



## Jogadores *Zealots*: estratégias imutáveis no Dilema do Prisioneiro na rede quadrada

Arthur Casa Nova Nonnig  
Orientador: Prof. Dr. Mendeli Henning Vainstein  
IF - UFRGS

### Resumo

O trabalho busca caracterizar um sistema dinâmico baseado na Teoria Evolutiva dos Jogos, com o desenvolvimento de simulações em computador a partir do método de Monte Carlo e análise de modelo de população bem misturada. Estuda-se a cooperação entre jogadores ordinários no Dilema do Prisioneiro em uma rede quadrada de primeiros vizinhos quando adicionados jogadores de estratégia imutável, chamados de *zealots* cooperadores – que nunca alteram sua estratégia e sempre cooperam. Utilizou-se a Dinâmica de Fermi (estocástica) em comparação com os resultados obtidos para um modelo de população bem misturada (equação diferencial não-linear de tempo contínuo). Caracterizou-se que, qualitativamente, a inserção de jogadores *zealots* C tem efeito similar de incentivo à cooperação na rede, apesar de sua influência estar diretamente relacionada a um parâmetro  $\beta$  – ruído na escolha racional do jogador.

### 1. Introdução

A partir da motivação dada pelo artigo de Masuda [1], analisa-se, primeiramente, a cooperação na presença de jogadores *zealots* C com equações de campo médio para o Dilema do Prisioneiro. Esses resultados são posteriormente comparados com as simulações de Monte Carlo na rede quadrada com primeiros vizinhos na Dinâmica de Fermi.

### 2. Modelo de população bem misturada

É possível modelar a evolução de uma população interagente através de equações de sistemas dinâmicos. Esse tipo de modelagem não leva em consideração efeitos espaciais, mas tem grande eficácia quando modelam-se populações bem misturadas, em aproximações de campo médio. No artigo de Masuda [1], a dinâmica evolutiva dos cooperadores ordinários é descrita da seguinte forma para a chamada “*pairwise comparison rule*”.

$$\frac{dX_C}{dt} = \frac{2}{1+y} \left\{ \frac{(1-X_C)(X_C+Y_C)}{1+\exp[-\beta(\pi_C-\pi_D)]} - \frac{X_C(1-X_C+y-Y_C)}{1+\exp[-\beta(\pi_D-\pi_C)]} \right\} \quad (1)$$

Em que  $X_C$  é a densidade de jogadores cooperadores ordinários ( $0 \leq X_C \leq 1$ ),  $y$  representa jogadores *zealots* adicionados à parte ( $y \geq 0$ ) – uma vez que os jogadores ordinários são normalizados a  $1 - Y_C$ , representa a densidade de *zealots* cooperadores ( $0 \leq Y_C \leq y$ ),  $\beta$  é definido como ruído na escolha racional do jogador (busca pela melhor estratégia),  $\pi_C$  e  $\pi_D$  indicam a propensão de cada estratégia reproduzir. Esse *fitness* ( $\pi$ ) é uma função dos ganhos possíveis para determinada estratégia dentro do jogo – explicados na seção de Simulações.

Neste trabalho, adotou-se porcentagem fixa de *zealots* C,  $y = Y_C$ ,  $S = P = 0$  e  $R = 1$ . Ou seja, reduziu-se o problema a um caso unidimensional, uma vez que a porcentagem de jogadores *zealots* C não varia com o tempo. A equação estudada foi:

$$\frac{dX_C}{dt} = \frac{2}{1+Y_C} \left\{ \frac{(1-X_C)(X_C+Y_C)}{1+\exp[-\beta(\pi_C-\pi_D)]} - \frac{X_C(1-X_C)}{1+\exp[-\beta(\pi_D-\pi_C)]} \right\} \quad (2)$$

### 3. Simulações

O modelo utilizado consiste em uma rede quadrada de tamanho  $N=L \times L$  com condições de contorno periódicas, composta por cooperadores, não cooperadores e *zealots* C, que interagem com os quatro primeiros vizinhos (vizinhança de von Neumann) e consigo mesmo (autointeração). Cada tipo de interação tem um valor de *payoff* associado, definido pelas letras R (*reward*), P (*punishment*), T (*temptation*) e S (*sucker*). Os diferentes ganhos em cada jogo estão definidos na Figura 1. Para seguir o jogo Dilema do Prisioneiro, os valores dos *payoffs* devem obedecer  $T > R > P > S$  e  $2R > T + S$ . Para simplificar a análise, utilizou-se  $S = P = 0$ ,  $R = 1$  com variação apenas de T, buscando sempre o valor adequado para o equilíbrio dinâmico de cada dinâmica.

		Jogador b	
		C	D
Jogador a	C	R	T
	D	S	P

Figura 1: Tabela de ganhos para diferentes interações na rede

### 3.1 Dinâmica de Fermi

Nesta dinâmica, a rede é percorrida assincronamente, ou seja, em um passo temporal de Monte Carlo, é escolhido um indivíduo aleatório  $a$ , que joga com seus primeiros vizinhos. Em seguida, um de seus vizinhos,  $b$ , também escolhido aleatoriamente, joga com seus primeiros vizinhos. Com os ganhos calculados para cada indivíduo,  $a$  e  $b$ , o jogador  $a$  decide se vai adotar ou não a estratégia de  $b$  de acordo com uma probabilidade dada pela função de Fermi

$$W_{ab} = \frac{1}{1 + \exp[-\beta(P_b - P_a)]},$$

em que  $P_i$  representa o ganho acumulado pelo jogador  $i$  e a constante  $\beta$  é o ruído, relacionado com decisões irracionais. Ou seja, nesta dinâmica, existe a possibilidade de troca por estratégia de ganho menor. Esse processo é repetido N vezes, desta forma, probabilisticamente, a maior parte dos indivíduos será escolhida.

### 3. Resultados

Dado o modelo especificado por (2), é possível analisar sua evolução temporal a partir dos pontos de equilíbrio do sistema. Aplicou-se computacionalmente o método de Newton-Raphson para encontrar os pontos fixos (derivada nula) estáveis do sistema, variando os parâmetros mais relevantes da dinâmica. Sendo assim, varrem-se os valores de  $Y_C$  – que, nessa análise, é sempre tratado como um valor constante de *zealots* C adicionados na população – e analisa-se o comportamento dos pontos fixos para diferentes valores de  $\beta$ .

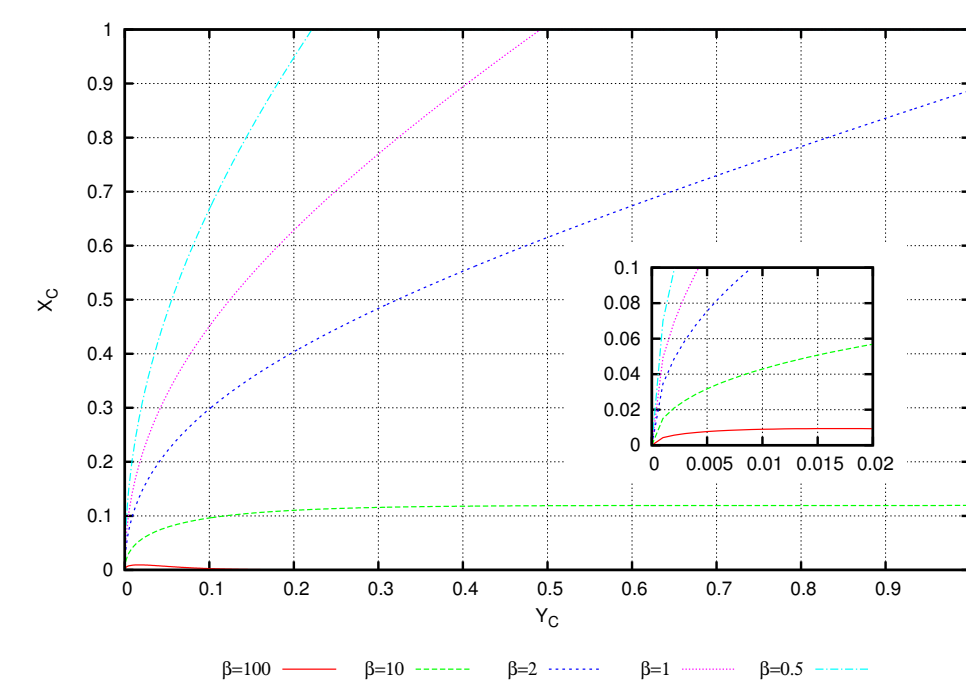


Figura 2: Gráfico dos Pontos de Equilíbrio com  $T = 1.4$ , variando  $Y_C$  para alguns valores de  $\beta$ . Em detalhe, o zoom nos valores próximos a zero

No gráfico,  $Y_C$  é a densidade de *zealots* cooperadores e  $X_C$  é a densidade de jogadores ordinários cooperadores. Percebe-se que uma pequena densidade de *zealots* cooperadores já leva o ponto de equilíbrio a ser positivo, elevando a cooperação.

Na implementação computacional, adotou-se os mesmos parâmetros para a melhor comparação entre os casos. Os pontos representam a média sobre 100 simulações, já dentro do limite assintótico.

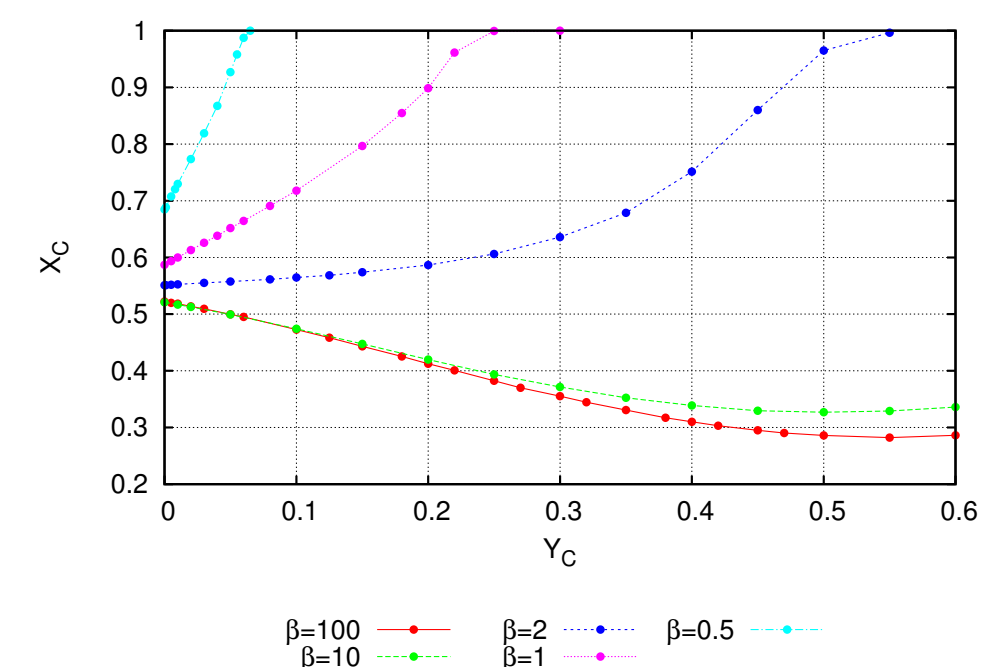


Figura 3: Densidade de cooperadores na rede em função da densidade de *zealots* cooperadores.

Dado o gráfico, podemos perceber que o comportamento para  $\beta = 0,5$  é bastante similar ao apresentado no caso de Sistemas Dinâmicos (Figura 2). No entanto, o fator espacial acrescentado pela rede acelera o processo de crescimento da cooperação. Dessa forma, com uma densidade de *zealots* cooperadores inferior a 0,1, a cooperação já alcança o valor máximo possível entre os jogadores ordinários.

### 4. Conclusão

A partir da análise dos modelos, concluiu-se que a presença desse novo jogador é capaz de incentivar ou desincentivar a cooperação entre jogadores ordinários, dependendo do ruído na dinâmica de evolução. Em ambos os casos, os resultados foram qualitativamente similares para valores pequenos de  $\beta$  (inferiores a 1). Percebeu-se ainda que, no modelo computacional na rede quadrada, é necessária a presença de uma densidade menor de *zealots* C para que a população como um todo seja afetada. Fica evidente o comportamento diferente no caso para  $\beta$  grande ( $> 10$ ), em que a presença de *zealots* cooperadores gera uma queda na cooperação – diferentemente do que ocorre no caso de campo médio.

### Referências

[1] N. Masuda, Evolution of cooperation driven by zealots. *Sci. Rep.* **2**, 646 (2012).