Radiação de Ondas de Água por um Cilindro Submerso Longo

Autora: Ana Paula Giussani Mocellin

Orientador: Leandro Farina

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Instituto de Matemática e Estatística

Introdução

Usando as equações diferenciais de Navier Stokes que descrevem o movimento de fluidos, pode-se descrever matematicamente a propagação de ondas em água, assumindo que o fluido é invíscido e o fluxo é incompressível e irrotacional. Neste trabalho, é assumido a presença de um cilindro submerso, longo e vertical.

Formulação Matemática

A velocidade do fluido é representada no tempo t pelo gradiente do potencial de velocidade $\Phi(x,t)$ satisfazendo a equação de Laplace no domínio do fluido

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x},t) = 0$$

onde $\mathbf{x} = (r,\theta,z)$ são coordenadas cilíndricas. Para uma onda monocromática que se propaga na direção x, o potencial de velocidade incidente pode ser escrito como

$$\Phi_i(\mathbf{x},t) = \mathrm{Re}\left[\frac{-igH}{2\omega}\frac{\cosh k_0(z+d)e^{i(k_0x-\omega t)}}{\cosh k_0 d}\right]$$

onde H é a altura da onda, g é a aceleração da gravidade, k_0 o número de onda, d é a distância entre o fundo da água e o topo do cilindro e ω é a frequência da onda. Como o movimento do cilindro é mantido na mesma frequência que a onda incidente, pode-se assumir que o potencial da velocidade tem o mesmo fator tempo $e^{-i\omega t}$:

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \mathrm{Re}\left[-i\omega\xi\phi(r,\theta,z;\omega)e^{-i\omega t}\right]$$

onde ξ é a amplitude de oscilação do cilindro.
Além da equação de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, a velocidade potencial espacial complexa $\phi(r,\theta,z;w)$ deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

1. Condição de Superfície Livre

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g}\phi \quad \text{em } z = 0$$

2. Condição não penetrante no fundo do mar

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -d$$

3. Condição de superfície impermeável na superfície do corpo

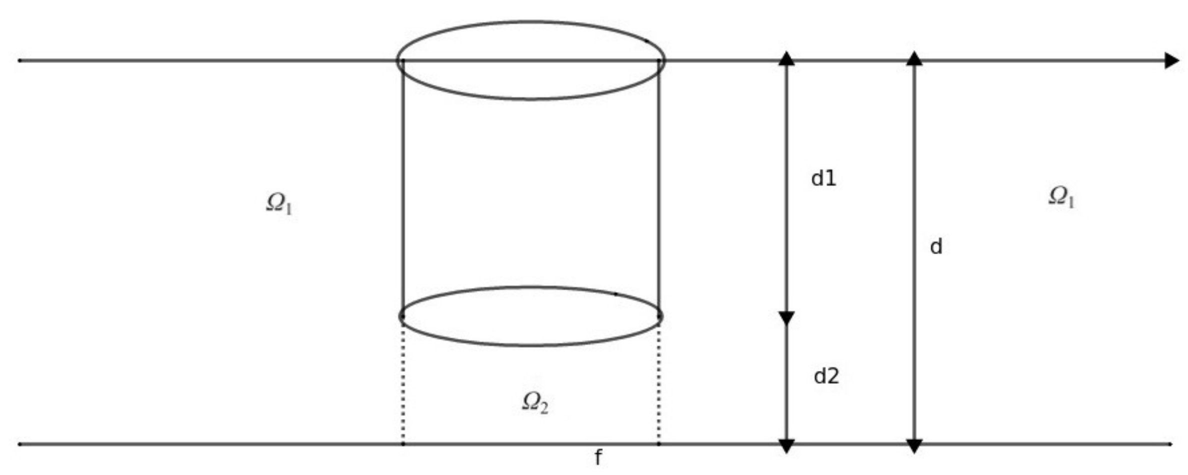
$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = v_1(\theta) \quad (r = a, -d_1 \leq z \leq 0)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = v_2(\theta) \quad (0 \leq r \leq a, z = -d_1)$$

4. Condição de radiação de Sommerfield no infinito

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{k_0 r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} - ik_0\phi\right) = 0$$

Dividimos o domínio em duas regiões



definidas por Ω_1 $(r \geq a)$ e Ω_2 $(r \leq a, -d \leq z \leq -d_1)$, onde o potencial de velocidade é decomposto em ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente. Impomos então, as seguintes condições de compatibilidade.

$$\phi_1 = \phi_2 \; (r = a, -d \leq z \leq -d_1)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial r} = \begin{cases} v_1(\theta), & (r = a, -d_1 \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial r}, & (r = a, -d \leq z \leq -d_1) \end{cases}$$

onde v_1 é prescrita.

Expansões em Autofunções e Expansões Assintóticas

Uma **expansão assintótica** de uma dada função f na vizinhança de um ponto é uma soma finita de funções de referência que fornece uma boa aproximação do comportamento da função f na vizinhança considerada. Uma sequência de autofunções pode ser usada para representar funções arbitrárias através de séries infinitas, a qual podemos definir como **expansões em autofunções**.
O objetivo do trabalho é encontrar o potencial de velocidade do problema através de autofunções e usar expansões assintóticas que simplifiquem o problema analítico a ser resolvido para o caso em que o raio do cilindro seja pequeno em relação ao comprimento.

Referências

[1] SHENG-CHAO, J.; GOU, Y.; TENG, B., *Water Wave Radiation Problem by a Submerged Cylinder.* Journal of Engineering Mechanics, 2014.

[2] BENDER, C.M.; BRODY, D.C.; MEISTER, B.K., *On Power of Bessel functions.* Journal of Mathematical Physics, Vol 44, 2003.