Universidade: presente!

XXXI SIC

21. 25. OUTUBRO • CAMPUS DO VALE

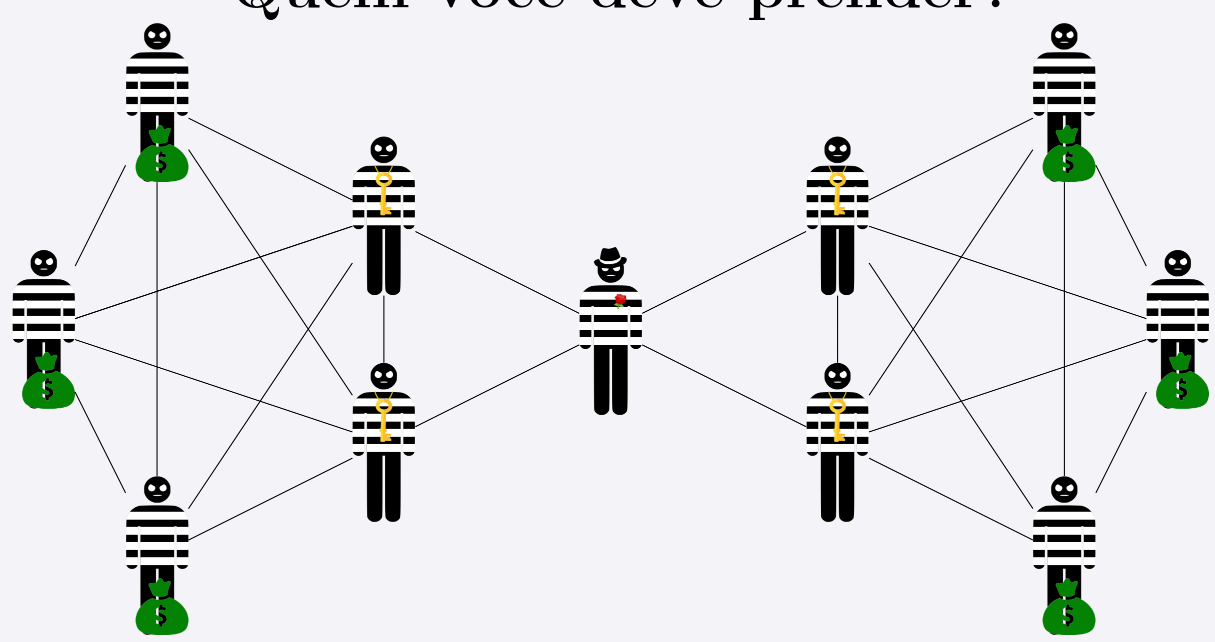
Instituto de MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UFRGS

Jogos em Grafos
Um Modelo Econômico para Redes Fixas

Autor: Eduardo David Nonnenmacher, Orientador: Vilmar Trevisan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

CONSIDERE A SITUAÇÃO. Você é o chefe de polícia de uma cidadezinha e conhece todos os criminosos da cidade, quanto cada criminoso comete de crime e quais as relações entre os criminosos. Você tem como objetivo diminuir o crime o máximo possivel da cidade, mas tem um problema, a cidade só possui uma cela que acomoda apenas uma pessoa.

Quem você deve prender?



Para responder essa pergunta devemos entender como que a rede de criminosos influencia no comportamento do indivíduo e como a retirada de um indivíduo influencia no comportamento dos demais.

O MODELO. Podemos analisar esse e outros problemas a partir da classe de problemas onde a utilidade do jogador é dada pelo modelo linear-quadrático:

Benefício do jogador i sobre suas ações.

$$u_i(x_1,\dots,x_n) = \alpha_i x_i + \frac{1}{2}\sigma_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j}\sigma_{ij}x_i x_j$$

Custo do jogador i sobre suas ações.

Influência do jogador j sobre i.

O jogador i pode se beneficiar das ações de j (complementos estratégicos para i) ou pode se prejudicar (substitutos estratégicos para i). Podemos reescrever essa utilidade de uma outra forma, com novos coeficientes.

Benefício do jogador i sobre suas ações.

Substituibilidade uniforme.

$$u_i(x_1,\dots,x_n) = \alpha_i x_i - \frac{1}{2}(\beta-\gamma)x_i^2 - \gamma\sum_{j=1}^{n} x_i x_j + \lambda\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_i x_j$$

Custo dos jogadores sobre suas ações.

Complementaridade Relativa.

Essa forma nos permite identificar uma rede de complementaridade relativa local $G=(g_{ij})$, onde $0\leq g_{ij}\leq 1$ mede a força entra a conexão de i e j.

Centralidade de Bonacich

Como sabemos o quão central um jogador é para a rede? Bonacich (1987) propôs que a centralidade de um jogador fosse dada por:

Peso total de todos os caminhos de comprimento k de i para j.

Constante não-negativa tal que a soma esteja bem definida.

$$\mathbf{b}_i(G,a) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} a^k g_{ij}^{[k]}$$

Peso total de todos os caminhos de i para j.

Equilíbrio de Nash

Quando nenhum jogador consegue melhorar o seu ganho sem que algum outro jogador altere suas ações, dizemos que o jogo está em equilíbrio.

$$\mathbf{b}_{i,\vec{\alpha}}(G,\lambda^*) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda^*)^k g_{ij}^{[k]}$$

$\lambda^* = \lambda/\beta$ força das relações locais relativa ao próprio custo.

Maior autovalor da matriz G.

Caso $1 > \lambda^*\mu_1(G)$, então o somatório acima esta bem definido e a ação de cada jogador no equilibrio é proporcional à $\mathbf{b}_{i,\vec{\alpha}}(G,\lambda^*)$.

Key Player

Se sabemos a ação que cada jogador toma no equilíbrio, temos como calcular o impacto da sua retirada. A diferença nas ações agregadas é o que chamamos de *intercentralidade* e é dada por:

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbf{b}_{j,\vec{\alpha}}(G,\lambda^*) - \sum_{j\neq i}\mathbf{b}_{j,\vec{\alpha}}(G_{-i},\lambda^*)$$

Rede obtida pela retirada do jogador i.

Os jogadores com maior intercentralidade é o que chamamos de *key players* e sua retirada minimizará as ações agregadas.

INDO ALÉM. Os resultados acima nos motivam a reanalisar diversas teorias econômicas e sobre redes sociais à luz da utilidade linear-quadrática. A influência do grupo social no comportamento deliquente é apenas um exemplo entre as aplicações.

Obviamente, a teoria tem suas limitações e avanços nas hipóteses tem sido feitos. Há também questões mais profundas a superar, como considerar que o único incetivo que um jogador tem na rede é aumentar a sua utilidade esperada. Esses problemas nos fornecem uma potencial direção a seguir.

Referências

[1] Ballester, Calvó-Armengol, e Zenou, *Who's who in networks. Wanted: the key player*, Econometrica, Vol. 74, No.5, 1403-1417, Setembro, 2006.

[2] Bramoullé, Kranton *Games Played on Networks*, Oxford Handbook on the Economics of Networks, Março, 2015.

[3] Jackson, Zenou, *Games on Networks*, Handbook of Game Theory Vol. 4, Janeiro, 2014.

[4] Ballester, Calvó-Armengol, e Zenou, *Deliquent networks*, Journal of the European Economic Association, 8(1):34–61 Janeiro, 2010.