



## Dinâmica de Quadricópteros com Massa Variável no Tempo

Yan Haeffner<sup>1</sup>, Diego Eckhard<sup>1</sup>

[yan.haeffner@ufrgs.br](mailto:yan.haeffner@ufrgs.br)

<sup>1</sup> Departamento de Sistemas Elétricos de Automação e Energia, UFRGS, Porto Alegre, Brasil

### Introdução

#### Modelo de Quadricóptero com Carga Variável

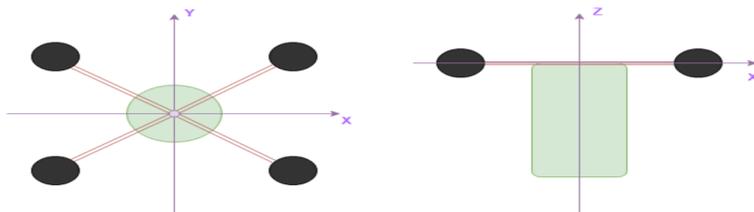


Figura 1: Modelo simplificado de Quadricóptero com Tanque Cilíndrico.

- Modelo de massas pontuais contendo quatro motores em X e um tanque cilíndrico ao centro.
- Problemas podem ocorrer durante a operação do quadricóptero de forma que a posição e até mesmo a massa de algum dos componentes apresentados no modelo sejam modificadas, ocasionando assim elementos não-nulos em relação à seus Momentos de Inércia cruzados, obrigando então uma melhor compreensão das consequências dessas variações para tanto o projeto de controladores dos motores quanto para o devido manuseio do veículo.
- O modelo apresentado possui ampla utilização no desenvolvimento de soluções para a pulverização de produtos agrícolas de forma eficiente tanto no Brasil como no exterior.

#### Definições de variáveis para Equacionamentos

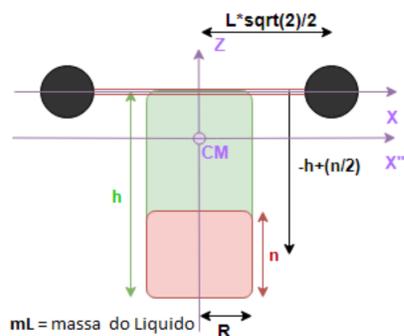


Figura 2: Modelo devidamente estruturado com as variáveis necessárias para estudo.

- Apresenta os valores das distâncias (L) das massas pontuais dos motores até o centro, da altura do cilindro (h) e seu raio (R) e da relação da altura do líquido (n) e do centro de massa (CM) do modelo em relação aos eixos adotados. Equivalência por simetria para o eixo Y.

### Momentos de Inércia no Tempo

- A perda de líquido no cilindro altera os momentos de inércia do veículo ao longo do tempo.
- O sistema simplificado não leva em consideração possíveis deslocamentos do líquido em relação ao eixo de simetria do modelo, assim como admite a simetria e igualdade dos motores utilizados.
- Desenvolvendo literalmente os cálculos dos Momentos de Inércia de massa obtemos relações das mesmas com a massa dos braços (mB), a massa dos motores (mM), a massa do líquido (mL) e as relações de comprimento dos braços (L), altura do cilindro (h) e nível do líquido no mesmo (n). Deve-se levar em consideração que (n) varia no tempo, portanto, os resultados que dependem de (n) também dependem de sua variação.

$$I_{zz} = \left(4 \cdot m_M \cdot L^2\right) + \left(4 \cdot \frac{m_B \cdot L^2}{3}\right) \quad [kg \cdot m^2] \quad I_{xx} = I_{yy} = 2 \cdot m_M \cdot L^2 + 2 \cdot \frac{m_B \cdot L^2}{3} + \frac{m_L}{12} \cdot \left(3 \cdot R^2 + n^2\right) + \left(m_L \cdot \frac{-1 \cdot h \cdot n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho}{4 \cdot m_B + 4 \cdot m_B + n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho}\right) + \left(\frac{4 \cdot m_B}{3} \cdot \frac{-2 \cdot h \cdot n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho + n^2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho}{8 \cdot m_B + 8 \cdot m_B + 2 \cdot n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho}\right) + \left(4 \cdot m_M \cdot \frac{-2 \cdot h \cdot n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho + n^2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho}{8 \cdot m_B + 8 \cdot m_B + 2 \cdot n \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \rho}\right)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m x \cdot y \cdot dm = 0 \quad [kg \cdot m^2]$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int_m x \cdot z \cdot dm = 0 \quad [kg \cdot m^2]$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_m z \cdot y \cdot dm = 0 \quad [kg \cdot m^2]$$

Figura 3: Momentos de Inércia equacionados para o modelo utilizado com parcelas do Teorema dos Eixos Paralelos

### Resultados

Aplicando as equações descritas anteriormente em um modelo de quadricóptero agrícola desenvolvido para o projeto de controladores dos motores do mesmo obteve-se as seguintes relações:

Raio (R) = 0.2m  
 Altura (h) = 0.6m  
 Volume (v) = 0.08m<sup>3</sup> = 80L ≈ 80kg (cheio)  
 Comprimento do Braço (L) = 1m  
 Massa do Motor (mM) = 2.5kg  
 Massa do Braço (mB) = 1.25kg  
 Massa do Quadricóptero sem Líquido = 15 kg  
 Massa do Quadricóptero com Líquido = 95kg

$$I(\text{cheio}) = \begin{bmatrix} 8.77 & 0 & 0 \\ 0 & 8.77 & 0 \\ 0 & 0 & 11.66 \end{bmatrix} [kg \cdot m^2]$$

$$I(\text{vazio}) = \begin{bmatrix} 5.83 & 0 & 0 \\ 0 & 5.83 & 0 \\ 0 & 0 & 11.66 \end{bmatrix} [kg \cdot m^2]$$

Em uma simulação foi reproduzido o voo do modelo apresentado utilizando M.I. variáveis no tempo, por meio de um decréscimo linear no nível (n) do líquido no cilindro do veículo, para comparar a influência dos mesmos na dinâmica do controle do modelo.

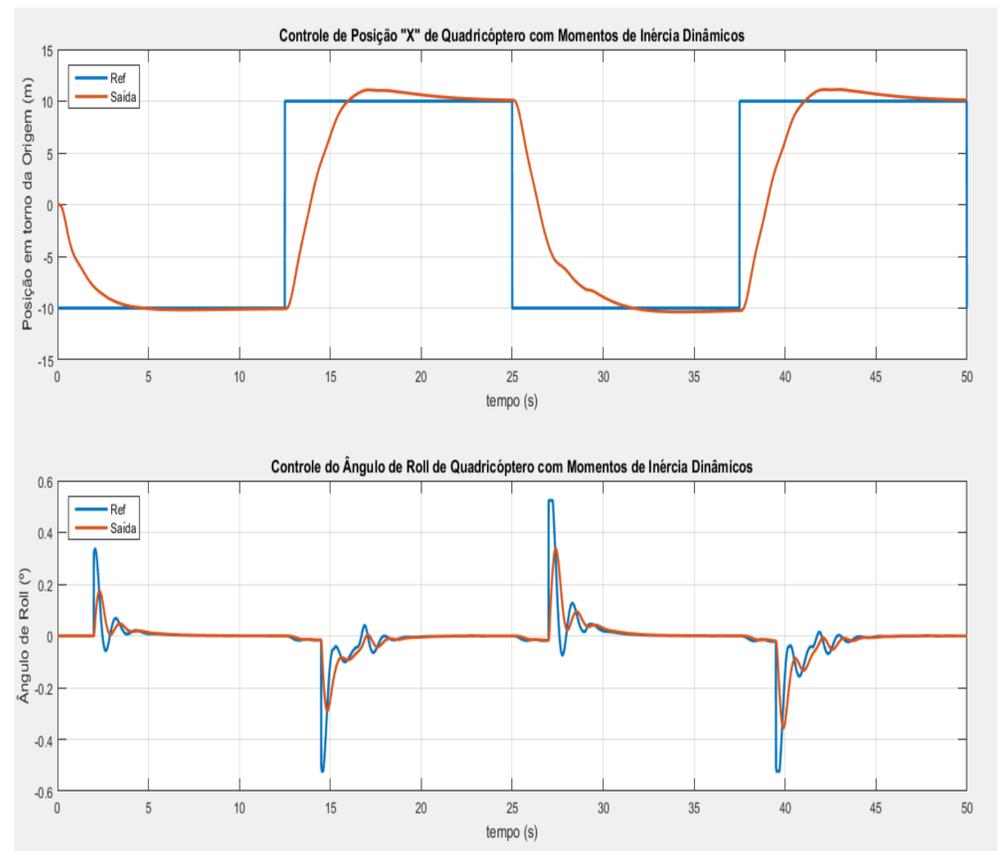


Figura 4: Ensaio simulado de seguimento de referência para os controladores de posição (horizontal) e ângulo de roll com nível do líquido variando linearmente de 0 (cheio) até 50 segundos (vazio).

### Conclusões

- A partir de simulações, percebe-se que a variação dos momentos de inércia pertinentes ao modelo simétrico utilizado não causam influência significativa para o projeto dos controladores a ponto de causar instabilidade na dinâmica de voo do quadricóptero.
- Ainda que surjam propriedades não-simétricas para o equacionamento dos momentos de inércia devido à impossibilidade de adquirir componentes com propriedades físicas/geométricas perfeitamente idênticas para satisfazer a simetria do modelo, a interferência da variabilidade dos momentos de inércia no sistema de controle dos atuadores é suficientemente pequena para ser possível utilizar um valor médio dos momentos de inércia como propriedade de projeto dos controladores.

### Agradecimentos

CNPq, CAPES.