



MÉTODOS ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Augusto Moura Kieling¹
Liliane Basso Barichello²

INTRODUÇÃO

Os **sistemas de equações lineares** estão presentes em diversas áreas da matemática e sua resolução é fundamental em simulações computacionais de **modelagem**. Os processos de solução desses sistemas são classificados, em geral, de duas formas: métodos diretos e **métodos iterativos** [1]. Neste estudo foram abordados dois métodos iterativos: **Jacobi (MJ)** e **Gauss-Seidel (MGS)**. Operando a partir de um chute inicial, eles são caracterizados por uma **matriz de iteração fixa M** e cujas características ou propriedades definem a convergência da solução [1].

DESENVOLVIMENTO

Dado um sistema linear $Ax = b$, com matriz real $A_{n \times n}$, $b, x \in \mathbb{R}^n$, deriva-se uma equação de iteração na forma [2]

$$x^{k+1} = Mx^k + c \quad (1)$$

- x^k : vetor solução na iteração k ;
- k : índice inteiro, com $1 < k < \text{itmax}$, onde itmax é o número de iterações realizadas;
- M : matriz de iteração;
- c : vetor constante.

Dependendo do método, os elementos da matriz de iteração serão definidos distintamente, sendo que a convergência do processo está associada às propriedades desta matriz. Uma outra forma de se reescrever a equação (1) é através das componentes do vetor solução, por exemplo no que define os métodos MJ e MGS

$$MJ: x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_{ij} - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right); \quad (2)$$

$$MGS: x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad (3)$$

com $i, j = 1, \dots, n$ e a_{ij} elementos de A . Nota-se que enquanto MJ utiliza-se apenas dos valores calculados na iteração prévia para obter x^{k+1} , o MGS utiliza componentes já calculadas do estágio atual.

1. Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional, UFRGS
2. Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS

RESULTADOS

Implementou-se no MATLAB os seguintes algoritmos:

- function [x,iter] = mgs (A,b,ltmax,Toler);
- function [x,iter] = mj (A,b,ltmax,Toler);

Entrada: A, b, Toler, ltmax; **Saída:** x, iter; {Toler: tolerância}

	MJ	MGS	MJ	MGS
M1	2.29E-08	5.97E-09	13	8
M1*	1.39E-08	6.68E-09	15	9
M2	-	6.92E-06	-	648
M2*	-	7.02E-06	-	583

Tabela 1: Erro relativo (azul) e iterações realizadas (iter - verde)

Nas tabelas acima, foram utilizadas respectivamente uma matriz diagonalmente dominante (M1) e uma matriz de Hilbert (M2) [2], ambas de ordem três com soluções conhecidas, para verificação de resultados teóricos conhecidos. Cada método foi testado a partir de dois chutes iniciais distintos. No primeiro caso usou-se a sugestão do Campos Filho [1]. No segundo caso o vetor nulo (*). Também foi estabelecida uma tolerância para o erro relativo entre a última iteração e a solução conhecida, menor ou igual a 10^{-07} .

No caso da matriz M1 nota-se que o método MGS converge mais rapidamente que o MJ, conforme esperado. Já no caso da matriz M2, visto que a matriz de Hilbert é mal condicionada e que os métodos possuem diferentes matrizes de iteração [2], a solução obtida através do MJ divergirá. Já o MGS convergirá para a solução, necessitando de menos iterações quando o chute inicial é o vetor nulo.

Testes com outras classes de matrizes e diferentes ordens também foram realizados. Prosseguindo este trabalho, iniciou-se o estudo da resolução dos sistemas lineares obtidos a partir de esquemas numéricos para soluções da equação de transferência radiativa [3].

REFERÊNCIAS

- [1] Campos Filho, F. F. **Algoritmos Numéricos**. São Paulo: LTC, 2001.
- [2] Datta, B. N. **Numerical Linear Algebra and Applications**. Siam, 1995.
- [3] Klose, A. D., Netz, U., Beuthan, J., Hielscher, A. H. *JQSRT*, 2002, 5, 691