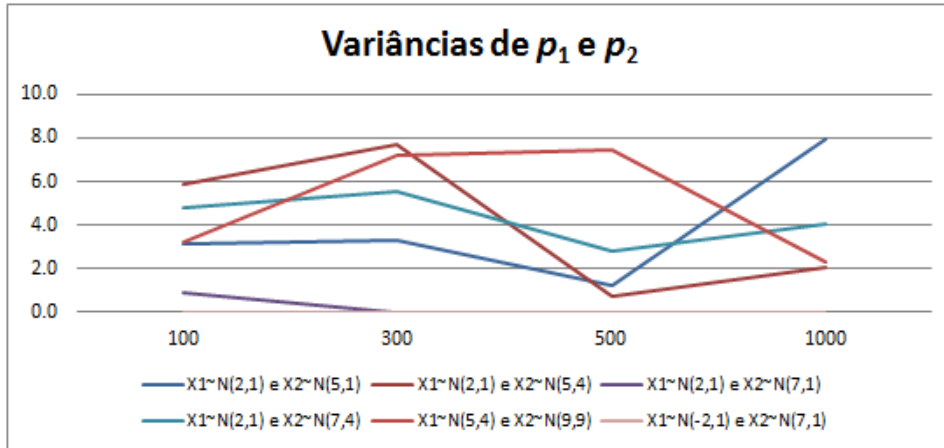


Figura 4.2.11: Gráfico das variâncias de $p_1 = 0.3$ e $p_2 = 0.7$ via Estimador de Máxima Verossimilhança para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 4, 9\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

Analisando as simulações de Monte Carlo realizadas (ver Figuras de 4.2.1 a 4.2.11) para a distribuição Normal via método da máxima verossimilhança, podemos observar que as médias das variâncias em quase todos os casos de mistura convergem para seu verdadeiro valor conforme o tamanho da amostra aumenta. O caso da mistura das distribuições $X_1 \sim N(2,3)$ com $X_2 \sim N(7,4)$ foi o único que apresentou valores bem mais elevados para as médias de σ_1^2 e σ_2^2 em relação aos seus verdadeiros valores $\sigma_1^2 = 3$ e $\sigma_2^2 = 4$. Pela estimação da máxima verossimilhança, é possível notar uma grande variabilidade dos parâmetros quando o tamanho da amostra é menor que 300 (Figuras 4.2.7 a 4.2.10). As estimações das variâncias dos parâmetros de probabilidades (Figura 4.2.11) variaram de maneiras diferentes conforme o tamanho da amostra, não apresentando resultados conclusivos.

4.3 Simulações via Algoritmo EM para Distribuição Normal

Nas simulações para misturas de distribuições Normal também utilizamos $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$. Nesse caso, analisamos o vício e Erro Quadrático Médio dos parâmetros, além da probabilidade de $p = 0.3$.

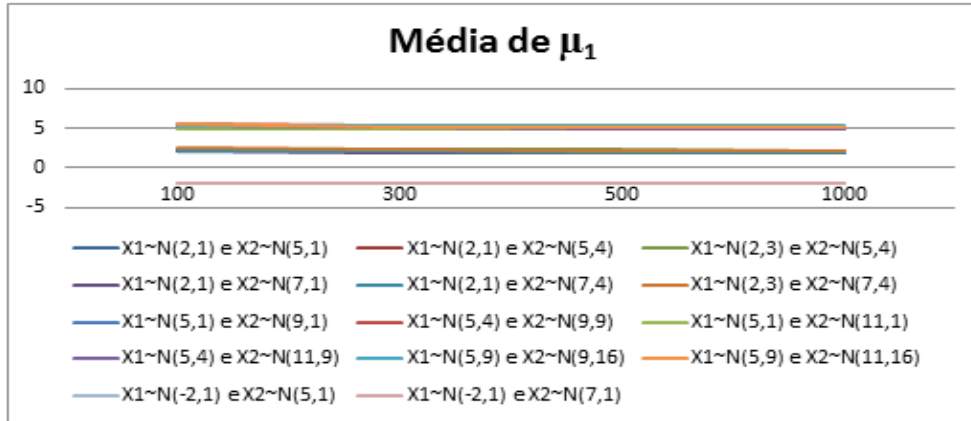


Figura 4.3.1: Gráfico da média de μ_1 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

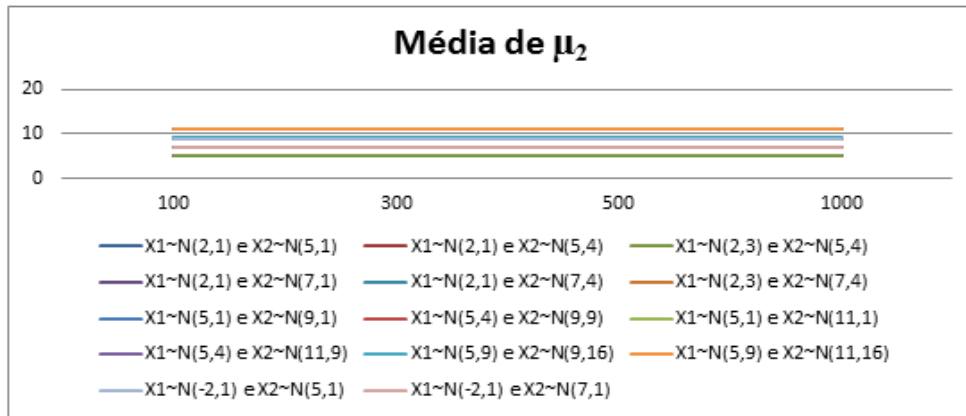


Figura 4.3.2: Gráfico da média de μ_2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

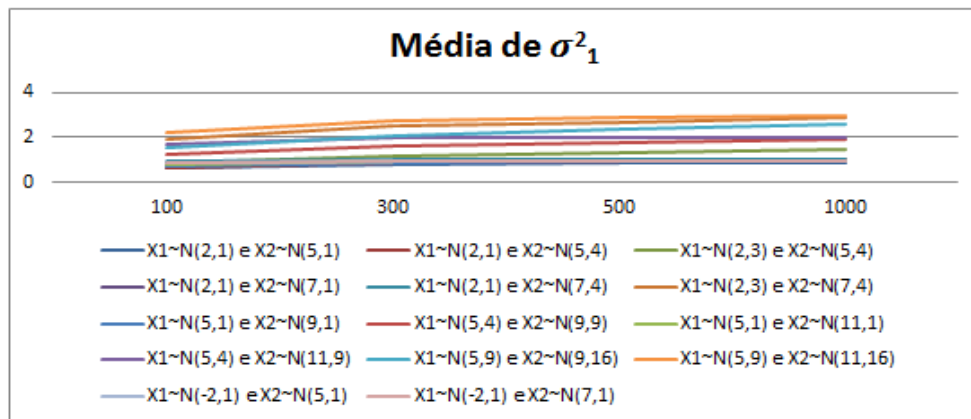


Figura 4.3.3: Gráfico da média de σ_1^2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

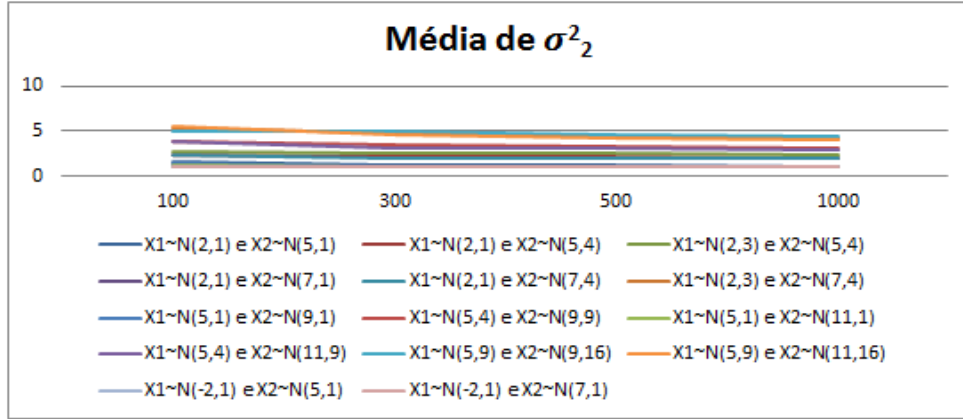


Figura 4.3.4: Gráfico da média de σ_1^2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

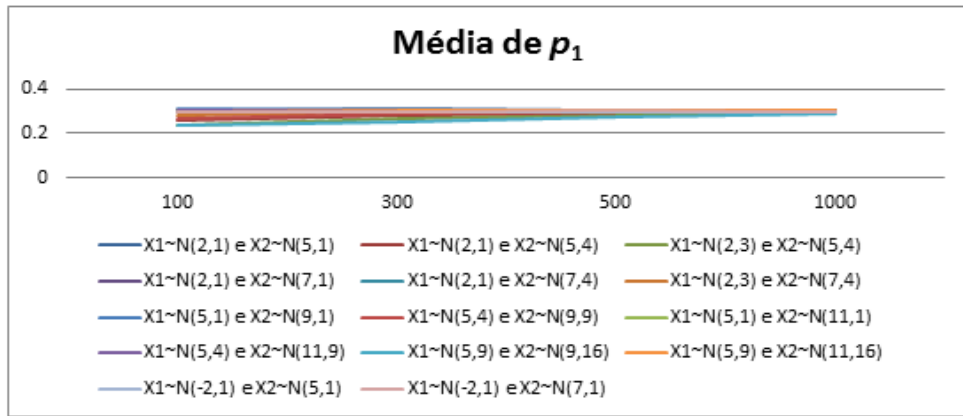


Figura 4.3.5: Gráfico da média de $p_1 = 0.3$ via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações

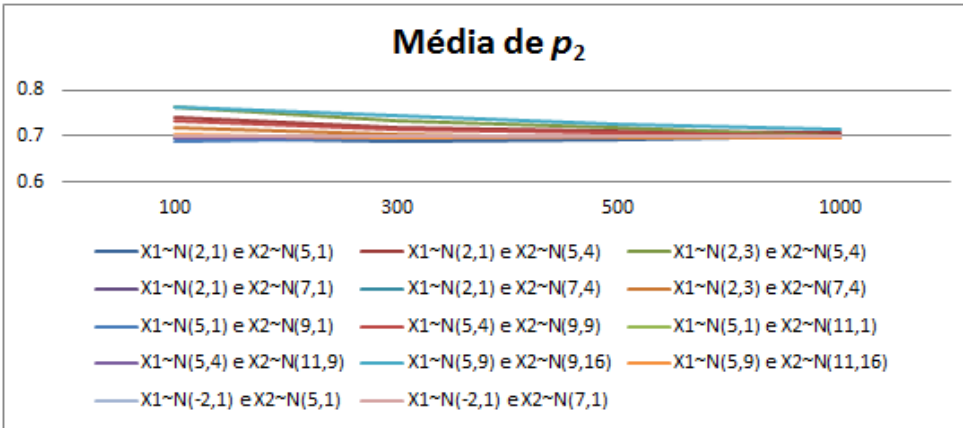


Figura 4.3.6: Gráfico da média de $p_2 = 0.7$ via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

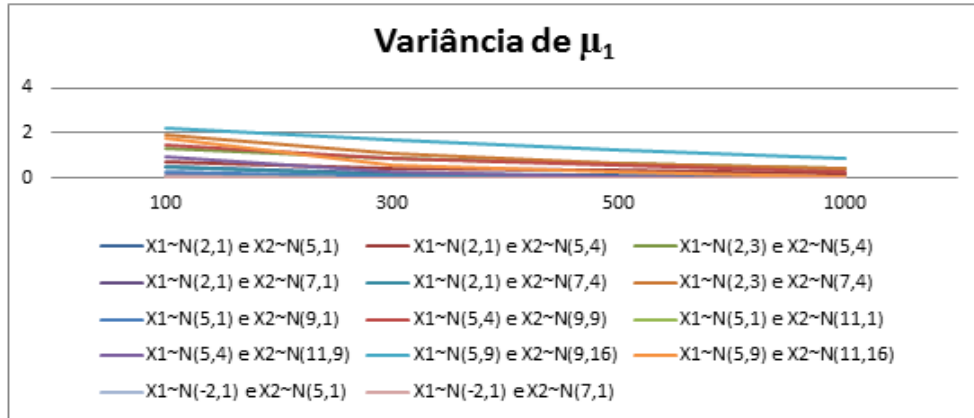


Figura 4.3.7: Gráfico da variância de μ_1 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

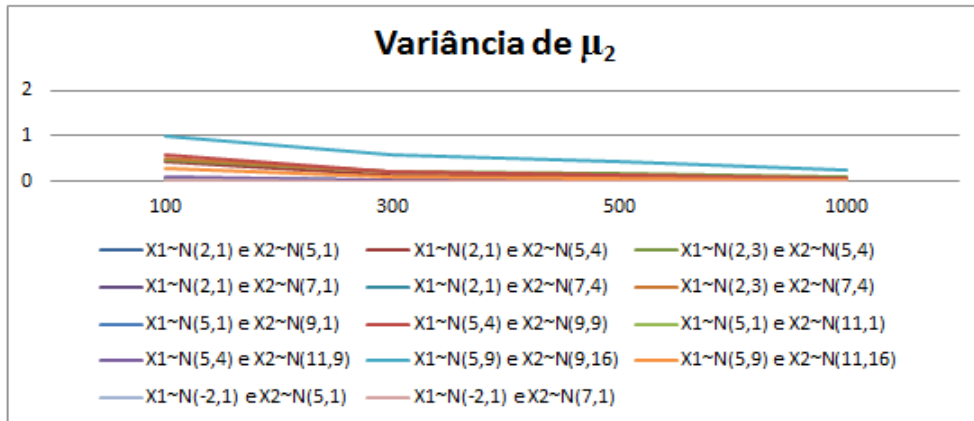


Figura 4.3.8: Gráfico da variância de μ_2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

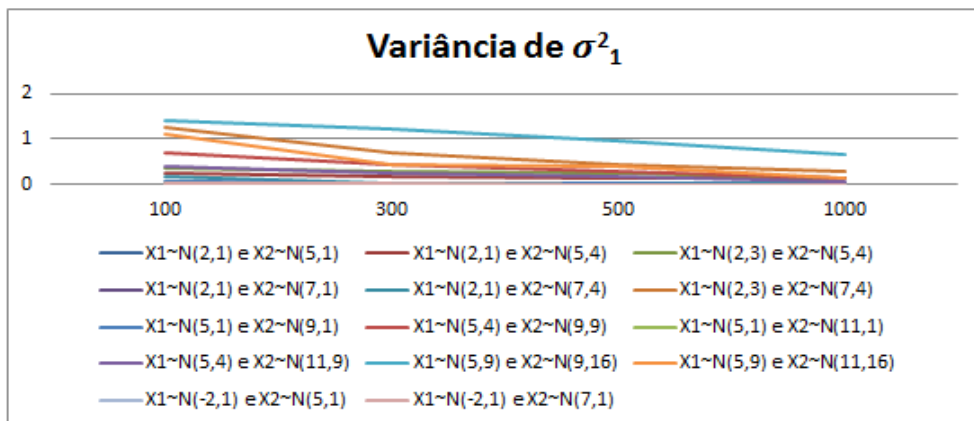


Figura 4.3.9: Gráfico da variância de σ_1^2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

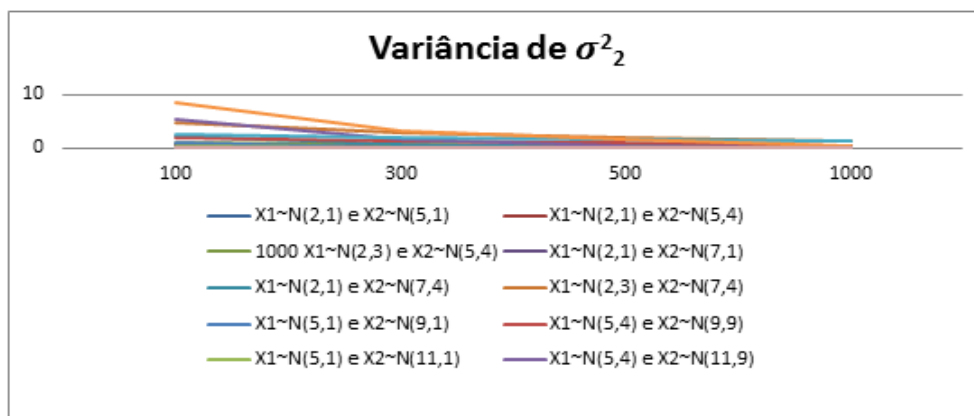


Figura 4.3.10: Gráfico da variância de σ_2^2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

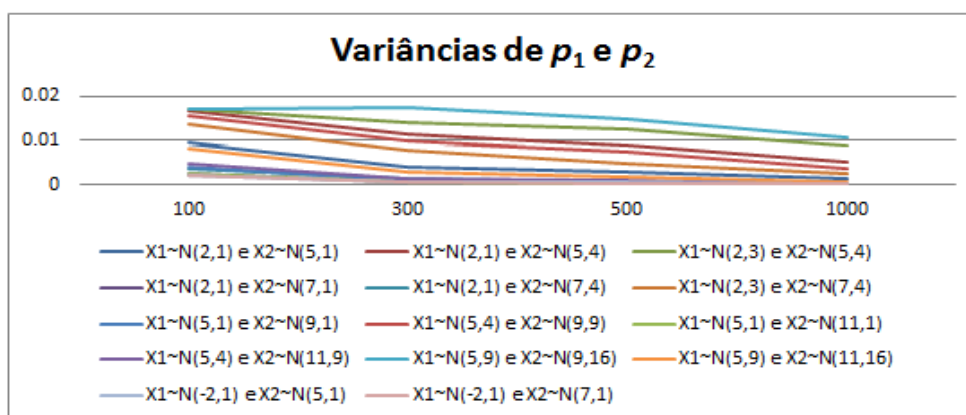


Figura 4.3.11: Gráfico das variâncias de $p_1 = 0.3$ e $p_2 = 0.7$ via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\mu_i \in \{-2, 2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\sigma_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

Em linhas gerais, observando as Figuras de 4.3.2 até 4.3.11, podemos dizer que o método de estimação via algoritmo EM para mistura de distribuição Normal foi mais preciso que o método da máxima verossimilhança, pois nesse caso, as estimativas de todos os parâmetros indicaram uma normalidade do modelo. Como já sabido, quando temos uma amostra grande conseguimos uma maior precisão nos resultados, e, pela estimação via algoritmo EM, percebemos que conforme a amostra aumenta, as estimativas das médias (Figuras 4.3.1 a 4.3.6) de todos os parâmetros tendem ao seu verdadeiro valor e as estimativas das variâncias (Figuras 4.3.7 a 4.3.11) para os parâmetros se encontram em intervalos pequenos, tendendo

a 0, o que indica o fato de haver menor variabilidade dos parâmetros entre as misturas conforme a amostra aumenta.

4.4 Simulações via Algoritmo EM para Distribuição Gama

Para as simulações de distribuições Gama via algoritmo EM, utilizamos $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i^2 \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$. e probabilidade de 0.3. Em seguida, encontram-se alguns dos resultados obtidos.

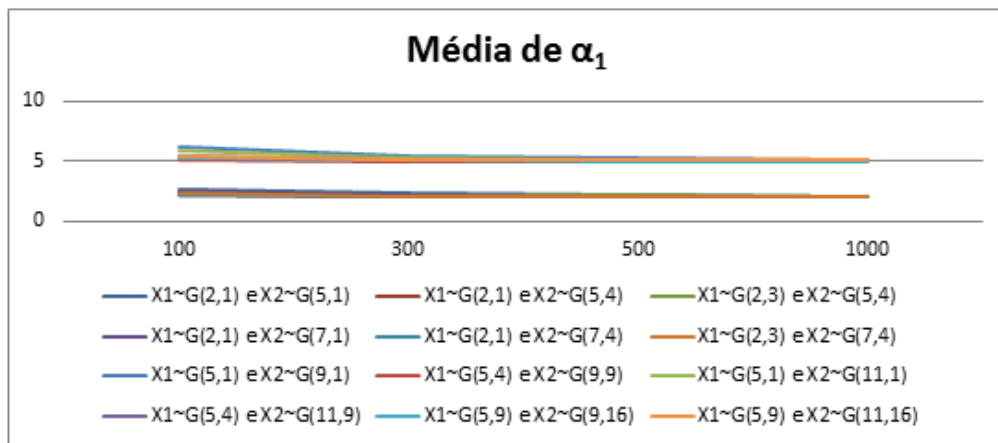


Figura 4.4.1: Gráfico da média de α_1 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

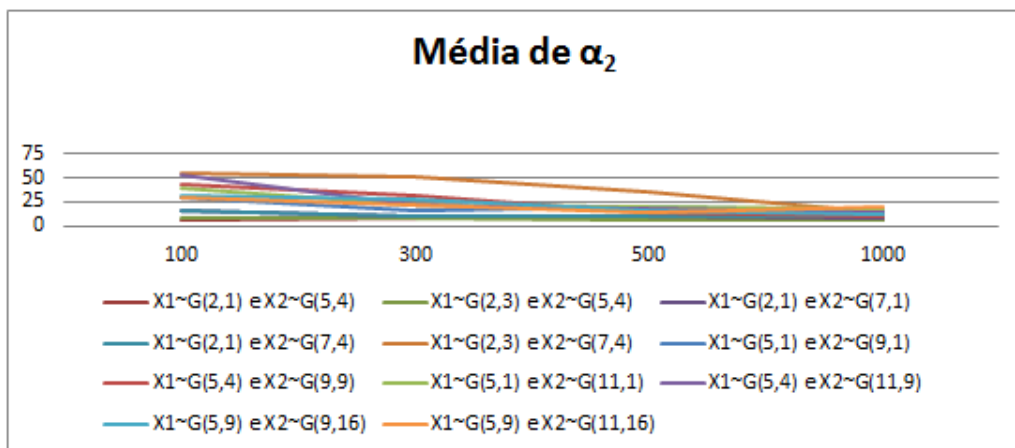


Figura 4.4.2: Gráfico da média de α_2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

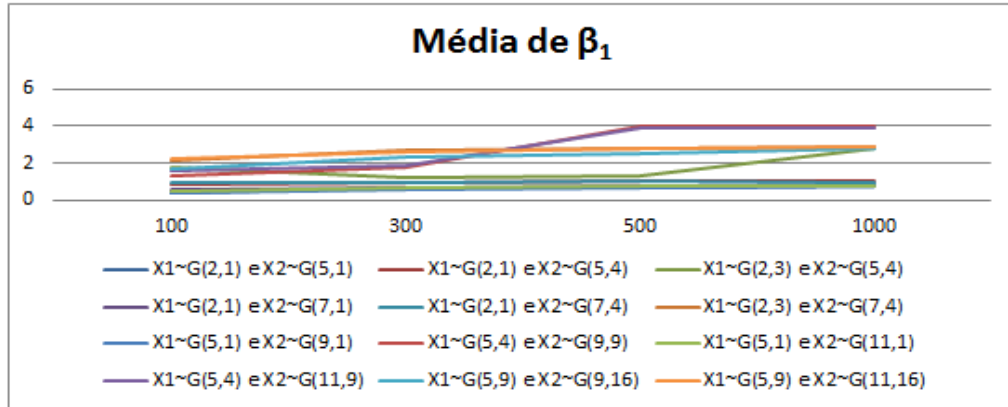


Figura 4.4.3: Gráfico da média de β_1 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

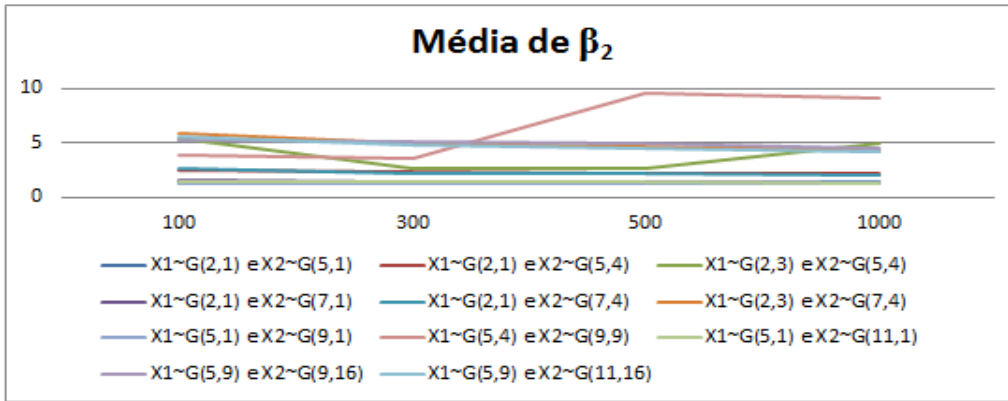


Figura 4.4.4: Gráfico da média de β_2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

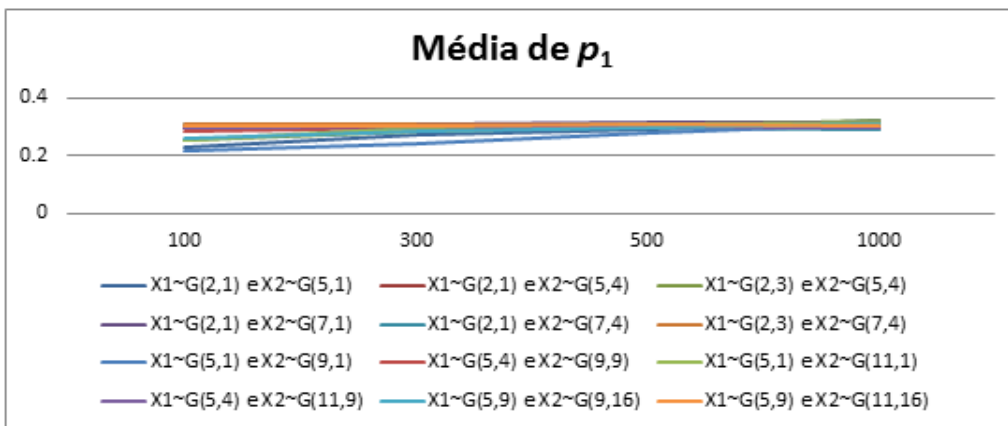


Figura 4.4.5: Gráfico da média de $p_1 = 0.3$ via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

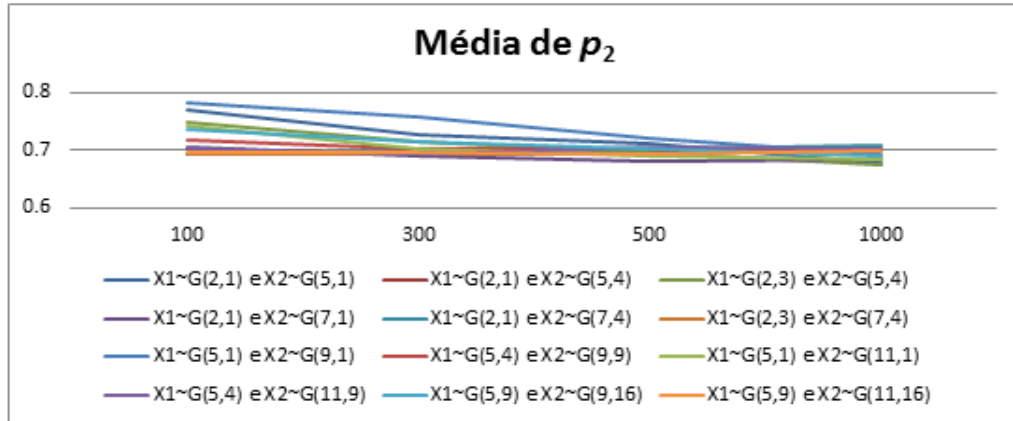


Figura 4.4.6: Gráfico da média de $p_2 = 0.7$ via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

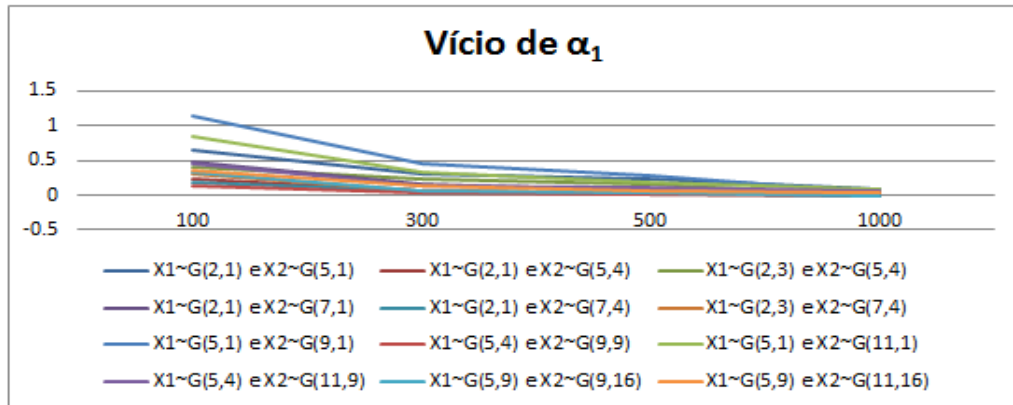


Figura 4.4.7: Gráfico do vício de α_1 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

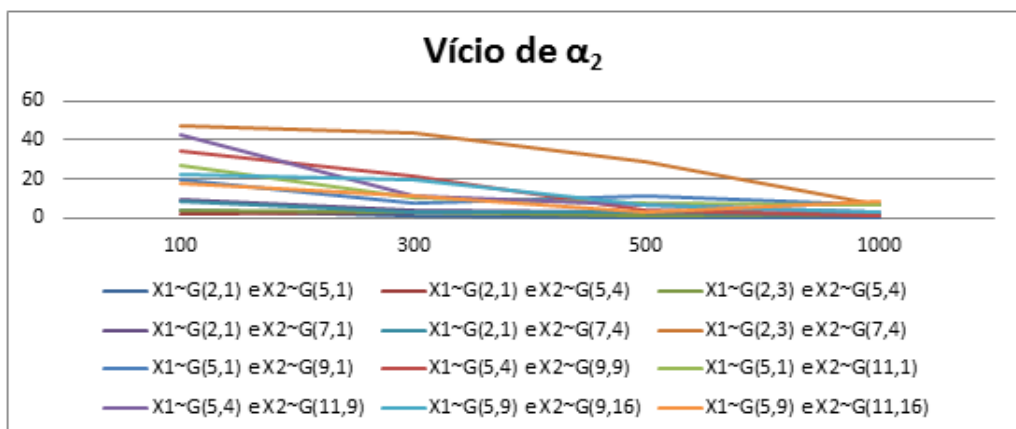


Figura 4.4.8: Gráfico do vício de α_2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

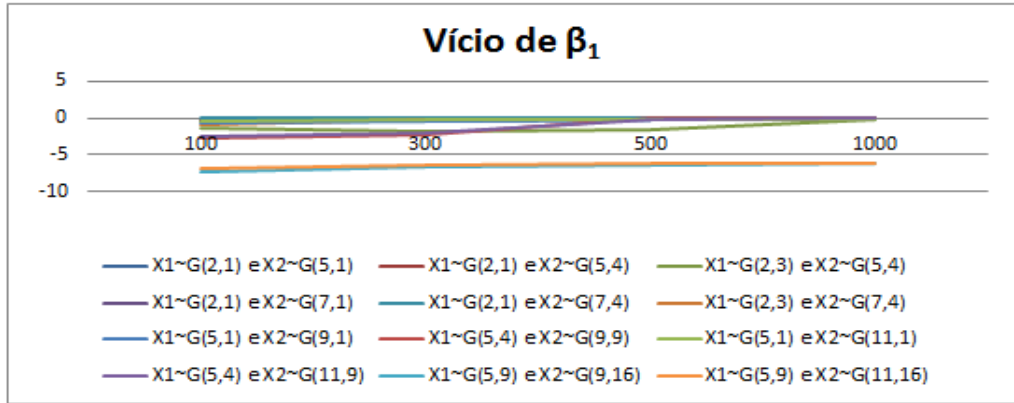


Figura 4.4.9: Gráfico do vício de β_1 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

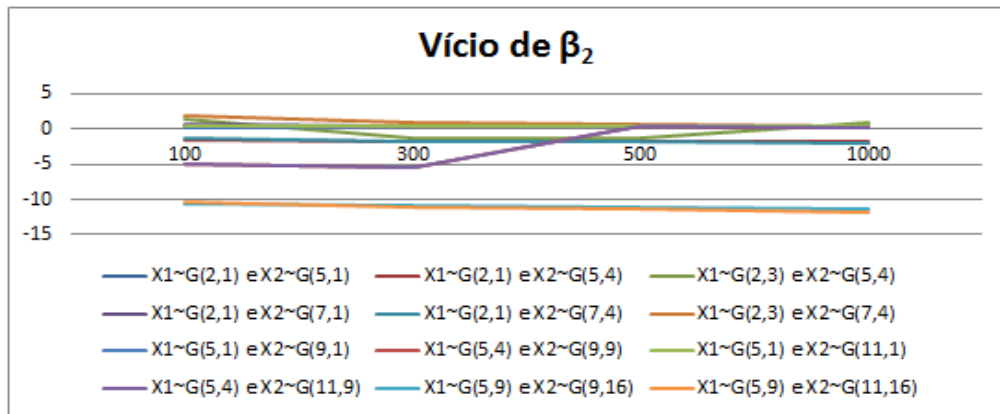


Figura 4.4.10: Gráfico do vício de β_2 via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

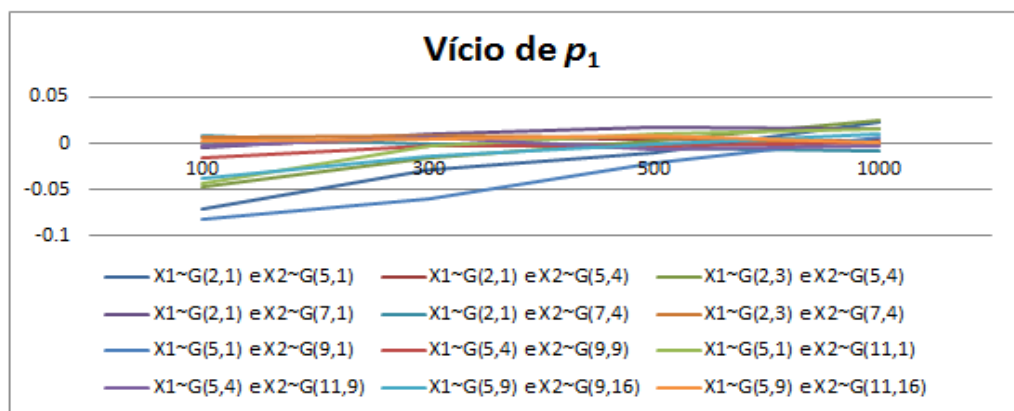


Figura 4.4.11: Gráfico do vício de $p_1 = 0.3$ via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

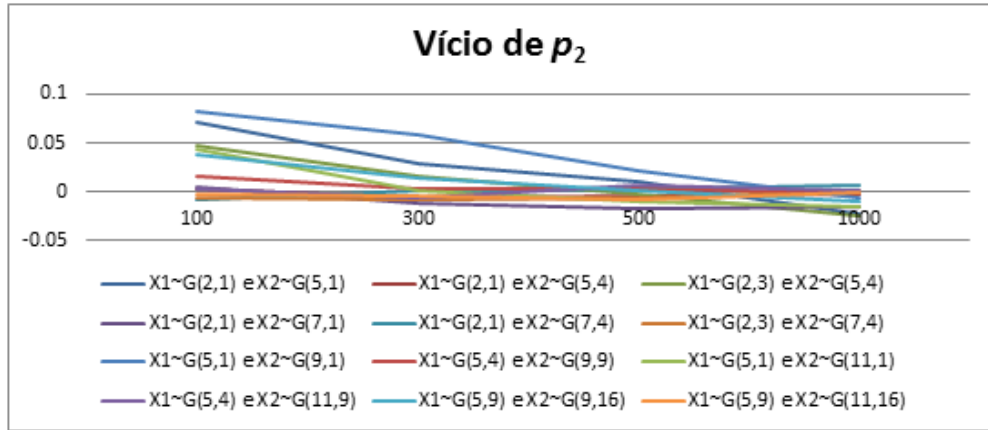


Figura 4.4.12: Gráfico do vício de $p_2 = 0.3$ via Algoritmo EM para misturas com distribuições $X_1 \sim \Gamma(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim \Gamma(\mu_2, \sigma_2^2)$ com $\alpha_i \in \{2, 5, 7, 9, 11\}$ e $\beta_i \in \{1, 3, 4, 9, 16\}$ para $i = 1, 2$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$, $m = 2$ e $re = 1000$ replicações.

Os resultados para os parâmetros α_1 (ver Figuras 4.4.1 e 4.4.7) indicam que todas as misturas se encontram dentro da normalidade, as estimativas das médias se encontram próximas aos parâmetros e os vícios tendem a 0 conforme a amostra aumenta. Já para os parâmetros de α_2 , representados nas Figuras 4.4.2 e 4.4.8, notamos que na mistura de $X_1 \sim \Gamma(2,3)$ com $X_2 \sim \Gamma(7,4)$ para uma amostra de tamanho pequena, a estimativa da sua média fica distante do verdadeiro parâmetro, o que ocasiona um vício grande nas amostras de tamanhos 100 e 300. Porém há um declínio grande quando a amostra passa de 300, convergindo rapidamente para seu verdadeiro valor.

Para os parâmetros de β_1 , as misturas $X_1 \sim \Gamma(5,9)$ e $X_2 \sim \Gamma(9,16)$, $X_1 \sim \Gamma(5,9)$ e $X_2 \sim \Gamma(11,16)$ apresentam vício com valores distantes de 0, diferentemente das outras misturas. Como podemos observar na Figura 4.4.3 das estimativas das médias de β_1 , as retas dessas misturas não se encontram próximas aos valores dos parâmetros em ambas as misturas. Talvez isso ocorra porque os valores dos parâmetros $\beta_1 = 9$ e $\beta_2 = 16$ são maiores entre si em relação aos parâmetros das outras misturas. Portanto aqui, podemos concluir que quanto maior a diferença entre β_1 e β_2 nas misturas de distribuição Gama com duas componentes, maior será seu vício.

Nas Figuras 4.4.5 e 4.4.6, temos as estimativas das médias para os parâmetros de probabilidades $p_1 = 0.3$ e $p_2 = 0.7$. Em todos os casos, essa estimativa converge para seus valores de probabilidade conforme a amostra

aumenta. A estimativa do vício para esses parâmetros, ver Figuras 4.4.11 e 4.4.12, se encontra em um intervalo muito pequeno próximo de 0, o que nos indica que temos uma boa estimação para os parâmetros de probabilidades.

Capítulo 5

Conclusões

No Capítulo 2 introduzimos o conceito de Modelo de Mistura de Distribuições Independente. Provamos que a expressão que define o modelo de mistura satisfaz as propriedades de uma função densidade (ou massa) de probabilidade. Apresentamos exemplos da função de verossimilhança do Modelo de Misturas de Distribuições Independente no qual as variáveis aleatórias possuíam distribuições Poisson e Normal. Também apresentamos as condições de identificabilidade para o modelo e alguns exemplos de Modelos de Mistura de Distribuições Independentes.

No Capítulo 3 apresentamos as estimações para os Modelos de Mistura pelo método da máxima verossimilhança e pelo método do algoritmo EM.

No Capítulo 4 apresentamos resultados de simulações de Monte Carlo realizadas com Modelos de Mistura de Distribuições Poisson, Normal e Gama pelos métodos descritos no Capítulo 3. Esses resultados mostraram que ambos os métodos de simulação, na maioria dos casos, são precisos quando o tamanho da amostra é grande, porém no método da máxima verossimilhança ocorre uma grande variabilidade inicial quando trabalhamos com modelos de mistura de distribuições Normal.

Podemos dizer que a estimação de todos os parâmetros do modelo de mistura da distribuição Poisson via método da máxima verossimilhança e Normal via algoritmo EM foram precisos em todas as amostras observadas, enquanto que a estimação das médias e das variâncias dos parâmetros $p_1 = 0.3$ e $p_2 = 0.7$ do modelo de mistura da distribuição Normal via método da máxima verossimilhança não ocorreu de maneira adequada, além da estimativa das variâncias de todos os outros parâmetros serem muito elevadas inicialmente.

Já na estimativa do vício para o parâmetro α_2 para o modelo de mistura das distribuições $X_1 \sim \Gamma(2,3)$ e $X_2 \sim \Gamma(7,4)$ via algoritmo EM ficou bem elevado, isso devido à falta de precisão na estimativa da média desse parâmetro.

A estimativa por método da máxima verossimilhança se adequou bem para o modelo de mistura de distribuições Poisson, porém, para o modelo de mistura de

distribuições Normal não houve essa mesma característica, sendo o método do algoritmo EM mais adequado para a estimação dos parâmetros. Porém, o método via algoritmo EM também não foi muito preciso na estimação de alguns parâmetros do modelo de mistura de distribuições Gama, como dito anteriormente.

Contudo, não existe um estimador mais “correto” para o uso em modelos de mistura, pois o que estima melhor os parâmetros de uma mistura de distribuições, não necessariamente será o melhor método de estimação para outras misturas de distribuições.

Bibliografia

- [1] Basso, R., *Misturas Finitas de Mistura de Escala Skkew-Normal*. 2009. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Departamento de Estatística, Universidade Estadual de Campinas.
- [2] Bergot, M., *Finite Mixture Distributions*. 2006. Université Bordeaux, Ecole d'Ingénieurs en Modélisation Mathématique et Mécanique.
- [3] Faria, V., *Estimação de Máxima Verossimilhança via Algoritmo EM*. 2011. Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Estatística.
- [4] Felgueiras, M., *Modelação estatística com misturas e pseudo-misturas*. 2009. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [5] Luna, J. E. O., *Algoritmos EM para aprendizagens de redes Bayesianas a partir de dados incompletos*. 2004. Departamento de Computação e Estatística. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
- [6] McLachlan, G., Peel, D. *Finite Mixture Models*. 2000. New York: Wiley.
- [7] Silva, R., *A distribuição Generalizada de Pareto e mistura de distribuições de Gumbel no estudo da vazão e da velocidade máxima do vento em Piracicaba, SP*. 2008. Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Piracicaba.
- [8] Vargas, R., *Inferência Estocástica e Modelos de Mistura de Distribuições*. 2011. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [9] Zucchini, W. and MacDonald, I. L., *Hidden Markov Models for Time Series: an introduction using R*. Londres, 2009. Chapman and Hall.

Apêndice A

Neste apêndice iremos apresentar os quadros com os valores dos parâmetros obtidos das estimações feitas pelas Simulações de Monte Carlo para modelos de mistura de distribuição Poisson, Normal e Gama pelo método da máxima verossimilhança e pelo algoritmo EM apresentadas no decorrer do trabalho.

A.1 Estimação dos Parâmetros dos Modelos de Mistura da Distribuição Poisson pelo Método da Máxima Verossimilhança

Nesta seção serão apresentadas as estimativas dos parâmetros para o modelo de mistura com distribuição Poisson pelo método da máxima verossimilhança apresentadas na Seção 4.1.

Tabela A.1: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim P(2)$ e $X_2 \sim P(1)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 2$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100				
Média	1.594752	2.502771	0.511494	0.488506
Vício	-0.40525	0.502771	0.211494	-0.21149
EQM	0.632059	1.562539	0.157684	0.157684
Variância	0.468301	1.311071	0.113068	0.113068
n = 300				
Média	1.661318	2.527893	0.498186	0.501814
Vício	-0.33868	0.527893	0.198186	-0.19819
EQM	0.506723	1.551248	0.157096	0.157096
Variância	0.39241	1.273851	0.117936	0.117936
n = 500				
Média	1.619684	2.38768	0.491988	0.508012
Vício	-0.38032	0.38768	0.191988	-0.19199
EQM	0.590687	1.191087	0.156328	0.156328
Variância	0.446494	1.041833	0.119589	0.119589
n = 1000				
Média	1.654459	2.488862	0.513644	0.486356
Vício	-0.34554	0.488862	0.213644	-0.21364
EQM	0.536162	1.506479	0.171844	0.171844
Variância	0.417181	1.268763	0.126326	0.126326

Tabela A.2: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim P(2)$ e $X_2 \sim P(3)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 3$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100				
Média	1.906892	3.462773	0.392558	0.607442
Vício	-0.09311	0.462773	0.092558	-0.09256
EQM	0.930602	1.762784	0.119588	0.119588
Variância	0.922855	1.550176	0.111132	0.111132
n = 300				
Média	1.850838	3.517147	0.412679	0.587321
Vício	-0.14916	0.517147	0.112679	-0.11268
EQM	0.846973	1.905002	0.13464	0.13464
Variância	0.825549	1.6392	0.122066	0.122066
n = 500				
Média	1.769873	3.467287	0.404346	0.595654
Vício	-0.23013	0.467287	0.104346	-0.10435
EQM	0.902928	1.530961	0.136517	0.136517
Variância	0.85082	1.313917	0.125755	0.125755
n = 1000				
Média	1.749699	3.437942	0.405884	0.594116
Vício	-0.2503	0.437942	0.105884	-0.10588
EQM	0.747994	1.410211	0.130836	0.130836
Variância	0.68603	1.219637	0.119744	0.119744

Tabela A.3: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim P(2)$ e $X_2 \sim P(5)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 5$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100				
Média	1.958684	5.20997	0.340681	0.659319
Vício	-0.04132	0.20997	0.040681	-0.04068
EQM	0.657448	0.84925	0.038916	0.038916
Variância	0.656398	0.805968	0.037298	0.037298
n = 300				
Média	1.995763	5.05631	0.317374	0.682626
Vício	-0.00424	0.05631	0.017374	-0.01737
EQM	0.227074	0.143669	0.014613	0.014613
Variância	0.227283	0.140639	0.014326	0.014326
n = 500				
Média	1.999834	5.036498	0.309092	0.690908
Vício	-0.00017	0.036498	0.009092	-0.00909
EQM	0.141888	0.069521	0.008405	0.008405
Variância	0.14203	0.068257	0.00833	0.00833
n = 1000				
Média	1.994608	5.012563	0.302948	0.697052
Vício	-0.00539	0.012563	0.002948	-0.00295
EQM	0.066688	0.03262	0.003818	0.003818
Variância	0.066726	0.032495	0.003813	0.003813

Tabela A.4: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim P(2)$ e $X_2 \sim P(7)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\lambda_1 = 2$	$\lambda_2 = 7$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100				
Média	1.993379	7.041482	0.307077	0.692923
Vício	-0.00662	0.041482	0.007077	-0.00708
EQM	0.258708	0.22968	0.00749	0.00749
Variância	0.258923	0.228187	0.007447	0.007447
n = 300				
Média	1.994445	7.010999	0.300936	0.699064
Vício	-0.00555	0.010999	0.000936	-0.00094
EQM	0.078459	0.067161	0.002122	0.002122
Variância	0.078507	0.067107	0.002124	0.002124
n = 500				
Média	2.001514	7.004442	0.302231	0.697769
Vício	0.001514	0.004442	0.002231	-0.00223
EQM	0.045304	0.040482	0.001312	0.001312
Variância	0.045347	0.040503	0.001309	0.001309
n = 1000				
Média	1.989498	7.004816	0.300182	0.699818
Vício	-0.0105	0.004816	0.000182	-0.00018
EQM	0.022826	0.020797	0.000619	0.000619
Variância	0.022738	0.020794	0.00062	0.00062

A.2 Estimação dos Parâmetros dos Modelos de Mistura da Distribuição Normal pelo Método da Máxima Verossimilhança

Nesta seção serão apresentados os valores das estimativas dos parâmetros para o modelo de mistura de distribuição Normal pelo método da máxima verossimilhança apresentadas na Seção 4.2.

Tabela A.5: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim N(2,1)$ e $X_2 \sim N(5,1)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 5$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	1.894595	4.836979	0.367185	1.511060	0.011251	0.988749
Vício	-0.105405	-0.163021	-0.632815	0.511060	-0.288749	0.288749
EQM	1.210585	6.424005	43.191745	26.668911	3.241139	3.241139
Variância	1.200675	6.403833	42.834124	26.434163	3.160924	3.160924
n = 300						
Média	1.978963	4.959278	0.809773	1.168039	0.172129	0.827871
Vício	-0.021037	-0.040722	-0.190227	0.168039	-0.127871	0.127871
EQM	0.143558	0.232334	0.095353	0.095247	3.328199	3.328199
Variância	0.143258	0.230906	0.059226	0.067077	3.315163	3.315163
n = 500						
Média	1.994485	4.970311	0.856768	1.134819	0.252658	0.747342
Vício	-0.005515	-0.029689	-0.143232	0.134819	-0.047342	0.047342
EQM	0.084807	0.164505	0.046339	0.057119	1.240484	1.240484
Variância	0.084862	0.163787	0.025849	0.038982	1.239482	1.239482
n = 1000						
Média	1.989851	4.982712	0.900514	1.084490	0.178344	0.821656
Vício	-0.010149	-0.017288	-0.099486	0.084490	-0.121656	0.121656
EQM	0.039692	0.093046	0.024758	0.022101	7.948433	7.948433
Variância	0.039628	0.092840	0.014875	0.014978	7.941574	7.941574

Tabela A.6: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim N(2,1)$ e $X_2 \sim N(5,4)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 5$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	1.868100	5.293226	0.764290	3.467712	0.034312	0.965688
Vício	0.131900	0.293226	-0.235710	-0.532288	0.265688	0.265688
EQM	4.329537	18.273997	14.088475	75.639768	5.922993	5.922993
Variância	4.316456	18.206222	14.046963	75.431870	5.858261	5.858261
n = 300						
Média	2.020653	5.114223	1.007605	3.425138	0.093436	0.906564
Vício	0.020653	0.114223	0.007605	-0.574862	0.206564	0.206564
EQM	0.559105	1.097780	1.589946	1.299521	7.764573	7.764573
Variância	0.559237	1.085819	1.591479	0.970025	7.729634	7.729634
n = 500						
Média	2.033697	5.086569	1.055936	3.596575	0.275560	0.724440
Vício	0.033697	0.086569	0.055936	-0.403425	0.024440	0.024440
EQM	0.415123	0.875685	0.250823	0.779812	0.730127	0.730127
Variância	0.414402	0.869059	0.247942	0.617678	0.730260	0.730260
n = 1000						
Média	2.022697	5.071237	1.029857	3.774013	0.232238	0.767762
Vício	0.022697	0.071237	0.029857	-0.225987	0.067762	0.067762
EQM	0.077040	0.252649	0.077406	0.416879	2.085942	2.085942
Variância	0.076602	0.247822	0.076591	0.366175	2.083434	2.083434

Tabela A.7: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim N(2,3)$ e $X_2 \sim N(5,4)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 5$	$\sigma_1^2 = 3$	$\sigma_2^2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	1.48197	5.292978	0.304004	4.090929	-0.643040	1.643040
Vício	0.51802	0.292978	-2.695996	0.090929	-0.943040	0.943040
EQM	12.0482	11.26085	51.034156	37.525277	16.574956	16.574956
Variância	11.7916	11.18620	43.809571	37.554563	15.701332	15.701332
n = 300						
Média	1.66977	5.264777	0.797262	4.676698	-1.759505	2.759505
Vício	0.33022	0.264777	-2.202738	0.676698	-2.059505	2.059505
EQM	8.68040	9.250974	391.15047	342.83347	408.76705	408.76705
Variância	8.57993	9.190058	386.68510	342.71827	404.93042	404.93042
n = 500						
Média	1.36352	5.252007	-0.925237	3.588449	-1.332140	2.332140
Vício	0.63647	0.252007	-3.925237	-0.411551	-1.632140	1.632140
EQM	200.278	9.52710	6306.2285	1366.3101	149.40541	149.40541
Variância	200.073	9.47306	6297.1181	1367.5082	146.88841	146.88841
n = 1000						
Média	0.96193	5.632735	0.103594	4.280671	-0.956501	1.956501
Vício	1.03806	0.632735	-2.896406	0.280671	-1.256501	1.256501
EQM	704.679	317.9317	3652.9132	21.07692	116.93328	116.93328
Variância	704.306	317.8492	3648.1722	21.01916	115.46995	115.46995

Tabela A.8: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim N(2,1)$ e $X_2 \sim N(7,1)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 7$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	1.992684	6.968722	0.810232	1.138677	0.260358	0.739642
Vício	0.007316	0.031278	-0.189768	0.138677	-0.039642	0.039642
EQM	0.060600	0.196141	0.080101	0.104276	0.865862	0.865862
Variância	0.060607	0.195358	0.044133	0.085130	0.865156	0.865156
n = 300						
Média	2.004109	7.003519	0.905021	1.082590	0.299560	0.700440
Vício	0.004109	0.003519	-0.094979	0.082590	-0.000440	0.000440
EQM	0.013724	0.005098	0.019177	0.025529	0.000712	0.000712
Variância	0.013721	0.005091	0.010166	0.018727	0.000713	0.000713
n = 500						
Média	1.995611	7.002574	0.930773	1.066596	0.298829	0.701171
Vício	0.004389	0.002574	-0.069227	0.066596	-0.001171	0.001171
EQM	0.007398	0.003246	0.011900	0.013467	0.000437	0.000437
Variância	0.007386	0.003243	0.007115	0.009041	0.000436	0.000436
n = 1000						
Média	2.001796	7.001655	0.952474	1.047779	0.300115	0.699885
Vício	0.001796	0.001655	-0.047526	0.047779	0.000115	-0.000115
EQM	0.003995	0.001616	0.006057	0.006871	0.000226	0.000226
Variância	0.003995	0.001615	0.003802	0.004593	0.000226	0.000226

Tabela A.9: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim N(2,1)$ e $X_2 \sim N(7,4)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 7$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	1.947132	6.781561	0.961952	3.668754	0.012020	0.987980
Vício	0.052868	0.218439	-0.038048	-0.331246	-0.287980	0.287980
EQM	0.432218	2.001133	0.373177	1.486254	4.874240	4.874240
Variância	0.429853	1.955373	0.372101	1.377907	4.796104	4.796104
n = 300						
Média	1.979826	6.891946	0.980554	3.909372	0.075859	0.924141
Vício	0.020174	0.108054	-0.019446	-0.090628	-0.224141	0.224141
EQM	0.108084	0.832261	0.091954	0.611800	5.601537	5.601537
Variância	0.107785	0.821406	0.091667	0.604191	5.556855	5.556855
n = 500						
Média	1.990380	6.963028	0.986234	3.965905	0.201976	0.798024
Vício	0.009620	0.036972	-0.013766	-0.034095	-0.098024	0.098024
EQM	0.050635	0.328751	0.044097	0.313136	2.843906	2.843906
Variância	0.050593	0.327711	0.043951	0.312285	2.837134	2.837134
n = 1000						
Média	1.975763	6.907128	0.989596	3.935059	0.118093	0.881907
Vício	0.024237	0.092872	-0.010404	-0.064941	-0.181907	0.181907
EQM	0.072591	0.679837	0.029932	0.301552	4.113007	4.113007
Variância	0.072076	0.671883	0.029853	0.297632	4.084001	4.084001

Tabela A.10: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim N(2,3)$ e $X_2 \sim N(7,4)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 7$	$\sigma_1^2 = 3$	$\sigma_2^2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	1.560388	7.59958	4.272312	11.797282	-0.382293	1.382293
Vício	0.439612	0.59958	1.272312	7.797282	-0.682293	0.682293
EQM	11.14869	13.4756	370.53453	150.69571	18.080996	18.080998
Variância	10.96640	13.1292	369.2850	89.98809	17.63310	17.63310
n = 300						
Média	1.647680	7.03934	6.159170	13.719137	-0.227553	1.227553
Vício	0.352320	0.03934	3.159170	9.719137	-0.527553	0.527553
EQM	5.836805	9.28930	233.09794	147.02535	16.697083	16.697083
Variância	5.718394	9.29705	223.34093	52.616340	16.435206	16.43520
n = 500						
Média	1.611802	6.87325	6.631448	141.69807	-0.982465	1.982465
Vício	0.388198	0.12674	3.631448	137.69807	-1.282465	1.282465
EQM	13.56491	7.44230	112.1109	16229019.	211.8497	211.8497
Variância	13.42764	7.43367	99.02259	16226285.	210.4154	210.4154
n = 1000						
Média	1.690947	7.01672	7.577509	14.883723	-0.333222	1.333222
Vício	-0.309053	0.01672	4.577509	10.883723	-0.633222	0.633222
EQM	29.81608	3.49121	44.74931	144.21234	28.429014	28.429014
Variância	29.750318	3.494425	23.819546	25.782689	28.056100	28.056100

Tabela A.11: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim N(5,1)$ e $X_2 \sim N(9,1)$, $m = 2$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$, $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 9$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	4.925713	8.858637	0.721034	1.208232	0.190239	0.809761
Vício	0.074287	0.141363	-0.278966	0.208232	-0.109761	0.109761
EQM	0.687649	1.322930	0.924637	0.223812	2.100964	2.100964
Variância	0.682813	1.304250	0.847662	0.180632	2.091007	2.091007
n = 300						
Média	4.986239	8.975849	0.875868	1.114030	0.259677	0.740323
Vício	0.013761	0.024151	-0.124132	0.114030	-0.040323	0.040323
EQM	0.113719	0.266842	0.039263	0.040882	1.140665	1.140665
Variância	0.113643	0.266525	0.023878	0.027907	1.140179	1.140179
n = 500						
Média	4.984341	8.964220	0.904555	1.085397	0.141625	0.858375
Vício	0.015659	0.035780	-0.095445	0.085397	-0.158375	0.158375
EQM	0.128984	0.311387	0.021142	0.023855	19.423221	19.423221
Variância	0.128868	0.310417	0.012045	0.016579	19.417556	19.417556
n = 1000						
Média	4.995218	8.990764	0.933682	1.057763	0.288201	0.711799
Vício	0.004782	0.009236	-0.066318	0.057763	-0.011799	0.011799
EQM	0.034762	0.081725	0.019131	0.010720	0.156947	0.156947
Variância	0.034774	0.081721	0.014748	0.007391	0.156965	0.156965

Tabela A.12: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura de Distribuições Independente com distribuição $X_1 \sim N(5,4)$ e $X_2 \sim N(9,9)$. $m = 2$, $p_1 = 0.3$. $p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 9$	$\sigma_1^2 = 4$	$\sigma_2^2 = 9$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	4.878487	9.961639	2.566103	7.155240	0.014200	0.985800
Vício	-0.121513	0.961639	-1.433897	-1.844760	-0.285800	0.285800
EQM	39.412256	15.784570	11.970532	15.256529	3.319700	3.319700
Variância	39.436928	14.874694	9.924397	11.865255	3.241260	3.241260
n = 300						
Média	5.105721	9.605188	3.286484	7.594320	-0.043566	1.043566
Vício	0.105721	0.605188	-0.713516	-1.405680	-0.343566	0.343566
EQM	3.236672	7.149978	10.216809	9.832322	7.286786	7.286785
Variância	3.228724	6.790516	9.717422	7.864250	7.175924	7.175924
n = 500						
Média	5.087856	9.457266	3.642783	7.895311	0.036895	0.963105
Vício	0.087856	0.457266	-0.357217	-1.104689	-0.263105	0.263105
EQM	2.578932	4.021188	3.242857	5.622861	7.534667	7.534667
Variância	2.573787	3.815912	3.118371	4.406930	7.472916	7.472916
n = 1000						
Média	5.157272	9.341268	3.955578	8.225744	0.207324	0.792676
Vício	0.157272	0.341268	-0.044422	-0.774256	-0.092676	0.092676
EQM	0.736688	1.701569	1.610997	3.268684	2.282101	2.282101
Variância	0.712667	1.586692	1.610635	2.671884	2.275788	2.275788

Tabela A.13: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(5,1)$ e $X_2 \sim N(11,1)$. $m = 2$, $p_1 = 0.3$. $p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 11$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	4.960930	10.913563	0.839394	1.112950	-0.022476	1.022476
Vício	0.039070	-0.086437	-0.160606	0.112950	-0.322476	0.322476
EQM	0.288088	0.851819	0.070693	0.073282	18.515802	18.515802
Variância	0.286848	0.845193	0.044943	0.060585	18.430241	18.430241
n = 300						
Média	5.002467	10.995648	0.916456	1.068150	0.300255	0.699745
Vício	0.002467	-0.004352	-0.083544	0.068150	0.000255	-0.000255
EQM	0.011840	0.004693	0.016196	0.017340	0.000726	0.000726
Variância	0.011846	0.004678	0.009226	0.012708	0.000727	0.000727
n = 500						
Média	5.001437	10.999822	0.937281	1.055109	0.299997	0.700003
Vício	0.001437	-0.000178	-0.062719	0.055109	-0.000003	0.000003
EQM	0.007451	0.003030	0.010451	0.010721	0.000433	0.000433
Variância	0.007456	0.003033	0.006524	0.007692	0.000434	0.000434
n = 1000						
Média	5.001305	10.998624	0.956707	1.037914	0.300645	0.699355
Vício	0.001305	-0.001376	-0.043293	0.037914	0.000645	-0.000645
EQM	0.003644	0.001427	0.005061	0.005467	0.000209	0.000209
Variância	0.003646	0.001427	0.003190	0.004034	0.000209	0.000209

Tabela A.14: Estimacão dos parâmetros por Simulao de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura com distribuico $X_1 \sim N(5,4)$ e $X_2 \sim N(11,9)$. $m = 2$, $p_1 = 0.3$. $p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicaoes.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 11$	$\sigma_1^2 = 4$	$\sigma_2^2 = 9$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	3.19208	10.27423	2.872490	6.565017	0.00874	0.99125
Vício	1.807915	0.7257637	1.127509	2.434982	0.29125	0.29125
EQM	2082.053	154.04384	27.53477	3328.775	3.16283	3.16283
Variância	2080.866	153.6707	26.3243	3326.172	3.08108	3.081080
n = 300						
Média	5.016826	10.951841	3.741527	8.679821	0.2047203	0.7952797
Vício	0.016826	0.0481586	0.258472	0.320178	0.0952797	0.0952797
EQM	1.486012	2.6583983	4.774335	4.906597	3.4615182	3.4615182
Variância	1.487216	2.6587378	4.712239	4.808892	3.4558958	3.4558959
n = 500						
Média	4.988162	10.930159	3.721350	8.791265	0.1361263	0.8638737
Vício	0.011837	0.0698408	0.278649	0.208734	0.1638737	0.1638737
EQM	1.170734	2.1792063	36.88408	4.734424	18.981022	18.981022
Variância	1.171765	2.1765051	36.84328	4.695550	18.973141	18.973141
n = 1000						
Média	5.020464	11.00698	3.973906	8.955845	0.0647212	0.9352788
Vício	0.020464	0.006981	0.026093	-0.04415	0.2352788	0.2352788
EQM	0.198573	0.386893	0.752866	1.679689	57.109725	57.109725
Variância	0.1983531	0.3872320	0.7529390	1.679418	57.111480	57.11148

Tabela A.15: Estimacão dos parâmetros por Simulao de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura com distribuico $X_1 \sim N(5,9)$ e $X_2 \sim N(9,16)$. $m = 2$, $p_1 = 0.3$. $p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicaoes.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 9$	$\sigma_1^2 = 9$	$\sigma_2^2 = 16$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	3.94530	9.641452	3.500365	11.32090	-0.19889	1.1988903
Vício	-1.0546	0.641452	-5.49963	-4.679098	-0.49889	0.4988903
EQM	12.0287	18.31770	452.0238	127.7191	5.19417	5.1941794
Variância	10.9273	17.92416	422.2000	105.9310	4.950238	4.950238
n = 300						
Média	4.08145	9.133104	6.079543	13.288501	-0.88284	1.8828413
Vício	0.600428	0.348426	-2.340878	-2.792745	0.72428	0.7242823
EQM	51.6786	10.49955	56.08466	233.9009	185.2792	185.27921
Variância	50.8857	10.49233	47.60320	226.7755	184.0641	184.06417
n = 500						
Média	4.399571	9.348426	6.6591217	13.207254	0.4242823	1.4242823
Vício	0.011837	0.0698408	0.278649	0.208734	0.1638737	0.1638737
EQM	55.19248	52.57479	95.373584	45.809197	40.136713	40.136713
Variância	54.88685	52.50590	89.983856	38.047815	39.651780	39.651780
n = 1000						
Média	4.665990	9.317109	7.7134465	14.241003	0.0507733	1.0507733
Vício	0.334009	0.317109	1.2865535	1.7589963	0.3507733	0.3507733
EQM	8.703078	13.44333	17.205459	17.079726	27.327234	27.327234
Variância	8.600116	13.35613	15.565805	13.999658	27.231423	27.231423

Tabela A.16: Estimacão dos parâmetros por Simulaoes de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura com distribuico $X_1 \sim N(5,9)$ e $X_2 \sim N(11,16)$. $m = 2$, $p_1 = 0.3$. $p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicaoes.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 11$	$\sigma_1^2 = 9$	$\sigma_2^2 = 16$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	4.289528	10.666129	5.530316	12.662055	-0.07335	1.073353
Vício	-0.71047	-0.333871	-3.469684	-3.337944	-0.37335	0.373353
EQM	9.211846	15.69621	72.856082	44.568804	5.410954	5.410954
Variância	8.715791	15.60034	60.878252	33.460391	5.276838	5.276838
n = 300						
Média	5.134889	11.50366	7.186501	16.857713	-0.32596	1.325965
Vício	0.134888	0.503667	-1.813499	0.8577127	-0.62596	0.625965
EQM	406.6581	933.3140	16.056598	6015.9891	25.56375	25.56375
Variância	407.0470	933.9943	13.235222	6021.2747	25.19711	25.19711
n = 500						
Média	4.611685	10.63564	7.459344	15.165978	-0.20660	1.206609
Vício	-0.388315	-0.364353	-1.540656	-0.834021	-0.50660	0.506608
EQM	3.069254	6.064561	17.51873	18.401693	19.42329	19.42329
Variância	2.921386	5.937745	15.16027	17.723824	19.18583	19.18583
n = 1000						
Média	4.784385	10.86086	8.109841	15.728559	0.079225	0.920775
Vício	-0.215615	-0.139134	-0.890159	-0.271440	-0.22077	0.220775
EQM	2.6942360	3.9653676	6.1196208	10.221587	6.998793	6.99879
Variância	2.650396	3.949959	5.332569	10.158065	6.957009	6.95700

Tabela A.17: Estimacão dos parâmetros por Simulaoes de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura com distribuico $X_1 \sim N(-2,1)$ e $X_2 \sim N(5,1)$. $m = 2$, $p_1 = 0.3$. $p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicaoes.

	$\mu_1 = -2$	$\mu_2 = 5$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	-1.98747	8.949404	0.851288	1.097047	-0.00825	1.008251
Vício	0.012525	3.949404	-0.14871	0.097047	-0.30825	0.308251
EQM	0.052606	16.05195	0.054705	0.053525	25.58132	25.58132
Variância	0.052501	0.454621	0.032622	0.044151	25.51181	25.51181
n = 300						
Média	-2.00203	8.998539	0.922935	1.063047	0.300373	0.699626
Vício	-0.00203	3.998539	-0.077064	0.063047	0.000373	-0.000373
EQM	0.012091	15.99316	0.015856	0.015713	0.000695	0.000695
Variância	0.012098	0.004851	0.009927	0.011750	0.000696	0.000696
n = 500						
Média	-2.00011	9.001001	0.940642	1.051813	0.300169	0.699830
Vício	-0.00011	4.001001	-0.059357	0.051813	0.000169	-0.000169
EQM	0.006920	16.01101	0.009495	0.009905	0.000400	0.000400
Variância	0.006927	0.003007	0.005978	0.007228	0.000400	0.000400
n = 1000						
Média	-2.00151	8.999204	0.956167	1.032926	0.300218	0.699781
Vício	-0.00151	3.999204	-0.043832	0.032926	0.000218	-0.000218
EQM	0.003418	15.99501	0.004981	0.004575	0.000193	0.000193
Variância	0.003419	0.0013868	0.0030628	0.0034949	0.000193	0.0001933

Tabela A.18: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via método da máxima verossimilhança para o Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(-2,1)$ e $X_2 \sim N(7,1)$. $m = 2$, $p_1 = 0.3$. $p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = -2$	$\mu_2 = 7$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	-1.995940	6.998799	0.848205	1.098199	0.297653	0.702346
Vício	0.004059	-0.001200	-0.151794	0.098199	-0.002346	0.002346
EQM	0.041270	0.043573	0.048885	0.048980	0.002341	0.002341
Variância	0.041295	0.043615	0.025870	0.039376	0.002338	0.002338
n = 300						
Média	-2.002603	6.999484	0.921384	1.063942	0.299338	0.700661
Vício	-0.002603	-0.000515	-0.078615	0.063942	-0.000661	0.000661
EQM	0.011202	0.004696	0.016229	0.016240	0.000687	0.000687
Variância	0.011207	0.004700	0.010058	0.012164	0.000687	0.000687
n = 500						
Média	-1.998590	6.998562	0.941668	1.046958	0.300781	0.699218
Vício	0.001409	-0.001437	-0.058331	0.046958	0.000781	-0.00078
EQM	0.007004	0.002969	0.008706	0.008926	0.000429	0.000429
Variância	0.007009	0.002970	0.005309	0.006727	0.000429	0.000429
n = 1000						
Média	-2.000882	6.999991	0.958446	1.039136	0.299674	0.700325
Vício	-0.000882	1.999991	-0.041553	0.039136	-0.000325	0.000325
EQM	0.003443	4.001418	0.004844	0.004965	0.000205	0.000205
Variância	0.0034465	0.0014519	0.0031213	0.0034373	0.0002059	0.000205

A.3 Estimação dos Parâmetros dos Modelos de Mistura da Distribuição Normal pelo Método do Algoritmo EM

Nesta seção serão apresentados os valores das estimativas dos parâmetros para o modelo de mistura de distribuição Normal pelo método do algoritmo EM apresentadas na Seção 4.3.

Tabela A.19: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(2,1)$ e $X_2 \sim N(5,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 5$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.230681	5.043059	0.617075	1.56150	0.3021320	0.697867
Vício	0.230682	0.043060	-0.382925	0.56150	0.002132	-0.002132
EQM	0.57317	0.08054	0.22045	0.88614	0.00952	0.00952
Variância	0.52048	0.07877	0.07390	0.57142	0.00952	0.00952
n = 300						
Média	2.133297	5.0213489	0.7983863	1.317343	0.309604	0.6903956
Vício	0.133297	0.021349	-0.201614	0.317343	0.009604	-0.009604
EQM	0.24223	0.02456	0.07427	0.40655	0.00410	0.00410
Variância	0.22468	0.02413	0.03366	0.30615	0.00401	0.00401
n = 500						
Média	2.067665	5.014776	0.8446216	1.212820	0.306606	0.693393
Vício	0.067665	0.014777	-0.155378	0.212821	0.006606	-0.006606
EQM	0.12472	0.01536	0.04528	0.23179	0.00274	0.00274
Variância	0.12027	0.01516	0.02116	0.18669	0.00269	0.00269
n = 1000						
Média	2.015910	5.003368	0.899141	1.11952	0.301197	0.698802
Vício	0.015911	0.003369	-0.100859	0.119526	0.001198	-0.001198
EQM	0.12472	0.01536	0.04528	0.23179	0.00274	0.00274
Variância	0.04564	0.00689	0.01029	0.06140	0.00121	0.00121

Tabela A.20: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(2,1)$ e $X_2 \sim N(5,4)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 5$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.339771	5.192115	0.683208	2.329234	0.259710	0.740290
Vício	0.339771	0.192115	-0.31679	-1.67076	-0.04029	0.040290
EQM	0.872650	0.481711	0.348065	3.458895	0.018245	0.018245
Variância	0.757964	0.445248	0.247955	0.668104	0.016639	0.016639
n = 300						
Média	2.193702	5.071382	0.894160	2.171383	0.281385	0.718615
Vício	0.193702	0.071382	-0.10584	-1.82861	-0.01861	0.018615
EQM	0.461709	0.155586	0.185027	3.742101	0.011816	0.011816
Variância	0.424614	0.150641	0.173999	0.398658	0.011481	0.011481
n = 500						
Média	2.171512	5.070581	0.935242	2.134452	0.289548	0.710452
Vício	0.171512	0.070581	-0.06475	-1.86554	-0.01045	0.010452
EQM	0.381990	0.115327	0.135629	3.808238	0.008907	0.008907
Variância	0.352927	0.110455	0.131567	0.328298	0.008806	0.008806
n = 1000						
Média	2.121760	5.036060	1.004634	2.086484	0.294350	0.705650
Vício	0.121760	0.036060	0.004634	-1.91351	-0.00565	0.005650
EQM	0.246423	0.064549	0.120974	3.869294	0.005106	0.005106
Variância	0.231830	0.063312	0.121074	0.207959	0.005079	0.005079

Tabela A.21: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(2,3)$ e $X_2 \sim N(5,4)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 5$	$\sigma_1^2 = 3$	$\sigma_2^2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.328072	5.198661	0.845393	2.742021	0.238058	0.761942
Vício	0.328072	0.198661	-2.15460	-1.25797	-0.06194	0.061942
EQM	1.399834	0.516243	5.012697	2.439782	0.020925	0.020925
Variância	1.293496	0.477254	0.370737	0.858128	0.017105	0.017105
n = 300						
Média	2.270695	5.116763	1.168348	2.580036	0.266027	0.733973
Vício	0.270695	0.116763	-1.83165	-1.41996	-0.03397	0.033973
EQM	0.942886	0.232104	3.630324	2.574385	0.015418	0.015418
Variância	0.870481	0.218689	0.275650	0.558647	0.014278	0.014278
n = 500						
Média	2.253369	5.104539	1.295052	2.496691	0.280640	0.719360
Vício	0.253369	0.104539	-1.70494	-1.50330	-0.01936	0.019360
EQM	0.721895	0.168011	3.141415	2.697449	0.012968	0.012968
Variância	0.658358	0.157240	0.234803	0.437949	0.012606	0.012606
n = 1000						
Média	2.193003	5.078878	1.476076	2.350786	0.299497	0.700503
Vício	0.193003	0.078878	-1.52392	-1.64921	-0.00050	0.000503
EQM	0.462822	0.090995	2.447427	3.052651	0.008676	0.008676
Variância	0.425997	0.084858	0.125209	0.333076	0.008685	0.008685

Tabela A.22: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(2,1)$ e $X_2 \sim N(7,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 7$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.045736	6.993925	0.822496	1.25821	0.301719	0.698281
Vício	0.045736	-0.00607	-0.1775	0.25821	0.001719	-0.00172
EQM	0.119563	0.018233	0.064366	0.807631	0.002618	0.002618
Variância	0.117589	0.018214	0.032891	0.7417	0.002618	0.002618
n = 300						
Média	2.006126	6.998101	0.910432	1.094344	0.300328	0.699672
Vício	0.006126	-0.0019	-0.08957	0.094344	0.000328	-0.00033
EQM	0.023264	0.007719	0.043423	0.049541	0.000773	0.000773
Variância	0.023249	0.007723	0.035436	0.040681	0.000774	0.000774
n = 500						
Média	2.009107	7.000919	0.928369	1.066695	0.301159	0.698841
Vício	0.009107	0.000919	-0.07163	0.066695	0.001159	-0.00116
EQM	0.008553	0.003051	0.011673	0.013632	0.000397	0.000397
Variância	0.008479	0.003053	0.006548	0.009192	0.000396	0.000396
n = 1000						
Média	2.00208	6.998513	0.952493	1.045225	0.300403	0.699597
Vício	0.00208	-0.00149	-0.04751	0.045225	0.000403	-0.0004
EQM	0.003712	0.001576	0.006098	0.00619	0.000228	0.000228
Variância	0.003711	0.001576	0.003845	0.004149	0.000228	0.000228

Tabela A.23: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(2,1)$ e $X_2 \sim N(7,4)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 7$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.192623	7.009381	0.941483	2.381447	0.303825	0.696175
Vício	0.192623	0.009381	-0.05852	-1.61855	0.003825	-0.00382
EQM	0.524087	0.064775	0.168369	4.730257	0.003651	0.003651
Variância	0.487471	0.064751	0.16511	2.112656	0.00364	0.00364
n = 300						
Média	2.046962	7.006673	0.999349	2.071649	0.301629	0.698371
Vício	0.046962	0.006673	-0.00065	-1.92835	0.001629	-0.00163
EQM	0.110846	0.017837	0.042169	4.246482	0.001203	0.001203
Variância	0.108749	0.01781	0.042211	0.528471	0.001202	0.001202
n = 500						
Média	2.003128	6.999972	0.989825	2.008159	0.300903	0.699097
Vício	0.003128	-0.000028	-0.010175	-1.99184	0.000903	-0.000903
EQM	0.019593	0.008034	0.024927	4.064264	0.000516	0.000516
Variância	0.019603	0.008042	0.024848	0.096932	0.000516	0.000516
n = 1000						
Média	1.999115	6.999849	0.996181	1.995084	0.300147	0.699853
Vício	-0.00089	-0.00015	-0.00382	-2.00492	0.000147	-0.00015
EQM	0.005049	0.003844	0.012045	4.039238	0.00027	0.00027
Variância	0.005053	0.003847	0.012042	0.019568	0.00027	0.00027

Tabela A.24: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(2,3)$ e $X_2 \sim N(7,4)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 2$	$\mu_2 = 7$	$\sigma_1^2 = 3$	$\sigma_2^2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.48114	7.144403	1.937957	5.343034	0.281359	0.718641
Vício	0.48114	0.144403	-1.06204	1.343034	-0.01864	0.018641
EQM	2.167437	0.533229	2.371501	6.538757	0.014061	0.014061
Variância	1.937879	0.51289	1.24481	4.739757	0.013727	0.013727
n = 300						
Média	2.321448	7.086694	2.510033	4.872812	0.295285	0.704715
Vício	0.321448	0.086694	-0.48997	0.872812	-0.00471	0.004715
EQM	1.183903	0.233337	0.949019	3.68639	0.007934	0.007934
Variância	1.081656	0.226047	0.709661	2.927517	0.007919	0.007919
n = 500						
Média	2.219171	7.065189	2.690555	4.496092	0.303254	0.696746
Vício	0.219171	0.065189	-0.30945	0.496092	0.003254	-0.00325
EQM	0.714373	0.125295	0.535197	2.223275	0.004916	0.004916
Variância	0.667004	0.121166	0.439881	1.979147	0.00491	0.00491
n = 1000						
Média	2.139681	7.040057	2.882872	4.306195	0.301204	0.698796
Vício	0.139681	0.040057	-0.11713	0.306195	0.001204	-0.0012
EQM	0.428132	0.066276	0.290157	1.363032	0.002326	0.002326
Variância	0.40903	0.064736	0.276715	1.270547	0.002327	0.002327

Tabela A.25: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(5,1)$ e $X_2 \sim N(9,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 9$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.141539	9.005058	0.758529	1.443252	0.309929	0.690071
Vício	0.141539	0.005058	-0.24147	0.443252	0.009929	-0.00993
EQM	0.324567	0.032854	0.105377	1.130944	0.004239	0.004239
Variância	0.304839	0.032861	0.047116	0.935407	0.004144	0.004144
n = 300						
Média	5.005109	9.002958	0.882599	1.126186	0.302166	0.697834
Vício	0.005109	0.002958	-0.1174	0.126186	0.002166	-0.00217
EQM	0.036469	0.007275	0.027834	0.103078	0.001032	0.001032
Variância	0.036479	0.007274	0.014065	0.087242	0.001029	0.001029
n = 500						
Média	5.003037	8.99809	0.913153	1.085466	0.301412	0.698588
Vício	0.003037	-0.00191	-0.08685	0.085466	0.001412	-0.00141
EQM	0.014131	0.003932	0.016222	0.028746	0.000552	0.000552
Variância	0.014136	0.003933	0.008688	0.021464	0.000551	0.000551
n = 1000						
Média	5.002792	9.000405	0.934209	1.053366	0.300209	0.699791
Vício	0.002792	0.000405	-0.06579	0.053366	0.000209	-0.00021
EQM	0.005812	0.001806	0.008864	0.008585	0.000294	0.000294
Variância	0.00581	0.001807	0.00454	0.005743	0.000294	0.000294

Tabela A.26: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(5,4)$ e $X_2 \sim N(9,9)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 9$	$\sigma_1^2 = 4$	$\sigma_2^2 = 9$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.50861	9.237851	1.2688	3.888116	0.266926	0.733074
Vício	0.50861	0.237851	-2.7312	-5.11188	-0.03307	0.033074
EQM	1.75049	0.645587	8.164186	28.1046	0.016489	0.016489
Variância	1.493299	0.589603	0.705439	1.975224	0.01541	0.01541
n = 300						
Média	5.305252	9.094928	1.651595	3.532281	0.286726	0.713274
Vício	0.305252	0.094928	-2.34841	-5.46772	-0.01327	0.013274
EQM	0.965521	0.21259	5.951979	31.21671	0.010286	0.010286
Variância	0.873215	0.203783	0.437409	1.322078	0.01012	0.01012
n = 500						
Média	5.212413	9.070201	1.804003	3.370548	0.293715	0.706285
Vício	0.212413	0.070201	-2.196	-5.62945	-0.00629	0.006285
EQM	0.637781	0.139594	5.110114	32.62563	0.007431	0.007431
Variância	0.593255	0.134801	0.287997	0.93584	0.007399	0.007399
n = 1000						
Média	5.103579	9.0363	1.927628	3.158913	0.299814	0.700186
Vício	0.103579	0.0363	-2.07237	-5.84109	-0.00019	0.000186
EQM	0.291164	0.069666	4.449373	34.60884	0.00374	0.00374
Variância	0.280716	0.068416	0.1548	0.491034	0.003743	0.003743

Tabela A.27: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(5,1)$ e $X_2 \sim N(11,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 11$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.01238	10.99261	0.829919	1.165501	0.301362	0.698638
Vício	0.01238	-0.00739	-0.17008	0.165501	0.001362	-0.00136
EQM	0.064179	0.017935	0.055877	0.457141	0.002338	0.002338
Variância	0.06409	0.017898	0.026976	0.430181	0.002339	0.002339
n = 300						
Média	5.001897	11.0009	0.912942	1.065323	0.30088	0.69912
Vício	0.001897	0.000904	-0.08706	0.065323	0.00088	-0.00088
EQM	0.010505	0.004837	0.018384	0.017704	0.000713	0.000713
Variância	0.010512	0.004841	0.010815	0.01345	0.000713	0.000713
n = 500						
Média	5.001406	11.00068	0.933341	1.053385	0.300264	0.699736
Vício	0.001406	0.000682	-0.06666	0.053385	0.000264	-0.00026
EQM	0.006777	0.00307	0.010537	0.010095	0.000383	0.000383
Variância	0.006782	0.003073	0.0061	0.007253	0.000383	0.000383
n = 1000						
Média	4.99999632	10.99927	0.953448	1.039091	0.29935	0.70065
Vício	-0.000004	-0.00073	-0.04655	0.039091	-0.00065	0.00065
EQM	0.00337376	0.001457	0.005355	0.005419	0.000208	0.000208
Variância	0.00337714	0.001458	0.003191	0.003895	0.000207	0.000207

Tabela A.28: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(5,4)$ e $X_2 \sim N(11,9)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 11$	$\sigma_1^2 = 4$	$\sigma_2^2 = 9$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.283964	11.04091	1.705217	3.850178	0.304614	0.695386
Vício	0.283964	0.040907	-2.29478	-5.14982	0.004614	-0.00461
EQM	1.027481	0.100658	5.658702	31.98452	0.004658	0.004658
Variância	0.947793	0.099084	0.393066	5.469321	0.004641	0.004641
n = 300						
Média	5.081033	11.00863	1.976478	3.205453	0.304591	0.695409
Vício	0.081033	0.008628	-2.02352	-5.79455	0.004591	-0.00459
EQM	0.248999	0.031811	4.326952	35.25497	0.001486	0.001486
Variância	0.242675	0.031768	0.232545	1.679869	0.001467	0.001467
n = 500						
Média	5.014393	10.99622	1.979316	3.034971	0.300546	0.699454
Vício	0.014393	-0.00378	-2.02068	-5.96503	0.000546	-0.00055
EQM	0.073353	0.020537	4.259563	35.99494	0.000846	0.000846
Variância	0.073219	0.020544	0.176574	0.413782	0.000847	0.000847
n = 1000						
Média	5.001225	11.00088	1.996019	2.997779	0.300314	0.699686
Vício	0.001225	0.000879	-2.00398	-6.00222	0.000314	-0.00031
EQM	0.013183	0.006789	4.071074	36.07614	0.000295	0.000295
Variância	0.013194	0.006795	0.055188	0.049535	0.000295	0.000295

Tabela A.29: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(5,9)$ e $X_2 \sim N(9,16)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 9$	$\sigma_1^2 = 9$	$\sigma_2^2 = 16$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.352488	9.259068	1.544109	4.973852	0.234853	0.765147
Vício	0.352488	0.259068	-7.45589	-11.0261	-0.06515	0.065147
EQM	2.343289	1.0531	57.00735	124.0657	0.021337	0.021337
Variância	2.221262	0.98697	1.418449	2.492273	0.01711	0.01711
n = 300						
Média	5.436822	9.232939	2.099655	4.952228	0.255622	0.744378
Vício	0.436822	0.232939	-6.90034	-11.0478	-0.04438	0.044378
EQM	1.904709	0.656096	48.85184	123.8595	0.01953	0.01953
Variância	1.715611	0.602437	1.238326	1.808074	0.017578	0.017578
n = 500						
Média	5.343663	9.170706	2.378545	4.712149	0.273162	0.726838
Vício	0.343663	0.170706	-6.62146	-11.2879	-0.02684	0.026838
EQM	1.329738	0.460161	44.81488	128.8587	0.015554	0.015554
Variância	1.212847	0.431452	0.972183	1.444597	0.014849	0.014849
n = 1000						
Média	5.27603	9.124068	2.616339	4.506816	0.28625	0.71375
Vício	0.27603	0.124068	-6.38366	-11.4932	-0.01375	0.01375
EQM	0.946144	0.256032	41.40334	133.2239	0.011065	0.011065
Variância	0.870822	0.24088	0.652865	1.131781	0.010887	0.010887

Tabela A.30: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(5,9)$ e $X_2 \sim N(11,16)$. $m = 2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = 5$	$\mu_2 = 11$	$\sigma_1^2 = 9$	$\sigma_2^2 = 16$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.481638	11.06883	2.217537	5.592525	0.295725	0.704275
Vício	0.481638	0.068826	-6.78246	-10.4075	-0.00428	0.004275
EQM	2.009265	0.303986	47.10019	116.7376	0.008114	0.008114
Variância	1.779069	0.299549	1.099481	8.430477	0.008103	0.008103
n = 300						
Média	5.184256	11.03882	2.747315	4.569851	0.303355	0.696645
Vício	0.184256	0.038818	-6.25268	-11.4301	0.003355	-0.00336
EQM	0.646258	0.084194	39.52088	133.8418	0.00284	0.00284
Variância	0.61292	0.08277	0.425242	3.196657	0.002832	0.002832
n = 500						
Média	5.081978	11.00657	2.880462	4.297072	0.301307	0.698693
Vício	0.081978	0.006567	-6.11954	-11.7029	0.001307	-0.00131
EQM	0.314926	0.054348	37.84081	138.7111	0.001859	0.001859
Variância	0.308514	0.054359	0.392456	1.754346	0.001859	0.001859
n = 1000						
Média	5.031174	11.00972	2.970968	4.05698	0.302437	0.697563
Vício	0.031174	0.009717	-6.02903	-11.943	0.002437	-0.00244
EQM	0.086934	0.017147	36.50578	143.0603	0.000661	0.000661
Variância	0.086049	0.01707	0.156715	0.424999	0.000655	0.000655

Tabela A.31: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(-2,1)$ e $X_2 \sim N(5,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = -2$	$\mu_2 = 5$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	-1.993922	8.997106	0.845870	1.095930	0.300060	0.699940
Vício	0.006078	3.997106	-0.154130	0.095930	0.000060	-0.000060
EQM	0.035288	15.991260	0.050047	0.047413	0.002047	0.002047
Variância	0.035286	0.014419	0.026317	0.038249	0.002049	0.002049
n = 300						
Média	-1.995307	9.002246	0.916983	1.062483	0.299653	0.700347
Vício	0.004693	4.002246	-0.083017	0.062483	-0.000347	0.000347
EQM	0.011104	16.022903	0.016643	0.016437	0.000677	0.000677
Variância	0.011093	0.004933	0.009761	0.012545	0.000677	0.000677
n = 500						
Média	-1.998279	8.999477	0.939553	1.050956	0.299156	0.700844
Vício	0.001721	3.999477	-0.060447	0.050956	-0.000844	0.000844
EQM	0.006749	15.998620	0.009666	0.009463	0.000458	0.000458
Variância	0.006752	0.002804	0.006018	0.006873	0.000458	0.000458
n = 1000						
Média	-1.997069	9.000414	0.957220	1.034076	0.299940	0.700060
Vício	0.002931	4.000414	-0.042780	0.034076	-0.000060	0.000060
EQM	0.003571	16.004794	0.005024	0.004305	0.000208	0.000208
Variância	0.003566	0.001481	0.003197	0.003147	0.000209	0.000209

Tabela A.32: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim N(-2,1)$ e $X_2 \sim N(5,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\mu_1 = -2$	$\mu_2 = 7$	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	-2.000467	7.002865	0.845045	1.096137	0.299638	0.700362
Vício	-0.000467	0.002865	-0.154955	0.096137	-0.000362	0.000362
EQM	0.033222	0.014071	0.051748	0.045544	0.002092	0.002092
Variância	0.033255	0.014077	0.027764	0.036338	0.002094	0.002094
n = 300						
Média	-2.002411	6.996843	0.919823	1.061296	0.299369	0.700631
Vício	-0.002411	-0.003157	-0.080177	0.061296	-0.000631	0.000631
EQM	0.011126	0.005014	0.016788	0.015722	0.000668	0.000668
Variância	0.011132	0.005009	0.010370	0.011977	0.000668	0.000668
n = 500						
Média	-1.999342	6.998498	0.939049	1.048736	0.301118	0.698882
Vício	0.000658	-0.001502	-0.060951	0.048736	0.001118	-0.001118
EQM	0.006424	0.002857	0.009554	0.009089	0.000415	0.000415
Variância	0.006430	0.002857	0.005844	0.006721	0.000414	0.000414
n = 1000						
Média	-1.999601	6.999655	0.958462	1.036666	0.299964	0.700036
Vício	0.000399	-0.000345	-0.041538	0.036666	-0.000036	0.000036
EQM	0.003306	0.001361	0.004837	0.004716	0.000201	0.000201
Variância	0.003309	0.001362	0.003115	0.003375	0.000202	0.000202

A.4 Estimação dos Parâmetros do Modelo de Mistura da Distribuição Gama pelo Método do Algoritmo EM

Nesta seção serão apresentados os valores das estimativas dos parâmetros para o modelo de mistura de distribuição Gama pelo método do algoritmo EM apresentadas na Seção 4.4.

Tabela A.33: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ e $X_2 \sim \Gamma(5,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = 5$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.641569	9.18189749	0.436967	1.369003	0.229807	0.770193
Vício	0.641569	4.18189749	-0.56303	0.369003	-0.07019	0.070193
EQM	1.145498	52.3862613	0.424228	0.335728	0.020568	0.000574
Variância	1.031257	61.317366	0.1188	0.279531	0.01829	0.01829
n = 300						
Média	2.30358	5.844497	0.635971	1.367436	0.271873	0.728127
Vício	0.30358	0.844497	-0.36403	0.367436	-0.02813	0.028127
EQM	0.560327	2.237198	0.241111	0.284742	0.019174	0.019174
Variância	0.468635	4.886773	0.108702	0.149882	0.018402	0.018402
n = 500						
Média	2.222932	5.68319508	0.685813	1.349335	0.289525	0.710475
Vício	0.222932	0.68319508	-0.31419	0.349335	-0.01047	0.010475
EQM	0.355213	2.12132419	0.185428	0.240123	0.016901	0.016901
Variância	0.30582	3.52069842	0.086801	0.118207	0.016808	0.016808
n = 1000						
Média	2.078637	5.663123	0.770123	1.354673	0.323083	0.676917
Vício	0.078637	0.663123	-0.22988	0.354673	0.023083	-0.02308
EQM	0.144468	2.324276	0.11214	0.226441	0.015242	0.015242
Variância	0.138423	2.758027	0.059356	0.100749	0.014723	0.014723

Tabela A.34: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ e $X_2 \sim \Gamma(5,4)$. $m = 2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = 5$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.230914	6.835387	0.832102	2.530084	0.29745	0.70255
Vício	0.230914	1.835387	-0.1679	-1.46992	-0.00255	0.00255
EQM	0.767709	11.22741	0.269122	3.378084	0.011706	0.011706
Variância	0.715103	12.29757	0.241173	1.218648	0.011711	0.011711
n = 300						
Média	2.068344	7.56433	0.978647	2.314403	0.30624	0.69376
Vício	0.068344	2.56433	-0.02135	-1.6856	0.00624	-0.00624
EQM	0.293949	425.5976	0.143141	3.620877	0.00641	0.00641
Variância	0.289567	419.4413	0.142828	0.78042	0.006377	0.006377
n = 500						
Média	2.017318	7.60212	1.005405	2.256134	0.304429	0.695571
Vício	0.017318	2.60212	0.005405	-1.74387	0.004429	-0.00443
EQM	0.181335	475.6789	0.117292	3.644772	0.004704	0.004704
Variância	0.181216	469.3773	0.11738	0.604307	0.004689	0.004689
n = 1000						
Média	1.991854	6.995981	1.016778	2.147955	0.302052	0.697948
Vício	-0.00815	1.995981	0.016778	-1.85204	0.002052	-0.00205
EQM	0.084825	621.4217	0.072198	3.806757	0.002937	0.002937
Variância	0.084843	618.0558	0.071989	0.377064	0.002935	0.002935

Tabela A.35: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(2,3)$ e $X_2 \sim \Gamma(5,4)$. $m = 2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = 5$	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.39354	8.584071	1.74908	5.474893	0.252281	0.747719
Vício	0.39354	3.584071	-1.25092	1.474893	-0.04772	0.047719
EQM	0.857509	60.94809	3.290502	6.17039	0.018601	0.018601
Variância	0.703339	62.15649	1.727429	3.99908	0.01634	0.01634
n = 300						
Média	2.230252	7.617566	1.203412	2.722495	0.283828	0.716172
Vício	0.230252	2.617566	-1.79659	-1.27751	-0.01617	0.016172
EQM	0.471908	83.0084	3.587024	2.25322	0.016481	0.016481
Variância	0.419311	78.14125	0.359656	0.621822	0.016236	0.016236
n = 500						
Média	2.156687	6.033725	1.3218	2.650392	0.302508	0.697492
Vício	0.156687	1.033725	-1.6782	-1.34961	0.002508	-0.00251
EQM	0.310469	7.534261	3.091369	2.329061	0.013873	0.013873
Variância	0.286204	7.037474	0.27529	0.508128	0.01388	0.01388
n = 1000						
Média	1.985371	7.10463	2.793927	4.948979	0.324056	0.675944
Vício	-0.01463	2.10463	-0.20607	0.948979	0.024056	-0.02406
EQM	0.106665	292.5249	0.637626	2.837881	0.009318	0.009318
Variância	0.106558	288.3838	0.595756	1.93926	0.008748	0.008748

Tabela A.36: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ e $X_2 \sim \Gamma(7,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7. n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = 7$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.468819	16.42147	0.578105	1.588389	0.294762	0.705238
Vício	0.468819	9.421469	-0.4219	0.588389	-0.00524	0.005238
EQM	1.460162	1503.563	0.267861	0.862288	0.014058	0.014058
Variância	1.241612	1426.401	0.089955	0.516603	0.014045	0.014045
n = 300						
Média	2.163399	10.83855	0.714253	1.462736	0.310697	0.689303
Vício	0.163399	3.838549	-0.28575	0.462736	0.010697	-0.0107
EQM	0.387794	499.4371	0.136321	0.569687	0.010316	0.010316
Variância	0.361456	489.4405	0.054725	0.355919	0.010212	0.010212
n = 500						
Média	2.064349	9.622003	0.773819	1.41498	0.317701	0.682299
Vício	0.064349	2.622003	-0.22618	0.41498	0.017701	-0.0177
EQM	0.202747	308.6277	0.092399	0.469005	0.009403	0.009403
Variância	0.198805	305.2406	0.041283	0.297094	0.009099	0.009099
n = 1000						
Média	2.018512	8.879585	0.841829	1.280367	0.314721	0.685279
Vício	0.018512	1.879585	-0.15817	0.280367	0.014721	-0.01472
EQM	0.097977	331.345	0.049209	0.267318	0.005497	0.005497
Variância	0.097732	328.9567	0.024215	0.188901	0.005286	0.005286

Tabela A.37: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(2,1)$ e $X_2 \sim \Gamma(7,4)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7. n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = 7$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.171905	15.32125	0.914236	2.627152	0.307776	0.692224
Vício	0.171905	8.321247	-0.08576	-1.37285	0.007776	-0.00778
EQM	0.686407	8947.59	0.163586	4.701499	0.006636	0.006636
Variância	0.657513	8887.234	0.156387	2.819607	0.006582	0.006582
n = 300						
Média	2.067905	9.6385	0.985812	2.159328	0.299258	0.700742
Vício	0.067905	2.6385	-0.01419	-1.84067	-0.00074	0.000742
EQM	0.173429	684.9145	0.080239	4.118188	0.003097	0.003097
Variância	0.168987	680.1792	0.080118	0.730847	0.0031	0.0031
n = 500						
Média	2.017532	10.11192	0.99934	2.124001	0.296074	0.703926
Vício	0.017532	3.111925	-0.00066	-1.876	-0.00393	0.003926
EQM	0.091193	1858.001	0.062185	4.108564	0.002834	0.002834
Variância	0.090976	1850.167	0.062246	0.589782	0.002822	0.002822
n = 1000						
Média	2.038662	9.462574	0.970879	2.065448	0.292524	0.707476
Vício	0.038662	2.462574	-0.02912	-1.93455	-0.00748	0.007476
EQM	0.041601	786.1024	0.040359	3.942031	0.002338	0.002338
Variância	0.040146	780.819	0.039551	0.19974	0.002284	0.002284

Tabela A.38: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(2,3)$ e $X_2 \sim \Gamma(7,4)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7. n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = 7$	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 4$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	2.315601	53.87588	2.185223	5.836758	0.306112	0.693888
Vício	0.315601	46.87588	-0.81478	1.836758	0.006112	-0.00611
EQM	0.971532	591746.7	1.770296	12.88322	0.010177	0.010177
Variância	0.872801	590139.5	1.107542	9.519055	0.010149	0.010149
n = 300						
Média	2.067246	50.68935	2.672124	5.017895	0.307607	0.692393
Vício	0.067246	43.68935	-0.32788	1.017895	0.007607	-0.00761
EQM	0.272842	1046943	0.785981	5.862705	0.006673	0.006673
Variância	0.268589	1046080	0.679157	4.831427	0.006622	0.006622
n = 500						
Média	2.039528	36.02893	2.815294	4.579844	0.305941	0.694059
Vício	0.039528	29.02893	-0.18471	0.579844	0.005941	-0.00594
EQM	0.150967	747192.1	0.522076	3.330027	0.003991	0.003991
Variância	0.149554	747096.5	0.488448	2.996804	0.00396	0.00396
n = 1000						
Média	2.031111	13.61394	2.883698	4.334982	0.298731	0.701269
Vício	0.031111	6.613944	-0.1163	0.334982	-0.00127	0.001269
EQM	0.076396	6390.313	0.422062	1.779746	0.003162	0.003162

Tabela A.39: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(5,1)$ e $X_2 \sim \Gamma(9,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7. n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = 9$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	6.130637	28.98274	0.421709	1.271371	0.218586	0.781414
Vício	1.130637	19.98274	-0.57829	0.271371	-0.08141	0.081414
EQM	5.585897	1344.618	0.454978	0.269911	0.02556	0.02556
Variância	4.311869	1129.611	0.120679	0.196465	0.01895	0.01895
n = 300						
Média	5.452631	16.1746	0.578017	1.30662	0.24102	0.75898
Vício	0.452631	7.174596	-0.42198	0.30662	-0.05898	0.05898
EQM	2.320122	221.1008	0.293735	0.199877	0.024203	0.024203
Variância	2.117364	217.2513	0.115781	0.105967	0.020745	0.020745
n = 500						
Média	5.284887	20.38957	0.687995	1.293506	0.278164	0.721836
Vício	0.284887	11.38957	-0.31201	0.293506	-0.02184	0.021836
EQM	1.760628	1995.939	0.191099	0.169056	0.018506	0.018506
Variância	1.681149	1868.084	0.093845	0.082993	0.018047	0.018047
n = 1000						
Média	5.048877	15.56748	0.760604	1.296881	0.306892	0.693108
Vício	0.048877	6.567484	-0.2394	0.296881	0.006892	-0.00689
EQM	1.049038	1362.598	0.120474	0.149661	0.016744	0.016744
Variância	1.047696	1320.787	0.063227	0.061584	0.016713	0.016713

Tabela A.40: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(5,4)$ e $X_2 \sim \Gamma(9,9)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7. n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = 9$	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 9$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.125805	43.43474	1.358406	3.934876	0.283427	0.716573
Vício	0.125805	34.43474	-2.64159	-5.06512	-0.01657	0.016573
EQM	3.45961	58853.95	7.647177	27.96587	0.015107	0.015107
Variância	3.44723	57965.57	0.669826	2.312694	0.014848	0.014848
n = 300						
Média	5.040755	30.69435	1.73327	3.623722	0.297147	0.702853
Vício	0.040755	21.69435	-2.26673	-5.37628	-0.00285	0.002853
EQM	1.924102	179225.6	5.559052	30.35861	0.009446	0.009446
Variância	1.924366	178933.9	0.421409	1.455705	0.009447	0.009447
n = 500						
Média	5.020109	13.1342	3.982898	9.520688	0.297227	0.702773
Vício	0.020109	4.134199	-0.0171	0.520688	-0.00277	0.002773
EQM	0.919464	1612.987	0.925954	9.953231	0.002402	0.002402
Variância	0.919979	1597.493	0.926589	9.691806	0.002397	0.002397
n = 1000						
Média	5.041391	10.177462	4.003682	9.078669	0.300092	0.699908
Vício	0.041391	1.177462	0.003682	0.078669	0.000092	-0.000092
EQM	0.403019	400.143134	0.391291	2.202841	0.000776	0.000776
Variância	0.401707	399.155873	0.391670	2.198851	0.000777	0.000777

Tabela A.41: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(5,1)$ e $X_2 \sim \Gamma(11,1)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7. n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = 11$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 1$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.853711	38.37541	0.486053	1.491738	0.25651	0.74349
Vício	0.853711	27.37541	-0.51395	0.491738	-0.04349	0.04349
EQM	5.693516	8948.145	0.360832	0.605447	0.019275	0.019275
Variância	4.969663	8245.852	0.096787	0.364004	0.017401	0.017401
n = 300						
Média	5.339215	21.74976	0.666794	1.44574	0.297983	0.702017
Vício	0.339215	10.74976	-0.33321	0.44574	-0.00202	0.002017
EQM	2.947596	2505.435	0.177138	0.422265	0.014334	0.014334
Variância	2.835364	2392.27	0.066178	0.223805	0.014345	0.014345
n = 500						
Média	5.192216	19.0071	0.725687	1.408341	0.309681	0.690319
Vício	0.192216	8.007104	-0.27431	0.408341	0.009681	-0.00968
EQM	2.162282	3956.882	0.12207	0.351045	0.01222	0.01222
Variância	2.127462	3905.206	0.046869	0.184487	0.012138	0.012138
n = 1000						
Média	5.079649	17.33149	0.796783	1.313612	0.315817	0.684183
Vício	0.079649	6.331488	-0.20322	0.313612	0.015817	-0.01582
EQM	1.267688	10649.08	0.071373	0.245293	0.009016	0.009016
Variância	1.262606	10619.61	0.030106	0.147087	0.008775	0.008775

Tabela A.42: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(5,4)$ e $X_2 \sim \Gamma(11,9)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = 11$	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 9$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.448984	53.47897	1.580071	3.905418	0.296439	0.703561
Vício	0.448984	42.47897	-2.41993	-5.09458	-0.00356	0.003561
EQM	4.779825	286274.5	6.355199	30.08255	0.009565	0.009565
Variância	4.582822	284754.8	0.499642	4.131915	0.009562	0.009562
n = 300						
Média	5.128524	21.96855	1.8722	3.463792	0.305629	0.694371
Vício	0.128524	10.96855	-2.1278	-5.53621	0.005629	-0.00563
EQM	1.904039	17186	4.80156	32.86868	0.004238	0.004238
Variância	1.88941	17082.77	0.2743	2.221301	0.00421	0.00421
n = 500						
Média	5.106688	17.90085	3.878815	9.360983	0.293888	0.706112
Vício	0.106688	6.900852	-0.12119	0.360983	-0.00611	0.006112
EQM	0.637906	7331.319	0.658377	7.856952	0.002185	0.002185
Variância	0.627151	7290.988	0.644335	7.734377	0.002149	0.002149
n = 1000						
Média	5.05823	13.64104	3.947225	9.128667	0.297976	0.702024
Vício	0.05823	2.64104	-0.05278	0.128667	-0.00202	0.002024
EQM	0.26873	1859.964	0.315692	2.645166	0.00099	0.00099
Variância	0.265605	1854.844	0.31322	2.631242	0.000987	0.000987

Tabela A.43: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(5,9)$ e $X_2 \sim \Gamma(9,16)$. $m = 2, p_1 = 0.3. p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = 9$	$\beta_1 = 9$	$\beta_2 = 16$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.338532	31.086827	1.719332	5.325173	0.262336	0.737664
Vício	0.338532	22.086827	-7.28067	-10.6748	-0.03766	0.037664
EQM	3.478084	3243.8251	54.32859	117.2275	0.017887	0.017887
Variância	3.366847	2800.2303	1.321793	3.278829	0.016485	0.016485
n = 300						
Média	5.052763	28.24298	2.302354	5.098237	0.28588	0.71412
Vício	0.052763	19.24298	-6.69765	-10.9018	-0.01412	0.01412
EQM	2.005824	34640.885	45.81736	121.23	0.012853	0.012853
Variância	2.005045	34375.314	0.959862	2.383897	0.012667	0.012667
n = 500						
Média	5.029322	16.070743	2.520072	4.923577	0.298701	0.701299
Vício	0.029322	7.0707429	-6.47993	-11.0764	-0.0013	0.001299
EQM	1.583483	1788.17	42.70764	124.7836	0.010438	0.010438
Variância	1.584207	1745.9331	0.71889	2.098527	0.010447	0.010447
n = 1000						
Média	4.999402	12.41382	2.767305	4.576756	0.309715	0.690285
Vício	-0.0006	3.413819	-6.23269	-11.4232	0.009715	-0.00972
EQM	1.05485	767.5339	39.33009	131.7665	0.0075	0.0075
Variância	1.055906	756.6364	0.484085	1.277315	0.007413	0.007413

Tabela A.44: Estimação dos parâmetros por Simulações de Monte Carlo via algoritmo EM do Modelo de Mistura com distribuição $X_1 \sim \Gamma(5,9)$ e $X_2 \sim \Gamma(11,16)$. $m = 2, p_1 = 0.3, p_2 = 0.7$. $n \in \{100, 300, 500, 1000\}$ e $re = 1000$ replicações.

	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = 11$	$\beta_1 = 9$	$\beta_2 = 16$	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.7$
n = 100						
Média	5.358961	28.87555	2.204482	5.56343	0.302774	0.697226
Vício	0.358961	17.87555	-6.79552	-10.4366	0.002774	-0.00277
EQM	4.823053	7255.539	47.21854	115.5204	0.010292	0.010292
Variância	4.698899	6950.739	1.040512	6.604981	0.010295	0.010295
n = 300						
Média	5.123833	22.34024	2.649821	4.88147	0.304551	0.695449
Vício	0.123833	11.34024	-6.35018	-11.1185	0.004551	-0.00455
EQM	2.164946	9763.314	40.92663	127.8834	0.005601	0.005601
Variância	2.151763	9644.358	0.602458	4.265929	0.005586	0.005586
n = 500						
Média	5.052149	14.33524	2.819191	4.53566	0.30831	0.69169
Vício	0.052149	3.335245	-6.18081	-11.4643	0.00831	-0.00831
EQM	1.31261	1057.362	38.60728	133.9913	0.003346	0.003346
Variância	1.311202	1047.285	0.405285	2.562743	0.00328	0.00328
n = 1000						
Média	5.041623	19.67665	2.917107	4.239924	0.300702	0.699298
Vício	0.041623	8.676649	-6.08289	-11.7601	0.000702	-0.0007
EQM	0.57955	32217.94	37.29885	139.3894	0.002083	0.002083
Variância	0.578396	32174.83	0.297552	1.091144	0.002084	0.002084