



Um Estudo de Caso Unidimensional de Transporte Radiativo aplicando a aproximação SP_1 e o Método de Elementos Finitos

Gabriel Ribeiro Padilha^(a), Prof. Dr. Pedro Henrique de Almeida Konzen^(b)

^(a) Curso de Bacharelado em Matemática Pura, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

^(b) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística

{gabrielribeiro_05@yahoo.com, pedro.konzen@ufrgs.br}

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, buscamos a familiarização com métodos numéricos para equações de transporte radiativo através da resolução de problemas em uma dimensão. Para tal foi estudado como o método de elementos finitos (MEF) e as aproximações SP_N funcionam e também onde se aplicam. As aproximações SP_N foram introduzidas por Gelbard em 1961, no campo da teoria de reatores nucleares [4], sendo as aproximações SP_1 referentes aos problemas unidimensionais e escolhidas para este trabalho. Com isso, fizemos uma comparação do quão próximos os resultados numéricos são, assumindo uma tolerância máxima de 10^{-14} .

APROXIMAÇÃO SP_1

Consideramos a seguinte aproximação SP_1 [2,4] para problemas de transporte radiativo

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3(\sigma+\kappa)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \kappa \varphi(x) = 4\pi\kappa B(x), x \in (x_0, x_1), \quad (1)$$

$$\varphi(x) + (-1)^{i+1} \left(\frac{1+3r_2}{1-2r_1} \frac{2\varepsilon}{3(\sigma+\kappa)} \right) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) = 4\pi B(x), x = x_i, i = 0, 1. \quad (2)$$

onde φ denota o fluxo radiativo, B denota a fonte, κ é o coeficiente de absorção, σ é o coeficiente de espalhamento, ε é o parâmetro adimensional

$$\varepsilon := \frac{1}{\kappa_{ref} x_{ref}}, 0 < \varepsilon \ll 1,$$

com x_{ref} é a escala de comprimento e κ_{ref} é o parâmetro de absorção de referência, r_1 e r_2 são parâmetros que dependem de condições no contorno do problema físico.

APROXIMAÇÃO MEF

O sistema de equações (1)-(2) foi aproximado numericamente utilizando o método de elementos finitos [1,5]. Para tanto, utilizamos a formulação de Galerkin no espaço das funções afins por partes, encontrando:

$$a(\varphi, v) := \int_{x_0}^{x_1} \kappa \varphi v dx + \frac{\varepsilon^2}{3(\sigma+\kappa)} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\varepsilon}{2} \varphi(x_1) v(x_1) + \frac{\varepsilon}{2} \varphi(x_0) v(x_0),$$

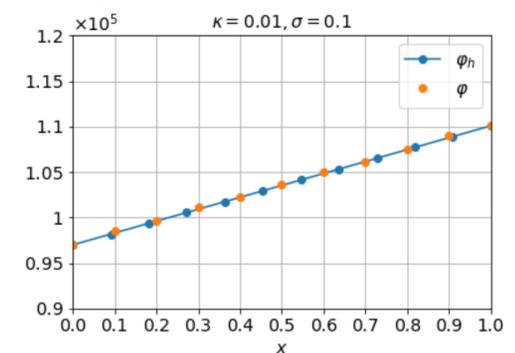
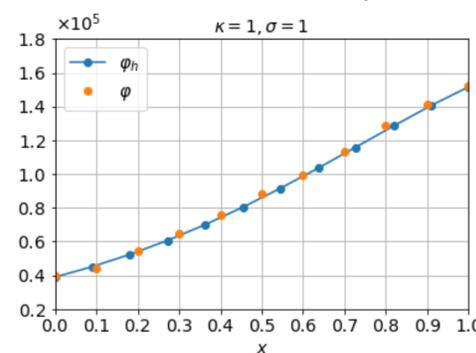
$$L(v) := \int_{x_0}^{x_1} \kappa (4\pi B) v dx + 2\pi\varepsilon B(x_1) v(x_1) + 2\pi\varepsilon B(x_0) v(x_0),$$

onde o problema fraco se resume em encontrar $\varphi \in V$ tal que $a(\varphi, v) = L(v), \forall v \in V$. Temos que $a(\varphi, v)$ é a forma bilinear e $L(v)$ a forma linear.

A implementação numérica foi realizada em linguagem computacional Python com auxílio do FEniCS [3], pacote Python de elementos finitos.

RESULTADOS

O estudo de caso apresentado assume $(x_0, x_1) = (0, 1)$, $B = aT^4$ (constante de Stefan-Boltzmann), com $T(x) = 1000 + 800x$. Na fronteira, assumimos vácuo nos contornos, levando a $r_1 = r_2 = 0$. Dois testes numéricos são apresentados: (1) $\sigma = 1, \kappa = 1$; (2) $\sigma = 0,1$ e $\kappa = 0,01$. As soluções obtidas neste trabalho são discutidas frente aos resultados apresentados em [2].



Em ambos os gráficos temos em azul as soluções obtidas neste trabalho, e em laranja as soluções dadas em [2]. Podemos verificar que embora os métodos de resolução sejam diferentes, os resultados ficam bem próximos.

REFERÊNCIAS

- ¹ A. E. Assan, *Método dos elementos finitos : primeiros passos*, Coleção livro-texto / UNICAMP, UNICAMP, Campinas, 2003.
- ² M. Frank, M. Seaid, A. Klar, R. Pinnau, G. Thömmes, J. Janicka, *A comparison of approximate models for radiation in gas turbines*, Progress in Fluid Dynamics **4** (2004), 191-197.
- ³ H. P. Langtangen and A. Logg, *Solving PDEs in Python: The FEniCS tutorial I*, Vol. 3, Springer, 2016.
- ⁴ E. W. Larsen, G. Thömmes, A. Klar, M. Seiäd, and T. Götz, *Simplified SP_N approximations to the equations of radiative heat transfer and applications*, Journal of Computational Physics **183** (2002), 652-675.
- ⁵ M.G. Larson and F. Bengson, *The finite element method: Theory, implementation, and applications*, Springer, 2013.