Universidade: presente!

UFRGS PROPESQ

XXXI SIC

Salão UFRGS 2019 — CONHECIMENTO FORMAÇÃO INOVAÇÃO

21.25. OUTUBRO • CAMPUS DO VALE

Um Teorema de Estrutura de Anéis Artinianos Semissimples

Rafael Haag Petasny - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Orientador - Alveri Alves Sant'Ana

Resumo

Wedderburn, em 1907, apresentou um resultado que classifica as álgebra semissimples finito-dimensionais sobre corpos. Mais tarde, em 1927, Artin percebeu que o mesmo resultado vale para anéis com unidade e de comprimento finito. Na linguagem moderna, estes últimos são conhecidos como anéis artinianos semissimples. Pretendemos, neste trabalho, apresentar uma demonstração do Teorema de Wedderburn-Artin sobre a classificação dos anéis artinianos semissimples, o qual diz que tais anéis são isomorfos ao produto cartesiano de anéis de matrizes sobre anéis de divisão.

PRÉ-REQUISITOS

Primeiramente, consideraremos que todo anel aqui mencionado possui unidade.

Definição: Anel

Um conjunto R com duas operações ($+$ e $\cdot$) é dito um anel se:

- *Se $x, y \in R$, então $x + y \in R$ e $x \cdot y \in R$.*
- *$+$ é associativa, comutativa, possui neutro e todo elemento possui inverso.*
- *$\cdot$ é associativa e compatível com $+$.*

Definição: Módulo

Seja R um anel, dizemos que $(M, +)$ é um R-módulo a esquerda se:

- *$+$ é associativa, comutativa, possui neutro e todo elemento possui inverso.*
- *se $x, y \in M$ então $x + y \in M$.*
- *Existe uma aplicação $\bullet$: $R \times M \to M$ satisfazendo:*
  - *$r \bullet (x + x') = r \bullet x + r \bullet x', \forall r \in R, x, x' \in M$.*
  - *$(r + r') \bullet x = r \bullet x + r' \bullet x, \forall r, r' \in R, x \in M$.*
  - *$(r \cdot r') \bullet x = r \bullet (r' \bullet x), \forall r, r' \in R, x \in M$.*

Denotamos por ${}_RM$ para representar M como R-módulo a esquerda.

Definição: Ideal

Um conjunto $\mathcal{I} \subseteq R$ é chamado de ideal a esquerda de R se:

- *As operações $+$ e $\cdot$ de R, se restritas a $\mathcal{I}$, definem um anel.*
- *$\mathcal{I}$ possui estrutura de R-módulo a esquerda, onde a aplicação é dada pela própria multiplicação de R.*

(analogamente, podemos definir ideal a direita exigindo que $\mathcal{I}$ possua a estrutura de R-módulo a direita)

Definição: Simples

- *Um R-módulo a esquerda M é simples se:*
  $N \subseteq M$ é R-módulo a esquerda, $\implies$ $N = 0$ ou $N = M$.
- *Um anel R é simples se: $\mathcal{I}$ é ideal bilateral de R $\implies$ $\mathcal{I} = 0$ ou $\mathcal{I} = R$.*

Definição: Semissimples

- *Um R-módulo a esquerda M é chamado semissimples se $M = \oplus_{i \in J} N_i$, onde J é uma família de indicies arbitrária e N_i é simples $\forall i \in J$.*
- *Um anel R é semissimples se o módulo regular ${}_RR$ é semissimples.*

Exemplo

Se $\mathcal{D}$ é um anel de divisão, então $\mathcal{D}$ é simples, uma vez que, se $\mathcal{I} \neq 0$ é ideal de $\mathcal{D}$, então existem $x \in \mathcal{I}$ e $y \in \mathcal{D}$, tais que $x \cdot y = y \cdot x = 1_{\mathcal{D}} \in \mathcal{I}$, logo $\mathcal{I} = \mathcal{D}$.

Ainda, $\mathcal{M}_n(\mathcal{D})$ é anel simples que possui ideais unilaterais.
$\mathcal{I}_k := \{(a_{ij})\colon a_{ij} = 0 \text{ se } j \neq k\}$, o anel de matrizes com entradas nulas, exceto na k-ésima coluna, é ideal a esquerda de $\mathcal{M}_n(\mathcal{D})$, mas não é ideal a direita.
$\mathcal{I}_l := \{(a_{ij})\colon a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq l\}$, o anel de matrizes com entradas nulas, exceto na l-ésima linha, é ideal a direita de $\mathcal{M}_n(\mathcal{D})$, mas não é ideal a esquerda.

Consequentemente, se $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_j$ são anéis de divisão, então $R := \mathcal{M}_{n_1}(\mathcal{D}_1) \oplus \mathcal{M}_{n_2}(\mathcal{D}_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_j}(\mathcal{D}_j)$ é anel semissimples.

Obs.: Como $\mathcal{D}$ é anel de divisão, os ideais $\mathcal{I}_k$ e $\mathcal{I}_l$ são minimais, ainda, a menos de isomorfismo, são os únicos ideais minimais de $\mathcal{M}_n(\mathcal{D})$. Uma vez provado o teorema de Wedderburn, esse exemplo garante que a semissimplicidade é um conceito bilateral, ié, ${}_RR$ é semissimples se, e somente se, R_R é semissimples.

O TEOREMA DE WEDDERBURN-ARTIN

Se R é um anel semissimples, então:

$$R \simeq \mathcal{M}_{n_1}(\mathcal{D}_1) \times \mathcal{M}_{n_2}(\mathcal{D}_2) \times \cdots \times \mathcal{M}_{n_k}(\mathcal{D}_k)$$

Onde $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_k$ são anéis de divisão, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ são inteiros positivos, o número k e os pares $(\mathcal{D}_i, n_i)$ são unicamente determinados, a menos da ordem.

DEMONSTRAÇÃO

Seja ${}_RR = \oplus_{i \in J} R_i$, como estamos considerando que o anel possui unidade, $1_R = \sum_{i=1}^{n} e_i$, onde $e_i \in R_i$. Se $x \in {}_RR$, então $x = x \cdot 1_R = x \cdot \sum_{i=1}^{n} e_i \in \oplus_{i=1}^{n} R_i$, assim, ${}_RR = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_n$ e ${}_RR$ é uma soma finita de módulos simples.

Lema

Sejam R_i simples e $\mathcal{I}$ um ideal minimal a esquerda de R_i, então $R_{\mathcal{I}} := \sum\{J \triangleleft_l R_i \colon J \simeq \mathcal{I}\}$ é ideal bilateral de R_i.

Demonstração: Mostraremos que, se $r \in R_i$ e $J \simeq \mathcal{I}$, então $Jr \subseteq R_{\mathcal{I}}$. A aplicação $\varphi_r\colon J \to R_i$ é um homomorfismo de R_i-módulos, como J é minimal, $\ker \varphi_r = 0$ ou $\ker \varphi_r = J$, no primeiro caso, $\varphi_r(J) \simeq J \simeq \mathcal{I} \subseteq R_{\mathcal{I}}$, no segundo, $Jr = 0 \subseteq R_{\mathcal{I}}$. Generalizando o argumento para todo $r \in R_i$ e $J \simeq \mathcal{I}$, concluímos que $R_{\mathcal{I}}$ é ideal a direita de R_i, e, como R_i é simples, resta que $R_i = R_{\mathcal{I}}$. $\square$

Corolário

Se R_i é anel simples com unidade, então R_i possui um único ideal a esquerda minimal, a menos de isomorfismo.

Demonstração: Supondo que $\mathcal{I}$ e $\mathcal{K}$ são ideais a esquerda minimais de R_i tais que $\mathcal{I} \not\simeq \mathcal{K}$. Primeiramente, observamos que $\mathcal{I}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{K} = 0$, pois $\mathcal{I} \not\simeq \mathcal{K}$, agora do lema anterior e da hipótese de R_i ter unidade, segue que $R_i\mathcal{K} = (\mathcal{I}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_n)\mathcal{K} = \mathcal{I}_1\mathcal{K} + \cdots + \mathcal{I}_n\mathcal{K} = 0$. Analogamente, mostramos que $\mathcal{K}R_i = 0$, logo $\mathcal{K} = 0$, o que contradiz sua minimalidade. Logo só pode ser $\mathcal{K} \simeq \mathcal{I}$. $\square$

Lema de Schur

Se $\mathcal{I}$ é um ideal minimal a esquerda de R, então $End({}_R\mathcal{I})$ é um anel de divisão.

Demonstração: Se $\varphi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{I} \in End({}_R\mathcal{I})$, então $\ker \varphi := \{x \in \mathcal{I}\colon \varphi(x) = 0\}$ é submódulo de $\mathcal{I}$ (estamos olhando $\mathcal{I}$ como R-módulo, e minimal $\implies$ simples), então $\ker \varphi = 0$ ou $\ker \varphi = \mathcal{I}$. No primeira caso, φ é injetora e $\varphi(\mathcal{I})$ é submódulo de $\mathcal{I}$, logo $\varphi(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ e φ é um isomorfismo e possui um elemento inverso em $End({}_R\mathcal{I})$. No segundo caso, $\varphi(x) = 0, \forall x \in \mathcal{I}$, logo φ é a aplicação nula, provando o lema. $\square$

Teorema de Rieffel

Sejam R_i simples e $\mathcal{D} := End({}_{R_i}\mathcal{I})$ (o anel das aplicações R_i-lineares de $\mathcal{I}$ para $\mathcal{I}$), onde $\mathcal{I}$ é o único ideal a esquerda minimal de R_i, então $R_i \simeq End(\mathcal{I}_{\mathcal{D}})$.

Corolário

Nas condições do Teorema de Rieffel, $End(\mathcal{I}_{\mathcal{D}}) \simeq \mathcal{M}_n(\mathcal{D})$.

Demonstração: Basta observar que $\dim_{\mathcal{D}} \mathcal{I} < \infty$, pois, caso contrário, $End_{fin}(\mathcal{I}_{\mathcal{D}})$ (anel dos endomorfismos $\mathcal{D}$-lineares de $\mathcal{I}$ com posto finito) seria um ideal bilateral próprio de $End(\mathcal{I}_{\mathcal{D}})$, contradizendo $End(\mathcal{I}_{\mathcal{D}})$ ser simples. Logo $\dim_{\mathcal{D}} \mathcal{I} = n$, para algum n inteiro positivo, e os endomorfismos de $\mathcal{I}$ são matrizes nxn. $\square$

EXEMPLO: Uma família de anéis semissimples

Se $n \in \mathbb{N}$ é livre de quadrados, então o anel $\mathbb{Z}n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é semissimples. Decorre diretamente do Teorema Chinês do Resto que, se $n = p_1 p_2 \ldots p_k$, então $\mathbb{Z}n \simeq \mathbb{Z}p_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}p_k$, onde cada $\mathbb{Z}p_i$ é um corpo, logo um anel simples.

EXEMPLO: Um anel que não é semissimples

Observamos primeiro que, se ${}_RR = \oplus_{i \in J} R_i$ é semissimples e M é submódulo de ${}_RR$, então $M = \oplus_{i \in I \subseteq J} R_i$, assim $N := \oplus_{i \in J/I} R_i$ é tal que ${}_RR = M \oplus N$. Ou seja, todo submódulo de um módulo semissimples possui complemento.

Disso, $\mathbb{Z}$ não é semissimples, pois, se M e N são submódulos de ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$, então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $M = m\mathbb{Z}$ e $N = n\mathbb{Z}$, logo $mn \in M \cap N$, e $M \cap N = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $n = 0$, ou seja, nenhum submódulo não trivial de ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ possui complemento.