

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CURSO DE BACHARELADO EM ESTATÍSTICA

FELIPE LAZZARI VARGAS

**Identificação da Ordem de um Processo
Auto-Regressivo Estacionário**

Trabalho de Conclusão apresentado como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Bacharel em Estatística

Prof. Dr. Guilherme Pumi
Orientador

Prof^a. Dr^a. Sílvia Regina Costa Lopes
Co-orientador

Porto Alegre, dezembro de 2015

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Vargas, Felipe Lazzari

Identificação da Ordem de um Processo Auto-Regressivo Estacionário / Felipe Lazzari Vargas. – Porto Alegre: Curso de Bacharelado em Estatística da UFRGS, 2015.

96 f.: il.

Orientador: Guilherme Pumi

Co-orientadora: Sílvia Regina Costa Lopes.

Trabalho de Conclusão de curso (Graduação)– Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Curso de Bacharelado em Estatística, Porto Alegre, BR–RS, 2015.

1. Séries Temporais. 2. Critérios de Seleção de Modelos. 3. Identificação da Ordem. 4. Distribuição α -estável. I. Pumi, Guilherme, orient. II. Lopes, Sílvia Regina Costa, coorient. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. Carlos Alexandre Netto

Vice-Reitor: Prof. Rui Vicente Oppermann

Pró-Reitor de Graduação: Prof. Sérgio Roberto Kieling Franco

Diretor do Instituto de Matemática: Prof^a. Suzi Alves Camey

Coordenador do Curso: Prof. Álvaro Vigo

Bibliotecária-Chefe do Instituto de Matemática e Estatística: Sibila Binotto

“O que eles chamam de nossos defeitos é o que nós temos de diferente deles”.
Mario Quintana

Agradecimentos

Agradeço, com muito reconhecimento, a todos que participaram, direta ou indiretamente, da construção deste trabalho. Muitíssimo obrigado.

Aos meus pais, que sempre me transmitiram apoio, incentivo, carinho e amor incondicional.

Agradeço, especialmente, à professora Sílvia pela oportunidade de aprendizado, pela confiança e estímulo ao longo destes dois anos na Bolsa de Iniciação Científica.

Agradeço à Taiane Prass, por ceder a rotina computacional base para o trabalho. Ao Guilherme Pumi, Lucas Schmidt e à Josi Stein, pela constante ajuda e dúvidas retiradas.

E a todas as pessoas, principalmente meus familiares e amigos, que ao longo destes 5 anos tornaram a Estatística e os meus dias muito mais agradáveis.

Sumário

Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	8
Resumo	10
Abstract	11
Introdução	12
1 Conceitos Básicos	13
1.1 Processos Estocásticos e Séries Temporais	13
1.2 Classe das Distribuições α -estáveis	19
1.3 Função H-Fox	22
2 Processos Auto-Regressivos de Ordem p	27
2.1 Processo AR(p) com Inovações Gaussianas	27
2.1.1 Processo Gaussiano AR(1)	27
2.1.2 Processo AR(p) com Inovações Gaussianas	34
2.2 Processo AR(p) com Inovações α -estáveis	40
3 Critérios de Seleção de Modelos	47
3.1 Função de Máxima Verossimilhança	48
3.2 Estimativa de Máxima Verossimilhança do Parâmetro de Escala	48
4 Simulações de Monte Carlo	52
5 Aplicação	59
Considerações Finais	65
Referências	66
Apêndice A	68

Lista de Figuras

1.1	(a) Função densidade de uma α -estável para os valores de $\beta \in \{-1, 0, 1\}$ com $\alpha = 1.1$, $\sigma_a = 1$ e $\delta = 0$; (b) Função densidade de uma α -estável para os valores de $\sigma_a \in \{1, 3, 5\}$ com $\alpha = 1.5$, $\beta = 0$ e $\delta = -5$; (c) Função densidade de uma α -estável para os valores de $\delta \in \{-3, 0, 3\}$ com $\alpha = 0.5$, $\sigma_a = 1$ e $\beta = 0$; (d) Função densidade de uma α -estável para os valores de $\alpha \in \{0.8, 1.2, 1.6\}$ com $\sigma_a = 2$, $\beta = 0$ e $\delta = 3$	20
1.2	Função densidade de uma α -estável para os valores de $\alpha \in \{0.5, 1.0, 2.0\}$	22
2.1	(a) Série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(1) dado na expressão (2.1.10); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.	30
2.2	Função de log-verossimilhança de $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ em função de $\hat{\phi}_1$ supondo c e σ_ε^2 conhecidos.	31
2.3	(a) Série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(2) dado na expressão (2.1.29); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.	38
2.4	Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(1) dado na expressão (2.2.5).	41
2.5	(a) Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{700}$ referente ao processo AR(2) dado na expressão (2.2.12); (b) Função codiferença normalizada empírica; (c) Função codiferença normalizada parcial empírica.	44
2.6	(a) Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{3000}$ referente ao processo AR(2) dado na expressão (2.2.13); (b) Função codiferença normalizada empírica; (c) Função codiferença normalizada parcial empírica.	45
5.1	Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{283}$ referentes ao logaritmo natural do volume das ações da Wall-Mart negociadas diariamente na bolsa de valores de New York, no período de 01° de dezembro de 2003 à 31 de dezembro de 2004.	59
5.2	Histograma para os dados, $\{Y_t\}_{t=1}^{283}$, referentes ao logaritmo natural do volume das ações da Wall-Mart negociadas diariamente na bolsa de valores de New York, no período de 01° de dezembro de 2003 à 31 de dezembro de 2004.	60
5.3	Série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{283}$ centralizada em torno de zero.	60
5.4	(a) Função codiferença normalizada empírica; (b) Função codiferença normalizada parcial empírica.	61

5.5	Função codiferença normalizada empírica para os resíduos do modelo AR(1).	63
5.6	QQ-plot para os resíduos do modelo AR(1).	63

Lista de Tabelas

1.1	Comparação dos valores pela “ <i>dstable</i> ” e aproximações usando a H-Fox.	25
1.2	Comparação dos valores pela “ <i>dstable</i> ” e aproximações usando a H-Fox.	25
1.3	Comparação dos valores pela “ <i>dstable</i> ” e aproximações usando a H-Fox.	26
2.1	Estimativas para o modelo AR(1) apresentado no Exemplo 2.1.1.	30
2.2	Estimativas para o modelo AR(2) apresentado no Exemplo 2.1.3.	38
2.3	Estimativas para o modelo AR(2) apresentado no Exemplo 2.1.3 quando estimado com as novas observações.	39
2.4	Funções codiferença normalizada teórica e empírica para o Exemplo 2.2.1.	43
2.5	Estimativas para o modelo AR(2) apresentado no Exemplo 2.2.2.	45
2.6	Estimativas para o modelo AR(2) apresentado no Exemplo 2.2.2 quando estimado com as novas observações.	46
3.1	Critérios de seleção de modelos e suas respectivas funções penalizadoras.	49
3.2	Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a função de máxima verossimilhança.	50
3.3	Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala.	50
3.4	Função penalizadora dos critérios estudados no Exemplo 3.2.1	50
3.5	Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a função de máxima verossimilhança.	51
3.6	Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala.	51
4.1	Cenários para o processo de geração de dados.	52
4.2	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 300$, $burn-in = 50$, $re = 500$	53
4.3	Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(1) gerados nas condições apresentadas na Tabela 4.2.	55
5.1	Estatísticas descritivas para série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{283}$	59
5.2	Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a função de máxima verossimilhança.	61

5.3	Estimativas para o modelo AR(1).	63
A.1	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 100$, $burn-in = 20$, $re = 500$	69
A.2	Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(1) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.1.	71
A.3	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 500$, $burn-in = 100$, $re = 500$	73
A.4	Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(1) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.3.	75
A.5	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 500$	77
A.6	Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(1) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.5.	79
A.7	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 100$, $burn-in = 20$, $re = 500$	81
A.8	Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(2) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.7.	83
A.9	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 300$, $burn-in = 50$, $re = 500$	85
A.10	Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(2) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.9.	87
A.11	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 500$, $burn-in = 100$, $re = 500$	89
A.12	Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(2) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.11.	91
A.13	Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 500$	93
A.14	Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(2) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.13.	95

Resumo

Este estudo analisa o desempenho dos critérios de seleção de modelos em processos auto-regressivos estacionários e ergódicos, quando a inovação advém de variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, com distribuição α -estável. Os critérios de seleção de modelos, aqui estudados, foram: Critério de Informação de Akaike (AIC), Critério de Informação Bayesiana (BIC), Critério de Hannan-Quinn (HQC) e Critério de Determinação Eficiente (EDC). Na fundamentação teórica, apresentam-se técnicas de estimação e identificação da ordem de séries temporais auto-regressivas com inovação α -estável. Apresentamos também um estudo de simulações de Monte Carlo e uma aplicação à dados observados.

Palavras-chave: Séries Temporais, Critérios de Seleção de Modelos, Identificação da Ordem, Distribuição α -estável.

Abstract

This study analyzes the performance of the model selection criteria in stationary and ergodic autoregressive processes, when innovation comes from independent and identically distributed random variables with α -stable distribution. The model selection criteria studied here were: Akaike's Information Criterion (AIC), Bayesian Information Criterion (BIC), Hannan-Quinn Criterion (HQC) and Efficient Determination Criterion (EDC). In theoretical foundation, we present estimation and identification techniques for the order of autoregressive time series with α -stable innovations. We also present a study of Monte Carlo's simulations and an application to the observed data.

Keywords: Time Series, Model Selection Criteria, Order Identification, α -stable Distribution.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo a identificação da ordem de processos auto-regressivos estacionários e ergódicos quando a inovação advém de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição α -estável.

A distribuição α -estável forma uma classe de distribuições de probabilidade, contendo quatro parâmetros, que admitem assimetria e menor ou maior densidade nas caudas, além de outras propriedades matemáticas interessantes. A falta de fórmulas fechadas para as funções de distribuição e densidade tem sido o maior inconveniente no uso dessa classe. Estas funções de distribuição e densidade só possuem expressão fechada em três casos: Lévy, Cauchy e Gaussiana.

A estimação dos parâmetros do processo foi realizada pelo método da máxima verossimilhança. A identificação da ordem do processo foi realizada através de quatro critérios de seleção de modelos, tais como: o Critério de Informação de Akaike (AIC), Critério de Informação Bayesiana (BIC), Critério de Informação de Hannan-Quinn (HQC) e o Critério de Determinação Eficiente (EDC). Além disso, variou-se a formulação dos critérios de seleção do modelo, utilizando-se a estimativa pela função de máxima de verossimilhança e pela estimativa do parâmetro de escala (σ_a).

O estudo realizou-se através do uso de simulações de Monte Carlo em que os parâmetros de locação (δ) e simetria (β) do processo de inovação foram considerados iguais à zero. Consideramos que o índice de estabilidade (α) variou no conjunto $\{0.5, 0.8, 1, 1.0, 1.2, 1.5, 1.8, 2\}$ e que o parâmetro de escala (σ_a) variou no conjunto $\{1, 2, 3\}$. Foram utilizados diferentes tamanhos amostrais, “burn-in” e replicações.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro dispõe de conceitos básicos sobre processos estocásticos e séries temporais. Ainda no Capítulo 1, apresentamos a classe das distribuições α -estáveis e a função H-Fox. No segundo capítulo descrevemos os estimadores de máxima verossimilhança para processos auto-regressivos de ordem p , tanto no caso Gaussiano, quanto no caso α -estável. No terceiro capítulo apresentamos os critérios de seleção de modelo, nas duas formulações estudadas. O Capítulo 4 apresenta o estudo de simulação de Monte Carlo analisando o desempenho dos critérios estudados. Por fim, o Capítulo 5 apresenta uma aplicação dos conceitos estudados em dados do logaritmo natural do volume de ações da Wall-Mart negociadas diariamente na bolsa de valores de New York, no período de 1º/12/2003 à 31/12/2004.

1 Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentaremos alguns termos basais e conceitos fundamentais sobre séries temporais, distribuição α -estável e função H-Fox. Além de apresentar importantes suposições nas quais as definições são válidas.

1.1 Processos Estocásticos e Séries Temporais

Nesta seção apresentamos algumas definições básicas necessárias para um estudo de séries temporais. Uma *série temporal* é um conjunto de observações ordenadas no tempo. Exemplos de séries temporais são os registros das marés no porto de Rio Grande, a temperatura média diária do Rio de Janeiro, o índice da Bolsa de Valores de São Paulo e a precipitação pluviométrica em Porto Alegre.

Dentre os vários motivos que nos levam a analisar séries temporais, podemos destacar os seguintes:

- investigar o mecanismo gerador da série temporal, de modo a descobrir como ela foi gerada;
- fazer previsões dos valores futuros da série temporal, para podermos nos precaver a respeito do comportamento que ela poderá vir a assumir no futuro;
- descrever o comportamento da série temporal através da análise de seu gráfico para identificar características como tendência, ciclos, variações sazonais e valores aberrantes;
- através da análise espectral, procurar periodicidades relevantes nos dados.

Tais análises são baseadas na utilização de *modelos probabilísticos* ou *modelos estocásticos*, constituindo o desafio de encontrar o modelo mais simples que melhor descreva a série temporal analisada.

Ao iniciarmos a análise de uma série temporal, devemos estabelecer um método de como lidar com a natureza aleatória do fenômeno a ser modelado. Uma maneira é supor que cada observação da série temporal seja uma variável aleatória X_t , onde t designa o tempo em que a observação foi coletada. Assim, a série temporal $\{X_t\}_{t=1}^n$ nada mais é do que uma realização (ou parte de uma realização) de um processo estocástico.

A partir de agora, introduzimos algumas definições preliminares, necessárias para o estudo que realizamos neste trabalho. Os conceitos de estacionariedade, função de

distribuição n -dimensional e as definições das funções de autocovariância e autocorrelação são de suma importância para encontrarmos modelos para séries temporais. Iniciamos com a definição de processo estocástico.

Definição 1.1.1. Seja T um conjunto numérico qualquer. Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$ em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, em que Ω é o espaço amostral, \mathcal{A} é a σ -álgebra da classe de eventos aleatórios e $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ é a função que associa probabilidade a um evento qualquer $A \in \mathcal{A}$.

Observação 1.1.1. a) Em geral, consideramos o conjunto T como sendo o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} ou dos reais \mathbb{R} .

b) Neste trabalho, consideramos o conjunto $T = \{1, 2, \dots, n\}$ quando estamos com uma realização de tamanho n do processo em estudo.

c) Neste trabalho, consideramos o conjunto T como sendo \mathbb{Z} , ou seja, os processos são à tempo discreto.

Considere $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ com o produto interno

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathcal{H}.$$

Pode-se provar que o conjunto \mathcal{H} das funções X tais que

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\Omega} X(w)^2 \mathbb{P}(dw) < \infty,$$

define um espaço de Hilbert para a norma

$$|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}.$$

Definição 1.1.2. Seja T um conjunto qualquer. Uma *série temporal* $\{X_t\}_{t=1}^n$ é uma amostra finita de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$.

A seguir, definimos a *função de distribuição n -dimensional* (ou *função de distribuição conjunta*) para um vetor aleatório $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$, onde o símbolo \mathbf{x}' significa o transposto do vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.3. Seja $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})'$ um vetor aleatório (ou variável aleatória n -dimensional), cujas componentes são variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. A *função de distribuição n -dimensional* (ou *função de distribuição conjunta*) do vetor é definida por

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n), \quad (1.1)$$

quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$, $t_i \in T$, $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ estará especificado se conhecermos as distribuições finito-dimensionais, dadas em (1.1), para todo $n \geq 1$.

As *funções de autocovariância* e de *autocorrelação* de um processo estocástico são definidas a seguir. Estas duas funções fornecem o grau de interdependência entre as variáveis aleatórias e são importantes na identificação de um modelo para uma série temporal.

Definição 1.1.4. Considere um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ onde, para todo $t \in T$, $\text{Var}(X_t) < \infty$. A *função de autocovariância* do processo, denotada por $\gamma_X(\cdot, \cdot)$, é dada por

$$\gamma_X(r, s) \equiv \text{Cov}(X_r, X_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}(X_r))(X_s - \mathbb{E}(X_s))], \quad r, s \in T,$$

onde $\mathbb{E}(X_t) \equiv \mu_t$ é a *esperança matemática* da variável aleatória X_t , para todo $t \in T$.

Definição 1.1.5. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ com $\text{Var}(X_t) < \infty$, para todo $t \in T$. A *função de autocorrelação* do processo, denotada por $\rho_X(\cdot, \cdot)$, é dada por

$$\rho_X(r, s) = \frac{\gamma_X(r, s)}{\sqrt{\text{Var}(X_r)}\sqrt{\text{Var}(X_s)}}, \quad r, s \in T,$$

onde $\text{Var}(X_t) \equiv \gamma_X(t, t)$, para todo $t \in T$.

Ao procurarmos modelos para descrever séries temporais, é necessário utilizar suposições que nos permitam simplificar as séries temporais analisadas. Dentre as suposições que devem ser realizadas, a mais comum diz respeito à estacionariedade do processo.

Intuitivamente, um processo estacionário $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é aquele no qual a origem temporal ($t = 0$) não é importante. Em outras palavras, as características de X_{t+h} são as mesmas de X_t , para todo $t, h \in \mathbb{Z}$.

A literatura nos apresenta dois tipos de estacionariedade: *estacionariedade forte* e *estacionariedade fraca*. As definições destas propriedades são dadas a seguir.

Definição 1.1.6. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *fortemente estacionário* (ou *estritamente estacionário*) se todas as distribuições n -dimensionais (1.1) permanecem as mesmas sob translações do tempo, ou seja,

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n),$$

para todo $t_1, \dots, t_n, h \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.7. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *fracamente estacionário* (ou somente *estacionário*) se

- a) $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, para todo $t \in \mathbb{Z}$;
- b) $\mathbb{E}(X_t) = \mu_X$, uma constante independente de t ;
- c) $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$, para quaisquer $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.1.8. Um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é *Gaussiano* se, para qualquer conjunto $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$, as variáveis aleatórias X_{t_1}, \dots, X_{t_n} têm distribuição normal n -dimensional.

Observação 1.1.2. a) Um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ com $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, fracamente estacionário não necessita, necessariamente, ser fortemente estacionário, mas a recíproca é sempre verdadeira. Como um processo Gaussiano com variância finita é determinado pelas médias e pela matriz de variâncias-covariâncias, se ele for fracamente estacionário, será também fortemente estacionário.

- b) Se o processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ for estacionário, temos que $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, 0)$, para todo $r, s \in \mathbb{Z}$. Assim, podemos redefinir a função de autocovariância de um processo estocástico estacionário em termos de apenas uma variável:

$$\begin{aligned}\gamma_X(r, s) &= \gamma_X(r - s, s - s) = \gamma_X(r - s, 0) \\ &\equiv \gamma_X(h), \text{ para todo } r, s, h \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

A função $\gamma_X(h)$ será chamada de *função de autocovariância* de ordem h (ou também chamada de *lag h*). De forma análoga, definimos a função de autocorrelação de ordem h como sendo

$$\rho_X(h) \equiv \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)}, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z},$$

onde $\gamma_X(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \text{Var}(X_t)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

- c) As funções de autocovariância e de autocorrelação de um processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possuem as seguintes propriedades:
- i) $\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h})$, para todo $t, h \in \mathbb{Z}$;
 - ii) $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
 - iii) $|\gamma_X(h)| \leq \gamma_X(0)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
 - iv) $\rho_X(h) = \rho_X(-h)$, para todo $h \in \mathbb{N}$;
 - v) $|\rho_X(h)| \leq \rho_X(0) = 1$, para todo $h \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.9. Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo estocástico estacionário com média zero e com função de autocovariância $\gamma_X(\cdot)$ tal que $\gamma_X(h) \rightarrow 0$, quando $|h| \rightarrow \infty$. A *função de autocorrelação parcial*, denotada por $\phi_X(k, j)$, $j = 1, \dots, k$, $k \in \mathbb{N}$, é o coeficiente na equação

$$\mathcal{P}_{\overline{\text{sp}}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^k \phi_X(k, j) X_{k+1-j},$$

onde $\mathcal{P}_{\overline{\text{sp}}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1})$ é a projeção ortogonal de X_{k+1} no subespaço fechado $\overline{\text{sp}}(X_1, \dots, X_k)$ gerado pelas k observações anteriores.

Considere a equação

$$\langle X_{k+1} - \mathcal{P}_{\overline{\text{sp}}(X_1, \dots, X_k)}(X_{k+1}), X_j \rangle = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, k,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno. A partir das equações acima, obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_X(k, 1) \\ \phi_X(k, 2) \\ \vdots \\ \phi_X(k, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \\ \vdots \\ \rho_X(k) \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

onde $\rho_X(\cdot)$ é a função de autocorrelação do processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada pela Definição 1.1.5. Os coeficientes $\phi_X(\cdot, \cdot)$ são unicamente determinados pelo sistema (1.2).

Utilizando a regra de Cramér sucessivamente para $k \in \mathbb{N}$, obtemos a *função de autocorrelação parcial de ordem k* do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ dada por

$$\phi_x(k, k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_x(1) & \rho_x(2) & \cdots & \rho_x(k-2) & \rho_x(1) \\ \rho_x(1) & 1 & \rho_x(1) & \cdots & \rho_x(k-3) & \rho_x(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_x(k-1) & \rho_x(k-2) & \rho_x(k-3) & \cdots & \rho_x(1) & \rho_x(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_x(1) & \cdots & \rho_x(k-2) & \rho_x(k-1) \\ \rho_x(1) & 1 & \cdots & \rho_x(k-3) & \rho_x(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_x(k-1) & \rho_x(k-2) & \cdots & \rho_x(1) & 1 \end{vmatrix}}.$$

Um dos processos estocásticos mais simples é aquele cujas variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídas. Definimos os processos independentes e identicamente distribuídos e ruído branco a seguir.

Definição 1.1.10. O processo estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dito ser composto por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), denotado por $X_t \sim IID$, se valer para toda variável X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , a condição

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1) \cdots F_{t_n}(x_n)$$

e se as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n, \dots possuírem a mesma distribuição.

Definição 1.1.11. O processo estocástico $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um *ruído branco* com média zero e variância σ_ε^2 , denotado por $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$, se é i.i.d. e se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & h = 0, \\ 0, & h \neq 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.1.1. Seja $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo independente com média zero e variância σ_w^2 . Defina $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ por

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + W_t,$$

em que $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ são constantes fixas. Veja que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é não estacionário.

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\beta_0 + \beta_1 t + W_t) = \beta_0 + \beta_1 t$$

Desta forma, mostramos que o processo X_t não é estacionário, pois sua média é uma constante que depende de t .

Exemplo 1.1.2. Seja $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um ruído branco, como apresentado na Definição 1.1.11, e $\{f_i\}_{i=1}^n$ uma coleção de funções reais integráveis. Defina $X_t = \sum_{i=1}^n f_i(t) Z_i$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

E suponha que exista uma função $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $0 < g(0) < \infty$ e

$$\sum_{j=1}^n f_j(a) f_j(b) = g(|b - a|), \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Temos que, neste caso, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário.

Primeiramente, será calculada a esperança do processo, com o intuito de provar que ela é uma constante independente de t . Observe que

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n f_i(t) Z_i \right] = \sum_{i=1}^n f_i(t) \mathbb{E}(Z_i) = 0.$$

O processo X_t possui média constante e não depende de t .

O segundo passo para provar a estacionariedade do processo é concluir que o seu segundo momento é finito. Observe que

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n f_i(t) Z_i \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(t) f_j(t) Z_i Z_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(t) f_j(t) \mathbb{E}(Z_i Z_j) = \sum_{i=1}^n f_i(t)^2 \sigma_\varepsilon^2 \\ &= g(|0|) \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Sendo assim, conclui-se que $E(X_t^2) < \infty$, pois $g(|0|) \sigma_\varepsilon^2 < \infty$. Observe que

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= Cov \left(\sum_{i=1}^n f_i(t) Z_i, \sum_{j=1}^n f_j(t+h) Z_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(t) f_j(t+h) Cov(Z_i, Z_j). \end{aligned}$$

Como

$$Cov(Z_i, Z_j) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

então, se $i = j$

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(t) f_j(t+h) \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(t) f_i(t+h) \sigma_\varepsilon^2 \\ &= g(|t+h-t|) \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 g(|h|). \end{aligned}$$

E se $i \neq j$

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(t) f_j(t+h) \times 0 = 0.$$

Por fim,

$$Cov(X_t, X_{t+h}) = g(|h|) \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{Z}.$$

Desta forma, mostramos que a covariância do processo não depende de t e é finita. Portanto, o processo X_t é estacionário.

1.2 Classe das Distribuições α -estáveis

A teoria univariada da distribuição α -estável foi essencialmente desenvolvida em 1920 e 1930 por Paul Lévy e Aleksandr Khinchin, essa classe de distribuições de probabilidade admitem assimetria e maior ou menor densidade nas caudas, além de outras propriedades matemáticas interessantes. Por conta disso, são utilizadas para modelar os mais diversos fenômenos, tais como: o campo gravitacional das estrelas, temperatura de reatores nucleares, chuvas anuais, mercados de ações, sequência de DNA etc.

Denominação *estável* provém do parâmetro de estabilidade $\alpha \in (0, 2]$, em que quanto maior for este valor, menor será a probabilidade de valores extremos na função de distribuição e vice-versa. Este parâmetro também é chamado de *índice de estabilidade* ou *expoente característico*.

A nomenclatura utilizada para denominar uma distribuição α -estável segue a forma $S_\alpha(\sigma_a, \beta, \delta)$. O parâmetro $\beta \in [-1, 1]$ refere-se ao parâmetro de simetria, onde valores positivos indicam assimetria à direita. De forma análoga, valores negativos indicam assimetria à esquerda, e nulo ($\beta = 0$) indica simetria. O parâmetro $\sigma_a > 0$ designa a escala da distribuição e $\delta \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação.

Há uma diversidade de parametrizações que foram sendo utilizadas ao longo dos anos por diferentes autores em diferentes aplicações, de acordo com suas especificidades, sejam elas cálculo numérico, ajuste dos dados, propriedades algébricas ou analíticas. Aqui, iremos utilizar a parametrização 1 (ver Nolan, 2015).

Uma consequência das distribuições α -estáveis é que nem sempre os dois primeiros momentos existem. Somente quando $\alpha = 2$ os dois primeiros momentos são finitos. Quando $0 < \alpha < 2$, não temos segundo momento finito, e se $\alpha \leq 1$, o primeiro momento também é infinito. Dessa forma, podemos entender que o parâmetro de locação δ não será necessariamente a média do processo. O mesmo aplica-se ao parâmetro σ_a de escala.

Quando $\alpha < 2$, por exemplo, as caudas da distribuição decaem como uma função de potência. Isto quer dizer que uma variável α -estável apresenta muito mais variabilidade que uma variável Gaussiana: é muito mais propensa a ter mudanças abruptas e descontínuas. Mandelbrot(1982) refere-se a isso como “efeito Noé”, em alusão ao personagem que sobreviveu ao grande dilúvio da bíblico.

Uma propriedade importante de variáveis aleatórias Gaussianas consiste em que a soma de duas delas é também uma variável aleatória normal. Proveniente disso, se X é normal, para X_1 e X_2 cópias independentes de X e para quaisquer constantes positivas a e b ,

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, \quad (1.2.1)$$

para c positivo e $d \in \mathbb{R}$. O símbolo $\stackrel{d}{=}$ denota igualdade em distribuição, isto é, ambas as expressões têm a mesma lei de distribuição. Em outras palavras, a equação (1.2.1) afirma que a forma de X é preservada (em escala e locação) sob adição. Na classe de distribuições α -estáveis, essa propriedade permanece, como vemos a seguir.

Definição 1.2.1. Uma variável aleatória X é *estável* ou *fracamente estável* se para X_1 e X_2 sendo cópias independentes de X e para quaisquer constantes positivas a e b , a equação (1.2.1) for válida para qualquer valor positivo de c e $d \in \mathbb{R}$. A variável aleatória é *estritamente estável* ou *fortemente estável* se a equação (1.2.1) for válida para $d = 0$ e para qualquer valor de a e b . Uma variável aleatória é *simetricamente*

estável se for estável e simetricamente distribuída em torno de 0, ou seja, $X \stackrel{d}{=} -X$.

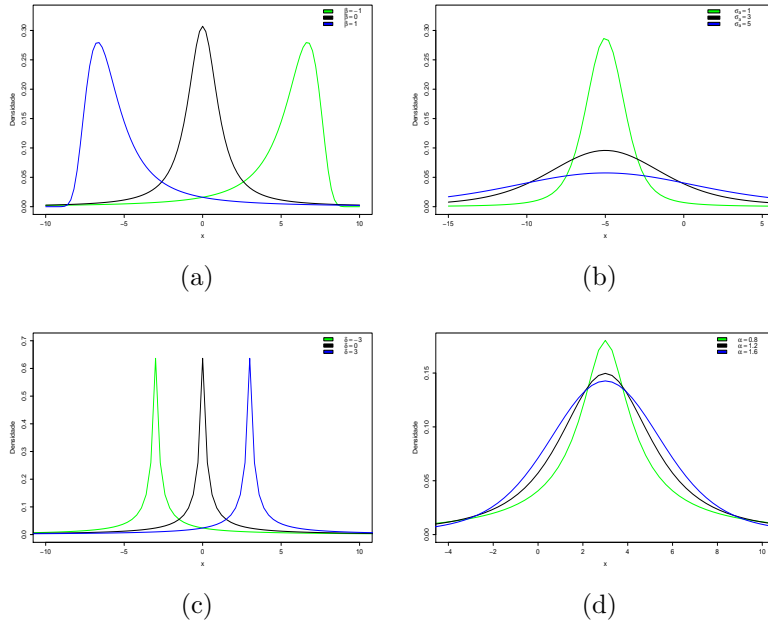


Figura 1.1: (a) Função densidade de uma α -estável para os valores de $\beta \in \{-1, 0, 1\}$ com $\alpha = 1.1$, $\sigma_a = 1$ e $\delta = 0$; (b) Função densidade de uma α -estável para os valores de $\sigma_a \in \{1, 3, 5\}$ com $\alpha = 1.5$, $\beta = 0$ e $\delta = -5$; (c) Função densidade de uma α -estável para os valores de $\delta \in \{-3, 0, 3\}$ com $\alpha = 0.5$, $\sigma_a = 1$ e $\beta = 0$; (d) Função densidade de uma α -estável para os valores de $\alpha \in \{0.8, 1.2, 1.6\}$ com $\sigma_a = 2$, $\beta = 0$ e $\delta = 3$.

Na Figura 1.1(a) apresentamos a função densidade de uma variável aleatória α -estável quando mantemos os parâmetros $\alpha = 1.1$, $\sigma_a = 1$ e $\delta = 0$ fixos e variamos o parâmetro de simetria, $\beta \in \{-1, 0, 1\}$.

Com o auxílio da Figura 1.1(b) exemplificamos o comportamento da função densidade de uma variável aleatória α -estável quando o parâmetro σ_a varia e os demais parâmetros são mantidos constantes. Observe que, conforme o valor de σ_a aumenta, as caudas da distribuição também aumentam. Desta forma, aumenta a probabilidade de valores extremos.

Através da Figura 1.1(c) observamos o que ocorre no gráfico da função densidade de uma variável aleatória α -estável quando variamos o parâmetro $\delta \in \{-5, 0, 5\}$ e fixamos os parâmetros $\alpha = 0.5$, $\sigma_a = 1$ e $\beta = 0$. Apesar dessa variável aleatória não ter primeiro momento finito, pois $\alpha \leq 1$, a massa da função densidade se modifica conforme a variação do parâmetro δ .

A Figura 1.1(d) mostra sobre o que ocorre quando o índice de estabilidade varia. Consideramos $\alpha \in \{0.8, 1.2, 1.6\}$, $\sigma_a = 2$, $\beta = 0$ e $\delta = 3$. Notamos que as caudas da distribuição aumentam à medida que o α diminuiu.

A seguir, apresentamos definições de variáveis aleatórias $X \sim S_\alpha(\sigma_a, \beta, \delta)$ e sua função característica.

Definição 1.2.2. Uma variável aleatória não-degenerativa X é α -estável se e somente se para todo $n > 1$ existirem constantes $c_n > 0$ e $d_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \quad (1.2.2)$$

onde X_1, \dots, X_n são cópias idênticas e independentes de X .

Definição 1.2.3. Uma variável aleatória X é α -estável se e somente se $X \stackrel{d}{=} \sigma_a Z + \delta$, onde $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\sigma_a > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ e Z é uma variável aleatória com função característica dada por

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ}) = \begin{cases} \exp \left\{ i\delta t - \sigma_a^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] \right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ i\delta t - \sigma_a^\alpha |t| \left[1 + i\beta \frac{2t}{|t|^\pi} \ln |t| \right] \right\}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

As Definições 1.2.1, 1.2.2 e 1.2.3 são três formas diferentes de expressar uma variável aleatória α -estável e, portanto, são equivalentes.

Estas distribuições são simétricas em torno de zero quando $\beta = 0$ e $\delta = 0$. Neste caso, a função característica de Z tem uma expressão mais simples dada por

$$\varphi_Z(t) = \exp(-\sigma_a^\alpha |t|^\alpha). \quad (1.2.4)$$

Quando $\alpha \neq 1$, a função característica (1.2.3) pode ser escrita como:

$$\varphi_Z(t) = \exp \left\{ -\tilde{\sigma}_a^\alpha |t|^\alpha e^{-i\tilde{\beta}(\text{sign}(t))\frac{\pi}{2}K(\alpha)} + i\delta t \right\}, \quad (1.2.5)$$

onde

$$\tilde{\sigma}_a = \sigma_a \left(1 + \beta^2 \tan^2 \alpha \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2\alpha}}, \quad (1.2.6)$$

$$K(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } \alpha < 1 \\ \alpha - 2, & \text{se } \alpha > 1, \end{cases} \quad (1.2.7)$$

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} \frac{2}{\pi\alpha} \arctan(\beta \tan \alpha \frac{\pi}{2}), & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{2}{\pi(\alpha-2)} \arctan(\beta \tan \frac{\pi(\alpha-2)}{2}), & \text{se } 1 < \alpha < 2 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

e

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Pode-se mostrar que, se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_a^2)$ então $X \sim S_2(\frac{\sigma_a}{\sqrt{2}}, 0, \mu)$. Da mesma forma, uma distribuição de Cauchy $\mathcal{C}(\sigma_a, \delta)$ é estável $S_1(\sigma_a, 0, \delta)$ e uma distribuição de Lévy $\mathcal{L}(\sigma_a, \delta)$ é também estável $S_{0.5}(\sigma_a, 1, \delta)$. Apenas nestes três casos a variável aleatória α -estável tem função de distribuição com forma fechada e conhecida, ilustradas na Figura 1.2. Para qualquer outra situação, não existe fórmula fechada para as funções de distribuição e densidade de uma α -estável geral. Nessas situações, torna-se necessário utilizar integração numérica ou através de aproximações utilizando a função H-Fox (ver Seção 1.3).

Como se sabe, as distribuições de Cauchy e de Lévy não possuem média nem variância finitas, pois $\alpha \leq 1$ em ambos os casos. Samorodnitsky e Taqqu (1994) provam este resultado através da seguinte proposição.

Proposição 1.2.1. *Seja $X \sim S_\alpha(\sigma_a, \beta, \delta)$, com $\alpha \in (0, 2)$. Então,*

$$\mathbb{E}(|X^r|) < \infty, \text{ para todo } 0 < r < \alpha$$

$$\mathbb{E}(|X^r|) = \infty, \text{ para todo } r \geq \alpha.$$

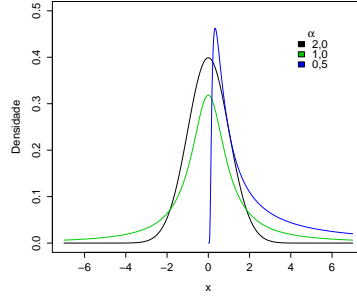


Figura 1.2: Função densidade de uma α -estável para os valores de $\alpha \in \{0.5, 1.0, 2.0\}$.

1.3 Função H-Fox

As integrais de Mellin-Barnes foram descobertas por Salvatore Pincherle, um matemático italiano, no ano de 1888. Estas integrais trabalham com o princípio de dualidade existente entre as equações lineares diferenciais e as equações lineares diferenciais com coeficientes racionais. A teoria destas integrais foi desenvolvida por Mellin (1910) e foi utilizada no desenvolvimento da teoria de funções hipergeométricas por Barnes (1908). No ano de 1946, estas integrais foram utilizadas por Meijer, na introdução da função G em análise matemática. No período de 1956 até 1970 muitos trabalhos foram feitos sobre essa função.

Entretanto, a principal contribuição encontra-se no ano de 1961, por Charles Fox (1961), em que definiu uma nova função envolvendo as integrais Mellin-Barnes, que é a generalização da função G de Meijer. Essa função é chamada função H-Fox ou função H. A importância desta função se deve ao fato de que pode ser aplicada nas mais diversas áreas da ciência e da engenharia. Alguns exemplos de aplicação são: reologia (é o ramo da mecânica dos fluídos que estuda as propriedades físicas que influenciam o transporte de quantidade de movimento num fluído), propagação de ondas sísmicas, relaxamento e difusão de processos em sistemas complexos e na estatística para a construção da função densidade de uma variável α -estável.

A função H é definida por meio das integrais de Mellin-Barnes da seguinte forma:

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), \dots, (a_n, A_n), (a_{n+1}, A_{n+1}), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_m, B_m), (b_{m+1}, B_{m+1}), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s)} z^{-s} ds, \quad (1.3.1)$$

onde A_j e B_j assumem valores positivos e todos os a_j e b_j podem ser complexos. O contorno L na integral vai de $c - i\infty$ até $c + i\infty$ de tal modo que os polos das funções gama $\Gamma(b_j + B_j s)$, $j = 1, \dots, m$ estão à esquerda e os polos de $\Gamma(1 - a_j + A_j s)$, $j = 1, \dots, n$, estão à direita de L .

Também podemos representar a função H através de séries de potências. Para $z \neq 0$ se $\kappa > 0$ ou para $0 < |z| > D^{-1}$ se $\kappa = 0$, temos:

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{h=1}^m \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1, j \neq h}^m \Gamma\left(b_j + B_j \frac{b_h + v}{B_h}\right)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma\left(1 - b_j + B_j \frac{b_h + v}{B_h}\right)} \times \\ \times \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(1 - a_j + A_j \frac{b_h + v}{B_h}\right) (-1)^v z^{\frac{b_h + v}{B_h}}}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma\left(a_j - A_j \frac{b_h + v}{B_h}\right) v! B_h}. \quad (1.3.2)$$

E, para $z \neq 0$ se $\kappa < 0$ ou para $|z| > D^{-1}$ se $\kappa = 0$, definimos

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{h=1}^n \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1, j \neq h}^n \Gamma\left(1 - a_j + A_j \frac{1 - a_h + v}{A_h}\right)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma\left(a_j + A_j \frac{1 - a_h + v}{A_h}\right)} \times \\ \times \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma\left(b_j + B_j \frac{1 - a_h + v}{A_h}\right) (-1)^v (1/z)^{\frac{1 - a_h + v}{A_h}}}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma\left(1 - b_j - B_j \frac{1 - a_h + v}{A_h}\right) v! A_h}, \quad (1.3.3)$$

onde,

$$\kappa = \sum_{j=1}^p B_j - \sum_{j=1}^q A_j \quad \text{e} \quad D = \frac{\prod_{j=1}^p A_j^{A_j}}{\prod_{j=1}^q B_j^{B_j}}.$$

Através do uso da representação da função H -Fox por séries de potências podemos encontrar a função densidade de uma variável aleatória com distribuição α -estável.

Seja $X \sim S_\alpha(\sigma_a, \beta, \delta)$ e $\alpha \neq 1$. A função densidade será dada por:

$$f(x; \alpha, \tilde{\sigma}_a, \tilde{\beta}, \delta) = \frac{1}{\alpha \pi \tilde{\sigma}_a} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \sin\left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \tilde{\beta} - \frac{2\tilde{\beta}}{\alpha}\right) (1 + v)\right] \left(\frac{1+v}{\alpha}\right) \left(\frac{x-\delta}{\tilde{\sigma}_a}\right)^v}{v!}, \quad (1.3.4)$$

quando $1 < \alpha < 2$ e $x - \delta > 0$, e

$$f(x; \alpha, \tilde{\sigma}_a, \tilde{\beta}, \delta) = \frac{1}{\pi \tilde{\sigma}_a} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \sin \left[\frac{\pi}{2} (2 + \alpha v + \alpha v \tilde{\beta}) \right] (1 + \alpha v) \left(\frac{x-\delta}{\tilde{\sigma}_a} \right)^{-1-\alpha v}}{v!}, \quad (1.3.5)$$

quando $0 < \alpha < 1$ e $x - \delta > 0$. Para $x - \delta < 0$, a expressão para a função densidade é $f(x; \alpha, \tilde{\sigma}_a, \tilde{\beta}, \delta) = f(-x; \alpha, \tilde{\sigma}_a, \tilde{\beta}, \delta)$. As expressões para $\tilde{\sigma}_a$ e $\tilde{\beta}$ estão dadas em (1.2.6) e (1.2.8), respectivamente.

Devemos ser cuidadosos ao trabalhar computacionalmente com as representações (1.3.4) e (1.3.5). Para $1 < \alpha < 2$ e $x - \delta > 0$, a equação (1.3.4) deve ser usada para calcular a função densidade para pequenas diferenças de $x - \delta$. E talvez não seja computacionalmente consistente para grandes valores de $x - \delta$. Por isto, usaremos uma aproximação dada por:

$$f(x; \alpha, \tilde{\sigma}_a, \tilde{\beta}, \delta) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_a \pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \sin \left[\frac{\pi}{2} (v\alpha + v\alpha\tilde{\beta} + 2 - 2\tilde{\beta}v) \right] (1 + v) \left(\frac{x-\delta}{\tilde{\sigma}_a} \right)^{-1-\alpha v}}{v!}, \quad (1.3.6)$$

quando $x \geq \delta$, $1 < \alpha < 2$ e $(x - \delta) \rightarrow \infty$.

Similarmente, a equação (1.3.5), talvez, não seja computacionalmente consistente para pequenos valores de $x - \delta$. Por isto, usaremos uma aproximação dada por:

$$f(x; \alpha, \tilde{\sigma}_a, \tilde{\beta}, \delta) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_a \pi \alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v \sin \left[\frac{\pi}{2} (1 + \tilde{\beta} + v + \tilde{\beta}v) \right] \left(\frac{1+v}{\alpha} \right) \left(\frac{x-\delta}{\tilde{\sigma}_a} \right)^v}{v!}, \quad (1.3.7)$$

quando $x \geq \delta$, $0 < \alpha < 1$ e $(x - \delta) \rightarrow 0^+$. As expressões para $\tilde{\sigma}_a$ e $\tilde{\beta}$ estão dadas em (1.2.6) e (1.2.8), respectivamente.

Para estudar as expressões (1.3.4) - (1.3.7) geramos 17 valores aleatórios advindos de uma distribuição α -estável e comparamos com os valores obtidos pela função “*dstable*”, do software R, com as aproximações obtidas através da função H-Fox.

Os parâmetros da distribuição α -estável, foram fixados da seguinte forma: o de locação δ e simetria β foram considerados iguais à zero. O índice de estabilidade $\alpha \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9\}$ e o parâmetro de escala, $\sigma_a = 1$. O ponto de truncamento utilizado para a série de potências foi de 50, mas em alguns casos foi necessário aumentá-lo para 150. Nestes casos, ressaltou-se isso nas respectivas tabelas.

Os valores gerados por $g(x)$ foram obtidos com o auxílio da função “*dstable*” enquanto que os de $f(x)$ foram obtidos pelas expressões (1.3.4) - (1.3.7), conforme o valor de α e de $x - \delta$.

Tabela 1.1: Comparação dos valores pela “*dstable*” e aproximações usando a H-Fox.

$\alpha = 0.1$							
x	-4.55e+07	-9.25e+02	-3.46e+01	-1.85e+00	-5.15e-01	-1.67e-03	-1.21e-03
$f(x)$	1.51e-10	1.59e-05	4.91e-04	9.81e-03	3.55e-02	8.86e+00	1.19e+01
$g(x)$	1.51e-10	1.59e-05	4.91e-04	9.81e-03	3.55e-02	8.86e+00	1.19e+01
x	4.72e-06	2.42e-05	2.59e-03	2.66e-02	2.71e+01	4.33e+01	2.95e+02
$f(x)$	1.36e+03	3.65e+02	5.93e+00	6.52e-01	6.33e-04	3.9e-04	5.29e-05
$g(x)$	1.36e+03	3.65e+02	5.93e+00	6.52e-01	6.33e-04	3.9e-04	5.29e-05
$\alpha = 0.3$							
x	-7.03e+02	-4.27e+00	-2.52e+00	-1.23e+00	-5.42e-01	-5.08e-01	-3.11e-01
$f(x)$	2.27e-05	1.10e-02	1.98e-02	4.28e-02	9.89e-02	1.05e-01	1.68e-01
$g(x)$	2.27e-05	1.10e-02	1.98e-02	4.28e-02	9.89e-02	1.05e-01	1.68e-01
x	3.86e-03	8.85e-03	2.73e-01	4.99e-01	1.16e+00	2.26e+00	3.57e+00
$f(x)$	2.37e+00	1.86e+00	1.89e-01	1.07e-01	4.56e-02	2.23e-02	1.35e-02
$g(x)$	2.37e+00	1.86e+00	1.89e-01	1.07e-01	4.56e-02	2.23e-02	1.35e-02
$\alpha = 0.5$							
x	-5.05e+01	-3.14e+00	-1.70e+00	-1.64e+00	-1.54e+00	-4.94e-01	-3.60e-01
$f(x)$	4.96e-04	2.23e-02	4.71e-02	4.92e-02	5.29e-02	1.72e-01	2.25e-01
$g(x)$	4.96e-04	2.23e-02	4.71e-02	4.92e-02	5.29e-02	1.72e-01	2.25e-01
x	1.42e-02	5.28e-02	5.13e-01	7.68e-01	1.29e+00	1.43e+00	1.69e+00
$f(x)$	6.29e-01	5.655e-01	1.66e-01	1.13e-01	6.47e-02	5.79e-02	4.76e-02
$g(x)$	-7.53e+07*	5.65e-01	1.66e-01	1.13e-01	6.47e-02	5.79e-02	4.76e-02
$\alpha = 0.7$							
x	-1.39e+01	-4.04e+00	-2.21e+00	-1.39e+00	-1.20e+00	-5.30e-01	-4.20e-01
$f(x)$	2.63e-03	1.83e-02	4.36e-02	7.95e-02	9.46e-02	2.10e-01	2.48e-01
$g(x)$	2.63e-03	1.83e-02	4.36e-02	7.95e-02	9.46e-02	2.10e-01	2.48e-01
x	2.79e-02	1.26e-01	6.93e-01	7.06e-01	1.21e+00	1.27e+00	1.78e+00
$f(x)$	4.01e-01	3.75e-01	1.68e-01	1.65e-01	9.42e-02	8.86e-02	5.81e-02
$g(x)$	4.01e-01 $^\diamond$	3.75e-01 $^\diamond$	1.68e-01	1.65e-01	9.42e-02	8.86e-02	5.81e-02

* Necessário aumentar o ponto de truncamento para 150 na equação (1.3.4) para a série convergir.

$^\diamond$ Valores obtidos através da equação (1.3.6).

Tabela 1.2: Comparação dos valores pela “*dstable*” e aproximações usando a H-Fox.

$\alpha = 0.9$							
x	-6.26e+00	-4.29e+00	-2.57e+00	-1.27e+00	-1.01e+00	-5.76e-01	-5.44e-01
$f(x)$	8.58e-03	1.68e-02	4.00e-02	1.10e-01	1.43e-01	2.29e-01	2.37e-01
$g(x)$	8.58e-03	1.68e-02	4.00e-02	1.10e-01	1.43e-01	2.29e-01 $^\diamond$	2.37e-01 $^\diamond$
x	4.34e-02	2.18e-01	6.80e-01	8.63e-01	1.10e+00	1.12e+00	1.18e+00
$f(x)$	3.34e-01	3.13e-01	2.05e-01	1.68e-01	1.30e-01	1.29e-01	1.20e-01
$g(x)$	3.34e-01 $^\diamond$	3.13e-01 $^\diamond$	1.78e-01	1.68e-01	1.30e-01	1.29e-01	1.20e-01
$\alpha = 1.1$							
x	-4.23e+00	-3.57e+00	-2.74e+00	-1.21e+00	-9.23e-01	-7.50e-01	-6.24e-01
$f(x)$	1.60e-02	2.28e-02	3.83e-02	1.39e-01	1.83e-01	2.13e-01	2.36e-01
$g(x)$	1.60e-02*	2.28e-02*	3.83e-02*	1.39e-01	1.83e-01	2.13e-01	2.36e-01
x	5.98e-02	3.20e-01	6.89e-01	9.26e-01	9.95e-01	1.02e+00	1.07e+00
$f(x)$	3.06e-01	2.85e-01	2.24e-01	1.82e-01	1.71e-01	1.67e-01	1.59e-01
$g(x)$	3.06e-01	2.85e-01	2.24e-01	1.82e-01	1.71e-01	1.67e-01	1.59e-01
$\alpha = 1.3$							
x	-4.04e+00	-2.80e+00	-2.32e+00	-1.17e+00	-9.54e-01	-8.74e-01	-6.74e-01
$f(x)$	1.57e-02	3.76e-02	5.64e-02	1.63e-01	1.96e-01	2.08e-01	2.38e-01
$g(x)$	1.57e-02*	3.76e-02	5.64e-02	1.63e-01	1.96e-01	2.08e-01	2.38e-01
x	7.68e-02	4.30e-01	7.08e-01	7.87e-01	9.75e-01	1.05e+00	1.11e+00
$f(x)$	2.93e-01	2.69e-01	2.33e-01	2.21e-01	1.93e-01	1.81e-01	1.72e-01
$g(x)$	2.93e-01	2.69e-01	2.33e-01	2.21e-01	1.93e-01	1.81e-01	1.72e-01

$^\diamond$ Valores obtidos através da equação (1.3.6).

* Valores obtidos através da equação (1.3.7).

Tabela 1.3: Comparação dos valores pela “*dstable*” e aproximações usando a H-Fox.

$\alpha = 1.5$							
x	-3.80e+00	-2.81e+00	-1.64e+00	-1.16e+00	-1.15e+00	-8.51e-01	-7.24e-01
$f(x)$	1.58e-02	3.75e-02	1.19e-01	1.80e-01	1.80e-01	2.21e-01	2.37e-01
$g(x)$	-2.26e+00*	3.75e-02	1.19e-01	1.80e-01	1.80e-01	2.21e-01	2.37e-01
x	9.42e-02	5.43e-01	7.07e-01	7.34e-01	9.53e-01	1.04e+00	1.22e+00
$f(x)$	2.86e-01	2.58e-01	2.39e-01	2.36e-01	2.08e-01	1.95e-01	1.71e-01
$g(x)$	2.86e-01	2.58e-01	2.39e-01	2.36e-01	2.08e-01	1.95e-01	1.71e-01
$\alpha = 1.7$							
x	-3.54e+00	-2.81e+00	-1.36e+00	-1.23e+00	-1.16e+00	-8.45e-01	-7.78e-01
$f(x)$	1.67e-02	3.8e-02	1.64e-01	1.81e-01	1.90e-01	2.29e-01	2.36e-01
$g(x)$	1.67e-02	3.8e-02	1.64e-01	1.81e-01	1.90e-01	2.29e-01	2.36e-01
x	1.11e-01	6.60e-01	6.60e-01	7.66e-01	9.49e-01	1.06e+00	1.33e+00
$f(x)$	2.82e-01	2.49e-01	2.49e-01	2.38e-01	2.16e-01	2.03e-01	1.68e-01
$g(x)$	2.82e-01	2.49e-01	2.49e-01	2.38e-01	2.16e-01	2.03e-01	1.68e-01
$\alpha = 1.9$							
x	-3.34e+00	-2.85e+00	-1.57e+00	-1.18e+00	-9.73e-01	-8.55e-01	-8.35e-01
$f(x)$	1.82e-02	3.64e-02	1.47e-01	1.95e-01	2.20e-01	2.33e-01	2.35e-01
$g(x)$	1.82e-02	3.64e-02	1.47e-01	1.95e-01	2.20e-01	2.33e-01	2.35e-01
x	1.29e-01	6.36e-01	7.81e-01	8.05e-01	9.63e-01	1.08e+00	1.45e+00
$f(x)$	2.81e-01	2.53e-01	2.40e-01	2.38e-01	2.21e-01	2.06e-01	1.62e-01
$g(x)$	2.81e-01	2.53e-01	2.40e-01	2.38e-01	2.21e-01	2.06e-01	1.62e-01

* Necessário aumentar o ponto de truncamento para 150 na equação (1.3.5) para a série convergir.

Conforme as Tabelas 1.1 - 1.3, o comportamento da função densidade de uma variável aleatória α -estável é o mesmo, independentemente se calcularmos por aproximações da função H-Fox ou pela integração numérica fornecida ao se usar a rotina “*dstable*” do software R. A vantagem em utilizarmos as aproximações da função H-Fox é a obtenção de expressões explícitas para a função densidade em forma de uma série de potências. Entretanto, estas expressões dependem de um ponto de truncamento e o quão perto ou longe x está de δ dificultando uma generalização.

2 Processos Auto-Regressivos de Ordem p

Em séries temporais existem muitas formas de expressar a correlação entre as observações ao longo do tempo. Segundo Jiru (2008), umas dessas maneiras é usando um modelo matemático que utiliza a dependência entre as observações como característica mais relevante, ou seja, que expresse um valor de X em tempo t como uma combinação linear dos seus próprios valores passados e um ruído branco. Essa representação é característica de uma série temporal auto-regressiva. Neste capítulo abordaremos os processos auto-regressivos de ordem p quando as inovações advêm de distribuições Gaussianas ou α -estáveis.

2.1 Processo AR(p) com Inovações Gaussianas

Esta seção é dividida em duas subseções. Na primeira apresentaremos o processo Gaussiano AR(1), os estimadores de máxima verossimilhança e o logaritmo da função de máxima verossimilhança. Na segunda apresentaremos o processo Gaussiano AR(p) e o logaritmo da função de máxima verossimilhança para esses processos. Nas subseções são apresentados exemplos para elucidarem os assuntos tratados.

2.1.1 Processo Gaussiano AR(1)

Define-se um processo AR(1) como

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ como está na Definição 1.1.11 e $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \sigma_\varepsilon^2)'$ é o vetor de parâmetros.

Sendo μ a média do processo, observe que

$$\mathbb{E}(X_t) = c + \phi_1 \mathbb{E}(X_{t-1}) + 0 \iff \mu = \mathbb{E}(X_t) = \frac{c}{1 - \phi_1}, \quad (2.1.1)$$

desde que

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_1), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

e

$$\text{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t - \mu)^2, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$\begin{aligned} X_t &= (c + \varepsilon_t) + \phi_1(c + \varepsilon_{t-1}) + \phi_1^2(c + \varepsilon_{t-2}) + \phi_1^3(c + \varepsilon_{t-3}) + \dots \\ &= (c + c\phi_1 + c\phi_1^2 + c\phi_1^3 + \dots) + \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \dots \\ &= \frac{c}{1 - \phi_1} + (\varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \dots), \end{aligned}$$

da expressão (2.1.1) temos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E}(X_t - \mu)^2 = \mathbb{E}(\varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \dots)^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \dots) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Como $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo Gaussiano, então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ também é Gaussiano. A função de densidade de X_1 é dada por

$$f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\eta}) = f_{X_1}(x_1; c, \phi_1, \sigma_\varepsilon^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}}} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1})^2}{\frac{2\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}} \right\}. \quad (2.1.3)$$

Agora, precisamos da observação condicional de X_2 dado $X_1 = x_1$. Uma vez que

$$X_2 = c + \phi_1 X_1 + \varepsilon_2$$

temos

$$(X_2 | X_1 = x_1) \sim \mathcal{N}(c + \phi_1 x_1, \sigma_\varepsilon^2)$$

e

$$f_{X_2|X_1}(x_2 | x_1; \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (x_2 - c - \phi_1 x_1)^2 \right\}.$$

A função de densidade conjunta de (X_1, X_2) é dada por

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; \boldsymbol{\eta}) = f_{X_2|X_1}(x_2 | x_1; \boldsymbol{\eta}) \times f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\eta}).$$

Do mesmo modo, $(X_3 | X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(c + \phi_1 x_2, \sigma_\varepsilon^2)$ e

$$f_{X_3|X_1, X_2}(x_3 | x_1, x_2; \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (x_3 - c - \phi_1 x_2)^2 \right\}.$$

Sabemos que

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3; \boldsymbol{\eta}) = f_{X_3|X_1, X_2}(x_3 | x_1, x_2; \boldsymbol{\eta}) \times f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; \boldsymbol{\eta}).$$

Observe que os valores de X_1, X_2, \dots, X_{t-1} importam para X_t apenas através do valor de X_{t-1} , ou seja, trata-se de um processo Markoviano. A função de densidade da observação t condicional às $t - 1$ observações precedentes é dada por

$$\begin{aligned} f_{X_t|X_1, \dots, X_{t-1}}(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}) &= f_{X_t|X_{t-1}}(x_t | x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2 \right\}. \end{aligned}$$

Portanto, para uma amostra (X_1, \dots, X_n) , a função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{x}) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\eta}) = f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\eta}) \times \prod_{t=2}^n f_{X_t|X_{t-1}}(x_t | x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}). \quad (2.1.4)$$

Usando as expressões (2.1.3) e (2.1.4), e sendo a função logaritmo uma função monótona usualmente utilizada para melhor organizar funções de verossimilhança, o logaritmo da função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) &= \log(L(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{x})) = \log(f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \boldsymbol{\eta})) \\
&= \log(f_{X_1}(x_1; \boldsymbol{\eta})) + \sum_{t=2}^n \log(f_{X_t|X_{t-1}}(x_t | x_{t-1}; \boldsymbol{\eta})) \\
&= -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}\right) - \frac{\left(x_1 - \frac{c}{1-\phi_1}\right)^2}{\frac{2\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}} - \left(\frac{n-1}{2}\right) \log(2\pi) \\
&\quad - \left(\frac{n-1}{2}\right) \log(\sigma_\varepsilon^2) - \sum_{t=2}^n \left[\frac{(x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right] \\
&= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(1-\phi_1^2) - \frac{1-\phi_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \left(x_1 - \frac{c}{1-\phi_1}\right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n (x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2. \tag{2.1.5}
\end{aligned}$$

Solucionando

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \phi_1} = 0 \quad e \quad \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \sigma_\varepsilon^2} = 0 \tag{2.1.6}$$

encontramos os estimadores de máxima verossimilhança para $\boldsymbol{\eta}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\hat{c} &= \frac{1-\hat{\phi}_1}{n(1-\hat{\phi}_1)+2\hat{\phi}_1} \left[x_1(\hat{\phi}_1+1) + \sum_{t=2}^n (x_t - \hat{\phi}_1 x_{t-1}) \right] \\
\frac{-\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \hat{\phi}_1}{1-\hat{\phi}_1^2} + \hat{\phi}_1 \left(x_1 - \frac{\hat{c}}{1-\hat{\phi}_1} \right)^2 + \frac{1+\hat{\phi}_1}{1-\hat{\phi}_1} \left(x_1 - \frac{\hat{c}}{1-\hat{\phi}_1} \right) \hat{c} + \sum_{t=2}^n x_{t-1} (x_t - \hat{c} - \hat{\phi}_1 x_{t-1}) &= 0 \\
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1-\hat{\phi}_1^2}{n} \left(x_1 - \frac{\hat{c}}{1-\hat{\phi}_1} \right)^2 + \frac{1}{n} \sum_{t=2}^n (x_t - \hat{c} - \hat{\phi}_1 x_{t-1})^2. \tag{2.1.7}
\end{aligned}$$

Observação 2.1.1. Ao solucionar

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \phi_1} = 0 \tag{2.1.8}$$

nota-se que essa parcela, diferente das demais estimativas, não pode ser descrita facilmente como uma única expressão das demais estimativas. Ela não possui solução única pelo fato de ser uma função de quarto grau. McLeod e Zhang (2006) apontam que o estimador por mínimos quadrados ordinários é o mais eficiente e confiável para estimar ϕ_1 , e também citam a utilização das funções de autocorrelações parciais dada na Definição 1.1.9.

Os intervalos de confiança, que serão a seguir apresentados, foram calculados através da seguinte fórmula:

$$IC(95\%) = \hat{\omega} \pm 1.96 \times \sqrt{Var(\hat{\omega})}, \tag{2.1.9}$$

onde $\hat{\omega}$ é a estimativa pontual do parâmetro estudado, $Var(\hat{\omega})$ é a variância do estimador e $\mathbb{P}(X \leq 1.96) = 0.975$ que é o quantil 97.5% da distribuição normal padrão.

Exemplo 2.1.1. Para ilustrar um processo AR(1) Gaussiano, suponhamos $\{X_t\}_{t=1}^n$ uma única amostra de tamanho $n = 300$ gerada pelo *software* estatístico R de um processo AR(1) Gaussiano dado por

$$X_t = 5 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 300, \quad (2.1.10)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é o processo de variáveis aleatórias i.i.d. também gerados pelo *software* com distribuição normal de média 0 e variância 1, ou seja, $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$, para cada $t \in \mathbb{Z}$.

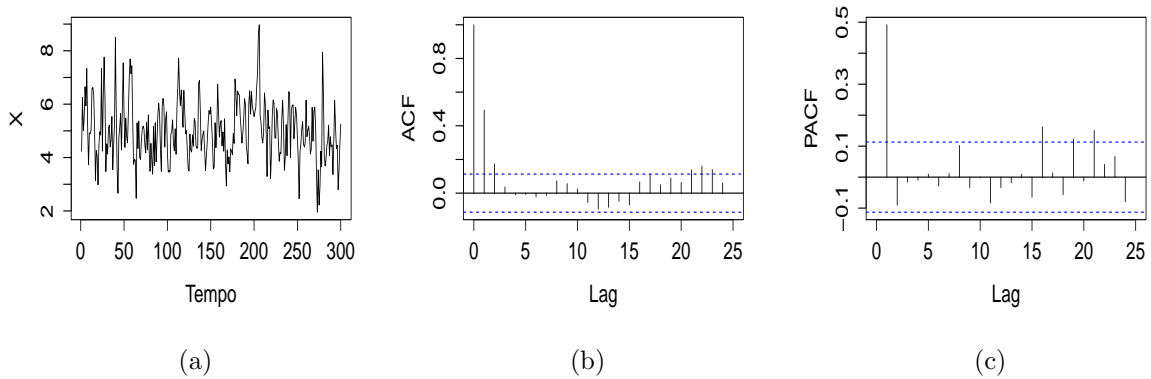


Figura 2.1: (a) Série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(1) dado na expressão (2.1.10); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.

A Figura 2.1(a) apresenta o processo $\{X_t\}_{t=1}^{300}$, observando que ele se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante, neste caso, algo próximo de 5.

Observando a função de autocorrelação (ver Figura 2.1(b)) nota-se um decaimento lento, comportamento característico de processos AR, enquanto que a função de autocorrelação parcial (ver Figura 2.1(c)) apresenta um corte brusco no *lag* 1, indicando que, de fato, os dados gerados são advindos de um AR(1).

Dado o fato de que desconhecemos os parâmetros da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$, mas sabendo que se trata de uma amostra de um modelo auto-regressivo de ordem 1 - AR(1) - (no Capítulo 3 são abordados os métodos de identificação da ordem de um processo) a estimação do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \sigma_\varepsilon)'$, utilizando a expressão (2.1.7), é apresentada na Tabela 2.1 com o erro padrão e o intervalo de confiança ao nível de significância de 0.05 (ver 2.1.9).

Tabela 2.1: Estimativas para o modelo AR(1) apresentado no Exemplo 2.1.1.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC(95%)	
$c = 5$	5.0021	0.1107	4.7851	5.2190
$\phi_1 = 0.5$	0.4910	0.0501	0.3928	0.5891
$\sigma_\varepsilon = 1$	0.9588	-	-	-

Podemos notar, através da Tabela 2.1 que, para um tamanho amostral $n = 300$, os parâmetros foram bem estimados, pois, de acordo com a equação (2.1.10), seus valores teóricos são dados por

$$c = 5, \quad \phi_1 = 0.5 \quad \text{e} \quad \sigma_\varepsilon^2 = 1. \quad (2.1.11)$$

Além disso, com 95% de confiança os intervalos contêm os valores teóricos apresentados em (2.1.11) .

Conforme (2.1.1) e (2.1.2), podemos estimar a média e a variância do processo por

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}_1} = \frac{5.0021}{1 - 0.4910} = 9.8268$$

e

$$\hat{\gamma}_X(0) = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{1 - \hat{\phi}_1^2} = \frac{0.9582}{1 - 0.4910^2} = 1.2633$$

cujos valores teóricos são

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1} = \frac{5}{1 - 0.5} = 10 \quad \text{e} \quad \gamma_X(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} = \frac{1}{1 - 0.5^2} = 1.33.$$

A melhor estimativa de ϕ_1 é aquela que maximiza a função de log-verossimilhança. Supondo que os parâmetros c e σ_ε^2 sejam dados e conhecidos, a Figura 2.2 apresenta a função de log-verossimilhança para a amostra $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ em relação a cada provável valor de ϕ_1 . Nota-se que o pico da função de log-verossimilhança está próximo a $\phi_1 = 0.5$.

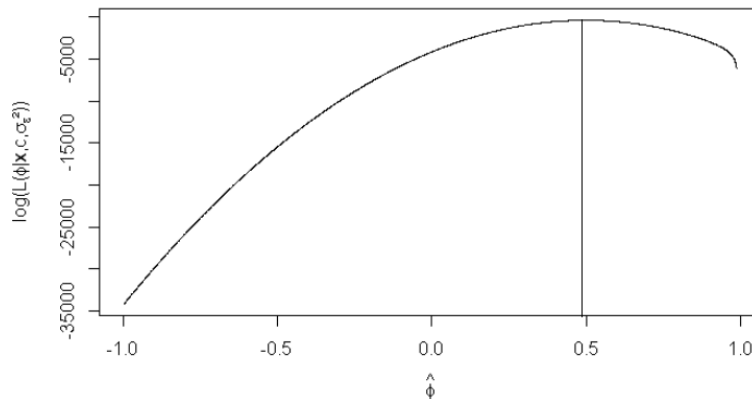


Figura 2.2: Função de log-verossimilhança de $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ em função de $\hat{\phi}_1$ supondo c e σ_ε^2 conhecidos.

Notação Matricial para a Função de Verossimilhança de um AR(1)

Considere $\mathbf{X}_{(n \times 1)} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ uma amostra aleatória de n observações. Sabemos que $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$, onde $\boldsymbol{\mu} = \left(\frac{c}{1 - \phi_1}, \frac{c}{1 - \phi_1}, \dots, \frac{c}{1 - \phi_1} \right)'$ é o vetor $(n \times 1)$ de médias e

$$\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'] = \boldsymbol{\Omega} \quad (2.1.12)$$

é a matriz de variâncias e covariâncias de \mathbf{X} em que os elementos dessa matriz correspondem às variâncias de \mathbf{X} na sua diagonal principal e às autocovariâncias de \mathbf{X} fora dessa diagonal. Lembramos que a j -ésima autocovariância de um processo AR(1) é dada por

$$\mathbb{E}[(X_t - \mu)(X_{t-j} - \mu)] = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\phi_1^j}{1 - \phi_1^2}, \quad (2.1.13)$$

onde $\mu = \frac{c}{1 - \phi_1}$.

Essa matriz pode ser escrita em função de ϕ_1 e σ_ε^2 . A partir de (2.1.12) e (2.1.13), temos que

$$\mathbf{\Omega} = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V} \quad (2.1.14)$$

onde a matriz \mathbf{V} é dada por

$$\mathbf{V} = \frac{1}{1 - \phi_1^2} \begin{pmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 & \cdots & \phi_1^{n-1} \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 & \cdots & \phi_1^{n-2} \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 & \cdots & \phi_1^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \phi_1^{n-2} & \phi_1^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.15)$$

Se \mathbf{X} for uma amostra advinda de uma distribuição $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Omega})$, a função de verossimilhança pode ser escrita como

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n (\det(\mathbf{\Omega}^{-1}))^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

e o logaritmo da função de verossimilhança como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}; \mathbf{x}) &= \log(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{\Omega}^{-1})) - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Omega}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}). \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

As expressões (2.1.16) e (2.1.5) devem representar exatamente a mesma função $\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta})$ para os dados $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$. A seguir, utilizando algumas propriedades matriciais, verificamos isso. Defina a matriz

$$\mathbf{L}_{n \times n} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \phi_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\phi_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\phi_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.17)$$

podemos decompor \mathbf{V}^{-1} em função de \mathbf{L} da forma $\mathbf{L}'\mathbf{L} = \mathbf{V}^{-1}$.

A partir das expressões (2.1.14) e (2.1.17), temos que

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}'\mathbf{L}. \quad (2.1.18)$$

A partir da propriedade de que $\det(\zeta \mathbf{A}) = \zeta^n \det(\mathbf{A})$, onde \mathbf{A} é uma matriz $(n \times n)$ e $\zeta \in \mathbb{R}$, torna-se fácil ver que

$$\det(\sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}'\mathbf{L}) = \sigma_\varepsilon^{-2n} \det(\mathbf{L}'\mathbf{L}).$$

Sendo assim, a partir de (2.1.18), podemos reescrever a expressão (2.1.16) como

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^{-2n} \det(\mathbf{L}'\mathbf{L})) - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}'\mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}). \quad (2.1.19)$$

Defina o vetor

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \mathbf{L}_{(n \times n)} \times \begin{pmatrix} x_1 - \mu \\ x_2 - \mu \\ \vdots \\ x_n - \mu \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \phi_1^2} (x_1 - \mu) \\ (x_2 - \mu) - \phi_1(x_1 - \mu) \\ \vdots \\ (x_n - \mu) - \phi_1(x_{n-1} - \mu) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Substituindo $\mu = \frac{c}{1 - \phi_1}$, a expressão (2.1.20) é dada por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \phi_1^2} \left(x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1} \right) \\ x_2 - \phi_1 x_1 - c \\ x_3 - \phi_1 x_2 - c \\ \dots \\ x_n - \phi_1 x_{n-1} - c \end{pmatrix}.$$

O último termo da expressão (2.1.19) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}'\mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \mathbf{x}'\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (1 - \phi_1^2) \left[x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1} \right]^2 + \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n (x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2, \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

pois

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'\mathbf{x} &= [\mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]' \mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{L}'\mathbf{L}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}). \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

O termo central de (2.1.19) é analogamente reescrito como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(\det(\sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{L}'\mathbf{L})) &= \frac{1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^{-2n} \det(\mathbf{L}'\mathbf{L})) = -\frac{1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{L}'\mathbf{L})) \\ &= -\frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \log(\det(\mathbf{L})) \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

desde que $\det(\mathbf{L}'\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L}') \times \det(\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L} \times \mathbf{L}) = \det(\mathbf{L})^2$, $\log(\det(\mathbf{L}'\mathbf{L})) = 2 \log(\det(\mathbf{L}))$ e $\det(\zeta \mathbf{L}) = \zeta^n \det(\mathbf{L})$.

Visto que \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior, seu determinante é dado pelo produto dos elementos da sua diagonal. Portanto, $\det(\mathbf{L}) = \sqrt{1 - \phi_1^2}$. Dessa maneira, a expressão (2.1.23) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \log(\sigma_\varepsilon^{-2n} \det(\mathbf{L}'\mathbf{L})) = -\frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(1 - \phi_1^2).$$

Por consequência, a expressão (2.1.21) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) = & -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(1 - \phi_1^2) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (1 - \phi_1^2) \left[x_1 - \frac{c}{1 - \phi_1} \right]^2 \\ & - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n (x_t - c - \phi_1 x_{t-1})^2. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Ambas as expressões (2.1.5) e (2.1.24) descrevem precisamente o logaritmo da função de verossimilhança de um processo AR(1).

Observação 2.1.2. A expressão (2.1.5) é claramente preferível nas análises computacionais de dados porque ela evita inversões de matrizes ($n \times n$) como em (2.1.24). Na expressão (2.1.5), X_t é escrito como a soma de uma previsão ($c + \phi_1 X_{t-1}$) e um erro de previsão (ε_t). Por construção, o erro de previsão é independente das observações anteriores. O logaritmo da sua função de densidade é incluído ao logaritmo da verossimilhança das observações precedentes. Isso é conhecido como a decomposição do erro de previsão da função de verossimilhança.

2.1.2 Processo AR(p) com Inovações Gaussianas

Um processo AR(p) com inovações Gaussianas é dado por

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é i.i.d. com distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Neste caso, o vetor de parâmetros é dado por $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_\varepsilon^2)'$.

Da amostra $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n)'$, consideramos as primeiras p observações e coletamos dela um vetor \mathbf{X}_p de tamanho $(p \times 1)$, o qual é visto como uma realização p -dimensional da variável Gaussiana. A média desse vetor é o vetor $\boldsymbol{\mu}_p$ com dimensão $(p \times 1)$ cujos elementos são dados por

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}. \quad (2.1.25)$$

Considere a matriz $\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_p$ de tamanho $(p \times p)$ como sendo uma matriz de variâncias e covariâncias de \mathbf{X}_p , que é dada por

$$\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_p = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-3} \\ \cdots & & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \gamma_{p-3} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.1.26)$$

onde

$$\gamma_j = \mathbb{E}[(Y_j - \mu)(Y_{j+1} - \mu)], \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, p,$$

é a j -ésima autocovariância de um processo AR(p).

A função densidade das p primeiras observações é, então, uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_p, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_p)$, dada por

$$\begin{aligned} f_{X_1, \dots, X_p}(x_1, \dots, x_p; \boldsymbol{\eta}) &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{p}{2}} \det(\sigma_\varepsilon^{-2} \mathbf{V}_p^{-1})^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}) \right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\sigma_\varepsilon^{-2})^{\frac{p}{2}} \det(\mathbf{V}_p^{-1})^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}) \right\} \end{aligned}$$

tendo em vista que vale a propriedade $\det(\zeta \mathbf{A}) = \zeta^n \det(\mathbf{A})$, onde \mathbf{A} é uma matriz ($n \times n$) e $\zeta \in \mathbb{R}$.

Para as observações restantes da amostra, isto é, $(X_{p+1}, \dots, X_n)'$, a decomposição do erro de previsão pode ser usada. Condicional às primeiras $t - 1$ observações, a t -ésima observação é Gaussiana com média

$$c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p}$$

e com variância σ_ε^2 . Apenas as p mais recentes observações importam para essa distribuição. Consequentemente, para $t > p$,

$$\begin{aligned} f_{X_t | X_1, \dots, X_{t-1}}(x_t | x_1, \dots, x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}) &= f_{X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-p}}(x_t | x_{t-p}, x_{t-p+1}, \dots, x_{t-1}; \boldsymbol{\eta}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp \left\{ -\frac{(x_t - c - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p})^2}{2\sigma_\varepsilon^2} \right\}. \end{aligned}$$

Para a amostra completa $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n)'$, a função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \boldsymbol{\eta}) &= f_{X_1, \dots, X_p}(x_1, \dots, x_p; \boldsymbol{\eta}) \\ &\quad \times \prod_{t=p+1}^n f_{X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-p}}(x_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-p}; \boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

Assim, o logaritmo da função de verossimilhança é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) &= \log(f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \boldsymbol{\eta})) = -\frac{p}{2} \log(2\pi) - \frac{p}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{V}_p^{-1})) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}) - \frac{n-p}{2} \log(2\pi) - \frac{n-p}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) \\ &\quad - \sum_{t=p+1}^n \frac{(x_t - c - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_p x_{t-p})^2}{2\sigma_\varepsilon^2} = \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{V}_p^{-1})) - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{V}_p^{-1} (\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=p+1}^n (x_t - c - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_p x_{t-p})^2. \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Estimativas da expressão (2.1.27) necessitam da inversão da matriz \mathbf{V}_p de ordem $(p \times p)$. Denote o (i, j) -ésimo elemento de \mathbf{V}_p^{-1} por $v^{ij}(p)$. Galbraith e Galbraith (1974) mostraram que

$$v^{ij}(p) = \sum_{k=0}^{i-1} \phi_k \phi_{k+j-i} - \sum_{k=p+1-j}^{p+i-j} \phi_k \phi_{k+j-i}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq j \leq p, \tag{2.1.28}$$

onde $\phi_0 = -1$. Valores de $v^{ij}(p)$, para $i > j$, podem ser facilmente calculados, já que \mathbf{V}_p^{-1} é uma matriz simétrica e, portanto, $v^{ij}(p) = v^{ji}(p)$.

Para um processo AR(1), \mathbf{V}_p^{-1} é um escalar. Seu valor é encontrado tomando-se $i = j = p = 1$ e usando (2.1.28). Portanto,

$$\mathbf{V}_1^{-1} = \sum_{k=0}^0 \phi_k \phi_k - \sum_{k=1}^1 \phi_k \phi_k = \phi_0^2 - \phi_1^2 = 1 - \phi_1^2.$$

Deste modo,

$$\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

o que, de fato, reproduz a fórmula (2.1.2) para a variância de um processo AR(1).

Voltando ao Exemplo 2.1.1: Aplicando à série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ do Exemplo 2.1.1 em que $\phi_1 = 0.5$, temos

$$\mathbf{V}_1^{-1} = (-1) \times (-1) - 0.5 \times 0.5 = 1 - 0.25 = 0.75.$$

Exemplo 2.1.2. Para um processo AR(2), a expressão (2.1.28) nos fornece

$$\begin{aligned} v^{11}(2) &= \sum_{k=0}^0 \phi_k \phi_{k+1-1} - \sum_{k=2+1-1}^{2+1-1} \phi_k \phi_{k+1-1} = \phi_0^2 - \phi_2^2 = 1 - \phi_2^2; \\ v^{12}(2) &= \sum_{k=0}^0 \phi_k \phi_{k+2-1} - \sum_{k=2+1-2}^{2+1-2} \phi_k \phi_{k+2-1} = -\phi_1 - \phi_1 \phi_2 = -\phi_1(1 + \phi_2) = v^{21}(2); \\ v^{22}(2) &= \sum_{k=0}^1 \phi_k \phi_k - \sum_{k=2+1-2}^2 \phi_k \phi_k = \phi_0^2 + \phi_1^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2 = \phi_0^2 - \phi_2^2 = 1 - \phi_2^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{V}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \phi_2^2 & -\phi_1(1 + \phi_2) \\ -\phi_1(1 + \phi_2) & 1 - \phi_2^2 \end{pmatrix} = (1 + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 - \phi_2 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 - \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{V}_2^{-1}) &= (1 + \phi_2)^2 \det \begin{pmatrix} 1 - \phi_2 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 - \phi_2 \end{pmatrix} = \\ &= (1 + \phi_2)^2 [(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)' \mathbf{V}_2^{-1} (\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) &= [(X_1 - \mu) \quad (X_2 - \mu)]_{1 \times 2} (1 + \phi_2) \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 - \phi_2 & -\phi_1 \\ -\phi_1 & 1 - \phi_2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} X_1 - \mu \\ X_2 - \mu \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \\ &= (1 + \phi_2) ((1 - \phi_2)(X_1 - \mu) - \phi_1(X_2 - \mu) - \phi_1(X_1 - \mu) + (1 - \phi_2)(X_2 - \mu)) \begin{pmatrix} X_1 - \mu \\ X_2 - \mu \end{pmatrix} \\ &= (1 + \phi_2^2)(X_1 - \mu)^2 - 2\phi_1(1 + \phi_2)(X_1 - \mu)(X_2 - \mu) + (1 - \phi_2^2)(X_2 - \mu)^2. \end{aligned}$$

O logaritmo da função de verossimilhança exata para um processo AR(2) Gaussiano é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma_\varepsilon^2) + \frac{1}{2} \log \{(1 - \phi_2)^2 [(1 + \phi_2)^2 - \phi_1^2]\} \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \{(1 + \phi_2^2)(X_1 - \mu)^2 - 2\phi_1(1 + \phi_2)(X_1 - \mu)(X_2 - \mu) + (1 - \phi_2^2)(X_2 - \mu)^2\} \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=3}^n (X_t - c - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2})^2, \quad \text{onde } \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}. \end{aligned}$$

Observação 2.1.3. Visto que as estimativas mostradas em (2.1.7) não dependem de uma estatística mínima, suficiente e completa, mas das demais estimativas ainda desconhecidas, utiliza-se, como alternativa mais eficaz, o método de estimação dos parâmetros pela maximização, em termos numéricos e iterativos, da função de verossimilhança. Para mais detalhes ver Schmidt (2014).

Exemplo 2.1.3. Seja agora $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ uma amostra gerada pelo software estatístico R de uma série temporal advinda de um processo AR(2) definido por

$$X_t = 16 - 0.4X_{t-1} + 0.5X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 300, \quad (2.1.29)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo formado por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição normal de média 0 e variância 1.

A série $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ é apresentada na Figura 2.3(a), averigua-se que ela está em torno de uma média constante, um valor próximo de 16. Não apresenta nenhuma tendência, por exemplo crescente ou decrescente, ou sazonalidade ao longo do tempo.

Com o auxílio da Figura 2.3(b) observa-se, novamente, um decaimento lento na função de autocorrelação, mas, nesta situação, existe uma oscilação em relação ao sinal da correlação, positivo depois negativo e assim sucessivamente.

A Figura 2.3(c) apresenta a função de autocorrelação parcial que mostra um corte brusco no *lag* 2, assinalando que provavelmente um modelo AR(2) irá ajustar muito bem esta série temporal.

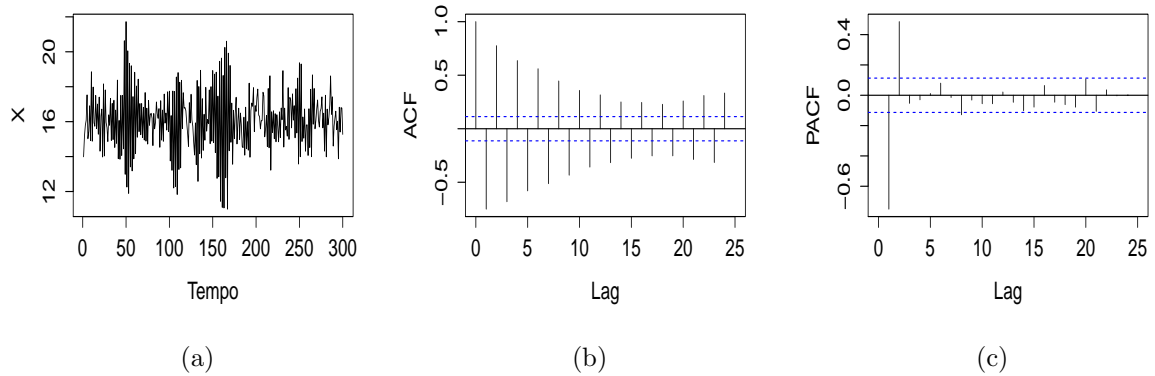


Figura 2.3: (a) Série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(2) dado na expressão (2.1.29); (b) Função de autocorrelação amostral; (c) Função de autocorrelação parcial amostral.

As estimativas para o vetor de parâmetro $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \sigma_\varepsilon)'$, além do erro padrão e o intervalo de confiança são apresentadas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Estimativas para o modelo AR(2) apresentado no Exemplo 2.1.3.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC(95%)	
$c = 16$	16.0704	0.0659	15.9412	16.1995
$\phi_1 = -0.4$	-0.3835	0.0507	-0.4828	-0.2841
$\phi_2 = 0.5$	0.4860	0.0507	0.3866	0.5853
$\sigma_\varepsilon = 1$	1.056	-	-	-

Dessa forma, conforme (2.1.25), a média estimada é

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2} = \frac{16.0704}{1 + 0.3835 - 0.4860} = 17.9054.$$

Encontrando \mathbf{V}_2^{-1} , para o presente caso, utilizando (2.1.28), temos

$$\begin{aligned} v^{11}(2) &= 1 - 0.4860^2 = 1 - 0.2361 = 0.7639 \\ v^{12}(2) &= -(-0.3835) \times (1 + 0.4860) = 0.5699 = v^{21}(2) \\ v^{22}(2) &= 1 - 0.4860^2 = 1 - 0.2361 = 0.7639. \end{aligned}$$

Por conseguinte, conforme (2.1.26), temos que

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{V}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_0 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7639 & 0.5699 \\ 0.5699 & 0.7639 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.9519 & -2.2021 \\ -2.2021 & 2.9519 \end{pmatrix}. \quad (2.1.30)$$

Comparados aos valores teóricos, temos

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2} = \frac{16}{1 + 0.4 - 0.5} = 17.77$$

e

$$\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.7037 & -2.9630 \\ -2.9630 & 3.7037 \end{pmatrix}. \quad (2.1.31)$$

Conforme o tamanho da amostra aumenta, e se ela for representativa, as diferenças entre os valores teóricos e os valores estimados tendem a diminuir. Isto porque a amostra traz mais informação o que aumenta a precisão das estimativas.

Voltando ao Exemplo 2.1.3: Passado um período de tempo, obteve-se mais 700 observações da série X_t , geradas pelo software R. Desta forma,

$$X_t = 16 - 0.4X_{t-1} + 0.5X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 1000, \quad (2.1.32)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo formado por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição normal de média 0 e variância 1.

Estimando novamente o modelo com as novas observações, as estimativas para o vetor de parâmetro $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \sigma_\varepsilon)'$, além do erro padrão e o intervalo de confiança são dados na Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Estimativas para o modelo AR(2) apresentado no Exemplo 2.1.3 quando estimado com as novas observações.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC(95%)	
$c = 16$	16.0111	0.0348	15.9442	16.0793
$\phi_1 = -0.4$	-0.4116	0.0277	-0.4658	-0.3573
$\phi_2 = 0.5$	0.4846	0.0277	0.4330	0.5388
$\sigma_\varepsilon = 1$	1.044	-	-	-

Enquanto que a nova média estimada é

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2} = \frac{16.0111}{1 + 0.4116 - 0.4846} = 17.2980.$$

Calculando $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{V}}_2$ de forma similar apresentada no Exemplo 2.1.3, temos que

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \hat{\mathbf{V}}_2 = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_0 & \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7652 & 0.6110 \\ 0.6110 & 0.7652 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.6068 & -2.8802 \\ -2.8802 & 3.6068 \end{pmatrix}. \quad (2.1.33)$$

Na comparação com o Exemplo 2.1.3, nota-se que não houve grande diferença nas estimativas pontuais do vetor $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \sigma_\varepsilon)'$ e nos dois casos elas estão próximas aos valores teóricos. As principais diferenças encontram-se na estimativa da matriz $\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{V}_2$: enquanto no primeiro caso as estimativas ficaram distantes dos valores teóricos, no segundo, os valores ficaram próximos. E as amplitudes nos intervalos de confiança diminuíram. Ambas as situações eram esperadas, visto que o tamanho amostral aumentou consideravelmente.

2.2 Processo AR(p) com Inovações α -estáveis

Os modelos AR(p) são frequentemente usados para descrever séries temporais de caudas pesadas, que apresentam variância infinita, por serem simples e capazes de descrever diferentes comportamentos. Dentro das aplicações de modelos AR com caudas pesadas podemos citar: tempo entre redes (Resnick, 1997), temperatura da superfície do mar (Gallagher, 2001), log-retorno do mercado de ações (Ling, 2005 e Andrews e Davis, 2013). Nesta seção definiremos processos auto-regressivos de ordem p com inovações α -estáveis e sua função de máxima verossimilhança. Também apresentaremos a função codiferença e a função codiferença normalizada, além de exemplos.

Um processo AR(p) com inovações α -estáveis é dado por

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + a_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.1)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. seguindo distribuição $\mathcal{S}_\alpha(\sigma_a, \beta, \delta)$, onde α , σ_a , β e δ são, respectivamente, os parâmetros de estabilidade, escala, assimetria e locação. O vetor de parâmetros do modelo é dado por $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \alpha, \sigma_a, \beta, \delta)'$.

Considere a equação (2.2.1) com os coeficientes reais $\phi_0 = 1$, ϕ_1, \dots, ϕ_p e o polinômio

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p, \quad (2.2.2)$$

em que z é uma variável complexa. Desta forma, pode-se reescrever o sistema (2.2.1) simbolicamente como

$$\Phi(B)Y_t = a_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.3)$$

onde B é o operador de defasagem definido por $B^k(Y_t) = Y_{t-k}$, para todo $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Se as raízes do polinômio $\Phi(\cdot)$, definido em (2.2.2), existirem fora do disco unitário $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ então

$$Y_t = \left(\frac{1}{\Psi(B)} \right) a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}. \quad (2.2.4)$$

Teorema 2.2.1. *Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo definido em (2.2.1) onde a sequência de coeficientes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ satisfaz $|\psi_j| < Q^{-j}$ eventualmente $Q > 1$. O processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem solução única dada por (2.2.4) se e somente se $\Phi(\cdot)$, definido em (2.2.2), não tem raízes no disco unitário $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$. Além disso, o processo é estritamente estacionário e α -estável.*

Para prova desse teorema, ver Samorodnitsky e Taqqu (1994).

Nas simulações de Monte Carlo, apresentadas no Capítulo 4, consideramos processos simétricos em torno da origem, ou seja, β e δ são iguais a zero. Para determinar os estimadores de máxima verossimilhança correspondentes ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta} = (c, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \alpha, \sigma_a)'$, precisamos da função de verossimilhança completa baseada na distribuição α -estável do processo das inovações. Para uma amostra $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)'$, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\eta} | \mathbf{y}) = \prod_{t=1}^n f(a_t | \boldsymbol{\eta})$$

e a função de log-verossimilhança é dada por

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta} \mid \mathbf{y}) = \sum_{t=1}^n \log(f(a_t \mid \boldsymbol{\eta})),$$

onde $f(a_t \mid \boldsymbol{\eta})$ é a função densidade do processo

$$a_t = Y_t - c - \phi_1 Y_{t-1} - \cdots - \phi_p Y_{t-p}$$

que é composto por v.a. i.i.d. com distribuição $\mathcal{S}_\alpha(\sigma_a, 0, 0)$.

Cabe ressaltar, que os estimadores de máxima verossimilhança para um processo AR(p) com inovação α -estável possui taxa de convergência $n^{1/2}$ e são assintoticamente normais. Por conta disso, o cálculo para os intervalos de confiança, ao nível de 0.05, é igual a fórmula dada em (2.1.9).

Para as gerações e estimação dos parâmetros desses processos, utilizamos um programa em linguagem *Fortran 95* acoplado ao *R-project*. Os resultados das simulações de Monte Carlo estão no Apêndice A.

Exemplo 2.2.1. Para exemplificar um processo AR com média e variância infinita. Gerou-se uma amostra de uma série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{300}$ advinda de um processo AR(1) definido por

$$Y_t = 0.7Y_{t-1} + a_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, 300, \quad (2.2.5)$$

onde $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência constituída por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Cauchy padrão, ou seja, $a_t \sim \mathcal{C}(0, 1) = \mathcal{S}_1(1, 0, 0)$.

A Figura 2.4 apresenta uma série temporal gerada com a inovação advinda de $\mathcal{S}_1(1, 0, 0)$. Percebe-se a existência de valores discrepantes, positivos e negativos, isto está relacionado ao fato da distribuição dos erros não apresentar segundo momento finito. Apesar de em teoria Y_t não apresentar uma média definida, o processo parece estar centrado em zero, com pontos distribuídos aleatoriamente.

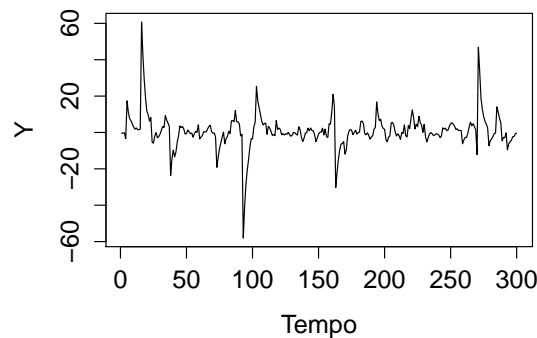


Figura 2.4: Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{300}$ referente ao processo AR(1) dado na expressão (2.2.5).

Qual é a medida de dependência de um processo com variância infinita? Aparentemente, as medidas definidas no Capítulo 1, tais como: função de autocovariância e função de autocorrelação não podem ser usadas visto que a $Var(Y_t) = \infty$.

Kokoszka e Taquq (1994) propuseram uma medida alternativa, chamada codiferença. Esta medida é baseada na função característica de um processo, portanto ela pode ser usada para diferentes processos e não somente α -estáveis. De acordo com a sua definição é fácil calcular a codiferença empírica dado que é baseada na função característica empírica dos dados.

A *função codiferença* é definida por:

$$\tau_Y(s, -s; k) = \ln [\mathbb{E}(e^{is(Y_{t+k}-Y_t)})] - \ln [\mathbb{E}(e^{isY_{t+k}})] - \ln [\mathbb{E}(e^{-isY_t})], \quad (2.2.6)$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $t, k \in \mathbb{Z}$.

A função codiferença é capaz de descrever a dependência entre pares de variáveis aleatórias advindas de um processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Quando as variáveis são independentes e $k \neq 0$ ela é igual a zero. Quanto maior $\tau_Y(s, -s, k)$, “maior” é a dependência entre as variáveis Y_t e Y_{t+k} .

No caso Gaussiano, a função codiferença coincide com a função de autocovariância, quando $s = 1$, isto é, $\tau_Y(k) = \gamma_Y(k)$, onde $\gamma_Y(\cdot)$ denota a função de autocovariância do processo estacionário $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Veja a Observação 2.2.1(a) a seguir.

Observação 2.2.1. A função codiferença possui várias propriedades úteis, entre elas podemos ressaltar:

a) Quando $\alpha = 2$, temos que

$$\begin{aligned} \tau_Y(s, -s; k) &= \ln [\mathbb{E}(e^{is(Y_{t+k}-Y_t)})] - \ln [\mathbb{E}(e^{isY_{t+k}})] - \ln [\mathbb{E}(e^{-isY_t})] \\ &= -s^2 \frac{Var(Y_{t+k} - Y_t)}{2} + s^2 \frac{Var(Y_{t+k})}{2} + s^2 \frac{Var(Y_t)}{2} \\ &= \frac{s^2}{2} [-Var(Y_{t+k}) - Var(-Y_t) - 2Cov(Y_{t+k}, -Y_t) + Var(Y_{t+k}) + Var(Y_t)] \\ &= s^2 Cov(Y_{t+k}, Y_t) \\ &= s^2 \gamma_Y(k). \end{aligned}$$

b) É sempre bem definida, uma vez que não requer nenhuma condição sobre os momentos do processo original $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

c) Para um processo simétrico e estacionário, $\tau_Y(s, -s) = \tau_Y(-s, s)$.

A *função codiferença normalizada* (FCN) $I_Y(k)$ é definida por

$$I_Y(k) = \frac{\tau_Y(s, -s; k)}{\tau_Y(s, -s; 0)}. \quad (2.2.7)$$

Observe que, no caso Gaussiano, $I_Y(k) = \rho_Y(k)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como a função codiferença é definida por meio da função característica, ela pode ser estimada utilizando a função característica empírica.

Dada uma amostra Y_1, \dots, Y_n , um estimador para a função codiferença de um processo estacionário $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, ou seja, a *função codiferença empírica*, no lag $k \in \mathbb{Z}$, pode ser definida por

$$\hat{\tau}_Y(s, -s; k) = \sqrt{\frac{n-k}{n}} \times \{\ln [\varrho(s, -s; k)] - \ln [\varrho(s, 0; k)] - \ln [\varrho(0, -s; k)]\} \quad (2.2.8)$$

onde $s \in \mathbb{R}$ e, para $u, v \in \mathbb{R}$,

$$\varrho(u, v; k) = \begin{cases} (n - k)^{-1} \sum_{t=1}^{n-k} e^{i(uY_{t+k} + vY_t)}, & \text{quando } k \geq 0, \\ (n + k)^{-1} \sum_{t=1}^{n+k} e^{i(uY_{t-k} + vY_t)}, & \text{quando } k < 0. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Por consequência, $\hat{l}_Y(s, -s; k) = \frac{\hat{\tau}_Y(s, -s; k)}{\hat{\tau}_Y(s, -s; 0)}$ pode ser utilizado como estimador para a função codiferença normalizada $I_Y(k)$.

Considere o processo linear $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$, onde o processo ruído $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é formado por v.a. i.i.d. tais que $a_t \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma_a, 0, 0)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, e os coeficientes $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são tais que $|\psi_j| < CR^j$, para algum $C > 0$ e algum $0 < R < 1$. A codiferença teórica para o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\tau_Y(s, -s; k) = \sigma_a^\alpha |s|^\alpha \left[\sum_{j=0}^{\infty} -(|\psi_{j+k} - \psi_j|)^\alpha + |\psi_{j+k}|^\alpha + |\psi_j|^\alpha \right], \quad \text{para } k \geq 0. \quad (2.2.10)$$

Rosadi e Deistler (2005) provam que

$$\hat{\tau}_Y(s, -s; k) \xrightarrow{P} \tau_Y(s, -s; k), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.2.11)$$

Ou seja, o estimador função codiferença é fracamente consistente (a convergência é em probabilidade). Os autores ainda provam que a função codiferença empírica tem distribuição assintótica normal com taxa $n^{-1/2}$.

Para os exemplos apresentados neste trabalho, consideraremos $s = 0.01$. A escolha ótima para s depende do *lag* máximo estudado. Entretanto, Rosadi (2009) afirma que para aplicações práticas, $s = 0.01$ apresentou-se suficiente.

Ao utilizarmos $s = 0.01$ nota-se que a função codiferença normalizada é aproximadamente igual a função de autocorrelação, apresentada na Definição 1.1.16. Destaca-se que esse comportamento foi observado em processos $AR(p)$. Para outros processos isso pode não ser válido.

Por conta do comportamento de $I_Y(k)$ calculou-se a função codiferença normalizada parcial (FCNP) de forma análoga a função de autocorrelação parcial, substituindo-a por $I_Y(k)$ no sistema de equações (1.2).

Voltando ao Exemplo 2.2.1: Para exemplificar, a função codiferença, comparamos os valores teóricos da função codiferença normalizada da equação (2.2.5) com sua correspondente função codiferença normalizada empírica que foi obtida através dos dados gerados no Exemplo 2.2.1.

Tabela 2.4: Funções codiferença normalizada teórica e empírica para o Exemplo 2.2.1.

k	1	2	3	4	5	6	7
$I_Y(k)$	0.70	0.49	0.34	0.24	0.16	0.11	0.08
$\hat{I}_Y(k)$	0.64	0.40	0.23	0.11	0.02	-0.03	-0.08

Apesar do tamanho amostral, relativamente pequeno, para um problema dessa complexidade, a função codiferença empírica apresentou resultados muito bons, para

os quatro primeiros valores de k , dado que os valores ficaram próximos aos teóricos. Para os últimos três valores de k a estimação não foi boa. Todavia o comportamento com decaimento lento ainda é observado.

Exemplo 2.2.2. Certo pesquisador está interessado em estudar o comportamento ao longo do tempo de certa variável aleatória Y , para isto, ele obteve 700 observações em dado período de tempo.

Durante a problematização, comentou-se que os valores discrepantes encontrados durante a pesquisa, não são problemas de medições e sim uma característica da variável estudada. Por conta disto, a distribuição utilizada para modelar os dados é uma α -estável.

Lembrando que $\{Y_t\}_{t=1}^{700}$ é uma amostra de uma série temporal advinda de um processo AR(2), gerado pelo software R, definido por

$$Y_t = 0.6Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + a_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, 700, \quad (2.2.12)$$

onde $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência constituída por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\mathcal{S}_{1.5}(2, 0, 0)$.

A Figura 2.5(a) representa a série temporal estudada pelo pesquisador. Podemos notar com bastante facilidade a existência de valores discrepantes. Nas Figuras 2.5(b) e 2.5(c), vemos a função codiferença normalizada e a função codiferença normalizada parcial. Percebe-se um decaimento lento na função codiferença normalizada e um corte brusco no *lag* da ordem do processo na função codiferença normalizada parcial.

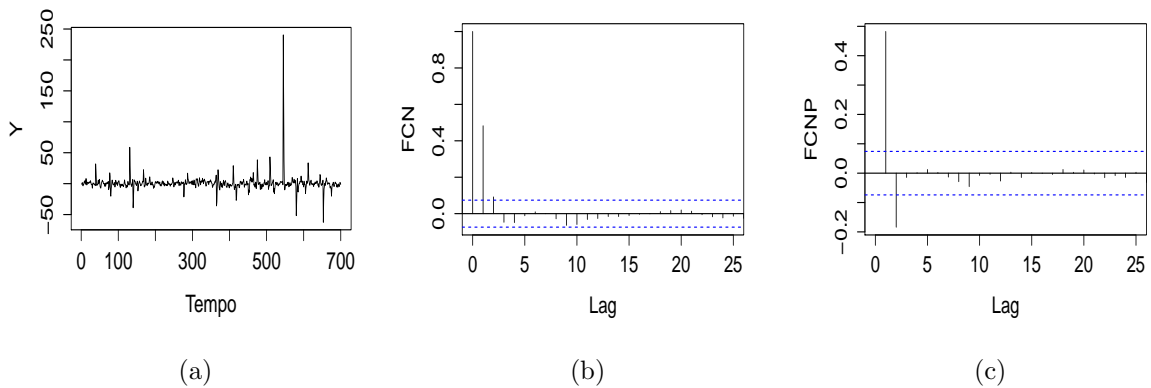


Figura 2.5: (a) Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{700}$ referente ao processo AR(2) dado na expressão (2.2.12); (b) Função codiferença normalizada empírica; (c) Função codiferença normalizada parcial empírica.

As estimativas para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\eta} = (\phi_1, \phi_2, \alpha, \sigma_a)'$ encontram-se na Tabela 2.5, juntamente com o erro padrão e intervalos de confiança respectivos.

Através da Tabela 2.5 notamos que o valor atual da variável Y depende do valor anterior e do valor antes do anterior. Além disso, observa-se que as estimativas ficaram próximas dos valores teóricos e espera-se que 95% dos intervalos de confiança abranjam os valores reais.

Tabela 2.5: Estimativas para o modelo AR(2) apresentado no Exemplo 2.2.2.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC(95%)	
$\alpha = 1.5$	1.4030	0.0574	1.2904	1.5155
$\sigma_a = 2$	1.8812	0.0805	1.7234	2.0389
$\phi_1 = 0.6$	0.5906	0.0078	0.5753	0.6058
$\phi_2 = -0.2$	-0.1908	0.0077	-0.2058	-0.1757

Voltando ao Exemplo 2.2.2: Suponha que passado um longo período de tempo, o pesquisador consegue mais 2300 observações do experimento estudado. Desta forma, terminou com um tamanho amostral de 3000 unidades. Estes valores foram gerados pelo software R e o processo AR(2) é definido por

$$Y_t = 0.6Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + a_t, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, 3000, \quad (2.2.13)$$

onde $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência constituída por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\mathcal{S}_{1.5}(2, 0, 0)$.

A expectativa do pesquisador é que com estas novas observações acrescente mais informações e sendo assim, traga mais confiabilidade para o estudo.

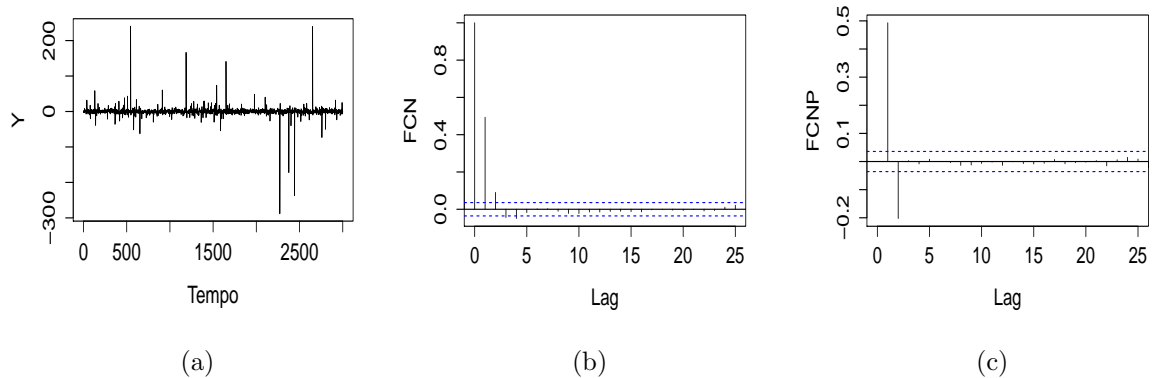


Figura 2.6: (a) Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{3000}$ referente ao processo AR(2) dado na expressão (2.2.13); (b) Função codiferença normalizada empírica; (c) Função codiferença normalizada parcial empírica.

Ao analisarmos a Figura 2.6(a) notamos que a variável Y é realmente “mal comportada”, sendo centrada em zero, mas com muitos valores discrepantes. E mesmo com o aumento amostral, a estrutura de dependência das variáveis permaneceu a mesma. A função codiferença normalizada com decaimento lento e a função codiferença normalizada parcial com um corte brusco no *lag* 2.

Ajustamos novamente um modelo AR(2) com inovações α -estáveis e consideramos os parâmetros de simetria e locação iguais à zero. Obtemos as seguintes estimativas dadas na Tabela 2.6, juntamente com os seus respectivos erros padrões e os intervalos de confiança.

Tabela 2.6: Estimativas para o modelo AR(2) apresentado no Exemplo 2.2.2 quando estimado com as novas observações.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC(95%)	
$\alpha = 1.5$	1.4767	0.0285	1.4208	1.5325
$\sigma_a = 2$	1.9668	0.0391	1.8902	2.0434
$\phi_1 = 0.6$	0.5992	0.0082	0.5831	0.6152
$\phi_2 = -0.2$	-0.2011	0.0056	-0.2121	-0.1901

A estimativa dos parâmetros da inovação α -estável melhoraram com o aumento amostral; as estimativas pontuais aproximaram-se dos verdadeiros valores e os erros padrões diminuíram. Por consequência, as amplitudes dos intervalos de confiança diminuíram. Com relação aos coeficientes ϕ_1 e ϕ_2 ocorreram poucas modificações como podemos observar nas Figuras 2.5(b) e 2.6(b) e Figuras 2.5(c) e 2.6(c).

3 Critérios de Seleção de Modelos

Em suas formas mais básicas, seleção de modelos é uma das tarefas fundamentais da investigação científica. Porém, existe um número incontável de possíveis modelos que se adequam aos dados. Com isto, surge a questão: como se pode escolher o melhor modelo? Não existe uma técnica que aponte diretamente qual é o melhor modelo. Entretanto, uma boa técnica de seleção de modelo é equilibrar a bondade de ajuste com a simplicidade. Modelos mais complexos serão mais capazes de se adaptar a sua forma para ajustar os dados, mas o modelo pode ficar saturado e os parâmetros adicionais podem não acrescentar informação. Enquanto que modelos muito simples podem deixar passar informações importantíssimas.

Uma das técnicas para seleção de modelo é a utilização de critérios de informação, que são baseados na teoria da informação. A ideia destes critérios é serem uma medida da qualidade relativa de um modelo estatístico para um conjunto de dados. A funcionalidade dos critérios é baseada no fato que ao construir modelos é possível aumentar a informação adicionando parâmetros, mas ao fazer isso pode resultar em super ajuste e para isto é adicionado um termo de penalidade pela quantidade de parâmetros do modelo. Ou seja, ele oferece uma estimativa da informação perdida quando um determinado modelo é usado para representar o processo que gera os dados. Ao fazer isso, ele lida com o “trade-off” entre a qualidade do ajuste do modelo e da complexidade do modelo.

Entretanto, os critérios não são um teste estatístico sobre o ajuste do modelo, caso o modelo ajuste mal os dados, os critérios não sinalizarão isso. Por esta razão é importante verificar as suposições antes de escolher o modelo final. Uma vez que, os critérios de informação devem ser mais uma ferramenta para auxiliar não devendo ser usada como único parâmetro de escolha.

Na literatura de processos $AR(p)$ com inovações α -estáveis existem poucos estudos que abordam a questão de seleção da ordem de modelo. Podemos citar o trabalho de Knight (1989) e Andrews e Davis (2013) que provam a consistência do Critério de Informação de Akaike (AIC). Contudo, estudo do comportamento de outros critérios, como o Critério de Informação Bayesiana (BIC), Critério de Hannan-Quinn (HQC) e Critério de Determinação Eficiente (EDC) não existem.

Apresentamos quatro critérios de seleção de modelos diferentes com duas formulações possíveis. E queremos estudar seus comportamentos ao trabalharmos com processos auto-regressivos $AR(p)$ com inovações advindas de distribuições α -estáveis.

3.1 Função de Máxima Verossimilhança

Nesta seção os critérios de seleção de modelo utilizam a estimação da função de máxima verossimilhança em suas fórmulas.

- Critério de Informação de Akaike (AIC)

$$\text{AIC}(p) = -2 \ln(L(k)) + 2k \quad (3.1.1)$$

- Critério de Informação Bayesiana (BIC)

$$\text{BIC}(p) = -2 \ln(L(k)) + 2 \frac{1}{2} k \ln(n), \quad (3.1.2)$$

- Critério de Hannan-Quinn (HQC)

$$\text{HQC}(p) = -2 \ln(L(k)) + 2k \ln(\ln(n)), \quad (3.1.3)$$

- Critério de Determinação Eficiente (EDC)

$$\text{EDC}(p) = -2 \ln(L(k)) + 2k\theta \ln(\ln(n)), \quad (3.1.4)$$

onde θ é uma constante real positiva.

Nas expressões acima, $L(\cdot)$ é a função de máxima verossimilhança do modelo, k é o número de parâmetros do modelo e n é o tamanho da amostra.

3.2 Estimativa de Máxima Verossimilhança do Parâmetro de Escala

Os critérios de seleção de modelo apresentados nesta seção utilizam a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala na sua equação.

- Critério de Informação de Akaike (AIC)

$$\text{AIC}(p) = n \ln(\hat{\sigma}_a^2) + 2k, \quad (3.2.1)$$

- Critério de Informação Bayesiana (BIC)

$$\text{BIC}(p) = n \ln(\hat{\sigma}_a^2) + 2 \frac{1}{2} k \ln(n), \quad (3.2.2)$$

- Critério de Hannan-Quinn (HQC)

$$\text{HQC}(p) = n \ln(\hat{\sigma}_a^2) + 2k \ln(\ln(n)), \quad (3.2.3)$$

- Critério de Determinação Eficiente (EDC)

$$\text{EDC}(p) = n \ln(\hat{\sigma}_a^2) + 2k\theta \ln(\ln(n)), \quad (3.2.4)$$

onde θ é uma constante real positiva.

Nas expressões (3.2.1) - (3.2.4), $\hat{\sigma}_a^2$ é estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala σ_a ao quadrado, k é o número de parâmetros do modelo e n é o tamanho da amostra.

Além disso, nas duas formulações, vistas nas Seções 3.1 e 3.2, podemos colocar um termo em evidência. Desta forma, fica fácil ver a diferença na função penalizadora para os diferentes critérios. A Tabela 3.1 apresenta a função penalizadora para cada um dos critérios estudados.

Tabela 3.1: Critérios de seleção de modelos e suas respectivas funções penalizadoras.

Critério	Função de Penalização
AIC	1
BIC	$\frac{1}{2} \ln(n)$
HQC	$\ln(\ln(n))$
EDC	$\theta \ln(\ln(n))$

Variou-se o valor de θ no conjunto $\{1/4, 1/2, 2, 3, 5, 7\}$ observando o que ocorre ao penalizar mais levemente e mais duramente o critério EDC, com a finalidade de encontrar o valor ótimo para a constante.

Para exemplificar a atuação dos critérios de seleção, consideramos os Exemplos 3.2.1 e 3.2.2 que apresentam séries temporais advindas de processos AR(2) Gaussianos e α -estáveis, respectivamente. Apesar de não serem realizadas, enfatiza-se a importância da utilização de outras ferramentas para a escolha da ordem de um processo AR(p), além da verificação das suposições necessárias.

Exemplo 3.2.1. Gerou-se um processo AR(2) Gaussiano, suponhamos $\{X_t\}_{t=1}^{400}$ com uma amostra de tamanho $n = 400$.

$$X_t = -0.2X_{t-1} + 0.4X_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, 400, \quad (3.2.5)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo formado por variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição normal de média 0 e variância 1.

Dado o fato que na prática desconhece-se o verdadeiro processo gerador da série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{400}$, ajustou-se um AR(p) com p variando no conjunto $\{1, 2, 3\}$ e calculou-se os valores para os critérios de seleção estudados para observar quais deles selecionariam corretamente a ordem 2 do processo.

Lembramos o fato que quanto menor essa estatística, melhor. Além disso, deve-se comparar os critérios dentro de si e não entre si. Importante ressaltar que θ foi considerado igual 3 no EDC. Além disso, para um AR(1) estimou-se $\boldsymbol{\eta}_1 = (\phi_1, \sigma_a^2)'$, no AR(2) estimou-se $\boldsymbol{\eta}_2 = (\phi_1, \phi_2, \sigma_a^2)'$ e no AR(3) estimou-se $\boldsymbol{\eta}_3 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \sigma_a^2)'$.

Tabela 3.2: Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a função de máxima verossimilhança.

AR(p)	LogLik	AIC	BIC	HQC	EDC
1	-607.50	1219.00	1226.98	1222.16	1236.49
2	-586.59	1179.18	1191.15*	1183.92*	1205.40*
3	-585.04	1178.07*	1194.04	1184.39	1213.04

* Indica o melhor modelo conforme o critério estudado.

Tabela 3.3: Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala.

AR(p)	$\hat{\sigma}_a^2$	AIC	BIC	HQC	EDC
1	0.74	-113.64	-105.66	-110.48	-96.16
2	0.60	-195.71	-183.74	-190.97	-169.48*
3	0.59	-199.96*	-184.00*	-193.64*	-165.00

* Indica o melhor modelo conforme o critério estudado.

Observe que, ϕ_i são os coeficientes do modelo auto-regressivo, para $i = 1, 2, 3$ e σ_a^2 é a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala, de uma v.a. α -estável com $\alpha = 2$, ao quadrado.

Nota-se que nas duas formulações o critério AIC seleciona incorretamente um AR(3). Na formulação que utiliza a Loglike, os demais critérios, selecionam corretamente o AR(2). Em contrapartida, os critérios quando utilizam a estimativa do parâmetro de escala, de uma variável α -estável, não apresentaram um bom desempenho, sendo que somente o EDC considerou, corretamente, o modelo AR(2) como o mais parcimonioso.

Tabela 3.4: Função penalizadora dos critérios estudados no Exemplo 3.2.1

Critério	Função Penalizadora
AIC	1
BIC	2.99
HQC	1.79
EDC	5.37

A Tabela 3.4 expõe de forma simples como os critérios BIC, HQC e EDC penalizam de forma mais dura que o critério AIC, no exemplo estudado. E o critério EDC é o que penaliza mais severamente.

Exemplo 3.2.2. Seja $\{Y_t\}_{t=1}^{1000}$ uma amostra de uma série temporal advinda de um processo AR(2) α -estável definido por

$$Y_t = 0.3Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2} + a_t, \quad t = 1, 2, \dots, 1000, \quad (3.2.6)$$

onde $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $S_1(1, 0, 0)$.

Assumindo que não se sabe o verdadeiro processo gerador da série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{1000}$, modelou-se processos auto-regressivos de ordem p , com p variando no conjunto $\{1, 2, 3\}$. Os valores para os critérios de seleção estudados encontram-se nas Tabelas 3.5 e 3.6.

Tabela 3.5: Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a função de máxima verossimilhança.

AR(p)	LogLik	AIC	BIC	HQC	EDC
1	-3500.54	7007.08	7021.80	7011.82	7035.87
2	-2923.87	5855.74*	5875.37*	5862.06*	5894.12*
3	-3139.99	6289.98	6314.52	6297.88	6337.96

* Indica o melhor modelo conforme o critério estudado.

Tabela 3.6: Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala.

AR(p)	$\hat{\sigma}_a^2$	AIC	BIC	HQC	EDC
1	6.66	1902.02	1916.74	1907.62	1930.81
2	3.65	1302.95	1322.58	1310.41	1341.33
3	0.91	-76.69*	-52.15*	-67.36*	-48.04*

* Indica o melhor modelo conforme o critério estudado.

Ressalta-se que θ foi considerado igual 2 para o HQC e $\theta = 3$ para o EDC. Além disso, para um AR(1) estimou-se $\boldsymbol{\eta}_1 = (\phi_1, \alpha, \sigma_a)'$, no AR(2) estimou-se $\boldsymbol{\eta}_2 = (\phi_1, \phi_2, \alpha, \sigma_a)'$ e no AR(3) estimou-se $\boldsymbol{\eta}_3 = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \alpha, \sigma_a)'$. Observe que, ϕ_i são os coeficientes do modelo auto-regressivo, para $i = 1, 2, 3$ e σ_a é o parâmetro de escala e α o índice de estabilidade.

Através da Tabela 3.5 vemos que a ordem $p = 2$ é a selecionada, de forma correta, usando qualquer um dos quatro critérios. Contudo, quando utilizamos a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala, Tabela 3.6, nenhum dos quatro critérios seleciona o processo AR(2) corretamente. De fato, todos selecionam a ordem 3. Observamos que este acontecimento está relacionado ao valor estimado de $\hat{\sigma}_a^2$ ser menor que 1 para o AR(3). Desta forma, quando calculamos o logaritmo natural de $\hat{\sigma}_a^2$ a quantidade fica negativa, o que não ocorre para os processos AR(1) e AR(2).

4 Simulações de Monte Carlo

Nesta capítulo, apresentamos um estudo de simulações de Monte Carlo, envolvendo processos $AR(p)$ com inovações α -estável.

Foram geradas séries temporais a partir dos processos $AR(1)$ e $AR(2)$, nos diferentes cenários apresentados na Tabela 4.1, no software R, com inovações advindas de uma distribuição α -estável. Os parâmetros de locação e simetria do processo de inovação foram considerados iguais à zero. O índice de estabilidade, α , está no conjunto $\{0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5, 1.8, 2\}$ e o parâmetro de escala, σ_a , no conjunto $\{1, 2, 3\}$. A intenção ao utilizar diferentes tamanhos de amostras (n) e *burn-in* é analisar o comportamento dos critérios de seleção de modelo nos mais possíveis casos que a prática pode envolver. Para isto, os seguintes cenários para a geração de dados foram considerados.

Tabela 4.1: Cenários para o processo de geração de dados.

Cenário	n	<i>burn-in</i>	<i>re</i>
(i)	100	20	1000
(ii)	300	50	1000
(iii)	500	100	500
(iv)	1000	100	500

No momento de fazer o “goodness of fit”, ou seja, de ajustar o modelo para as séries temporais geradas, ajustou-se um $AR(p)$, com p variando no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Para cada um dos valores de p , foram solicitados os valores dos critérios de seleção estudados para o modelo. Com a finalidade de verificar qual critério selecionava mais vezes corretamente o processo AR gerador dos dados. Estimativas, estatísticas e a ordem selecionada para as simulações encontram-se nas tabelas do Apêndice A. Exceto do caso $AR(1) - S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 300$, *burn-in* = 50, *re* = 500 que será apresentada a seguir.

Para exemplificar o estudo de simulação feito, analisaremos as Tabelas 4.2 e 4.3. A Tabela 4.2 apresenta os valores originais para o vetor de parâmetros, $\boldsymbol{\eta}_1 = (\phi_1, \alpha, \sigma_a)'$, e a média de suas estimativas quando ajustamos um $AR(p)$ com p variando no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Na tabela também apresentamos a estimativa média da função de máxima verossimilhança e do logaritmo do parâmetro de escala ao quadrado para o caso $AR(1) - S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 300$, *burn-in* = 100 e *re* = 500. A Tabela 4.3 apresenta a ordem selecionada pelos critérios de seleção de

modelos, aqui estudados, para as 500 séries temporais AR(1) geradas anteriormente. Colocamos, em negrito, os maiores valores para cada critério.

Tabela 4.2: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 300$, $burn-in = 50$, $re = 500$.

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_\alpha^2)$
1	0.500	0.846	1.000	9.840	0.500	0.585	-	-	-	-	-	-	-	-	-1348.394	3.191
2	0.500	1.877	1.000	5.801	-	0.484	-	0.008	-	-	-	-	-	-	-1617.159	2.744
3	0.500	1.939	1.000	7.893	-	0.438	-	0.112	-	-0.040	-	-	-	-	-1775.826	3.023
4	0.500	1.897	1.000	3.827	-	0.325	-	0.096	-	-0.010	-	0.003	-	-	-2062.841	1.360
5	0.500	1.961	1.000	2.372	-	0.291	-	0.103	-	0.000	-	0.006	-	-0.003	-2268.696	0.744
1	0.500	0.709	2.000	20.912	0.500	0.604	-	-	-	-	-	-	-	-	-1546.984	4.609
2	0.500	1.833	2.000	12.092	-	0.501	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-1852.725	4.031
3	0.500	1.911	2.000	15.412	-	0.459	-	0.080	-	-0.030	-	-	-	-	-2050.718	3.858
4	0.500	1.846	2.000	5.365	-	0.373	-	0.072	-	-0.008	-	0.002	-	-	-2447.878	1.560
5	0.500	1.951	2.000	3.773	-	0.311	-	0.098	-	-0.005	-	0.011	-	-0.005	-2758.295	0.931
1	0.500	0.733	3.000	27.547	0.500	0.610	-	-	-	-	-	-	-	-	-1674.878	5.294
2	0.500	1.736	3.000	17.120	-	0.500	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-1984.651	4.433
3	0.500	1.890	3.000	22.055	-	0.475	-	0.087	-	-0.037	-	-	-	-	-2246.890	4.226
4	0.500	1.833	3.000	7.253	-	0.365	-	0.084	-	-0.014	-	0.003	-	-	-2762.441	1.716
5	0.500	1.953	3.000	4.713	-	0.290	-	0.108	-	-0.005	-	0.005	-	-0.002	-3167.617	0.854
1	0.800	1.026	1.000	1.426	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-903.405	0.362
2	0.800	1.671	1.000	2.542	-	0.501	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-1019.215	1.696
3	0.800	1.826	1.000	2.722	-	0.500	-	0.022	-	-0.011	-	-	-	-	-1054.132	1.855
4	0.800	1.875	1.000	2.527	-	0.487	-	0.021	-	-0.011	-	0.003	-	-	-1078.706	1.686
5	0.800	1.923	1.000	2.375	-	0.486	-	0.019	-	-0.008	-	0.004	-	-0.002	-1110.005	1.547
1	0.800	1.005	2.000	3.083	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-1106.136	1.939
2	0.800	1.605	2.000	4.739	-	0.502	-	-0.000	-	-	-	-	-	-	-1213.535	2.920
3	0.800	1.761	2.000	5.213	-	0.498	-	0.025	-	-0.011	-	-	-	-	-1247.641	3.110
4	0.800	1.793	2.000	5.277	-	0.505	-	0.012	-	-0.014	-	0.004	-	-	-1283.340	3.109
5	0.800	1.882	2.000	5.005	-	0.497	-	0.015	-	-0.009	-	0.012	-	-0.005	-1350.543	2.862
1	0.800	1.051	3.000	5.622	0.500	0.532	-	-	-	-	-	-	-	-	-1251.883	2.985
2	0.800	1.600	3.000	7.076	-	0.508	-	-0.003	-	-	-	-	-	-	-1330.591	3.690
3	0.800	1.723	3.000	7.700	-	0.508	-	0.019	-	-0.011	-	-	-	-	-1357.842	3.913
4	0.800	1.727	3.000	7.498	-	0.517	-	0.022	-	-0.019	-	0.002	-	-	-1416.331	3.744
5	0.800	1.840	3.000	7.237	-	0.516	-	0.008	-	-0.013	-	0.022	-	-0.007	-1518.409	3.467
1	1.000	1.185	1.000	1.212	0.500	0.504	-	-	-	-	-	-	-	-	-784.914	0.267
2	1.000	1.481	1.000	1.580	-	0.502	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-830.989	0.752
3	1.000	1.682	1.000	1.745	-	0.503	-	0.005	-	-0.002	-	-	-	-	-853.715	0.990
4	1.000	1.840	1.000	1.881	-	0.500	-	0.005	-	0.000	-	-0.000	-	-	-869.738	1.205
5	1.000	1.889	1.000	1.882	-	0.500	-	0.006	-	0.001	-	0.003	-	-0.002	-880.997	1.211
1	1.000	1.129	2.000	2.438	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-984.282	1.684
2	1.000	1.397	2.000	2.958	-	0.502	-	-0.000	-	-	-	-	-	-	-1021.313	2.029
3	1.000	1.630	2.000	3.375	-	0.502	-	0.003	-	0.002	-	-	-	-	-1046.567	2.335
4	1.000	1.747	2.000	3.556	-	0.504	-	-0.004	-	0.001	-	0.003	-	-	-1056.563	2.472
5	1.000	1.857	2.000	3.673	-	0.503	-	-0.001	-	-0.001	-	0.002	-	0.000	-1075.152	2.543
1	1.000	1.121	3.000	3.448	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-1100.626	2.409
2	1.000	1.426	3.000	4.323	-	0.501	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-1142.035	2.792
3	1.000	1.608	3.000	4.890	-	0.506	-	-0.000	-	-0.001	-	-	-	-	-1161.127	3.089
4	1.000	1.711	3.000	5.172	-	0.511	-	-0.003	-	-0.004	-	0.004	-	-	-1175.750	3.214
5	1.000	1.828	3.000	5.417	-	0.505	-	0.005	-	-0.001	-	0.002	-	-0.000	-1197.413	3.312
1	1.200	1.247	1.000	1.051	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-696.860	0.076
2	1.200	1.464	1.000	1.235	-	0.500	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-721.876	0.346
3	1.200	1.567	1.000	1.324	-	0.500	-	-0.000	-	0.003	-	-	-	-	-732.076	0.492
4	1.200	1.722	1.000	1.408	-	0.505	-	-0.004	-	0.007	-	-0.000	-	-	-745.208	0.625
5	1.200	1.830	1.000	1.483	-	0.503	-	0.001	-	0.003	-	0.000	-	0.003	-755.688	0.742
1	1.200	1.243	2.000	2.083	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-905.479	1.445
2	1.200	1.393	2.000	2.284	-	0.500	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-921.439	1.597
3	1.200	1.536	2.000	2.561	-	0.502	-	0.003	-	-0.003	-	-	-	-	-935.604	1.820
4	1.200	1.689	2.000	2.773	-	0.503	-	-0.000	-	0.001	-	0.000	-	-	-945.660	1.998
5	1.200	1.772	2.000	2.857	-	0.502	-	0.000	-	-0.000	-	0.001	-	0.002	-953.461	2.064
1	1.200	1.224	3.000	3.131	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-1026.686	2.264
2	1.200	1.359	3.000	3.387	-	0.500	-	0.002	-	-	-	-	-	-	-1040.207	2.389
3	1.200	1.502	3.000	3.699	-	0.501	-	0.001	-	0.002	-	-	-	-	-1051.746	2.564
4	1.200	1.649	3.000	4.017	-	0.501	-	0.003	-	0.003	-	0.001	-	-	-1060.976	2.744
5	1.200	1.758	3.000	4.216	-	0.504	-	0.003	-	-0.002	-	0.002	-	0.004	-1069.762	2.846

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_a^2)$
1	1.500	1.513	1.000	1.003	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-619.526	0.001
2	1.500	1.560	1.000	1.022	-	0.503	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-622.731	0.031
3	1.500	1.617	1.000	1.056	-	0.504	-	-0.002	-	0.000	-	-	-	-	-626.034	0.094
4	1.500	1.721	1.000	1.110	-	0.502	-	0.001	-	0.002	-	-0.001	-	-	-633.262	0.188
5	1.500	1.801	1.000	1.147	-	0.509	-	-0.004	-	0.004	-	0.002	-	-0.002	-638.332	0.256
1	1.500	1.512	2.000	2.016	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-828.959	1.397
2	1.500	1.558	2.000	2.067	-	0.499	-	0.002	-	-	-	-	-	-	-831.758	1.442
3	1.500	1.616	2.000	2.123	-	0.499	-	0.002	-	0.003	-	-	-	-	-834.527	1.493
4	1.500	1.694	2.000	2.199	-	0.501	-	-0.001	-	0.004	-	-0.001	-	-	-837.761	1.560
5	1.500	1.790	2.000	2.298	-	0.504	-	0.001	-	0.004	-	-0.002	-	0.005	-843.155	1.649
1	1.500	1.498	3.000	3.005	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-950.140	2.196
2	1.500	1.548	3.000	3.080	-	0.500	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-952.978	2.240
3	1.500	1.598	3.000	3.140	-	0.501	-	-0.001	-	0.000	-	-	-	-	-954.629	2.277
4	1.500	1.688	3.000	3.288	-	0.502	-	-0.000	-	0.001	-	0.003	-	-	-958.741	2.365
5	1.500	1.769	3.000	3.400	-	0.502	-	0.002	-	-0.001	-	0.006	-	0.003	-963.263	2.434
1	1.800	1.804	1.000	1.006	0.500	0.499	-	-	-	-	-	-	-	-	-565.472	0.009
2	1.800	1.819	1.000	1.012	-	0.499	-	-0.002	-	-	-	-	-	-	-565.561	0.020
3	1.800	1.837	1.000	1.018	-	0.501	-	-0.004	-	-0.001	-	-	-	-	-565.820	0.032
4	1.800	1.870	1.000	1.031	-	0.501	-	-0.003	-	-0.002	-	0.000	-	-	-566.590	0.056
5	1.800	1.904	1.000	1.040	-	0.502	-	-0.003	-	-0.000	-	-0.001	-	0.002	-567.599	0.075
1	1.800	1.808	2.000	2.004	0.500	0.497	-	-	-	-	-	-	-	-	-771.918	1.388
2	1.800	1.813	2.000	2.005	-	0.498	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-771.617	1.388
3	1.800	1.843	2.000	2.026	-	0.498	-	-0.002	-	0.003	-	-	-	-	-772.135	1.409
4	1.800	1.876	2.000	2.044	-	0.500	-	-0.006	-	0.008	-	-0.005	-	-	-772.718	1.425
5	1.800	1.908	2.000	2.068	-	0.499	-	-0.004	-	0.009	-	-0.006	-	0.002	-773.468	1.449
1	1.800	1.803	3.000	3.005	0.500	0.496	-	-	-	-	-	-	-	-	-894.111	2.197
2	1.800	1.821	3.000	3.020	-	0.497	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-894.222	2.207
3	1.800	1.831	3.000	3.033	-	0.497	-	0.000	-	0.001	-	-	-	-	-894.081	2.215
4	1.800	1.872	3.000	3.069	-	0.496	-	-0.000	-	0.001	-	0.000	-	-	-895.148	2.238
5	1.800	1.912	3.000	3.116	-	0.496	-	0.001	-	0.000	-	0.001	-	-0.000	-896.054	2.269
1	2.000	1.994	1.000	0.995	0.500	0.496	-	-	-	-	-	-	-	-	-528.659	-0.013
2	2.000	1.990	1.000	0.992	-	0.500	-	-0.008	-	-	-	-	-	-	-528.291	-0.017
3	2.000	1.990	1.000	0.990	-	0.500	-	-0.010	-	0.004	-	-	-	-	-527.744	-0.021
4	2.000	1.989	1.000	0.988	-	0.500	-	-0.010	-	0.005	-	-0.001	-	-	-527.287	-0.025
5	2.000	1.988	1.000	0.987	-	0.500	-	-0.010	-	0.005	-	0.001	-	-0.004	-526.828	-0.028
1	2.000	1.992	2.000	1.989	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-736.937	1.374
2	2.000	1.990	2.000	1.986	-	0.500	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-736.469	1.370
3	2.000	1.987	2.000	1.981	-	0.501	-	-0.001	-	0.000	-	-	-	-	-736.070	1.366
4	2.000	1.985	2.000	1.977	-	0.500	-	-0.001	-	0.002	-	-0.004	-	-	-735.591	1.361
5	2.000	1.984	2.000	1.974	-	0.500	-	-0.001	-	0.002	-	-0.003	-	-0.001	-735.200	1.358
1	2.000	1.992	3.000	2.977	0.500	0.497	-	-	-	-	-	-	-	-	-857.815	2.180
2	2.000	1.986	3.000	2.968	-	0.498	-	-0.003	-	-	-	-	-	-	-857.490	2.174
3	2.000	1.986	3.000	2.964	-	0.498	-	-0.005	-	0.004	-	-	-	-	-857.051	2.172
4	2.000	1.982	3.000	2.957	-	0.498	-	-0.005	-	0.004	-	-0.002	-	-	-856.689	2.166
5	2.000	1.980	3.000	2.951	-	0.498	-	-0.004	-	0.004	-	-0.002	-	0.002	-856.210	2.162

Tabela 4.3: Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(1) gerados nas condições apresentadas na Tabela 4.2.

$p_{\alpha,\sigma,m}$	AIC					BIC					HQC					$EDC_{0.25}$					$EDC_{0.5}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	388	70	24	15	3	391	70	24	13	2	388	70	24	15	3	387	71	24	15	3	388	70	24	15	3
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	82	45	33	132	208	85	49	35	130	201	83	46	33	130	208	82	45	33	132	208	82	45	33	132	208
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	367	91	27	15	0	369	92	24	15	0	367	92	26	15	0	365	92	28	15	0	367	91	27	15	0
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	11	33	36	172	248	12	34	41	176	237	11	33	38	175	243	11	33	36	172	248	11	33	36	174	246
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	361	110	18	9	2	362	112	17	7	2	361	110	18	9	2	361	110	18	9	2	361	110	18	9	2
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	6	39	45	140	270	6	39	45	145	265	6	39	45	142	268	6	39	45	140	270	6	39	45	140	270
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	426	50	14	9	1	432	48	12	8	0	429	49	13	9	0	426	50	14	9	1	426	50	14	9	1
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	316	50	33	46	55	321	48	33	45	53	318	49	33	45	55	316	50	33	46	55	316	50	33	46	55
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	425	53	14	8	0	428	51	13	8	0	425	53	14	8	0	423	53	14	10	0	425	53	14	8	0
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	261	62	47	45	85	263	62	45	45	85	262	62	46	45	85	261	62	47	45	85	262	62	46	45	85
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	391	60	27	20	2	393	60	26	19	2	392	59	27	20	2	391	59	28	20	2	391	59	28	20	2
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	223	66	46	62	103	229	68	43	60	100	225	67	45	62	101	223	66	46	62	103	224	66	45	62	103
$\hat{p}_{1,1,L}$	383	81	26	8	2	403	76	17	4	0	396	79	19	6	0	376	85	28	9	2	382	82	26	8	2
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	274	104	67	29	26	280	102	66	27	25	279	102	66	28	25	274	104	67	29	26	276	103	67	29	25
$\hat{p}_{1,2,L}$	376	85	28	10	1	403	74	18	5	0	387	79	24	9	1	367	89	30	12	2	376	84	29	10	1
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	260	133	51	35	21	268	130	50	32	20	265	131	51	32	21	260	133	51	35	21	262	132	51	34	21
$\hat{p}_{1,3,L}$	399	81	13	6	1	416	70	9	5	0	403	80	10	6	1	388	85	19	7	1	397	82	14	6	1
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	282	127	44	30	17	288	125	41	29	17	286	125	42	30	17	282	127	44	30	17	283	127	43	30	17
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	394	72	27	6	1	437	47	13	3	0	412	63	21	4	0	355	84	39	17	5	387	77	29	6	1
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	235	115	72	44	34	279	100	55	38	28	253	107	66	44	30	236	114	72	44	34	239	113	71	44	33
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	369	95	28	6	2	424	64	11	0	1	407	72	17	2	2	324	113	41	16	6	363	98	28	8	3
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	240	134	63	37	26	275	126	53	26	20	257	135	56	30	22	242	133	62	37	26	251	132	59	34	24
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	361	85	39	12	3	419	61	18	1	1	395	74	26	4	1	301	112	60	20	7	355	89	40	13	3
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	214	137	80	43	26	262	120	71	31	16	240	128	75	36	21	216	136	80	42	26	224	133	80	39	24
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	375	74	37	11	3	467	26	5	1	1	439	46	11	3	1	241	109	93	35	22	354	80	45	13	8
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	176	100	104	69	51	301	64	55	48	32	243	90	74	54	39	182	101	99	67	51	200	96	92	63	49
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	349	79	45	19	8	469	27	4	0	0	432	50	14	3	1	242	90	75	71	22	335	81	45	29	10
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	213	95	79	70	43	347	57	38	36	22	283	75	56	52	34	217	96	77	68	42	238	91	67	65	39
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	388	71	27	13	1	480	16	4	0	0	449	42	6	3	0	256	102	75	46	21	371	74	34	18	3
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	218	91	78	73	40	355	56	43	27	19	288	75	58	49	30	222	91	75	72	40	236	89	72	66	37
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	392	64	24	13	7	484	16	0	0	0	463	29	5	2	1	219	105	83	53	40	358	76	39	14	13
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	254	86	55	57	48	417	41	13	15	14	342	62	37	32	27	258	87	53	56	46	283	80	50	47	40
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	361	88	27	16	8	486	14	0	0	0	445	43	7	5	0	218	112	65	58	47	337	100	30	22	11
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	252	97	53	58	40	410	45	14	15	16	340	77	28	29	26	255	96	53	56	40	281	92	46	46	35
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	398	47	38	13	4	486	11	3	0	0	458	29	12	1	0	238	77	88	54	43	369	59	43	21	8
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	276	69	51	63	41	414	37	18	18	13	352	58	32	34	24	281	67	51	60	41	305	67	42	50	36
$\hat{p}_{2,1,L}$	382	45	41	23	9	494	5	1	0	0	462	25	11	1	1	201	60	73	72	94	352	52	51	27	18
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	234	143	74	28	21	475	23	2	0	0	404	66	24	5	1	241	141	72	27	19	300	121	52	16	11
$\hat{p}_{2,2,L}$	386	64	24	19	7	491	9	0	0	0	465	25	5	5	0	192	77	76	80	75	356	72	33	26	13
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	255	107	59	52	27	472	23	2	3	0	401	68	19	10	2	264	107	57	48	24	310	96	46	32	16
$\hat{p}_{2,3,L}$	401	46	32	13	8	495	5	0	0	0	472	17	7	4	0	213	66	68	59	94	379	49	38	19	15
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	188	145	73	58	36	440	50	9	1	0	344	101	34	12	9	198	146	70	55	31	252	138	60	34	16

$p_{\alpha,\sigma,m}$	EDC_2					EDC_3					EDC_5					EDC_7				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	392	69	24	13	2	394	70	23	11	2	395	70	23	11	1	396	71	22	10	1
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	85	49	35	131	200	91	56	36	130	187	113	86	46	124	131	172	131	69	86	42
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	369	92	24	15	0	372	92	23	13	0	372	92	23	13	0	373	94	21	12	0
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	13	36	43	176	232	13	39	45	177	226	22	62	61	185	170	117	107	83	127	66
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	363	111	17	7	2	363	113	16	7	1	363	113	16	7	1	363	114	15	7	1
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	6	39	45	146	264	6	43	51	155	245	7	65	71	178	179	60	138	98	135	69
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	432	48	12	8	0	439	45	12	4	0	445	42	9	4	0	453	38	7	2	0
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	323	48	33	46	50	336	46	31	43	44	368	46	23	31	32	446	34	12	5	3
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	430	51	13	6	0	435	49	11	5	0	441	47	8	4	0	443	47	7	3	0
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	265	62	45	44	84	267	65	45	42	81	297	71	38	33	61	404	58	13	18	7
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	394	60	25	19	2	398	60	24	16	2	404	60	22	13	1	412	57	20	11	0
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	230	68	43	59	100	235	68	40	58	99	264	73	35	46	82	364	63	17	23	33
$\hat{p}_{1,1,L}$	412	71	13	4	0	416	70	11	3	0	429	63	6	2	0	440	55	5	0	0
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	283	101	66	26	24	296	97	61	24	22	342	91	44	12	11	438	50	12	0	0
$\hat{p}_{1,2,L}$	416	66	13	5	0	422	62	11	5	0	438	52	7	3	0	444	49	5	2	0
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	271	130	50	29	20	282	130	46	25	17	340	115	25	15	5	436	61	2	1	0
$\hat{p}_{1,3,L}$	419	68	8	5	0	430	59	7	4	0	441	52	5	2	0	452	47	1	0	0
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	290	124	42	28	16	299	120	42	26	13	347	103	26	14	10	437	55	6	2	0
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	441	45	11	3	0	452	38	8	2	0	465	28	7	0	0	472	23	5	0	0
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	283	98	54	38	27	317	86	46	31	20	392	73	19	14	2	78	21	1	0	0
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	430	60	9	0	1	447	48	5	0	0	463	34	3	0	0	468	29	3	0	0
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	283	120	51	26	20	313	109	44	19	15	401	76	18	3	2	480	19	1	0	0
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	432	55	11	1	1	446	43	10	0	1	463	32	5	0	0	476	21	3	0	0
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	275	117	63	30	15	314	109	47	21	9	399	82	15	3	1	475	21	4	0	0
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	476	21	2	0	1	486	13	0	0	1	492	7	0	0	1	494	6	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	332	54	48	43	23	404	34	28	19	15	475	19	4	2	0	498	2	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	484	15	1	0	0	492	8	0	0	0	496	4	0	0	0	496	4	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	383	49	25	30	13	443	22	13	18	4	487	10	3	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	490	8	2	0	0	496	4	0	0	0	497	3	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	373	50	34	25	18	434	27	16	16	7	491	8	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	490	10	0	0	0	496	4	0	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	438	31	10	12	9	482	12	4	0	2	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	492	8	0	0	0	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	437	34	10	8	11	477	16	5	1	1	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	494	5	1	0	0	496	4	0	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	438	33	8	13	8	481	15	3	0	1	498	1	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	497	2	1	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	490	9	1	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,L}$	495	5	0	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	487	12	1	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,L}$	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	466	30	4	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0

As estimativas médias foram calculadas através de:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{re} \sum_{i=1}^{re} \hat{\omega}_i \quad (4.0.1)$$

para qualquer parâmetro ω .

Nota-se na Tabela 4.2 que a estimação média do parâmetro α para o processo AR(1) foi melhor do que para os demais processos. Conforme o valor de α aumenta, a estimativa melhora. Por exemplo, no caso em que $\alpha = 0.5$ e $\sigma_a = 1$ e a ordem do processo considerada é igual a 1, a estimativa média para $\bar{\alpha}$ é 0.846, enquanto que para $\alpha = 1.8$ e $\sigma_a = 1$, para a mesma ordem do processo, a estimativa média para $\bar{\alpha}$ é 1.804, bem mais próximo do valor teórico.

A estimativa média de σ_a quando $\alpha \leq 1$ não foi boa, ficando longe do real valor. Nos casos restantes, quando $\alpha > 1$, a estimativa média está próxima do verdadeiro valor.

A estimativa média de ϕ_1 para um AR(1) está próxima a 0.5, exceto no caso em que $\alpha = 0.5$. Quando modelamos os processos AR(p) com $p \in \{2, 3, 4, 5\}$, geralmente, o ϕ_1 fica próximo ao valor 0.5 e os demais ficam próximos de 0, indicando um “super ajuste” do modelo.

O logaritmo da função de máxima verossimilhança apresenta um padrão de comportamento. Sendo que o maior valor médio, normalmente, encontra-se no caso AR(1). Observa-se também que conforme o valor de α aumenta a diferença entre estas médias diminuem.

Na Tabela 4.3 comparamos as duas formulações para os critérios de seleção de modelos. Nota-se que os critérios que utilizam o logaritmo da função de máxima verossimilhança (loglik) apresentam um desempenho superior ou igual, em todos os casos, ao mesmo critério quando usa na sua formulação a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala ($\ln(\sigma_a^2)$). Podemos exemplificar isso, no caso em que a série temporal foi gerada com $\alpha = 0.5$ e $\sigma_a = 1$ o critério AIC, com a formulação que utiliza a função de máxima verossimilhança, selecionou corretamente 388 séries temporais AR(1) em relação ao total de 500. Com a formulação que utiliza a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala, selecionou 82 séries como um AR(1) entre todas as 500. Para a mesma situação, o critério EDC₇, o critério EDC com $\theta = 7$, selecionou 396 séries como advindas de processos AR(1) e com a formulação que utiliza a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala, selecionou 172 séries como advindas de um processo AR(1),

Na análise do desempenho dos critérios, o EDC com $\theta \in \{3, 5, 7\}$ apresenta o melhor desempenho, sendo que somente no caso em que $\alpha = 0.5$ não possui um desempenho superior a 80%.

Analisando o estudo de simulação, como um todo, observa-se que pelo fato de ser um estudo de simulação com muitos cenários e condições possíveis, é difícil determinar um critério uniformemente superior para todos os casos. Contudo, analisando os resultados do estudo exploratório sobre o desempenho dos critérios de seleção de modelos quando as inovações advêm de distribuições α -estáveis, observamos alguns comportamentos bastante interessantes.

Indiferentemente, se as séries temporais foram geradas a partir de processos AR(1) ou AR(2) os critérios que utilizam o logaritmo da função de máxima verossimilhança em suas fórmulas apresentam um desempenho muito superior, em quase

todos os casos, em relação ao mesmo critério quando utiliza a estimativa do parâmetro de escala. Isto está relacionado ao fato que em média o logaritmo da função de máxima verossimilhança apresenta o maior valor para o AR(1) ou AR(2), dependendo de qual for o processo gerador dos dados. Enquanto que na formulação que usa a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala isso não ocorre, pois a função $\ln(\hat{\sigma}_a^2)$ é muito dependente de um valor pequeno na estimativa do parâmetro de escala e quanto mais parâmetros no modelo, menor esta estimativa, situação que confunde os critérios.

Analisando o comportamento dos critérios de seleção de modelos observamos que ocorreu um melhor desempenho para modelos auto-regressivos de ordem 1 do que para os de ordem 2. Provavelmente, este acontecimento está ligado ao fato que processos AR(1) são mais simples que processos AR(2). E como utilizamos para o ajuste final somente os valores gerados pelos critérios de seleção de modelos, sem a verificação das suposições, isso atrapalha a precisão dos critérios.

Mesmo com a variação do tamanho amostral, não houve uma melhora significativa no desempenho dos critérios de seleção de modelo (ver Apêndice A, Tabelas A.6 e A.14).

Nas simulações, observou-se que a variação de $\sigma_a \in \{1, 2, 3\}$ não apresenta um padrão em relação ao desempenho dos critérios. Algumas vezes o critério apresenta um desempenho melhor quando $\sigma_a = 3$ e outras vezes quando $\sigma_a = 1$. Entretanto, os desempenhos não mudam drasticamente. Destaca-se também, o fato que todos os critérios de seleção apresentam um comportamento muito semelhante quando $\alpha = 0.5$ e conforme o valor de α aumenta, o desempenho melhora. Este fato já é esperado, pois sabe-se que quanto menor o valor de α , mais complicado é modelar a série temporal.

Em relação ao desempenho dos critérios, destacamos o *EDC* que, pela sua flexibilidade de penalizar mais duramente ou menos, demonstrou-se bastante eficiente na seleção correta da ordem de modelos, sendo superior em quase todos os casos, e indiferente a formulação utilizada. Sobre o estudo do valor de θ , valores que penalizam mais rigorosamente, geralmente, apresentam um desempenho melhor.

Desta forma, recomenda-se a utilização do *EDC* com $\theta \in \{3, 5, 7\}$ com a formulação que utiliza a função de máxima verossimilhança para uma única série temporal. Lembramos o fato de que para a escolha do melhor modelo utilizou-se somente os critérios de seleção, sem verificação das suposições ou uso de outros procedimentos. Isso é válido, dado que estamos em situações controladas e sabemos quais são os verdadeiros processos geradores dos dados.

5 Aplicação

Neste capítulo modelamos uma série temporal auto-regressiva com inovações α -estáveis quando os dados são reais, ou seja, não são originários de um processo de simulação computacional. Os dados modelados refletem o logaritmo natural do volume das ações da Wall-Mart negociadas diariamente na bolsa de valores de New York, no período de 1º/12/2003 à 31/12/2004, contando com 253 observações. Os dados são encontrados no pacote *quandl* do software R (quandl.com/data/GOOG/NYSE_WMT – *Wal – Mart – Stores – Inc – WMT*).

Para séries temporais, existe um leque de recursos para análise dos dados, porém boa parte destas técnicas utilizam o conceito de estacionariedade da série, ou seja, ela se desenvolve no tempo aleatoriamente ao redor de uma média constante. Para verificação deste conceito, utilizamos o recurso gráfico da visualização dos dados, com a observação de outras características.

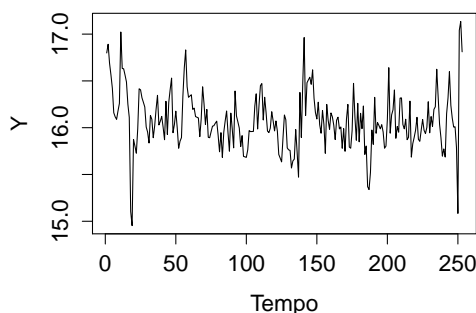


Figura 5.1: Série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{283}$ referentes ao logaritmo natural do volume das ações da Wall-Mart negociadas diariamente na bolsa de valores de New York, no período de 01º de dezembro de 2003 à 31 de dezembro de 2004.

Com base na Figura 5.2, verifica-se que não são encontradas tendências, crescentes ou decrescentes, nos dados. A série está centrada em um valor próximo de 16, com alguns valores discrepantes. Caracterizando uma série temporal estacionária.

Tabela 5.1: Estatísticas descritivas para série temporal $\{Y_t\}_{t=1}^{283}$.

Mediana	Média	Erro Padrão	Assimetria	Curtose
16.0351	16.0772	0.3101	0.2714	1.7515

As estatísticas descritivas para o logaritmo natural do volume das ações da Wall-Mart, $\{Y_t\}_{t=1}^{283}$, são dadas na Tabela 5.1. Nota-se que a mediana e a média apresentam valores próximos, 16.0351 e 16.0772, respectivamente, característica de uma série temporal simétrica, apesar do coeficiente de assimetria ser aproximadamente 0.2714. Entretanto, ao olharmos para o histograma, apresentado na Figura 5.2, observa-se que os dados são simétricos, mas com mais valores à esquerda, por isso o coeficiente de assimetria é positivo. O coeficiente de curtose apresentou o valor de 1.7515: quanto maior esse valor, em relação ao zero, mais pesadas são as caudas da distribuição.

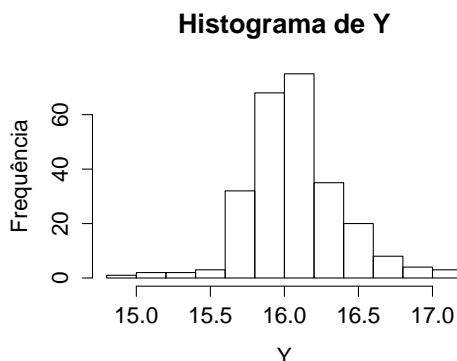


Figura 5.2: Histograma para os dados, $\{Y_t\}_{t=1}^{283}$, referentes ao logaritmo natural do volume das ações da Wall-Mart negociadas diariamente na bolsa de valores de New York, no período de 01° de dezembro de 2003 à 31 de dezembro de 2004.

Como o processo é estacionário e o estudo de simulação, para os critérios de seleção de modelos, foi efetuado com processos simétricos em torno da origem, isto é, β e δ considerados iguais a zero, descontamos a média geral em cada observação para centrar o processo em zero. Definimos

$$X_t = Y_t - \bar{Y}, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, 253, \quad (5.0.1)$$

onde $\bar{Y} = 16.0772$.

Esta modificação altera a escala dos dados, mas não a estacionariedade da série temporal.

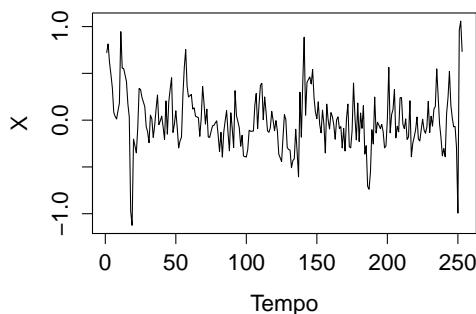


Figura 5.3: Série temporal $\{X_t\}_{t=1}^{283}$ centralizada em torno de zero.

Visto que a série temporal é estacionária, selecionam-se os potenciais modelos para ajuste. Os gráficos da função codiferença normalizada e função codiferença normalizada parcial proporcionam boas indicações.

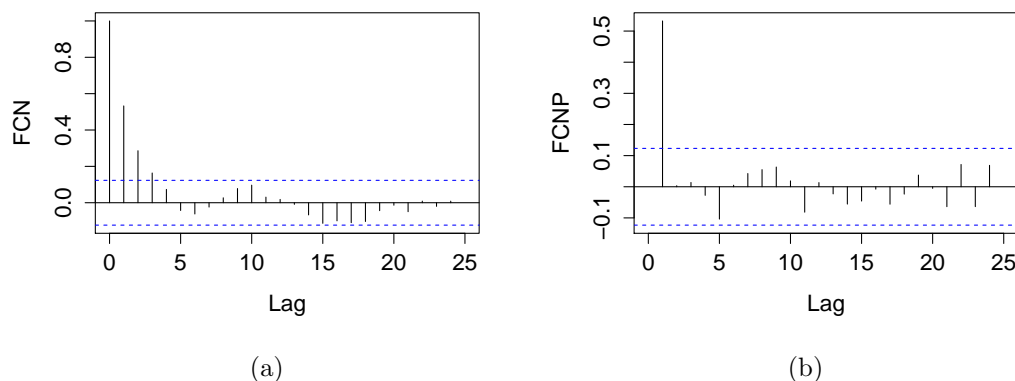


Figura 5.4: (a) Função codiferença normalizada empírica; (b) Função codiferença normalizada parcial empírica.

O gráfico da função codiferença normalizada apresenta um decaimento lento, enquanto que o gráfico da função codiferença normalizada parcial mostra um corte brusco no *lag 1*, indicando que existe boa possibilidade de que um processo autorregressivo, de ordem 1, deverá ajustar bem a série temporal.

Os critérios de seleção de modelos também auxiliam na tomada de decisão sobre o melhor modelo. Como os gráficos da função codiferença normalizada e da função codiferença normalizada parcial sinalizam para um AR(1) e temos um tamanho amostral próximo a 300, usamos os critérios que obtiveram o melhor desempenho no estudo de simulação de Monte Carlo (ver Capítulo 4, Tabelas 4.2 e 4.3), quando utilizou-se a estimativa da função de máxima verossimilhança, nestas condições. Com isso, utilizamos o critério EDC com $\theta \in \{3, 5, 7\}$.

Tabela 5.2: Estatísticas de ajustes de modelos utilizando a função de máxima verossimilhança.

AR(p)	LogLik	EDC_3	EDC_5	EDC_7
1	-2.146	35.447*	56.217*	76.958*
2	-2.021	45.582	73.276	100.970
3	-1.644	55.213	89.830	124.447
4	-1.132	64.575	106.115	147.655
5	-9.205	91.106	139.569	188.033

* Indica o melhor modelo conforme o critério estudado.

Os três critérios utilizados apontam o processo AR(1) como o mais parcimonioso. Caso o processo AR(1) não atenda as suposições do modelo, o próximo a ser testado será o AR(2).

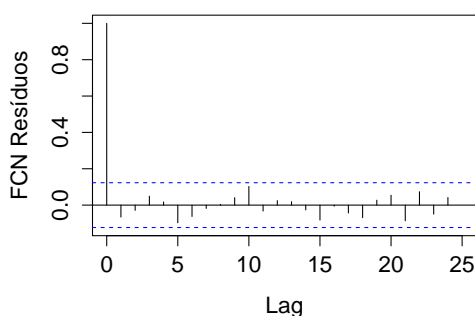
Para o modelo ser considerado válido, as estimativas para seus coeficientes, calculadas utilizando o método da máxima verossimilhança, devem ser significativas e a hipótese de que seus resíduos são independentemente distribuídos com inova-

ções α -estáveis deve ser aceita. Para testar estas suposições, utilizou-se a função codiferença normalizada dos resíduos, com lag 25, e o QQ-plot dos mesmos.

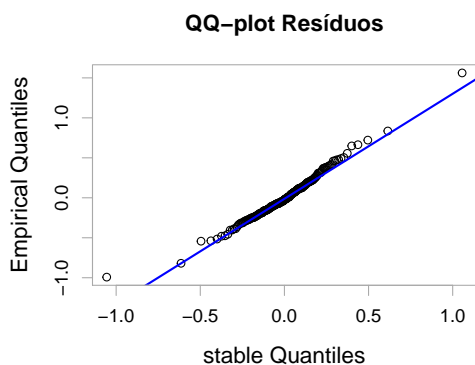
Tabela 5.3: Estimativas para o modelo AR(1).

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	IC(95%)		t	p-valor
α	1.7757	0.0913	1.5967	1.9546	19.45	2e-16
σ_a	0.1526	0.0090	0.1350	0.1702	16.93	2e-16
ϕ_1	0.5906	0.0541	0.4845	0.6966	11.13	2e-16

Pela Tabela 5.3 nota-se que o modelo AR(1) tem seus coeficientes significativos, pois seus p-valores são inferiores a 0.05. Desta forma, testaremos a hipótese de independência dos seus resíduos.

**Figura 5.5:** Função codiferença normalizada empírica para os resíduos do modelo AR(1).

Pela Figura 5.5 há indícios de que os resíduos do processo AR(1) não são correlacionados. Ressalta-se que se tomou esta conclusão com base na inspeção visual.

**Figura 5.6:** QQ-plot para os resíduos do modelo AR(1).

Com base na Figura 5.6 nota-se que os resíduos do modelo ajustaram-se muito bem à distribuição α -estável, mesmo que um resíduo apresente um valor muito alto.

Portanto, o modelo ajustado para logaritmo natural do volume de ações da Wall-Mart é dado por

$$\hat{X}_t = 0.59X_{t-1}. \quad (5.0.2)$$

A explicação para o modelo ajustado é: $0.59X_{t-1}$ é a parcela do valor anterior que é carregada no valor atual. Em outras palavras, existe uma dependência positiva

entre o logaritmo natural do volume de ações da Wall-Mart do dia de hoje, com o do dia de ontem.

Considerações Finais

Com base no estudo realizado até o momento e nos seus resultados obtidos, apresentamos a metodologia e uma exposição do que é necessário para analisar e modelar séries temporais, dando subsídio para a continuidade do nosso objetivo geral que é a identificação da ordem do processo gerador.

Um estudo de séries temporais foi apresentado contendo os conceitos básicos de processos estocásticos. Também comparou-se os valores obtidos da função densidade de uma variável aleatória α -estável pela função “*dstable*” do software R, com as aproximações obtidas através da função H-Fox. Observou-se que o comportamento da função densidade é o mesmo, independentemente se calcularmos por aproximações da função H-Fox ou pela integração numérica fornecida ao se usar a rotina “*dstable*”.

Apresentamos o estimador de máxima verossimilhança para os processos AR(p) Gaussianos ou α -estáveis com ênfase nos processos auto-regressivos AR(1) e AR(p). Apresentamos a função codiferença, função codiferença normalizada e função codiferença normalizada parcial como medidas de dependência quando os processos possuem variância infinita.

Realizamos diversas simulações baseadas em processos AR(p), com inovações Gaussianas ou α -estáveis, com o objetivo de determinar a ordem correta do processo. Entre os comportamentos interessantes observados no estudo de simulação podemos ressaltar: que os critérios que utilizam o logaritmo da função de máxima verossimilhança em suas fórmulas apresentam um desempenho muito superior, em quase todos os casos, em relação ao mesmo critério quando utiliza a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala. Quando $\alpha \leq 1$ os critérios apresentaram um desempenho inferior do que quando $\alpha > 1$. E apesar do aumento no tamanho amostral, não houve uma melhora significativa no desempenho dos critérios de seleção de modelo. Por fim, recomenda-se a utilização do *EDC* com $\theta \in \{3, 5, 7\}$ com a formulação que utiliza a função de máxima verossimilhança para uma única série temporal.

Aplicamos a metodologia apresentada em uma série de dados proveniente das ações da Wall-Mart negociadas na bolsa de valores de New York. O resultados desse estudo são bastante bons nos dando a convicção de que, para processos AR(p) com inovações α -estáveis, os critérios de seleção de modelos são de grande importância para a modelagem de séries temporais.

Referências

- Adler, R. J., R. E. Feldman e C. Gallagher (1998). “Analysing stable time series”. Em *A Practical Guide to Heavy Tails*. (Adler, R. J., R. E. Feldman e M. S. Taqqu, eds.) 133-158. Boston: Birkhäuser.
- Andrews, B. e R.A. Davis (2013). “Model Identification for infinite variance autoregressive processes”. *Journal of Econometrics*, Vol. **172**, 222-234.
- Andrews, B., M. Calder e R.A. Davis (2009). “Maximum Likelihood Estimation for α -Stable Autoregressive Process”. *The Annals of Statistics*, Vol. **37** (4), 1946-1982.
- Ano, K., D. Derryberry e T. Peterson (2014). “Model selection for ecologists: the worldviews of AIC and BIC”. *Ecology*, Vol. **95**(1), 631-636.
- Akaike, H. (1969). “Fitting Autoregressive Models for Prediction”. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. **21**(1), 243-247.
- Akaike, H. (1971). “Autoregressive Model Fitting for Control”. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. **23**(2), 163-180.
- Box, G.E.P. e G.M. Jenkins (1976). *Time Series Analysis: forecasting and control*. San Francisco: Holden-Day.
- Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Brockwell, P.J. e R.A. Davis (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*. New York: Springer-Verlag.
- Calder, M. e R.A. Davis (1998). “Inference for linear processes with stable noise”. Em *Practical Guide to Heavy Tails*. (Adler, R. J., R. E. Feldman e M. S. Taqqu, eds.) 159-176. Boston: Birkhäuser.
- Dorea, C.C.Y. e L.C. Zhao (2006). “Exponential bounds for the probability of wrong determination of the order of a Markov chain by using the EDC criterion”. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. **136**, 3689-3697.
- Gallagher, C. (2001). “A method for fitting stable autoregressive models using the autocovariation function”. *Statistics and Probability Letters*, Vol. **53**, 381-390.
- Guevara Otiniano, C.E., P.N. Rathie e T.R. Sousa. “Stable Lévy distribution: convolution and numerical illustrations”. Submetido

- Jiru, A. R. *Relationships between spectral peak frequencies of a causal AR(p) process and arguments of roots of the associated AR polynomial*. 2008. 54f.. Dissertação (Mestrado Ciência) - Departamento de Matemática, San Jose State University, San Jose.
- Hannan, E.J. e B.G. Quinn (1979). "The Determination of the Order of an Autoregression". *Journal of the Royal Statistical Society*. Series B, Vol. **41**(2), 190-195.
- Knight, K (1989). "Consistency of Akaike's information criterion for infinite variance autoregressive processes". *Annals of Statistics*, Vol. **17**, 824-840.
- Ling, S. (2005). "Self-weighted least absolute deviation estimation for infinite variance autoregressive models". *Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Statistical Methodology*, Vol. **67**, 381-393.
- Schmidt, L.B. (2014). *Estimação de Máxima Verossimilhança em Processos AR(p) - $\mathcal{S}_\alpha(0, \gamma, 0)$* . Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Estatística, UFRGS, Porto Alegre.
- Mattai, A.M., R.K. Saxena e H.J. Haubold (2010). *The H-Function: Theory and Applications*. New York: Springer.
- McLeod, A. I., Y. Zhang, (2006). "Partial autocorrelation parameterization for subset autoregression". *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **27** (4), 599-612.
- Mandelbrot, B.B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. São Francisco: W.H. Freeman and Co..
- Morettin, P.A. e C.M.C. Toloi (2004). *Análise de Séries Temporais*. ABE - Projeto Fisher. São Paulo: Edgard Blücher.
- Nolan, J.P. (2015). *Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data*. Boston: Birkhäuser. Nota: Em progresso, Capítulo 1 online em academic2.american.edu/~jpnolan.
- Resnick, S.I. (1997). "Heavy tail modeling and teletraffic data". *Annals of Statistics*, Vol. **25**, 1805-1869.
- Rosadi, D. (2009). "Testing for independence in heavy-tailed time series using the codifference function". *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. **53**, 4516-4529.
- Rosadi, D. e M. Deistler (2005). "Estimation the codifference function of linear time series models with infinite variance". Mimeo, Institute for Mathematical Methods in Economics, Research Unit Econometrics and System Theory, Vienna University of Technology. Online em dedirosadi.staff.ugm.ac.id/paper/codifference.pdf.
- Samorodnitsky, G. e M.S. Taqqu (1994). *Stable Non Gaussian Random Processes*. London: Chapman & Hall.
- Schwarz, G.E. (1978). "Estimating the dimension of a model". *Annals of Statistics*, Vol. **6**(2), 461-464.

Apêndice A

Neste apêndice apresentamos diversas tabelas contendo os resultados das simulações de Monte Carlo do Capítulo 4.

Nas Tabelas A.1, A.3, A.5, apresenta-se os valores originais para o vetor de parâmetros, $\boldsymbol{\eta}_1 = (\phi_1, \alpha, \sigma_a)'$, e a média de suas estimativas quando ajustamos um AR(p) com p variando no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. As Tabelas A.7, A.9, A.11, A.13 mostram os valores originais para o vetor de parâmetros, $\boldsymbol{\eta}_1 = (\phi_1, \phi_2, \alpha, \sigma_a)'$, e a média de suas estimativas quando ajustamos um AR(p) conforme explicado anteriormente. Nas tabelas também apresentamos a estimativa média da função de máxima verossimilhança e do logaritmo do parâmetro de escala ao quadrado.

As Tabelas A.2, A.4, A.6, A.8, A.10, A.12, A.14 apresentam as ordens selecionadas pelos critérios de seleção de modelo estudados no trabalho, para as 500 replicações de cada cenário e para suas diferentes formulações. Quando utilizamos a notação $\hat{p}_{\alpha, \sigma_a, L}$ a formulação utilizada envolve a função de máxima verossimilhança. E quando utilizamos $\hat{p}_{\alpha, \sigma_a, \hat{\sigma}}$ envolve a estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala. Visto que variou-se o valor de θ para o critério *EDC*, colocou-se um subscrito ao lado do nome, para auxiliar na compreensão. Por exemplo, *EDC*_{0.25} indica o critério *EDC* quando θ é 0.25.

No estudo, os parâmetros de locação e simetria do processo de inovação foram considerados iguais à zero. O índice de estabilidade, α , está no conjunto $\{0.5, 0.8, 1.0, 1.2, 1.5, 1.8, 2\}$ e o parâmetro de escala, σ_a , no conjunto $\{1, 2, 3\}$. Também variou-se tamanhos de amostras (n) e burn-in para analisar o comportamento dos critérios de seleção de modelo nos mais diversos casos.

Tabela A.1: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 100$, $burn-in = 20$, $re = 500$.

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_\alpha^2)$
1	0.500	0.830	1.000	13.257	0.500	0.541	-	-	-	-	-	-	-	-	-425.376	2.666
2	0.500	1.839	1.000	6.213	-	0.488	-	0.007	-	-	-	-	-	-	-528.845	2.743
3	0.500	1.908	1.000	7.568	-	0.455	-	0.059	-	-0.018	-	-	-	-	-572.937	2.872
4	0.500	1.856	1.000	3.763	-	0.369	-	0.079	-	-0.009	-	0.002	-	-	-657.111	1.503
5	0.500	1.946	1.000	2.918	-	0.311	-	0.085	-	0.005	-	0.002	-	0.000	-738.249	0.971
1	0.500	0.734	2.000	23.028	0.500	0.573	-	-	-	-	-	-	-	-	-503.599	4.435
2	0.500	1.764	2.000	13.028	-	0.494	-	0.004	-	-	-	-	-	-	-604.886	4.015
3	0.500	1.887	2.000	13.368	-	0.462	-	0.052	-	-0.015	-	-	-	-	-675.359	3.583
4	0.500	1.832	2.000	6.682	-	0.369	-	0.067	-	-0.002	-	0.001	-	-	-813.316	1.780
5	0.500	1.931	2.000	4.018	-	0.304	-	0.089	-	0.006	-	-0.002	-	0.002	-925.431	1.057
1	0.500	0.729	3.000	29.712	0.500	0.577	-	-	-	-	-	-	-	-	-540.503	5.075
2	0.500	1.738	3.000	20.995	-	0.490	-	0.006	-	-	-	-	-	-	-651.982	4.784
3	0.500	1.837	3.000	21.632	-	0.468	-	0.054	-	-0.019	-	-	-	-	-747.417	3.861
4	0.500	1.790	3.000	10.538	-	0.384	-	0.069	-	-0.006	-	0.002	-	-	-896.064	2.128
5	0.500	1.915	3.000	6.369	-	0.318	-	0.079	-	0.005	-	0.002	-	-0.000	-1024.103	1.273
1	0.800	0.960	1.000	1.450	0.500	0.505	-	-	-	-	-	-	-	-	-295.230	0.398
2	0.800	1.445	1.000	2.248	-	0.500	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-328.181	1.327
3	0.800	1.591	1.000	2.410	-	0.497	-	0.008	-	-0.000	-	-	-	-	-340.258	1.471
4	0.800	1.701	1.000	2.465	-	0.477	-	0.021	-	-0.003	-	0.001	-	-	-349.307	1.550
5	0.800	1.791	1.000	2.405	-	0.474	-	0.021	-	-0.003	-	0.004	-	-0.001	-363.604	1.479
1	0.800	1.002	2.000	3.077	0.500	0.509	-	-	-	-	-	-	-	-	-367.258	1.917
2	0.800	1.389	2.000	4.263	-	0.501	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-393.329	2.541
3	0.800	1.573	2.000	4.682	-	0.505	-	0.013	-	-0.006	-	-	-	-	-410.380	2.787
4	0.800	1.632	2.000	4.757	-	0.490	-	0.014	-	-0.010	-	0.008	-	-	-422.656	2.788
5	0.800	1.772	2.000	4.756	-	0.483	-	0.026	-	-0.017	-	0.003	-	0.004	-450.201	2.689
1	0.800	1.023	3.000	5.099	0.500	0.526	-	-	-	-	-	-	-	-	-409.531	2.872
2	0.800	1.393	3.000	6.103	-	0.502	-	-0.000	-	-	-	-	-	-	-428.981	3.339
3	0.800	1.571	3.000	6.888	-	0.507	-	0.009	-	-0.006	-	-	-	-	-446.787	3.563
4	0.800	1.624	3.000	6.675	-	0.508	-	0.007	-	-0.004	-	0.001	-	-	-466.563	3.399
5	0.800	1.742	3.000	6.612	-	0.485	-	0.013	-	-0.001	-	0.006	-	-0.001	-497.079	3.256
1	1.000	1.127	1.000	1.168	0.500	0.504	-	-	-	-	-	-	-	-	-257.196	0.198
2	1.000	1.343	1.000	1.463	-	0.497	-	0.002	-	-	-	-	-	-	-269.015	0.586
3	1.000	1.446	1.000	1.527	-	0.500	-	-0.000	-	0.002	-	-	-	-	-274.205	0.668
4	1.000	1.555	1.000	1.679	-	0.491	-	0.006	-	0.003	-	-0.002	-	-	-279.120	0.865
5	1.000	1.664	1.000	1.658	-	0.494	-	0.001	-	0.003	-	0.000	-	0.000	-284.175	0.889
1	1.000	1.110	2.000	2.335	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-326.261	1.597
2	1.000	1.305	2.000	2.717	-	0.503	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-335.772	1.856
3	1.000	1.385	2.000	2.979	-	0.502	-	0.007	-	-0.001	-	-	-	-	-340.494	2.018
4	1.000	1.533	2.000	3.125	-	0.500	-	0.006	-	-0.000	-	0.000	-	-	-344.956	2.139
5	1.000	1.585	2.000	3.222	-	0.494	-	0.011	-	-0.003	-	0.003	-	0.004	-353.811	2.185
1	1.000	1.103	3.000	3.504	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-366.238	2.416
2	1.000	1.281	3.000	3.948	-	0.495	-	-0.000	-	-	-	-	-	-	-374.019	2.613
3	1.000	1.420	3.000	4.383	-	0.503	-	-0.001	-	0.001	-	-	-	-	-379.970	2.822
4	1.000	1.469	3.000	4.526	-	0.503	-	-0.005	-	0.009	-	-0.005	-	-	-383.248	2.870
5	1.000	1.621	3.000	4.918	-	0.501	-	0.002	-	0.001	-	-0.003	-	0.002	-394.738	3.027
1	1.200	1.254	1.000	1.065	0.500	0.505	-	-	-	-	-	-	-	-	-232.873	0.088
2	1.200	1.349	1.000	1.147	-	0.503	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-236.476	0.206
3	1.200	1.384	1.000	1.177	-	0.497	-	0.006	-	-0.002	-	-	-	-	-237.489	0.252
4	1.200	1.460	1.000	1.212	-	0.499	-	0.001	-	-0.000	-	-0.003	-	-	-240.228	0.304
5	1.200	1.561	1.000	1.274	-	0.502	-	0.001	-	0.001	-	-0.002	-	-0.001	-243.406	0.396
1	1.200	1.246	2.000	2.102	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-300.657	1.454
2	1.200	1.343	2.000	2.212	-	0.500	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-303.734	1.528
3	1.200	1.381	2.000	2.278	-	0.502	-	0.002	-	-0.003	-	-	-	-	-304.853	1.580
4	1.200	1.450	2.000	2.366	-	0.504	-	-0.000	-	-0.003	-	-0.002	-	-	-306.679	1.652
5	1.200	1.539	2.000	2.500	-	0.506	-	-0.001	-	-0.001	-	0.003	-	-0.002	-310.048	1.751
1	1.200	1.243	3.000	3.178	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-341.456	2.286
2	1.200	1.315	3.000	3.302	-	0.498	-	-0.000	-	-	-	-	-	-	-343.907	2.332
3	1.200	1.360	3.000	3.385	-	0.499	-	0.001	-	0.000	-	-	-	-	-345.273	2.372
4	1.200	1.400	3.000	3.485	-	0.503	-	0.001	-	0.002	-	0.002	-	-	-346.730	2.426
5	1.200	1.502	3.000	3.659	-	0.500	-	-0.002	-	0.003	-	0.001	-	0.001	-349.346	2.512

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_a^2)$
1	1.500	1.527	1.000	1.008	0.500	0.496	-	-	-	-	-	-	-	-	-205.619	0.001
2	1.500	1.555	1.000	1.016	-	0.496	-	-0.002	-	-	-	-	-	-	-205.981	0.013
3	1.500	1.569	1.000	1.012	-	0.495	-	0.000	-	-0.004	-	-	-	-	-205.962	0.001
4	1.500	1.610	1.000	1.032	-	0.493	-	-0.000	-	-0.005	-	-0.002	-	-	-206.555	0.035
5	1.500	1.648	1.000	1.047	-	0.493	-	-0.000	-	-0.000	-	-0.005	-	0.007	-207.090	0.064
1	1.500	1.531	2.000	2.041	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-275.890	1.412
2	1.500	1.539	2.000	2.033	-	0.502	-	-0.006	-	-	-	-	-	-	-275.661	1.403
3	1.500	1.556	2.000	2.036	-	0.502	-	-0.005	-	-0.003	-	-	-	-	-275.564	1.404
4	1.500	1.590	2.000	2.074	-	0.502	-	-0.004	-	-0.001	-	-0.004	-	-	-275.602	1.434
5	1.500	1.619	2.000	2.080	-	0.502	-	-0.004	-	-0.000	-	-0.005	-	-0.000	-275.663	1.439
1	1.500	1.512	3.000	2.985	0.500	0.497	-	-	-	-	-	-	-	-	-315.109	2.175
2	1.500	1.542	3.000	3.003	-	0.496	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-315.274	2.183
3	1.500	1.550	3.000	2.998	-	0.497	-	-0.001	-	0.001	-	-	-	-	-314.876	2.178
4	1.500	1.581	3.000	3.038	-	0.497	-	-0.000	-	0.003	-	-0.004	-	-	-314.880	2.200
5	1.500	1.629	3.000	3.100	-	0.498	-	-0.003	-	0.006	-	-0.009	-	0.007	-315.344	2.239
1	1.800	1.816	1.000	0.996	0.500	0.492	-	-	-	-	-	-	-	-	-186.498	-0.017
2	1.800	1.830	1.000	0.998	-	0.494	-	-0.003	-	-	-	-	-	-	-186.208	-0.014
3	1.800	1.833	1.000	0.995	-	0.494	-	-0.002	-	-0.003	-	-	-	-	-185.748	-0.020
4	1.800	1.851	1.000	0.997	-	0.494	-	-0.002	-	0.002	-	-0.012	-	-	-185.499	-0.016
5	1.800	1.855	1.000	0.994	-	0.493	-	-0.000	-	0.002	-	-0.011	-	-0.002	-185.099	-0.022
1	1.800	1.807	2.000	1.986	0.500	0.492	-	-	-	-	-	-	-	-	-255.987	1.363
2	1.800	1.815	2.000	1.983	-	0.492	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-255.584	1.360
3	1.800	1.823	2.000	1.981	-	0.493	-	-0.003	-	0.002	-	-	-	-	-255.192	1.358
4	1.800	1.838	2.000	1.982	-	0.492	-	-0.003	-	0.006	-	-0.007	-	-	-254.871	1.357
5	1.800	1.852	2.000	1.988	-	0.492	-	-0.001	-	0.005	-	-0.010	-	0.004	-254.507	1.363
1	1.800	1.821	3.000	2.986	0.500	0.491	-	-	-	-	-	-	-	-	-296.126	2.179
2	1.800	1.825	3.000	2.971	-	0.497	-	-0.010	-	-	-	-	-	-	-295.635	2.169
3	1.800	1.838	3.000	2.973	-	0.497	-	-0.009	-	-0.001	-	-	-	-	-295.355	2.169
4	1.800	1.855	3.000	2.982	-	0.497	-	-0.010	-	0.001	-	-0.002	-	-	-295.020	2.174
5	1.800	1.865	3.000	2.981	-	0.496	-	-0.008	-	0.001	-	-0.002	-	-0.001	-294.773	2.173
1	2.000	1.987	1.000	0.988	0.500	0.493	-	-	-	-	-	-	-	-	-175.691	-0.030
2	2.000	1.988	1.000	0.984	-	0.502	-	-0.020	-	-	-	-	-	-	-175.207	-0.037
3	2.000	1.987	1.000	0.980	-	0.503	-	-0.019	-	-0.003	-	-	-	-	-174.805	-0.045
4	2.000	1.987	1.000	0.976	-	0.503	-	-0.020	-	0.002	-	-0.008	-	-	-174.361	-0.054
5	2.000	1.987	1.000	0.971	-	0.503	-	-0.020	-	0.002	-	-0.009	-	0.000	-173.885	-0.064
1	2.000	1.985	2.000	1.975	0.500	0.493	-	-	-	-	-	-	-	-	-245.030	1.355
2	2.000	1.982	2.000	1.965	-	0.495	-	-0.004	-	-	-	-	-	-	-244.574	1.345
3	2.000	1.983	2.000	1.956	-	0.496	-	-0.004	-	0.001	-	-	-	-	-244.096	1.336
4	2.000	1.980	2.000	1.946	-	0.496	-	-0.005	-	0.009	-	-0.017	-	-	-243.615	1.325
5	2.000	1.980	2.000	1.936	-	0.497	-	-0.005	-	0.008	-	-0.019	-	0.003	-243.091	1.315
1	2.000	1.980	3.000	2.949	0.500	0.494	-	-	-	-	-	-	-	-	-285.376	2.157
2	2.000	1.977	3.000	2.935	-	0.500	-	-0.012	-	-	-	-	-	-	-284.952	2.147
3	2.000	1.976	3.000	2.920	-	0.500	-	-0.010	-	-0.004	-	-	-	-	-284.462	2.137
4	2.000	1.974	3.000	2.906	-	0.500	-	-0.010	-	-0.001	-	-0.006	-	-	-284.041	2.128
5	2.000	1.974	3.000	2.891	-	0.500	-	-0.010	-	0.000	-	-0.002	-	-0.009	-283.478	2.118

Tabela A.2: Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(1) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.1.

$p_{\alpha,\sigma,m}$	AIC					BIC					HQC					$EDC_{0.25}$					$EDC_{0.5}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	421	52	12	11	4	424	50	12	10	4	422	51	12	11	4	420	52	12	12	4	421	52	12	11	4
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	136	49	39	112	164	142	50	41	118	149	138	50	40	115	157	136	49	39	112	164	138	48	39	112	163
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	381	87	18	14	0	385	83	18	14	0	382	86	18	14	0	380	87	18	15	0	381	87	18	14	0
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	25	50	41	151	233	28	60	44	150	218	27	53	44	152	224	25	50	41	151	233	25	50	41	151	233
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	373	81	27	16	3	377	82	27	11	3	374	82	27	14	3	368	83	28	18	3	370	83	27	17	3
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	11	50	57	147	235	12	54	62	155	217	12	50	59	148	231	11	49	56	147	237	11	51	58	147	233
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	399	70	18	11	2	413	64	14	8	1	404	68	17	9	2	387	74	22	15	2	397	69	19	13	2
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	267	83	57	45	48	278	81	53	46	42	273	83	54	46	44	265	84	57	46	48	268	83	56	46	47
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	366	87	33	11	3	386	80	25	9	0	379	82	28	10	1	351	94	34	15	6	362	88	34	12	4
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	208	87	62	62	81	214	90	63	58	75	209	88	64	61	78	208	86	62	63	81	208	88	63	61	80
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	359	88	34	10	9	377	83	27	7	6	365	86	32	8	9	341	95	38	14	12	356	90	34	11	9
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	191	91	52	73	93	196	91	50	72	91	191	91	52	73	93	190	92	52	73	93	191	91	52	73	93
$\hat{p}_{1,1,L}$	363	71	32	25	9	403	62	21	12	2	382	68	30	16	4	301	80	51	47	21	341	77	39	29	14
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	215	103	87	48	47	246	100	75	42	37	227	104	83	44	42	211	103	89	50	47	217	103	87	46	47
$\hat{p}_{1,2,L}$	335	103	38	15	9	402	76	21	1	0	364	95	26	10	5	273	99	59	45	24	313	103	45	24	15
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	205	103	80	53	59	229	110	71	43	47	218	106	76	47	53	205	103	80	53	59	207	104	80	51	58
$\hat{p}_{1,3,L}$	329	100	43	25	3	393	74	25	8	0	367	83	36	13	1	267	109	58	49	17	306	105	49	31	9
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	199	117	80	62	42	232	113	75	50	30	214	112	78	58	38	197	119	80	62	42	201	115	80	62	42
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	328	81	53	24	14	424	55	16	5	0	391	67	26	12	4	182	101	96	64	57	284	91	69	28	28
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	157	105	86	66	86	239	98	67	45	51	196	98	81	54	71	147	102	89	70	92	163	103	86	64	84
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	337	92	39	21	11	424	55	16	4	1	386	80	25	8	1	186	103	80	79	52	298	95	51	35	21
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	156	103	93	88	60	255	96	66	52	31	204	108	79	69	40	150	100	91	94	65	163	105	92	85	55
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	317	85	51	33	14	425	61	13	1	0	383	71	28	12	6	171	93	75	92	69	279	88	58	50	25
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	138	105	96	77	84	223	108	78	43	48	186	105	88	62	59	132	103	98	79	88	147	105	94	74	80
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	358	69	38	21	14	470	25	3	1	1	433	48	13	4	2	161	76	84	80	99	289	77	59	43	32
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	206	77	81	73	63	359	57	35	29	20	281	68	66	50	35	197	72	85	76	70	220	72	80	72	56
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	355	65	25	31	24	466	24	5	4	1	437	39	11	8	5	142	71	73	103	111	284	76	43	50	47
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	213	76	67	70	74	366	52	32	21	29	288	68	51	44	49	197	75	74	74	80	224	76	62	67	71
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	347	65	47	25	16	473	19	7	1	0	419	42	25	11	3	134	86	91	84	105	283	81	61	39	36
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	204	94	77	61	64	365	68	30	17	20	279	84	67	36	34	187	98	78	66	71	216	94	76	54	60
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	372	61	28	24	15	490	9	1	0	0	449	30	9	9	3	163	71	80	84	102	325	63	48	34	30
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	310	65	41	44	40	440	34	11	9	6	382	49	25	24	20	298	68	44	44	46	322	61	39	42	36
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	372	58	25	19	26	475	19	5	1	0	436	42	12	6	4	165	71	65	87	112	317	69	40	32	42
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	301	65	43	48	43	428	42	12	8	10	380	54	18	31	17	279	66	46	56	53	314	69	36	43	38
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	364	59	43	21	13	475	22	3	0	0	433	43	19	4	1	155	81	88	68	108	306	81	53	33	27
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	283	80	61	42	34	429	41	19	7	4	372	58	39	18	13	256	81	66	53	44	300	77	56	35	32
$\hat{p}_{2,1,L}$	387	71	18	15	9	482	17	1	0	0	443	44	8	2	3	167	83	56	87	107	317	88	35	31	29
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	356	86	28	18	12	473	24	2	0	1	432	51	10	4	3	338	95	31	20	16	374	80	23	14	9
$\hat{p}_{2,2,L}$	375	57	29	19	20	481	15	3	1	0	448	34	11	4	3	161	63	70	76	130	314	62	48	30	46
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	338	68	34	31	29	468	25	4	3	0	432	42	11	11	4	323	68	40	32	37	355	67	29	26	23
$\hat{p}_{2,3,L}$	394	49	28	14	15	488	9	3	0	0	449	30	11	5	5	154	68	77	71	130	328	66	43	29	34
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	331	75	42	25	27	472	18	9	0	1	424	41	19	7	9	310	81	46	31	32	355	63	39	20	23

$p_{\alpha,\sigma,m}$	EDC_2					EDC_3					EDC_5					EDC_7				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	427	49	11	9	4	432	46	11	9	2	439	44	11	5	1	443	42	10	5	0
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	149	52	43	117	139	155	68	44	113	120	203	109	59	83	46	352	123	23	2	0
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	386	84	16	14	0	390	82	15	13	0	395	82	14	9	0	399	81	13	7	0
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	29	62	46	150	213	35	71	56	162	176	104	110	78	133	75	288	108	73	30	1
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	378	81	27	11	3	385	78	25	9	3	389	78	21	9	3	393	77	19	9	2
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	14	56	65	156	209	20	68	69	165	178	47	103	105	150	95	266	105	89	36	4
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	419	59	14	7	1	431	52	14	3	0	451	41	7	1	0	458	38	4	0	0
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	285	81	51	45	38	300	80	51	38	31	376	70	30	19	5	484	14	2	0	0
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	395	77	21	7	0	415	64	15	6	0	433	53	9	5	0	448	43	7	2	0
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	221	88	63	55	73	236	88	57	53	66	338	89	39	18	16	473	25	2	0	0
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	389	81	21	6	3	401	76	19	2	2	418	65	14	2	1	435	56	7	2	0
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	197	91	49	73	90	224	85	45	68	78	319	76	29	37	39	466	26	6	2	0
$\hat{p}_{1,1,L}$	416	57	17	9	1	438	50	8	3	1	469	27	3	1	0	478	20	1	1	0
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	258	98	74	38	32	289	92	63	34	22	408	59	30	1	2	494	5	1	0	0
$\hat{p}_{1,2,L}$	423	62	15	0	0	444	50	6	0	0	469	28	3	0	0	482	18	0	0	0
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	240	109	71	40	40	282	108	58	27	25	393	77	20	6	4	491	9	0	0	0
$\hat{p}_{1,3,L}$	416	63	15	6	0	436	48	12	4	0	462	33	4	1	0	479	19	2	0	0
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	241	115	70	47	27	276	112	56	35	21	400	70	20	3	7	492	8	0	0	0
$\hat{p}_{1,2,1,L}$	441	50	7	2	0	455	40	4	1	0	478	20	1	1	0	488	12	0	0	0
$\hat{p}_{1,2,1,\hat{\sigma}}$	268	95	57	39	41	337	76	42	25	20	452	38	7	2	1	499	1	0	0	0
$\hat{p}_{1,2,2,L}$	440	47	9	4	0	467	29	4	0	0	488	11	1	0	0	491	8	1	0	0
$\hat{p}_{1,2,2,\hat{\sigma}}$	288	88	59	40	25	355	72	42	20	11	452	34	12	2	0	499	1	0	0	0
$\hat{p}_{1,2,3,L}$	451	41	8	0	0	476	22	2	0	0	490	10	0	0	0	495	5	0	0	0
$\hat{p}_{1,2,3,\hat{\sigma}}$	273	102	65	31	29	344	86	42	14	14	452	38	8	2	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,1,L}$	482	17	1	0	0	490	10	0	0	0	498	2	0	0	0	499	1	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,1,\hat{\sigma}}$	398	43	24	19	16	450	27	8	10	5	490	8	2	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,2,L}$	485	13	1	1	0	494	6	0	0	0	497	3	0	0	0	497	3	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,2,\hat{\sigma}}$	413	43	17	14	13	460	26	6	4	4	494	6	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,3,L}$	488	9	3	0	0	498	2	0	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,3,\hat{\sigma}}$	414	47	20	11	8	460	29	6	2	3	495	4	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,L}$	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,\hat{\sigma}}$	468	21	5	4	2	493	6	0	1	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,2,L}$	487	12	1	0	0	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,2,\hat{\sigma}}$	455	29	9	4	3	490	9	0	1	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,3,L}$	487	12	1	0	0	495	5	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,3,\hat{\sigma}}$	459	34	6	0	1	491	9	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	491	9	0	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	488	11	0	0	1	498	1	0	0	1	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,L}$	489	10	1	0	0	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	478	19	3	0	0	495	5	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,L}$	496	3	1	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	484	11	4	0	1	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0

Estudando os resultados quando o processo gerador dos dados é um AR(1), com $n = 100$, nota-se que a maioria dos critérios são eficientes para selecionar o modelo corretamente, principalmente quando a formulação utiliza o logaritmo da função de máxima verossimilhança. O resultado é muito bom, visto que o tamanho amostral usado é pequeno para o ajuste de uma série temporal. Na comparação dos critérios, percebe-se que o critério EDC com $\theta \in \{2, 3, 5, 7\}$ é superior aos demais, pois apresenta um desempenho próximo ou superior a 80% de acerto nas condições estudadas.

Tabela A.3: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 500$, $burn-in = 100$, $re = 500$.

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_\alpha^2)$
1	0.500	0.779	1.000	10.547	0.500	0.601	-	-	-	-	-	-	-	-	-2265.240	3.085
2	0.500	1.905	1.000	5.538	-	0.499	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-2724.150	2.694
3	0.500	1.957	1.000	8.467	-	0.442	-	0.129	-	-0.050	-	-	-	-	-2988.539	3.237
4	0.500	1.908	1.000	3.109	-	0.326	-	0.085	-	0.001	-	0.000	-	-	-3527.275	1.064
5	0.500	1.959	1.000	2.140	-	0.284	-	0.114	-	-0.008	-	0.011	-	-0.004	-3838.901	0.661
1	0.500	0.712	2.000	16.330	0.500	0.612	-	-	-	-	-	-	-	-	-2601.515	4.452
2	0.500	1.832	2.000	11.405	-	0.489	-	0.006	-	-	-	-	-	-	-3116.620	3.812
3	0.500	1.928	2.000	15.918	-	0.468	-	0.110	-	-0.047	-	-	-	-	-3415.967	3.901
4	0.500	1.899	2.000	4.296	-	0.346	-	0.101	-	-0.013	-	-0.001	-	-	-4272.997	1.204
5	0.500	1.934	2.000	2.951	-	0.307	-	0.109	-	-0.006	-	0.007	-	-0.003	-4665.568	0.816
1	0.500	0.717	3.000	23.539	0.500	0.628	-	-	-	-	-	-	-	-	-2821.234	5.265
2	0.500	1.774	3.000	16.704	-	0.497	-	0.003	-	-	-	-	-	-	-3324.827	4.519
3	0.500	1.903	3.000	21.901	-	0.491	-	0.077	-	-0.037	-	-	-	-	-3725.144	4.322
4	0.500	1.850	3.000	7.196	-	0.364	-	0.089	-	-0.014	-	0.003	-	-	-4639.704	1.618
5	0.500	1.923	3.000	3.645	-	0.290	-	0.113	-	-0.004	-	0.013	-	-0.007	-5249.537	0.810
1	0.800	1.059	1.000	1.429	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-1516.515	0.359
2	0.800	1.765	1.000	2.556	-	0.500	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-1721.372	1.721
3	0.800	1.878	1.000	2.784	-	0.498	-	0.018	-	-0.009	-	-	-	-	-1767.963	1.934
4	0.800	1.899	1.000	2.579	-	0.492	-	0.023	-	-0.015	-	0.003	-	-	-1801.451	1.739
5	0.800	1.940	1.000	2.306	-	0.483	-	0.020	-	-0.010	-	0.013	-	-0.006	-1867.405	1.486
1	0.800	1.053	2.000	3.043	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-1854.170	1.970
2	0.800	1.689	2.000	4.936	-	0.503	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-2040.968	3.036
3	0.800	1.839	2.000	5.384	-	0.498	-	0.021	-	-0.010	-	-	-	-	-2085.663	3.245
4	0.800	1.806	2.000	5.048	-	0.505	-	0.018	-	-0.014	-	0.003	-	-	-2137.893	3.034
5	0.800	1.875	2.000	4.882	-	0.504	-	0.010	-	-0.012	-	0.022	-	-0.010	-2236.855	2.832
1	0.800	1.078	3.000	5.221	0.500	0.518	-	-	-	-	-	-	-	-	-2074.072	2.912
2	0.800	1.681	3.000	7.152	-	0.504	-	-0.004	-	-	-	-	-	-	-2233.369	3.746
3	0.800	1.812	3.000	7.775	-	0.500	-	0.021	-	-0.012	-	-	-	-	-2255.433	4.005
4	0.800	1.744	3.000	7.610	-	0.523	-	0.008	-	-0.022	-	0.007	-	-	-2332.809	3.839
5	0.800	1.831	3.000	7.247	-	0.517	-	0.005	-	-0.009	-	0.017	-	-0.009	-2473.121	3.554
1	1.000	1.180	1.000	1.199	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-1306.741	0.250
2	1.000	1.596	1.000	1.701	-	0.499	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-1406.826	0.936
3	1.000	1.811	1.000	1.895	-	0.504	-	-0.001	-	0.003	-	-	-	-	-1447.752	1.212
4	1.000	1.894	1.000	1.920	-	0.501	-	0.002	-	-0.002	-	0.001	-	-	-1459.326	1.267
5	1.000	1.946	1.000	1.903	-	0.500	-	0.002	-	0.000	-	0.001	-	0.001	-1476.235	1.253
1	1.000	1.164	2.000	2.459	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-1647.511	1.691
2	1.000	1.488	2.000	3.052	-	0.504	-	-0.002	-	-	-	-	-	-	-1721.284	2.107
3	1.000	1.756	2.000	3.571	-	0.501	-	0.004	-	-0.000	-	-	-	-	-1770.169	2.476
4	1.000	1.847	2.000	3.694	-	0.504	-	-0.000	-	-0.001	-	0.001	-	-	-1783.873	2.574
5	1.000	1.899	2.000	3.735	-	0.504	-	0.003	-	-0.002	-	0.008	-	-0.004	-1810.171	2.588
1	1.000	1.145	3.000	3.471	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-1841.724	2.417
2	1.000	1.459	3.000	4.466	-	0.504	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-1914.413	2.876
3	1.000	1.720	3.000	5.221	-	0.501	-	0.003	-	-0.001	-	-	-	-	-1958.599	3.242
4	1.000	1.809	3.000	5.473	-	0.501	-	0.005	-	-0.010	-	0.005	-	-	-1972.878	3.364
5	1.000	1.868	3.000	5.591	-	0.507	-	0.002	-	-0.002	-	0.003	-	-0.001	-1997.622	3.405
1	1.200	1.239	1.000	1.043	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-1163.315	0.063
2	1.200	1.509	1.000	1.288	-	0.499	-	0.002	-	-	-	-	-	-	-1214.669	0.436
3	1.200	1.689	1.000	1.406	-	0.499	-	0.003	-	0.000	-	-	-	-	-1243.180	0.613
4	1.200	1.857	1.000	1.503	-	0.505	-	-0.003	-	0.002	-	-0.000	-	-	-1265.596	0.783
5	1.200	1.910	1.000	1.556	-	0.503	-	0.001	-	0.001	-	-0.001	-	0.002	-1274.009	0.866
1	1.200	1.245	2.000	2.123	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-1508.961	1.479
2	1.200	1.446	2.000	2.391	-	0.500	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-1544.252	1.684
3	1.200	1.651	2.000	2.694	-	0.501	-	0.003	-	0.001	-	-	-	-	-1570.027	1.929
4	1.200	1.790	2.000	2.858	-	0.501	-	-0.001	-	0.002	-	0.002	-	-	-1585.565	2.071
5	1.200	1.879	2.000	2.964	-	0.501	-	0.001	-	0.002	-	0.002	-	0.003	-1598.380	2.155
1	1.200	1.241	3.000	3.128	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-1710.705	2.261
2	1.200	1.424	3.000	3.531	-	0.500	-	0.002	-	-	-	-	-	-	-1742.331	2.469
3	1.200	1.661	3.000	3.999	-	0.502	-	0.000	-	0.004	-	-	-	-	-1766.114	2.733
4	1.200	1.787	3.000	4.246	-	0.502	-	-0.000	-	0.003	-	0.000	-	-	-1782.456	2.868
5	1.200	1.840	3.000	4.378	-	0.501	-	0.004	-	-0.001	-	0.002	-	0.002	-1792.779	2.935

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\ln(\sigma_a^2)$
1	1.500	1.505	1.000	1.004	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-1032.544	0.003
2	1.500	1.609	1.000	1.055	-	0.500	-	0.002	-	-	-	-	-	-	-1044.326	0.094
3	1.500	1.696	1.000	1.104	-	0.504	-	-0.004	-	0.004	-	-	-	-	-1054.158	0.178
4	1.500	1.831	1.000	1.172	-	0.503	-	-0.002	-	0.001	-	0.003	-	-	-1069.256	0.301
5	1.500	1.900	1.000	1.203	-	0.503	-	0.000	-	0.002	-	0.001	-	0.003	-1076.285	0.356
1	1.500	1.508	2.000	2.011	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-1381.130	1.394
2	1.500	1.587	2.000	2.075	-	0.501	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-1389.333	1.449
3	1.500	1.720	2.000	2.233	-	0.502	-	-0.003	-	0.004	-	-	-	-	-1401.401	1.592
4	1.500	1.791	2.000	2.293	-	0.504	-	0.001	-	0.003	-	0.001	-	-	-1406.766	1.647
5	1.500	1.873	2.000	2.373	-	0.507	-	-0.002	-	0.001	-	-0.000	-	0.003	-1415.388	1.718
1	1.500	1.506	3.000	3.020	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-1583.481	2.208
2	1.500	1.589	3.000	3.138	-	0.500	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-1591.066	2.278
3	1.500	1.654	3.000	3.241	-	0.499	-	0.001	-	0.005	-	-	-	-	-1594.717	2.341
4	1.500	1.818	3.000	3.470	-	0.502	-	-0.000	-	0.000	-	0.004	-	-	-1608.392	2.479
5	1.500	1.882	3.000	3.570	-	0.501	-	0.002	-	0.002	-	0.002	-	0.002	-1615.586	2.537
1	1.800	1.805	1.000	1.003	0.500	0.499	-	-	-	-	-	-	-	-	-941.043	0.004
2	1.800	1.834	1.000	1.013	-	0.498	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-942.724	0.024
3	1.800	1.878	1.000	1.031	-	0.500	-	0.001	-	-0.001	-	-	-	-	-945.047	0.058
4	1.800	1.925	1.000	1.050	-	0.502	-	0.003	-	-0.003	-	-0.001	-	-	-947.724	0.094
5	1.800	1.949	1.000	1.057	-	0.502	-	0.001	-	0.000	-	0.001	-	-0.001	-948.948	0.108
1	1.800	1.805	2.000	2.003	0.500	0.497	-	-	-	-	-	-	-	-	-1286.958	1.387
2	1.800	1.823	2.000	2.015	-	0.498	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-1287.468	1.399
3	1.800	1.872	2.000	2.053	-	0.497	-	-0.001	-	0.000	-	-	-	-	-1289.990	1.436
4	1.800	1.924	2.000	2.096	-	0.498	-	0.002	-	-0.002	-	0.001	-	-	-1292.772	1.478
5	1.800	1.955	2.000	2.110	-	0.499	-	0.001	-	-0.001	-	-0.001	-	0.003	-1294.578	1.491
1	1.800	1.802	3.000	3.011	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-1491.663	2.203
2	1.800	1.832	3.000	3.046	-	0.500	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-1492.701	2.225
3	1.800	1.863	3.000	3.080	-	0.502	-	0.001	-	-0.004	-	-	-	-	-1493.973	2.247
4	1.800	1.920	3.000	3.140	-	0.502	-	-0.001	-	0.000	-	-0.002	-	-	-1496.960	2.286
5	1.800	1.952	3.000	3.172	-	0.501	-	0.003	-	0.000	-	-0.002	-	0.003	-1498.688	2.306
1	2.000	1.995	1.000	0.997	0.500	0.498	-	-	-	-	-	-	-	-	-882.137	-0.008
2	2.000	1.991	1.000	0.995	-	0.499	-	-0.003	-	-	-	-	-	-	-881.719	-0.012
3	2.000	1.990	1.000	0.993	-	0.499	-	-0.003	-	0.001	-	-	-	-	-881.279	-0.014
4	2.000	1.989	1.000	0.992	-	0.499	-	-0.003	-	0.002	-	-0.002	-	-	-880.791	-0.017
5	2.000	1.988	1.000	0.991	-	0.498	-	-0.003	-	0.002	-	-0.002	-	-0.001	-880.326	-0.019
1	2.000	1.994	2.000	1.997	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-1229.673	1.382
2	2.000	1.991	2.000	1.993	-	0.502	-	-0.003	-	-	-	-	-	-	-1229.270	1.378
3	2.000	1.988	2.000	1.990	-	0.502	-	-0.003	-	0.000	-	-	-	-	-1228.941	1.375
4	2.000	1.985	2.000	1.986	-	0.502	-	-0.003	-	0.001	-	-0.002	-	-	-1228.589	1.372
5	2.000	1.984	2.000	1.984	-	0.502	-	-0.003	-	0.001	-	-0.001	-	-0.002	-1228.113	1.370
1	2.000	1.993	3.000	2.988	0.500	0.498	-	-	-	-	-	-	-	-	-1431.366	2.188
2	2.000	1.986	3.000	2.980	-	0.498	-	-0.000	-	-	-	-	-	-	-1431.074	2.183
3	2.000	1.986	3.000	2.977	-	0.498	-	-0.001	-	0.001	-	-	-	-	-1430.592	2.181
4	2.000	1.980	3.000	2.969	-	0.498	-	-0.001	-	0.001	-	0.001	-	-	-1430.265	2.176
5	2.000	1.979	3.000	2.966	-	0.497	-	-0.000	-	0.000	-	0.001	-	-0.001	-1429.863	2.173

Tabela A.4: Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(1) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.3.

$p_{\alpha,\sigma,m}$	AIC					BIC					HQC					$EDC_{0.25}$					$EDC_{0.5}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	370	80	32	16	2	370	80	32	16	2	370	80	32	16	2	370	80	32	16	2	370	80	32	16	2
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	82	42	26	166	184	86	43	27	162	182	82	42	26	166	184	82	42	26	166	184	82	42	26	166	184
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	372	98	21	3	6	372	98	21	3	6	372	98	21	3	6	372	98	21	3	6	372	98	21	3	6
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	19	30	41	180	230	20	36	42	179	223	20	32	41	179	228	19	31	41	180	229	20	31	41	180	228
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	342	116	27	10	5	343	116	27	9	5	343	116	27	9	5	342	115	28	10	5	342	115	28	10	5
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	3	38	33	181	245	3	40	33	182	242	3	38	33	181	245	3	38	33	181	245	3	38	33	181	245
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	438	47	7	6	2	439	47	7	5	2	438	47	7	6	2	437	47	7	7	2	438	47	7	6	2
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	328	39	20	38	75	328	39	20	40	73	328	39	20	38	75	328	39	20	38	75	328	39	20	38	75
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	426	42	15	14	3	428	42	14	13	3	426	42	15	14	3	425	42	15	15	3	426	42	15	14	3
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	270	47	30	55	98	273	46	30	55	96	271	47	30	55	97	270	47	30	55	98	270	47	30	55	98
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	403	56	19	20	2	408	56	18	17	1	403	56	19	20	2	402	56	19	21	2	403	56	19	20	2
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	250	62	35	54	99	252	61	36	54	97	251	62	36	54	97	250	62	35	54	99	251	62	35	54	98
$\hat{p}_{1,1,L}$	411	62	16	8	3	425	56	12	6	1	413	61	15	8	3	403	65	19	10	3	409	62	17	9	3
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	331	80	29	26	34	333	81	29	26	31	332	80	29	26	33	331	80	29	26	34	331	81	29	26	33
$\hat{p}_{1,2,L}$	382	92	19	4	3	396	83	14	4	3	386	89	18	4	3	377	93	21	6	3	381	92	20	4	3
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	273	126	48	26	27	281	126	46	27	20	278	126	46	26	24	273	127	47	26	27	276	126	46	26	26
$\hat{p}_{1,3,L}$	393	79	17	9	2	411	67	13	8	1	400	75	16	8	1	392	78	18	9	3	393	79	17	9	2
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	322	109	43	13	13	326	108	41	12	13	323	110	42	12	13	322	109	43	13	13	322	109	43	13	13
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	412	62	22	3	1	436	44	18	1	1	425	52	20	2	1	384	77	31	5	3	410	62	24	3	1
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	292	107	66	25	10	317	95	59	20	9	301	102	64	24	9	292	107	66	25	10	294	106	66	24	10
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	382	79	21	12	6	406	70	13	7	4	394	75	16	10	5	358	90	30	15	7	380	81	21	12	6
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	267	130	65	30	8	290	120	57	27	6	277	124	62	30	7	269	129	64	30	8	271	128	63	30	8
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	388	83	19	8	2	423	64	11	2	0	404	73	16	6	1	360	97	28	12	3	387	83	19	9	2
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	262	154	49	27	8	289	138	43	23	7	271	148	47	27	7	262	154	49	27	8	265	151	49	27	8
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	409	57	30	3	1	469	28	3	0	0	449	40	10	1	0	331	87	62	14	6	402	60	34	3	1
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	218	111	88	49	34	310	74	51	40	25	266	93	66	44	31	226	109	83	48	34	239	104	76	47	34
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	382	92	14	12	0	475	21	1	3	0	448	45	2	5	0	296	147	29	23	5	373	98	17	12	0
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	232	132	64	43	29	330	79	39	30	22	278	107	52	40	23	238	130	61	43	28	257	117	59	41	26
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	427	47	23	2	1	479	19	2	0	0	464	29	6	1	0	341	84	59	12	4	417	53	27	2	1
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	259	93	95	39	14	356	58	55	24	7	305	79	74	32	10	263	94	90	39	14	272	91	88	36	13
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	401	70	16	10	3	488	11	1	0	0	465	34	1	0	0	303	112	43	29	13	389	74	20	13	4
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	243	107	72	50	28	371	59	39	19	12	316	80	49	35	20	253	103	69	48	27	272	97	62	44	25
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	395	76	17	9	3	487	12	1	0	0	455	40	5	0	0	296	114	52	25	13	383	84	18	12	3
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	265	106	73	33	23	387	48	35	17	13	333	77	52	22	16	276	101	70	32	21	296	92	62	31	19
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	410	57	26	7	0	493	6	1	0	0	469	22	9	0	0	292	110	61	28	9	402	60	29	8	1
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	271	101	75	38	15	396	51	33	12	8	342	67	51	27	13	277	101	72	35	15	301	90	65	30	14
$\hat{p}_{2,1,L}$	371	71	31	14	13	495	5	0	0	0	465	29	4	2	0	204	71	64	73	88	349	76	36	18	21
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	131	192	95	46	36	445	51	4	0	0	283	172	38	5	2	149	204	84	37	26	177	201	76	29	17
$\hat{p}_{2,2,L}$	397	59	23	11	10	497	2	1	0	0	466	25	7	2	0	230	95	49	44	82	387	61	27	12	13
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	141	143	82	78	56	417	78	2	1	2	312	129	21	23	15	165	146	76	67	46	212	151	59	50	28
$\hat{p}_{2,3,L}$	379	54	35	19	13	497	3	0	0	0	467	27	4	1	1	225	76	71	60	68	365	53	41	23	18
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	114	141	71	90	84	368	113	11	5	3	236	161	47	36	20	134	145	69	78	74	156	147	72	69	56

$p_{\alpha,\sigma,m}$	EDC_2					EDC_3					EDC_5					EDC_7				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	370	81	31	16	2	371	80	31	16	2	371	81	30	16	2	371	81	30	16	2
$\hat{p}_{0.5,1,\sigma}$	86	44	27	163	180	89	46	28	163	174	114	63	36	170	117	149	126	60	127	38
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	373	98	20	3	6	373	98	20	3	6	374	98	20	3	5	377	99	18	3	3
$\hat{p}_{0.5,2,\sigma}$	20	37	42	179	222	20	46	43	183	208	24	61	51	196	168	78	125	60	167	70
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	343	116	27	9	5	343	116	27	9	5	344	115	27	9	5	344	115	27	9	5
$\hat{p}_{0.5,3,\sigma}$	3	40	33	183	241	3	43	35	183	236	5	58	53	200	184	16	114	88	192	90
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	442	47	5	4	2	443	47	5	4	1	450	45	3	2	0	453	43	2	2	0
$\hat{p}_{0.8,1,\sigma}$	328	40	20	39	73	333	38	20	38	71	349	41	20	35	55	430	41	12	12	5
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	431	41	14	11	3	436	38	13	11	2	444	37	12	7	0	448	37	11	4	0
$\hat{p}_{0.8,2,\sigma}$	273	46	30	55	96	275	49	29	52	95	296	52	27	45	80	385	39	22	26	28
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	411	55	17	16	1	416	54	16	13	1	422	52	14	11	1	426	50	13	10	1
$\hat{p}_{0.8,3,\sigma}$	254	61	36	53	96	257	62	36	52	93	278	70	31	43	78	343	63	17	28	49
$\hat{p}_{1,1,L}$	429	53	11	6	1	433	50	10	6	1	440	47	8	5	0	448	42	5	5	0
$\hat{p}_{1,1,\sigma}$	335	81	29	25	30	344	81	29	26	20	370	82	25	14	9	435	57	7	1	0
$\hat{p}_{1,2,L}$	396	83	14	4	3	407	76	12	2	3	424	65	6	2	3	433	60	4	1	2
$\hat{p}_{1,2,\sigma}$	283	124	46	27	20	287	125	46	23	19	330	112	31	15	12	405	76	14	1	4
$\hat{p}_{1,3,L}$	415	65	11	8	1	424	57	11	7	1	438	47	9	5	1	445	43	8	3	1
$\hat{p}_{1,3,\sigma}$	326	108	42	12	12	337	103	38	10	12	364	94	29	7	6	428	60	8	3	1
$\hat{p}_{1,2,1,L}$	439	42	17	1	1	453	31	14	1	1	464	26	9	1	0	468	23	8	1	0
$\hat{p}_{1,2,1,\sigma}$	323	91	58	19	9	347	78	51	19	5	387	69	35	8	1	454	35	11	0	0
$\hat{p}_{1,2,2,L}$	408	70	13	5	4	419	66	10	4	1	437	54	5	3	1	448	46	4	2	0
$\hat{p}_{1,2,2,\sigma}$	295	119	55	26	5	307	117	52	21	3	368	90	32	9	1	439	56	5	0	0
$\hat{p}_{1,2,3,L}$	425	63	11	1	0	436	54	9	1	0	450	43	6	1	0	457	38	4	1	0
$\hat{p}_{1,2,3,\sigma}$	296	135	42	21	6	321	121	38	16	4	378	93	22	5	2	461	38	1	0	0
$\hat{p}_{1,5,1,L}$	476	22	2	0	0	478	20	2	0	0	486	13	1	0	0	490	10	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,1,\sigma}$	321	69	48	37	25	370	48	36	27	19	448	29	15	6	2	496	4	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,2,L}$	477	19	1	3	0	487	10	1	2	0	492	5	1	2	0	494	5	1	0	0
$\hat{p}_{1,5,2,\sigma}$	346	70	37	26	21	385	56	25	20	14	466	28	2	3	1	497	3	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,3,L}$	483	16	1	0	0	487	13	0	0	0	492	8	0	0	0	495	5	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,3,\sigma}$	373	53	49	20	5	418	38	27	12	5	473	24	3	0	0	499	1	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,L}$	490	9	1	0	0	497	3	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,\sigma}$	387	52	35	16	10	438	32	19	9	2	492	7	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,2,L}$	489	10	1	0	0	495	5	0	0	0	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,2,\sigma}$	406	42	31	12	9	448	29	16	4	3	494	6	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,3,L}$	495	4	1	0	0	496	4	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,3,\sigma}$	406	45	30	12	7	455	23	11	6	5	490	9	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,\sigma}$	472	27	1	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,L}$	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,\sigma}$	443	56	1	0	0	497	3	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,L}$	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,\sigma}$	405	84	9	1	1	496	4	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0

Analisando as simulações de Monte Carlo para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_a, 0)$ com $n = 500$ quando se utiliza a formulação que envolve $\ln(\hat{\sigma}_a^2)$ para a situação quando $\alpha = 0.5$ e $\sigma_a \in \{2, 3\}$ o desempenho é muito ruim, apresentando um percentual de acerto abaixo de 15%. Nem mesmo o critério EDC com $\theta = 7$ apresenta um desempenho razoável. A partir do caso em que $\alpha = 1.5$ e $\sigma_a = 1$ o critério EDC com $\theta = 7$ apresenta um desempenho igual ou superior a 98% de acerto em ambas as formulações.

Tabela A.5: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(1) - $S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 500$.

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_\alpha^2)$
1	0.500	0.802	1.000	11.413	0.500	0.649	-	-	-	-	-	-	-	-	-4753.461	3.538
2	0.500	1.923	1.000	5.109	-	0.494	-	0.003	-	-	-	-	-	-	-5497.480	2.607
3	0.500	1.950	1.000	8.526	-	0.442	-	0.124	-	-0.047	-	-	-	-	-5970.836	3.210
4	0.500	1.901	1.000	3.877	-	0.317	-	0.107	-	-0.005	-	-0.001	-	-	-6994.900	1.301
5	0.500	1.961	1.000	1.873	-	0.288	-	0.119	-	-0.006	-	0.009	-	-0.004	-7624.146	0.635
1	0.500	0.626	2.000	18.823	0.500	0.655	-	-	-	-	-	-	-	-	-5290.930	4.405
2	0.500	1.873	2.000	11.896	-	0.497	-	0.002	-	-	-	-	-	-	-6215.702	4.118
3	0.500	1.956	2.000	15.674	-	0.476	-	0.122	-	-0.055	-	-	-	-	-6906.104	3.978
4	0.500	1.865	2.000	5.312	-	0.343	-	0.088	-	-0.007	-	0.001	-	-	-8397.431	1.483
5	0.500	1.931	2.000	2.819	-	0.312	-	0.105	-	-0.010	-	0.018	-	-0.008	-9236.118	0.865
1	0.500	0.648	3.000	25.446	0.500	0.663	-	-	-	-	-	-	-	-	-5735.562	5.433
2	0.500	1.813	3.000	16.731	-	0.502	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-6624.999	4.677
3	0.500	1.928	3.000	21.211	-	0.485	-	0.100	-	-0.047	-	-	-	-	-7466.539	4.224
4	0.500	1.848	3.000	8.054	-	0.382	-	0.086	-	-0.019	-	0.003	-	-	-9149.270	1.742
5	0.500	1.927	3.000	5.070	-	0.318	-	0.101	-	-0.008	-	0.015	-	-0.007	-10285.880	1.037
1	0.800	1.050	1.000	1.356	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-3040.759	0.241
2	0.800	1.812	1.000	2.681	-	0.500	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-3473.593	1.871
3	0.800	1.921	1.000	2.844	-	0.500	-	0.019	-	-0.009	-	-	-	-	-3541.752	2.028
4	0.800	1.914	1.000	2.474	-	0.492	-	0.023	-	-0.015	-	0.004	-	-	-3613.484	1.659
5	0.800	1.940	1.000	2.174	-	0.498	-	0.014	-	-0.010	-	0.011	-	-0.005	-3695.965	1.383
1	0.800	1.053	2.000	2.999	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-3707.931	1.909
2	0.800	1.795	2.000	5.099	-	0.502	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-4136.889	3.149
3	0.800	1.850	2.000	5.510	-	0.502	-	0.025	-	-0.013	-	-	-	-	-4160.766	3.335
4	0.800	1.834	2.000	5.134	-	0.507	-	0.019	-	-0.027	-	0.008	-	-	-4263.802	3.126
5	0.800	1.868	2.000	4.629	-	0.514	-	-0.002	-	-0.007	-	0.018	-	-0.008	-4483.484	2.730
1	0.800	1.159	3.000	5.226	0.500	0.504	-	-	-	-	-	-	-	-	-4150.770	3.055
2	0.800	1.741	3.000	7.503	-	0.502	-	-0.000	-	-	-	-	-	-	-4529.365	3.898
3	0.800	1.845	3.000	7.981	-	0.501	-	0.018	-	-0.010	-	-	-	-	-4533.207	4.082
4	0.800	1.739	3.000	7.614	-	0.532	-	-0.002	-	-0.030	-	0.015	-	-	-4734.288	3.823
5	0.800	1.806	3.000	7.378	-	0.528	-	0.003	-	-0.013	-	0.023	-	-0.010	-4963.380	3.576
1	1.000	1.200	1.000	1.230	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-2618.940	0.300
2	1.000	1.650	1.000	1.734	-	0.501	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-2838.033	0.988
3	1.000	1.870	1.000	1.918	-	0.501	-	0.001	-	0.000	-	-	-	-	-2919.762	1.246
4	1.000	1.946	1.000	1.905	-	0.501	-	-0.000	-	0.000	-	0.001	-	-	-2938.636	1.265
5	1.000	1.955	1.000	1.924	-	0.500	-	0.001	-	-0.000	-	0.002	-	-0.001	-2951.215	1.283
1	1.000	1.173	2.000	2.438	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-3298.345	1.690
2	1.000	1.540	2.000	3.170	-	0.500	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-3462.120	2.183
3	1.000	1.850	2.000	3.716	-	0.502	-	0.000	-	-0.000	-	-	-	-	-3571.636	2.592
4	1.000	1.891	2.000	3.765	-	0.504	-	0.000	-	-0.002	-	0.001	-	-	-3573.291	2.629
5	1.000	1.912	2.000	3.810	-	0.501	-	0.003	-	-0.001	-	0.003	-	-0.001	-3607.713	2.650
1	1.000	1.142	3.000	3.561	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-3680.403	2.481
2	1.000	1.549	3.000	4.682	-	0.503	-	-0.002	-	-	-	-	-	-	-3851.198	2.983
3	1.000	1.803	3.000	5.317	-	0.502	-	-0.002	-	0.001	-	-	-	-	-3932.283	3.292
4	1.000	1.840	3.000	5.515	-	0.506	-	0.002	-	-0.005	-	0.002	-	-	-3949.232	3.396
5	1.000	1.872	3.000	5.616	-	0.505	-	0.004	-	-0.007	-	0.013	-	-0.005	-3985.789	3.426
1	1.200	1.249	1.000	1.051	0.500	0.504	-	-	-	-	-	-	-	-	-2331.327	0.082
2	1.200	1.611	1.000	1.360	-	0.499	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-2467.344	0.546
3	1.200	1.806	1.000	1.492	-	0.502	-	0.002	-	0.000	-	-	-	-	-2525.950	0.755
4	1.200	1.932	1.000	1.573	-	0.502	-	0.001	-	0.000	-	0.002	-	-	-2556.572	0.892
5	1.200	1.940	1.000	1.595	-	0.501	-	0.002	-	-0.001	-	0.002	-	0.001	-2560.861	0.920
1	1.200	1.241	2.000	2.114	0.500	0.501	-	-	-	-	-	-	-	-	-3023.245	1.479
2	1.200	1.537	2.000	2.515	-	0.501	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-3120.921	1.783
3	1.200	1.794	2.000	2.882	-	0.503	-	-0.001	-	0.003	-	-	-	-	-3188.970	2.090
4	1.200	1.872	2.000	2.985	-	0.501	-	0.001	-	-0.000	-	0.001	-	-	-3204.937	2.171
5	1.200	1.891	2.000	3.005	-	0.502	-	0.001	-	-0.000	-	0.002	-	0.001	-3211.700	2.187
1	1.200	1.259	3.000	3.179	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-3433.279	2.289
2	1.200	1.553	3.000	3.816	-	0.497	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-3525.363	2.628
3	1.200	1.775	3.000	4.234	-	0.500	-	0.003	-	0.001	-	-	-	-	-3562.519	2.862
4	1.200	1.850	3.000	4.377	-	0.500	-	0.001	-	0.001	-	0.001	-	-	-3586.561	2.935
5	1.200	1.883	3.000	4.454	-	0.501	-	0.005	-	-0.002	-	0.003	-	-0.000	-3601.432	2.976

$AR(p)$	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\ln(\sigma_a^2)$
1	1.500	1.518	1.000	1.008	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-2071.165	0.013
2	1.500	1.711	1.000	1.112	-	0.501	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-2116.859	0.195
3	1.500	1.795	1.000	1.147	-	0.502	-	-0.004	-	0.005	-	-	-	-	-2134.253	0.259
4	1.500	1.931	1.000	1.232	-	0.501	-	-0.000	-	0.003	-	0.002	-	-	-2165.332	0.410
5	1.500	1.961	1.000	1.253	-	0.501	-	-0.000	-	0.001	-	0.003	-	0.001	-2171.624	0.447
1	1.500	1.511	2.000	2.019	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-2765.990	1.402
2	1.500	1.688	2.000	2.191	-	0.502	-	0.001	-	-	-	-	-	-	-2802.999	1.552
3	1.500	1.856	2.000	2.354	-	0.503	-	0.001	-	0.003	-	-	-	-	-2831.045	1.703
4	1.500	1.872	2.000	2.375	-	0.507	-	-0.002	-	0.002	-	0.002	-	-	-2828.024	1.722
5	1.500	1.932	2.000	2.438	-	0.504	-	0.002	-	0.003	-	-0.002	-	0.004	-2844.878	1.777
1	1.500	1.509	3.000	3.016	0.500	0.502	-	-	-	-	-	-	-	-	-3169.382	2.206
2	1.500	1.722	3.000	3.341	-	0.501	-	0.003	-	-	-	-	-	-	-3210.626	2.398
3	1.500	1.755	3.000	3.387	-	0.500	-	0.002	-	0.002	-	-	-	-	-3205.220	2.431
4	1.500	1.890	3.000	3.569	-	0.503	-	0.001	-	0.003	-	0.001	-	-	-3230.012	2.540
5	1.500	1.927	3.000	3.640	-	0.500	-	0.003	-	0.001	-	0.002	-	0.001	-3244.183	2.580
1	1.800	1.810	1.000	1.002	0.500	0.504	-	-	-	-	-	-	-	-	-1880.889	0.003
2	1.800	1.905	1.000	1.040	-	0.502	-	-0.000	-	-	-	-	-	-	-1893.005	0.075
3	1.800	1.957	1.000	1.060	-	0.504	-	-0.000	-	-0.003	-	-	-	-	-1900.220	0.116
4	1.800	1.977	1.000	1.068	-	0.504	-	0.001	-	-0.001	-	-0.001	-	-	-1903.048	0.131
5	1.800	1.983	1.000	1.071	-	0.503	-	0.001	-	-0.000	-	-0.002	-	0.001	-1903.252	0.136
1	1.800	1.811	2.000	2.011	0.500	0.500	-	-	-	-	-	-	-	-	-2577.259	1.396
2	1.800	1.883	2.000	2.069	-	0.501	-	0.002	-	-	-	-	-	-	-2584.552	1.451
3	1.800	1.944	2.000	2.111	-	0.501	-	-0.001	-	0.004	-	-	-	-	-2591.570	1.492
4	1.800	1.973	2.000	2.136	-	0.500	-	0.001	-	0.001	-	-0.001	-	-	-2596.118	1.516
5	1.800	1.978	2.000	2.141	-	0.501	-	0.002	-	-0.000	-	0.002	-	0.000	-2596.798	1.521
1	1.800	1.808	3.000	3.012	0.500	0.503	-	-	-	-	-	-	-	-	-2981.636	2.204
2	1.800	1.888	3.000	3.099	-	0.503	-	-0.001	-	-	-	-	-	-	-2988.707	2.260
3	1.800	1.928	3.000	3.145	-	0.508	-	-0.004	-	0.003	-	-	-	-	-2993.171	2.290
4	1.800	1.968	3.000	3.197	-	0.499	-	0.001	-	0.003	-	0.001	-	-	-2999.589	2.324
5	1.800	1.978	3.000	3.211	-	0.498	-	0.005	-	-0.000	-	-0.002	-	0.004	-3001.621	2.332
1	2.000	1.996	1.000	1.000	0.500	0.497	-	-	-	-	-	-	-	-	-1766.838	-0.001
2	2.000	1.991	1.000	0.998	-	0.497	-	0.000	-	-	-	-	-	-	-1766.600	-0.005
3	2.000	1.989	1.000	0.997	-	0.497	-	0.001	-	-0.003	-	-	-	-	-1766.174	-0.007
4	2.000	1.988	1.000	0.996	-	0.496	-	0.002	-	-0.003	-	0.000	-	-	-1765.753	-0.009
5	2.000	1.988	1.000	0.995	-	0.496	-	0.004	-	-0.004	-	0.001	-	-0.001	-1765.298	-0.010
1	2.000	1.995	2.000	1.998	0.500	0.498	-	-	-	-	-	-	-	-	-2459.742	1.384
2	2.000	1.988	2.000	1.993	-	0.499	-	-0.002	-	-	-	-	-	-	-2459.636	1.379
3	2.000	1.987	2.000	1.992	-	0.499	-	-0.003	-	0.002	-	-	-	-	-2459.195	1.377
4	2.000	1.985	2.000	1.990	-	0.498	-	-0.001	-	0.001	-	-0.000	-	-	-2458.960	1.376
5	2.000	1.985	2.000	1.988	-	0.497	-	0.000	-	0.001	-	0.001	-	-0.002	-2458.723	1.374
1	2.000	1.994	3.000	2.993	0.500	0.499	-	-	-	-	-	-	-	-	-2864.094	2.192
2	2.000	1.981	3.000	2.980	-	0.499	-	-0.002	-	-	-	-	-	-	-2864.251	2.184
3	2.000	1.986	3.000	2.982	-	0.501	-	-0.001	-	-0.003	-	-	-	-	-2863.638	2.185
4	2.000	1.980	3.000	2.976	-	0.499	-	-0.000	-	-0.003	-	0.000	-	-	-2863.485	2.181
5	2.000	1.979	3.000	2.976	-	0.498	-	0.000	-	-0.003	-	-0.002	-	0.002	-2863.828	2.181

Tabela A.6: Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(1) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.5.

$p_{\alpha,\sigma,m}$	AIC					BIC					HQC					$EDC_{0.25}$					$EDC_{0.5}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	333	108	27	28	4	333	108	27	28	4	333	108	27	28	4	332	108	27	29	4	333	108	27	28	4
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	62	29	24	154	231	68	32	25	152	223	65	31	24	152	228	62	29	24	154	231	63	29	24	153	231
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	341	115	31	9	4	341	116	31	8	4	341	115	31	9	4	341	115	31	9	4	341	115	31	9	4
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	21	34	29	191	225	21	34	29	193	223	21	34	29	193	223	21	34	29	191	225	21	34	29	191	225
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	322	137	24	14	3	322	137	24	14	3	322	137	24	14	3	322	137	24	14	3	322	137	24	14	3
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	6	31	35	190	238	6	32	35	189	238	6	31	35	190	238	6	31	35	190	238	6	31	35	190	238
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	459	27	4	8	2	462	27	3	6	2	461	27	3	7	2	459	27	4	8	2	459	27	4	8	2
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	341	24	16	42	77	342	24	16	42	76	341	24	16	42	77	341	24	16	42	77	341	24	16	42	77
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	452	22	14	11	1	452	22	14	11	1	452	22	14	11	1	451	22	14	12	1	452	22	14	11	1
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	297	35	12	43	113	300	34	12	43	111	297	35	12	43	113	297	35	12	43	113	297	35	12	43	113
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	415	48	15	16	6	417	48	15	16	4	416	48	15	16	5	413	49	15	17	6	415	48	15	16	6
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	241	55	30	65	109	242	55	30	65	108	242	55	30	65	108	242	55	30	65	108	242	55	30	65	108
$\hat{p}_{1,1,L}$	417	62	11	8	2	425	56	11	6	2	422	59	11	6	2	415	63	11	8	3	417	62	11	8	2
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	339	87	32	15	27	339	87	32	15	27	339	87	32	15	27	339	87	32	15	27	339	87	32	15	27
$\hat{p}_{1,2,L}$	405	80	7	4	4	408	77	7	4	4	406	79	7	4	4	403	81	7	5	4	405	80	7	4	4
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	328	112	21	14	25	329	112	22	14	23	329	112	21	13	25	328	112	21	14	25	328	112	21	14	25
$\hat{p}_{1,3,L}$	420	64	7	8	1	430	57	6	6	1	424	60	7	8	1	418	65	7	8	2	420	64	7	8	1
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	329	121	31	9	10	333	118	30	9	10	331	119	31	9	10	329	121	31	9	10	329	121	31	9	10
$\hat{p}_{1,2,1,L}$	434	54	9	2	1	451	40	8	0	1	445	44	9	1	1	420	62	14	3	1	434	54	9	2	1
$\hat{p}_{1,2,1,\hat{\sigma}}$	363	81	36	10	10	370	76	34	10	10	365	79	36	10	10	364	80	36	10	10	364	80	36	10	10
$\hat{p}_{1,2,2,L}$	399	80	11	5	5	424	66	8	1	1	414	72	8	3	3	375	93	16	9	7	397	81	12	5	5
$\hat{p}_{1,2,2,\hat{\sigma}}$	305	130	34	15	16	316	126	29	14	15	308	129	33	14	16	305	131	33	15	16	306	130	33	15	16
$\hat{p}_{1,2,3,L}$	388	77	20	12	3	416	63	11	8	2	404	69	15	9	3	377	84	20	15	4	388	77	20	12	3
$\hat{p}_{1,2,3,\hat{\sigma}}$	329	111	35	20	5	344	101	33	17	5	334	108	36	17	5	329	111	35	20	5	331	110	36	18	5
$\hat{p}_{1,5,1,L}$	418	59	22	1	0	457	34	9	0	0	448	40	12	0	0	376	76	37	9	2	414	60	24	1	1
$\hat{p}_{1,5,1,\hat{\sigma}}$	298	98	75	22	7	344	80	57	15	4	318	88	69	19	6	301	96	75	21	7	305	95	73	21	6
$\hat{p}_{1,5,2,L}$	414	69	7	9	1	461	33	2	3	1	448	45	3	3	1	374	90	13	22	1	411	71	8	9	1
$\hat{p}_{1,5,2,\hat{\sigma}}$	303	125	36	30	6	363	85	28	18	6	343	96	30	25	6	306	122	36	30	6	312	117	36	29	6
$\hat{p}_{1,5,3,L}$	438	31	23	8	0	482	10	6	2	0	470	17	9	4	0	397	52	38	10	3	436	31	25	8	0
$\hat{p}_{1,5,3,\hat{\sigma}}$	340	86	54	14	6	389	66	33	10	2	362	77	44	12	5	347	82	52	13	6	351	81	49	13	6
$\hat{p}_{1,8,1,L}$	461	32	7	0	0	490	9	1	0	0	478	19	3	0	0	434	53	12	1	0	461	32	7	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,\hat{\sigma}}$	356	89	36	14	5	396	61	32	9	2	376	75	35	11	3	359	88	36	13	4	362	85	36	13	4
$\hat{p}_{1,8,2,L}$	429	59	9	2	1	465	31	4	0	0	451	41	6	1	1	401	80	14	4	1	429	59	9	2	1
$\hat{p}_{1,8,2,\hat{\sigma}}$	324	112	50	9	5	372	78	40	6	4	345	95	46	9	5	327	110	49	9	5	334	105	47	9	5
$\hat{p}_{1,8,3,L}$	446	41	12	1	0	479	20	1	0	0	463	31	5	1	0	416	58	23	3	0	445	41	12	2	0
$\hat{p}_{1,8,3,\hat{\sigma}}$	329	120	40	11	0	376	90	28	6	0	354	104	32	10	0	335	116	38	11	0	340	112	37	11	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	392	52	32	11	13	496	4	0	0	0	465	24	9	1	1	250	75	53	61	61	387	53	34	10	16
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	78	170	101	87	64	266	210	16	3	5	134	235	69	33	29	83	183	103	72	59	97	196	94	64	49
$\hat{p}_{2,2,L}$	399	52	29	13	7	496	3	1	0	0	481	10	6	3	0	274	66	58	39	63	395	53	29	14	9
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	47	176	81	87	109	261	184	19	12	24	113	204	80	50	53	55	185	81	81	98	64	194	85	72	85
$\hat{p}_{2,3,L}$	411	54	19	9	7	497	3	0	0	0	475	21	3	1	0	300	60	50	43	47	408	54	19	12	7
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	26	205	32	113	124	166	248	29	26	31	67	239	39	75	80	32	208	33	106	121	40	221	36	95	108

$p_{\alpha,\sigma,m}$	EDC_2					EDC_3					EDC_5					EDC_7				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	333	108	27	28	4	333	108	27	28	4	333	108	27	28	4	333	108	27	28	4
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	68	32	25	152	223	69	35	28	156	212	81	49	34	163	173	103	87	51	174	85
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	341	116	31	8	4	341	117	30	8	4	342	117	29	8	4	342	117	29	8	4
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	22	34	29	192	223	22	37	31	198	212	25	44	36	205	190	44	83	53	203	117
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	322	137	24	14	3	322	137	24	14	3	322	137	24	14	3	324	135	24	14	3
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	6	32	35	189	238	6	34	35	190	235	6	42	40	196	216	14	79	64	205	138
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	463	27	3	5	2	463	27	3	5	2	463	27	3	5	2	465	27	3	3	2
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	342	24	16	42	76	345	24	16	41	74	357	27	16	39	61	394	29	10	32	35
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	452	22	14	11	1	452	22	14	11	1	452	22	14	11	1	455	22	14	9	0
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	300	35	12	43	110	300	35	12	43	110	311	35	12	40	102	365	35	9	27	64
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	417	48	15	16	4	417	48	16	15	4	420	50	13	14	3	423	50	12	12	3
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	242	55	30	65	108	248	57	30	61	104	266	58	23	54	99	308	49	13	43	87
$\hat{p}_{1,1,L}$	425	56	11	6	2	432	54	9	4	1	436	53	7	4	0	443	48	7	2	0
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	339	87	32	15	27	341	86	33	13	27	354	84	26	11	25	406	67	17	5	5
$\hat{p}_{1,2,L}$	409	76	7	4	4	410	75	7	5	3	416	73	7	1	3	424	68	5	1	2
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	330	112	22	14	22	337	109	23	10	21	362	104	17	6	11	392	92	10	3	3
$\hat{p}_{1,3,L}$	431	56	6	6	1	436	55	5	4	0	448	47	3	2	0	451	44	3	2	0
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	334	118	29	9	10	336	117	30	8	9	358	108	24	5	5	394	87	17	0	2
$\hat{p}_{1,2,1,L}$	453	39	8	0	0	454	38	8	0	0	458	35	7	0	0	466	28	6	0	0
$\hat{p}_{1,2,1,\hat{\sigma}}$	370	76	34	10	10	380	72	31	8	9	405	64	20	4	7	439	47	12	1	1
$\hat{p}_{1,2,2,L}$	428	62	8	1	1	435	57	7	0	1	449	46	5	0	0	454	41	5	0	0
$\hat{p}_{1,2,2,\hat{\sigma}}$	318	125	29	14	14	335	117	26	11	11	381	97	12	6	4	436	56	6	2	0
$\hat{p}_{1,2,3,L}$	421	58	11	8	2	423	57	11	8	1	432	50	10	7	1	442	43	9	5	1
$\hat{p}_{1,2,3,\hat{\sigma}}$	344	101	33	17	5	358	95	29	15	3	392	81	19	7	1	437	55	5	2	1
$\hat{p}_{1,5,1,L}$	459	33	8	0	0	467	27	6	0	0	473	23	4	0	0	479	19	2	0	0
$\hat{p}_{1,5,1,\hat{\sigma}}$	353	74	54	15	4	384	62	41	12	1	422	41	30	7	0	476	22	2	0	0
$\hat{p}_{1,5,2,L}$	463	32	1	3	1	467	28	1	3	1	474	22	1	2	1	477	20	0	2	1
$\hat{p}_{1,5,2,\hat{\sigma}}$	366	82	28	18	6	394	65	23	14	4	449	41	6	3	1	472	26	2	0	0
$\hat{p}_{1,5,3,L}$	482	10	6	2	0	488	8	3	1	0	491	7	2	0	0	491	7	2	0	0
$\hat{p}_{1,5,3,\hat{\sigma}}$	396	63	29	10	2	422	50	18	8	2	463	30	4	3	0	487	13	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,L}$	491	8	1	0	0	493	6	1	0	0	497	3	0	0	0	498	2	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,\hat{\sigma}}$	399	59	31	9	2	420	53	22	3	2	473	26	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,2,L}$	469	28	3	0	0	471	28	1	0	0	487	13	0	0	0	491	9	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,2,\hat{\sigma}}$	373	77	40	6	4	410	56	30	3	1	464	29	7	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,3,L}$	481	18	1	0	0	484	15	1	0	0	489	11	0	0	0	494	6	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,3,\hat{\sigma}}$	382	85	28	5	0	403	75	19	3	0	463	34	3	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	303	181	11	1	4	479	18	1	0	2	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,L}$	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	276	182	16	9	17	424	74	0	1	1	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,L}$	497	3	0	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	188	238	25	21	28	372	118	7	2	1	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0

Para o cenário em que $n = 1000$ e os dados são advindos de processos AR(1), o aumento amostral proporciona um melhor desempenho para alguns cenários, mas para outros os critérios selecionam menos vezes a ordem 1 corretamente. O critério que apresenta um melhor desempenho para todas as situações e para ambas as formulações é o EDC com $\theta = 7$.

Tabela A.7: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 100$, $burn-in = 20$, $re = 500$.

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_\alpha^2)$
1	0.500	0.846	1.000	33.237	-	-0.761	-	-	-	-	-	-	-	-	-571.163	5.344
2	0.500	1.842	1.000	5.296	-0.400	-0.400	0.300	0.299	-	-	-	-	-	-	-565.764	2.222
3	0.500	1.938	1.000	15.599	-	-0.381	-	0.250	-	-0.050	-	-	-	-	-623.557	3.189
4	0.500	1.976	1.000	15.399	-	-0.293	-	0.260	-	-0.082	-	0.011	-	-	-673.127	3.415
5	0.500	1.963	1.000	5.392	-	-0.284	-	0.257	-	-0.065	-	0.030	-	-0.001	-782.672	1.441
1	0.500	0.803	2.000	52.197	-	-0.779	-	-	-	-	-	-	-	-	-632.623	6.542
2	0.500	1.829	2.000	11.990	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-661.433	3.246
3	0.500	1.942	2.000	23.872	-	-0.382	-	0.267	-	-0.037	-	-	-	-	-739.867	3.392
4	0.500	1.967	2.000	25.983	-	-0.308	-	0.242	-	-0.080	-	0.016	-	-	-808.490	3.683
5	0.500	1.954	2.000	8.588	-	-0.292	-	0.246	-	-0.062	-	0.037	-	0.002	-955.131	1.605
1	0.500	0.826	3.000	72.123	-	-0.781	-	-	-	-	-	-	-	-	-674.852	7.367
2	0.500	1.764	3.000	16.843	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-718.194	3.816
3	0.500	1.917	3.000	45.137	-	-0.400	-	0.233	-	-0.050	-	-	-	-	-824.513	4.090
4	0.500	1.970	3.000	36.685	-	-0.295	-	0.254	-	-0.076	-	0.018	-	-	-946.907	3.403
5	0.500	1.959	3.000	11.486	-	-0.281	-	0.231	-	-0.070	-	0.039	-	-0.003	-1110.339	1.536
1	0.800	0.999	1.000	3.795	-	-0.691	-	-	-	-	-	-	-	-	-371.678	2.158
2	0.800	1.599	1.000	2.454	-0.400	-0.398	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-343.405	1.454
3	0.800	1.780	1.000	2.883	-	-0.393	-	0.298	-	-0.002	-	-	-	-	-359.751	1.811
4	0.800	1.888	1.000	3.359	-	-0.363	-	0.298	-	-0.019	-	0.003	-	-	-372.751	2.056
5	0.800	1.921	1.000	2.668	-	-0.367	-	0.291	-	-0.016	-	0.013	-	0.006	-385.720	1.690
1	0.800	1.005	2.000	7.063	-	-0.699	-	-	-	-	-	-	-	-	-441.474	3.518
2	0.800	1.650	2.000	5.337	-0.400	-0.399	0.300	0.302	-	-	-	-	-	-	-422.001	2.986
3	0.800	1.824	2.000	6.369	-	-0.400	-	0.285	-	-0.011	-	-	-	-	-440.545	3.312
4	0.800	1.906	2.000	6.330	-	-0.380	-	0.284	-	-0.020	-	0.005	-	-	-456.542	3.303
5	0.800	1.941	2.000	5.470	-	-0.382	-	0.286	-	-0.022	-	-0.005	-	-0.004	-492.137	2.798
1	0.800	1.002	3.000	10.068	-	-0.692	-	-	-	-	-	-	-	-	-474.156	4.241
2	0.800	1.648	3.000	7.349	-0.400	-0.404	0.300	0.297	-	-	-	-	-	-	-461.884	3.600
3	0.800	1.822	3.000	9.033	-	-0.390	-	0.295	-	-0.008	-	-	-	-	-482.730	3.966
4	0.800	1.909	3.000	9.411	-	-0.392	-	0.282	-	-0.016	-	-0.002	-	-	-501.151	4.005
5	0.800	1.922	3.000	8.115	-	-0.405	-	0.271	-	-0.028	-	-0.011	-	-0.004	-542.333	3.438
1	1.000	1.139	1.000	2.057	-	-0.659	-	-	-	-	-	-	-	-	-304.538	1.228
2	1.000	1.449	1.000	1.546	-0.400	-0.398	0.300	0.299	-	-	-	-	-	-	-279.561	0.661
3	1.000	1.630	1.000	1.821	-	-0.398	-	0.297	-	-0.002	-	-	-	-	-288.838	1.012
4	1.000	1.765	1.000	1.975	-	-0.385	-	0.294	-	-0.006	-	0.004	-	-	-295.944	1.206
5	1.000	1.839	1.000	1.917	-	-0.393	-	0.288	-	-0.008	-	0.011	-	0.008	-299.781	1.183
1	1.000	1.134	2.000	3.979	-	-0.653	-	-	-	-	-	-	-	-	-369.370	2.599
2	1.000	1.447	2.000	3.156	-0.400	-0.404	0.300	0.297	-	-	-	-	-	-	-347.295	2.104
3	1.000	1.621	2.000	3.544	-	-0.403	-	0.296	-	-0.000	-	-	-	-	-356.249	2.340
4	1.000	1.750	2.000	3.725	-	-0.396	-	0.299	-	-0.001	-	0.001	-	-	-363.442	2.468
5	1.000	1.854	2.000	3.706	-	-0.399	-	0.295	-	0.002	-	0.003	-	0.001	-375.464	2.441
1	1.000	1.164	3.000	5.959	-	-0.655	-	-	-	-	-	-	-	-	-411.141	3.409
2	1.000	1.523	3.000	4.987	-0.400	-0.402	0.300	0.296	-	-	-	-	-	-	-392.669	3.018
3	1.000	1.676	3.000	5.358	-	-0.398	-	0.299	-	0.002	-	-	-	-	-401.191	3.165
4	1.000	1.775	3.000	5.682	-	-0.392	-	0.297	-	-0.006	-	-0.001	-	-	-411.582	3.277
5	1.000	1.860	3.000	5.570	-	-0.404	-	0.287	-	-0.012	-	-0.002	-	0.008	-431.071	3.136
1	1.200	1.309	1.000	1.480	-	-0.616	-	-	-	-	-	-	-	-	-261.001	0.701
2	1.200	1.416	1.000	1.207	-0.400	-0.397	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-239.733	0.275
3	1.200	1.514	1.000	1.301	-	-0.392	-	0.301	-	-0.000	-	-	-	-	-244.497	0.415
4	1.200	1.662	1.000	1.401	-	-0.389	-	0.305	-	0.003	-	-0.001	-	-	-250.064	0.574
5	1.200	1.740	1.000	1.452	-	-0.392	-	0.303	-	0.003	-	0.002	-	0.000	-252.546	0.668
1	1.200	1.283	2.000	2.939	-	-0.631	-	-	-	-	-	-	-	-	-329.622	2.083
2	1.200	1.440	2.000	2.421	-0.400	-0.401	0.300	0.299	-	-	-	-	-	-	-310.555	1.674
3	1.200	1.540	2.000	2.591	-	-0.402	-	0.298	-	0.000	-	-	-	-	-314.364	1.807
4	1.200	1.652	2.000	2.745	-	-0.396	-	0.297	-	0.002	-	0.006	-	-	-318.411	1.924
5	1.200	1.771	2.000	2.888	-	-0.402	-	0.289	-	-0.002	-	0.007	-	0.003	-324.423	2.035
1	1.200	1.294	3.000	4.348	-	-0.621	-	-	-	-	-	-	-	-	-368.922	2.875
2	1.200	1.416	3.000	3.566	-0.400	-0.403	0.300	0.298	-	-	-	-	-	-	-350.467	2.446
3	1.200	1.535	3.000	3.856	-	-0.407	-	0.297	-	0.006	-	-	-	-	-354.789	2.578
4	1.200	1.695	3.000	4.266	-	-0.399	-	0.300	-	0.004	-	0.004	-	-	-360.908	2.800
5	1.200	1.788	3.000	4.459	-	-0.400	-	0.303	-	0.006	-	0.004	-	0.006	-367.581	2.879

$AR(p)$	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_a^2)$
1	1.500	1.544	1.000	1.173	-	-0.590	-	-	-	-	-	-	-	-	-220.099	0.297
2	1.500	1.590	1.000	1.043	-0.400	-0.402	0.300	0.291	-	-	-	-	-	-	-207.798	0.061
3	1.500	1.625	1.000	1.059	-	-0.401	-	0.293	-	-0.000	-	-	-	-	-208.640	0.088
4	1.500	1.693	1.000	1.095	-	-0.398	-	0.294	-	-0.000	-	-0.002	-	-	-210.387	0.147
5	1.500	1.765	1.000	1.132	-	-0.395	-	0.300	-	0.000	-	-0.001	-	0.009	-211.495	0.213
1	1.500	1.551	2.000	2.344	-	-0.579	-	-	-	-	-	-	-	-	-288.064	1.683
2	1.500	1.571	2.000	2.080	-0.400	-0.403	0.300	0.291	-	-	-	-	-	-	-276.707	1.441
3	1.500	1.606	2.000	2.116	-	-0.402	-	0.291	-	-0.000	-	-	-	-	-277.316	1.472
4	1.500	1.662	2.000	2.158	-	-0.402	-	0.290	-	-0.000	-	-0.001	-	-	-278.147	1.507
5	1.500	1.744	2.000	2.240	-	-0.401	-	0.291	-	-0.000	-	-0.002	-	0.002	-279.803	1.581
1	1.500	1.541	3.000	3.545	-	-0.584	-	-	-	-	-	-	-	-	-330.444	2.510
2	1.500	1.599	3.000	3.162	-0.400	-0.399	0.300	0.293	-	-	-	-	-	-	-318.934	2.276
3	1.500	1.616	3.000	3.166	-	-0.400	-	0.294	-	0.003	-	-	-	-	-318.582	2.277
4	1.500	1.685	3.000	3.263	-	-0.401	-	0.293	-	0.006	-	0.002	-	-	-319.865	2.330
5	1.500	1.776	3.000	3.407	-	-0.404	-	0.292	-	0.006	-	0.004	-	0.005	-322.157	2.416
1	1.800	1.831	1.000	1.079	-	-0.561	-	-	-	-	-	-	-	-	-193.648	0.142
2	1.800	1.840	1.000	1.006	-0.400	-0.399	0.300	0.289	-	-	-	-	-	-	-186.858	0.003
3	1.800	1.849	1.000	1.004	-	-0.400	-	0.291	-	0.005	-	-	-	-	-186.545	-0.003
4	1.800	1.878	1.000	1.017	-	-0.398	-	0.294	-	0.003	-	-0.006	-	-	-186.593	0.022
5	1.800	1.896	1.000	1.016	-	-0.399	-	0.296	-	0.005	-	-0.006	-	0.000	-186.408	0.021
1	1.800	1.828	2.000	2.149	-	-0.560	-	-	-	-	-	-	-	-	-262.622	1.520
2	1.800	1.834	2.000	2.014	-0.400	-0.403	0.300	0.283	-	-	-	-	-	-	-256.289	1.390
3	1.800	1.845	2.000	2.013	-	-0.404	-	0.285	-	0.008	-	-	-	-	-255.988	1.389
4	1.800	1.864	2.000	2.023	-	-0.403	-	0.288	-	0.003	-	-0.008	-	-	-255.859	1.399
5	1.800	1.884	2.000	2.027	-	-0.404	-	0.287	-	0.005	-	-0.006	-	0.002	-255.711	1.402
1	1.800	1.829	3.000	3.199	-	-0.565	-	-	-	-	-	-	-	-	-302.734	2.316
2	1.800	1.842	3.000	3.004	-0.400	-0.400	0.300	0.287	-	-	-	-	-	-	-295.953	2.191
3	1.800	1.850	3.000	2.996	-	-0.401	-	0.289	-	0.003	-	-	-	-	-295.649	2.185
4	1.800	1.879	3.000	3.020	-	-0.398	-	0.295	-	-0.001	-	-0.011	-	-	-295.613	2.200
5	1.800	1.904	3.000	3.034	-	-0.401	-	0.293	-	-0.003	-	-0.006	-	0.007	-295.651	2.209
1	2.000	1.990	1.000	1.034	-	-0.547	-	-	-	-	-	-	-	-	-180.080	0.061
2	2.000	1.989	1.000	0.988	-0.400	-0.395	0.300	0.280	-	-	-	-	-	-	-175.547	-0.029
3	2.000	1.988	1.000	0.983	-	-0.395	-	0.279	-	-0.002	-	-	-	-	-175.073	-0.039
4	2.000	1.990	1.000	0.980	-	-0.395	-	0.282	-	-0.006	-	-0.010	-	-	-174.648	-0.046
5	2.000	1.990	1.000	0.976	-	-0.395	-	0.282	-	-0.005	-	-0.010	-	-0.002	-174.213	-0.054
1	2.000	1.990	2.000	2.076	-	-0.543	-	-	-	-	-	-	-	-	-249.696	1.454
2	2.000	1.987	2.000	1.977	-0.400	-0.389	0.300	0.286	-	-	-	-	-	-	-244.940	1.357
3	2.000	1.985	2.000	1.966	-	-0.391	-	0.289	-	0.006	-	-	-	-	-244.454	1.346
4	2.000	1.985	2.000	1.957	-	-0.391	-	0.292	-	0.002	-	-0.010	-	-	-244.001	1.337
5	2.000	1.985	2.000	1.948	-	-0.391	-	0.292	-	0.005	-	-0.013	-	-0.008	-243.541	1.328
1	2.000	1.985	3.000	3.074	-	-0.548	-	-	-	-	-	-	-	-	-289.231	2.240
2	2.000	1.984	3.000	2.942	-0.400	-0.401	0.300	0.273	-	-	-	-	-	-	-284.894	2.153
3	2.000	1.980	3.000	2.924	-	-0.398	-	0.271	-	-0.006	-	-	-	-	-284.400	2.140
4	2.000	1.979	3.000	2.910	-	-0.398	-	0.276	-	-0.011	-	-0.014	-	-	-283.926	2.130
5	2.000	1.977	3.000	2.894	-	-0.398	-	0.276	-	-0.011	-	-0.014	-	0.001	-283.456	2.119

Tabela A.8: Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(2) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.7.

$p_{\alpha,\sigma,m}$	AIC					BIC					HQC					$EDC_{0.25}$					$EDC_{0.5}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	193	193	93	16	5	203	194	87	13	3	199	194	89	15	3	187	195	95	17	6	189	195	94	16	6
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	13	147	103	53	184	14	167	109	50	160	13	160	107	51	169	13	145	103	53	186	13	151	103	53	180
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	228	178	69	17	8	235	179	62	16	8	229	178	69	16	8	223	179	70	19	9	225	179	69	19	8
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	9	132	109	68	182	10	147	109	69	165	9	138	108	67	178	9	132	107	69	183	9	135	109	68	179
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	215	196	63	20	6	223	196	60	17	4	220	196	62	17	5	210	195	67	21	7	213	195	65	21	6
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	7	112	95	112	174	7	128	102	109	154	7	117	99	111	166	7	109	95	111	178	7	112	96	112	173
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	67	260	100	48	25	76	275	94	38	17	70	267	99	44	20	64	253	101	51	31	67	257	100	48	28
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	87	162	93	55	103	93	164	94	53	96	89	163	94	54	100	87	162	93	55	103	88	161	93	56	102
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	92	238	107	50	13	103	244	104	42	7	96	238	105	49	12	84	232	108	55	21	89	234	108	52	17
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	113	122	77	63	125	119	122	76	61	122	117	120	76	63	124	113	122	76	64	125	113	122	77	63	125
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	88	246	98	44	24	103	253	90	33	21	95	249	95	40	21	79	244	98	50	29	83	246	99	47	25
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	102	132	85	56	125	107	138	83	53	119	103	132	86	55	124	101	132	85	57	125	102	132	85	56	125
$\hat{p}_{1,1,L}$	31	286	112	41	30	34	310	100	33	23	33	299	103	37	28	26	268	119	49	38	31	276	113	45	35
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	86	204	92	55	63	97	215	87	46	55	90	209	89	51	61	85	203	94	55	63	88	205	92	54	61
$\hat{p}_{1,2,L}$	22	268	126	64	20	31	297	109	47	16	27	276	119	61	17	20	248	127	77	28	20	263	126	70	21
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	67	188	101	72	72	74	206	96	61	63	68	193	98	71	70	66	187	101	73	73	67	188	101	72	72
$\hat{p}_{1,3,L}$	38	248	124	69	21	46	271	115	55	13	41	256	119	63	21	28	227	132	83	30	32	238	128	76	26
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	80	158	103	67	92	85	171	100	59	85	82	165	103	62	88	80	157	102	68	93	81	160	103	65	91
$\hat{p}_{1,2,1,L}$	9	318	112	37	24	14	365	92	18	11	10	350	97	28	15	7	249	124	69	51	9	298	119	42	32
$\hat{p}_{1,2,1,\hat{\sigma}}$	49	211	108	73	59	53	253	107	54	33	52	227	110	65	46	48	207	109	76	60	49	217	106	72	56
$\hat{p}_{1,2,2,L}$	13	276	127	65	19	19	330	101	41	9	14	305	112	57	12	10	229	134	87	40	12	261	124	77	26
$\hat{p}_{1,2,2,\hat{\sigma}}$	50	200	114	86	50	54	226	112	67	41	51	213	115	76	45	50	198	114	87	51	50	201	114	86	49
$\hat{p}_{1,2,3,L}$	12	277	142	46	23	18	333	110	27	12	12	312	125	32	19	11	227	148	72	42	12	261	150	52	25
$\hat{p}_{1,2,3,\hat{\sigma}}$	33	212	132	65	58	38	246	127	51	38	35	231	128	58	48	33	209	135	65	58	33	215	133	64	55
$\hat{p}_{1,5,1,L}$	6	336	94	41	23	19	414	54	9	4	8	380	81	21	10	3	196	128	100	73	4	303	100	55	38
$\hat{p}_{1,5,1,\hat{\sigma}}$	27	223	112	79	59	41	301	89	42	27	35	261	105	60	39	27	219	112	80	62	28	231	110	74	57
$\hat{p}_{1,5,2,L}$	10	325	101	47	17	24	415	50	9	2	19	384	68	23	6	3	188	124	113	72	9	281	111	71	28
$\hat{p}_{1,5,2,\hat{\sigma}}$	32	213	114	78	63	46	305	79	40	30	35	260	107	53	45	31	208	113	80	68	32	223	112	74	59
$\hat{p}_{1,5,3,L}$	5	323	96	52	24	24	383	68	24	1	9	367	84	32	8	2	168	124	121	85	4	276	112	68	40
$\hat{p}_{1,5,3,\hat{\sigma}}$	25	211	116	85	63	37	303	88	46	26	30	260	99	69	42	24	204	115	92	65	26	220	113	81	60
$\hat{p}_{1,8,1,L}$	20	362	73	32	13	70	397	28	5	0	39	402	42	14	3	2	211	105	101	81	15	318	85	52	30
$\hat{p}_{1,8,1,\hat{\sigma}}$	45	289	73	50	43	89	352	35	13	11	59	332	58	26	25	43	278	76	57	46	48	296	75	45	36
$\hat{p}_{1,8,2,L}$	15	358	74	30	23	76	396	23	3	2	39	394	50	9	8	5	183	116	91	105	11	318	88	44	39
$\hat{p}_{1,8,2,\hat{\sigma}}$	28	285	92	52	43	87	345	45	13	10	53	324	74	29	20	28	276	95	55	46	29	293	90	48	40
$\hat{p}_{1,8,3,L}$	14	357	74	41	14	72	397	24	7	0	33	398	46	18	5	4	195	106	105	90	9	311	88	62	30
$\hat{p}_{1,8,3,\hat{\sigma}}$	33	279	89	67	32	78	353	45	18	6	49	332	71	36	12	31	267	95	69	38	35	290	87	61	27
$\hat{p}_{2,1,L}$	41	361	58	27	13	123	362	15	0	0	73	380	40	6	1	4	191	91	94	120	24	331	70	44	31
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	44	353	62	29	12	119	359	20	1	1	74	369	44	10	3	39	345	66	36	14	47	361	56	26	10
$\hat{p}_{2,2,L}$	34	354	67	27	18	109	375	13	2	1	61	392	32	11	4	9	175	97	94	125	20	307	92	45	36
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	32	333	77	34	24	102	372	19	6	1	53	387	41	12	7	27	307	90	43	33	38	348	69	27	18
$\hat{p}_{2,3,L}$	42	347	57	28	26	138	344	16	1	1	78	375	31	10	6	11	180	78	110	121	24	305	72	54	45
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	52	300	70	43	35	142	327	23	5	3	87	339	46	14	14	44	281	78	55	42	60	312	63	37	28

$p_{\alpha,\sigma,m}$	EDC_2					EDC_3					EDC_5					EDC_7				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	209	190	86	12	3	218	187	84	9	2	236	182	76	5	1	252	179	65	3	1
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	14	181	109	48	148	16	204	109	47	124	28	255	95	39	83	151	292	52	5	0
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	239	180	59	14	8	240	183	56	14	7	257	175	51	11	6	270	173	44	9	4
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	10	158	110	65	157	10	185	118	65	122	16	222	130	49	83	127	244	109	15	5
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	225	196	58	17	4	235	192	56	13	4	246	190	52	10	2	257	191	46	5	1
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	7	142	105	104	142	8	168	104	97	123	13	203	114	87	83	96	228	117	51	8
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	85	283	91	32	9	92	293	83	25	7	113	297	65	21	4	142	291	54	12	1
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	96	168	93	50	93	108	188	91	45	68	207	201	55	21	16	406	81	13	0	0
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	106	248	101	39	6	121	251	96	28	4	148	251	84	16	1	171	253	67	8	1
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	122	129	74	55	120	132	140	70	51	107	198	147	44	37	74	408	84	7	1	0
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	108	255	91	29	17	128	256	80	23	13	156	256	69	13	6	185	253	52	8	2
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	108	142	83	51	116	119	149	82	45	105	177	152	57	36	78	395	85	17	3	0
$\hat{p}_{1,1,L}$	39	321	94	27	19	50	335	86	20	9	66	359	59	11	5	102	344	46	7	1
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	98	216	86	45	55	115	231	79	37	38	236	215	39	8	2	440	59	1	0	0
$\hat{p}_{1,2,L}$	34	306	106	41	13	47	315	101	32	5	75	337	71	16	1	105	336	50	9	0
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	80	208	94	59	59	98	218	81	52	51	206	210	43	18	23	456	42	2	0	0
$\hat{p}_{1,3,L}$	48	279	110	53	10	58	290	103	41	8	95	296	79	25	5	143	292	54	10	1
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	90	175	98	56	81	100	190	94	43	73	222	181	40	19	38	470	26	4	0	0
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	14	374	86	15	11	26	385	68	12	9	61	384	47	6	2	102	366	30	2	0
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	54	267	101	51	27	76	287	87	36	14	255	210	29	6	0	489	11	0	0	0
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	23	347	91	34	5	28	372	73	23	4	70	369	49	10	2	112	359	25	3	1
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	60	239	111	54	36	78	265	92	43	22	258	206	28	4	4	491	9	0	0	0
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	19	347	104	22	8	30	361	89	17	3	68	370	50	11	1	111	349	36	4	0
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	45	266	120	41	28	60	285	108	28	19	254	209	25	7	5	488	12	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	37	411	44	6	2	79	388	30	2	1	161	325	13	1	0	238	253	9	0	0
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	56	327	74	24	19	120	321	41	11	7	429	70	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	48	411	35	6	0	86	394	19	1	0	177	315	7	1	0	265	234	0	1	0
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	58	327	69	26	20	117	328	43	8	4	426	73	0	1	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	37	390	53	19	1	80	369	37	14	0	169	310	19	2	0	254	234	10	2	0
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	46	335	72	33	14	107	326	44	20	3	429	70	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	107	378	13	2	0	182	307	9	2	0	326	170	3	1	0	421	79	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	115	342	27	7	9	244	241	12	2	1	488	11	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	109	377	12	2	0	205	292	2	1	0	349	151	0	0	0	422	78	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	121	336	31	7	5	263	225	9	3	0	494	6	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	112	375	11	2	0	202	295	3	0	0	335	165	0	0	0	421	79	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	116	337	29	14	4	262	228	6	3	1	495	4	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	170	325	5	0	0	283	216	1	0	0	425	75	0	0	0	484	16	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	165	326	8	1	0	365	135	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,L}$	167	331	1	1	0	264	236	0	0	0	416	84	0	0	0	480	20	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	161	330	5	4	0	338	162	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,L}$	195	297	7	1	0	284	212	4	0	0	440	60	0	0	0	485	15	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	191	293	13	3	0	372	123	5	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0

Analisando os resultados quando o processo gerador de dados é um AR(2) com $n = 100$, observam-se algumas situações interessantes. Por exemplo, quando o valor de $\alpha \geq 1.8$ o critério EDC com $\theta \in \{5, 7\}$ subestima a ordem para a maioria das séries temporais. Não houve um critério uniformemente melhor, contudo os critérios BIC e EDC com $\theta = 2$ apresentam um desempenho satisfatório, principalmente, quando utilizam a formulação que envolve o logaritmo da função de máxima verossimilhança.

Tabela A.9: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 300$, $burn-in = 50$, $re = 500$.

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_\alpha^2)$
1	0.500	0.891	1.000	27.428	-	-0.779	-	-	-	-	-	-	-	-	-1734.616	5.552
2	0.500	1.825	1.000	4.523	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-1693.780	2.015
3	0.500	1.974	1.000	20.746	-	-0.429	-	0.184	-	-0.072	-	-	-	-	-1859.082	4.138
4	0.500	1.987	1.000	19.852	-	-0.240	-	0.253	-	-0.132	-	0.003	-	-	-2016.509	4.589
5	0.500	1.930	1.000	21.661	-	-0.215	-	0.284	-	-0.087	-	0.033	-	0.002	-2436.362	1.196
1	0.500	0.865	2.000	49.058	-	-0.792	-	-	-	-	-	-	-	-	-1937.149	6.748
2	0.500	1.816	2.000	9.260	-0.400	-0.401	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-2028.441	2.819
3	0.500	1.963	2.000	46.499	-	-0.471	-	0.159	-	-0.066	-	-	-	-	-2221.019	4.925
4	0.500	1.977	2.000	37.850	-	-0.259	-	0.267	-	-0.129	-	-0.013	-	-	-2396.136	5.124
5	0.500	1.938	2.000	7.030	-	-0.227	-	0.263	-	-0.089	-	0.036	-	-0.001	-3007.380	1.331
1	0.500	0.817	3.000	57.501	-	-0.807	-	-	-	-	-	-	-	-	-2029.109	7.233
2	0.500	1.808	3.000	13.872	-0.400	-0.400	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-2218.759	3.367
3	0.500	1.956	3.000	57.055	-	-0.463	-	0.182	-	-0.054	-	-	-	-	-2414.011	4.933
4	0.500	1.970	3.000	56.495	-	-0.305	-	0.234	-	-0.113	-	-0.005	-	-	-2586.508	5.373
5	0.500	1.944	3.000	9.172	-	-0.250	-	0.262	-	-0.081	-	0.033	-	0.001	-3336.897	1.346
1	0.800	0.958	1.000	3.292	-	-0.732	-	-	-	-	-	-	-	-	-1121.673	2.105
2	0.800	1.826	1.000	2.685	-0.400	-0.403	0.300	0.299	-	-	-	-	-	-	-1069.621	1.841
3	0.800	1.958	1.000	2.973	-	-0.400	-	0.289	-	-0.009	-	-	-	-	-1110.155	2.021
4	0.800	1.973	1.000	3.377	-	-0.353	-	0.300	-	-0.032	-	-0.004	-	-	-1146.858	2.245
5	0.800	1.960	1.000	2.180	-	-0.372	-	0.287	-	-0.021	-	0.005	-	0.000	-1196.647	1.267
1	0.800	1.006	2.000	6.741	-	-0.737	-	-	-	-	-	-	-	-	-1328.197	3.530
2	0.800	1.850	2.000	5.474	-0.400	-0.401	0.300	0.299	-	-	-	-	-	-	-1296.563	3.203
3	0.800	1.958	2.000	6.092	-	-0.402	-	0.289	-	-0.007	-	-	-	-	-1332.625	3.417
4	0.800	1.958	2.000	6.677	-	-0.372	-	0.284	-	-0.041	-	-0.009	-	-	-1386.479	3.463
5	0.800	1.961	2.000	4.627	-	-0.379	-	0.297	-	-0.031	-	-0.013	-	0.002	-1520.545	2.389
1	0.800	0.995	3.000	9.815	-	-0.738	-	-	-	-	-	-	-	-	-1444.470	4.313
2	0.800	1.821	3.000	8.456	-0.400	-0.400	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-1433.276	4.000
3	0.800	1.960	3.000	9.495	-	-0.413	-	0.282	-	-0.007	-	-	-	-	-1464.821	4.269
4	0.800	1.949	3.000	9.665	-	-0.400	-	0.282	-	-0.029	-	-0.013	-	-	-1547.923	4.028
5	0.800	1.956	3.000	7.296	-	-0.394	-	0.278	-	-0.031	-	-0.007	-	0.002	-1753.284	2.955
1	1.000	1.142	1.000	1.981	-	-0.696	-	-	-	-	-	-	-	-	-921.216	1.231
2	1.000	1.655	1.000	1.733	-0.400	-0.399	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-864.245	0.916
3	1.000	1.891	1.000	1.964	-	-0.399	-	0.299	-	-0.001	-	-	-	-	-901.138	1.270
4	1.000	1.949	1.000	2.081	-	-0.390	-	0.297	-	-0.007	-	0.002	-	-	-912.092	1.406
5	1.000	1.973	1.000	1.882	-	-0.392	-	0.293	-	-0.012	-	0.003	-	0.004	-926.642	1.197
1	1.000	1.123	2.000	3.939	-	-0.697	-	-	-	-	-	-	-	-	-1124.680	2.630
2	1.000	1.722	2.000	3.661	-0.400	-0.398	0.300	0.303	-	-	-	-	-	-	-1087.698	2.448
3	1.000	1.902	2.000	4.061	-	-0.402	-	0.299	-	0.002	-	-	-	-	-1112.583	2.747
4	1.000	1.940	2.000	4.097	-	-0.397	-	0.297	-	-0.008	-	-0.003	-	-	-1127.289	2.735
5	1.000	1.962	2.000	3.928	-	-0.409	-	0.285	-	-0.021	-	-0.008	-	0.004	-1166.581	2.600
1	1.000	1.130	3.000	5.761	-	-0.692	-	-	-	-	-	-	-	-	-1242.097	3.404
2	1.000	1.696	3.000	5.427	-0.400	-0.399	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-1200.343	3.251
3	1.000	1.901	3.000	5.980	-	-0.401	-	0.299	-	0.002	-	-	-	-	-1228.843	3.506
4	1.000	1.927	3.000	6.095	-	-0.406	-	0.284	-	-0.011	-	-0.003	-	-	-1256.706	3.498
5	1.000	1.950	3.000	6.142	-	-0.419	-	0.291	-	-0.005	-	-0.012	-	-0.003	-1307.433	3.451
1	1.200	1.286	1.000	1.484	-	-0.663	-	-	-	-	-	-	-	-	-790.580	0.724
2	1.200	1.550	1.000	1.305	-0.400	-0.395	0.300	0.302	-	-	-	-	-	-	-738.623	0.453
3	1.200	1.758	1.000	1.468	-	-0.401	-	0.298	-	0.002	-	-	-	-	-762.951	0.705
4	1.200	1.888	1.000	1.559	-	-0.395	-	0.304	-	0.006	-	0.004	-	-	-775.382	0.850
5	1.200	1.961	1.000	1.571	-	-0.395	-	0.303	-	-0.001	-	0.004	-	0.004	-783.922	0.882
1	1.200	1.259	2.000	2.872	-	-0.661	-	-	-	-	-	-	-	-	-990.918	2.077
2	1.200	1.532	2.000	2.552	-0.400	-0.397	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-942.400	1.785
3	1.200	1.764	2.000	2.914	-	-0.402	-	0.301	-	0.002	-	-	-	-	-967.614	2.080
4	1.200	1.891	2.000	3.070	-	-0.403	-	0.298	-	0.006	-	0.006	-	-	-980.795	2.199
5	1.200	1.952	2.000	3.114	-	-0.405	-	0.288	-	-0.007	-	0.006	-	0.004	-999.048	2.225
1	1.200	1.256	3.000	4.257	-	-0.658	-	-	-	-	-	-	-	-	-1113.308	2.864
2	1.200	1.512	3.000	3.755	-0.400	-0.397	0.300	0.302	-	-	-	-	-	-	-1061.272	2.567
3	1.200	1.759	3.000	4.350	-	-0.400	-	0.301	-	0.001	-	-	-	-	-1087.837	2.884
4	1.200	1.884	3.000	4.625	-	-0.406	-	0.294	-	0.003	-	0.005	-	-	-1102.840	3.022
5	1.200	1.936	3.000	4.752	-	-0.406	-	0.293	-	0.000	-	-0.003	-	-0.001	-1122.658	3.063

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\ln(\sigma_a^2)$
1	1.500	1.525	1.000	1.178	-	-0.606	-	-	-	-	-	-	-	-	-665.948	0.316
2	1.500	1.599	1.000	1.061	-0.400	-0.403	0.300	0.296	-	-	-	-	-	-	-629.658	0.100
3	1.500	1.705	1.000	1.117	-	-0.402	-	0.301	-	0.004	-	-	-	-	-638.270	0.198
4	1.500	1.811	1.000	1.191	-	-0.400	-	0.299	-	0.008	-	0.004	-	-	-645.602	0.329
5	1.500	1.908	1.000	1.230	-	-0.398	-	0.303	-	0.006	-	0.007	-	0.006	-652.400	0.400
1	1.500	1.529	2.000	2.346	-	-0.599	-	-	-	-	-	-	-	-	-872.316	1.696
2	1.500	1.602	2.000	2.110	-0.400	-0.397	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-836.027	1.478
3	1.500	1.713	2.000	2.225	-	-0.396	-	0.304	-	0.003	-	-	-	-	-844.072	1.581
4	1.500	1.828	2.000	2.370	-	-0.394	-	0.301	-	0.007	-	0.009	-	-	-851.752	1.709
5	1.500	1.904	2.000	2.432	-	-0.393	-	0.302	-	0.003	-	0.008	-	0.005	-857.926	1.764
1	1.500	1.522	3.000	3.497	-	-0.599	-	-	-	-	-	-	-	-	-992.194	2.496
2	1.500	1.628	3.000	3.171	-0.400	-0.396	0.300	0.303	-	-	-	-	-	-	-958.077	2.292
3	1.500	1.697	3.000	3.327	-	-0.395	-	0.303	-	0.001	-	-	-	-	-962.954	2.385
4	1.500	1.814	3.000	3.509	-	-0.395	-	0.302	-	0.007	-	0.005	-	-	-970.817	2.493
5	1.500	1.914	3.000	3.625	-	-0.397	-	0.300	-	0.008	-	0.009	-	0.005	-979.521	2.561
1	1.800	1.809	1.000	1.078	-	-0.576	-	-	-	-	-	-	-	-	-586.024	0.146
2	1.800	1.830	1.000	1.015	-0.400	-0.402	0.300	0.293	-	-	-	-	-	-	-565.856	0.025
3	1.800	1.869	1.000	1.030	-	-0.402	-	0.295	-	0.002	-	-	-	-	-567.128	0.054
4	1.800	1.915	1.000	1.049	-	-0.400	-	0.294	-	0.002	-	0.002	-	-	-569.040	0.090
5	1.800	1.951	1.000	1.064	-	-0.399	-	0.298	-	0.002	-	-0.001	-	0.002	-570.124	0.118
1	1.800	1.814	2.000	2.156	-	-0.577	-	-	-	-	-	-	-	-	-792.703	1.533
2	1.800	1.844	2.000	2.031	-0.400	-0.399	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-772.637	1.413
3	1.800	1.859	2.000	2.039	-	-0.400	-	0.302	-	0.005	-	-	-	-	-772.457	1.421
4	1.800	1.896	2.000	2.071	-	-0.400	-	0.302	-	0.005	-	0.002	-	-	-773.574	1.452
5	1.800	1.933	2.000	2.096	-	-0.399	-	0.302	-	0.007	-	0.008	-	0.005	-774.463	1.477
1	1.800	1.815	3.000	3.236	-	-0.572	-	-	-	-	-	-	-	-	-914.385	2.345
2	1.800	1.844	3.000	3.054	-0.400	-0.398	0.300	0.298	-	-	-	-	-	-	-894.849	2.228
3	1.800	1.865	3.000	3.073	-	-0.396	-	0.299	-	-0.001	-	-	-	-	-894.883	2.241
4	1.800	1.906	3.000	3.117	-	-0.397	-	0.298	-	-0.003	-	-0.003	-	-	-896.084	2.270
5	1.800	1.934	3.000	3.141	-	-0.396	-	0.301	-	-0.001	-	0.003	-	0.006	-896.559	2.285
1	2.000	1.994	1.000	1.042	-	-0.569	-	-	-	-	-	-	-	-	-542.286	0.079
2	2.000	1.992	1.000	0.995	-0.400	-0.405	0.300	0.288	-	-	-	-	-	-	-528.904	-0.012
3	2.000	1.991	1.000	0.993	-	-0.406	-	0.289	-	0.003	-	-	-	-	-528.431	-0.016
4	2.000	1.991	1.000	0.991	-	-0.406	-	0.290	-	0.002	-	-0.003	-	-	-527.885	-0.020
5	2.000	1.991	1.000	0.990	-	-0.406	-	0.290	-	0.001	-	-0.001	-	0.005	-527.427	-0.023
1	2.000	1.994	2.000	2.079	-	-0.561	-	-	-	-	-	-	-	-	-749.784	1.462
2	2.000	1.991	2.000	1.987	-0.400	-0.400	0.300	0.287	-	-	-	-	-	-	-736.443	1.371
3	2.000	1.987	2.000	1.981	-	-0.401	-	0.287	-	0.002	-	-	-	-	-736.005	1.366
4	2.000	1.988	2.000	1.979	-	-0.401	-	0.290	-	-0.001	-	-0.007	-	-	-735.527	1.363
5	2.000	1.985	2.000	1.974	-	-0.401	-	0.289	-	-0.001	-	-0.007	-	-0.001	-735.121	1.359
1	2.000	1.992	3.000	3.123	-	-0.566	-	-	-	-	-	-	-	-	-872.218	2.276
2	2.000	1.990	3.000	2.982	-0.400	-0.401	0.300	0.294	-	-	-	-	-	-	-858.347	2.184
3	2.000	1.984	3.000	2.970	-	-0.402	-	0.295	-	0.002	-	-	-	-	-857.872	2.175
4	2.000	1.984	3.000	2.965	-	-0.402	-	0.297	-	0.000	-	-0.007	-	-	-857.404	2.172
5	2.000	1.979	3.000	2.956	-	-0.402	-	0.296	-	0.001	-	-0.008	-	-0.004	-857.016	2.166

Tabela A.10: Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(2) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.9.

$p_{\alpha,\sigma,m}$	AIC					BIC					HQC					$EDC_{0.25}$					$EDC_{0.5}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	171	217	88	15	9	176	216	87	13	8	173	216	87	15	9	171	217	88	15	9	171	217	88	15	9
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	4	158	62	35	241	4	169	64	35	228	4	161	65	35	235	4	159	63	35	239	4	160	65	35	236
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	206	191	75	22	6	208	192	73	22	5	206	191	75	22	6	202	192	77	23	6	206	191	75	22	6
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	3	153	75	35	234	3	165	75	34	223	3	161	75	34	227	3	153	75	35	234	3	153	76	35	233
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	229	186	59	18	8	232	186	56	18	8	229	186	59	18	8	228	185	60	19	8	229	186	59	18	8
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	5	131	88	52	224	5	144	89	47	215	5	133	88	53	221	5	131	88	52	224	5	132	88	52	223
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	118	237	75	48	22	127	249	69	40	15	122	241	72	45	20	115	237	77	48	23	118	236	76	48	22
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	91	77	48	42	242	92	83	47	42	236	91	79	48	42	240	91	77	48	42	242	91	77	48	42	242
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	107	208	99	66	20	118	211	95	61	15	110	208	98	65	19	103	208	99	69	21	107	208	99	65	21
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	110	73	42	61	214	111	80	44	59	206	111	76	44	59	210	110	73	42	61	214	111	74	43	60	212
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	111	200	99	76	14	122	199	94	72	13	116	199	96	75	14	110	199	101	76	14	111	200	99	76	14
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	97	74	43	86	200	100	78	45	81	196	97	75	44	85	199	97	74	43	86	200	97	74	43	86	200
$\hat{p}_{1,1,L}$	82	290	57	54	17	97	301	53	39	10	88	294	54	50	14	79	281	58	58	24	80	287	57	56	20
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	150	165	51	41	93	152	170	53	39	86	150	167	51	41	91	150	165	51	41	93	150	167	51	40	92
$\hat{p}_{1,2,L}$	79	222	77	95	27	92	228	73	84	23	84	225	78	90	23	70	219	80	101	30	76	222	78	96	28
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	176	144	46	60	74	181	145	48	56	70	177	145	46	58	74	177	144	46	59	74	177	144	46	59	74
$\hat{p}_{1,3,L}$	56	228	89	98	29	73	231	86	87	23	65	230	86	94	25	52	227	88	99	34	54	228	88	99	31
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	173	147	54	56	70	177	148	54	55	66	175	148	53	55	69	173	147	55	56	69	173	148	55	55	69
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	32	323	80	51	14	36	344	70	42	8	34	335	74	48	9	32	308	78	63	19	32	321	80	53	14
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	97	237	85	44	37	104	241	82	40	33	101	239	83	42	35	97	237	85	44	37	100	238	84	42	36
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	24	315	94	57	10	31	328	88	50	3	26	320	92	55	7	22	305	100	62	11	23	311	96	60	10
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	108	241	81	38	32	108	247	76	38	31	108	244	79	37	32	108	241	81	38	32	108	242	80	38	32
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	20	304	93	64	19	25	319	86	56	14	21	315	88	59	17	19	294	98	67	22	20	300	96	65	19
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	107	238	84	44	27	113	240	81	40	26	110	237	84	42	27	107	238	84	44	27	108	238	84	43	27
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	8	358	95	30	9	10	404	61	22	3	8	385	72	29	6	8	313	119	44	16	8	349	95	36	12
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	29	273	110	60	28	32	306	97	44	21	30	291	102	52	25	29	273	110	60	28	29	281	108	56	26
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	5	351	98	40	6	7	394	65	31	3	6	379	76	34	5	5	310	118	54	13	5	343	101	44	7
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	28	256	126	61	29	37	302	93	49	19	31	288	104	51	26	28	257	126	60	29	30	261	122	59	28
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	1	327	118	45	9	3	366	97	31	3	2	350	105	38	5	0	275	141	68	16	1	319	121	50	9
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	36	250	127	58	29	41	298	97	43	21	39	271	115	50	25	36	252	127	56	29	36	256	124	56	28
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	1	370	92	28	9	2	452	41	4	1	2	421	64	11	2	0	277	123	66	34	1	360	96	32	11
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	19	264	115	69	33	23	363	69	28	17	19	323	91	41	26	19	265	114	69	33	19	281	111	59	30
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	0	342	99	43	16	1	424	64	10	1	1	393	80	23	3	0	242	134	85	39	0	329	106	45	20
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	8	254	115	75	48	19	335	95	36	15	9	306	103	52	30	8	256	114	74	48	8	272	113	69	38
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	0	337	113	36	14	4	426	61	8	1	1	381	98	15	5	0	225	136	85	54	0	321	116	43	20
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	8	266	118	67	41	12	342	99	31	16	9	310	106	49	26	8	271	116	67	38	9	280	115	64	32
$\hat{p}_{2,1,L}$	0	384	57	35	24	1	489	9	1	0	0	457	31	9	3	0	220	80	94	106	0	364	58	43	35
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	2	338	80	50	30	4	486	8	2	0	2	441	39	13	5	2	345	78	47	28	2	382	63	34	19
$\hat{p}_{2,2,L}$	0	382	65	34	19	4	490	6	0	0	1	454	34	7	4	0	228	84	92	96	0	360	66	46	28
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	4	265	137	50	44	8	466	24	1	1	4	406	72	14	4	4	275	133	50	38	4	326	114	32	24
$\hat{p}_{2,3,L}$	0	392	58	29	21	0	483	16	1	0	0	451	37	8	4	0	220	92	96	92	0	366	68	39	27
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	4	170	158	86	82	4	435	57	3	1	4	338	110	32	16	4	181	161	81	73	4	236	145	61	54

$p_{\alpha,\sigma,m}$	EDC_2					EDC_3					EDC_5					EDC_7				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	176	216	87	13	8	182	215	84	11	8	185	215	84	9	7	194	213	78	8	7
$\hat{p}_{0.5,1,\sigma}$	4	174	64	34	224	4	203	62	34	197	6	257	65	32	140	34	291	66	21	88
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	211	191	71	22	5	215	190	69	21	5	220	189	67	20	4	227	187	64	18	4
$\hat{p}_{0.5,2,\sigma}$	3	167	75	34	221	3	185	77	36	199	4	239	83	24	150	8	270	78	23	121
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	232	187	55	18	8	235	186	54	17	8	240	187	51	15	7	247	188	47	13	5
$\hat{p}_{0.5,3,\sigma}$	5	148	89	47	211	5	165	94	47	189	5	217	97	35	146	9	249	98	31	113
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	134	250	68	37	11	150	247	60	34	9	164	247	53	29	7	180	249	45	21	5
$\hat{p}_{0.8,1,\sigma}$	93	86	48	40	233	101	101	41	37	220	138	110	49	26	177	331	134	19	9	7
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	121	211	92	61	15	128	213	89	55	15	141	217	83	48	11	164	218	69	40	9
$\hat{p}_{0.8,2,\sigma}$	111	81	45	58	205	112	92	43	57	196	142	104	36	45	173	282	102	25	31	60
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	125	198	94	70	13	129	204	89	67	11	149	208	83	53	7	175	204	72	44	5
$\hat{p}_{0.8,3,\sigma}$	102	79	45	80	194	105	86	42	77	190	133	91	38	66	172	207	87	22	63	121
$\hat{p}_{1,1,L}$	99	302	51	38	10	109	306	51	27	7	124	312	46	14	4	139	311	36	10	4
$\hat{p}_{1,1,\sigma}$	156	169	55	39	81	164	180	53	33	70	219	187	41	22	31	339	143	18	0	0
$\hat{p}_{1,2,L}$	96	228	73	81	22	103	234	69	74	20	132	247	59	52	10	155	251	50	38	6
$\hat{p}_{1,2,\sigma}$	182	146	48	56	68	195	152	45	49	59	234	161	36	28	41	382	95	7	11	5
$\hat{p}_{1,3,L}$	77	231	85	85	22	84	237	79	80	20	108	248	69	63	12	132	256	56	47	9
$\hat{p}_{1,3,\sigma}$	180	149	55	52	64	188	152	54	47	59	230	168	36	25	41	359	98	8	14	21
$\hat{p}_{1,2,1,L}$	38	351	67	37	7	46	364	61	26	3	57	367	60	14	2	65	363	60	11	1
$\hat{p}_{1,2,1,\sigma}$	106	242	80	39	33	119	247	80	32	22	169	254	59	13	5	403	91	6	0	0
$\hat{p}_{1,2,2,L}$	32	332	87	46	3	38	336	81	42	3	55	346	74	24	1	69	349	66	15	1
$\hat{p}_{1,2,2,\sigma}$	109	248	77	37	29	120	252	76	26	26	159	260	47	18	16	395	98	6	0	1
$\hat{p}_{1,2,3,L}$	28	320	88	50	14	31	335	81	45	8	42	354	74	25	5	52	365	66	16	1
$\hat{p}_{1,2,3,\sigma}$	113	240	82	39	26	122	245	78	33	22	161	264	51	12	12	398	90	9	3	0
$\hat{p}_{1,5,1,L}$	12	407	58	21	2	13	411	56	18	2	22	422	44	11	1	29	424	38	9	0
$\hat{p}_{1,5,1,\sigma}$	33	315	92	42	18	41	333	80	33	13	159	309	28	4	0	484	16	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,2,L}$	8	397	65	28	2	9	406	62	22	1	14	422	50	13	1	29	422	40	9	0
$\hat{p}_{1,5,2,\sigma}$	38	317	85	43	17	42	345	71	30	12	149	324	24	3	0	486	14	0	0	0
$\hat{p}_{1,5,3,L}$	3	370	95	29	3	10	379	93	17	1	21	396	71	12	0	37	394	62	7	0
$\hat{p}_{1,5,3,\sigma}$	42	309	93	40	16	56	330	73	29	12	154	320	22	1	3	492	8	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,L}$	4	457	36	2	1	10	462	27	1	0	38	447	15	0	0	95	400	5	0	0
$\hat{p}_{1,8,1,\sigma}$	25	377	64	22	12	52	386	46	11	5	397	103	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,2,L}$	4	432	59	5	0	12	436	48	4	0	46	431	22	1	0	106	386	8	0	0
$\hat{p}_{1,8,2,\sigma}$	23	345	94	28	10	52	368	66	11	3	388	111	1	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{1,8,3,L}$	4	434	54	7	1	11	445	39	5	0	36	444	20	0	0	116	377	7	0	0
$\hat{p}_{1,8,3,\sigma}$	14	359	88	29	10	39	389	58	12	2	392	108	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	3	492	4	1	0	17	483	0	0	0	93	407	0	0	0	217	283	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,\sigma}$	7	487	4	2	0	46	454	0	0	0	493	7	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,L}$	6	489	5	0	0	17	483	0	0	0	96	404	0	0	0	219	281	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,\sigma}$	9	476	14	1	0	51	446	3	0	0	490	10	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,L}$	4	486	9	1	0	11	488	1	0	0	80	420	0	0	0	200	300	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,\sigma}$	6	448	43	3	0	43	453	4	0	0	495	5	0	0	0	500	0	0	0	0

Para o cenário em que as simulações de Monte Carlo foram geradas a partir de $AR(2) - S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 300$, percebe-se que o desempenho dos critérios de seleção de modelos no caso em que a formulação utiliza $\ln(\hat{\sigma}_\alpha^2)$ é muito ruim para as séries temporais geradas com $\alpha = 0.8$, pior do que quando o valor de α é 0.5. Não se observa um critério com um desempenho superior em todos os casos, porém o critério EDC com $\theta \in \{2, 3\}$ apresenta um desempenho de razoável para muito bom dependendo do valor de α .

Tabela A.11: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso AR(2) - $S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 500$, $burn-in = 100$, $re = 500$.

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_\alpha^2)$
1	0.500	0.903	1.000	26.640	-	-0.776	-	-	-	-	-	-	-	-	-2912.599	5.728
2	0.500	1.824	1.000	3.619	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-2880.256	1.608
3	0.500	1.970	1.000	22.788	-	-0.424	-	0.169	-	-0.087	-	-	-	-	-3096.029	4.746
4	0.500	1.990	1.000	22.500	-	-0.232	-	0.267	-	-0.142	-	-0.011	-	-	-3331.738	5.165
5	0.500	1.934	1.000	3.534	-	-0.180	-	0.311	-	-0.088	-	0.031	-	0.001	-4141.387	1.007
1	0.500	0.799	2.000	44.770	-	-0.805	-	-	-	-	-	-	-	-	-3225.186	6.662
2	0.500	1.819	2.000	8.151	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-3432.173	2.536
3	0.500	1.959	2.000	45.463	-	-0.486	-	0.145	-	-0.067	-	-	-	-	-3571.236	5.605
4	0.500	1.985	2.000	50.366	-	-0.271	-	0.254	-	-0.154	-	-0.032	-	-	-3899.049	6.086
5	0.500	1.917	2.000	6.477	-	-0.196	-	0.304	-	-0.075	-	0.036	-	-0.001	-5012.670	1.220
1	0.500	0.785	3.000	57.770	-	-0.812	-	-	-	-	-	-	-	-	-3399.979	7.238
2	0.500	1.800	3.000	12.893	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-3729.997	3.107
3	0.500	1.949	3.000	71.386	-	-0.504	-	0.156	-	-0.047	-	-	-	-	-3931.738	5.809
4	0.500	1.976	3.000	69.753	-	-0.296	-	0.212	-	-0.160	-	-0.024	-	-	-4225.881	6.448
5	0.500	1.919	3.000	9.011	-	-0.210	-	0.290	-	-0.077	-	0.037	-	-0.001	-5696.890	1.179
1	0.800	0.954	1.000	3.380	-	-0.748	-	-	-	-	-	-	-	-	-1886.298	2.152
2	0.800	1.861	1.000	2.725	-0.400	-0.400	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-1802.167	1.875
3	0.800	1.972	1.000	2.981	-	-0.399	-	0.294	-	-0.006	-	-	-	-	-1853.361	2.069
4	0.800	1.984	1.000	3.397	-	-0.354	-	0.301	-	-0.036	-	-0.007	-	-	-1923.849	2.247
5	0.800	1.980	1.000	1.942	-	-0.383	-	0.276	-	-0.027	-	0.007	-	0.004	-2031.730	1.064
1	0.800	0.976	2.000	6.638	-	-0.748	-	-	-	-	-	-	-	-	-2225.092	3.512
2	0.800	1.867	2.000	5.654	-0.400	-0.397	0.300	0.303	-	-	-	-	-	-	-2169.075	3.320
3	0.800	1.973	2.000	6.098	-	-0.408	-	0.284	-	-0.008	-	-	-	-	-2218.298	3.495
4	0.800	1.975	2.000	6.724	-	-0.383	-	0.288	-	-0.036	-	-0.012	-	-	-2314.149	3.520
5	0.800	1.976	2.000	3.903	-	-0.403	-	0.273	-	-0.024	-	-0.001	-	0.003	-2596.365	2.020
1	0.800	1.000	3.000	10.715	-	-0.739	-	-	-	-	-	-	-	-	-2417.338	4.507
2	0.800	1.874	3.000	8.471	-0.400	-0.399	0.300	0.299	-	-	-	-	-	-	-2408.258	4.073
3	0.800	1.976	3.000	9.087	-	-0.410	-	0.290	-	-0.002	-	-	-	-	-2437.908	4.232
4	0.800	1.947	3.000	9.279	-	-0.386	-	0.286	-	-0.038	-	-0.014	-	-	-2563.429	4.029
5	0.800	1.958	3.000	6.215	-	-0.398	-	0.273	-	-0.040	-	-0.011	-	0.001	-2988.391	2.559
1	1.000	1.129	1.000	1.941	-	-0.704	-	-	-	-	-	-	-	-	-1537.032	1.202
2	1.000	1.758	1.000	1.830	-0.400	-0.395	0.300	0.303	-	-	-	-	-	-	-1463.936	1.093
3	1.000	1.945	1.000	1.985	-	-0.400	-	0.301	-	0.002	-	-	-	-	-1509.635	1.335
4	1.000	1.971	1.000	2.008	-	-0.393	-	0.301	-	-0.004	-	0.001	-	-	-1526.103	1.342
5	1.000	1.986	1.000	1.791	-	-0.397	-	0.292	-	-0.008	-	0.003	-	0.002	-1554.930	1.097
1	1.000	1.130	2.000	3.950	-	-0.710	-	-	-	-	-	-	-	-	-1872.603	2.650
2	1.000	1.787	2.000	3.690	-0.400	-0.400	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-1818.791	2.496
3	1.000	1.939	2.000	3.986	-	-0.401	-	0.299	-	0.000	-	-	-	-	-1850.498	2.725
4	1.000	1.960	2.000	3.981	-	-0.401	-	0.291	-	-0.013	-	-0.005	-	-	-1885.962	2.679
5	1.000	1.973	2.000	3.733	-	-0.410	-	0.293	-	-0.012	-	-0.006	-	0.005	-1961.422	2.472
1	1.000	1.138	3.000	5.844	-	-0.711	-	-	-	-	-	-	-	-	-2075.114	3.429
2	1.000	1.806	3.000	5.610	-0.400	-0.400	0.300	0.302	-	-	-	-	-	-	-2027.001	3.345
3	1.000	1.955	3.000	6.063	-	-0.408	-	0.298	-	0.003	-	-	-	-	-2059.105	3.565
4	1.000	1.941	3.000	6.093	-	-0.422	-	0.274	-	-0.013	-	-0.005	-	-	-2106.371	3.520
5	1.000	1.969	3.000	5.985	-	-0.417	-	0.284	-	-0.007	-	-0.016	-	-0.009	-2203.713	3.376
1	1.200	1.281	1.000	1.481	-	-0.662	-	-	-	-	-	-	-	-	-1320.487	0.729
2	1.200	1.654	1.000	1.384	-0.400	-0.397	0.300	0.302	-	-	-	-	-	-	-1252.523	0.570
3	1.200	1.888	1.000	1.553	-	-0.398	-	0.304	-	0.003	-	-	-	-	-1295.792	0.845
4	1.200	1.956	1.000	1.581	-	-0.395	-	0.303	-	0.004	-	0.004	-	-	-1308.018	0.895
5	1.200	1.985	1.000	1.567	-	-0.400	-	0.297	-	0.002	-	0.004	-	0.001	-1317.178	0.883
1	1.200	1.249	2.000	2.887	-	-0.665	-	-	-	-	-	-	-	-	-1658.766	2.084
2	1.200	1.632	2.000	2.706	-0.400	-0.401	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-1591.767	1.916
3	1.200	1.884	2.000	3.098	-	-0.397	-	0.302	-	0.001	-	-	-	-	-1638.254	2.224
4	1.200	1.947	2.000	3.168	-	-0.407	-	0.294	-	0.009	-	0.008	-	-	-1650.661	2.285
5	1.200	1.977	2.000	3.224	-	-0.407	-	0.294	-	-0.005	-	0.002	-	0.004	-1671.156	2.317
1	1.200	1.265	3.000	4.310	-	-0.669	-	-	-	-	-	-	-	-	-1858.299	2.894
2	1.200	1.650	3.000	4.041	-0.400	-0.399	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-1790.895	2.721
3	1.200	1.888	3.000	4.625	-	-0.399	-	0.303	-	0.005	-	-	-	-	-1834.471	3.030
4	1.200	1.939	3.000	4.722	-	-0.408	-	0.292	-	0.002	-	0.003	-	-	-1847.639	3.082
5	1.200	1.967	3.000	4.815	-	-0.405	-	0.289	-	-0.008	-	0.001	-	0.002	-1880.510	3.109

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\ln(\sigma_a^2)$
1	1.500	1.542	1.000	1.174	-	-0.614	-	-	-	-	-	-	-	-	-1108.365	0.312
2	1.500	1.704	1.000	1.119	-0.400	-0.399	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-1059.893	0.204
3	1.500	1.838	1.000	1.194	-	-0.401	-	0.302	-	0.007	-	-	-	-	-1076.717	0.336
4	1.500	1.935	1.000	1.247	-	-0.399	-	0.301	-	0.009	-	0.007	-	-	-1089.656	0.429
5	1.500	1.973	1.000	1.257	-	-0.399	-	0.300	-	0.003	-	0.005	-	0.005	-1093.453	0.450
1	1.500	1.539	2.000	2.369	-	-0.607	-	-	-	-	-	-	-	-	-1456.276	1.716
2	1.500	1.712	2.000	2.236	-0.400	-0.397	0.300	0.303	-	-	-	-	-	-	-1407.396	1.591
3	1.500	1.829	2.000	2.361	-	-0.397	-	0.310	-	0.007	-	-	-	-	-1420.280	1.703
4	1.500	1.924	2.000	2.452	-	-0.396	-	0.306	-	0.012	-	0.010	-	-	-1433.984	1.782
5	1.500	1.958	2.000	2.494	-	-0.398	-	0.303	-	0.008	-	0.009	-	0.004	-1438.443	1.819
1	1.500	1.520	3.000	3.493	-	-0.612	-	-	-	-	-	-	-	-	-1651.780	2.496
2	1.500	1.719	3.000	3.354	-0.400	-0.396	0.300	0.303	-	-	-	-	-	-	-1608.185	2.403
3	1.500	1.799	3.000	3.477	-	-0.394	-	0.307	-	0.006	-	-	-	-	-1614.523	2.477
4	1.500	1.919	3.000	3.659	-	-0.396	-	0.306	-	0.009	-	0.006	-	-	-1626.672	2.586
5	1.500	1.956	3.000	3.705	-	-0.397	-	0.305	-	0.007	-	0.007	-	0.006	-1633.590	2.614
1	1.800	1.808	1.000	1.078	-	-0.580	-	-	-	-	-	-	-	-	-976.703	0.148
2	1.800	1.855	1.000	1.020	-0.400	-0.400	0.300	0.298	-	-	-	-	-	-	-944.226	0.037
3	1.800	1.913	1.000	1.046	-	-0.399	-	0.298	-	0.001	-	-	-	-	-948.141	0.087
4	1.800	1.952	1.000	1.061	-	-0.398	-	0.299	-	0.005	-	0.005	-	-	-951.049	0.116
5	1.800	1.976	1.000	1.069	-	-0.399	-	0.301	-	0.004	-	0.005	-	0.006	-952.284	0.131
1	1.800	1.815	2.000	2.163	-	-0.572	-	-	-	-	-	-	-	-	-1323.650	1.540
2	1.800	1.876	2.000	2.058	-0.400	-0.396	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-1293.009	1.440
3	1.800	1.902	2.000	2.084	-	-0.396	-	0.304	-	0.006	-	-	-	-	-1293.206	1.465
4	1.800	1.951	2.000	2.120	-	-0.394	-	0.304	-	0.006	-	0.002	-	-	-1296.418	1.500
5	1.800	1.962	2.000	2.128	-	-0.397	-	0.301	-	0.005	-	0.004	-	0.002	-1296.764	1.508
1	1.800	1.816	3.000	3.250	-	-0.576	-	-	-	-	-	-	-	-	-1526.533	2.355
2	1.800	1.870	3.000	3.089	-0.400	-0.398	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-1494.634	2.252
3	1.800	1.901	3.000	3.119	-	-0.397	-	0.306	-	0.006	-	-	-	-	-1495.011	2.272
4	1.800	1.940	3.000	3.166	-	-0.399	-	0.305	-	0.004	-	-0.003	-	-	-1497.242	2.303
5	1.800	1.961	3.000	3.182	-	-0.398	-	0.304	-	0.004	-	0.002	-	0.004	-1497.629	2.313
1	2.000	1.995	1.000	1.044	-	-0.568	-	-	-	-	-	-	-	-	-904.894	0.084
2	2.000	1.992	1.000	0.996	-0.400	-0.400	0.300	0.295	-	-	-	-	-	-	-881.779	-0.011
3	2.000	1.991	1.000	0.994	-	-0.401	-	0.296	-	0.001	-	-	-	-	-881.312	-0.013
4	2.000	1.991	1.000	0.994	-	-0.401	-	0.297	-	-0.001	-	-0.004	-	-	-880.862	-0.014
5	2.000	1.991	1.000	0.992	-	-0.401	-	0.296	-	-0.001	-	-0.002	-	0.003	-880.374	-0.017
1	2.000	1.995	2.000	2.092	-	-0.567	-	-	-	-	-	-	-	-	-1252.799	1.476
2	2.000	1.992	2.000	1.996	-0.400	-0.401	0.300	0.294	-	-	-	-	-	-	-1229.689	1.381
3	2.000	1.986	2.000	1.990	-	-0.401	-	0.294	-	-0.001	-	-	-	-	-1229.357	1.376
4	2.000	1.988	2.000	1.990	-	-0.401	-	0.295	-	-0.002	-	-0.002	-	-	-1228.863	1.375
5	2.000	1.984	2.000	1.984	-	-0.401	-	0.293	-	-0.003	-	-0.004	-	-0.003	-1228.530	1.370
1	2.000	1.995	3.000	3.129	-	-0.569	-	-	-	-	-	-	-	-	-1454.162	2.281
2	2.000	1.990	3.000	2.987	-0.400	-0.404	0.300	0.292	-	-	-	-	-	-	-1431.441	2.187
3	2.000	1.984	3.000	2.976	-	-0.405	-	0.293	-	0.004	-	-	-	-	-1431.057	2.181
4	2.000	1.983	3.000	2.974	-	-0.405	-	0.292	-	0.004	-	0.002	-	-	-1430.653	2.179
5	2.000	1.977	3.000	2.965	-	-0.407	-	0.292	-	0.004	-	-0.003	-	-0.004	-1430.448	2.172

Tabela A.12: Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(2) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.11.

$p_{\alpha,\sigma,m}$	AIC					BIC					HQC					$EDC_{0.25}$					$EDC_{0.5}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	173	175	119	26	7	174	175	119	25	7	173	175	120	25	7	172	175	120	26	7	173	175	119	26	7
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	1	190	38	5	266	1	196	40	6	257	1	193	38	5	263	1	190	38	5	266	1	191	38	5	265
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	209	165	95	22	9	211	165	94	21	9	209	165	95	22	9	209	165	95	22	9	209	165	95	22	9
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	3	173	39	22	263	3	185	39	21	252	3	177	39	21	260	3	174	39	22	262	3	174	39	22	262
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	221	187	67	18	7	223	186	66	18	7	221	187	67	18	7	219	187	69	18	7	221	187	67	18	7
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	2	143	54	32	269	2	150	57	34	257	2	145	54	32	267	2	143	54	32	269	2	145	54	32	267
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	93	252	106	39	10	97	259	101	33	10	95	253	104	38	10	91	251	107	41	10	93	252	106	39	10
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	74	61	33	51	281	75	63	35	50	277	75	62	33	51	279	74	61	33	51	281	74	61	33	51	281
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	108	226	108	43	15	121	229	104	34	12	114	224	107	42	13	104	225	110	46	15	106	226	109	44	15
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	99	60	30	53	258	101	61	30	53	255	101	61	30	53	255	99	61	30	53	257	100	61	30	53	256
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	106	175	114	79	26	112	177	113	76	22	109	175	113	78	25	104	173	115	82	26	106	175	114	79	26
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	70	59	42	80	249	72	62	41	79	246	71	61	41	79	248	70	59	42	80	249	70	59	42	80	249
$\hat{p}_{1,1,L}$	89	248	66	77	20	103	260	60	61	16	93	254	64	72	17	86	244	68	81	21	89	248	66	77	20
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	159	119	34	51	137	166	123	32	51	128	164	120	34	50	132	161	119	34	51	135	162	120	34	50	134
$\hat{p}_{1,2,L}$	67	179	104	116	34	80	188	110	98	24	72	181	106	112	29	61	178	105	120	36	66	179	104	117	34
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	172	125	47	57	99	177	127	47	54	95	174	125	47	55	99	172	125	47	57	99	173	125	47	56	99
$\hat{p}_{1,3,L}$	60	165	112	131	32	68	170	110	127	25	62	166	112	131	29	56	166	112	133	33	60	165	111	132	32
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	206	107	42	69	76	213	108	41	64	74	209	108	42	66	75	206	107	42	69	76	208	107	42	68	75
$\hat{p}_{1,2,1,L}$	88	279	76	49	8	99	289	67	40	5	92	284	74	43	7	81	275	78	54	12	87	279	76	49	9
$\hat{p}_{1,2,1,\hat{\sigma}}$	167	198	57	38	40	175	198	57	36	34	173	197	57	37	36	167	198	57	38	40	168	200	57	37	38
$\hat{p}_{1,2,2,L}$	51	302	62	72	13	60	310	63	59	8	54	306	63	67	10	49	299	63	75	14	50	302	62	73	13
$\hat{p}_{1,2,2,\hat{\sigma}}$	182	212	52	30	24	185	213	51	30	21	184	212	51	30	23	182	212	52	30	24	182	212	52	31	23
$\hat{p}_{1,2,3,L}$	35	276	73	84	32	43	287	70	76	24	38	282	73	81	26	26	274	75	89	36	35	275	74	84	32
$\hat{p}_{1,2,3,\hat{\sigma}}$	177	210	55	30	28	182	213	56	27	22	180	212	56	28	24	177	210	55	31	27	178	210	55	31	26
$\hat{p}_{1,5,1,L}$	29	319	102	32	18	41	342	83	26	8	33	332	95	27	13	26	308	109	37	20	29	318	102	33	18
$\hat{p}_{1,5,1,\hat{\sigma}}$	107	237	95	42	19	112	247	90	36	15	107	242	95	39	17	107	237	95	42	19	107	239	95	41	18
$\hat{p}_{1,5,2,L}$	11	286	132	46	25	19	314	128	32	7	12	302	132	38	16	8	275	137	51	29	11	285	133	46	25
$\hat{p}_{1,5,2,\hat{\sigma}}$	104	224	116	40	16	110	235	109	33	13	108	227	114	36	15	104	225	116	39	16	106	225	114	39	16
$\hat{p}_{1,5,3,L}$	10	270	134	64	22	15	281	136	56	12	11	276	135	60	18	7	263	138	68	24	10	270	134	64	22
$\hat{p}_{1,5,3,\hat{\sigma}}$	105	221	115	41	18	115	227	111	35	12	110	223	113	38	16	105	222	114	41	18	105	222	114	41	18
$\hat{p}_{1,8,1,L}$	1	364	96	29	10	2	421	61	15	1	2	400	75	19	4	1	312	118	49	20	1	359	97	32	11
$\hat{p}_{1,8,1,\hat{\sigma}}$	28	296	105	55	16	40	329	85	37	9	34	310	94	49	13	28	299	104	53	16	29	302	101	53	15
$\hat{p}_{1,8,2,L}$	1	285	154	33	27	3	354	122	16	5	2	323	139	24	12	0	249	163	44	44	1	279	158	34	28
$\hat{p}_{1,8,2,\hat{\sigma}}$	25	235	152	52	36	39	273	132	35	21	30	251	141	46	32	25	237	152	51	35	27	241	149	49	34
$\hat{p}_{1,8,3,L}$	0	298	116	51	35	1	350	107	39	3	0	318	117	45	20	0	252	128	66	54	0	296	116	51	37
$\hat{p}_{1,8,3,\hat{\sigma}}$	25	254	126	61	34	36	300	114	37	13	33	275	123	51	18	26	255	125	60	34	29	258	125	59	29
$\hat{p}_{2,1,L}$	0	382	68	28	22	0	496	4	0	0	0	468	26	4	2	0	203	96	93	108	0	366	68	35	31
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	0	294	121	39	46	0	482	14	2	2	0	429	58	8	5	0	314	117	34	35	0	348	103	27	22
$\hat{p}_{2,2,L}$	0	412	50	22	16	0	499	1	0	0	0	476	18	4	2	0	237	93	79	91	0	390	58	30	22
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	0	95	225	58	122	0	446	47	4	3	0	289	160	22	29	0	107	228	54	111	0	161	220	46	73
$\hat{p}_{2,3,L}$	0	388	61	34	17	0	495	5	0	0	0	468	25	7	0	0	239	90	90	81	0	366	69	39	26
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	0	72	164	113	151	1	358	117	12	12	1	208	178	61	52	0	86	168	110	136	1	125	176	94	104

$p_{\alpha,\sigma,m}$	EDC_2					EDC_3					EDC_5					EDC_7				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	175	175	119	24	7	178	174	118	23	7	186	171	115	21	7	191	172	112	18	7
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	1	199	40	6	254	1	221	41	6	231	2	303	37	6	152	5	332	34	7	122
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	212	165	94	20	9	215	165	92	19	9	221	163	91	16	9	223	165	89	16	7
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	3	186	39	21	251	3	197	40	20	240	3	252	41	17	187	6	287	44	18	145
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	223	186	66	18	7	225	185	65	18	7	225	187	64	17	7	227	187	62	17	7
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	2	152	58	33	255	2	172	60	31	235	2	234	66	27	171	6	261	80	19	134
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	97	262	99	33	9	102	265	97	29	7	119	275	84	19	3	128	278	77	15	2
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	75	64	35	51	275	76	68	35	52	269	98	93	31	42	236	260	119	33	19	69
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	124	229	102	33	12	125	230	102	33	10	137	228	99	28	8	148	229	90	25	8
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	102	62	29	52	255	106	63	28	51	252	120	73	29	46	232	176	80	17	38	189
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	114	179	113	73	21	119	184	111	69	17	131	182	110	63	14	149	183	98	56	14
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	72	63	42	79	244	77	72	40	70	241	99	81	38	60	222	130	94	29	53	194
$\hat{p}_{1,1,L}$	103	261	61	61	14	110	268	56	53	13	124	282	47	39	8	145	286	39	25	5
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	167	124	32	51	126	182	129	29	45	115	218	139	31	34	78	340	141	12	4	3
$\hat{p}_{1,2,L}$	84	190	110	93	23	96	198	105	82	19	116	214	92	63	15	141	217	83	50	9
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	177	127	48	54	94	184	129	47	50	90	213	153	30	31	73	288	129	17	24	42
$\hat{p}_{1,3,L}$	71	172	110	124	23	80	181	103	118	18	104	189	87	105	15	136	198	71	87	8
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	213	108	41	64	74	217	114	42	59	68	253	128	29	34	56	319	110	11	15	45
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	100	291	67	37	5	111	304	59	24	2	124	310	48	17	1	130	308	47	14	1
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	175	198	58	36	33	183	198	57	34	28	224	200	48	20	8	332	151	17	0	0
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	61	311	63	57	8	71	317	57	49	6	84	321	51	39	5	97	328	45	28	2
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	185	214	52	30	19	186	221	50	27	16	210	228	40	14	8	322	161	11	4	2
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	46	290	68	72	24	57	296	65	65	17	77	304	61	48	10	91	310	56	39	4
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	182	213	56	27	22	191	212	54	24	19	216	220	42	12	10	324	159	8	3	6
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	46	344	79	24	7	54	353	69	18	6	64	356	63	14	3	76	353	59	11	1
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	115	250	87	35	13	122	253	84	30	11	179	267	44	8	2	458	39	3	0	0
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	24	324	119	28	5	28	336	110	23	3	43	346	93	15	3	62	354	71	11	2
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	110	236	110	32	12	115	244	108	25	8	172	256	61	9	2	464	36	0	0	0
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	16	284	137	54	9	25	295	134	41	5	40	318	117	23	2	56	329	96	17	2
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	118	229	106	35	12	125	239	99	29	8	189	259	49	3	0	471	28	1	0	0
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	2	425	58	14	1	3	440	48	9	0	14	453	30	3	0	29	454	16	1	0
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	43	334	84	32	7	67	339	69	21	4	220	272	8	0	0	497	3	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	4	363	116	13	4	7	389	96	6	2	15	416	66	3	0	41	422	36	1	0
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	42	277	133	32	16	67	307	95	21	10	254	236	9	1	0	498	2	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	1	361	102	35	1	3	396	80	21	0	10	429	55	6	0	25	450	25	0	0
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	38	304	112	36	10	62	325	90	21	2	249	243	8	0	0	498	2	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	0	499	1	0	0	1	498	1	0	0	5	495	0	0	0	26	474	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	1	489	7	2	1	5	495	0	0	0	397	103	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,L}$	0	499	1	0	0	0	499	1	0	0	3	497	0	0	0	24	476	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	0	463	32	2	3	4	495	1	0	0	400	100	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,L}$	0	497	3	0	0	0	499	1	0	0	8	492	0	0	0	27	473	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	1	397	84	10	8	4	486	9	1	0	394	106	0	0	0	500	0	0	0	0

Ao analisarmos a Tabela A.12, nota-se um comportamento heterogêneo do critério EDC com $\theta = 7$. Quando se utiliza a formulação que envolve o logaritmo da função de máxima verossimilhança, este critério apresenta um desempenho superior aos demais, em quase todos os casos. Quando se utiliza a formulação que envolve $\ln(\hat{\sigma}_a^2)$, conforme o valor de α aumenta, o desempenho piora. Chegando a subestimar a ordem de todas as 500 séries temporais geradas para o caso em que $\alpha = 2$. Destaca-se também positivamente o desempenho do critério EDC com $\theta \in \{2, 5\}$ na formulação que utiliza o logaritmo da função de máxima verossimilhança.

Tabela A.13: Estimativas e suas estatísticas de simulação para o caso $AR(2) - S_\alpha(0, \sigma_\alpha, 0)$ com $n = 1000$, $burn-in = 100$, $re = 500$.

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\bar{\ln}(\sigma_\alpha^2)$
1	0.500	0.981	1.000	27.760	-	-0.782	-	-	-	-	-	-	-	-	-5893.118	5.926
2	0.500	1.837	1.000	3.180	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-5828.243	1.376
3	0.500	1.969	1.000	25.643	-	-0.436	-	0.134	-	-0.108	-	-	-	-	-6193.436	5.469
4	0.500	1.990	1.000	26.798	-	-0.258	-	0.248	-	-0.183	-	-0.044	-	-	-6637.584	5.826
5	0.500	1.918	1.000	2.646	-	-0.145	-	0.357	-	-0.073	-	0.023	-	-0.007	-8274.224	0.836
1	0.500	0.778	2.000	43.578	-	-0.815	-	-	-	-	-	-	-	-	-6444.726	6.579
2	0.500	1.804	2.000	6.920	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-6922.155	2.227
3	0.500	1.952	2.000	47.881	-	-0.485	-	0.128	-	-0.081	-	-	-	-	-7000.076	6.151
4	0.500	1.989	2.000	55.514	-	-0.295	-	0.207	-	-0.193	-	-0.044	-	-	-7557.817	6.976
5	0.500	1.876	2.000	4.633	-	-0.152	-	0.342	-	-0.070	-	0.033	-	-0.005	-9957.656	1.088
1	0.500	0.758	3.000	58.124	-	-0.834	-	-	-	-	-	-	-	-	-6858.116	7.283
2	0.500	1.808	3.000	11.659	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-7496.226	2.972
3	0.500	1.962	3.000	69.859	-	-0.523	-	0.113	-	-0.070	-	-	-	-	-7555.142	6.682
4	0.500	1.980	3.000	87.426	-	-0.300	-	0.240	-	-0.201	-	-0.076	-	-	-8142.475	7.612
5	0.500	1.875	3.000	4.890	-	-0.165	-	0.333	-	-0.084	-	0.027	-	-0.002	-11125.944	0.995
1	0.800	1.002	1.000	3.713	-	-0.750	-	-	-	-	-	-	-	-	-3807.366	2.312
2	0.800	1.881	1.000	2.640	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-3619.389	1.809
3	0.800	1.984	1.000	2.746	-	-0.400	-	0.297	-	-0.003	-	-	-	-	-3698.457	1.927
4	0.800	1.989	1.000	3.542	-	-0.340	-	0.311	-	-0.037	-	-0.008	-	-	-3835.137	2.390
5	0.800	1.988	1.000	1.700	-	-0.391	-	0.266	-	-0.030	-	0.007	-	0.004	-4098.408	0.835
1	0.800	1.054	2.000	7.725	-	-0.748	-	-	-	-	-	-	-	-	-4516.447	3.784
2	0.800	1.870	2.000	5.523	-0.400	-0.402	0.300	0.299	-	-	-	-	-	-	-4364.948	3.270
3	0.800	1.981	2.000	5.824	-	-0.404	-	0.289	-	-0.006	-	-	-	-	-4454.108	3.387
4	0.800	1.979	2.000	6.724	-	-0.367	-	0.303	-	-0.042	-	-0.019	-	-	-4608.133	3.553
5	0.800	1.977	2.000	3.190	-	-0.399	-	0.261	-	-0.033	-	0.005	-	0.004	-5386.297	1.597
1	0.800	1.018	3.000	10.981	-	-0.754	-	-	-	-	-	-	-	-	-4858.788	4.551
2	0.800	1.897	3.000	8.615	-0.400	-0.403	0.300	0.297	-	-	-	-	-	-	-4827.953	4.145
3	0.800	1.974	3.000	9.215	-	-0.410	-	0.284	-	-0.006	-	-	-	-	-4889.413	4.297
4	0.800	1.967	3.000	9.945	-	-0.391	-	0.284	-	-0.052	-	-0.030	-	-	-5117.490	4.247
5	0.800	1.978	3.000	5.178	-	-0.403	-	0.270	-	-0.033	-	-0.010	-	0.001	-6239.570	2.098
1	1.000	1.145	1.000	1.915	-	-0.725	-	-	-	-	-	-	-	-	-3070.113	1.203
2	1.000	1.845	1.000	1.904	-0.400	-0.400	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-2963.830	1.218
3	1.000	1.982	1.000	2.005	-	-0.401	-	0.300	-	0.000	-	-	-	-	-3036.403	1.372
4	1.000	1.978	1.000	1.915	-	-0.396	-	0.299	-	-0.003	-	0.000	-	-	-3069.517	1.245
5	1.000	1.989	1.000	1.761	-	-0.400	-	0.292	-	-0.009	-	0.001	-	0.002	-3113.377	1.065
1	1.000	1.150	2.000	4.117	-	-0.719	-	-	-	-	-	-	-	-	-3765.933	2.726
2	1.000	1.883	2.000	3.900	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-3690.569	2.658
3	1.000	1.976	2.000	4.043	-	-0.402	-	0.299	-	0.001	-	-	-	-	-3719.327	2.775
4	1.000	1.960	2.000	3.983	-	-0.410	-	0.287	-	-0.008	-	-0.002	-	-	-3779.974	2.690
5	1.000	1.974	2.000	3.671	-	-0.407	-	0.289	-	-0.017	-	-0.009	-	0.002	-3956.734	2.433
1	1.000	1.169	3.000	5.963	-	-0.720	-	-	-	-	-	-	-	-	-4154.053	3.486
2	1.000	1.863	3.000	5.761	-0.400	-0.399	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-4080.023	3.423
3	1.000	1.977	3.000	6.137	-	-0.404	-	0.298	-	0.001	-	-	-	-	-4121.769	3.609
4	1.000	1.945	3.000	5.978	-	-0.427	-	0.280	-	0.007	-	0.004	-	-	-4193.907	3.485
5	1.000	1.966	3.000	5.853	-	-0.406	-	0.301	-	-0.011	-	-0.021	-	-0.006	-4458.900	3.301
1	1.200	1.266	1.000	1.442	-	-0.681	-	-	-	-	-	-	-	-	-2643.454	0.686
2	1.200	1.810	1.000	1.492	-0.400	-0.400	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-2555.141	0.753
3	1.200	1.966	1.000	1.598	-	-0.401	-	0.300	-	0.001	-	-	-	-	-2617.765	0.925
4	1.200	1.976	1.000	1.548	-	-0.400	-	0.300	-	0.002	-	0.002	-	-	-2624.992	0.857
5	1.200	1.989	1.000	1.506	-	-0.401	-	0.299	-	0.001	-	0.002	-	0.001	-2641.996	0.801
1	1.200	1.239	2.000	2.893	-	-0.676	-	-	-	-	-	-	-	-	-3311.061	2.100
2	1.200	1.781	2.000	2.890	-0.400	-0.399	0.300	0.301	-	-	-	-	-	-	-3230.452	2.072
3	1.200	1.953	2.000	3.168	-	-0.400	-	0.301	-	0.001	-	-	-	-	-3293.395	2.294
4	1.200	1.969	2.000	3.149	-	-0.405	-	0.297	-	0.005	-	0.004	-	-	-3301.933	2.278
5	1.200	1.985	2.000	3.139	-	-0.402	-	0.299	-	0.000	-	0.002	-	0.002	-3353.198	2.263
1	1.200	1.263	3.000	4.358	-	-0.678	-	-	-	-	-	-	-	-	-3718.840	2.915
2	1.200	1.799	3.000	4.370	-0.400	-0.398	0.300	0.300	-	-	-	-	-	-	-3628.421	2.894
3	1.200	1.956	3.000	4.764	-	-0.401	-	0.300	-	0.002	-	-	-	-	-3694.348	3.109
4	1.200	1.953	3.000	4.752	-	-0.408	-	0.294	-	0.004	-	0.005	-	-	-3692.746	3.102
5	1.200	1.980	3.000	4.859	-	-0.401	-	0.296	-	-0.006	-	-0.004	-	0.001	-3753.981	3.147

AR(p)	α	$\bar{\alpha}$	σ	$\bar{\sigma}$	ϕ_1	$\bar{\phi}_1$	ϕ_2	$\bar{\phi}_2$	ϕ_3	$\bar{\phi}_3$	ϕ_4	$\bar{\phi}_4$	ϕ_5	$\bar{\phi}_5$	loglik	$\ln(\sigma_a^2)$
1	1.500	1.531	1.000	1.177	-	-0.618	-	-	-	-	-	-	-	-	-2222.665	0.319
2	1.500	1.841	1.000	1.202	-0.400	-0.398	0.300	0.302	-	-	-	-	-	-	-2159.301	0.352
3	1.500	1.953	1.000	1.253	-	-0.399	-	0.306	-	0.007	-	-	-	-	-2188.521	0.445
4	1.500	1.983	1.000	1.276	-	-0.397	-	0.301	-	0.011	-	0.012	-	-	-2198.915	0.484
5	1.500	1.989	1.000	1.260	-	-0.400	-	0.301	-	0.005	-	0.008	-	0.002	-2199.546	0.460
1	1.500	1.562	2.000	2.395	-	-0.610	-	-	-	-	-	-	-	-	-2919.282	1.736
2	1.500	1.822	2.000	2.337	-0.400	-0.395	0.300	0.305	-	-	-	-	-	-	-2838.951	1.681
3	1.500	1.925	2.000	2.451	-	-0.395	-	0.309	-	0.006	-	-	-	-	-2859.478	1.785
4	1.500	1.974	2.000	2.505	-	-0.397	-	0.303	-	0.010	-	0.010	-	-	-2876.449	1.833
5	1.500	1.978	2.000	2.516	-	-0.399	-	0.299	-	0.006	-	0.010	-	0.004	-2882.522	1.842
1	1.500	1.516	3.000	3.509	-	-0.618	-	-	-	-	-	-	-	-	-3312.783	2.507
2	1.500	1.859	3.000	3.568	-0.400	-0.392	0.300	0.308	-	-	-	-	-	-	-3256.160	2.529
3	1.500	1.925	3.000	3.656	-	-0.395	-	0.310	-	0.007	-	-	-	-	-3262.253	2.586
4	1.500	1.965	3.000	3.735	-	-0.396	-	0.306	-	0.007	-	0.005	-	-	-3269.845	2.632
5	1.500	1.974	3.000	3.760	-	-0.399	-	0.302	-	0.002	-	0.003	-	0.005	-3284.840	2.646
1	1.800	1.824	1.000	1.087	-	-0.579	-	-	-	-	-	-	-	-	-1957.587	0.165
2	1.800	1.933	1.000	1.054	-0.400	-0.399	0.300	0.303	-	-	-	-	-	-	-1901.730	0.103
3	1.800	1.976	1.000	1.075	-	-0.398	-	0.306	-	0.004	-	-	-	-	-1907.908	0.142
4	1.800	1.987	1.000	1.080	-	-0.396	-	0.303	-	0.012	-	0.013	-	-	-1911.078	0.154
5	1.800	1.989	1.000	1.082	-	-0.397	-	0.305	-	0.006	-	0.009	-	0.006	-1909.945	0.156
1	1.800	1.829	2.000	2.178	-	-0.576	-	-	-	-	-	-	-	-	-2650.297	1.555
2	1.800	1.937	2.000	2.116	-0.400	-0.393	0.300	0.308	-	-	-	-	-	-	-2595.035	1.496
3	1.800	1.965	2.000	2.131	-	-0.394	-	0.311	-	0.007	-	-	-	-	-2594.121	1.512
4	1.800	1.982	2.000	2.148	-	-0.396	-	0.304	-	0.007	-	0.006	-	-	-2598.624	1.528
5	1.800	1.980	2.000	2.142	-	-0.396	-	0.304	-	0.004	-	0.002	-	-0.002	-2596.868	1.523
1	1.800	1.827	3.000	3.263	-	-0.577	-	-	-	-	-	-	-	-	-3054.828	2.364
2	1.800	1.929	3.000	3.160	-0.400	-0.395	0.300	0.305	-	-	-	-	-	-	-2998.733	2.299
3	1.800	1.955	3.000	3.172	-	-0.394	-	0.311	-	0.008	-	-	-	-	-2996.269	2.307
4	1.800	1.975	3.000	3.204	-	-0.397	-	0.302	-	0.001	-	0.002	-	-	-3000.831	2.328
5	1.800	1.971	3.000	3.190	-	-0.399	-	0.302	-	0.002	-	0.000	-	0.000	-2999.535	2.319
1	2.000	1.996	1.000	1.045	-	-0.571	-	-	-	-	-	-	-	-	-1810.720	0.087
2	2.000	1.991	1.000	0.996	-0.400	-0.401	0.300	0.298	-	-	-	-	-	-	-1764.781	-0.009
3	2.000	1.991	1.000	0.996	-	-0.402	-	0.296	-	-0.001	-	-	-	-	-1764.278	-0.010
4	2.000	1.991	1.000	0.996	-	-0.400	-	0.298	-	0.005	-	0.006	-	-	-1764.116	-0.009
5	2.000	1.991	1.000	0.996	-	-0.403	-	0.296	-	0.009	-	0.013	-	0.003	-1763.762	-0.011
1	2.000	1.996	2.000	2.090	-	-0.571	-	-	-	-	-	-	-	-	-2503.698	1.473
2	2.000	1.992	2.000	1.990	-0.400	-0.402	0.300	0.297	-	-	-	-	-	-	-2456.547	1.376
3	2.000	1.984	2.000	1.984	-	-0.401	-	0.297	-	-0.002	-	-	-	-	-2456.448	1.369
4	2.000	1.988	2.000	1.985	-	-0.401	-	0.296	-	-0.010	-	-0.005	-	-	-2456.110	1.370
5	2.000	1.983	2.000	1.981	-	-0.402	-	0.294	-	-0.007	-	-0.009	-	-0.009	-2455.970	1.366
1	2.000	1.995	3.000	3.131	-	-0.569	-	-	-	-	-	-	-	-	-2908.998	2.283
2	2.000	1.990	3.000	2.986	-0.400	-0.402	0.300	0.295	-	-	-	-	-	-	-2862.780	2.187
3	2.000	1.981	3.000	2.976	-	-0.402	-	0.296	-	0.001	-	-	-	-	-2862.824	2.180
4	2.000	1.981	3.000	2.974	-	-0.403	-	0.290	-	-0.010	-	-0.006	-	-	-2862.941	2.179
5	2.000	1.976	3.000	2.968	-	-0.407	-	0.287	-	-0.010	-	-0.016	-	-0.013	-2863.505	2.175

Tabela A.14: Ordem estimada pelos critérios de seleção de modelos para os processos AR(2) gerados nas condições apresentadas na Tabela A.13.

$p_{\alpha,\sigma,m}$	AIC					BIC					HQC					$EDC_{0.25}$					$EDC_{0.5}$				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	143	161	150	34	12	145	160	150	33	12	144	161	150	33	12	143	161	150	34	12	143	161	150	34	12
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	1	215	15	3	266	1	221	14	3	261	1	219	14	3	263	1	216	14	3	266	1	217	14	3	265
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	212	154	103	19	12	214	154	103	18	11	213	154	103	18	12	212	154	103	19	12	212	154	103	19	12
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	3	187	23	17	270	3	192	23	17	265	3	188	23	17	269	3	187	23	17	270	3	187	23	17	270
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	196	180	89	20	15	196	180	89	20	15	196	180	89	20	15	196	180	89	20	15	196	180	89	20	15
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	4	139	26	12	319	4	145	26	12	313	4	142	26	12	316	4	139	26	12	319	4	140	26	12	318
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	84	254	107	46	9	89	254	107	42	8	86	255	108	43	8	82	254	108	47	9	84	254	107	46	9
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	45	64	26	30	335	46	65	26	30	333	45	64	26	30	335	45	64	26	30	335	45	64	26	30	335
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	69	233	125	59	14	75	232	123	56	14	72	234	124	56	14	67	233	124	62	14	69	233	125	59	14
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	63	49	24	53	311	63	50	25	52	310	63	50	24	52	311	63	49	24	53	311	63	49	24	53	311
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	97	195	131	68	9	102	195	132	66	5	97	196	132	68	7	96	195	132	68	9	97	195	131	68	9
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	60	47	33	64	296	62	47	33	64	294	61	47	33	64	295	61	46	33	64	296	61	47	33	64	295
$\hat{p}_{1,1,L}$	104	231	71	73	21	113	241	69	66	11	107	234	71	69	19	103	230	70	75	22	104	231	71	73	21
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	155	82	22	85	156	158	83	23	85	151	157	83	22	85	153	155	82	22	85	156	155	82	22	85	156
$\hat{p}_{1,2,L}$	65	131	109	176	19	80	130	109	167	14	71	131	109	171	18	64	128	110	177	21	65	130	109	176	20
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	197	80	34	61	128	198	83	37	60	122	197	82	36	61	124	197	80	35	60	128	197	80	35	60	128
$\hat{p}_{1,3,L}$	43	128	87	203	39	52	131	85	195	37	49	130	85	199	37	42	128	86	204	40	43	128	87	203	39
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	202	86	32	76	104	203	86	32	75	104	203	85	32	76	104	202	86	32	76	104	202	86	32	76	104
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	127	232	53	74	14	144	250	48	53	5	136	238	52	63	11	126	228	54	76	16	127	232	53	74	14
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	206	119	22	56	97	211	122	22	57	88	209	120	22	56	93	206	119	22	56	97	207	120	22	56	95
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	74	209	53	138	26	95	217	50	121	17	81	210	51	135	23	74	206	53	139	28	74	209	52	138	27
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	254	152	27	33	34	257	153	26	31	33	255	152	27	32	34	254	152	27	33	34	255	152	27	32	34
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	35	234	45	158	28	37	243	42	153	25	35	238	45	156	26	32	235	46	159	28	35	234	45	158	28
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	267	143	27	45	18	270	143	28	43	16	268	143	27	45	17	267	143	27	45	18	268	142	27	45	18
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	64	299	89	31	17	89	332	67	10	2	75	321	76	19	9	60	284	94	38	24	64	298	89	32	17
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	286	153	37	7	17	292	153	34	7	14	288	153	35	7	17	286	153	37	7	17	287	153	36	7	17
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	7	242	158	54	39	15	254	171	37	23	11	245	162	49	33	7	238	154	56	45	7	242	158	54	39
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	220	182	60	21	17	226	182	61	17	14	222	182	60	20	16	220	182	60	21	17	220	182	61	21	16
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	5	168	155	120	52	9	184	171	99	37	5	172	162	115	46	4	167	152	124	53	5	168	155	120	52
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	254	146	63	22	15	264	145	60	19	12	260	146	60	20	14	256	146	61	22	15	257	146	61	21	15
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	0	347	115	21	17	0	451	41	8	0	0	404	79	15	2	0	300	128	28	44	0	345	116	22	17
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	92	248	87	48	25	103	257	81	46	13	98	252	83	47	20	93	248	88	48	23	97	248	86	47	22
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	0	151	231	38	80	0	213	254	17	16	0	174	257	26	43	0	146	196	41	117	0	150	230	39	81
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	81	176	129	52	62	110	192	124	42	32	94	181	130	50	45	83	178	130	52	57	87	178	131	50	54
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	0	164	187	67	82	0	197	238	45	20	0	176	215	61	48	0	156	176	71	97	0	164	187	67	82
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	62	179	133	51	75	83	185	137	48	47	71	180	139	50	60	62	179	135	51	73	66	178	139	50	67
$\hat{p}_{2,1,L}$	0	390	65	27	18	0	492	8	0	0	0	468	28	4	0	0	257	103	65	75	0	383	67	32	18
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	0	216	83	85	116	0	422	34	25	19	0	321	66	52	61	0	237	77	79	107	0	261	74	72	93
$\hat{p}_{2,2,L}$	0	412	48	25	15	0	497	3	0	0	0	473	22	4	1	0	284	64	87	65	0	409	49	25	17
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	0	30	221	88	161	0	219	184	48	49	0	93	240	69	98	0	37	228	88	147	0	49	241	82	128
$\hat{p}_{2,3,L}$	0	428	34	29	9	0	495	5	0	0	0	477	16	5	2	0	334	54	77	35	0	427	34	30	9
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	0	15	125	151	209	0	174	178	70	78	0	51	169	125	155	0	19	133	148	200	0	25	144	142	189

$p_{\alpha,\sigma,m}$	EDC_2					EDC_3					EDC_5					EDC_7				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\hat{p}_{0.5,1,L}$	145	160	150	33	12	146	160	150	33	11	152	161	144	32	11	154	161	142	32	11
$\hat{p}_{0.5,1,\hat{\sigma}}$	1	221	14	3	261	1	227	14	3	255	1	284	15	3	197	1	355	9	4	131
$\hat{p}_{0.5,2,L}$	214	154	103	18	11	214	154	103	18	11	217	154	101	17	11	219	155	98	17	11
$\hat{p}_{0.5,2,\hat{\sigma}}$	3	193	23	17	264	3	202	25	17	253	3	251	30	14	202	4	314	27	16	139
$\hat{p}_{0.5,3,L}$	196	180	89	20	15	198	180	89	19	14	201	179	88	18	14	202	179	87	18	14
$\hat{p}_{0.5,3,\hat{\sigma}}$	4	145	26	12	313	4	151	28	11	306	4	199	30	12	255	6	261	35	14	184
$\hat{p}_{0.8,1,L}$	89	254	107	42	8	94	254	104	42	6	101	262	100	33	4	105	265	98	29	3
$\hat{p}_{0.8,1,\hat{\sigma}}$	47	65	26	30	332	50	69	27	27	327	64	88	27	24	297	105	110	45	22	218
$\hat{p}_{0.8,2,L}$	75	232	123	56	14	76	234	122	55	13	83	239	117	50	11	92	242	112	44	10
$\hat{p}_{0.8,2,\hat{\sigma}}$	63	50	25	52	310	64	54	26	49	307	75	62	28	41	294	88	80	23	37	272
$\hat{p}_{0.8,3,L}$	102	195	132	66	5	105	195	130	65	5	111	195	128	62	4	115	197	125	59	4
$\hat{p}_{0.8,3,\hat{\sigma}}$	62	48	32	64	294	64	50	32	62	292	69	60	31	56	284	84	67	27	46	276
$\hat{p}_{1,1,L}$	113	243	68	65	11	124	249	67	53	7	133	267	54	39	7	149	267	47	33	4
$\hat{p}_{1,1,\hat{\sigma}}$	158	84	22	85	151	165	83	22	83	147	181	97	22	78	122	316	108	14	36	26
$\hat{p}_{1,2,L}$	81	130	110	165	14	89	134	106	158	13	110	140	101	140	9	124	145	95	128	8
$\hat{p}_{1,2,\hat{\sigma}}$	198	84	37	60	121	200	90	36	58	116	214	115	30	44	97	272	122	6	32	68
$\hat{p}_{1,3,L}$	52	132	85	195	36	57	131	85	194	33	69	134	78	191	28	88	136	74	177	25
$\hat{p}_{1,3,\hat{\sigma}}$	204	86	32	75	103	207	89	32	70	102	237	107	32	45	79	280	127	8	24	61
$\hat{p}_{1.2,1,L}$	145	253	45	52	5	155	258	39	45	3	170	266	33	29	2	177	274	27	21	1
$\hat{p}_{1.2,1,\hat{\sigma}}$	211	123	22	57	87	214	127	22	55	82	258	126	20	48	48	367	117	9	7	0
$\hat{p}_{1.2,2,L}$	97	218	51	118	16	106	220	51	111	12	117	229	51	93	10	137	235	46	76	6
$\hat{p}_{1.2,2,\hat{\sigma}}$	257	155	26	31	31	261	157	27	27	28	279	164	22	17	18	320	149	10	8	13
$\hat{p}_{1.2,3,L}$	38	243	43	153	23	44	248	41	148	19	58	263	38	125	16	71	277	38	102	12
$\hat{p}_{1.2,3,\hat{\sigma}}$	272	142	28	42	16	274	145	28	39	14	293	157	26	19	5	352	134	9	2	3
$\hat{p}_{1.5,1,L}$	89	338	64	7	2	99	343	52	6	0	114	342	41	3	0	129	331	38	2	0
$\hat{p}_{1.5,1,\hat{\sigma}}$	294	152	34	6	14	303	150	34	3	10	322	150	25	1	2	389	105	6	0	0
$\hat{p}_{1.5,2,L}$	16	255	171	35	23	26	264	167	26	17	53	295	127	16	9	64	309	110	10	7
$\hat{p}_{1.5,2,\hat{\sigma}}$	226	183	60	17	14	230	185	60	16	9	262	195	36	6	1	337	155	6	2	0
$\hat{p}_{1.5,3,L}$	9	184	172	99	36	17	192	174	90	27	36	202	174	76	12	53	223	162	54	8
$\hat{p}_{1.5,3,\hat{\sigma}}$	266	145	60	18	11	274	145	59	15	7	303	148	42	5	2	397	100	3	0	0
$\hat{p}_{1.8,1,L}$	0	455	38	7	0	1	466	29	4	0	2	477	18	3	0	3	481	14	2	0
$\hat{p}_{1.8,1,\hat{\sigma}}$	107	259	80	43	11	134	271	62	28	5	258	224	17	1	0	469	31	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,2,L}$	0	232	243	13	12	0	302	190	5	3	1	400	96	3	0	5	445	48	2	0
$\hat{p}_{1.8,2,\hat{\sigma}}$	115	195	124	40	26	152	213	102	22	11	288	189	22	1	0	469	31	0	0	0
$\hat{p}_{1.8,3,L}$	0	202	238	43	17	0	241	224	29	6	0	321	169	10	0	3	406	88	3	0
$\hat{p}_{1.8,3,\hat{\sigma}}$	89	187	135	45	44	107	209	130	32	22	244	207	46	2	1	468	32	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,L}$	0	493	7	0	0	0	498	2	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0
$\hat{p}_{2,1,\hat{\sigma}}$	0	430	32	23	15	0	489	6	4	1	19	481	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,L}$	0	497	3	0	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0
$\hat{p}_{2,2,\hat{\sigma}}$	0	267	151	43	39	0	442	38	15	5	18	482	0	0	0	500	0	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,L}$	0	497	3	0	0	0	499	1	0	0	0	500	0	0	0	0	500	0	0	0
$\hat{p}_{2,3,\hat{\sigma}}$	0	213	161	60	66	0	407	60	18	15	22	478	0	0	0	500	0	0	0	0

O desempenho do critério EDC para o caso em que $\alpha = 2$ e com $\theta = 5$ quando utilizamos a formulação através da estimativa de máxima verossimilhança do parâmetro de escala apresenta uma melhora significativa quando comparando com a situação em que $n = 500$. Para $n = 500$ o desempenho é muito ruim, tendo uma taxa máxima de acerto de 21%, enquanto que para $n = 1000$ esta taxa sobe para 96%.