Introdução ao estudo de Equações diferenciais parciais

Matheus Agliardi Cardoso
Orientador: Wanderley N. Nascimento

Resumo

Este trabalho consiste em um estudo do método da transformada de Fourier, suas propriedades e alguns teoremas relacionados. Utilizamos tais resultados para obter estimativas *a-priori* para a solução da equação do calor e suas derivadas.

Introdução

Em um estudo introdutório às equações diferenciais parciais (EDP's) vimos alguns conceitos básicos sobre as equações do tipo Kovalevskianas de primeira e segunda ordem. Estudamos as classificações de EDP's, como equação do Transporte, equação de Laplace, equação da Onda e equação do Calor e encontramos suas soluções clássicas. A partir daí vimos teoremas relacionados a estas equações como, por exemplo, o teorema do valor médio para equações de Laplace e do Calor. Passamos a estudar o método transformada de Fourier e suas propriedades e teoremas, dos quais os resultados foram utilizados para encontrar estimativas *a-priori* para a solução da equação do calor e suas derivadas. Técnicas interpolação foram usadas para provar as estimativas $L^p - L^q$ na linha conjugada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \in [1, \infty]$.

A transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{1}$$

Definimos a **Transformada de Fourier** de f a função $\mathcal{F}$ que associa a cada função absolutamente integrável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada pela expressão (1). A **Transformada de Fourier inversa** a função $\mathcal{F}^{-1}$ que associa as funções $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, que pertencem ao conjunto imagem de $\mathcal{F}$, a função absolutamente integrável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \tag{2}$$

Se f é contínua, temos que

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f. \tag{3}$$

Algumas propriedades da transformada de Fourier:

1. **Linearidade**:
   Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são funções absolutamente integráveis e $a, b \in \mathbb{R}$, então
   $$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$
2. **Transformada de derivadas:**
   Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função diferenciável e absolutamente integrável tal que f' também é uma função absolutamente integrável, então
   $$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega).$$
   Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função duas vezes diferenciável e absolutamente integrável tal que f' e f'' também são funções absolutamente integráveis, então
   $$\mathcal{F}(f'')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f\prime)^{=} - \omega^2\mathcal{F}(f)(\omega).$$
   Em geral, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função k vezes diferenciável e absolutamente integrável tal que as suas derivadas até a ordem k também são funções absolutamente integráveis, então
   $$\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k\mathcal{F}(f)(\omega).$$
3. **Derivadas de transformadas:**
   Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável tal que $xf(x)$ também é função absolutamente integrável, então
   $$\mathcal{F}(xf(x))(\omega) = i\mathcal{F}(f)'(\omega).$$
   Em geral, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável tal que $x^k f(x)$ também é função absolutamente integrável, então
   $$\mathcal{F}(x^k f(x))(\omega) = i^k\mathcal{F}(f)^{(k)}(\omega).$$
4. **Transformada de uma translação:**
   Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável, então
   $$\mathcal{F}(f(x-a))(\omega) = e^{-i\omega a}\mathcal{F}(f(x))(\omega).$$
   Reciprocamente,
   $$\mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\omega) = \mathcal{F}(f(x))(\omega - a).$$
5. **Transformada de uma dilatação:**
   Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável e $a \neq 0$, então
   $$\mathcal{F}(f(ax))(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right).$$
   Em particular, com $a = -1$ temos,
   $$\mathcal{F}(f(-x))(\omega) = \mathcal{F}(f)(-\omega).$$
6. **Transformada de uma convolução:**
   Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são funções absolutamente integráveis, então
   $$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

A equação do Calor

Considere o problema de Cauchy para a equação do calor

$$u_t - \Delta u = 0, u(0, x) = \varphi(x).$$

Aplicando a transformada de Fourier e denotando $v = \mathcal{F}(u)(\xi)$, temos

$$v_t + |\xi|^2 v = 0, v(0, \xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi).$$

A solução da EDO acima é dada por

$$v(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t}\mathcal{F}(\varphi)(\xi).$$

Temos as seguintes estimativas $L^2 - L^2$ para as derivadas $\partial_t^k\partial_x^\alpha$ da solução u, $(k + |\alpha| \geq 0)$:

$$\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, \cdot)\right\|_{L^2} \leq C_{k,\alpha} t^{-k-\frac{|\alpha|}{2}} \|\varphi\|_{L^2}, \tag{4}$$

$$\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, \cdot)\right\|_{L^2} \leq C_{k,\alpha}(1+t)^{-k-\frac{|\alpha|}{2}} \|\varphi\|_{H^{2k+|\alpha|}}. \tag{5}$$

De fato, utilizando as propriedades da transformada de Fourier temos

$$\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}((-1)^k i^{|\alpha|}|\xi|^{2k}\xi^\alpha e^{-|\xi|^2 t}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)) \tag{6}$$

e usando a fórmula de Parseval-Plancharel, que diz que $(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))_{L^2} = (f, g)_{L^2}$ para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, obtemos para $t > 0$:

$$\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, \cdot)\right\|_{L^2}^2 = \left\||\xi|^{2k}\xi^\alpha e^{-|\xi|^2 t}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\right\|_{L^2}^2 \leq \left\|\frac{|\xi|^{2k+|\alpha|}t^{k+\frac{|\alpha|}{2}}}{t^{k+\frac{|\alpha|}{2}}} e^{-|\xi|^2 t\mathcal{F}(\varphi)(\xi)}\right\|_{L^2}^2. \tag{7}$$

E como $|\xi|^{2k+\alpha}t^{k+\frac{|\alpha|}{2}}e^{-|\xi|^2 t} = (|\xi|^2 t)^{k+\frac{|\alpha|}{2}}e^{-|\xi|^2 t}$ é limitado uniformemente, segue que para todo t e $|\xi|$ existe uma constante $C_{k,\alpha}$ tal que

$$\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, \cdot)\right\|_{L^2}^2 \leq C_{k,\alpha} t^{-2k-|\alpha|} \|\varphi\|_{L^2}^2,$$

provando assim assim a estimativa (4) como queríamos.
Para provar a estimativa (5), observe que (4) é válido para $t \geq 1$. Para um t muito pequeno no intervalo $(0, 1]$ nos assumimos outra regularidade para φ e temos a seguinte estimativa

$$\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, \cdot)\right\|_{L^2}^2 = \left\||\xi|^{2k}\xi^\alpha e^{-|\xi|^2 t}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\right\|_{L^2}^2 \leq \left\||\xi|^{2k+|\alpha|}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\right\|_{L^2}^2 \leq \|\varphi\|_{H^{2k+|\alpha|}}^2, \tag{8}$$

que nos remete a estimativa (5). Observe que utilizamos a regularidade $H^{2k+|\alpha|}$ quando $t \to +0$, então o decaimento $(1+t)^{-k-\frac{|\alpha|}{2}}$ continua uma função limitada quando $t \to +0$.
Agora para a estimativa $L^1 - L^\infty$ utilizamos a Propriedade 6 da transformada de Fourier obtendo:

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t}) * \varphi. \tag{9}$$

Utilizando a desigualdade de *Young* que diz que: Se $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então $u := f * g \in L^q$ com

$$\|u\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^r} \|g\|_{L^p}, \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty \text{ e } 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$$

e os teoremas 24.2.1, 24.2.2 e 24.2.3 [1] (p. 413-416), concluímos que

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \left\|\mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^2 t})\right\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^1} \leq Ct^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L^1} \tag{10}$$

Agora aplicando os corolários 24.2.1, 24.2.2 e 24.2.3 [1] (p. 413-416) referentes aos teoremas anteriores, agora relacionados com as estimativas das derivadas, temos:

$$\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, \cdot)\right\|_{L^\infty} \leq C_{k,\alpha} t^{-\frac{n+2k+|\alpha|}{2}} \|\varphi\|_{L^1}. \tag{11}$$

Conclusões

Agora com as estimativas $L^2 - L^2$ e $L^1 - L^\infty$ podemos aplicaro teorema de interpolação, veja proposição 24.5.1 [1] (p. 430), para concluir a estimativa $L^p - L^q$ da solução da equação do calor na linha conjugada:

$$\left\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u(t, \cdot)\right\|_{L^q} \leq C_{k,\alpha} t^{-k-\frac{\alpha}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|\varphi\|_{L^p},$$

para $p \in [1, 2]$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Referências

[1] Ebert, Marcelo R., Reissig, Michael *Methods for Partial Differential Equations: Qualitative Properties of solutions, phase space, semilinear models*, Birkhauser, (2017).

[2] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations*; American Mathematical Society, (2010).

[3] Biezuner, Rodney J., *Notas de aula Introdução as equações Diferenciais Parciais*