Autor: Adir Matos de Souza Júnior

ESPAÇOS DE SOBOLEV

INTRODUÇÃO

Todo espaço métrico pode ser completado. Mais precisamente, dado um espaço métrico qualquer (X, ρ), existem um espaço métrico *completo* ($\hat{X}$, $\hat{\rho}$) e um mergulho isométrico $\sigma : X \to \hat{X}$ tal que $\sigma(X)$ é denso em $\hat{X}$ (este resultado é conhecido como *Teorema do Completamento*). Um exemplo importante, com muitas aplicações na teoria de equações diferenciais parciais, é o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, onde Ω é um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, k é um número natural e $1 \leq p < \infty$. Esses espaços podem ser definidos como sendo o completamento de um certo subespaço das funções infinitamente diferenciáveis em Ω com uma métrica adequada. Consequentemente, algumas propriedades que as funções infinitamente diferenciáveis possuem também são válidas em $W^{k,p}(\Omega)$.

OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo estudar os espaços de Sobolev e algumas de suas propriedades. Começaremos definindo os espaços de Sobolev a partir da ideia de completamento e, a seguir, mostraremos que campos de vetores, cujas funções coordenadas são de Sobolev, satisfazem o Teorema da Divergência. Em particular, veremos que quando Ω é um intervalo aberto da reta, o espaço $W^{1,1}(\Omega)$ é o maior espaço de funções para as quais vale o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Também mostraremos nesse caso que toda função de $W^{1,p}(\Omega)$, com $p > 1$, é uma função de Hölder.

DESENVOLVIMENTO

Seja Ω um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^n$. Um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é uma lista de índices em que cada α_j é um inteiro não negativo (j = 1, ..., n). Dada uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$, denotamos por $D_j u$ sua derivada parcial com respeito à j-ésima coordenada de $\mathbb{R}^n$. Também escrevemos $D^\alpha u = (D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n})(u)$ para denotar a derivada de u α_1 vezes com respeito à 1ª coordenada de $\mathbb{R}^n$, α_2 vezes com respeito à 2ª coordenada, ..., α_n vezes com respeito à n-ésima coordenada, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice. Denotamos por $C^k(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que são contínuas e tais que $D^\alpha u$ é contínua para todo multi-índice α com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$. O subconjunto consistindo das funções que têm um suporte compacto é denotado por $C_0^k(\Omega)$. Os espaços correspondentes de funções infinitamente diferenciáveis são denotados, respectivamente, por $C^\infty(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$. Também escrevemos $C(\Omega)$ e $C_0(\Omega)$ para denotar, respectivamente, o conjunto das funções contínuas e o conjunto das funções contínuas de suporte compacto em Ω.

Dada uma função $u \in C^k(\Omega)$, seja

$$\|u\|_{k,p} = \left\{\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p \, dx\right\}^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

onde a integral é tomada no sentido de Lebesgue e é feita sobre todo o conjunto Ω; além disso, a soma acima é feita sobre todos os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$.

Seja $\hat{C}^k(\Omega)$ o subconjunto de $C^k(\Omega)$, que consiste das funções u para as quais $\|u\|_{k,p} < \infty$. Então $\hat{C}^k(\Omega)$ é um espaço métrico com a métrica

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_{k,p}.$$

Seja $\{u_m\}$ uma sequência de Cauchy em $\hat{C}^k(\Omega)$ com respeito à métrica definida acima, ou seja,

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u_i - D^\alpha u_j|^p \, dx \to 0 \text{ quando } i, j \to \infty$$

Assim, para todo multi-índice α com $0 \leq |\alpha| \leq k$, tem-se

$$\int |D^\alpha u_i - D^\alpha u_j|^p \, dx \to 0 \text{ quando } i, j \to \infty$$

Portanto, $\{D^\alpha u_m\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é um espaço métrico completo, existe $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\|D^\alpha u_m - u^\alpha\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \text{ quando } m \to \infty$$

Quaisquer duas sequências de Cauchy equivalentes fornecem a mesma função u^α [como elemento de $L^p(\Omega)$]. Portanto, cada classe de sequências de Cauchy equivalentes dão um único vetor $\{u^\alpha ; 0 \leq |\alpha| \leq k\}$ com componentes em $L^p(\Omega)$.

Um resultado importante é o que descreveremos a seguir.

Proposição 1. Para toda função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int u^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int u^0 \, D^\alpha \varphi \, dx.$$

De fato, integração por partes nos dá

$$\int D^\alpha u_m \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int u_m \, D^\alpha \varphi \, dx.$$

Fazendo $m \to \infty$, o membro esquerdo tende a $\int u^\alpha \varphi \, dx$ e o membro direito tende a $(-1)^{|\alpha|} \int u^0 \, D^\alpha \varphi \, dx$, donde segue o resultado. Mostraremos que $\int D^\alpha u_m \varphi \, dx \to \int u^\alpha \varphi \, dx$. A outra convergência é análoga.

$$\left| \int D^\alpha u_m \varphi \, dx - \int u^\alpha \varphi \, dx \right| = \left| \int (D^\alpha u_m - u^\alpha) \varphi \, dx \right| \leq \int |D^\alpha u_m - u^\alpha| \, |\varphi| \, dx.$$

Mas, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\int |D^\alpha u_m - u^\alpha| \, |\varphi| \, dx \leq \left(\int |D^\alpha u_m - u^\alpha|^p \, dx\right)^{1/p} \left(\int |\varphi|^q \, dx\right)^{1/q} = C \left\|D^\alpha u_m - u^\alpha\right\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \text{ quando } m \to \infty,$$

onde $1/p + 1/q = 1$ e $C = \left(\int |\varphi|^q \, dx\right)^{1/q}$.

Isto mostra que $\int D^\alpha u_m \varphi \, dx \to \int u^\alpha \varphi \, dx$. Da mesma forma, temos que $\int u_m D^\alpha \varphi \, dx \to \int u^0 D^\alpha \varphi \, dx$.

Estamos agora em condições de definir os espaços de Sobolev.

Definição. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o completamento de $\hat{C}^k(\Omega)$ com respeito à métrica induzida por $\|\cdot\|_{k,p}$.

Decorre da definição acima que os elementos de $W^{k,p}(\Omega)$ podem ser identificados com funções de $L^p(\Omega)$. Mais precisamente, uma função $u \in L^p(\Omega)$ pertence a $W^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência de Cauchy $\{u_m\}$ em $\hat{C}^k(\Omega)$, com respeito à métrica induzida por $\|\cdot\|_{k,p}$, tal que $\int |u_m - u|^p \, dx \to 0$ quando $m \to \infty$. Dados $u \in W^{k,p}(\Omega)$, uma sequência de Cauchy $\{u_m\}$ em $\hat{C}^k(\Omega)$ com $u_m \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$ e um multi-índice α com $0 \leq |\alpha| \leq k$, define-se a α-ésima derivada parcial *fraca* de u como sendo a função $u^\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u_m \xrightarrow{L^p(\Omega)} u^\alpha$. Observe que as derivadas *fracas* de u cumprem a condição estabelecida na *proposição 1.* Na verdade, tal condição caracteriza as derivadas fracas.

Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definimos sua norma por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p \, dx\right\}^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Pode-se demonstrar que se $\partial\Omega$ é C^1 e $u \in W^{k,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$, então u pode ser aproximada em $W^{k,p}(\Omega)$ por funções pertencentes a $C^\infty(\bar{\Omega})$. Isto é, existem funções $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tais que $u_m \xrightarrow{W^{k,p}(\Omega)} u$. Este resultado mostra que funções de Sobolev podem ser aproximadas *até a fronteira* por funções suaves.

Um outro resultado importante é o chamado *Teorema do Traço*, o qual estabelece que toda função de Sobolev pode ser estendida de maneira natural até a fronteira de Ω. O "representante natural" de u em $\partial\Omega$ é chamado o *traço de u em* $\partial\Omega$ e é denotado por Tu. Além disso, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tem-se que $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, onde a constante C depende apenas de p e Ω.

Com os conceitos e resultados vistos até aqui, pode-se demonstrar o

Teorema 2. (Teorema da Divergência) Suponha que $\partial\Omega$ é C^1 e orientável. Seja $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe $C^1(W^{1,p})$ limitado, isto é, cada função coordenada de F está em $W^{1,p}(\Omega)$. Então

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds = \iiint_\Omega div \, F \, dv.$$

Aqui as notações de integral dupla e integral tripla são usadas para denotar a integral de Lebesgue, respectivamente, em dimensão n - 1 e dimensão n.

Note que o Teorema Fundamental do Cálculo é o Teorema da Divergência para dimensão 1. Assim, se $f \in W^{1,p}((a, b))$, sua derivada fraca f' existe q.t.p. e

$$\int_c^d f' dx = f(d) - f(c), \ \forall \ (c, d) \subset (a, b)$$

Usando a desigualdade de Hölder, podemos mostrar que, para $p > 1$, f é também uma função de Hölder com expoente $\alpha = (p-1)/p$.

CONCLUSÃO

Do exposto neste trabalho, podemos concluir que, para um intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, o espaço $W^{1,1}((a, b))$, é o maior espaço de funções em que vale o Teorema Fundamental do Cálculo. Logo, a função de Cantor, por exemplo, não é uma função de Sobolev (pois não satisfaz o TFC), apesar de ser de Hölder.

REFERÊNCIAS

- Friedman, Avner **Foundations of Modern Analysis.** Dover Publications,Inc. 1982.
- Evans, Lawrence C. **Partial Differential Equations.** American Mathematical Society, 1998.