



Grafos Unicíclicos Extremais com Respeito às Energias Laplaciana e Laplaciana sem Sinal

Matheus da Costa Pereira

Orientadora: Profa. Dra. Virgínia Maria Rodrigues

Neste trabalho investigamos uma conjectura sobre as energias laplaciana e laplaciana sem sinal de grafos unicíclicos.

Grafos

- Um **grafo** é uma estrutura formada por um conjunto finito e não vazio V , cujos elementos são chamados de **vértices**, e um conjunto E de subconjuntos de dois elementos de V , cujos elementos são denominados **arestas**.
- Um **grafo unicíclico** é um grafo conexo que possui um único ciclo.

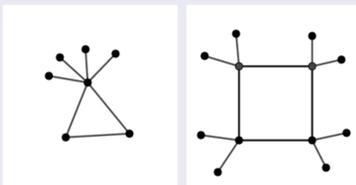


Figura 1: Grafos unicíclicos S_7' e $C_{4,2}$

Matrizes de Representação de Grafos

Dado $G = G(V, E)$ um grafo com n vértices, podemos representá-lo através de matrizes. Entre elas:

- Matriz de Adjacência:** $A = A(G)$ é a matriz quadrada de ordem n , com entradas

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Matriz Laplaciana:** $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $D(G)$ é a matriz diagonal dos graus dos vértices de G .
- Matriz Laplaciana sem Sinal:** $L(G) = D(G) + A(G)$, onde $D(G)$ é a matriz diagonal dos graus dos vértices de G .

Energia de um Grafo

Seja $G = G(V, E)$ um grafo de n vértices com espectro $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, espectro laplaciano $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ e espectro laplaciano sem sinal $\{q_1, \dots, q_n\}$, e seja \bar{d} o grau médio dos vértices de G . Definimos:

$$\text{Energia: } E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

$$\text{Energia Laplaciana: } LE(G) = \sum_{i=1}^n |\mu_i - \bar{d}|$$

$$\text{Energia Laplaciana sem Sinal: } LE^+(G) = \sum_{i=1}^n |q_i - \bar{d}|$$

Grafos Extremais

Um dos problemas de grande interesse é o de encontrar-se **grafos extremais** com respeito à energia, ou seja, grafos que possuem a maior ou menor energia entre todos os grafos com um certo número de vértices, pertencentes ou não a uma certa família.

- Chamamos de $H(n)$ o grafo de ordem n formado por um ciclo de três vértices e $n - 3$ vértices pendentos distribuídos balanceadamente entre os três vértices do ciclo.

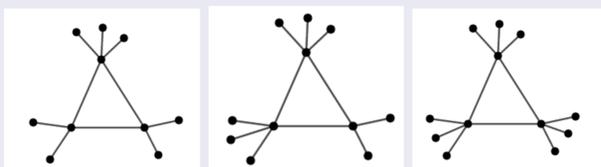


Figura 2: Grafos $H(10)$, $H(11)$, $H(12)$

- L.Kowalski, em sua tese de doutorado (2018), elaborou a conjectura abaixo, cuja investigação é o objetivo deste trabalho.

O grafo unicíclico com n vértices, $n \geq 11$, que tem a maior energia laplaciana e a maior energia laplaciana sem sinal é o grafo $H(n)$.

Progressos

- L.Kowalski verificou computacionalmente que a conjectura é válida para os grafos unicíclicos com 11, 12 e 13 vértices.
- Com respeito à energia laplaciana, L.Kowalski provou que a conjectura é verdadeira para os grafos unicíclicos com pelo menos 12 vértices e que possuem $\sigma \geq 9$, onde σ é o número de autovalores laplacianos maiores ou iguais ao grau médio dos vértices do grafo.
- Ela também provou, com relação à energia laplaciana sem sinal, que a conjectura é verdadeira para os grafos unicíclicos com pelo menos 12 vértices e que possuem $\sigma^+ \geq 9$, onde σ^+ é o número de autovalores laplacianos maiores ou iguais ao grau médio dos vértices do grafo.

Nossas Contribuições

- Utilizando o programa **SageMath**, verificamos que a conjectura estava em aberto para **todos** os grafos unicíclicos com 14 ou 15 vértices, ou seja, todos possuem σ e σ^+ menor do que 9:

n	Total de Grafos	Percentual em aberto
14	39260	100%
15	110381	100%

Verificamos computacionalmente que a conjectura é **verdadeira** para todos os grafos unicíclicos com 14 ou 15 vértices, ou seja, todos possuem energia laplaciana e energia laplaciana sem sinal menor que a do $H(n)$.

- Provamos que a conjectura é válida para uma família infinita de grafos unicíclicos que não possuem $\sigma \geq 9$ nem $\sigma^+ \geq 9$.

- A **estrela** S_n é um grafo com n vértices, que possui um vértice de grau $n - 1$ e os demais são pendentos. Denotamos por S_n' o grafo obtido pela adição de uma aresta ao grafo S_n .

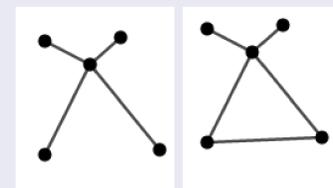


Figura 3: Grafos S_5 e S_5'

Teorema: Para todo $n \geq 11$, o grafo S_n' tem σ e $\sigma^+ < 9$ e possui energia laplaciana e energia laplaciana sem sinal menor que a do $H(n)$.

- Provamos, também, que a conjectura é verdadeira para uma outra família infinita de grafos unicíclicos para os quais ela estava em aberto, ou seja, possuem σ e $\sigma^+ < 9$

- Uma **centopeia unicíclica fechada** é o grafo obtido de um ciclo adicionando-se pelo menos um pendente a cada vértice do ciclo.

- Uma **centopeia unicíclica fechada balanceada** é uma centopeia unicíclica fechada em que todos os vértices do ciclo têm o mesmo número de pendentos. O grafo do Figura 1 é a centopeia unicíclica fechada balanceada $C_{4,2}$.

Teorema: Para todo $n \geq 11$, tal que $n \equiv 0 \pmod{4}$, a centopeia unicíclica fechada balanceada $C_{4,p}$, onde $p = \frac{n-4}{4}$, tem σ e $\sigma^+ < 9$ e energia laplaciana e energia laplaciana sem sinal menor que a do $H(n)$.

Referências

- [1] L.W. Pinheiro, **Energia Laplaciana Sem Sinal de Grafos**. 2018. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.