

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

Investigando a entropia de emaranhamento das distribuições partônicas

Aluno: Gabriel Silveira Ramos
Orientador: Magno V. T. Machado

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul para obtenção do título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-graduação em Física.

Área de concentração: Física de Partículas de Altas Energias.

Porto Alegre - RS

2020

Em memória de Maria Hoffmann do Amaral Ramos.

“Chaos was the law of nature; Order was the dream of man.”

-Henry Adams

Agradecimentos

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por financiar este trabalho. Sem a confiança dos recursos investidos em mim, este trabalho não seria possível.

Família *Peirano* por me oferecer abrigo no começo da graduação.

Família *Krigger* pelo apoio.

Família *Ramos* por todo amor e carinho para comigo.

Nicolas Muller por ter me iniciado nas ciências exatas.

Magno Valério Trindade Machado por estar sempre disponível para me orientar e ajudar.

Diego Pierozan, Guilherme Petrini, João Paulo Port, Lars Sanhudo, Júlio Broliato, Kelvin Henrique Sayao, Maurício Rinaldi, Henrique Rubleski Mezzômo, Felipe Tomazoni da Silva, Franco Tonietto e Jeferson Jonas Cardoso, tanto pelos momentos de descontração, como pelos de conversa e reflexão.

Aos meus pais, *Jomar Ramos* e *Nice Ramos*, por todo amor e cuidado para comigo.

Resumo

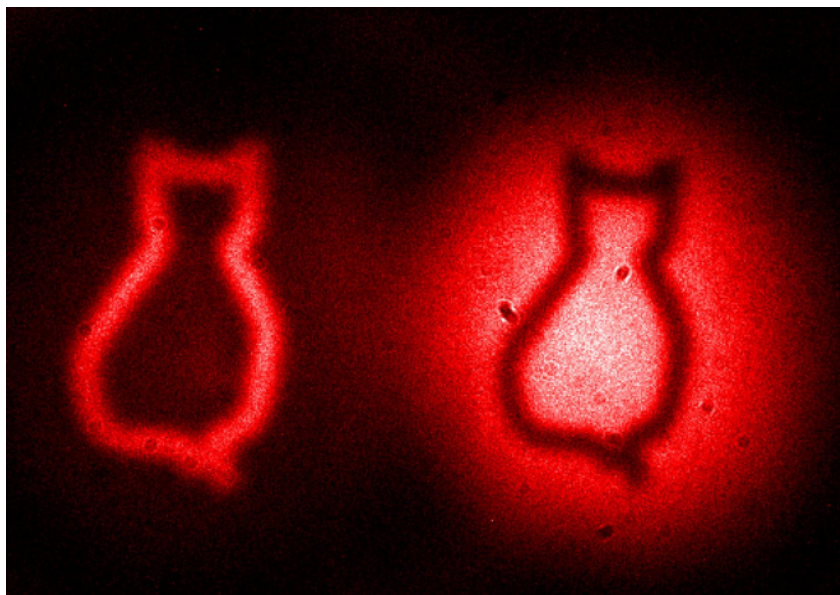
Este trabalho tem como objetivo analisar a noção de entropia dos glúons na função de onda hadrônica no regime de altas energias (pequeno x de *Bjorken*) e sua conexão com a multiplicidade de partículas no estado final. Como os experimentos podem apenas sondar uma pequena parte da função de onda hadrônica enquanto a informação restante (pártons expectadores) é integrada, uma entropia de emaranhamento pode ser definida e calculada. Revisam-se as abordagens atuais para obtenção desta entropia usando o formalismo de evolução QCD no regime de pequeno- x realizando a comparação entre as suas diferentes definições, como as de *von Neumann* e de *Wehr* no contexto da QCD em altas energias.

Abstract

This work aims to analyze the notion of gluon entropy in the hadronic wave function in the high energy regime (small x of *Bjorken*) and its connection with the multiplicity of particles in the final state. Since the experiments can only probe a small part of the hadronic wave function while the remaining information (expectors partons) is integrated, an entanglement entropy can be defined and calculated. Current approaches for obtaining this entropy are reviewed using the QCD evolution formalism in the small- x regime by comparing its different definitions, such as those of *von Neumann* and *Wehrl* in context of high energy QCD.

Comunicado de Imprensa

Calculando a ignorância



Imagine que você mova um objeto, como por exemplo um dado. Imediatamente após o seu movimento, um segundo dado próximo também se move, mesmo que ele não esteja sob o seu alcance. Esse tipo de experimento pode parecer absurdo no cotidiano, mas não para a mecânica quântica, sendo conhecido como emaranhamento quântico.

Felizmente para os donos dos cassinos, o emaranhamento quântico ocorre apenas em objetos muito pequenos, como partículas subatômicas, átomos e moléculas. As regras adjacentes a este fenômeno podem ser expressas mais ou menos como se segue: duas ou mais partículas estão inicialmente unidas e por algum motivo elas se separam, após isso, independentemente da distância em que elas estão, se você interagir com uma delas, as demais responderão instantaneamente. O próprio *Einstein* se referia ao fenômeno como "ação fantasmagórica a distância".

Atualmente pesquisadores brasileiros investigam uma relação entre o emaranhamento quântico e o con-

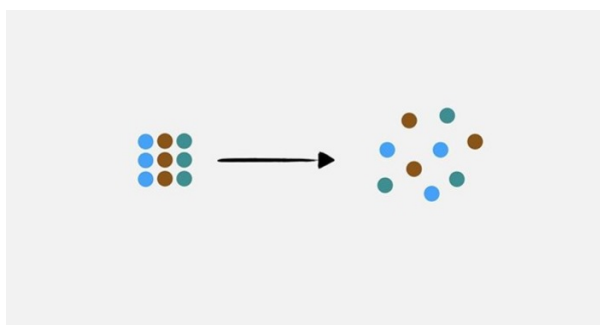
junto de partículas intra nucleares denominadas *pártons*, que podem ser interpretadas como pequenos pedaços de um núcleo atômico depois que ele é rompido por uma colisão de partículas, como por exemplo, quebrar um próton colidindo-o com um elétron.

Para entender esta relação, voltemo-nos novamente aos dados e cassinos. Seria interessante explorar a possibilidade de prever quais seriam os resultados dos jogos com dados para poder apostar confiadamente, aumentando nosso saldo bancário. Contudo, um jogo justo envolvendo um dado, não pode ser previsto, pois a probabilidade de se obter os resultados é a mesma. Por exemplo, nada favorece uma aposta em '3' a mais do que em '5', as duas faces tem a mesma chance de ocorrer. E no final das contas os jogos são sempre feitos de uma maneira em que na média a casa ganhe, não tem jeito.

Um dos ramos da física que utiliza das teorias de probabilidades é a mecânica estatística que também tem relações com a termodinâmica, onde a chamada segunda lei afirma que a entropia só tende a aumentar. Para entender esta relação, os dados seguem sendo um bom exemplo: uma jogada tem o seu resultado, que não podemos prever com exatidão qual foi. A entropia mede o quão grande será o nosso desvio de acerto na aposta, ou quão certo ele fora, ou seja, é uma medida do tamanho da ignorância.

Os *pártons* como partículas quânticas também possuem características probabilísticas e como eles estavam coesas no próton antes da colisão, uma vez espalhadas estão emaranhadas. Então a partir disto, é possível calcular uma entropia para os *pártons*.

Os resultados foram analisados em energias em que podem ser obtidas em aceleradores de partículas modernos como o LHC (*Large Hadron Collider*). A junção entre estes três ingredientes, *pártons*, emaranhamento e entropia, revelou que se a pancada entre partículas for energética o suficiente, seria possível obter como resultado da quebra com a mesma probabilidade, tanto 3 *pártons* como 500, assim como num dado, contudo, podendo ter até infinitas faces.



Contatos para entrevistas:

Gabriel Silveira Ramos, aluno de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, ggramos.7@hotmail.com ; (51) 981249559.

Magno Valério Trindade Machado, Professor Adjunto, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, magno.machado@ufrgs.br.

Fonte das Imagens: *National Geographic*, *Fermat's Library* e autores.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 11 |
| 1.1 | As ferramentas | 12 |
| 1.2 | O objeto | 20 |
| 1.3 | A proposta | 31 |
| 2 | Entropia e emaranhamento | 33 |
| 2.1 | Entropia na termodinâmica | 33 |
| 2.2 | Fundamentos da mecânica estatística de equilíbrio | 35 |
| 2.3 | Entropia de <i>von Neumann</i> | 36 |
| 2.3.1 | Construção do operador densidade | 37 |
| 2.3.2 | Representação dos <i>ensembles</i> micro-canônico e canônico quânticos | 39 |
| 2.4 | Entropia de <i>Werhl</i> | 41 |
| 2.5 | Características entrópicas globais | 44 |
| 2.5.1 | Propriedades básicas | 45 |
| 2.5.2 | Concavidade | 45 |
| 2.5.3 | Aprimoramento de mistura | 46 |
| 2.5.4 | Continuidade | 46 |
| 2.5.5 | Aditividade | 46 |
| 2.5.6 | Subaditividade e o traço parcial | 47 |
| 2.6 | Emaranhamento Quântico | 48 |
| 3 | Modelo a pártons e QCD perturbativa | 50 |
| 3.1 | Regras de Feynman | 52 |
| 3.2 | Regularização Dimensional | 55 |
| 3.3 | Espalhamento elétron-próton elástico | 57 |
| 3.4 | Espalhamento elétron-próton inelástico | 59 |
| 3.5 | Regras de soma | 62 |
| 3.6 | Equações DGLAP (<i>Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli, Parisi</i>) | 63 |
| 3.7 | Equação BFKL (<i>Balitsky, Fadin, Kuraev, Lipatov</i>) | 67 |
| 3.8 | Dipolos de cor e a equação BK (<i>Balitsky, Kovchegov</i>) | 68 |
| 3.9 | Saturação Partônica | 71 |

| | |
|---|------------|
| 4 A entropia partônica | 73 |
| 4.1 O emaranhamento como causa da entropia | 73 |
| 4.2 Entropia de <i>von Neumann</i> : Modelo (1 + 1)-dimensional | 75 |
| 4.3 Entropia de <i>von Neumann</i> : Modelo (3 + 1)-dimensional | 78 |
| 4.4 Entropia de Wehrl na QCD | 81 |
| 4.5 A entropia de <i>Wehrl</i> para os pártons | 85 |
| 4.6 O limite assintótico da entropia de Wehrl | 89 |
| 5 Conclusões | 91 |
| A Variáveis de Mandelstam | 96 |
| B Rapidez, massa transversa e <i>momentum</i> transverso | 98 |
| C Variáveis do cone de luz | 102 |
| D O procedimento de <i>Gram-Schmidt</i> | 104 |
| E Método de integração do ponto de sela não degenerado | 106 |

Capítulo 1

Introdução

Ludwig von Mises no desenvolvendo da *praxeologia*, mais centradamente com o seu *magnum opus*, *Human Action: A Treatise on Economics* [1] (Ação Humana: Um Tratado sobre Economia), disserta sobre a causalidade de uma forma geral,

"Man is in a position to act because he has the ability to discover causal relations which determine change and becoming in the universe. Acting requires and presupposes the category of causality. Only a man who sees the world in the light of causality is fitted to act. In this sense we may say that causality is a category of action. The category means and ends presupposes the category cause and effect. In a world without causality and regularity of phenomena there would be no field for human reasoning and human action. Such a world would be a chaos in which man would be at a loss to find any orientation and guidance. Man is not even capable of imagining the conditions of such a chaotic universe."[O homem tem condições de agir porque tem a capacidade de descobrir relações causais que determinam mudanças e transformações no universo. Ação requer e pressupõe a existência da causalidade. Só pode agir o homem que percebe o mundo à luz da causalidade. Neste sentido é que podemos dizer que a causalidade é um requisito da ação. A categoria meios e fins pressupõe a categoria causa e efeito. Num mundo sem causalidade e sem a regularidade dos fenômenos, não haveria campo para o raciocínio humano nem para a ação humana. Um mundo assim seria um caos no qual o homem estaria perdido e não encontraria orientação ou guia. O homem nem é capaz de imaginar um universo caótico de tal ordem.]

Neste contexto, o autor tateia a construção de um método apriorístico, portanto, atemporal, na análise da ação humana. A física necessariamente deve caminhar nestas linhas e as leis naturais devem ser atemporais sendo só possível determina-las a partir da correlação causa e efeito, intuindo e confirmando empiricamente se a noção determinada é verdadeira. Por exemplo, *Einstein* ao reformular o conceito de simultaneidade sabia que só teria êxito na junção do espaço-tempo se a sacra causalidade se mantivesse alicerçada.

O crescente sucesso da mecânica newtoniana, mais tarde revista e generalizada nas formulações lagrangiana e hamiltoniana, impulsionariam, em suas origens, a noção determinística da realidade. O próprio *Marquês de Laplace* analisando este sucesso e a reversibilidade temporal das equações sugeriu que o conhecimento das posições e velocidades de todas as partículas do universo, determinada em um dado momento, permitiria a especulação do estado do universo em todo o passado e em todo o futuro.

Contudo, estas investigações foram fortemente abaladas ainda no século XIX: inicialmente pela descoberta da entropia, uma saturação espontânea e incontornável na degradação energética de um sistema termodinâmico. Adjacente a ela, a *irreversibilidade*. Os métodos estatísticos revelaram ainda mais sobre o caráter entrópico. Partindo do postulado fundamental da mecânica estatística de equilíbrio [2],

Em um sistema estatístico fechado, com energia fixa, todos os microestados acessíveis são igualmente prováveis.

Neste sistema, a entropia será máxima. Agora, digamos que é necessário realizar uma aposta; escolhendo qual será o microestado de uma partícula num sistema controlado rigorosamente pela postulado fundamental. Todos os microestados possuem a mesma possibilidade, a aposta não pode em nenhum sentido ser racional; a ela falta a noção de causa e efeito. Além disto, mesmo que seja possível a construção de um sistema ordenado, a medida que o mesmo sofre processos, a segunda lei da termodinâmica sanciona que a entropia só tende a aumentar, retornando novamente a um estado da perda de informação (Fig.[1.1]), porém, de equilíbrio, ou seja, *o caos*^{*}, intimamente ligado ao conceito de entropia.

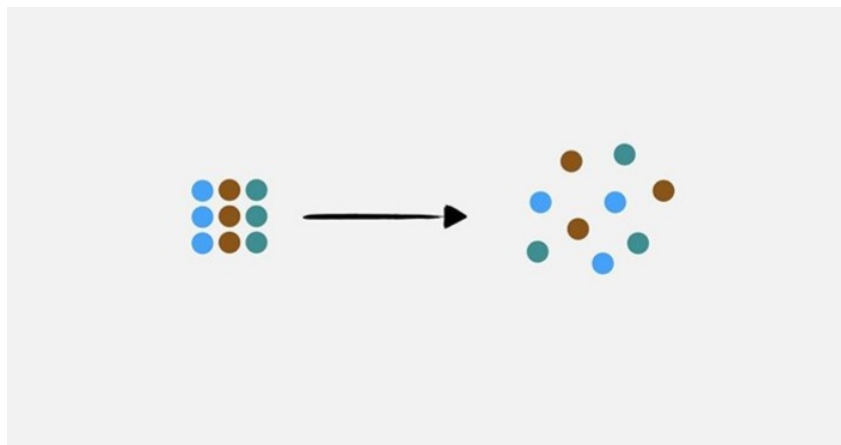


Figura 1.1: Um sistema inicialmente ordenado. Uma vez exposto ao ambiente, naturalmente se degrada.

A investigação da forma elementar última da matéria revelou que ela consiste em pequenos pedaços rodeados por enormes regiões vazias entre si, performando-se sempre em grupos de constituintes idênticos replicados astronomicamente para compor tudo o que *existe*. Desta perspectiva, uma candidata no entendimento desta naturalidade em que a natureza cede à desordem, no nível mais fundamental moderno, os quarks e o modelo a pártons podem revelar pormenores deste processo. Ou seja, este trabalho busca o entendimento do caos no *quase* vazio.

1.1 AS FERRAMENTAS

Em 1824, *Nicolas Sadi Carnot* publicou o seu *Réflexions sur la Puissance Motrice du Feu et sur les Machines Propres a Développer Cette Puissance* [3] (Reflexões sobre Potência Motriz do Fogo e Máquinas Próprias para

^{*}Neste trabalho o conceito de caos é aquele usualmente associado à entropia, que consiste na caracterização de um sistema desordenado; nada tem a ver com as teorias clássicas do caos que utilizam de equações logísticas, fractais, entre outros constructos teóricos na investigação da evolução de um sistema inicialmente ordenado para o caos devida a sensibilidade de tais sistemas com as suas condições iniciais.

Aumentar essa Potência), sua única obra, que na época de lançamento não obteve a devida atenção. O físico alemão *Rudolf Clausius* tendo dito contato com a republicação da obra, em 1865, cunhou então o conceito de *entropia* [4]. *Clausius* queria que o novo termo soasse como *energia* [5]:

"Da ich es aber für besser halte, die Namen derartiger für die Wissenschaft wichtiger Grossen aus den alten Sprachen zu entnehmen, damit sie unverändert in allen neuen Sprachen angewandt werden können, so schlage ich vor, die Grosse *S* nach dem griechischen Worte $\epsilon\nu\tau\rho\pi\iota\alpha$, die Verwandlung, die Entropie des Körpers zu nennen. Das Wort Entropie habe ich absichtlich dem Worte Energie möglichst ähnlich gebildet, denn die beiden Grossen, welche durch diese Worte benannt werden sollen, sind ihren physikalischen Bedeutungen nach einander so nahe verwandt, dass eine gewisse Gleichartigkeit in der Benennung mir zweckmässig zu sein scheint." [Mas, como considero melhores termos para magnitudes importantes das línguas antigas, para que possam ser adotadas inalteradas em todas as línguas modernas, proponho chamar a magnitude *S* de entropia do corpo, da palavra grega $\epsilon\nu\tau\rho\pi\iota\alpha$, *transformação*. Formei intencionalmente a palavra entropia para ser o mais semelhante possível à palavra energia; pois as duas magnitudes a serem indicadas por essas palavras são tão quase aliadas a seus significados físicos, que uma certa semelhança na designação parece ser desejável.]

É compreensível a preocupação conceitual de *Clausius* tendo em mente que tanto ele como *Carnot* buscavam um entendimento, *grosso modo*, do funcionamento das máquinas térmicas. Todavia, atualmente o conceito de entropia é mais abrangente do que fora originalmente pensado.

Muito dos desenvolvimentos de *Clausius* e *Carnot* corroboraram na construção da termodinâmica e da teoria cinética dos gases, embora até então, a hipótese atômica ainda não fosse hegemônica. Estes avanços possibilitaram o modelo dos *gases ideais*, sendo que na segunda metade do século XIX, era de entendimento acadêmico por meios experimentais que o gás ideal tinha sua entropia (ou melhor, sua equação de estado), dada por

$$S(N, V, T) = NS_0 + kN \ln \left(\frac{V}{N} \right) + \frac{3kN}{2} \ln T. \quad (1.1.1)$$

Mas seria possível a partir de modelos mecânicos microscópicos derivar esta expressão? *Ludwig Boltzmann* (Fig.[1.2]) em mais de uma forma solucionou este problema, sendo a primeira a partir de mudanças nas variáveis das distribuições maxwellianas, revisando profundamente as colisões internas em um gás (uma vez que ele acreditava ser este o principal mecanismo evolutivo de um sistema rumo ao equilíbrio) fazendo uso da mecânica newtoniana e da teoria de probabilidades. Outro artifício no seu compêndio era o teorema H [6], que utilizava argumentos relacionados a uma distribuição $H = H(t)$ que nunca crescia no tempo, sendo assim,

$$S \propto -H. \quad (1.1.2)$$

Suas teorias foram objeto de inúmeras críticas, fazendo com que *Boltzmann* passasse grande parte do sua vida defendendo seus pontos e estratégias. Assim, a maciça desaprovação quanto ao seu trabalho fizeram-no mudar de postura, desenvolvendo um modelo puramente estocástico para um gás (e obtendo o mesmo resultado de outrora). Ele definiu o conceito de macroestado, que corresponde a um conjunto muito grande Ω

de microestados possíveis e então surge a relação entropia-estatística dando-se por[†],

$$S = k_B \ln \Omega. \quad (1.1.3)$$

Somando estes resultados aos trabalhos do físico *James Clerk Maxwell* é dado o nascimento da mecânica estatística e a compatibilização com um método estocástico possibilitou diversas aplicações no seu escopo, além de gerar a primeira noção entrópica abordada neste trabalho, a *noção entrópica boltzmanniana*.



Figura 1.2: Cemitério central de *Viena* onde a lápide de *Boltzmann* tem a sua equação devidamente exposta.

Enquanto a mecânica estatística promovia um sucesso brilhante na explicação dos processos térmicos, a física clássica previa resultados absurdos quando aplicada em alguns fenômenos eletromagnéticos, em particular, a "catástrofe do ultravioleta" que previa que a energia irradiada por um corpo negro poderia ser infinita. *Max Planck* percebeu que poderia escapar desta anomalia [8] - e ajustar a curva experimental - assumindo que a radiação eletromagnética é quantizada em pequenos pacotes energéticos quantitativamente dados por:

$$E = h\nu, \quad (1.1.4)$$

sendo ν a frequência de radiação e h uma constante que *Planck* utilizou para ajustar os dados. Atualmente tem-se que h , a *constante de Planck*, é dada por,

$$h = 6,62607004 \cdot 10^{-34} \text{m}^2\text{kg/s}. \quad (1.1.5)$$

Planck não afirmou que a radiação seria quantizada, ele assumiu isto como uma particularidade do processo de emissão: Por alguma razão uma superfície quente apenas emitiria luz em pequenos pacotes.

Entretanto, o começo do século XX também trouxe consigo o *annus mirabilis* da Física (1905), este proporci-

[†] *Boltzmann* nunca escreveu a equação nesta forma, tal feito fora realizado por *Max Planck* que também introduziu a constante de *Boltzmann* k_B [7]

onado por *Albert Einstein* com a publicação de quatro artigos ímpares,

- **Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen** [9] (Sobre o movimento de pequenas partículas em suspensão dentro de líquidos em repouso, tal como exigido pela teoria cinético-molecular do calor) - publicação focada na explicação do movimento aleatório de partículas suspensas em um líquido, denominado *movimento browniano*. Essa abordagem favorece a interpretação atômica da matéria impulsionando o uso da mecânica estatística.
- **Zur Elektrodynamik bewegter Körper** [10] (Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento) - primeiro trabalho publicado de *Einstein* no desenvolvimento da *Relatividade Especial*, reinterpretando o conceito de simultaneidade e discutindo as consequências físicas da transformação de coordenadas de *Lorentz* [11].
- **Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?** [12] (A inércia de um corpo depende do seu conteúdo energético?) - introduz a mais famosa equação física,

$$E = mc^2,$$

introduzindo a ideia de que a energia retém inércia.

- **Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt** [13] (Sobre um ponto de vista heurístico relativo à produção e transformação da luz) - trata sobre a explicação do *efeito fotoelétrico*. Mais tarde, em 1921, este trabalho rendeu o prêmio Nobel em física à *Einstein*.

Este último artigo pôs em prática uma visão mais radical. *Einstein* argumentou que a quantização seria uma propriedade do próprio campo eletromagnético, tendo nenhuma relação com o mecanismo de emissão, adaptando assim a ideia inicial de *Planck* a fim de explicar o efeito fotoelétrico: quando a radiação eletromagnética incide sobre uma superfície metálica, elétrons emanam da mesma. A sugestão era de que os *quantum* de luz incidentes atingiam os elétrons do metal, dando-os sua energia $h\nu$; o elétron excitado penetraria no metal, perdendo no processo uma energia w (denominada *função trabalho* do material - uma constante empírica que depende do metal envolvido no processo). O elétron então emergiria com uma energia,

$$E \leq h\nu - w. \tag{1.1.6}$$

Existem consequências por trás desta simples equação: a energia máxima de um elétron é independente da intensidade da luz envolvida e depende apenas da sua frequência. Para ser exato, um feixe mais intenso arrancará mais elétrons mas as suas energias serão a mesma.

Diferentemente da teoria de *Planck*, a de *Einstein* enfrentou uma recepção hostil, pois afirmando que a radiação eletromagnética é naturalmente quantizada, independentemente do mecanismo de emissão, *Einstein* se aproximou da ressurreição da desacreditada teoria corpuscular da luz. Entretanto, parte majoritária dos físicos do século XIX repudiaram-na em favor da interpretação rival da luz como um fenômeno *ondulatório*. De fato, os dados corroboravam a tese de *Einstein*. Em 1916, *Milikan* completou um estudo exaustivo do efeito dizendo que [14]

"Einstein's photoelectric equation [...] appears in every case to predict exactly the observed results [...] yet the semicorpuscular theory by which Einstein arrived at his equation seems at present wholly untenable." [A equação fotoelétrica de Einstein [...] aparece em todos os casos para prever exatamente os resultados observados [...] no entanto, a teoria semi-corpúscular pela qual Einstein chegou à sua equação parece atualmente insustentável.]

A resolução do problema veio por um experimento conduzido por *A. H. Compton* em 1923 [15]. Ele encontrou luz com um comprimento de onda distinto espalhada por uma partícula em repouso de acordo com a equação,

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta), \quad (1.1.7)$$

sendo λ o comprimento de onda incidente, λ' é o comprimento de onda da luz espalhada, θ é o ângulo de espalhamento e

$$\lambda_c = h/mc, \quad (1.1.8)$$

o comprimento de onda de *Compton* da partícula alvo (de massa m). Agora, esta é precisamente a fórmula obtida se você tratar a luz como uma partícula de massa de repouso nula com uma energia dada pela equação de *Planck* aplicando as leis de conservação (relativísticas) de energia e *momentum* - assim como é feito para uma colisão elástica ordinária. Isso garantiu uma direta e incontroversa evidência experimental de que a luz se comporta como partícula na escala subatômica.

Somando as contribuições de *Planck*, *Einstein* e *Compton* com a princípio da incerteza de *Werner Heisenberg* [16], a notação *Bra-ket* de *Paul Dirac* [17], o princípio de exclusão de *Wolfgang Pauli* [18], o comprimento de onda da matéria de *Louis de Broglie* [19] e a equação de *Erwin Schrödinger* [20], fundamenta-se então uma nova teoria física, a *mecânica quântica*.

Em vários aspectos, a teoria quântica foi revolucionária instigando não só a metodologia científica de sua época (até a atualidade) como também a filosofia da matéria. Por exemplo, a mecânica clássica carregava consigo características deterministas hegemônicas no âmbito dos métodos científicos associados à física. Uma boa síntese desse sentimento, por exemplo, é dada nas palavras de *Lord Kelvin* [21],

"The beauty and clearness of the dynamical theory, whci asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds. I. The first came into existence with the undulatory theory of light, and was dealt with by Fresnel and Dr. Thomas Young; it involved the question, How could the earth move through an elastic solid, such as essentially is the luminiferous ether? II. The second is the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding the partition of energy." [A beleza e a clareza da teoria dinâmica, que sustenta que calor e luz são modelos de movimento, no presente é obscurecida por duas nuvens. I. A primeira tem relação com a teoria ondulatória da luz, e foi tratada por *Fresnel* e pelo *Dr. Thomas Young*; ela envolve a questão, Como pode a Terra mover-se através de um sólido elástico, tal como é essencialmente o éter luminífero? II. A segunda é a doutrina de Maxwell-Boltzmann, referente à partição de energia.]

A intuição dos físicos pré-mecânica quântica era a de que resolvendo os problemas indicados por *Kelvin*[‡], teria se fechado um marco na humanidade referindo-se ao entendimento do movimento e as suas consequências.

[‡]Interessante notar que estes problemas separados, I e II, impulsionaram, cada uma de sua forma, o desenvolvimento da relatividade restrita e da mecânica quântica, respectivamente.

Por exemplo, é possível observar filosoficamente a mecânica clássica de duas formas distintas [22], contudo, análogas; as leis de *Newton* imprimem a ideia que um objeto ao sentir uma força produz um movimento, nas entrelinhas um efeito definido com uma certa causa. Todavia, o princípio de *Hamilton* (do qual derivam as formulações lagrangiana e hamiltoniana) aponta que o movimento de um corpo resulta na tentativa da natureza em atingir um certo fim, minimizar a integral no tempo da diferença entre a energia cinética e potencial. Contudo, independentemente da formulação escolhida (o que pode gerar mais ou menos dificuldades no processo) os resultados são unívocos, obtém-se as equações de movimento das quais é possível derivar todas as quantidades mecânicas de um certo sistema.

Agora, considerando a equação de *Schrödinger* na representação da posição,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t), \quad (1.1.9)$$

onde $V(\vec{r}, t)$ é a energia potencial e $\psi(\vec{r}, t)$ é a solução desta equação: a *função de onda*. Mas ela não carrega consigo um sentido físico próprio, como por exemplo a equação de uma onda de uma corda esticada que revela o deslocamento vertical ou como a diferença de pressão nas moléculas do ar na propagação de uma onda sonora ou ainda os campos nas ondas eletromagnéticas. O real significado físico de $\psi(\vec{r}, t)$ rendeu o prêmio nobel de 1954 ao físico alemão *Max Born* [23]: o módulo quadrado de $\psi(\vec{r}, t)$ é a densidade de probabilidade[§] de encontrar a partícula na posição \vec{r} e $\vec{r} + d\vec{r}$ no instante t ,

$$P(\vec{r}, t) d^3\vec{r} = |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r}. \quad (1.1.10)$$

Ou seja, se é de interesse analisar a probabilidade de encontrar a partícula entre os pontos a e b , denotada P_{ab} , a probabilidade, no caso unidimensional, é expressa por

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx. \quad (1.1.11)$$

Assim, o módulo quadrado da função de onda é a distribuição de probabilidade de um dado sistema quântico. A obtenção do *valor esperado* (leia-se, média de *ensemble*) de uma certa quantidade quântica \hat{A} (que é sempre um operador no formalismo matemático adjacente a estes sistemas) se realiza na operação,

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi dx. \quad (1.1.12)$$

Logo, o máximo que a mecânica quântica é capaz de revelar de um sistema não são suas quantidades dinâmicas, como na mecânica clássica, mas sim a 'mera' probabilidade de se obter um certo resultado. Dito isso, emergem então as várias interpretações da mecânica quântica [25], embora neste trabalho sejam analisadas apenas duas, a *realista* e a *ortodoxa*. Para isso é considerada a realização de uma medida em um sistema quântico, sobre os instantes antes da realização da medição, tem-se,

- **Interpretação realista:** A medida em um sistema quântico reflete o estado físico do sistema exatamente antes de sua realização. Se esta interpretação for correta, então a mecânica quântica é uma teoria

[§]Essas interpretações não agradaram o próprio *Schrödinger* que em uma de suas discussões com *Niels Bohr* a respeito do *saltos quânticos* afirmou: "If all this damned quantum jumping were really here to stay, I should be sorry I ever got involved with quantum theory". [Se todo esse maldito salto quântico realmente esta aqui para ficar, eu deveria me arrepender de ter me envolvido com a teoria quântica.] [24]

incompleta, pois 'falha' na determinação da medida, a teoria prevê apenas uma probabilidade. Sendo assim, algumas grandezas ainda não são conhecidas, o sistema depende de mais variáveis, as quais são chamadas de *variáveis ocultas*.

- **Interpretação ortodoxa:** Antes da medida o sistema físico não estava em nenhum estado definido, mas sim, em uma *superposição* de estados. O ato de medir faz o sistema 'optar' entre este ou aquele estado superposto. 'Força' a natureza a decidir o estado. Essa visão é chamada de **interpretação de Copenhagen**.

Em 1935, *A. Einstein*, *B. Podolski* e *N. Rosen* publicaram um artigo contestando a completude da mecânica quântica [26], onde propunham um experimento mental chamado de *paradoxo EPR*, que tinha como principal objetivo provar que a única interpretação sustentável no universo quântico é a *realista* em contraste total com a escola de *Copenhaguen*.

Uma simplificação do paradoxo EPR, de autoria de *David Bohm*, que foca o processo de medição no spin de uma partícula, consiste em um decaimento do méson pi, por exemplo, em um elétron e em um pósitron

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+. \quad (1.1.13)$$

Se o pión está em repouso, o elétron e o pósitron se movem em direções opostas, devido a conservação do *momentum* linear. Além disso, o pión tem spin 0, de forma que a conservação do *momentum* angular exige que pósitron e elétron estejam na configuração singleto.

Dessa forma, se o elétron possui spin para cima, o pósitron possui spin para baixo, e vice-versa. O corpo teórico da mecânica quântica é incapaz de prever qual combinação é obtida em uma medição, ela apenas prevê que na média teremos a metade de cada caso. Nesse experimento, a distância que as partículas percorrem é arbitrária, ou seja, ao medir o spin do elétron, para cima por exemplo, determina-se o spin do pósitron, para baixo, via conservação do *momentum* angular, sem inferir a esta partícula nenhum processo de medição, esteja ela a metros ou a anos-luz de distância. Agora, o argumento da escola realista com esse experimento é de que o elétron realmente possuía spin para cima (e para baixo no caso do pósitron), no momento em que foram criados, e a interpretação ortodoxa desse problema teria um custo: para que a conservação do *momentum* angular fosse respeitada, o colapso da função de onda pelo experimentador que realizou a medição do spin do elétron deveria se mover com uma velocidade maior do que a da luz, o que *Bohm* chamou mais tarde de *não localidade*. Uma vez que a teoria quântica não prevê o resultado de uma medição com precisão e a localidade *deveria* ser respeitada, os autores do experimento EPR afirmavam que a mecânica quântica na sua forma atual era incompleta.

A mecânica clássica também assume alguns aspectos estatísticos bem comportados. Por exemplo, ao lançar ao ar uma moeda não viciada, tem-se igual probabilidade de obter cara ou coroa, entretanto, sabendo a força aplicada na moeda, a aceleração da gravidade no local, a viscosidade do ar, a altura em que se encontra a moeda a temperatura do ar, entre outras variáveis, é possível determinar com precisão a face revelada pela moeda ao tocar o chão. Essas variáveis extras despercebidas no regime quântico seriam as supracitadas variáveis ocultas.

O decaimento [1.1.13] é o mais tradicional exemplo de um fenômeno puramente quântico, o *emaranhamento* [28]. Ele consiste na descrição de um sistema quântico composto por duas ou mais partículas e a caracterização definida de um de seus entes revela a dos demais de forma inseparável e independentemente da distância que os separam, justamente como ocorre no paradoxo EPR. Atualmente, o fenômeno é a chave por trás de pesquisas relacionadas a criptografia baseada nas desigualdades de *Bell* [27]- [29], teletransporte [30], entre outras aplicações.

A mecânica estatística também aprimorou-se a partir da teoria quântica da matéria, em especial o princípio de exclusão de *Pauli* possibilita a distinção entre as partículas em dois grupos, *bósons* e *férmions*, sendo o primeiro grupo das partículas que apresentam um número inteiro de spin e o segundo um número semi-inteiro. Para analisar os *ensembles* bosônicos é utilizada a estatística de *Bose-Einstein* [31][†], enquanto para os férmions é utilizada a estatística de *Fermi-Dirac* [32] [33]. Somando estes formalismos aos resultados clássicos, isto é, a estatística de *Maxwell-Boltzmann*, constroem-se a base da mecânica estatística de equilíbrio moderna. Além disso, a construção estatística intrínseca aos sistemas quânticos e a suas médias de *ensemble* possibilitaram o desenvolvimento da segunda noção entrópica investigada neste trabalho, puramente quântica, a noção entrópica de *Von Neumann* [34],

$$S = -Tr[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}], \quad (1.1.14)$$

sendo $\hat{\rho}$ a *matriz densidade* do sistema. Agora, se sabe que o *traço* de uma matriz independe da sua representação, dessa forma é possível escrever a entropia de *Von Neumann* como,

$$S = -\sum_n p_n \ln p_n, \quad (1.1.15)$$

onde p_n a probabilidade ligada ao n -ésimo estado físico. Esta é a entropia de *Shannon* [35] da teoria de informação.

No contexto da relatividade restrita, consideram-se agora dois referenciais inerciais S e S' , com os eixos alinhados e uma velocidade relativa v unicamente na direção x_1 . A transformação de coordenadas de *Lorentz* na sua forma mais simples,

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{vx_1}{c^2}); \\ x'_1 = \gamma(x_1 - vt); \\ x'_2 = x_2; \\ x'_3 = x_3, \end{cases} \quad (1.1.16)$$

aqui, $\gamma = \gamma(v)$ é o fator de *Lorentz*,

$$\gamma(v) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.1.17)$$

É importante notar que no limite não relativístico, quantitativamente, $v \ll c$, recuperam-se as transformações galileanas para o mesmo problema,

$$\begin{cases} t' = t; \\ x'_1 = x_1 - vt; \\ x'_2 = x_2; \\ x'_3 = x_3, \end{cases} \quad (1.1.18)$$

delimitando perfeitamente o regime dos fenômenos físicos relativísticos. Agora, as fronteiras da jurisdição quântica da matéria não são tão bem definidos como neste caso. Uma tentativa é abordada pelo teorema de

[†]O trabalho inicial por trás desta estatística fora do físico *Satyendra Nath Bose* em 1924-1925 e após alguns anos *Einstein* adotou-a em trabalhos conjuntos.

Ehrenfest [36] de onde pode ser derivadas as expressões,

$$m \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \langle p \rangle; \quad \frac{d}{dt} \langle p \rangle = - \left\langle \frac{\partial}{\partial x} V \right\rangle, \quad (1.1.19)$$

A inspeção grosseira desse resultado aponta para a interpretação que os valores médios de quantidades quântico-dinâmicas respeitam as leis clássicas, entretanto, embora a primeira equação não traga consigo problemas, para a segunda equação geralmente tem-se que,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} V(x) \right\rangle \neq \frac{\partial}{\partial x} V(\langle x \rangle). \quad (1.1.20)$$

Mesmo assim, essas relações não explicam como a álgebra não comutativa dos sistema quânticos desaparece no regime clássico [37] entre outros problemas. Nas entrelinhas, muitas das dificuldades concentram-se especialmente nas limitações propiciadas pelo princípio da incerteza,

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.1.21)$$

Agora, se de alguma forma fosse possível diminuir a incerteza, ou seja, no limite em que $\hbar \rightarrow 0$ os resultados clássicos seriam recuperados. Introduzido heurísticamente por *Bohr*, o *princípio de correspondência*, se foca na ideia de que a continuidade deve ser recuperada no limite clássico dos sistemas quânticos, pois o valor da constante de Planck normalizada pela ação desses sistemas se torna muito pequeno.

No contexto das noções entrópicas, a relação entre as entropias de *Boltzmann* (regime clássico) e de *von Neumann* (regime quântico) não se relacionam a partir do princípio da correspondência. Para que isso ocorra, em 1979, *Alfred Wehrl* [38] definiu a última noção entrópica investigada no escopo deste trabalho, a entropia de *Wehrl*,

$$S = - \int \frac{dpdq}{2\pi\hbar} H(q, p) \ln H(q, p), \quad (1.1.22)$$

sendo a função $H(q, p)$ a distribuição de Husimi [39] que corresponde ao análogo mais próximo em mecânica quântica da distribuição de espaço de fase.

1.2 O OBJETO

Enquanto os conceitos de entropia e emaranhamento se desenvolveram adjacentes as suas teorias características, é possível dizer, de um certo ponto de vista, que a ideia de elementaridade, do átomo (exclusivamente neste parágrafo significando literalmente como *ατομοζ*, do grego *indivisível*) permeia as veias da história do pensamento ocidental; dos pré-socráticos [40] aos campistas e certamente irá além.

De uma perspectiva científica, mais precisamente, da física, que não depende exclusivamente de especulações filosóficas, mas também de métodos empíricos entre outros, a discussão sobre partes indivisíveis no que diz respeito a matéria tem um avanço significativo em 1896 quando *J. J. Thomson*, *John S. Townsend* e *Harold A. Wilson* realizaram experimentos que indicaram que os *raios catódicos* (feixe produzido quando uma diferença de potencial elevada é estabelecida entre dois eletrodos localizados no interior de um recipiente fechado contendo gás rarefeito) são partículas únicas de carga negativa [41] e em 1913 *Robert. A. Milikan* e *Harvey Fletcher* [42] realizaram um experimento que possibilitou a estimativa da carga destas partículas, o que hoje vem ser conhecido como a *carga elementar* ($e = 1,602176634 \cdot 10^{-19}$ C), sendo estas partículas do feixe,

desde a sua descoberta até a atualidade, elementar e indivisível, o *elétron*.

Na retomada das ideias eclipsadas pela hegemonia aristotélica-tomista da idade média, referentes aos pensamentos de *Leucipo de Mileto* e *Demócrito de Dera*, o químico *John Dalton* alguns anos antes retomou o conceito do átomo[¶] como algo indivisível, maciço, homogêneo e eletricamente neutro, do qual derivariam-se todas as substâncias. Contudo, a descoberta do elétron embarçou esta interpretação e *Thomson* propôs um novo modelo atômico, onde os elétrons estariam embebidos em uma pasta positiva que neutralizava o objeto como todo, sendo este o modelo vulgarmente conhecido como *Pudim de Passas*. Mas esta representação não se sustentou por muito tempo em função dos experimentos dirigidos por *Ehrnest Rutherford* em 1911 [43], que além de fundar o estudo da *física nuclear*, introduziu métodos utilizados vigorosamente até a atualidade.

Os experimentos realizados por *Rutherford* (Fig.1.3) e outros, consistiam no bombardeamento de um feixe coeso de partículas α (${}^4_2\text{He}^{+2}$) com um alvo, medindo-se, ao final do processo, o ângulo de espalhamento dos projéteis. Os experimentalistas inseriam uma amostra de rádio (Ra) dentro de uma caixa de chumbo (Pb) com um pequeno orifício de onde o feixe de partículas, *projéteis*, é colimado em direção a uma folha fina de ouro (Au), o *alvo*, que é cercado por uma tela detectora que era iluminada ao ser atingida por uma partícula α . A escolha do ouro é justificada pela sua ductilidade: é possível confeccionar folhas com uma largura de até 0,00004 cm, que corresponde a apenas algumas centenas de átomos.

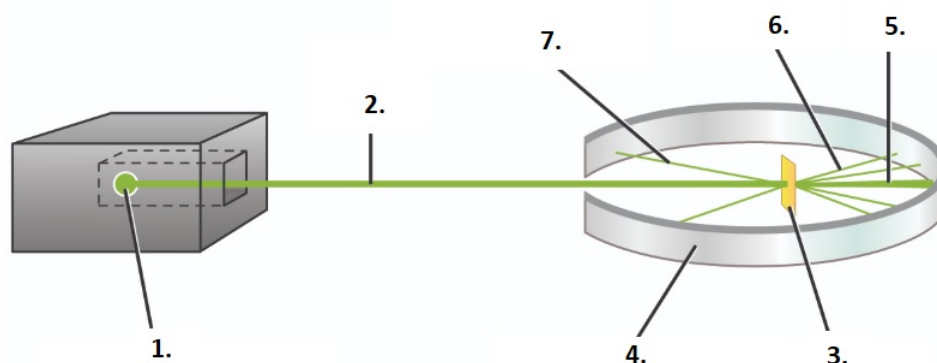


Figura 1.3: Representação do experimento de *Rutherford*; em (1.) tem-se o rádio no forno de chumbo como fonte de partículas α ; (2.) o feixe de partículas α ; (3.) folha fina de ouro; (4.) tela luminescente que detecta o espalhamento dos projéteis; (5.) maioria das partículas passa direto pela folha; (6.) algumas partículas tem sua trajetória levemente desviada; (7.) um número pequeno de partículas são desviadas consideravelmente.

A maioria das partículas α atravessaram a folha completamente, algumas sofreram um leve desvio, entretanto, um número considerável de partículas ricocheteavam diretamente na direção de que haviam partido, ou seja, a sonda dos átomos de ouro encontrou algo *minúsculo, de carga positiva e com uma massa considerável*, nas palavras de *Rutherford* [44]:

"It was quite the most incredible event that has ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you." [Foi o evento mais incrível que aconteceu na minha vida. Quase tão incrível como se você disparasse uma concha de 15 polegadas em um pedaço de papel de seda e ele voltasse e atingisse você.]

[¶]Atualmente o substantivo *átomo* é utilizado para os elementos da tabela periódica, sendo estes formados por objetos mais elementares, tornando o conceito impreciso se comparado com o sentido grego literal do termo.

Rutherford utilizou seus experimentos para conceber uma nova representação atômica, que fosse consistente com os resultados. No novo modelo, *toda* a carga positiva estaria concentrada em um núcleo coeso e diminuto, onde os elétrons orbitavam-no semelhantemente aos planetas em torno do sol, um modelo *planetário*. Fato é que as interações eletromagnéticas indicam a repulsão de cargas de mesmo sinal, logo, para manter cargas positivas tão próximas umas das outras em uma região tão pequena, é necessária uma nova interação da matéria, muito mais intensa, porém de curto alcance; a *força forte*. A Fig.[1.4] ilustra como este modelo responde melhor a realidade do que o que fora proposto por *Thomson*. O núcleo do átomo mais leve, o *hidrogênio*, foi batizado por *Rutherford* como *próton*.

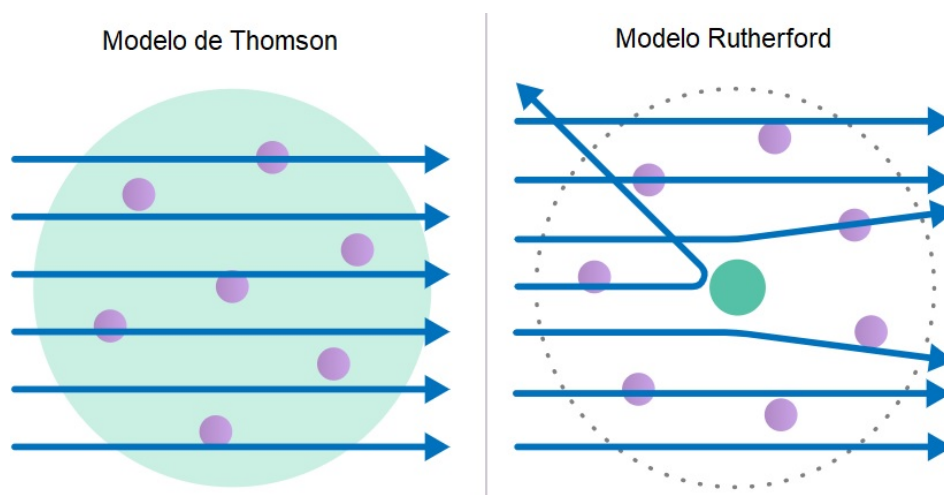


Figura 1.4: Contraste entre os modelos atômicos de *Thomson* e *Rutherford* sob o experimento de espalhamento de partículas α .

Ao analisar quantitativamente os resultados do espalhamento refletindo o entendimento sobre o átomo, computa-se que o volume do núcleo atômico é na média 15 ordens de grandeza menor que o volume total do átomo^{**}: toda a matéria conhecida^{††}, em sua distribuição espacial é basicamente *vazia*.

Uma das ferramentas utilizadas por *Rutherford* na interpretação dos seus resultados foi o conceito de *seção de choque* σ , uma medida da probabilidade de colisão entre uma partícula incidente e uma partícula alvo,

$$\sigma = \frac{\text{número de partículas espalhadas}}{(\text{tempo}) \times (\text{densidade do número de partículas no feixe}) \times (\text{velocidade do feixe})}. \quad (1.2.1)$$

Obviamente em níveis atômicos, quantidades como o número de partículas são inacessíveis aos experimentadores, de forma que é necessário escrever a seção de choque em funções que dependem das quantidades de interesse sem perder seu sentido original. Além do mais, em uma montagem experimental, normalmente não há detectores em toda distribuição espacial em torno da região a ser investigada, de forma que o experimento é rodado e executado repetidamente em ângulos diferentes. Após cobrir todos os ângulos sólidos é que a seção de choque é calculada, ângulo após ângulo. Geralmente, um detector cobre um elemento de ângulo sólido $d\Omega$ que pode ser representado em relação ao centro espalhador (por exemplo, a folha de ouro no experimento de

^{**}Considerando o átomo como uma esfera dura imaginária com o *raio de Van der Waals*, este, definido como a distância da aproximação mais próxima de outro átomo.

^{††}É estimado que a matéria escura e a energia escura compunham cerca de 96% do conteúdo material do universo conhecido, infelizmente (ou felizmente) ainda um problema irresoluto na física.

Rutherford) em relação aos ângulos polares esféricos θ e ϕ . O ângulo polar θ é definido como sendo o ângulo entre a direção das partículas detectadas e a direção do feixe incidente. Usualmente, a simetria do centro espalhador relacionada à estes experimentos ocasiona a independência do ângulo azimutal ϕ . Então, por analogia à seção de choque, define-se a seção de choque diferencial, escrita em função das variáveis facilmente controladas em laboratório, sem perda da ideia original, na forma,

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{I_0} \frac{d\Phi(\theta)}{d\Omega}, \quad (1.2.2)$$

sendo Φ o número de colisões detectadas por partícula alvo, por unidade de tempo e I_0 a intensidade do feixe (que também pode ser interpretado como o número de partículas, por unidade de tempo, e área, que incide sobre uma superfície transversal a direção de propagação do feixe). A seção de choque tem dimensões de área, mesmo assim, segue sendo proporcional a probabilidade de colisão.

Analisando o problema por meio da mecânica clássica^{††}, *Rutherford* encontrou para a seção de choque diferencial do espalhamento de partículas por um núcleo atômico com o centro espalhador, no referencial de laboratório (no sistema de unidades naturais, $\hbar = c = 1$),

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruther} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E^2} \frac{1}{\text{sen}^4(\theta/2)}, \quad (1.2.3)$$

onde Z é o número atômico do elemento alvo, α é a constante de acoplamento eletromagnético e E é a energia da partícula incidente.

Contudo, o grande problema do modelo atômico de *Rutherford* reside nas órbitas eletrônicas: elas devem ser aceleradas e uma carga em movimento emite radiação eletromagnética, dessa forma o elétron deveria emitir energia em forma de ondas eletromagnéticas e 'cair' elípticamente até o núcleo, toda matéria colapsaria, o que não ocorre. Além disso, cada átomo possui apenas um conjunto de órbitas discretas, nunca contínuas. *Bohr* tentou solucionar os problemas em 1913, com um modelo atômico que incluía algumas características quânticas a partir de postulados que explicavam bem o átomo de *hidrogênio*, mas falhas começaram a aparecer para átomos mais pesados pelo fato de que até então uma terceira partícula que compunha o núcleo dos átomos ainda não havia sido descoberta. Esta é necessária e eletricamente neutra, com uma massa rapidamente distinta da do próton, o *nêutron*, descoberto por *James Chadwick* apenas em 1932 [45].

Entre 1923-1926, a mecânica quântica não relativística tinha a sua formulação bem desenvolvida, entretanto, sua compatibilização com a relatividade especial^{§§} seria ideal para a caracterização dos sistemas físicos elementares, uma vez que as partículas subatômicas são objetos microscópicos que (geralmente) se locomovem em velocidades próximas a da luz. O próprio *Schrödinger* obteve uma equação relativística para o elétron no átomo de hidrogênio, mas o espectro computado a partir destes resultados não era corroborado pelos dados experimentais. Inspirados nesta tarefa, os físicos *Oskar Benjamin Klein* e *Walter Gordon* em 1926 derivaram a equação quântica para partículas escalares (spin 0),

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right] \psi = 0. \quad (1.2.4)$$

^{††}O ano era 1911. A abordagem atual modela as seções de choque utilizando as *teorias quânticas de campos*.

^{§§}A compatibilização da mecânica quântica com a relatividade geral, o que *Einstein* chamou de *teoria unificada*, não fora desenvolvida satisfatoriamente. Uma teoria deste calibre teria em seu escopo relações entre a gravidade e a mecânica quântica, sendo portanto, um objeto de pesquisa muito tentador.

Contudo, ela apresenta complicações na sua corrente de probabilidade, podendo assumir valores negativos, o que acarretou provisoriamente no seu abandono, embora tal fato não seja um problema na teoria quântica de campos, onde a equação fora resgatada mais tarde na descrição de partículas massivas de spin 0 [46].

O grande nome por trás da amalgamação da relatividade especial e o espaço de *Hilbert* é *Paul Dirac*. Buscando uma equação que possuísse a mesma ordem de suas derivadas espaço-temporais (diferentemente de [1.1.9]), entre outras considerações, ele obteve uma equação para os férmions de spin 1/2,

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.2.5)$$

A relação [1.2.5] é a chamada equação de *Dirac*, escrita na forma covariante, sendo γ^μ as matrizes de *Dirac* que carregam dentro de si as matrizes de *Pauli*, ou seja, o princípio de exclusão e o spin que na mecânica quântica usual eram impostos de forma *ad hoc*, agora emanam da teoria espontaneamente. Além disso, ψ não é mais um campo escalar, mas sim *espinorial*, representado pelo *espinor* de *Dirac*. Entretanto, um dos principais fatores limitantes na interpretação física dos resultados da equação [1.2.5] pode ser analisado na verificação da relação energia-*momentum* einsteniana escrita na forma,

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}. \quad (1.2.6)$$

isto é, para estados fermiônicos livres, de spin 1/2, matematicamente ainda existem soluções possíveis com energias negativas, um absurdo, mas que não podia ser abandonado: trazia consigo toda a estrutura matemática recém formulada. O primeiro passo de *Dirac* na explicação destes resultados seria na revisão do conceito de vácuo [47],

"If we cannot exclude [the negative energy states], we must find a method of physical interpretation for them. One can get a reasonable interpretation by adopting a new picture of the vacuum. Previously, people have thought of the vacuum as a region of space that is completely empty, a region of space that does not contain anything at all. Now we must adopt a new picture. We may say that the vacuum is a region of space where we have the lowest possible energy." [Se não podemos excluir (os estados de energia negativa), devemos encontrar um método de interpretação física para eles. É possível chegar a uma interpretação razoável adotando uma nova concepção de vácuo. Anteriormente, as pessoas pensavam no vácuo como uma região do espaço que é completamente vazia, uma região do espaço que não contém absolutamente nada. Agora devemos adotar uma nova visão. Podemos dizer que o vácuo é a região do espaço onde temos a menor energia possível.]

Nesta releitura da interpretação do conceito de vácuo, surge o conceito de *mar de elétrons*; a ideia é que os elétrons livres de energia negativa estariam imersos em um poço energeticamente sem fundo em estados quânticos devidamente preenchidos e jurisdicionados ao princípio de exclusão. Uma perturbação capaz de arrancar um dos elétrons do *mar* para a região de energia positiva, deixaria uma lacuna, interpretada como uma partícula de carga positiva com a mesma massa do elétron. Inicialmente *Dirac* pensou se tratar do próton, entretanto os valores de massa não batem por um fator de $\sim 10^3$, mas em 1931, *Carl D. Anderson* descobre um ente gêmeo ao elétron [48], contrastando-se por ser positivamente carregado: é a descoberta do pósitron (e^+). A descoberta consolidou o trabalho de *Dirac* dando-lhe confirmação empírica e um corolário, a *anti-matéria*, isto é, para cada partícula existe uma anti-partícula, idêntica em massa e número de spin mas com valores de carga (e outros números quânticos aditivos desenvolvidos posteriormente) invertidos. Desta descrição, surge a

simetria de cruzamento, que sofisticadamente mostra que o espalhamento *Compton*,

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-, \quad (1.2.7)$$

é um processo similar à aniquilação,

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma, \quad (1.2.8)$$

revelando que o encontro de matéria com antimatéria é destrutivo em respeito a massa, produzindo energia como produto.

Contudo, a interpretação do mar de elétrons se esvaiu. O conceito de um mar invisível de elétrons intangíveis é cientificamente melindroso, sendo substituída pela *prescrição Feynman - Stueckelberg* [49], onde as soluções de energia negativa são reinterpretadas como estados de energia positiva da antipartícula correspondente. A linguagem e formulação das teorias quânticas de campos se deve muito aos trabalhos de *Feynman* e *Dirac* (Fig. [1.5]) que fertilizaram o nascimento do novo objeto de estudo onde o *spin*, o princípio de exclusão, o teorema CPT, as simetrias, entre outros constructos teóricos se derivam 'naturalmente' e comprovam-se experimentalmente.

Esta perspectiva de campos quânticos obteve sucesso na descrição da interação eletromagnética: a *eletrodinâmica quântica* (QED, do inglês, *quantum electrodynamics*), onde os campos de partículas dotadas de carga são quantizados e a interação entre elas é mediada pelo seu *quantum*, o fóton. Assim, as forças entre cargas resultam-se da troca de fótons entre as partículas. Além disso, é uma teoria invariante frente a troca de *calibre*. Esta estrutura, de objetos dotados de alguma característica global (carga, massa, cor) que se organiza em polos bem definidos que interagem entre si repulsora ou atrativamente, num mecanismo de trocas de bósons, em um campo quantizado, tornando-se uma forte candidata no entendimento das quatro forças fundamentais da natureza, a *eletromagnética* referente as cargas elétricas, a *forte* relacionada a coerência do núcleo atômico, a *fraca*^[4] relacionada aos decaimentos α , β e γ e a *gravitacional*.

Hideki Yukawa, em 1935 [53], deu início aos primeiros resultados consistentes na investigação da força forte. Ele associou o curto alcance da força forte como indicador de que o seu mediador fosse consideravelmente pesado: *Yukawa* computou que sua massa deveria ser trezentas vezes maior que a do elétron ou seis vezes menor do que a massa do próton. Por ter uma massa intermediária ao próton e o elétron, a partícula ficou conhecida como *méson* (em relação a sua massa, significando *médio*, $\mu\acute{e}c\sigma$, no mesmo espírito que o elétron



Figura 1.5: *Richard Feynman* e *Paul Dirac* na conferência de relatividade em 1962, *Varsóvia*.

^[4]Mais tarde unificada com a eletromagnética na teoria eletro-fraca de *Sheldon Glashow*, *Abdus Salam* e *Steven Weinberg* [50]- [51].

é chamado de *lépton*, *leve*, $\lambda\epsilon\pi\tau\acute{o}$ e o próton de *bárion*, *pesado*, $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\sigma$). Em 1947, os primeiros mésons carregados foram encontrados por uma equipe da *Universidade de Bristol* por *César Lattes*, *Cecil Powell* e de *Giuseppe Occhialini* [54].

Circunvizinho à previsão e comprovação das anti-partículas e dos mésons, surge a ideia que acarretou na descoberta dos neutrinos.

Em 1914, estudos do decaimento beta revelavam um espectro contínuo, contestando a conservação da energia. *Bohr* e outros teciam a possibilidade de que em nível sub-atômicos a energia não se conservaria. *Wolfgang Pauli*, fora partidário de uma posição mais sóbria, que pode ser analisada em primeira mão nos trechos de uma carta enviada para a conferência de radioatividade na cidade de *Tubingen* em 1930,

"Sehr geehrte radioaktive Damen und Herren,

Als Träger dieser Zeilen, auf die ich Sie höflichst einlade, werde ich Ihnen aufgrund der "falschen" Statistik der N- und Li-6-Kerne und des kontinuierlichen Beta-Spektrums, auf die ich gestoßen bin, ausführlichere Erklärungen geben ein verzweifelter Ausweg, um den "Austauschsatz" der Statistik und das Energieerhaltungsgesetz zu retten. Die Möglichkeit, dass in den Kernen elektrisch neutrale Teilchen existieren könnten, die ich Neutronen nennen werde, die den Spin 1/2 haben und dem Ausschlussprinzip gehorchen und die sich von Lichtquanten ferner dadurch unterscheiden, dass sie sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen. Die Masse der Neutronen sollte in der Größenordnung der Elektronenmasse liegen und auf keinen Fall größer als 0,01 Protonenmasse sein. - Das kontinuierliche Beta-Spektrum wäre dann sinnvoll mit der Annahme, dass beim Beta-Zerfall zusätzlich zum Elektron ein Neutron emittiert wird, so dass die Summe der Energien von Neutron und Elektron konstant ist. [...]

Ich gebe zu, dass mein Mittel fast unwahrscheinlich erscheint, weil man diese Neutronen, wenn sie existieren, wahrscheinlich schon lange gesehen hätte. Aber nichts wagt, nichts gewinnt, und der Ernst der Lage aufgrund der kontinuierlichen Struktur des Beta-Spektrums wird durch eine Bemerkung meines verehrten Vorgängers, Herrn Debye, erhellt, der mir kürzlich in Brüssel sagte: "Oh, es ist besser, nicht überhaupt darüber nachzudenken, wie neue Steuern." Deshalb sollte man jede Art der Rettung ernsthaft diskutieren. Also, liebe radioaktive Leute, prüft und urteilt.

Ich kann leider nicht persönlich in Tübingen auftreten, da ich wegen eines Balles in der Nacht vom 6. auf den 7. Dezember hier in Zürich unverzichtbar bin. Mit freundlichen Grüßen an Sie und auch an Herrn Back, Ihren bescheidenen Diener signiert

W. Pauli."

[Caros senhoras e senhores radioativos,

Como o portador dessas linhas, a quem eu gentilmente solicito ser ouvido, explicarei com mais detalhes como, devido às estatísticas "erradas" dos núcleos de nitrogênio e lítio 6 e a continuidade do espectro beta, encontrei um meio desesperado para salvar o "teorema da troca" das estatísticas e a lei da conservação de energia. Nomeadamente, a possibilidade de que exista nos núcleos partículas eletricamente neutras, as quais eu desejo chamar de nêutrons, que possuem spin 1/2, obedecem ao princípio da exclusão e que diferem ainda mais dos quanta de luz, pois eles não viajam com a velocidade de luz. A massa dos nêutrons deve ser da mesma ordem de magnitude que a massa de elétrons e, em qualquer caso, não maior que 0,01 da massa do próton. O espectro beta

contínuo se tornaria compreensível ao assumir que, no decaimento beta, um nêutron é emitido além do elétron, de modo que a soma das energias do nêutron e do elétron seja constante. [...]

Concordo que minha solução pode parecer incrível, porque alguém deveria ter visto esses nêutrons muito antes, se eles realmente existirem. Mas apenas quem se atreve pode vencer em uma difícil situação, devido à estrutura contínua do espectro beta, é iluminada por uma observação do meu honrado predecessor, Sr. Debye, que me disse recentemente em *Bruxelas*: "Oh, é melhor não pensar nisso, como em novos impostos". A partir de agora, todas as soluções para o problema devem ser discutidas. Assim, queridos radioativos, olhem e julguem.

Infelizmente, não posso comparecer pessoalmente em *Tubingen*, pois sou indispensável aqui em *Zurique* devido um baile na noite de 6 a 7 de dezembro. Com os meus melhores cumprimentos a você e também ao Sr. Back, seu humilde servo,

W. Pauli.]

De certa forma, *Pauli* cometeu mais equívocos do que acertos na sua preposição: a partícula neutra que ele procurava não explica as anomalias estatísticas relacionadas ao lítio e o nitrogênio, sendo este o papel do supracitado nêutron de *Chadwick*, descoberto dois anos após o envio da carta e herdando o nome idealizado por *Wolfgang*. Outro ponto, é que o partícula de *Pauli* não compõe a estrutura nuclear, é criada no decaimento beta e, por fim, a estimativa de sua massa contém um erro na ordem de pelo menos 10^5 . Seu trunfo permeia o fato de que, esta partícula, mais tarde chamada de *neutrino* (pequeno neutro), tem spin $1/2$ e mantém a conservação da energia intacta. Contudo, é válida a colocação de que a detecção experimental dos neutrinos fora dramática; sendo neutros e interagindo muito pouco com a matéria, foram detectados apenas em 1956 [55] por *Clyde Cowan*, *Frederick Reines*, *F. B. Harrison*, *H. W. Kruse*, and *A. D. McGuire*. Atualmente, os neutrinos se apresentam em três formas: neutrino do tau ν_τ , neutrino do múon ν_μ e neutrino do elétron ν_e , além do fato de que no decaimento beta o que realmente ocorre é a geração de um anti-neutrino do elétron.

Entre os anos 40 e 50, uma série de bárions (Λ , Σ 's, Ξ 's entre outros) e mésons (K 's, η , ϕ , ω e ρ 's, e a lista segue) começaram a ser detectados e em seguida produzidos, sendo chamadas de partículas "estranhas". *Willis Lamb* iniciou o seu discurso no prêmio nobel [56] de 1955 com as palavras,

"When the Nobel Prizes were first awarded in 1901, physicists knew something of just two objects which are now called « elementary particles »: the electron and the proton. A deluge of other « elementary » particles appeared after 1930; neutron, neutrino, μ meson, π meson, heavier mesons, and various hyperons. I have heard it said that « the finder of a new elementary particle used to be rewarded by a Nobel Prize, but such a discovery now ought to be punished by a \$10,000 fine."

[Quando os Prêmios Nobel foram concedidos pela primeira vez em 1901, os físicos conheciam apenas dois objetos do que agora são chamados de "partículas elementares": o elétron e o próton. Um dilúvio de outras partículas "elementares" apareceu depois de 1930; nêutron, neutrino, méson μ , mesón π , mésons mais pesados e vários híperons. Ouvi dizer que "o descobridor de uma nova partícula elementar costumava ser recompensado por um Prêmio Nobel, mas essa descoberta agora deveria ser punida com uma multa de dez mil dólares.]

Além da quantidade de partículas novas, descobertas em um curto espaço de tempo, a conotação "estranhas" tem um sentido mais técnico: Elas eram produzidas copiosamente (na ordem de 10^{-23} s), mas elas

decaíam relativamente devagar (na ordem de 10^{-10} s). Isso sugeriu que o mecanismo envolvido na sua produção era totalmente diferente do que governava a sua desintegração. Em uma linguagem moderna, as partículas estranhas são produzidas pela força forte, mas o seu decaimento é proporcionado pela força fraca. Neste contexto, *Kazuhiko Nishijima, Tadao Nakano* [57] e posterior e independentemente *Murray Gell-Mann* [58], propunham um novo número quântico, a estranheza S , que é conservada na interação forte e violada na fraca. Assim, as partículas que interagiam via força forte foram dividida em duas grandes famílias, os bárions e os mésons. Os membros de cada família eram distinguidos pela carga, estranheza e massa, mas além disso, não existia uma razão para tal, até o momento. Este dilema lembrou os físicos a situação da química um século antes, onde dezenas de elementos eram identificados, sem um sistema ou ordenamento adjacente. Em 1960 as partículas elementares esperavam a sua própria tabela periódica, o *modelo padrão*.

A ideia inicial para a sistematização da crescente gama de novas partículas que eram detectadas e produzidas, principalmente pelo fato da emergente edificação dos primeiros colisores de partículas modernos, se tratava de um constructo abstrato que não refletiria a existência física dos entes que 'constituiriam' os mésons e bárions, chamados então de *hádrons*, partículas que interagem via força forte. Estes entes funcionariam mais como *etiquetas* para cada forma hadrônica. Os trabalhos independentes de *Gell-Mann* [59] e *Yuval Ne'eman* [60] em 1961 arranjavam os bárions e mésons em formas geométricas a partir da sua carga (em unidades elementares) e estranheza, estes trabalhos ficaram conhecidos como *caminho óctuplo* (Fig. [1.6]). A teoria começou a ganhar força quando *Gell-Mann* organizava um decuplete bariônico, percebendo a falta de uma partícula na base do polígono, na posição respectiva da estranheza -3 e carga elétrica -1 , ele foi capaz de prever as condições nas quais ela seria encontrada, comprovando suas previsões em 1964 com a detecção da Ω^- .

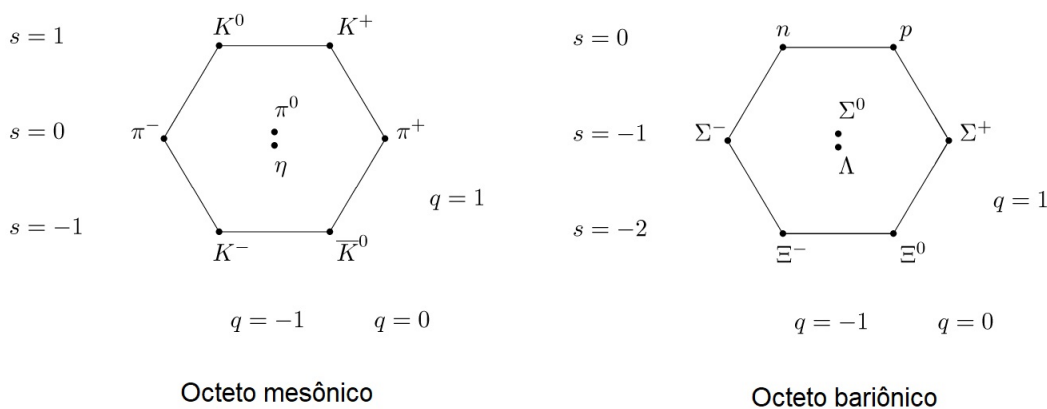


Figura 1.6: Alguns dos arranjos geométricos propostos pelo caminho óctuplo, organizados segundo a sua carga nas diagonais paralelas e pela estranheza nas retas horizontais.

No mesmo ano, é concebido independentemente por *Gell-Mann* [61] e *George Zweig* [62] o modelo dos *quarks* ou *aces*, respectivamente. De forma especial, a própria etimologia da palavra *quark* carrega aspectos culturais interessantes: *Gell-mann* tinha em sua mente que o som da palavra seria algo como "*kwork*". Com o tempo ele achou a palavra quark na obra *Finnegans Wake* [63] do poeta e romancista *James Joyce*, no episódio 4 do segundo livro,

"Three quarks for Muster Mark!

*Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark. "[...]*

No final das contas a terminologia adotada por *Gell-Mann* hegemonizou-se.

Originalmente, os quarks apresentavam-se em três sabores: quark *u* é para *up* (do inglês, *acima* ou *para cima*), carregando uma carga de $2/3$ e estranheza nula, o quark *d* é para *down* (*abaixo* ou *para baixo*), com uma carga de $-1/3$ e $S = 0$, o *s*, originalmente, *sideways* (lateral), sendo agora chamado de *strange* (*estranho*) possui $Q = -1/3$ e $S = -1$. Para cada quark, existe um anti-quark correspondente de carga e estranheza invertida. Eles são férmions de spin $1/2$ e além disso se afirma,

- 1. Todo bárion é composto por três quarks (e todo anti-bárion é composto por três anti-quarks).
- 2. Todo méson é composto de um quark e um anti-quark.

Dessa forma todos os supermultipletos do caminho óctuplo emergem naturalmente do modelo. Importante notar que algumas possibilidades são excluídas neste escopo: Por exemplo, o bárion com $S = 0$ e $Q = -2$: nenhuma combinação com três quarks e capaz de produzir estes números. Esforços experimentais se focaram na busca de partículas com essa natureza, sua descoberta seria devastadora para o modelo de quarks, mas elas nunca foram encontradas.

É verídico de que desde a sua idealização até então, nunca um quark isolado fora detectado, o *confinamento*, resultando no fato de que os quarks nunca seriam encontrados sozinhos. Além disso, outro problema é que afirmando o confinamento, ataca-se o princípio de exclusão; por exemplo, a Δ^{++} é o resultado de três quarks up no mesmo estado físico, contrapondo diretamente o canônico princípio da exclusão. Estes até então defeitos, levaram os físicos inicialmente motivados com o modelo a uma certa frustração no começo dos anos 70. Esta afronta fora elegantemente resolvida por *O.W. Greenberg* [64] introduzindo uma nova 'carga' aos quarks, a sua *cor*. Como os bárions em baixas energias manifestam-se na forma de três quarks, definiu-se três cores, especialmente, as cores primárias^{***}. Logo, salva-se a estatística fermiônica e justifica o confinamento a partir do princípio,

Todas as partículas que ocorrem naturalmente são incolores.^{†††}

Mas até então, não fora citado nenhum experimento em que de fato é comprovada a existência física dos quarks, para isso, pode-se dizer de certa forma que esta corroboração é intimamente relacionada com a herança dos métodos utilizados por *Rutherford*. Reitera-se o fato de que os quarks possuem carga elétrica. Se assim o for, é esperado que para um feixe coerente dotado de altos valores para sua energia cinética, ou seja, grandes valores para o seu *momentum* linear, corresponda a um pequeno comprimento de onda de *de Broglie*, possibilitando a sonda via interação eletromagnética das regiões internas ao hádron. Tendo isso em mente, se os léptons de um feixe incidente em um certo alvo possuírem um comprimento de onda de aproximadamente $0,1 \text{ \AA}$, com energias em uma ordem que seja possível desprezar a massa das partículas, além da interação com o núcleo, haverá a prova das órbitas eletrônicas, de forma que a seção de choque diferencial sera escrita,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford} |F(q)|^2, \quad (1.2.9)$$

^{***}É importante citar que o termo nada tem a ver com o significa ordinário da palavra, apenas indica uma característica manifesta em três formas interativas, como a carga elétrica que o faz em duas, positiva e negativa.

^{†††}Por "incolor" entende-se que ou a quantidade total de cada cor é zero ou todas as três cores estão presentes em quantidades iguais.

sendo q a variação do *momentum* das partículas incidentes e $|F(q)|^2$ uma função do *momentum* transferido aos elétrons, denominado *fator de forma atômico*. Agora, *Nevill Francis Mott* em 1929 incluiu o domínio relativístico nos processos de espalhamento de um núcleo ideal infinitamente pesado e de carga puntual, escrevendo a fórmula de *Rutherford* como,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruther} \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right]. \quad (1.2.10)$$

Em analogia com (1.2.9), se houver interação com o núcleo atômico, isto é, elaborando fisicamente o modelo para que o núcleo não seja visto como uma carga puntual, mas sim dotado de uma distribuição espacial de simetria esférica, (1.2.10) toma a forma,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} |F(q)|^2, \quad (1.2.11)$$

A sondagem do núcleo utilizando interações eletromagnéticas torna necessária a consideração do spin dos núcleons, então em 1950, *Marshall N. Rosenbluth*, introduziu dois fatores de forma, F_1 e F_2 , relacionados respectivamente a distribuição espacial elétrica e magnética,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rosen} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} \left[\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4m^2} F_2^2\right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m^2} (F_1 + F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (1.2.12)$$

sendo E' a energia do feixe após o espalhamento e m a massa do núcleon. Na medida que a energia do feixe de léptons incidentes aumenta, o espalhamento torna-se mais inelástico, revelando o caráter não puntual dos núcleons. O até então jovem físico norte-americano *James Daniel Bjorken* [65], em 1967, realizando especulações teóricas no limite em que a energia iria para o infinito, ou seja, $q^2 \rightarrow \infty$ e $v = (E - E')_{lab} \rightarrow \infty$, o chamado *Breit frame*, observou que as funções de estrutura do núcleon dependeria unicamente da razão adimensional,

$$x \equiv \frac{q^2}{2mv}, \quad (1.2.13)$$

ou seja, um comportamento de escala, sendo x a variável de *Bjorken*.

Em 1968, *Richard Feynman* estava de passagem pelo *Stanford Linear Accelerator Center (SLAC)* [66]- [68], onde ele se encontrou com alguns experimentais que analisavam os primeiros resultados das especulações de *Bjorken*. O comportamento de escala foi rapidamente interpretado por *Feynman* como a indicação de constituintes dotados de carga elétrica no interior dos núcleons, estes constituintes foram nomeados por *Feynman* como *pártons* (*parts of hádrons*, *partes de hádrons*) que mais tarde foram identificadas com os quarks [69] e glúons (mediador da força forte).

No modelo a pártons os constituintes dos núcleons possuem uma fração ξ do *momentum* do hádron pai, sendo colinear a ele. Para baixas energias os chamados *quarks de valência* compunham os núcleons em tríades, como esquematizado por *Gell-Mann e Zweig*, contudo, o acréscimo de energia no espalhamento profundo inelástico denuncia a presença de *distribuições* para as populações partônicas dos núcleons. Logo, as distribuições presentes neste modelo, só possuem sentido físico no *Breit frame*, onde os pártons praticamente não interagem entre si, em um caráter *quase-livre*. O comportamento destas distribuições frente o ascensão da energia na escala de *Bjorken* é ilustrado na Fig.[1.7].

Pequenos valores na escala de *Bjorken* correspondem a altas energias. Este projeto de pesquisa estuda as distribuições partônicas predominantemente compostas por glúons, uma vez que tratam-se de valores para x

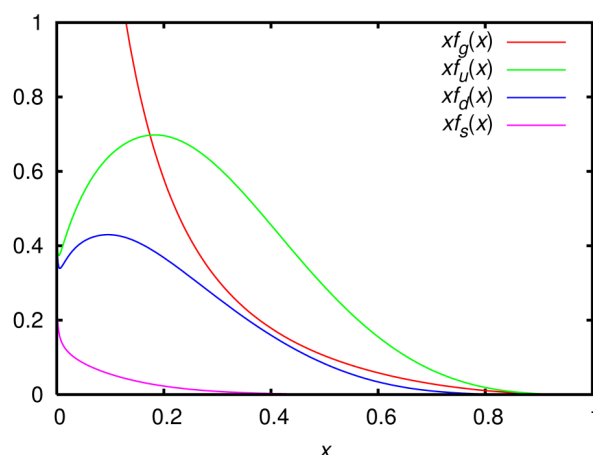


Figura 1.7: Na figura $x f_g(x)$, $x f_u(x)$, $x f_d(x)$ e $x f_s(x)$ são as distribuições de fração de momento de glúons, quarks up, quarks down e quarks strange respectivamente.

de aproximadamente 0,01 ou menores.

1.3 A PROPOSTA

Revisando brevemente a noção do conceito de entropia e o seu refinamento com a evolução das teorias científicas principalmente nos séculos XIX e XX, observa-se a abrangência do seu escopo, podendo caracterizar macroscopicamente sistemas clássicos a partir da consideração de que estes são compostos microscopicamente, o *modus operandi* da análise do gás ideal, sendo a estes, associada uma entropia termodinâmica.

Na aplicação da mecânica estatística de equilíbrio, ainda é possível refinar a noção estatística do problema termodinâmico em questão a partir da análise das partículas que compunham o sistema, utilizando as supracitadas estatísticas de *Fermi-Dirac* para os férmions e *Bose-Einstein* para bósons, podendo assim, no caso mais canônico, por exemplo, sofisticar o modelo do gás ideal, ou investigar tipos mais exóticos, como um gás de fótons, ou ainda, modelos para o funcionamento de estrelas.

Contudo, se observa que as entropias de *von Neumann* e *Wehrl* não são termodinâmicas, relacionam-se com a *matriz densidade* de um dado sistema quântico analisando a sua estatística. Como discutido, a mecânica quântica pode no máximo expressar *possibilidades* de estados físicos dados pela função de distribuição definida a partir do módulo quadrado da função de onda. Assim, estas entropias estão relacionadas com as estatísticas das possibilidades, com a *informação* que se possa extrair de um sistema, estando assim no corpo da teoria da informação quântica.

A breve descrição da evolução da física de partículas elementares, que culminou em avanços como a física nuclear e a teoria de campos partindo do elétron até a construção do modelo padrão, revelou um extenso domínio de investigação que segue em expansão. Mais precisamente, em relação aos pártons, o fato deles estarem restritos a uma região tão pequena, quasi-livres, sempre confinados, mostra similaridades, por exemplo, com elétrons numa caixa, embora o tratamento matemático seja distinto e fenômenos puramente quânticos, como o emaranhamento, seja necessário num modelo mais realista.

Entretanto como observado na Fig.[1.7], as distribuições variam para valores intermediários de x , mesclando-se. Para valores grandes, o caráter distributivo se dissipa. Felizmente, os casos ultra energéticos, a região do

pequeno x , é composta predominantemente por glúons. Utilizando desta particularidade das distribuições partônicas do *pequeno x* , a partir de modelos apriorísticos, este trabalho é focado na investigação das entropias de *Wehrl* e de *von Neumann* relacionadas a este domínio, a partir da previsão e modelação de dados para cada entropia na análise do mesmo sistema, avaliando suas propriedades, bem como concordâncias e contrastes além de visar, se possível, as dificuldades ou facilidades da sua experimentação.

Neste espírito, o passo inicial é uma breve revisão do conceito e funcionamento da entropia, bem como das suas principais propriedades, além da abordagem do funcionamento do emaranhamento quântico, realizado no próximo capítulo.

Capítulo 2

Entropia e emaranhamento

Uma vez introduzidas as metas deste trabalho bem como seu objeto de pesquisa é razoável revisar as teorias que orbitam-no a fim de estipular um método de análise e construção das diferentes formas entrópicas investigadas no regime de altas energias. Inicialmente, é necessário rever as bases da termodinâmica de equilíbrio bem como seus métodos estatísticos no âmbito das teorias clássicas, posteriormente avançando no regime puramente quântico da matéria onde um dos métodos de prova consiste na computação da entropia de *von Neumann* definida em relação a matriz densidade do sistema quântico de interesse.

A terceira via entrópica utilizada consiste na construção de um modelo semi-clássico: a entropia de *Wehrl* que define sua base nos estados coerentes com o auxílio de um espaço de fase semi-clássico dado pelas distribuições de *Husimi*. Uma vez introduzidas as entropias estudadas é coerente a relação de suas propriedades gerais bem como seus contrastes e interpretações.

A caracterização dos sistema quânticos aqui abordados exige a consideração do emaranhamento dos partons no regime estudado, justificando assim um estudo básico nas operações características a este fenômeno bem como os métodos de manipulação algébrica de suas operações.

2.1 ENTROPIA NA TERMODINÂMICA

O ponto de partida são os sistemas termodinâmicos. Como citado na introdução, o conceito de entropia nasceu no estudo dos seus processos, contudo, o mesmo se expandiu englobando em seu escopo a *teoria da informação*, situando o objeto deste trabalho.

O método termodinâmico só é possível devido a teoria atômica da matéria, onde, por exemplo, uma pequena amostra de *álcool* exigiria a caracterização de todos os seus entes para a devida computação de um valor de 10^{24} a 10^{25} parâmetros para suas coordenadas e *momenta* [70]. Mesmo que tal sistema fosse integrável ou de alguma forma fossem obtidas as equações de movimento, o número astronômico de relações impossibilitaria a obtenção de informações sobre o mesmo. Por outro lado, uma medida nestes sistemas dura na ordem de um centésimo de segundo, sendo o período atômico típico um valor na ordem de 10^{-15} s, qualquer medida obterá sempre *valores médios*. Assim, o número de variáveis necessárias para a caracterização do sistema é reduzido drasticamente, sendo estas justamente predominantes na estatística da medida. Disto, o primeiro postulado da termodinâmica de equilíbrio,

Postulado I. Existem estados particulares, chamados *estados de equilíbrio* dos sistemas simples,

ou seja, macroscópicos, caracterizados completamente pela energia interna U , o volume V e os números de mols $\{N_j\}$ do j -ésimo componente químico.

Para um processo *quasi-estático* (um processo infinitesimal de um estado de equilíbrio para outrem), com um número de mols constante a primeira lei da termodinâmica toma a forma,

$$-dQ = dU - dW_M, \quad (2.1.1)$$

sendo W_M o trabalho mecânico associado ao processo e Q a quantidade de calor injetada/retirada dos modos normais ocultos do sistema. Ainda é possível eliminar um diferencial *imperfeito* a partir de uma substituição envolvendo a pressão P e o volume V , obtendo,

$$-dQ = dU + PdV. \quad (2.1.2)$$

Agora, considerando o caso onde pode haver uma mudança no número de partículas do sistema ou reações químicas, a equação [2.1.2] toma a forma

$$-dQ = dU + PdV - \sum_r \mu_r dN_r, \quad (2.1.3)$$

sendo μ_r o r -ésimo potencial químico.

O conceito de entropia é incorporado no segundo postulado,

Postulado II. Existe uma função, chamada entropia S , dos parâmetros extensivos, definida para todos os estados de equilíbrio. Nesta função, os valores assumidos pelos parâmetros extensivos na ausência de vínculos internos são aqueles que maximizam a entropia sobre a variedade de vínculos de estados de equilíbrio.

Variável extensiva é uma quantidade cuja magnitude é aditiva para subsistemas, sendo V , $\{N_j\}$, U e S exemplos. A esta característica, se dá o nome de *subaditividade*, discutida posteriormente. Disto, ocorre o terceiro postulado,

Postulado III. A entropia de um sistema composto é aditiva sobre os subsistemas constituintes, sendo contínua, diferenciável é monoatomicamente crescente com a energia.

Do terceiro postulado se tem que a entropia de um sistema simples é uma função homogênea de primeira ordem dos parâmetros extensivos e que a energia é uma função uniforme, contínua e diferenciável.

Por fim, o último postulado afirma,

Postulado IV. A entropia de qualquer sistema desaparece para um estado no qual,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, \{N_j\}} = T = 0. \quad (2.1.4)$$

No postulado IV, T é a temperatura. Uma vez revisados os postulados fundamentais, vale ainda a citação da *segunda lei da termodinâmica**,

*Este não é propriamente o enunciado único desta lei. Existem outros que fazem menção de máquinas ou refrigeradores ideais, estes, sem perda de informação. Para o objetivo deste trabalho esta forma é a mais adequada.

A entropia do sistema isolado só tende a aumentar.

Esta, podendo ser expressa como,

$$S \geq 0. \quad (2.1.5)$$

2.2 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA ESTATÍSTICA DE EQUILÍBRIO

O supracitado princípio fundamental da mecânica estatística diz que *em um sistema estatístico fechado, com energia fixa, todos os microestados acessíveis são igualmente prováveis*. Na descrição estatística do problema físico é possível etiquetar um microestado a partir de uma característica global. De forma direta, é possível definir, microestado, macroestado e multiplicidade na seguinte maneira,

Microestado: Configuração provável em um sistema.

Macroestado: Conjunto de microestados que apresentam uma mesma característica global.

Multiplicidade: Número de microestados que correspondem a um dado macroestado.

Sendo $\Omega(V, U, \{N_j\})$ a função multiplicidade, a relação estatística termodinâmica é justamente realizada a partir da entropia de *Boltzmann*, sendo este o *segundo postulada da mecânica estatística de equilíbrio*,

$$S = k_B \ln \Omega(V, U, \{N_j\}). \quad (2.2.1)$$

Estas características definem o *ensemble microcanônico*. Também é possível estabelecer esta conexão a partir do espaço de fase, onde, unidimensionalmente é dado por,

$$S = -k_B \int \frac{dpdq}{h'} f(q, p) \ln f(q, p), \quad (2.2.2)$$

sendo $f(q, p)$ uma distribuição no espaço de fase e h' uma célula elementar neste espaço. Esta arbitrariedade quanto aos valores possíveis para h' faz com que a entropia possa assumir valores infinitamente negativos. Atualmente se sabe que h' deve ser a constante de *Planck*, caso contrário, esses desvios ocorrem ao considerar células unitárias tais que $h' < h$, ignorando o princípio da incerteza [1.1.21] [71].

Contudo, nem sempre é possível modelar sistemas reais que sejam isolados de qualquer influência considerável. Nestes casos (geralmente mais reais) é possível expandir a teoria para sistemas mais complexos a partir da sua interação com o ambiente. A primeira sofisticação seria permitir o fluxo de energia, dessa forma, um sistema termodinâmico simples em contato diatérmico, espacialmente fixo e impermeável com um reservatório com temperatura fixa. Neste contexto é introduzida a função partição Z ,

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}, \quad (2.2.3)$$

onde $\beta = 1/k_B T$ e E_i é a energia associada ao i -ésimo microestado. A função partição se relaciona com a normalização das probabilidades associadas aos microestados e a partir da sua construção é realizada a conexão com a termodinâmica,

$$F(T, V, N) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(T, V, N), \quad (2.2.4)$$

sendo F o potencial termodinâmico de *Helmholtz*, configurando o *ensemble canônico*.

Por fim, se além de um reservatório térmico a temperatura fixa, é permitido que o fluxo de partículas com um potencial químico μ (também fixado), são possibilitadas as operações do *ensemble gran canônico*. Analogamente a função partição, define-se a *grande função de partição*,

$$\Xi = \sum_i e^{-\beta E_i + \beta \mu N_i}. \quad (2.2.5)$$

Por sua vez, a conexão com a termodinâmica toma a forma,

$$\Phi(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \ln \Xi(T, V, \mu), \quad (2.2.6)$$

onde Φ é o grande potencial termodinâmico.

2.3 ENTROPIA DE *von Neumann*

Na mecânica quântica, os valores médios dizem respeito ao conceito de média de *ensemble*, ou seja, sistemas *a priori* identicamente preparados[†]. Após a realização da medida obtêm-se uma caracterização estatística dos constituintes do estado final total, composto por todos os subsistemas onde a medição fora realizada. Por exemplo, após a realização de um experimento *Stern-Gerlach* (experimento SG), sabe-se que o estado físico do feixe de átomos de prata após a interação com o campo magnético externo possui uma população de 50% dos seus átomos colapsados em um estado de spin para cima e a parcela restante, também composta por 50%, possui spin para baixo. Entretanto, ao sair do forno, ou em outras palavras, antes da medição, não se pode caracterizar os estados físicos dos átomos que constitui o feixe: o spin individual de cada átomo pode estar apontando para qualquer direção, em termos gerais, o estado físico é *randômico*.

Para o caso dos sistemas físicos onde não ocorreu uma medição, sabe-se que eles são compostos por um número finito de constituintes, de forma que é possível atribuir um peso a sua população relativa de um dado estado particular, p_m , com $1 \leq m \leq N$ associado ao m -ésimo estado $|m\rangle$ e N é o número de indivíduos no *ensemble*, ou o número de sistemas identicamente preparados. Nesse caso, deve-se tomar cuidado para não confundir o número de indivíduos que compõem o sistema com a dimensão do espaço gerado pelos auto vetores de um dado observável: o parâmetro N geralmente supera com folga a dimensão do auto-espaço de um dado operador. Tratando-se de uma população fracionária, a soma dos pesos deve ser a unidade, impondo a condição

$$\sum_{m=1}^N p_m = 1. \quad (2.3.1)$$

Além disso, não se tem nenhuma informação geométrica dos kets antes da medida: eles podem muito bem ser ortogonais entre si, como não, podem ser auto vetores de um operador em comum como também o podem não ser e nem é determinado se os operadores que os representam são compatíveis ou não. Sendo assim, é possível inferir a natureza estatística deste conjunto: antes de realizada a medida em um sistema composto pela população de estados físicos e considerando que exista mais de um p_m diferente de zero, então, se diz que o sistema configura um *ensemble misto*. Agora, após a realização de uma medida, é verossímil analisar em sua totalidade a parte da população fracionária caracterizada por um certo estado físico em comum, ou seja, a coletânea de sistemas físicos tais quais são representadas por um único ket. Para este último caso, da-se o

[†]Esta definição é justamente realizada para contornar as limitações impostas pelo colapso da função de onda

nome de *ensemble puro*. Ou seja, um *ensemble* misto é composto por uma coleção de *ensembles* puros.

2.3.1 Construção do operador densidade

Objetivado o interesse na obtenção da medida de algum observável, este só será possibilitado a partir de uma média sobre *ensembles*. Considerando, por exemplo, o observável \hat{G} , que na construção formal da mecânica quântica é um operador, obtem-se para sua média $\langle G \rangle$

$$\begin{aligned}\langle G \rangle &= \sum_{m=1}^N p_m \langle m | \hat{G} | m \rangle \\ &= \sum_{m=1}^N p_m \langle m | \hat{G} \mathbb{1} | m \rangle \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_g p_m \langle m | \hat{G} | g \rangle \langle g | m \rangle.\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Valendo a equação de autovalores $\hat{G} | g \rangle = g | g \rangle$, obtêm-se para a $\langle G \rangle$,

$$\langle G \rangle = \sum_{m=1}^N \sum_g p_m \langle g | m \rangle^2 g.\tag{2.3.3}$$

A partir deste resultado, deve-se alertar a construção de duas estatísticas independentes na obtenção de uma única medida, os pesos populacionais de cada estado físico, compõem uma abordagem estatística que acaba mediando a média de *ensemble* das previsões quânticas, que também constituem um escopo estatístico em si.

O formalismo quântico permite quantas mudanças de base forem necessárias, utilizando para isso a relação de completeza dada por,

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbb{1},\tag{2.3.4}$$

sendo $\mathbb{1}$ o operador identidade, possibilitando escrever trocas de base de uma forma bem compactada. Dessa forma, é possível avaliar o valor esperado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\langle G \rangle &= \sum_{m=1}^N p_m \langle m | \mathbb{1} \hat{G} \mathbb{1} | m \rangle \\ &= \sum_{m=1}^N p_m \sum_i \sum_j \langle m | i \rangle \langle i | \hat{G} | j \rangle \langle j | m \rangle \\ &= \sum_i \sum_j \left(\sum_{m=1}^N p_m \langle j | m \rangle \langle m | i \rangle \right) \langle i | \hat{G} | j \rangle.\end{aligned}\tag{2.3.5}$$

O termo destacado entre parênteses é definido como o elemento de matriz de um operador hermitiano, denominado *operador densidade* $\hat{\rho}$,

$$\rho_{ij} \equiv \langle i | \hat{\rho} | j \rangle = \sum_{m=0}^N p_m \langle i | m \rangle \langle m | j \rangle.\tag{2.3.6}$$

Conciliando a representação matricial da mecânica quântica com este operador, define-se a expressão geral

do operador densidade com,

$$\hat{\rho} \equiv \sum_{m=0}^N p_m |m\rangle \langle m| \quad (2.3.7)$$

Considerando esta construção, a expressão para $\langle G \rangle$ toma uma forma mais compacta,

$$\begin{aligned} \langle G \rangle &= \sum_i \sum_j \langle j | \hat{\rho} | i \rangle \langle i | \hat{G} | j \rangle = \sum_j \langle j | \hat{\rho} \underbrace{\sum_i |i\rangle \langle i|}_1 \hat{G} | j \rangle \\ &= \sum_j \langle j | \hat{\rho} \hat{G} | j \rangle = Tr[\hat{\rho} \hat{G}]. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Onde a operação $Tr[\hat{\rho} \hat{G}]$ corresponde ao traço do operador resultante do cálculo de $\hat{\rho} \hat{G}$, ficando assim explícito o poder generalizado desta construção: *o traço é independente da representação.*

Resumidamente, encontra-se que a média sobre *ensemble* de um observável \hat{G} é dada por,

$$\langle G \rangle = Tr[\hat{\rho} \hat{G}]. \quad (2.3.9)$$

Agora, analisando o traço do operador identidade separadamente,

$$\begin{aligned} Tr[\hat{\rho}] &= \sum_j \sum_{m=0}^N p_m \langle j | m \rangle \langle m | j \rangle = \sum_{m=0}^N p_m \langle m | \underbrace{\left(\sum_j |j\rangle \langle j| \right)}_1 | m \rangle \\ &= \sum_{m=0}^N p_m \underbrace{\langle m | m \rangle}_1 = 1, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

para um *ensemble* puro, onde a população relativa torna-se total, com $p_1 = 1$, tem-se a matriz densidade $\hat{\rho}_P$,

$$\hat{\rho}_P = \sum_{m=1}^N p_m |m\rangle \langle m| = |m\rangle \langle m|. \quad (2.3.11)$$

Daí,

$$\hat{\rho}_P \hat{\rho}_P = \hat{\rho}_P^2 = |m\rangle \underbrace{\langle m | m \rangle}_1 \langle m| = |m\rangle \langle m| = \hat{\rho}_P, \quad (2.3.12)$$

ou seja, $\hat{\rho}_P$ é um projetor,

$$\hat{\rho}_P^2 = \hat{\rho}_P. \quad (2.3.13)$$

Somente para um estado puro então,

$$Tr[\hat{\rho}_P^2] = 1. \quad (2.3.14)$$

Logo, os autovalores associados ao operador densidade de *ensembles* puros deve sempre ser zero ou um, de forma que quando diagonaliza-se a matriz densidade $\hat{\rho}_P$ espera-se encontrar um objeto matemático na forma de,

$$\hat{\rho}_P \doteq \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

Em contrapartida, um *ensemble* totalmente misto deve possuir a matriz densidade $\hat{\rho}_M$ com estrutura,

$$\hat{\rho}_M \doteq \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \mathbb{1}_N,$$

sendo $\mathbb{1}_N$ a matriz identidade N -dimensional. Impõem-se então duas matrizes diagonais, sujeitas a mesma condição de normalização, que representam objetos físicos diametralmente opostos. É conveniente então a definição de uma grandeza que distinga as qualidades físicas intrínsecas a cada objeto, neste espírito; define-se a *entropia de von Neumann*,

$$S_{vN} \equiv -k_B \text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (2.3.15)$$

Isto é, a entropia de *von Neumann* mede o desvio do sistema em relação ao estado puro, a quantidade de informação degradada, mais uma vez, o caos. Como todos os elementos não diagonais de ambas as matrizes são nulos, pode-se escrever a forma,

$$S_{vN} = -k_B \sum_{n=0}^N \rho_{nn} \ln \rho_{nn} = -k_B \sum_{n=0}^N p_n \ln p_n. \quad (2.3.16)$$

Para um *ensemble* completamente misto, tem-se a entropia S_{vN}^M , dada por,

$$S_{vN}^M = k_B \sum_{n=0}^N \rho_{nn} \ln \frac{1}{\rho_{nn}} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \ln N = \ln N. \quad (2.3.17)$$

Em contrapartida, o operador densidade relacionado a um estado puro, resulta em uma entropia S_{vN}^P nula,

$$S_{vN}^P = \ln 1 = 0. \quad (2.3.18)$$

É válida a observação de que nesta definição entrópica, recupera-se a interpretação da medida de desordem de um sistema, o seu *caos*, que reflete o desvio do sistema de um estado puro.

2.3.2 Representação dos *ensembles* micro-canônico e canônico quânticos

A conexão entre a mecânica estatística e a mecânica quântica é motivada a partir do segundo postulado da termodinâmica. Daí, pode-se extrair informações a respeito dos *ensembles* estatísticos a partir da extremização

da entropia de *Von Neumann*, logo,

$$\delta S = 0 \rightarrow \sum_{n=0}^N \delta[\rho_{nn} \ln \rho_{nn}]. \quad (2.3.19)$$

É obrigada a restrição sobre este máximo de que a conservação da probabilidade seja satisfeita, de forma a inclui-se a restrição,

$$Tr[\hat{\rho}] = \sum_{n=0}^N \rho_{nn} = 1 \rightarrow \sum_{n=0}^N \delta \rho_{nn}. \quad (2.3.20)$$

Sendo assim, a junção entre a restrição imposta e a extremização da entropia é dada via multiplicadores de *Lagrange*,

$$\delta S + \gamma \delta Tr[\hat{\rho}] = \sum_{n=0}^N (\ln \rho_{nn} + 1 + \gamma) = 0. \quad (2.3.21)$$

Considerando uma variação arbitrária, ela só será possível se o objeto sobre soma for nulo de forma que,

$$\rho_{nn} = e^{-\gamma-1} \equiv k. \quad (2.3.22)$$

Determina-se a constante k a partir de uma simples normalização, obtendo $k = \frac{1}{N}$, recuperando então a expressão para $\hat{\rho}_M$.

Este resultado confirma o sucesso da construção: em seu estado mais fundamental, $\hat{\rho}_M$ remonta o *ensemble* micro-canônico, nesse caso (excluindo a degenerescência), cada estado é caracterizado por um ket específico configurando um microestado. Como o peso estatístico de cada microestado é o mesmo, $1/N$, encontra-se naturalmente a hipótese de microestados igualmente prováveis *a priori*, um dos passos pioneiros no desenvolvimento de uma mecânica estatística consistente.

Embora tenha sido estabelecida a construção coerente da mecânica estatística quântica, é igualmente possível a compactuação com o *ensemble* canônico, incluindo a restrição na extremização,

$$\langle H \rangle = Tr[\hat{\rho} \hat{H}] \equiv U, \quad (2.3.23)$$

ou seja, a média de energia possui um valor estabelecido. Sob mais esta condição, que remonta um sistema físico em equilíbrio térmico com uma fonte, tem-se,

$$\sum_{n=0}^N \delta[\rho_{nn} \ln \rho_{nn} + \rho_{nn} + \rho_{nn} \beta E_n + \gamma \rho_{nn}] = 0 \quad \therefore \quad \ln \rho_{nn} + 1 + \beta E_n + \gamma = 0. \quad (2.3.24)$$

Sendo assim,

$$\rho_{nn} = C e^{-\beta E_n}. \quad (2.3.25)$$

Pode-se determinar a constante a partir de uma normalização direta, da qual obtém-se

$$\rho_{nn} = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_{i=1}^N e^{-\beta E_i}}. \quad (2.3.26)$$

A expressão no denominador remonta a *função partição*,

$$Z = \sum_{i=1}^N e^{-\beta E_i} = Tr[e^{-\beta \hat{H}}]. \quad (2.3.27)$$

Logo, a matriz densidade no *ensemble* canônico, expressa por,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{\beta \hat{H}}. \quad (2.3.28)$$

Uma vez determinada a matriz densidade de um certo sistema físico, é possível analisar a magnitude dos seus valores médios. Se considerado o observável \hat{A} de interesse, tem-se para o seu valor médio \bar{A} ,

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} \hat{A} \right]. \quad (2.3.29)$$

Um caso específico a ser tratado nos problemas de mecânica estatística é a determinação da energia média de um sistema $\langle E \rangle$, também chamada de energia interna U . Neste caso,

$$\langle E \rangle = U = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}} \hat{H}] = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z. \quad (2.3.30)$$

Equivalentemente na mecânica estatística clássica.

2.4 ENTROPIA DE *Wehrl*

As duas entropias S [2.2.2] e $S_{\nu N}$ [2.3.15] não são simplesmente conectadas. Em particular, está última não se reduz para a primeira no limite que $\hbar \rightarrow 0$. Contudo, é possível realizar esta conversão a partir de uma definição intermediária de entropia dada por *Alfred Wehrl*. Como fora comentado na definição clássica da entropia a partir de [2.2.2], esta pode assumir valores infinitamente negativos devidamente à arbitrariedade quanto o volume da célula unitária, podendo violar o princípio de incerteza. Para ajustar o modelo é considerada a base dos estados coerentes $|c\rangle^\ddagger$ com pacotes gaussianos de incerteza mínima ($\sigma_p \sigma_q = \hbar/2$). Tomando o traço de [2.3.15] na base dos estados coerentes, tem-se

$$S_{\nu N} = - \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} \langle c | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | c \rangle. \quad (2.4.1)$$

A entropia de *Wehrl* S_W é obtida realizando a *substituição clássica* que consiste na troca de $\langle c | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | c \rangle$ por $\langle c | \hat{\rho} | c \rangle \ln \langle c | \hat{\rho} | c \rangle$. Dessa forma,

$$S_W = - \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} \langle c | \hat{\rho} | c \rangle \ln \langle c | \hat{\rho} | c \rangle \quad (2.4.2)$$

Como $-x \ln x$ é uma função côncava (Fig.[2.1]),

$$S_W > S_{\nu N} \geq 0. \quad (2.4.3)$$

A igualdade $S_W = S_{\nu N}$ é impossível. Isto significa que S_W é sempre não nula mesmo para um estado puro. Para diversos sistemas físicos sujeitos à substituição clássica, obtém-se um erro negligenciável para funções suaves no espaço de fase com um volume $\gg \hbar$, contudo, se existem flutuações concentradas em regiões muito pequenas, esta aproximação não é um bom modelo.

A construção de um espaço de fase quântico seria apropriada para a computação da entropia, contudo, esta idealização contradiz o princípio da incerteza [1.1.21]. Agora, por outras vias é possível realizar algumas

[‡]Onde $|c\rangle = e^{c\hat{a}^\dagger - c^*\hat{a}} |0\rangle$ é o auto-estado do operador aniquilação $\hat{a}|c\rangle = c|c\rangle$, sendo $\frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$ e $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (m\omega \hat{q} + i\hat{p})$.

aproximações: Considerando um sistema quântico unidimensional com um estado puro genérico $|\psi(t)\rangle$, a chamada distribuição de *Wigner* [74] é definida como,

$$\begin{aligned} W(q, p, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \langle \psi(t) | q - x/2 \rangle \langle q + x/2 | \psi(t) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx/\hbar} \langle q + x/2 | \hat{\rho}(t) | q - x/2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

sendo $\hat{\rho}(t)$ a matriz densidade de um estado puro. A distribuição de *Wigner* é uma função tanto da posição q como do *momentum* p , satisfazendo as condições,

$$\begin{cases} \int \frac{dq}{2\pi\hbar} W(q, p, t) = |\langle \psi(t) | p \rangle|^2 \\ \int \frac{dp}{2\pi\hbar} W(q, p, t) = |\langle \psi(t) | q \rangle|^2 \\ \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} W(q, p, t) = 1, \end{cases} \quad (2.4.5)$$

sendo a última propriedade a normalização. O conjunto de propriedades [2.4.5] torna tentadora a interpretação de W como uma distribuição de probabilidades no espaço de fase (q, p) . No entanto, a distribuição de *Wigner* é fortemente oscilante e não é positiva definida, sendo esta última propriedade justamente o motivo que levou a equação de *Klein-Gordon* [1.2.4] ao abandono, sendo resgatada posteriormente com uma nova interpretação como fora citado na introdução deste trabalho.

Os motivos destas falhas na distribuição de *Wigner* é justamente o princípio da incerteza que não permite uma medição simultânea da posição e do *momentum*, assim, o máximo que pode-se fazer é descrever o sistema em probabilidades de se encontrar a partícula em uma posição regida pela banda $(q \pm \sigma_q/2, p \pm \sigma_p/2)$ com uma incerteza mínima $\sigma_q \sigma_p = \hbar/2$. Esta propriedade é satisfeita pela distribuição de *Husimi*, que pode ser obtida a partir da convolução gaussiana da distribuição de *Wigner*,

$$H(q, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq' dp' e^{-m\omega(q-q')^2/\hbar - (p-p')^2/m\omega\hbar} W(q', p', t). \quad (2.4.6)$$

Esta expressão também é conhecida como *transformação de Weistrass* [75]. Nela, m é a massa da partícula e ω é um parâmetro arbitrário. Os comprimentos dos fatores gaussianos indicam que a distribuição mancha o espaço de configuração com $\sigma_q = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ e reciprocamente no espaço de *momentum* com $\sigma_p = \sqrt{\hbar m\omega/2}$, respeitando [1.1.21]. Os diferentes valores assumidos por ω corresponde a escalas de resolução diferentes provadas pelo sistema. Para sistemas oscilantes, incluindo campos de radiação, ω é identificado como a frequência.

Agora, uma propriedade importante da distribuição de *Husimi* é a de que ela é positiva-semidefinida,

$$H(q, p, t) \equiv \langle c | \hat{\rho} | c \rangle = |\langle \psi | c \rangle|^2 \geq 0, \quad (2.4.7)$$

Isto é basicamente o traço da matriz densidade na base dos estados coerentes. Ela é construída de tal maneira que observáveis escritos em ordem *anti-normal* seguem o teorema da *equivalência óptica* [73]. Isso significa que é essencialmente a matriz de densidade colocada em *ordem normal*, isto é, põe-se os operadores *criação* a esquerda dos operadores *aniquilação*,

$$: \hat{a} \hat{a}^\dagger := \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.4.8)$$

Este procedimento, também é chamado de ordenamento de *Wick* é essencial na teoria quântica de campos a

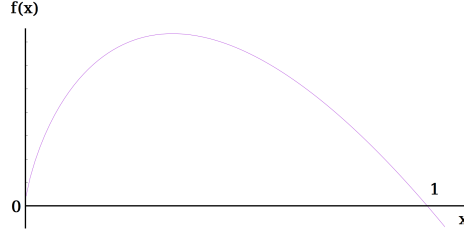


Figura 2.1: Gráfico de $f(x) = -x \ln x$.

fim de evitar o aparecimento de infinitos. A ordem anti normal consiste na inversão da lógica construída em [2.4.8]. Considerando a definição [2.4.7], é possível escrever a entropia de *Wehrl* na forma,

$$S_W = - \int \frac{dqdp}{2\pi\hbar} H(q, p) \ln H(q, p). \quad (2.4.9)$$

A partir de [2.4.4], também é possível definir uma definição entrópica alternativa,

$$\bar{S}_W = - \int \frac{dqdp}{2\pi\hbar} W(q, p) \ln W(q, p). \quad (2.4.10)$$

Agora, de forma prática, considera-se um problema que é possível ser resolvido analiticamente, o oscilador harmônico unidimensional. Este sistema tem a hamiltoniana clássica,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (2.4.11)$$

Para o n -ésimo estado excitado, a distribuição de *Husimi* é dada por,

$$H(q, p) = \frac{1}{n!} e^{-\mathcal{H}/\hbar\omega} \left(\frac{\mathcal{H}}{\hbar\omega} \right)^n. \quad (2.4.12)$$

Substituindo esta expressão em [2.4.9] é possível mostrar que,

$$S_W = n + 1 + \ln n! - n\xi(n + 1), \quad (2.4.13)$$

onde ξ é a função digamma. Assintoticamente $S_W \approx \ln \sqrt{n}$. Por outro lado, com exceção do estado fundamental, a expressão para entropia conjugada [2.4.10], neste caso, oscila e se torna negativa, não tendo sentido neste problema específico, contudo, é sempre possível analisar as duas noções entrópicas e relaciona-las a partir da convolução gaussiana. A Fig. [2.2] mostra a distribuição de *Husimi* e *Wigner* para o caso do oscilador harmônico no quarto estado excitado explorando bem o uso de cada uma destas distribuições.

Neste trabalho investiga-se regiões intra-nucleares, de forma que é necessário rever a construção da entropia de *Wehrl* nas variáveis e formulações compatíveis com a *cromodinâmica quântica* (QCD, do inglês *quantum chromodynamics*) a teoria física apropriada neste regime. Mas antes de realizar esta revisão, é fundamental introduzir alguns conceitos básicos da QCD, tarefa esta, realizada no próximo capítulo.

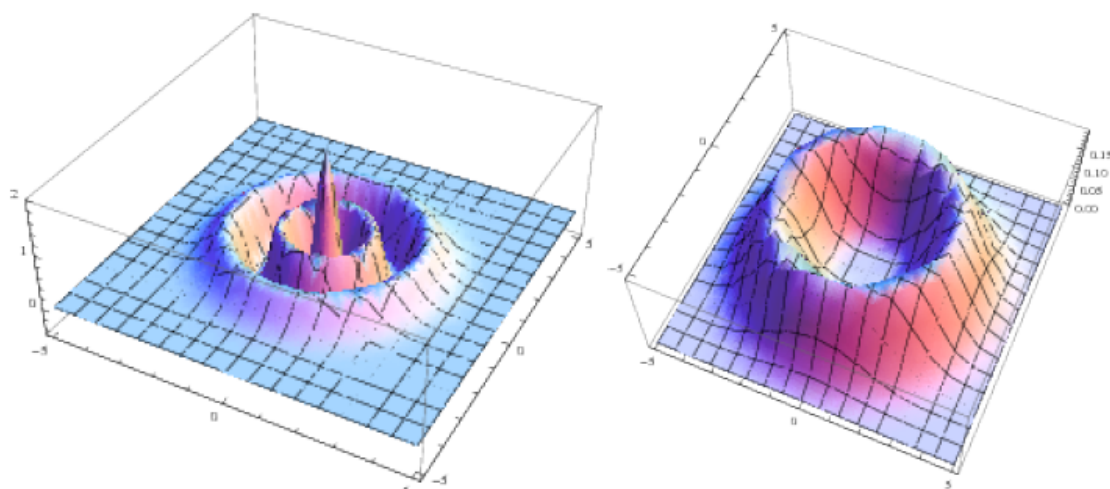


Figura 2.2: As distribuições de *Wigner* (à esquerda) e de *Husimi* (à direita) para o caso do quarto estado excitado do oscilador harmônico no plano (q, p) . É possível notar que a distribuição de *Husimi* suavizou as oscilações abruptas que ocorrem na distribuição de *Wigner* além de ser sempre positiva ou nula. Esta figura foi retirada da referência [89].

2.5 CARACTERÍSTICAS ENTRÓPICAS GLOBAIS

A segunda lei se mostra muito útil no desenvolvimento técnico-teórico da termodinâmica, contudo ela não é um bom ponto de partida para revisar as entrelinhas da entropia. Nenhuma teoria clássica o é, para isso, uma base sólida é dada pela mecânica quântica, nela, lidam-se com dois objetos, operadores ou estados (separação tão drástica que é possível separar a álgebra quântica em dois *pictures*), observando a entropia de *von Neumann* [2.3.15], identifica-se que a entropia é do segundo tipo. Contudo, *Boltzmann* fora capaz de computar resultados muito satisfatórios a partir da sua expressão [2.2.1]. Para fins elucidativos, é considerada a forma

$$S = \ln \Omega, \quad (2.5.1)$$

sendo Ω o número de microestados. A equação [2.5.1] estabeleceu a conexão com a entropia termodinâmica fenomenológica e quantificou o caos ou desordem do sistema, o qual, mais precisamente representa o número de microestados associados a um macroestado de características macroscópicas. Contudo, "número de microestados" não configura uma qualidade que possa ser abordada a partir de uma análise clássica, ou ainda, a problemática ocasionada devida à arbitrariedade quanto ao volume de célula unitária. Em contraste, estas inserções são bem compatíveis com a teoria quântica: microestado pode ser relacionado com o número de estados puros relacionados a um dado sistema e a célula unitária a um volume mínimo regido pela constante *Planck*.

Considerando que W contabiliza o número de estados puros equiprováveis, então,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\Omega} P, \quad (2.5.2)$$

onde P é uma projeção Ω -dimensional, assim,

$$\ln \Omega = -\text{Tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}. \quad (2.5.3)$$

Dessa forma, a expressão que melhor contabiliza a entropia é a dada por *von Neumann*, nesta seção simplificada como,

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}. \quad (2.5.4)$$

Ela não é única, contudo é a que melhor aborda propriedades intrínsecas a entropia como será discutido posteriormente.

Toda matriz densidade pode ser diagonalizada, de modo que, como já foi demonstrado em [2.3.16], a forma,

$$S(\hat{\rho}) = -\sum p_k \ln p_k, \quad (2.5.5)$$

é possível. Sendo p_k a probabilidade de medição do estado $|k\rangle$. Realizando N medidas, obtém-se que o sistema encontrou-se Np_n vezes no n -ésimo estado. Agora, a matriz densidade não carrega consigo a ordem em que estes estados foram obtidos, contabilizando R formas possíveis,

$$R = \frac{N!}{(p_1 N)! (p_2 N)! \dots (p_n N)!}. \quad (2.5.6)$$

Assim, para $N \rightarrow \infty$ é verificado que o produto de $1/N$ com o logaritmo de R converge para S .

A interpretação deste resultado é possível a partir da consideração de N cópias do mesmo sistema, representado pelo espaço de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots$. Neste sistema os microestados podem assumir a forma $|1\rangle \otimes |2\rangle \otimes \dots$, etc. Esse exemplo ilustra que o método boltzmaniano é mais compatível com a mecânica quântica do que com a mecânica clássica, justificando assim a obtenção das características gerais da entropia de um ponto de vista quântico. Neste espírito, é discutido de forma muito sucinta cada uma destas propriedades.

2.5.1 Propriedades básicas

A entropia é definida para qualquer matriz densidade, sendo sempre maior ou igual a zero e possivelmente infinita. Para os estados puros e unicamente para eles, ela é nula.

O domínio de $S(\hat{\rho})$ é $[0, \infty)$, contudo, para as entropias clássicas estende-se para todo \mathbb{R} .

Ela é invariante. Considerando, [2.3.16], sendo os autovalores de ρ , a entropia apenas depende da parte positiva do espectro de ρ . Qualquer mapeamento $\rho \rightarrow \rho'$ que mantém o espectro positivo invariante, mantém a entropia invariante.

2.5.2 Concavidade

Considerando a concavidade, verifica-se que a matriz densidade do tipo,

$$\hat{\rho} = \lambda_1 \hat{\rho}_1 + \lambda_2 \hat{\rho}_2, \quad (2.5.7)$$

sendo $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ matrizes densidade com $\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$ sob a imposição $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Então,

$$S(\hat{\rho}) \geq \lambda_1 S(\hat{\rho}_1) + \lambda_2 S(\hat{\rho}_2). \quad (2.5.8)$$

Se dois *ensembles* são dispostos juntos, o que matematicamente é descrito a partir da combinação convexa $\lambda_1 \hat{\rho}_1 + \lambda_2 \hat{\rho}_2$, perde-se a informação que indica de qual conjunto uma amostra especial se origina e, portanto, a entropia aumenta.

2.5.3 Aprimoramento de mistura

Para os autovalores de duas matrizes densidade $\hat{\rho}$ e $\hat{\rho}'$, arranjadas em ordem decrescente, as desigualdades,

$$\begin{aligned} p_1(\hat{\rho}) &\leq p_1(\hat{\rho}'), \\ p_1(\hat{\rho}) + p_2(\hat{\rho}) &\leq p_1(\hat{\rho}') + p_2(\hat{\rho}'), \\ p_1(\hat{\rho}) + \dots + p_r(\hat{\rho}) &\leq p_1(\hat{\rho}') + \dots + p_r(\hat{\rho}'). \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Disso, é afirmado que $\hat{\rho}$ é mais *mista* ou caótica que $\hat{\rho}'$, valendo-se também a afirmação de que $\hat{\rho}'$ é mais *pura* que $\hat{\rho}$.

2.5.4 Continuidade

Nos espaços infinito-dimensionais de *Hilbert*, a entropia como uma função da matriz densidade é descontínua em topologias usuais, contudo, existem algumas condições de continuidade. Os problemas que surgem com esta conexão serão aqui abordados em função de considerações técnicas que podem ser provadas para matrizes de dimensão finita.

- **Insensitividade:** S é uma função contínua de vários autovalores finitos p_n .
- **Semicontinuidade inferior:** Considerando $\hat{\rho}_n$ e $\hat{\rho}$ nos quais $Tr\{\hat{\rho} - \hat{\rho}_n\}$ tende a zero. Então,

$$S(\hat{\rho}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} S(\hat{\rho}_n). \quad (2.5.10)$$

- **Limitação em toda vizinhança:** Considera-se $\hat{\rho}$ a matriz densidade e ϵ um número positivo não nulo arbitrário. Então sempre existe outra matriz densidade $\hat{\rho}'$ com $Tr\{\hat{\rho} - \hat{\rho}'\} < \epsilon$ e $S(\hat{\rho}') = \infty$, implicando na descontinuidade de $S(\hat{\rho})$. Para contornar esta limitação, considera-se um índice suficientemente grande r , com o conjunto de autovalores de $\hat{\rho}$, $\{p_r\}$, obedecendo,

$$p'_k \sim \frac{1}{k(\ln k)^2}, \quad (2.5.11)$$

para $k > l$.

- **Entropia é quase sempre infinita:** Devido a semicontinuidades inferiores, os conjuntos $\{\hat{\rho} : S(\hat{\rho}) \leq n\}$ são fechados e não densos, assim $\{\hat{\rho} : S(\hat{\rho}) \leq \infty\} = U\{\hat{\rho} : S(\hat{\rho}) \leq n\}$.

2.5.5 Aditividade

Agora, sendo \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 dois espaços de *Hilbert*, com duas matrizes densidades $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$, respectivamente. Então a entropia da matriz densidade $\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ no espaço $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é,

$$S(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2) = S(\hat{\rho}_1) + S(\hat{\rho}_2), \quad (2.5.12)$$

podendo ser generalizado que,

$$S\left(\bigotimes_{n=0}^m \hat{\rho}_n\right) = \sum_{n=0}^m S(\hat{\rho}_n). \quad (2.5.13)$$

2.5.6 Subaditividade e o traço parcial

Se consideradas novamente as quantidades definidas na seção que trata sobre a aditividade da entropia, supondo agora que as matrizes densidade do espaço composto não são independentes, ou seja, as matrizes no espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ são mais gerais que $\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$. Sendo $\{|a_i\rangle\}$ a base de \mathcal{H}_1 e $\{|b_k\rangle\}$ a base de \mathcal{H}_2 . A matriz densidade composta $\hat{\rho}$ pode ser expressa na forma,

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_k\rangle\langle b_l|, \quad (2.5.14)$$

sendo c_{ijkl} uma constante. O método utilizado para extrair a informação intrínseca a $\hat{\rho}_1$ da matriz densidade $\hat{\rho}$ é o *traço parcial*, realizado em relação à base de \mathcal{H}_2 , resultará em,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= Tr_2 \hat{\rho} \equiv \sum_r \langle b_r| \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_k\rangle \underbrace{\langle b_l| b_r\rangle}_{\delta_{lr}} \\ &= \sum_{r,i,j,k,l} c_{ijkl} |a_i\rangle\langle a_j| \langle b_r| b_k\rangle \delta_{lr} \\ &= \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} |a_i\rangle\langle a_j| \langle b_l| b_k\rangle. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Ou seja, é uma definição da extensão linear do mapeamento,

$$Tr_2 : S \otimes T \rightarrow Tr[T]S, \quad (2.5.16)$$

para qualquer matriz $S \in \mathcal{H}_1$ e $T \in \mathcal{H}_2$. Percebe-se que o valor esperado é independente da base, sendo de alguma forma, uma contribuição média devido o segundo sistema. De forma análoga é possível construir $\hat{\rho}_2$.

No caso clássico tem-se as distribuições simples $\rho_1(w_1)$ e $\rho_2(w_2)$ e a distribuição composta $\rho(w_1, w_2)$. Assim, a operação similar ao traço parcial é neste caso,

$$\rho_1(w_1) = \int dw_2 \rho(w_1, w_2), \quad (2.5.17)$$

e vice-versa.

Assim, a subaditividade afirma que,

$$S(\hat{\rho}) \leq S(\hat{\rho}_1) + S(\hat{\rho}_2) = S(\hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2). \quad (2.5.18)$$

Sendo plausível a partir da interpretação de que na formação de $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ perde-se a informação a respeito das correlações.

2.6 EMARANHAMENTO QUÂNTICO

Em poucas palavras, o emaranhamento é uma relação exclusivamente quântica, *aespacial* e não local de estados inicialmente simples que evoluíram para compostos. O exemplo do estado *singlete* está para o emaranhamento assim como o experimento SG está para a mecânica quântica, de forma que vale a pena explorar seu mecanismo. Considerando o decaimento do pión neutro em um pósitron e um elétron,

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+. \quad (2.6.1)$$

Se o pión inicialmente estiver em repouso, o decaimento se dará na forma que tanto o elétron como o pósitron mover-se-ão em direções opostas, com *momentum linear* de mesmo módulo devido as leis de conservação. Além disso o méson pi neutro possui momento angular intrínseco (spin) nulo em contraste com o elétron e o pósitron que são partículas de spin $1/2$, fazendo com que a única configuração possível seja de uma projeção de spin $+\hbar/2$ e o outro com $-\hbar/2$, vide a conservação de momento angular. Logo, a única configuração possível do estado físico do sistema antes de uma medição $|\psi\rangle$ é o singlete. Etiketando com o sub-escrito P as quantidades inerentes ao pósitron e E para o elétron, então, $|\uparrow\rangle_P, |\downarrow\rangle_P \in \mathcal{H}_P$ e $|\uparrow\rangle_E, |\downarrow\rangle_E \in \mathcal{H}_E$. Sendo nesta notação, o estado de superposição singlete,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_P \otimes |\downarrow\rangle_E - |\downarrow\rangle_P \otimes |\uparrow\rangle_E) \quad (2.6.2)$$

Independentemente da distância em que se encontram as partículas geradas no decaimento, ao ser realizada a medida da direção do spin de uma, a outra é definida instantaneamente. Por exemplo, se na Terra é medido o spin do pósitron obtendo o autovalor $\hbar/2$, o elétron independentemente de onde esteja, na lua ou na nebulosa de Órion, também terá seu spin definido, com $-\hbar/2$, até pelo fato de que seria uma quebra de conservação grosseira a medição do spin do elétron detectar uma partícula com $\hbar/2$, o elétron não pode estar em um estado de superposição, o colapso da função de onda é instantâneo. Assim, a caracterização de um ente implica na de outrem, configurando um sistema emaranhado.

Se um estado quântico não está emaranhado, diz-se que ele é *separável*. Analisando sistemas finitos, tem-se \mathcal{H}_a e \mathcal{H}_b com as bases $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_k\rangle\}$ respectivamente. O sistema composto deve ser contido no espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ tendo como base $\{|a_i\rangle \otimes |b_k\rangle\}$, de forma que qualquer estado puro no sistema composto possa ser escrito na forma,

$$|\psi\rangle = \sum_{i,k} c_{ik} |a_i\rangle \otimes |b_k\rangle, \quad (2.6.3)$$

sendo c_{ij} uma constante. Se existe um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ que possa ser escrito na forma $|\psi\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$, com $|\psi_a\rangle \in \mathcal{H}_a$ e $|\psi_b\rangle \in \mathcal{H}_b$, ou seja, verificando [2.6.3], *sua soma tem apenas um termo*, é chamado de separável e caso contrário, *emaranhado*. Verificando o estado singlete [2.6.2], nota-se que ele é do segundo tipo.

A matriz densidade do estado singlete é dada por,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_P \otimes |\downarrow\rangle_E \langle\uparrow|_P \otimes \langle\downarrow|_E - |\downarrow\rangle_P \otimes |\uparrow\rangle_E \langle\downarrow|_P \otimes \langle\uparrow|_E + |\uparrow\rangle_P \otimes |\uparrow\rangle_E \langle\uparrow|_P \otimes \langle\uparrow|_E + |\downarrow\rangle_P \otimes |\downarrow\rangle_E \langle\downarrow|_P \otimes \langle\downarrow|_E). \quad (2.6.4)$$

Se for de interesse no sistema singlete do decaimento do pión neutro, obter apenas a matriz densidade no espaço dos elétrons, por exemplo, utilizando a expressão [2.5.15], tem-se que,

$$\hat{\rho}_E = Tr_P \hat{\rho} = \frac{1}{2} (|\uparrow\rangle_E \langle\uparrow|_E + |\downarrow\rangle_E \langle\downarrow|_E). \quad (2.6.5)$$

Além disso, verifica-se o fato de que é impossível descrever o singleto como um estado puro exclusivamente de \mathcal{H}_a ou \mathcal{H}_b , assim, computando a entropia de *von Neumann* do sistema total, em relação a matriz densidade completa, resulta num valor nulo, é um estado puro. Agora, tomando o traço parcial e calculando a entropia novamente, será obtido uma entropia não nula, sendo esta, a *entropia de emaranhamento*.

A partir desta breve discussão a respeito do emaranhamento quântico bem como de algumas de suas operações, do breve resumo do desenvolvimento histórico e das principais características relacionadas a entropia, agora é necessário revisar brevemente as propriedades físicas do modelo a pártons e das TQC's a ele relacionadas, para que seja possível estabelecer as noções entrópicas introduzidas no regime da física das altas energias.

Capítulo 3

Modelo a pártons e QCD perturbativa

Neste capítulo é abordado os métodos relativos a QCD na sua forma perturbativa a fim de compreender as propriedades básicas do modelo a pártons, bem como suas características.

Também é realizada uma revisão breve sobre as equações de evolução para as distribuições de pártons no núcleon, com maior enfoque na distribuições de glúons.

Em particular, se discute as equações de evoluções lineares como DGLAP e BFKL e os seus limites em altas energias (ou pequeno x de Bjorken). O controle do crescimento do número de ocupação dos glúons em altas energias levará a necessidade de construir-se equações de evolução não lineares, como a equação de *Balitski-Kovchegov* (BK). Aproveita-se a discussão desta última para introduzir o formalismo de dipolos de cor e a escala de saturação partônica.

São utilizadas neste capítulo as definições estabelecidas em [76], sendo elas,

- q , tanto para etiquetar os quarks quanto para a transferência de quadri-*momenta*, $q^\mu = k^\mu - k'^\mu$, tendo sua desambiguação aplicada no contexto de utilização.
- k^μ , quadri-*momentum* do elétron incidente;
- k'^μ , quadri-*momentum* do elétron espalhado;
- P^μ , quadri-*momentum* do próton;
- p^μ , quadri-*momentum* do párton;
- Q^2 , quantidade que mede o quanto o fóton virtual se desvia da camada de massa, chamada *virtualidade do fóton*.
- x , variável cinemática de *Bjorken*, definida como,

$$x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q}; \quad (3.0.1)$$

- z , variável cinemática definida como,

$$z \equiv \frac{Q^2}{2p_i \cdot q}; \quad (3.0.2)$$

– ξ , fração de *momentum* do i -ésimo párton em relação ao *momentum* do próton,

$$p_i^\mu = \xi P^\mu; \quad (3.0.3)$$

– ω , variável cinemática dada por,

$$\omega \equiv \frac{1}{x}; \quad (3.0.4)$$

– y é a inelasticidade, uma variável cinemática dada por,

$$y \equiv \frac{P \cdot q}{P \cdot k}; \quad (3.0.5)$$

– v , variável cinemática dada por,

$$v = \frac{P \cdot q}{m_n}, \quad (3.0.6)$$

sendo m_n a massa do núcleon, embora neste capítulo seja recorrente o uso do próton de massa m_p .

Tendo em vista a complexidade matemática adjacente as teorias quânticas de campos, é essencial apresentar uma convenção da notação que será utilizada neste trabalho: Os tri-vetores serão indicados por uma seta superior, para o vetor A , por exemplo, será utilizado \vec{A} . Os quadri-vetores terão um índice ou sub-índice com um carácter grego, na forma A^μ , podendo também ser representados simplesmente por A , sendo que a desambiguação se revelará frente a operação em que o objeto performa. A partir de agora, utiliza-se a notação de *unidades naturais*, as quais,

$$\hbar = c = k_B = 1. \quad (3.0.7)$$

Daí, recorre a relação entre as unidades de medidas,

$$[massa] = [energia] = [tempo]^{-1} = [comprimento]^{-1} = \text{GeV}, \quad (3.0.8)$$

sendo estas grandezas sujeitas a relação de conversão,

$$1\text{GeV} = 5,0677\text{fm}^{-1}. \quad (3.0.9)$$

Além disso, o regime das altas energias é aquele para o qual se tem,

$$s \rightarrow \infty, \quad (3.0.10)$$

$$x \rightarrow 0, \quad (3.0.11)$$

$$Y = \ln 1/x \rightarrow \infty. \quad (3.0.12)$$

com Q^2 fixo. Aqui, s é uma das variáveis de *Mandelstam* (apêndice A), x é a variável de *Bjorken* que será devidamente explanada neste capítulo e Y é a rapidez onde mais detalhes a respeito da sua definição e uso podem ser obtidos no apêndice B. Como a partir de agora, lidar-se-á com as teorias quântica de campos, tendo a relatividade restrita como um pré-requisito das manipulações matemáticas aqui estabelecidas, o ideal é tratar com grandezas que sejam invariantes de *Lorentz*. O referencial onde o regime de altas energias tem sentido é chamado de *Breit frame*.

3.1 REGRAS DE FEYNMAN

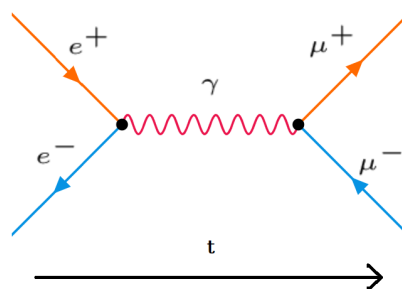
A teoria quântica de campos se apoia em três pilares, a teoria lagrangiana de campos, a mecânica quântica e a relatividade restrita. Destes, reitera-se que a mecânica quântica, tem no seu núcleo duro, o princípio da incerteza, sendo sua manifestação na medida, o fato de que sempre obtêm-se estados prováveis, nunca uma configuração com total precisão.

Por exemplo, o processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Nele, pode-se calcular a seção de choque e compara-la com os dados experimentais. Contudo, como é possível afirmar com certeza que foi este processo que ocorreu? Ainda mais que na formulação da seção de choque é impossível analisar processos únicos, para isso ela é escrita em relação a um fluxo contínuo de espalhamentos e deles retira-se a sua estatística.

É perfeitamente possível neste processo, que ocorra de um dos férmions emitir um fóton e outro deles absorver este fóton ($e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- (+\gamma)$). Agora, em uma sequência de espalhamentos que ocorrem em quantidades astronômicas, não é possível dizer em qual processo exatamente este fenômeno ocorreu, apenas é permitido avaliar contribuições médias. O método das teorias quânticas de campos afirma que, neste exemplo, o processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ocorre na *ordem principal* e os processos $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- (+\gamma)$ ocorrem na próxima ordem. Agora, e se este fóton emitido por algum dos férmions decair em um par elétron-pósitron? Surge um número infinito de possibilidades. Daí se afirma que existem infinitas ordens e quantas mais forem calculadas, mais preciso se torna o resultado, podendo chegar a previsões com dez dígitos de precisão (não a toa, sendo a eletrodinâmica quântica a *jóia da física*). Os processos que ocorrem na ordem principal são mais prováveis e as próximas ordens tem cada vez menos contribuições estatísticas, pode ser pensado como uma espécie de série de potências finita e convergente.

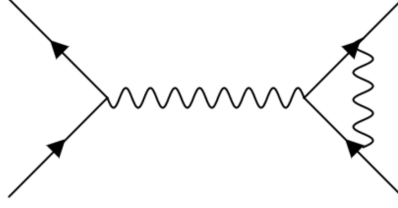
Deste raciocínio percebem-se duas limitações na computação. A primeira é a dificuldade de calcular infinitas ordens da seção de choque a fim de se obter um resultado cada vez mais preciso. A segundo é que a computação das ordens além da ordem principal geram infinitos na teoria.

A fim de facilitar a computação das correções nas seções de choque, introduzem-se os diagramas de *Feynman*. A ideia é, para cada processo possível, associar uma representação pictórica. Por exemplo, para o espalhamento $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, é associado o diagrama,



É uma das possibilidades envolvendo a emissão e absorção do fóton,

A primeira vista, estes diagramas parecem uma mera ilustração, contudo, todas as informações do processo podem ser derivadas a partir da sua análise. Observando o diagrama da ordem principal, os férmions são representados por setas que se unem num ponto preto, o vértice. As setas representado em azul são as partículas e elas apontam na direção em que o tempo cresce, por outro lado, as setas em laranjas estão na direção oposta do tempo, são as anti-partículas. Daí vale a prescrição de *Feynman-Stueckelberg*, onde os estados livres de



energia negativa são reinterpretados como estados de energia positiva voltando no tempo. Em cada vértice deve existir a conservação de quadri-*momentum* e o símbolo que une dois vértices é o propagador, neste caso, sendo o fóton em vermelho. As partículas que são representadas entre vértices são sempre virtuais.

Agora, é necessário introduzir formas matemáticas associadas a cada símbolo. Os campos quantizados de Dirac são dados por,

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (\hat{a}_p^s u_p^s e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_p^{s\dagger} v_p^s e^{ip \cdot x}), \quad (3.1.1)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (\hat{b}_p^s \bar{v}_p^s e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_p^{s\dagger} \bar{u}_p^s e^{ip \cdot x}). \quad (3.1.2)$$

Onde a barra indica o espinor adjunto, $\bar{\psi} = \gamma^0 \psi^\dagger$, sendo γ^0 uma das matrizes de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Com $k = 1, 2, 3$ e σ_k sendo as matrizes de Pauli.

Os campos [3.1.1]-[3.1.2] representam férmions com quadri-posição x e quadri-*momentum* p . Aqui $\omega_p = |\vec{p}|$. \hat{a} e \hat{b} são os operadores criação; \hat{a}^\dagger e \hat{b}^\dagger os operadores aniquilação. Sendo eles sujeitos às relações de anti-comutação:

$$\{\hat{a}_p^{s\dagger}, \hat{a}_q^{s'\dagger}\} = \{\hat{a}_p^s, \hat{a}_q^{s'}\} = \{\hat{b}_p^{s\dagger}, \hat{b}_q^{s'\dagger}\} = \{\hat{b}_p^s, \hat{b}_q^{s'}\} = 0, \quad (3.1.4)$$

e,

$$\{\hat{a}_p^s, \hat{a}_q^{s'\dagger}\} = \{\hat{b}_p^s, \hat{b}_q^{s'\dagger}\} = \delta_{ss'} (2\pi)^3 \delta^3(p - q). \quad (3.1.5)$$

A base para os espiniores, com quadri-*momentum* p^μ é,

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \zeta_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix}, \quad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix}, \quad (3.1.6)$$

com $\zeta_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\zeta_2 = \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Estes espiniores satisfazem,

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \not{p} + m, \quad (3.1.7)$$

$$\sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p} - m. \quad (3.1.8)$$

A partir destas construções é possível estabelecer as regras de *Feynman*, inicialmente no contexto da *QED*. No calibre de *Feynman*, o propagador do fóton é escrito como,

$$\text{wavy line} = \frac{-\mathbb{i}g_{\mu\nu}}{p^2 + \mathbb{i}\epsilon}$$

Sendo $g_{\mu\nu}$ a métrica de *Minkowski*. O propagador fermiônico é,

$$\text{arrow} = \frac{\mathbb{i}(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + \mathbb{i}\epsilon}$$

A seta aponta para a direita para partículas e para a esquerda para anti-partículas. Para linhas internas, a seta aponta na direção do *momentum*.

As linhas para fótons externos é representada pelos vetores de polarização,

$$\text{hatched circle} \text{---} \text{wavy line} = \epsilon_\mu(p)$$

$$\text{wavy line} \text{---} \text{hatched circle} = \epsilon_\mu^*(p)$$

Aqui, os círculos hachurados indicam o resto do diagrama.

As linhas fermiônicas externas, sendo u os espinores para os elétrons e v os espinores dos pósitrons,

Estas definições serão utilizadas a fim de construir a *matriz de espalhamento* $\hat{\mathcal{S}}$, onde os seus elementos são dados por,

$$S_{if} \equiv \langle f | \hat{\mathcal{S}} | i \rangle. \quad (3.1.9)$$

Aqui $|f\rangle$ e $|i\rangle$ são os estados finais e iniciais respectivamente. Esta matriz relaciona-se com a amplitude de *Feynman* a partir da relação,

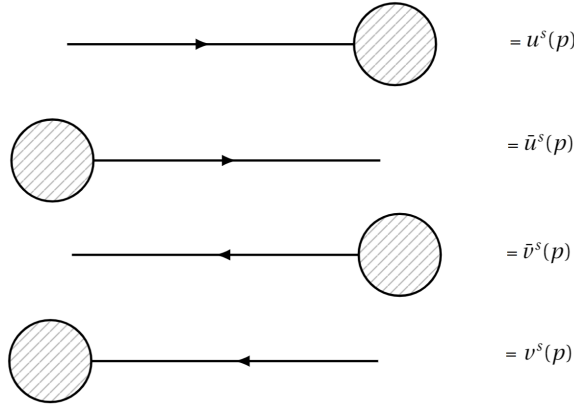
$$\langle f | \hat{\mathcal{S}} - \mathbb{1} | i \rangle = \mathbb{i}(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) \langle f | \mathcal{M} | i \rangle. \quad (3.1.10)$$

No espaço de fase invariante de *Lorentz* (*LIPS*, do inglês *Lorentz invariant phase space*), a amplitude de *Feynman* relaciona-se com a seção de choque diferencial na forma,

$$d\sigma = \frac{1}{(2E_i)(2E_f)|\vec{v}_i - \vec{v}_f|} |\bar{\mathcal{M}}|^2 d\Pi_{LIPS}, \quad (3.1.11)$$

sendo \vec{v}_i a velocidade inicial do projétil e \vec{v}_f a velocidade final do projétil espalhado.

A barra sob \mathcal{M} indica que após a sua construção, ela deve ter mediada pelos estados de spin do processo.



Observando o diagrama do espalhamento $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$, a sua amplitude de *Feynman* será dada por,

$$i\mathcal{M} = [\bar{v}_b(p_2)(-ie\gamma^\mu)u_a(p_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_d(p_4)(-ie\gamma^\nu)v_c(p_3)], \quad (3.1.12)$$

onde q é o *momentum* transferido e a, b, c, d etiquetam o estado de spin do espino. Cada cor nesta equação corresponde ao grafo no diagrama do processo e para cada vértice fora adicionado um fator de $-ie\gamma^\mu$. Os estados finais de cada um dos lados do diagrama fica na esquerda, então é inserido o vértice, o estado final e ambos os lados são separados pelo propagador.

Após mediar os spins sob o módulo quadrado de \mathcal{M} , obtendo $|\mathcal{M}|^2$, utiliza-se a equação [3.1.11] para se obter a seção de choque diferencial do processo.

Tendo em vista os numerosos processos possíveis em casos reais, bem como as relações que as teorias quânticas de campos podem descrever, o assunto é extenso, contudo o que fora discutido por aqui é suficiente para os objetivos do trabalho.

Os diagramas de *Feynman* fornecem facilitações na hora de descrever inúmeros processos em um espalhamento, contudo nada fora dito a respeito dos supracitados infinitos que aparecem conforme se fazem as correções de ordens maiores; para isso, será necessário utilizar de um dos programas da chamada *renormalização*, especialmente, na investigação do modelo a pártons, a regularização dimensional.

3.2 REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Da teoria quântica de campos, mais precisamente, na eletrodinâmica, a noção de vácuo tornou-se mais complexa, podendo agora ser polarizado. Nos estudos da flutuação do vácuo, *Dirac* escreveu a densidade hamiltoniana do vácuo, sendo esta caracterizada como a soma de infinitas frequências de oscilações dos campos eletromagnéticos,

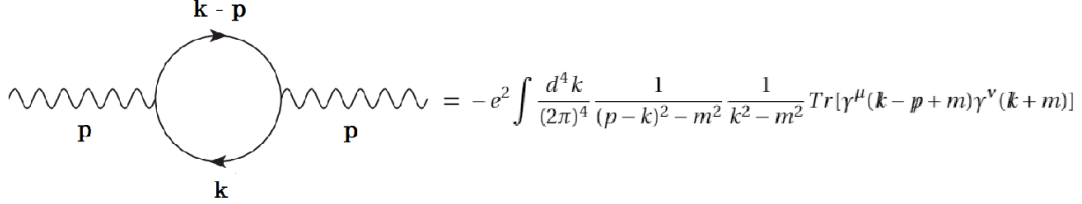
$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (3.2.1)$$

Uma vez escrito esse hamiltoniano, é possível calcular a energia dos níveis menos energéticos, contudo,

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int k^3 dk = \infty, \quad (3.2.2)$$

sendo esta a *energia do ponto zero*.

Ocorrendo flutuações no vácuo, reações como a geração e aniquilação de um par elétron-pósitron é permitida, tendo seu diagrama dado por,



Para, $k^\mu \gg p^\mu$, é possível escrever,

$$4e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{k^4} \sim \int k dk = \infty. \quad (3.2.3)$$

Estas integrais divergentes aparecem em grande parte dos fenômenos além da ordem principal na QED. Para corrigi-las é necessário reformular as integrais de forma que elas se tornem finitas. Para isso, são introduzidos alguns parâmetros reguladores nas integrais, após alguma manipulação algébrica a resposta que contém o observável de interesse é escrita em uma forma finita e a parte divergente fica por conta do regulador que será removido; sendo este o programa da chamada *renormalização*. Esse é um assunto abrangente, rico em métodos e formas, tanto que a renormalizabilidade se tornou um parâmetro central nas teorias quânticas de campos. Neste trabalho abordaremos apenas a regularização espacial.

A regularização dimensional consiste em modificar a dimensão das integrais divergentes fazendo com que a parte finita e divergente se desmembrem. Contudo, para isso, é necessário definir as grandezas estabelecidas em quatro dimensões para D-dimensões. Inicialmente, o tensor métrico,

$$g^{00} = -g^{ii} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, D-1, \quad (3.2.4)$$

$$g^{\nu\mu} = 0 \quad \nu \neq \mu. \quad (3.2.5)$$

O D-vetor $A^\nu = (A^0, A^1, \dots, A^{D-1})$ deve responder,

$$A^2 = A^\mu A_\mu = A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (A^i)^2. \quad (3.2.6)$$

Como exemplo, considerando que se deseja remover as divergências de uma integral na forma,

$$\Pi(s) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(k^2 + s + i\epsilon)^2}. \quad (3.2.7)$$

Para isso, *Feynman* indicou uma série de integrais que poderiam ser rescritas em formas convenientes para a renormalização, sendo a do caso de interesse,

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\epsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}} \quad n \geq 3, \quad (3.2.8)$$

onde $\Gamma(n)$ é a função gama definida como,

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx, \quad (3.2.9)$$

Agora, as integrais da forma [3.2.7] foram definidas no espaço de fase invariante de *Lorentz*, quadridimensional. No método de regularização dimensional, considera-se $D = 4 - \eta$, onde η tem um valor pequeno e positivo. Então supõe-se,

$$\Pi(s) = \mu^{-\eta} \Pi_\eta(s), \quad (3.2.10)$$

onde foram introduzidos os parâmetros μ^\pm . Daí, resulta que,

$$\Pi_\eta(s) = \frac{\mu^\eta}{(2\pi)^{4-\eta}} \int \frac{d^{4-\eta}k}{(k^2 + s + i\epsilon)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{(4\pi)^{\eta/2} \frac{\Gamma(\eta/2)}{\Gamma(2)}} \left(\frac{s}{\mu}\right)^{-\eta/2} \quad (3.2.11)$$

No limite em que $\eta \rightarrow 0$,

$$s^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2}\eta \ln s + \dots, \quad (3.2.12)$$

$$\Gamma(\eta/2) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots, \quad (3.2.13)$$

sendo $\gamma = 0.57721\dots$ a constante de *Euler-Mascheroni*. Assim,

$$\Pi_\eta(s) = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] - \frac{i}{16\pi^2} \ln \frac{s}{\mu^2} \quad (3.2.14)$$

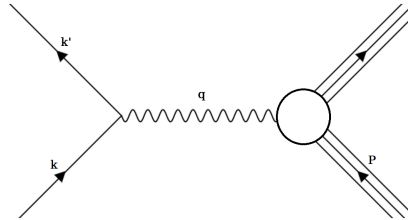
De forma que,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} [\Pi_\eta(s) - \Pi_\eta(s_0)] = -\frac{i}{16\pi^2} \ln(s/s_0). \quad (3.2.15)$$

Como visto, a partir deste método, é possível tornar as integrais finitas.

3.3 ESPALHAMENTO ELÉTRON-PRÓTON ELÁSTICO

Uma vez introduzidas algumas das ferramentas presentes na teoria quântica de campos, agora é necessário fazer o seu uso a fim de investigar o modelo a pártons. Inicialmente, em baixas energias, o próton não apresenta nenhuma estrutura interna, sendo indistinguível como um férmion elementar, de forma que o espalhamento $e^- p^+$ pode ser aproximado satisfatoriamente pelo diagrama,



A seção de choque relativística para um espalhamento coulombiano de duas partículas de spin 1/2 no

referencial LAB é dada por,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{LAB} = \frac{\alpha_e^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (3.3.1)$$

sendo E e E' a energia inicial e final do elétron incidente, α_e a constante de acoplamento eletromagnético, $q^\mu = k'^\mu - k^\mu$ o momento transferido e θ o ângulo de espalhamento. No referencial LAB com o próton inicialmente em repouso, num limite em que a aproximação $m_e \approx 0$ é satisfatória, é possível relacionar algumas destas quantidades a partir da relação $q^2 = -2k \cdot k' = -4E'E \sin^2(\theta/2)$.

Seria esperado que a equação [3.3.1] fixasse sua estrutura para distâncias arbitrárias, como por exemplo, no espalhamento elétron-múon, mesmo que ela exigisse algumas correções quânticas. Para realiza-las, é excluído o elétron do problema e é inserido um fóton virtual com quadri-momenta q^μ . O tipo mais geral de parametrização desta interação, fora da camada de massa com uma partícula de spin 1/2, revela dois fatores de forma: F_1 , devida a contribuição elétrica e F_2 , devida a contribuição magnética. Neste caso, o vértice pode ser escrito como $[\bar{u}(p')][i e \Gamma^\mu][u(p)]$, sendo $\bar{u}(p')$ o espinor espalhado e $u(p)$ incidente, ambos relativos ao próton, na camada de massa. A decomposição de Γ^μ é dada por,

$$\Gamma^\mu(q) = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_p} F_2(q^2), \quad (3.3.2)$$

onde o operador $\sigma^{\mu\nu}$ é dado por,

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.3.3)$$

Apenas utilizando a eletrodinâmica quântica (QED, do inglês, *quantum electrodynamics*), observa-se que $F_1(q^2)$ possui contribuições divergentes e precisa ser renormalizada. A condição de renormalização é $F_1(0) = 1$, e neste caso resulta em uma carga protônica $Q = +1$ (em unidades da carga elementar) para longas distâncias. Numa correção de primeira ordem, $F_2(0) = \alpha_2/2\pi$, que corresponde a uma correção no momento magnético, usualmente expressa na forma, $g_e = 2 + \alpha_2/\pi + \dots$

Para o próton, sabe-se que $g_p = 5,58$, que é bem distante de 2,5. Sugerindo que o próton não pode ser considerado uma partícula puntual. Assim, repetindo o cálculo da seção de choque, considerando o vértice $[\bar{u}(p')][i e \Gamma^\mu][u(p)]$, obtém-se a fórmula de *Rosenbluth*:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rosen} = \frac{\alpha_e^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} \left[\left(F_1^2 - \frac{q^2}{4m_p^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2m^2} (F_1 + F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.3.4)$$

Dessa forma, se o próton interage apenas através da QED, F_1 e F_2 podem ser calculadas e comparadas com os dados experimentais. Por exemplo, num espalhamento elétron-tau, $e^- \tau^+$, lépton-lépton, para $|q^2| \gg m_\tau^2$, F_2 tende a zero e F_1 possui uma dependência logarítmica com a energia. Tendo o próton e o tau massas próximas, é esperado que estes resultados sejam replicados. Contudo, o próton tem um comportamento bem diferente,

$$F_1(q^2) \sim \left(1 - \frac{q^2}{0,71 \text{GeV}^2} \right)^{-2}. \quad (3.3.5)$$

Os fatores de forma são muito úteis pois eles são derivadas a partir da transformada de *Fourier* de potenciais de espalhamento pela aproximação de *Born*. Os resultados relativos ao próton apontam para uma forma exponencial $\rho(r) \sim e^{-r/r_0}$, com um raio característico $r_0 \approx 1\text{fm}$, o que não impressiona, é justamente o comprimento

de onda de *de Broglie* protônico. Contudo, este formato indica um comportamento de *escala*, que deve ser investigado mais a fundo em energias ainda maiores.

3.4 ESPALHAMENTO ELÉTRON-PRÓTON INELÁSTICO

Como fora argumentado, no espalhamento $e^- p^+$ conforme a energia aumenta, o próton começa a se romper. Em alguns casos a reação $e^- p^+ \rightarrow e^- p^+ \pi^0$ se torna possível, e com um aumento ainda mais drástico a quebra é completa (Fig3.1).

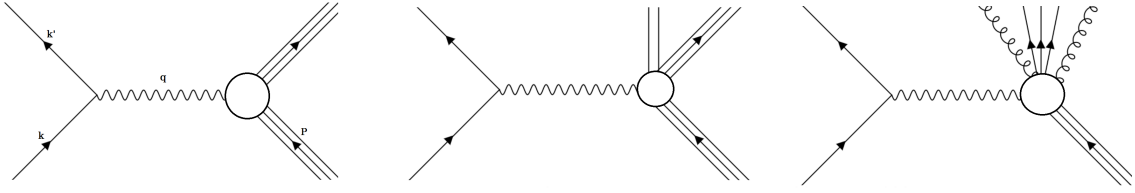


Figura 3.1: Conforme aumenta a energia do espalhamento elétron-próton a estrutura protônica é revelada.

Neste regime altamente energético, o espalhamento é dito *profundamente inelástico* (DIS, do inglês, *Deep inelastic scattering*). A consideração do vértice $[\bar{u}(p')][i e \Gamma^\mu][u(p)]$ não é mais suficiente e devem ser consideradas as reações $\gamma^* p^+ \rightarrow X$, sendo X qualquer coisa que seja gerada a partir da quebra do próton. Dessa forma, em troca da substituição do vértice, é parametrizada a seção de choque em termos de q^μ e P^μ ,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} \right) = \frac{\alpha_e^2}{4\pi m_p q^4} \frac{E'}{E} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (3.4.1)$$

sendo $L_{\mu\nu}$ o *tensor leptônico*, que carrega as informações da polarização do lépton. Para um espalhamento não polarizado, $L_{\mu\nu}$ é dado por,

$$L_{\mu\nu} = 2(k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - k \cdot k' g_{\mu\nu}). \quad (3.4.2)$$

Considerando novamente um espalhamento despolarizado, a forma mais geral do tensor hadrônico é dada por,

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \left(P^\mu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(P^\nu - \frac{P \cdot q}{q^2} q^\nu \right). \quad (3.4.3)$$

As quantidades escalares as quais W_1 e W_2 podem depender devem ser invariantes de *Lorentz*, sendo elas, $P^2 = m_p^2$, q^2 e $P \cdot q$. Usa-se $Q \equiv \sqrt{-q^2} > 0$, que é a escala de energia na colisão e, no referencial LAB,

$$v \equiv \frac{P \cdot q}{m_p} = (E - E') \quad (3.4.4)$$

Além disso, é possível utilizar a *variável de Bjorken*,

$$x \equiv \frac{Q^2}{2P \cdot q}. \quad (3.4.5)$$

Dessa forma, contraindo o tensor leptônico com o tensor hadrônico,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega dE'}\right) = \frac{\alpha_e^2}{8\pi E^2 \sin^4\theta/2} \left[\frac{m_p}{2} W_2(x, Q) \cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{m_p} W_1 \sin^2\frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.4.6)$$

No caso inelástico esta seção de choque revela todas as características que são necessários.

Originalmente proposto por *Feynman*, o *modelo a pártons* refere-se unicamente aos objetos nos quais o hádron se quebra. Uma vez estabelecida a conexão com a QCD, os pártons não só podem ser identificados com os quarks, assim como aos anti-quarks e os glúons; contudo, aqui ainda é assumido que os pártons são meras partes do núcleon, eletricamente carregadas e no caso em análise, do próton. Para testar o modelo a pártons, é necessário verificar os fatores de forma considerando que o elétron espalha elasticamente os constituintes protônicos de massa m_q .

Para realizar esta avaliação, considera-se o quadri-*momentum* inicial e final do párton p_i^μ e p_f^μ respectivamente, então, via conservação de *momentum*, $p_i^\mu + q^\mu = p_f^\mu$, daí,

$$\frac{Q^2}{2p_i \cdot q} = 1. \quad (3.4.7)$$

Mas o quadri-*momentum* do párton não é diretamente mensurável. Assim, assume-se que ele possui uma parcela ξ do *momentum* do próton,

$$p_i^\mu = \xi P^\mu, \quad (3.4.8)$$

ou seja,

$$x = \frac{\xi Q^2}{2p_i \cdot q} = \xi. \quad (3.4.9)$$

Dessa forma, a medida de x revela a parcela de *momentum* que o párton carrega do próton pai.

Agora, considerando que os pártons pouco interagem para que seja possível calcular o espalhamento elástico $e^- q$ utilizando teoria de perturbação, de forma que os fatores de forma possuam apenas uma fraca dependência logarítmica com Q^2 (similarmente ao espalhamento $e^- \mu^-$ bem conhecido via QED), tendo o *momentum* pártônico inicial fixo, ou seja, com x constante. A seção de choque aproximadamente independente de Q^2 com x fixo é conhecida como *escalonamento de Bjorken*, confirmada experimentalmente [Fig.3.2].

Inserindo mais um ingrediente no modelo pártônico, as probabilidades clássicas $f_i(\xi)d\xi$ do fóton interagir com o i -ésimo párton com uma parcela ξ do *momentum* do próton. Estas $f_i(\xi)$'s são conhecidas como *funções de distribuição partônicas* (do inglês, *parton function distributions*, PDF's). O modelo prevê que a seção de choque para o espalhamento $e^- P^+ \rightarrow e^- X, \sigma_T$, é dado por $e^- p_i \rightarrow e^- X, \sigma_n$, onde p_i é o párton com *momentum* $p_i^\mu = \xi P^\mu$, integrado sobre todo ξ ,

$$\sigma_T = \sum_i \int_0^1 d\xi f_i(\xi) \sigma_n. \quad (3.4.10)$$

Assumindo que os pártons são livres, exceto pelas interações eletromagnéticas, o elétron espalha apenas as partículas carregadas, que no próton, são os quarks. Para um dado quark de *momentum* p_i , a seção de choque partônica $e^- q \rightarrow e^- q, \sigma_p$, é aproximada por um espalhamento puntual na QED, dada pela fórmula de *Rosenbluth*, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 0$, então,

$$\left(\frac{d\sigma_p}{d\Omega}\right)_{LAB} = \frac{\alpha_e^2 Q_i^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \left[\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_q^2} \sin^2\frac{\theta}{2} \right] \delta\left(E - E' - \frac{Q^2}{2m_q}\right), \quad (3.4.11)$$

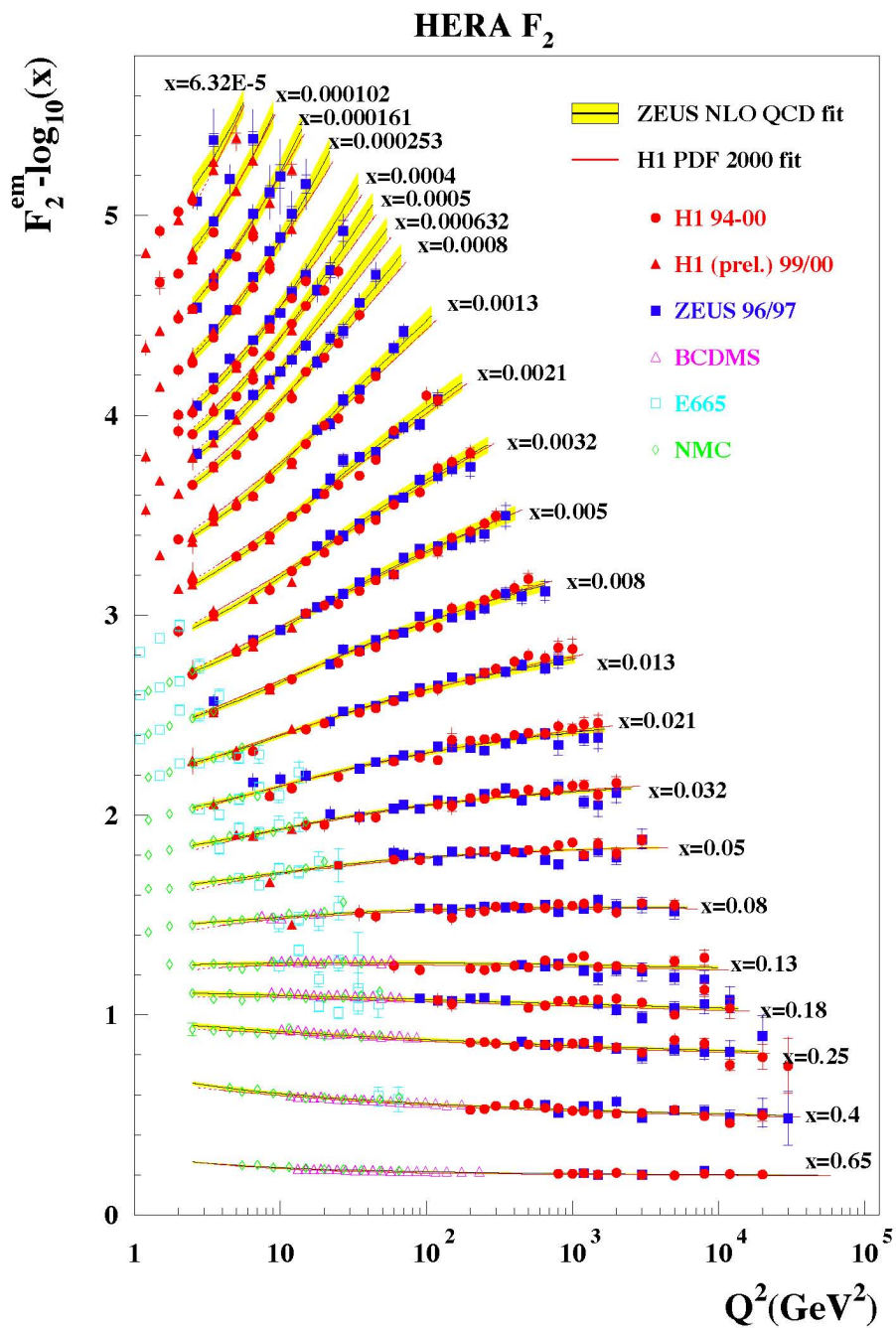


Figura 3.2: Escalonamento de Bjorken confirmado experimentalmente via DIS. No eixo vertical se tem os valores para a função de estrutura enquanto no eixo horizontal se observa a variação de Q^2 . A variação para diferentes valores de x fixados revelam mudanças suaves nas funções de estrutura. Figura obtida na referência [77].

sendo Q_i a carga do quark.

A fim de obter a seção de choque de *DIS*, é necessário integrar a expressão [3.4.11] sobre o momento do párton incidente. Sendo assim, obtém-se o resultado,

$$\left(\frac{d\sigma_p}{d\Omega}\right)_{LAB} = \sum_i f_i(x) \frac{\alpha_e^2 Q_i^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \left(\frac{2m_p}{Q^2} x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{m_p} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.4.12)$$

Comparando [3.4.6] com [3.4.12] obtém-se as relações,

$$\begin{cases} W_1(x, Q) = 2\pi \sum_i Q_i^2 f_i(x); \\ W_2(x, Q) = 8\pi \frac{x^2}{Q^2} \sum_i Q_i^2 f_i(x). \end{cases} \quad (3.4.13)$$

E estas relações configuram uma base concreta para a predição experimental do escalonamento de *Bjorken*, pois são as quantidades $W_1(x, Q^2)$ e $Q^2 W_2(x, Q)$ fracamente dependentes de Q com x fixo.

Outro resultado que pode ser extraído das expressões [3.4.13] é a relação de *Callan-Gross*, dada por,

$$W_1(x, Q) = \frac{Q^2}{4x^2} W_2(x, Q), \quad (3.4.14)$$

sendo valida no regime em que se tem $Q \gg m_p$. A proporcionalidade entre as funções W podem ser revertidas em alguns passos matemáticos para se perceber que se trata do fator $\frac{Q^2}{2m_q^2} = \frac{Q^2}{2x^2 m_p^2}$ no espalhamento $e^- q \rightarrow e^- q$; de onde interpretou-se que os quarks são férmions de spin 1/2.

3.5 REGRAS DE SOMA

Se as PDF's são regidas por teorias de probabilidades, elas devem conter consigo alguns vínculos. Por exemplo, se um próton tem exatamente um par quark down-antidown, estes devem ter algum *momentum*, logo,

$$\int d\xi [f_d(\xi) - f_{\bar{d}}(\xi)] = 1. \quad (3.5.1)$$

Similarmente, como o próton possui dois quarks up e nenhum quark strange,

$$\int d\xi [f_u(\xi) - f_{\bar{u}}(\xi)] = 2, \quad \int d\xi [f_s(\xi) - f_{\bar{s}}(\xi)] = 0, \quad (3.5.2)$$

aplicando-se também a integral do quark strange para o caso dos quarks bottom e charm. Não existe regra de conservação para o número de glúons exclusivamente como existe para os demais quarks, contudo, somando sua PDF as demais, deve ser considerado que,

$$\sum_j \int \xi f_j(\xi) d\xi = 1. \quad (3.5.3)$$

Ainda levando o caso do próton como exemplo: as regras de soma aqui apresentadas resultam em 0,38, ou seja, apenas 38% do *momentum* do próton esta contido nos quarks de valência (up e down), por sua vez os glúons carregam consigo uma parcela que varia de 35% – 50%, dependendo da escala (e como visto na introdução, para altas energias este valor explode). O restante dos quarks não computados são chamados de *quarks de mar*. Estes resultados podem ser analisados na Fig[1.7].

3.6 EQUAÇÕES DGLAP (*Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli, Parisi*)

Até agora mostrou-se a derivação das propriedades mais gerais do modelo a pártons como o escalonamento de *Bjorken* e a relação de *Callan-Gross*. Contudo a partir da verificação da Fig.[3.2] é possível considerar que ocorrem flutuações com a variação de Q^2 . Para que fossem obtidos as propriedades gerais do modelo partônico, assumiu-se para a seção de choque do espalhamento $e^- p^+ \rightarrow e^- X$ a dependência do tensor leptônico $L_{\mu\nu}$ e hadrônico $W_{\mu\nu}(x, Q)$. Agora assumindo $\hat{W}_{\mu\nu}(z, Q)$ como a versão partônica de $W_{\mu\nu}(x, Q)$, sendo z ,

$$z \equiv \frac{Q^2}{2p_i \cdot q}. \quad (3.6.1)$$

Utilizando a assunção de probabilidade ligada a $p_i^\mu = \xi P^\mu$ com $0 \leq \xi \leq 1$ é dada pela PDF $f_i(\xi)$. Então, $x = z\xi$ e é necessário integrar sobre ξ ,

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(x, Q) &= \sum_i \int_0^1 dz \int_0^1 d\xi f_i(\xi) \hat{W}_{\mu\nu}(z, Q) \delta(x - z\xi) \\ &= \sum_i \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_i(\xi) \hat{W}_{\mu\nu}(x/\xi, Q). \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Inicialmente, na QCD perturbativa, verifica-se a ordem principal, com $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$, sendo α_s a constante de acoplamento forte, o único processo partônico que contribui para $W_{\mu\nu}$ é $\gamma^* q \rightarrow q$. Então, considerando p_i^μ e $p_f^\mu = p_i^\mu + q^\mu$,

$$\begin{aligned} \hat{W}^{\mu\nu}(z, Q) &= \frac{Q_i^2}{2} \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \text{Tr}[\gamma^\mu \not{p}_i \gamma^\nu \not{p}_f] (2\pi)^4 \sigma^4(p_i + q - p_f) \\ &= 2\pi Q_i^2 \left[\left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{4z}{Q^2} \left(p_i^\mu - \frac{p_i \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p_i^\nu - \frac{p_i \cdot q}{q^2} q^\nu \right) \right] \delta(1 - z). \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Ou seja, $\hat{W}_1 = 2\pi Q_i^2 \delta(1 - z) = \frac{Q_i^2}{4z} \hat{W}_2$, confirmando a relação de *Callan-Gross* em primeira ordem. Substituindo a relação [3.6.3] em [3.6.2], se reproduz [3.4.13] confirmando a normalização.

De maneira simples, vamos assumir o fator de forma $W_0 \equiv -g^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$. Para o tensor hadrônico,

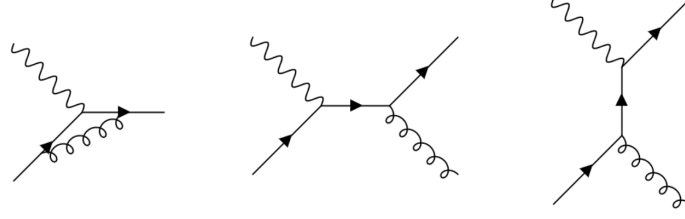
$$W_0(x, Q) = 3W_1(x, Q) - W_2(x, Q) \left(m_p^2 + \frac{Q^2}{4x^2} \right), \quad (3.6.4)$$

$Q \gg m_p$ implica $W_0 = 2W_1$ na ordem principal. Em particular,

$$W_0(x, Q) = 4\pi \sum_i Q_i^2 f_i(x). \quad (3.6.5)$$

Esta equação incentiva o uso de W_0 como uma definição de PDF, valida além da ordem principal. Desta forma, é possível calcular a dependência em Q das PDF's. Então, na ordem principal, $\hat{W}_0^{OP} = 4\pi Q_i^2 \delta(1 - z)$. Agora, em primeira ordem, considera-se os diagramas,

A interferência entre a ordem principal e o *loop* nos diagramas pode ser renormalizado utilizando o método



dimensional. Inicialmente, para emissão virtual, em $(4 - \epsilon)$ -dimensões se tem,

$$\hat{W}_0^V = 4\pi Q_i^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu}{Q^2} \right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma(1 - \epsilon/2)}{\Gamma(1 - \epsilon)} \left(-\frac{8}{\epsilon^2} - \frac{6}{\epsilon} - 8 - \frac{\pi^2}{3} \right) \delta(1 - z) \quad (3.6.6)$$

Sendo C_F o operador de *Casimir*, dado por,

$$C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}, \quad (3.6.7)$$

com N_C o número de cor, na *QCD*, $N_C = 3$. α_s é a *constante de acoplamento forte*. Ela possui dependência com a virtualidade Q^2 , contudo, neste trabalho, não é considerado a sua variação, podendo ser aproximada como uma constante.

Na expressão [3.6.6] a divergência de ultravioleta já foi removida com o contra termo e os termos que desaparecem para $\epsilon \rightarrow 0$ foram omitidos. Os ϵ restantes são devidos ao infravermelho ϵ_{IV} . Agora, para a emissão real,

$$\hat{W}_0^R = 4\pi Q_i^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu}{Q^2} \right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma(1 - \epsilon/2)}{\Gamma(1 - \epsilon)} \left[3z + z^{\epsilon/2} (1 - z)^{-\epsilon/2} \left(-\frac{2}{\epsilon} \frac{1 + z^2}{1 - z} + 3 - z - \frac{3}{2} \frac{1}{1 - z} - \frac{7}{4} \frac{\epsilon}{1 - z} \right) \right] \quad (3.6.8)$$

Analisando as expressões para as emissões real e virtual, \hat{W}_0^R e \hat{W}_0^V respectivamente, obtém-se um duplo polo $\sim 1/\epsilon^2$ na contribuição virtual sem contra termo em na emissão real. Contudo, é possível realizar a expansão em torno de $\epsilon = 0$,

$$\frac{1}{(1 - z)^{1 + \epsilon}} = -\frac{1}{\epsilon} \delta(1 - z) + \frac{1}{[1 - z]_+} - \epsilon \left[\frac{\ln(1 - z)}{1 - z} \right]_+ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^n}{n!} \left[\frac{\ln^n(1 - z)}{1 - z} \right]_+, \quad (3.6.9)$$

A função $+$ é definida como,

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{[1 - z]_+} \equiv \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1 - z} \quad (3.6.10)$$

Para $z \neq 1$,

$$\frac{1}{[1 - z]_+} = \frac{1}{1 - z}. \quad (3.6.11)$$

Essas condições definem a distribuição para qualquer limite de integração. As outras funções $+$ são definidas de forma semelhante,

$$\int_0^1 dz f(z) \left[\frac{\ln^n(1 - z)}{1 - z} \right]_+ \equiv \int_0^1 dz [f(z) - f(1)] \frac{\ln^n(1 - z)}{1 - z}, \quad (3.6.12)$$

novamente com $z \neq 1$,

$$\left[\frac{\ln^n(1 - z)}{1 - z} \right]_+ = \frac{\ln^n(1 - z)}{1 - z}. \quad (3.6.13)$$

A substituição das expressões obtidas para as funções γ no cálculo de \hat{W}_0^R , respeitando as condições elaboradas é,

$$\hat{W}_0^R = 4\pi Q_i^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu}{Q^2} \right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma(1-\epsilon/2)}{\Gamma(1-\epsilon)} \times \left[3 + 2z - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z + \left(\frac{8}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} + \frac{7}{2} \right) \delta(1-z) - \left(2\frac{1+z^2}{\epsilon} + \frac{3}{2} \right) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ + (1+z^2) \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ \right], \quad (3.6.14)$$

Assim, a perturbação em primeira ordem é dada por,

$$\begin{aligned} \hat{W}_0 &= \hat{W}_0^{OP} + \hat{W}_0^V + \hat{W}_0^R \\ &= 4\pi Q_i^2 \left[\delta(1-z) - \frac{1}{\epsilon} \frac{\alpha_s}{\pi} P_{qq}(z) \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\epsilon/2} \frac{\Gamma(1-\epsilon/2)}{\Gamma(1-\epsilon)} \right] \\ &\quad + 4\pi Q_i^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left[(1+z^2) \left[\frac{\ln(1-z)}{1-z} \right]_+ - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ - \frac{1+z^2}{1-z} \ln z + 3 + 2z - \left(\frac{9}{2} + \frac{\pi^2}{3} \right) \delta(1-z) \right]. \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Nesta equação, a expressão $P_{qq}(z)$ se destaca, sendo ela,

$$P_{qq}(z) = C_F \left[(1+z^2) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right]. \quad (3.6.16)$$

Esta função, é a distribuição $P_{qq}(z)$, conhecida como *função de desdobramento DGLAP* devido aos trabalhos de *Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altareli e Parisi*.

Inserindo \hat{W}_0 na equação [3.6.2],

$$W_0(x, Q) = 4\pi \sum_i Q_i^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{x_i} f_i(\xi) \left[\delta \left(1 - \frac{x}{\xi} \right) - \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\mu^2}{Q^2} \right) + C \right], \quad (3.6.17)$$

sendo C um valor finito. Utilizando as regras de soma na função de desdobramento $P_{qq}(z)$ auxilia na obtenção de resultados compatíveis com a definição,

$$\int_0^1 P_{qq}(z) dz = 0. \quad (3.6.18)$$

Então, realizando a integração de $W_0(x, Q)$ sobre x , obtém-se a seção de choque total do DIS para um dado Q sem problemas com o polo. Contudo, com um valor fixo de x , o polo não desaparece e $W_0(x, Q)$ é divergente. Uma solução para este impasse é tomar diferenças de seções de choque para obter soluções finitas,

$$W_0(x, Q) - W_0(x, Q_0) = 4\pi \sum_i Q_i^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_i(\xi) \left[\frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \right]. \quad (3.6.19)$$

Estas diferenças tornam possíveis cálculos cromodinâmicos puros pois a divergência de infravermelho pode ser cortada em alguma escala física comparável a massa do quark m_q ou a escala característica do confinamento Λ_{QCD} . Além disso, realizando o cálculo com quarks massivos, é possível substituir o logaritmo por $\ln(m_q/Q)$, podendo ser $Q \gg m_q$, simplificando a diferença de $W_0(x, Q)$ nas duas escalas, obtendo uma resposta testável para a teoria de perturbação.

Agora, definindo, para qualquer escala de Q ,

$$W_0(x, Q^2) \equiv 4\pi \sum_i Q_i^2 f_i(x, \mu = Q^2), \quad (3.6.20)$$

Para esta equação ser consistente com a tomada de diferenças, é necessário,

$$f_i(x, Q_1^2) = f_i(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 f_i(\xi, Q_1^2) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right) \ln \frac{Q_1^2}{Q^2}, \quad (3.6.21)$$

implicando em,

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} f_i(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_i(\xi, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{\xi} \right). \quad (3.6.22)$$

A equação [3.6.22] é conhecida como a *equação de evolução DGLAP* [78]- [80], permitindo a avaliação das contribuições logarítmicas nas funções de estrutura. Na realidade as equações de evolução DGLAP podem ser obtidas para todas as formas de interação entre quarks e glúons, seguindo métodos análogos aos aqui expressos, formando um conjunto de equações integro-diferenciais que podem ser expressas na forma,

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} f_i(x, Q^2) \\ f_g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_j \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} \begin{pmatrix} P_{q_i q_j}(x/\xi) & P_{q_i g}(x/\xi) \\ P_{g q_j}(x/\xi) & P_{g g}(x/\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_j(\xi, Q^2) \\ f_g(\xi, Q^2) \end{pmatrix}. \quad (3.6.23)$$

Assim, diversos processos podem ser derivados do processo de espalhamento como $g \rightarrow gg$ ou $g \rightarrow \bar{q}q$. Na ordem principal, as funções de desdobramento que podem ser obtidas são listadas abaixo:

$$P_{qq}(z) = C_F \left[(1+z^2) \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right], \quad (3.6.24)$$

$$P_{qg}(z) = N_f [z^2 + (1-z)^2], \quad (3.6.25)$$

$$P_{gq}(z) = C_F \frac{1 + (1-z)^2}{z}, \quad (3.6.26)$$

e

$$P_{gg}(z) = 2N_C \left[\frac{z}{[1-z]_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + \frac{11N_C - 2N_f}{6} \delta(1-z), \quad (3.6.27)$$

sendo nestas expressões N_f o número de sabores de quarks.

No regime de interesse, pequeno- x , e conseqüentemente, pequeno- z , é notável que as expressões [3.6.24] e [3.6.25] tendem a zero, diferentemente de [3.6.26] e [3.6.27], de forma que [3.6.23] pode ser expressa como,

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} f_g(x, Q^2) = \sum_j \frac{\alpha_s}{\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} [P_{gq_j}(x/\xi) f_i(\xi, Q^2) + P_{gg}(x/\xi) f_g(\xi, Q^2)]. \quad (3.6.28)$$

Para valores com Q^2 altos, a função de desdobramento P_{gq_j} tem pouca contribuição na integração se comparada a P_{gg} . Logo, é aceitável negligenciar este termo na integração, para obter o resultado,

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} f_g(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{\pi} \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} P_{gg}(x/\xi) f_g(\xi, Q^2), \quad (3.6.29)$$

que, utilizando $x = z\xi$ e a aproximação para pequeno- z , $P_{gg}(z) \approx 2N_C/z$, pode ser reescrita na forma,

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} f_g(x, Q^2) = \frac{\alpha_s N_C}{\pi} \int_x^1 \frac{dx'}{x'} f_g(x', Q^2). \quad (3.6.30)$$

Definindo Q_0 como a virtualidade inicial do fóton e resolvendo a integral obtém-se,

$$\frac{\partial^2}{\partial(\ln 1/x) \partial(\ln Q^2/Q_0^2)} x f_g(x, Q^2) = \frac{\alpha_s N_C}{\pi} x f_g(x, Q^2) \quad (3.6.31)$$

O produto $x f_g(x, Q^2)$ é a *densidade de momentum dos glúons*. A partir desta última equação, se obtém o termo que será somado nas correções: $\alpha_s \ln(1/x) \ln(Q^2/Q_0^2)$.

3.7 EQUAÇÃO BFKL (*Balitsky, Fadin, Kuraev, Lipatov*)

Na seção anterior fora verificado que as correções podem ser realizadas em torno de x e Q^2 . A equação desenvolvida por *Balitsky, Fadin, Kuraev e Lipatov* [81]- [82] (BFKL) investiga a evolução em x , fixando Q^2 , de forma que serão obtidas correção $[\alpha_s \ln(1/x)]^n$, chamadas *correções de logaritmo dominante*. Esta equação tem o seu limite de aplicabilidade em,

$$\alpha_s \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \ll \alpha_s(Q^2) \ln \frac{1}{x} \ll 1. \quad (3.7.1)$$

Tendo introduzido tais considerações, a equação BFKL trata da densidade de glúons, contudo, em relação a distribuição de glúons não integradas, sendo esta,

$$x f_g(x, Q^2) = \int_{Q^2} dk_T^2 \frac{f_g(x, k_T^2)}{k_T^2}. \quad (3.7.2)$$

Aqui k_T é o *momentum* transverso (apêndice B). A partir desta representação da distribuição de glúons, em ordem dominante, a equação BFKL pode ser escrita na forma,

$$\frac{\partial}{\partial(\ln 1/x)} f_g(x, k_T^2) = \frac{N_c \alpha_s}{\pi} k_T^2 \int_0^\infty \frac{dk_T'^2}{k_T'^2} \left[\frac{f_g(x, k_T'^2) - f_g(x, k_T^2)}{|k_T'^2 - k_T^2|} + \frac{f_g(x, k_T^2)}{\sqrt{4k_T'^2 + k_T^2}} \right]. \quad (3.7.3)$$

Tendo sua solução,

$$f_g(x, k_T^2) \sim \left(\frac{1}{x} \right)^{\omega_0}, \quad (3.7.4)$$

onde ω_0 é a interceptação BFKL que será utilizado posteriormente no tratamento da entropia. Esta quantidade é dada por

$$\omega_0 = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} (4 \ln 2) \sim 0,5. \quad (3.7.5)$$

É possível representar a equação BFKL [3.7.3] para seção de choque do espalhamento de dipolos na forma,

$$\frac{d}{dY} \sigma(Y) = \omega_0 \sigma(Y). \quad (3.7.6)$$

A seção de choque, assim como a função de distribuição dos glúons aumenta com uma regra de potências

com a energia, e assim deve ser, pois até agora o modelo considera apenas a geração de glúons. Contudo, existe uma faixa de saturação e é necessário explicar a ideia dos dipolos relacionados a física de altas energias, o que será realizado na próxima seção.

3.8 DIPOLOS DE COR E A EQUAÇÃO BK (*Balitsky, Kovchegov*)

Até o momento, na construção do modelo a pártons, considerou-se um espalhamento entre um lépton e um núcleon, onde o fóton virtual, submetido a um regime de altas energias, sondava os constituintes carregados do núcleon, os quarks. O aumento da energia faz com que o espalhamento se torne profundamente inelástico e os dados apontam para um aumento drástico da população de glúons neste regime.

Considerando agora o referencial de repouso do núcleon, assume-se a probabilidade do fóton virtual flutuar num par quark-antiquark que atinge o alvo. O par $q\bar{q}$ é chamado de *dipolo de cor* (Fig. [3.3]). O modelo considera que o dipolo reespalha múltiplas vezes no núcleon desenvolvendo uma cascata de glúons antes de atingir o alvo.

Então, se tem um par $q\bar{q}$ com a função de onda espaço de *momentum* dada por $\psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{k}_1, z_1)$, sendo \vec{k}_1 o *momentum* transverso do quark e $z_1 = k_1^+ / p^+$ a fração de *momentum* carregada pelo quark na notação das variáveis do cone de luz (apêndice C). A obtenção do estado físico na representação espacial é trivialmente obtida a partir transformação de *Fourier*,

$$\psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{r}_0, \vec{r}_1, z_1) = \int \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} e^{i\vec{r}_{01} \cdot \vec{k}_1} \psi_{\alpha\beta}(\vec{k}_1, z_1). \quad (3.8.1)$$

\vec{r}_0 e \vec{r}_1 as posições do quark e do anti-quark respectivamente, geometricamente, os pontos extremos do dipolo. O módulo quadrado da função de onda é dado por,

$$\phi^{(0)}(\vec{r}_0, \vec{r}_1, z_1) = \sum_{\alpha, \beta} |\psi_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{r}_0, \vec{r}_1, z_1)|^2. \quad (3.8.2)$$

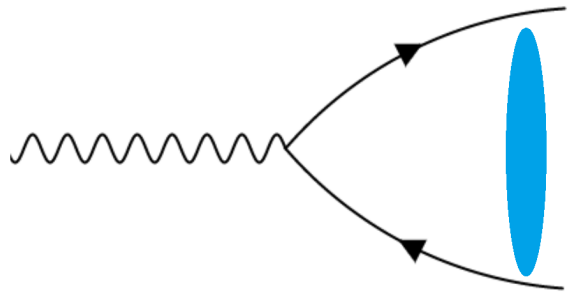
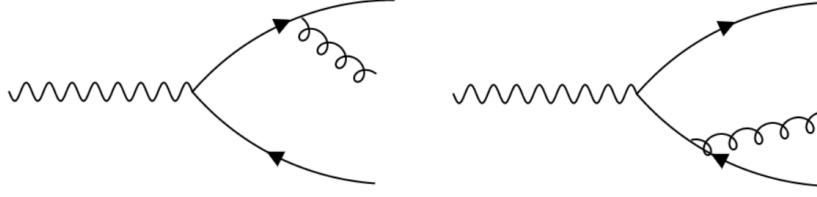


Figura 3.3: Dipolo de cor, em azul, gerado a partir de um fóton virtual. A linha roxa é o módulo do vetor \vec{r}_{01}

O modelo prevê a emissão de glúons macios* emitidos pelo dipolo, tendo este um *momentum* longitudinal, z_2 muito menor do que o quark ou anti-quark pai, ou seja, $z_2 / z_1 \ll 1$,

*os glúons não tem massa inercial; neste sentido, macio seria o antônimo de duros, relativo a sua escala de momento



A relação entre o módulo quadrado do estado físico de emissão de um glúon $\phi^{(1)}$ e a equação [3.8.2] é,

$$\phi^{(1)}(\vec{r}_0, \vec{r}_1, z_1) = \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \int d^2 r_2 \frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{12}^2} \phi^{(0)}(\vec{r}_0, \vec{r}_1, z_1). \quad (3.8.3)$$

Definindo $\vec{r}_{01} \equiv \vec{r}_0 - \vec{r}_1$ e os demais vetores com dois subscritos de forma similar. A emissão de mais um glúon é equivalente a divisão do dipolo original (0, 1) em dois dipolos (0, 2) e (2, 1) com a probabilidade de medida,

$$d^2 r_2 \frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{12}^2}. \quad (3.8.4)$$

É possível repetir este procedimento n vezes a fim de obter $\psi^{(n)}$ a amplitude relacionada ao estado de geração de n dipolos. A fim de descrever este processo, *Mueller* introduziu a funcional geratriz de dipolo $G(\vec{b}, \vec{x}_{01}, z_1, u)$, sendo o vetor \vec{b} o parâmetro de impacto ilustrado na Fig. [3.4] dado por,

$$\vec{b} = \frac{\vec{r}_0 + \vec{r}_1}{2}. \quad (3.8.5)$$

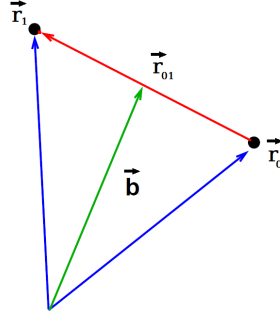


Figura 3.4: Representação geométrica do vetor do parâmetro de impacto.

Este funcional satisfaz a condição de normalização,

$$G(\vec{b}, \vec{r}_{01}, z_1, u = 1) = 1. \quad (3.8.6)$$

A probabilidade de um estado com um número arbitrário de glúons pode ser obtida a partir de uma diferenciação funcional da função G ,

$$\phi^{(n)}(\{\vec{r}_{n+1}\}) = \phi^{(0)} \prod_{j=2}^{n+1} \frac{\delta}{\delta u(\vec{r}_j)} G(\vec{r}_0, \vec{r}_1, z_1, u)|_{u=0}. \quad (3.8.7)$$

A relação entre as funções de onda de n e $n + 1$ dipolos é dada pela equação diferencial para a funcional geratriz,

$$\frac{d}{dY} G(\vec{b}, \vec{r}_{01}, Y, u) = \int d^2 r_2 \frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{12}^2} \left[G(\vec{b} + \frac{\vec{r}_{12}}{2}, \vec{r}_{20}, Y, u) + G(\vec{b} - \frac{\vec{r}_{20}}{2}, \vec{r}_{12}, Y, u) - G(\vec{b}, \vec{r}_{01}, z_1, u) \right], \quad (3.8.8)$$

A densidade de número de k dipolos é dada por,

$$n_k = \prod_{i=1}^k \frac{\delta}{\delta u(\vec{b}_i, \vec{r}_i)} G|_{u=1}. \quad (3.8.9)$$

A amplitude de espalhamento de um único dipolo no alvo é obtida a partir da convolução da densidade de número de dipolos com o propagador do dipolo com o núcleo,

$$N_1(\vec{r}_{01}, \vec{b}_{01}, Y) = \int d[\mathcal{P}_1] n_1 \vartheta_1, \quad (3.8.10)$$

sendo $d[\mathcal{P}_1] = \frac{d^2 r_1}{2\pi r_1^2} d^2 b_1$ a medida no espaço de fase e $\vartheta \equiv \vartheta(\vec{r}, \vec{b})$ o propagador de um dipolo simples no núcleo. Diferenciando a equação para a funcional geratriz e utilizando a relação [3.8.10] é possível obter a equação para a amplitude dipolo-alvo,

$$\frac{d}{dY} N_1(\vec{r}_{01}, \vec{b}_{01}, Y) = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int d^2 r_2 \frac{\vec{r}_{01}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{12}^2} \left[N_1(\vec{b} + \frac{\vec{r}_{12}}{2}, \vec{r}_{20}, Y) + N_1(\vec{b} - \frac{\vec{r}_{20}}{2}, \vec{r}_{12}, Y) - N_1(\vec{b}, \vec{r}_{01}, Y) \right], \quad (3.8.11)$$

Nesta derivação, apenas fora incluso a contribuição de um único dipolo. Esta equação é a versão de dipolo para a equação BFKL no espaço de coordenadas transversas. É possível generalizar esta equação tomando conta dos vários dipolos espalhados no alvo. Para isso considera-se a densidade de k números de dipolos e a sua convolução com k propagadores, tendo,

$$N(\vec{r}_{01}, \vec{b}, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int d[\mathcal{P}_k] n_k \prod_{j=1}^k \vartheta_j, \quad (3.8.12)$$

onde a medida é definida como,

$$[\mathcal{P}_k] = \prod_{i=1}^k \frac{d^2 r_i}{2\pi r_i^2} d^2 b_i. \quad (3.8.13)$$

De forma análoga ao desenvolvimento da equação para amplitude de um único dipolo, para vários dipolos obtém-se,

$$\frac{dN}{dY} = \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int \frac{d^2 r_2 \vec{x}_{01}^2}{\vec{r}_{20}^2 \vec{r}_{12}^2} \left[N(\vec{b} + \frac{\vec{r}_{12}}{2}, \vec{r}_{20}) + N_1(\vec{b} - \frac{\vec{r}_{20}}{2}, \vec{r}_{12}) - N(\vec{b}, \vec{r}_{01}) - N(\vec{b} + \frac{\vec{r}_{12}}{2}, \vec{r}_{20}) N(\vec{b} - \frac{\vec{r}_{20}}{2}, \vec{r}_{12}) \right], \quad (3.8.14)$$

Esta é a equação *Balitsky-Kovchegov* [83]- [84], não linear que considera a interação de k dipolos com o núcleo alvo. É uma equação de evolução em relação a rapidez Y , que necessita de condições iniciais $N^{(0)}(\vec{b}, \vec{x}_{01}, Y = 0)$, sendo válida na aproximação do logaritmo dominante. Ela também considera a constante de acoplamento forte constante. O problema envolve $(4 + 1)$ variáveis, ou seja, quatro graus de liberdade por dipolo e uma variável de evolução, Y .

3.9 SATURAÇÃO PARTÔNICA

As equações DGLAP, BFKL e BK também relacionam-se com o espaço-tempo gerando consequências. Tratando o DIS, o quadri-momentum do párton P^μ e do fóton q^μ , são dados por,

$$P^\mu \approx (P + \frac{m_p^2}{2P}, 0, 0, P), \quad (3.9.1)$$

e

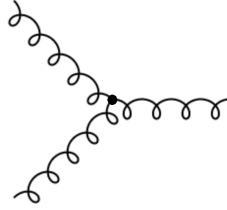
$$q^\mu = (q^0, q^1, q^2, 0). \quad (3.9.2)$$

No referencial de *Breit* portanto,

$$q^0 \approx \frac{Q^2}{2xP}. \quad (3.9.3)$$

Assim $Q \ll q^0$ e Q^2 terá praticamente apenas componentes transversais, fazendo com que $x_T \approx 1/q_T \approx 1/Q$. Desta forma, quanto maior for o Q^2 , menores serão as distâncias que o fóton poderá provar, fazendo com que x_T seja a resolução da sonda.

Agora, como fora desenvolvido nas seções anteriores, conforme x decresce, a densidade de glúons aumenta com um dado tamanho transversal. Mas este número não pode aumentar indefinidamente, pois a área transversal do próton limitaria este crescimento. Conforme ocorre uma aproximação deste limite, as funções de onda dos glúons começam a se sobrepor e a probabilidade dos glúons se recombinarem aumenta, aumentando a ocorrência dos processos de fusão dados por $gg \rightarrow g$, em diagramas como,



A inserção deste mecanismo regulador da população gluônica é dada a partir da escala de saturação Q_s , que pode ser escrita na forma,

$$Q_s(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\lambda/2}, \quad (3.9.4)$$

sendo x_0 um parâmetro de referência na escala de *Bjorken* e ω uma constante de valor $\omega = 0,248$. Essa expressão é historicamente associada ao modelo de saturação de *Golec-Biernat* e *Wusthoff* (GBW)[†], que fora posteriormente estendido para valores apreciáveis do parâmetro de impacto \vec{b} [85],

$$Q_{sb}(x, b) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\lambda/2} e^{-\frac{b^2}{4\gamma_s B_{CGC}}}, \quad (3.9.5)$$

B_{CGC} é um parâmetro e γ_s a dimensão anômala resultado da transformação de *Mellin* sobre as funções de desdobramento. Fica claro que na região de saturação

$$Q_{sb}(x, b=0) = Q_s(x). \quad (3.9.6)$$

[†] Parametrização fenomenológica que inclui efeitos de saturação a partir do formalismo de dipolos.

Em particular, esse resultado será utilizado posteriormente.

Neste capítulo fora revisada a derivação do modelo a pártons, algumas de suas propriedades importantes na caracterização da entropia bem como as equações de evolução adjacentes aos modelos que em seguida serão considerados para a computação das entropias partônicas.

Capítulo 4

A entropia partônica

Nos capítulos anteriores foram introduzidas as noções entrópicas de *von Neumann* e *Wehrl*, após isso, discutiu-se o fenômeno do emaranhamento quântico e a possibilidade do cálculo da entropia de emaranhamento. O modelo a pártons foi apresentado e conforme se explorava as equações de evolução adjacentes (DGLAP [eq. 3.6.23], BFKL [eq. 3.7.3] e BK [eq. 3.8.14]) foi possível entender suas principais características. Utilizando a união dos conceitos até então desenvolvidos, torna-se possível a computação da entropia partônica no regime das altas energias.

A ideia de se associar uma entropia a distribuição dos glúons vem sido explorada desde 2012 [86], contudo, neste trabalho parte-se da entropia de emaranhamento para os pártons, onde os resultados das seções 4.1 e 4.2 foram reproduzidos da referência [87] tratando da construção da entropia de emaranhamento para os pártons e de um modelo (1+1)-dimensional*. A seção 4.3 também fora inspirada na referência [87], contudo, a maneira como a entropia de emaranhamento fora computada no modelo (3+1)-dimensional (reproduzindo os mesmos resultados) é exclusiva deste trabalho.

As seções 4.4, 4.5 e 4.6 tratam do cômputo da entropia de *Wehrl* para os pártons reproduzindo e bebendo das informações dadas pelas referências [88] e [89], contudo, tendo como principal resultado a entropia de *Wehrl* para valores de energia não assintóticos, também exclusivo deste trabalho. Tendo estas colocações em mente, a primeira etapa da sequência de cálculos de entropia que se segue é a construção da entropia de emaranhamento para os pártons.

4.1 O EMARANHAMENTO COMO CAUSA DA ENTROPIA

Inicialmente é considerada uma região do espaço unidimensional A , sondada via DIS e, denotado por B , a região do espaço complementar a A (Fig. [4.1]). O núcleon é contido no espaço inteiro $A \cup B$.

Os estados físicos sondados (região A), pertencem ao espaço de *Hilbert* \mathcal{H}_A de dimensão n_A com base $\{|\phi_{n_A}^A\rangle\}$ e os demais estados pertencem ao espaço de *Hilbert* \mathcal{H}_B de dimensão n_B e base $\{|\phi_{n_B}^B\rangle\}$. O sistema composto $A \cup B$ é então descrito por $|\psi_{AB}\rangle$ no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_T$. Assim,

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \sum_j c_{ij} |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle, \quad (4.1.1)$$

*Uma dimensão espacial e a dependência com a rapidez Y .

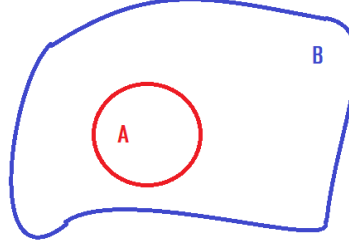


Figura 4.1: O DIS sonda unicamente a região A .

onde c_{ij} são os elementos da matriz \hat{C} de dimensão $n_A \times n_B$. Considerando $|\psi_{AB}\rangle$ um estado puro, tal que $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_T$, especula-se a possibilidade de caracteriza-lo na forma,

$$|\psi_{AB}\rangle = |\phi^A\rangle \otimes |\phi^B\rangle, \quad (4.1.2)$$

com $|\phi^A\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|\phi^B\rangle \in \mathcal{H}_B$. Se for confirmada está possibilidade, como já fora citado, diz-se que o estado é separável, isto é, a soma do i -ésimo e j -ésimo termo resulta em um único termo. Por outro lado, se um estado não é separável, ele é *emaranhado* ou *entrelaçado*. A computação da entropia depende da hipótese de que $|\psi_{AB}\rangle$ é emaranhado.

Para o sistema composto, se tem a matriz densidade $\hat{\rho}_{AB} \in \mathcal{H}_T$,

$$\hat{\rho}_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| = \sum_{ijkl} c_{ij} c_{kl}^* |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A| \otimes |\phi_j^B\rangle \langle \phi_l^B|. \quad (4.1.3)$$

Entretanto, apenas a região A é sondada, de forma que $\hat{\rho}_{AB}$ carrega informação de estados presentes em B que não serão medidos. É necessário obter um objeto matemático similar à $\hat{\rho}_{AB}$ que carregue apenas informações da região A , ou seja, $\hat{\rho}_A$, podendo ser obtido a partir do traço parcial, que soma as contribuições do emaranhamento na região sondada,

$$\hat{\rho}_A = \text{tr}_B \hat{\rho}_{AB} = \sum_m \langle \phi_m^B | \hat{\rho}_{AB} | \phi_m^B \rangle. \quad (4.1.4)$$

Então,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A &= \text{tr}_B \hat{\rho}_{AB} = \sum_m \langle \phi_m^B | \sum_{ijkl} c_{ij} c_{kl}^* |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A| \otimes |\phi_j^B\rangle \langle \phi_l^B| \phi_m^B \rangle, \\ &= \sum_{ijkl} c_{ij} c_{kl}^* |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A| \otimes \sum_m \langle \phi_m^B | \phi_j^B \rangle \langle \phi_l^B | \phi_m^B \rangle \delta_{lm}, \\ &= \sum_{ijkl} c_{ij} c_{kl}^* |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A| \delta_{lj}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Sendo assim,

$$\hat{\rho}_A = \sum_{ijk} c_{ij} c_{kj}^* |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A|. \quad (4.1.6)$$

Agora, é possível representar o estado puro $|\psi_{AB}\rangle$ em uma única soma, utilizando o procedimento de

Gram-Schmidt (apêndice D),

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle, \quad (4.1.7)$$

com $|a_i\rangle \in \mathcal{H}_A$ e $|b_i\rangle \in \mathcal{H}_B$. Assim, é possível reescrever $\hat{\rho}_{AB}$,

$$\hat{\rho}_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| = \sum_{nm} \alpha_n \alpha_m^* |a_n\rangle \langle a_m| \otimes |b_n\rangle \langle b_m|. \quad (4.1.8)$$

Obtendo $\hat{\rho}_A$,

$$\hat{\rho}_A = \text{tr}_B \hat{\rho}_{AB} = \sum_s \langle b_s| \sum_{nm} \alpha_n \alpha_m^* |a_n\rangle \langle a_m| \otimes |b_n\rangle \langle b_m| \underbrace{\langle b_m| b_s\rangle}_{\delta_{ms}}. \quad (4.1.9)$$

Similarmente à (4.1.6), é possível escrever,

$$\hat{\rho}_A = \sum_n \alpha_n^2 |a_n\rangle \langle a_n|. \quad (4.1.10)$$

Agora, interpretando $\alpha_n^2 = p_n$ como a probabilidade de um estado físico hadrônico com n pártons. Daí, utilizando a expressão da entropia de *Shannon*, obtém-se a entropia de *von Neumann* dada por,

$$S = - \sum_n p_n \ln p_n, \quad (4.1.11)$$

ou seja, a entropia de emaranhamento partônico.

4.2 ENTROPIA DE *von Neumann*: MODELO (1 + 1)-DIMENSIONAL

A evolução das distribuições partônicas pode ser modelada na representação de dipolo [87], onde um conjunto de pártons é representado por um conjunto de dipolos de cor. No modelo (1 + 1)-dimensional, dependendo apenas de uma direção espacial e da rapidez Y . Sendo assim, é negligenciada a informação de que dipolos diferentes possuem tamanhos distintos.

A partir disto, são consideradas as seguintes definições,

- $p_n(Y)$: Probabilidade de encontrar n dipolos com rapidez Y ;
- ω_0 : Probabilidade constante de um dipolo decair em dois.

A equação que relaciona a variação da probabilidade com a rapidez[†] é dada por,

$$\frac{dp_n}{dY} = -\omega_0 n p_n + (n-1)\omega_0 p_{n-1}. \quad (4.2.1)$$

O primeiro termo no lado direito da equação [4.2.1] se refere a diminuição da probabilidade de encontrar n dipolos frente a divisão dos mesmos em $n + 1$ dipolos, enquanto o segundo trata do crescimento devido a divisão de $n - 1$ dipolos em n .

Além do modelo de dipolos de cor, é introduzida a função *geratriz* (ou geradora) $G(Y, u)$ com a finalidade de

[†] também relaciona com a energia, pois tem-se a expressão $e^{\omega_0 Y} = x^{-\omega_0}$

resolver o problema, sendo esta dada por,

$$G(Y, u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n u^n. \quad (4.2.2)$$

Diferentemente das séries infinitas utilizadas recorrentemente, as funções geratrizes pode divergir, significando que $G(Y, u)$ nem sempre é a função verdadeira e a variável que se busca na realidade é indeterminada.

Agora, percebem-se que para $u = 1$,

$$G(Y, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \quad (4.2.3)$$

Além disso, para $G = 0$, $P_1(0) = 1$ (um único dipolo) e $P_{n>1} = 0$, um estado puro. Disto obtém-se tanto a condição inicial do problema como a condição de contorno,

$$\begin{cases} G(0, u) = u; \\ G(Y, 1) = 1. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

É necessário conectar o formalismo da função geratriz com a evolução de $p_n(Y)$ [4.2.1], para isso, são consideradas as derivadas,

$$\frac{\partial}{\partial Y} G(Y, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{dp_n}{dY} \right) u^n \right], \quad (4.2.5)$$

e,

$$\frac{\partial}{\partial u} G(Y, u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n n u^{n-1}. \quad (4.2.6)$$

Substituindo [4.2.1] em [4.2.5], para obter,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y} G(Y, u) &= \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} [-n p_n(Y) + (n-1) p_{n-1}] u^n, \\ &= -\omega_0 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n p_n u^n}_{u \frac{\partial}{\partial u} G(Y, u)} + \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1} u^n, \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Para o segundo termo da equação [4.2.7],

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1} u^n \underbrace{=}_{n-1=m} \sum_{m=0}^{\infty} m p_m u^{m+1} = 0 + \sum_{m=1}^{\infty} m p_m u^{m+1} = u^2 \frac{\partial}{\partial u} G(Y, u). \quad (4.2.8)$$

Observando [4.2.7] e [4.2.8], percebe-se que a evolução partônica no modelo de dipolos de cor com a função geratriz é modelada pela equação diferencial parcial,

$$\frac{\partial}{\partial Y} G(Y, u) = \omega_0 u(u-1) \frac{\partial}{\partial u} G(Y, u). \quad (4.2.9)$$

A solução geral para as condições [4.2.4] é dada por,

$$G(Y, u) = \frac{u e^{-\omega_0 Y}}{1 + u(e^{-\omega_0 Y} - 1)} = u e^{-\omega_0 Y} \underbrace{\frac{1}{1 + u(e^{-\omega_0 Y} - 1)}}. \quad (4.2.10)$$

Agora, para o termo destacado em [4.2.10], considerando, $|u(1 - e^{-\omega_0 Y})| < 1$, poderá ser escrito na forma,

$$\frac{1}{1 + u(e^{-\omega_0 Y} - 1)} = \sum_{j=0}^{\infty} u^j [1 - e^{-\omega_0 Y}]^j \underbrace{=}_{j+1=n} \sum_{n=1}^{\infty} u^{n-1} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}. \quad (4.2.11)$$

Ou seja, é possível escrever a solução na forma,

$$G(Y, u) = e^{-\omega_0 Y} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} u^n. \quad (4.2.12)$$

Comparando a equação [4.2.12] com a definição da função geratriz em [4.2.2] é determinada a probabilidade $p_n(Y)$,

$$p_n(Y) = e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}. \quad (4.2.13)$$

Substituindo $p_n(Y)$ obtido em [4.2.13] na expressão da entropia de *von Neumann* [4.1.11]:

$$\begin{aligned} S(Y) &= - \sum_n \{ e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} \ln [e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}] \} \\ &= - e^{-\omega_0 Y} \sum_n \{ (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} \ln [-\omega_0 Y + (n-1) \ln(1 - e^{-\omega_0 Y})] \} \\ &= \omega_0 Y \sum_n \underbrace{e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}}_{p_n} - \sum_n e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} (n-1) \ln(1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} \\ &= \omega_0 Y \underbrace{\sum_n p_n}_1 + \ln(1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1} \left[\sum_n \underbrace{e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}}_{p_n} - \sum_n n \underbrace{e^{-\omega_0 Y} (1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}}_{p_n} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

ou seja,

$$S(Y) = \omega_0 Y + \ln(1 - e^{-\omega_0 Y}) (1 - \sum_n n p_n). \quad (4.2.15)$$

No limite de interesse, $Y \rightarrow \infty$,

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \ln(1 - e^{-\omega_0 Y}) = 0 \quad (4.2.16)$$

Então, a entropia toma a forma simples,

$$S(Y) \approx \omega_0 Y. \quad (4.2.17)$$

É possível relacionar a entropia obtida com a densidade de glúons. Para isso, se define o número médio de pártons como,

$$\langle n \rangle \equiv x f_g(x), \quad (4.2.18)$$

Nessa expressão $x f_g(x)$ é a distribuição dos glúons para um dado valor de x possibilitando à avaliação da entropia por unidade de rapidez. Assim,

$$x f_g(x) = \langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n. \quad (4.2.19)$$

A distribuição apareceu no termo na extrema direita de [4.2.15], para ele,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} np_n &= e^{-\omega_0 Y} \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - e^{-\omega_0 Y})^{n-1}, \\ &= \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dY} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\omega_0 Y})^n.\end{aligned}\quad (4.2.20)$$

Então, para $|1 - e^{-\omega_0 Y}| < 1$, tem-se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} np_n = \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dY} \frac{1}{1 - (1 - e^{-\omega_0 Y})} = e^{\omega_0 Y}.\quad (4.2.21)$$

Agora, para grandes valores de x , mais precisamente, no regime em que $x \gg 1$, a rapidez Y relaciona-se com a escala de *Bjorken* na forma de $Y = -\ln x$. Somando esta informação aos resultados das equações (4.2.21) e (4.2.19), obtém-se,

$$xf_g(x) = e^{\omega_0}.\quad (4.2.22)$$

Assim, a entropia de *von Neumann* no limite assintótico é dada por,

$$S(x) = \ln[xf_g(x)].\quad (4.2.23)$$

Se nota que para o regime de *pequeno* x , a entropia (4.2.23) emerge para o limite onde todas as probabilidades p_n tornam-se equiprováveis. Observando a equação (4.2.13) nestas circunstâncias, tem-se a equipartição probabilística,

$$p_n = e^{-\omega_0 Y} = \frac{1}{\langle n \rangle}.\quad (4.2.24)$$

Os postulados da mecânica estatística de equilíbrio acarretam na maximização da entropia, logo, a equação [4.2.24] descreve um estado físico maximamente emaranhado, ou seja, em um estado hadrônico desta natureza é impossível prever quantos pártons serão detectados, uma vez que todos os microestados são igualmente prováveis.

4.3 ENTROPIA DE *von Neumann*: MODELO (3 + 1)-DIMENSIONAL

Em uma situação mais real, deve ser considerado que os dipolos podem ter tamanhos variados e para incluir esta característica, é necessário explorar modelos com dimensões maiores. Assim, neste seção, é incluída a dependência com mais duas direções espaciais e a conexão com a equação BK [3.8.14] se evidencia na modelagem da cascata de dipolos, dada pela expressão,

$$\frac{1}{\bar{\alpha}_s} \frac{\partial}{\partial Y} P_n(Y; \{r_n\}) = - \left[\sum_{i=1}^n \omega(r_i) \right] P_n(Y; \{r_n\}) + \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\vec{r}_i + \vec{r}_n)^2}{r_i^2 r_n^2} \right] P_{n-1}(Y; \{r_{n-1}\}).\quad (4.3.1)$$

Nesta equação, a notação $\{r_n\}$ indica uma dependência com os n -dipolos e $P_n(Y; \{r_n\})$ é a probabilidade de se encontrar n -dipolos com uma rapidez Y . Se [4.3.1] for comparada com [4.2.1], nota-se que a probabilidade

de um dipolo sobreviver não é mais constante, como ω_0 , mas depende do tamanho do dipolo,

$$\omega(r_i) \equiv \omega_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho} \frac{r_i^2}{(\vec{r}_i - \vec{r}')^2 r'^2} d^2 r' = \ln(r_i^2 / \rho^2), \quad (4.3.2)$$

sendo ρ o *cutoff* de infravermelho. As condições iniciais são tais que,

$$P_1(0; r_1) = 1, \quad (4.3.3)$$

$$P_n(0; \{r_n\}) = 0, \quad n > 1. \quad (4.3.4)$$

Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(Y; \{r_n\}) = 1. \quad (4.3.5)$$

Para $n = 1$, ou seja, apenas um dipolo, a equação [4.3.1] toma uma forma especial,

$$\frac{\partial}{\partial Y} P_1(Y; r_1) = -\bar{\alpha}_s \omega_1 P_1(Y; r_1), \quad (4.3.6)$$

que pode facilmente ser resolvida utilizando as condições iniciais, tendo sua solução dada por,

$$P_1(Y; r_1) = e^{-\bar{\alpha}_s \omega_1 Y}, \quad (4.3.7)$$

refletindo que existe apenas um dipolo de tamanho r_1 .

Agora, para $n = 2$,

$$\frac{\partial}{\partial Y} P_2(Y; r_1, r_2) = -\bar{\alpha}_s (\omega_1 + \omega_2) P_2(Y; r_1, r_2) + \frac{\bar{\alpha}_s (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)^2}{2\pi r_1^2 r_2^2} P_1(Y, r_1). \quad (4.3.8)$$

Desta equação, extrai-se a probabilidade de um dipolo de tamanho $|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|$ decair em dois dipolos de tamanhos r_1 e r_2 , $P_{1 \rightarrow 2}$,

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{\bar{\alpha}_s (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)^2}{2\pi r_1^2 r_2^2}, \quad (4.3.9)$$

que pode ser facilmente generalizada incluindo os sub-inscritos n e $n + 1$.

Agora, consideradas as definições,

$$A_n \equiv \bar{\alpha}_s \sum_{i=1}^n \omega_i, \quad (4.3.10)$$

$$B_n \equiv \frac{\bar{\alpha}_s}{2\pi} P_{n-1}(Y; \{r_{n-1}\}) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\vec{r}_i + \vec{r}_n)^2}{r_i^2 r_n^2}, \quad (4.3.11)$$

é possível rescrever [4.3.8] na forma,

$$P_2' + A_2 P_2 = B_2, \quad (4.3.12)$$

que também pode ser facilmente resolvida,

$$P_2(Y; r_1, r_2) = \frac{B_2}{A_2} (1 - e^{-A_2 Y}) = \frac{P_1(Y; r_1)}{2\pi(\omega_1 + \omega_2)} \frac{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)^2}{r_1^2 r_2^2} [1 - e^{-\bar{\alpha}_s (\omega_1 + \omega_2) Y}]. \quad (4.3.13)$$

O resultado é coerente fisicamente: para que existam $n+1$ (2) dipolos, é necessário considerar a possibilidade de que existam n (1). Como último exemplo, $n = 3$, na equação [4.3.1], resulta na solução,

$$P_3(Y; r_1, r_2, r_3) = \frac{P_2(Y; r_1, r_2)}{2\pi(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} \left[\frac{(\vec{r}_1 + \vec{r}_3)^2}{r_1^2 r_3^2} + \frac{(\vec{r}_2 + \vec{r}_3)^2}{r_2^2 r_3^2} \right] [1 - e^{-\bar{\alpha}_s(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)Y}]. \quad (4.3.14)$$

A partir deste método, é possível obter quantas possibilidades forem necessárias, contudo, como elas dependem sempre de um termo probabilístico da sequência anterior, que deve ser *a priori* menor que a unidade, o produto das probabilidades tendem a ter menos peso estatístico. A Fig. [4.2] mostra o comportamento de algumas soluções. Assim, é possível escrever a expressão geral da solução de [4.3.1], excluindo o caso especial $n = 1$,

$$P_n(Y; \{r_n\}) = e^{-\bar{\alpha}_s \omega_1 Y} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n-1} \prod_{s=2}^n \frac{1}{r_s^2} \frac{[1 - e^{-\bar{\alpha}_s Y \sum_{l=1}^s \omega_l}]}{\sum_{l=1}^s \omega_l} \sum_{m=1}^{s-1} \frac{(\vec{r}_m + \vec{r}_s)^2}{r_m^2}. \quad (4.3.15)$$

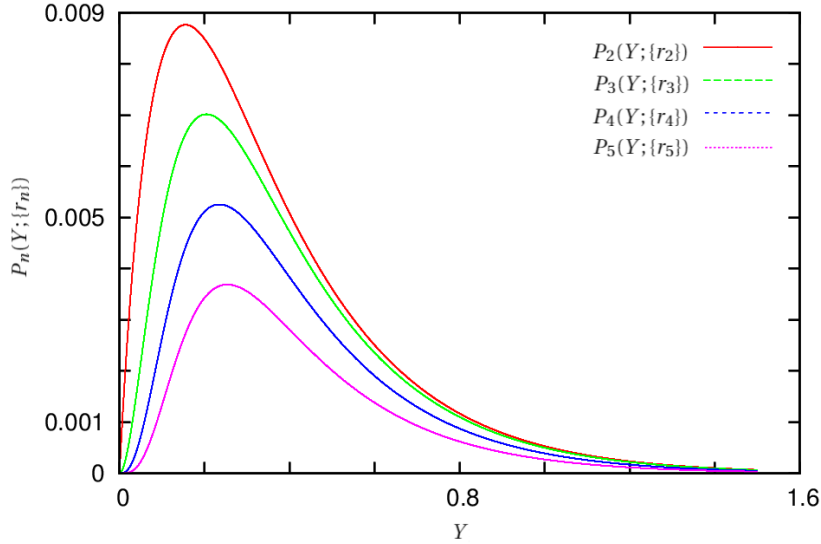


Figura 4.2: A dependência de $P_2(Y, \{r_2\})$, $P_3(Y, \{r_3\})$, $P_4(Y, \{r_4\})$ e $P_5(Y, \{r_5\})$ em relação a rapidez Y . Conforme n aumenta, $P_n(Y, \{r_n\})$ tende a diminuir seu peso estatístico. Além disso, o acréscimo de Y , rumo ao regime de *pequeno x*, faz com que as curvas tendam a coincidirem em um valor próximo a 0. Nesta figura os tamanhos dos dipolos foram manipulados para que ficasse mais visível o comportamento das P_n 's. Casos mais realísticos aumentam a distância entre as curvas abruptamente.

Agora, a obtenção da solução [4.3.15] possibilita a avaliação da entropia de *von Neumann*, convenientemente escrita na forma,

$$S(Y) = - \sum_{n=1}^{\infty} P_n \ln P_n = -P_1 \ln P_1 - \sum_{n=2}^{\infty} P_n \ln P_n = \bar{\alpha}_s \omega_1 Y e^{-\bar{\alpha}_s \omega_1} - \sum_{n=2}^{\infty} P_n \ln P_n. \quad (4.3.16)$$

Utilizando a expressão [4.3.15] para avaliar o logaritmo,

$$\begin{aligned} \ln P_n &= \ln \left\{ e^{-\bar{\alpha}_s \omega_1 Y} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n-1} \prod_{s=2}^n \frac{1}{r_s^2} \frac{[1 - e^{-\bar{\alpha}_s Y \sum_{l=1}^s \omega_l}]}{\sum_{l=1}^s \omega_l} \sum_{m=1}^{s-1} \frac{(\vec{r}_m + \vec{r}_s)^2}{r_m^2} \right\} \\ &= -\bar{\alpha}_s \omega_1 Y - (n-1) \ln 2\pi + \sum_{s=2}^n \ln \left[\frac{(1 - e^{-\bar{\alpha}_s Y \sum_{l=1}^s \omega_l})}{\sum_{l=1}^s \omega_l} \frac{1}{r_s^2} \sum_{m=1}^{s-1} \frac{(\vec{r}_m + \vec{r}_s)^2}{r_m^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Substituindo em [4.3.16],

$$S(Y) = \underbrace{\bar{\alpha}_s \omega_1 Y P_1 + \bar{\alpha}_s \omega_1 Y \sum_{n=2}^{\infty} P_n}_{\text{termo destacado}} + \sum_{n=2}^{\infty} P_n \left\{ (n-1) \ln 2\pi + \sum_{s=2}^n \ln \left[\frac{r_s^2 \sum_{l=1}^s \omega_l}{(1 - e^{-\bar{\alpha}_s Y \sum_{l=1}^s \omega_l}) \sum_{l=1}^{s-1} \frac{(\vec{r}_m + \vec{r}_s)^2}{r_m^2}} \right] \right\}. \quad (4.3.18)$$

O termo destacado é reduzido,

$$\bar{\alpha}_s \omega_1 Y P_1 + \bar{\alpha}_s \omega_1 Y \sum_{n=2}^{\infty} P_n = \bar{\alpha}_s \omega_1 Y \left(P_1 + \sum_{n=2}^{\infty} P_n \right) = \bar{\alpha}_s \omega_1 Y \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P_n}_{1} = \bar{\alpha}_s \omega_1 Y. \quad (4.3.19)$$

Dessa forma,

$$S(Y) = \bar{\alpha}_s \omega_1 Y + \sum_{n=2}^{\infty} P_n \left\{ (n-1) \ln 2\pi + \sum_{s=2}^n \ln \left[\frac{r_s^2 \sum_{l=1}^s \omega_l}{(1 - e^{-\bar{\alpha}_s Y \sum_{l=1}^s \omega_l}) \sum_{l=1}^{s-1} \frac{(\vec{r}_m + \vec{r}_s)^2}{r_m^2}} \right] \right\}. \quad (4.3.20)$$

Para altas energias, o único termo que possui alguma relevância no cálculo da entropia é $\bar{\alpha}_s \omega_1 Y$, de forma que não é mais necessário utilizar subscritos. Os demais termos possuem pouca contribuição, como fora observado a partir do cálculo numérico expresso na Fig. [4.3]. Então, no regime de altas energias,

$$S(Y) = \bar{\alpha}_s \omega Y. \quad (4.3.21)$$

Se for considerado que $\omega_0 = \bar{\alpha}_s \omega$, sendo ω a probabilidade de um dipolo característico de tamanho r^2 num DIS com uma transferência de *momentum* Q^2 , a expressão [4.2.17] é recuperada; esta interpretada anteriormente como um caso de entropia maximizado. A Fig. [4.2] esboça bem a equiprobabilidade dos estados partônicos no regime altamente energético: o aumento da energia faz com que as curvas tendam a zero, sem nunca assumir este valor, maximizando a entropia.

4.4 ENTROPIA DE WEHRL NA QCD

Para o cálculo da entropia dada pela equação [4.3.21], fora necessário considerar que os existia um emaranhamento entre duas regiões espaciais do hádron, sendo uma delas a região sondada pelo DIS e a outra o restante do hádron. Contudo, se de alguma forma for possível obter a distribuição de *Wigner* ou de *Husimi* do hádron em questão, não é mais necessária a consideração de duas regiões emaranhadas, sendo este o programa dos cálculos que vem a seguir.

No regime de altas energias, os pártons são caracterizados pela fração de *momentum* longitudinal x , pelo *momentum* transversal \vec{k}_T e a posição transversa ou parâmetro de impacto \vec{b} . Dessa forma, a caracterização do sistema pode ser obtida a partir da distribuição de *momentum* transversal TMD (do inglês *transverse momentum*

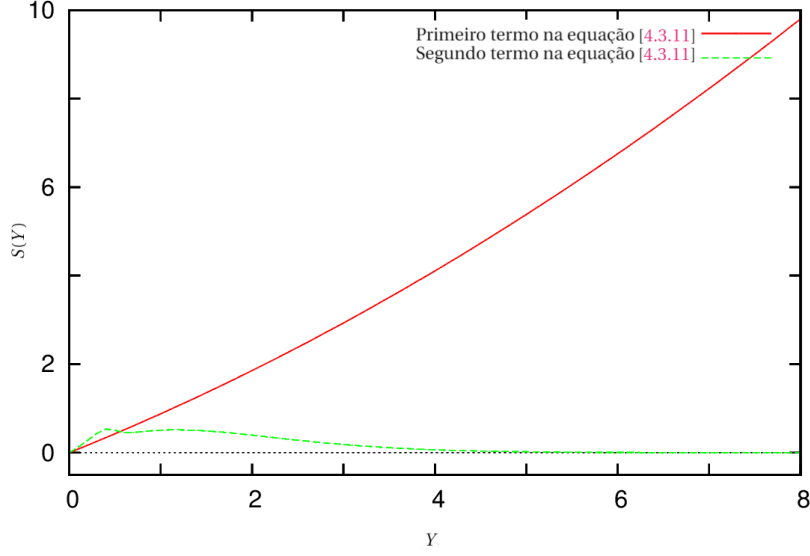


Figura 4.3: Dependência dos dois termos da entropia dada pela equação [4.3.20] com a rapidez Y .

distribution), $T(x, \vec{k}_T)$, e da transformada de *Fourier* da distribuição partônica generalizada GPD (do inglês, *generalized parton distribution*), $G(x, \vec{b})$. A obtenção destas distribuições auxilia no cálculo de seções de choque e na construção de uma interpretação visual da estrutura tridimensional do núcleon.

Agora, no cálculo da entropia, tanto as informações contidas em \vec{k}_T quanto em \vec{b} é necessária. Outro exemplo seria a decomposição do spin do núcleon obtida a partir do *momentum* angular orbital $\vec{b} \times \vec{k}_T$. Um dos métodos para se obter as informações de ambas as variáveis, sendo estas conjugadas, é a distribuição de *Wigner* já discutida nas seções anteriores, contudo agora ela é uma função $W = W(x, \vec{b}, \vec{k}_T)$.

No caso quântico a distribuição de *Wigner* é dada por [2.4.4],

$$W(\vec{q}, \vec{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle \vec{q} + \vec{x}/2 | \hat{\rho}(t) | \vec{q} - \vec{x}/2 \rangle. \quad (4.4.1)$$

Serão agora discutidas ponto a ponto as modificações que devem ser realizadas em [4.4.1] para uma construção consistente com a QCD.

Em primeiro lugar, a troca de variáveis,

$$t \rightarrow x, \quad (4.4.2)$$

$$\vec{q} \rightarrow \vec{b}, \quad (4.4.3)$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{k}_T. \quad (4.4.4)$$

Sendo então o princípio da incerteza assegurado por,

$$\sigma_b \sigma_{k_T} \geq \frac{1}{2}. \quad (4.4.5)$$

A equação [4.4.1] é escrita na representação da posição. Nas TQC's é usual a descrição dos operadores

na representação de *momentum* para que sejam aplicadas as regras de *Feynman*, para isso, basta uma transformação de *Fourier* bidimensional trivial. Além disso, a flutuação que respeita o princípio da incerteza na distribuição de *Wigner* na teoria quântica, tem seus vetores etiquetados a partir de $\pm\vec{x}/2$, aqui se utiliza $\pm\Delta/2$, com $\Delta^\mu = (0, 0, \vec{\Delta}_T)$, assim,

$$\int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \rightarrow \int \frac{d^2\Delta_T}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{\Delta}_T\cdot\vec{b}}, \quad (4.4.6)$$

lembrando que \vec{b} é o bi-vetor parâmetro de impacto. Agora o estado puro é representado por um hádron de quadri-*momentum* P^μ respeitado a limitação de incerteza mínima,

$$|\vec{q} - \vec{x}/2\rangle \rightarrow |P - \Delta/2\rangle, \quad (4.4.7)$$

$$\langle \vec{q} + \vec{x}/2 | \rightarrow \langle P + \Delta/2 |. \quad (4.4.8)$$

Por fim, resta a assimilação da matriz densidade. Ela é dada por,

$$\hat{\rho}(t) \rightarrow \int \frac{dz^- d^2z_T}{(2\pi)^3} e^{xP^+ z^- - \vec{k}_T \cdot \vec{z}_T} Tr\{F^{+\alpha}(z/2)U^{[+]}F_\alpha^+(-z/2)U^{[-]}\}, \quad (4.4.9)$$

A transformação de *Fourier* ocorre pelos mesmos motivos da substituição da integral em \vec{x} , contudo agora ela é realizada nas variáveis do cone de luz que são brevemente discutidas no apêndice C. $F^{+\alpha}$ é o tensor do campo de cor e $U^{[\pm]}$ são as linhas de *Wilson* de forma U que mantém os operadores invariantes de calibre (para uma discussão, veja a referência [90]). As linhas de *Wilson* aqui tratadas são representadas na Fig. [4.4].



Figura 4.4: Linhas de *Wilson* nas variáveis do cone de luz. Em (a) tem-se $U^{[+]}$ e em (b) $U^{[-]}$.

Assim, a distribuição de *Wigner* na QCD pode ser escrita na forma,

$$W(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \int \frac{dz^- d^2z_T}{(2\pi)^3} \frac{d^2\Delta_T}{(2\pi)^2} e^{-i(xP^+ z^- + \vec{k}_T \cdot \vec{z}_T + \vec{\Delta}_T \cdot \vec{b})} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| Tr\left\{F^{+\alpha}\left(\frac{z}{2}\right)U^{[+]}F_\alpha^+\left(-\frac{z}{2}\right)U^{[-]}\right\} \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle. \quad (4.4.10)$$

Ainda é possível escrever a equação de uma forma que melhor se adéque a entropia por unidade rapidez, sendo $xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T)$ dada por,

$$xW = \int \frac{dz^- d^2z_T}{P^+(2\pi)^3} \frac{d^2\Delta_T}{(2\pi)^2} e^{-i(xP^+ z^- + \vec{k}_T \cdot \vec{z}_T)} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| Tr\left\{F^{+\alpha}\left(\vec{b} + \frac{z}{2}\right)U^{[+]}F_\alpha^+\left(\vec{b} - \frac{z}{2}\right)U^{[-]}\right\} \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle. \quad (4.4.11)$$

A equação [4.4.11] auxiliará na construção da entropia de *Wehrl*, mas antes de prosseguir é válida a discussão de algumas das propriedades desta distribuição a fim de facilitar a interpretação dos resultados posteriormente. A expressão [4.4.10] descreve uma distribuição no espaço de fase transversal sendo a posição \vec{b} e *momentum* \vec{k}_T

dos quarks carregando uma parcela x do *momentum* longitudinal, sendo considerada portando uma distribuição informativa no tratamento das grandezas relacionadas aos quarks na QCD. Se é realizada a integração em relação a \vec{b} obtém-se a TMD $T(x, \vec{k}_T)$; integrando em relação a \vec{k}_T obtém-se a GPD $G(x, \vec{b})$. Dela também é possível obter a distribuição relacionada ao *momentum* angular orbital canônico do núcleon polarizado longitudinalmente,

$$L_W = \int dx d^2 b d^2 k_T (\vec{b} \times \vec{k}_T) W(x, \vec{b}, \vec{k}_T). \quad (4.4.12)$$

A distribuição de *Husimi* na QCD é dada por,

$$xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 b' d^2 k'_T e^{-(\vec{b}-\vec{b}')^2/\ell^2 - \ell^2(\vec{k}_T-\vec{k}'_T)^2} xW(x, \vec{b}', \vec{k}'_T), \quad (4.4.13)$$

sendo ℓ um parâmetro arbitrário com dimensões de comprimento[‡]. A equação [4.4.13] aparenta ser uma extensão precisa da distribuição de *Husimi* na linguagem das TQC's, contudo a sua positividade não é garantida *a priori*, devido ao recuo de *momentum* $\Delta_T \neq 0$, fazendo com que sempre exista uma diferença entre os estados iniciais e finais. A referência [89] discute alguns pontos do uso da expressão [4.4.13]. Além disso vale esclarecer a positividade da distribuição de *Husimi* como uma hipótese de trabalho. Então é possível escrever a entropia de *Wehrl* na QCD,

$$S_W(x) \equiv - \int d^2 b d^2 k_T xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) \ln[xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T)], \quad (4.4.14)$$

e também mantém-se a definição de $\bar{S}_W(x)$, utilizando a distribuição de *Wigner*,

$$\bar{S}_W(x) \equiv - \int d^2 b d^2 k_T xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T) \ln[xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T)], \quad (4.4.15)$$

Um exemplo trivial é um quark movendo-se na direção positiva de z . A distribuição de *Husimi* e *Wigner* com $x = 1$ é,

$$xH(\vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{e^{-b^2/\ell^2 - \ell^2 k_T^2}}{\pi^2}, \quad (4.4.16)$$

$$xW(\vec{b}, \vec{k}_T) = \delta^{(2)}(\vec{b}) \delta^{(2)}(\vec{k}_T). \quad (4.4.17)$$

Mesmo que a distribuição de *Wigner* seja positiva definida, o seu logaritmo não faz sentido, então a entropia de *Wehrl* é obtida a partir da equação [4.4.14],

$$S_W = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 b d^2 k_T e^{-b^2/\ell^2 - \ell^2 k_T^2} \left(\frac{b^2}{\ell^2} + \ell^2 k_T^2 \right) = 2. \quad (4.4.18)$$

O fato desta entropia não desaparecer reflete a inability de definir precisamente a posição e o *momentum* dos glúons.

[‡]Em alguns casos utiliza-se ℓ como R_h , sendo este o raio hadrônico. Outra escolha é $\ell^2 = 1/\langle \vec{k}_T^2 \rangle$. A referência [89] estabelece uma possível conexão com a física de altas energias onde $\ell = 1/Q_s$.

4.5 A ENTROPIA DE *Wehrl* PARA OS PÁRTONS

Nesta seção, aplica-se o regime de altas energias para as construções estabelecidas anteriormente nas distribuições de *Wigner* e de *Husimi*. Inicialmente, neste regime, [4.4.11] pode ser escrita na forma [91]:

$$xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{2N_c}{\alpha_s(2\pi)^2} \int \frac{d^2 r_T}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{r}_T} \left(\frac{\partial}{\partial b^2} b^2 \frac{\partial}{\partial b^2} + k_T^2 \right) \hat{\mathcal{S}}(x, \vec{b}, \vec{r}_T). \quad (4.5.1)$$

Aqui, $\hat{\mathcal{S}}$ é a matriz-S de um dipolo de tamanho \vec{r}_T com um parâmetro de impacto \vec{b} espalhando com o hádron de interesse. Em geral, [4.5.1] não é positiva definida devido as derivadas em relação a \vec{b} envolvidas. Utilizando o formalismo GBW para construir o *ansatz* gaussiano,

$$\hat{\mathcal{S}} = e^{\frac{1}{4} r_T^2 Q_{sb}^2(x, \vec{b})}. \quad (4.5.2)$$

Dessa forma, é possível dividir a expressão [4.5.1] em duas integrais,

$$xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{2N_c}{\alpha_s(2\pi)^2} \times \left[\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 r_T e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{r}_T} \frac{\partial}{\partial b^2} b^2 \frac{\partial}{\partial b^2} e^{\frac{1}{4} r_T^2 Q_s^2(x, \vec{b})}}_I + \underbrace{\frac{k_T^2}{(2\pi)^2} \int d^2 r_T e^{i\vec{k}_T \cdot \vec{r}_T} e^{\frac{1}{4} r_T^2 Q_{sb}^2(x, \vec{b})}}_{II} \right]. \quad (4.5.3)$$

Para resolver a integral [II], são consideradas as definições,

$$\vec{k}_T = (k_1, k_2) \quad \therefore \quad k_T^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad (4.5.4)$$

$$\vec{r}_T = (r_1, r_2) \quad \therefore \quad r_T^2 = r_1^2 + r_2^2, \quad (4.5.5)$$

Assim,

$$\frac{k_T^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} dr_2 e^{i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} e^{-(r_1^2 + r_2^2) Q_{sb}^2/4} = \frac{k_T^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 e^{i k_1 r_1 - r_1^2 Q_{sb}^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} dr_2 e^{i k_2 r_2 - r_2^2 Q_{sb}^2/4}. \quad (4.5.6)$$

Completando os quadrados do argumento nos integrandos é possível escrever a forma,

$$\frac{k_T^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dr_1 \int_{-\infty}^{\infty} dr_2 e^{i(k_1 r_1 + k_2 r_2)} e^{-(r_1^2 + r_2^2) Q_{sb}^2/4} = \frac{k_T^2}{(2\pi)^2} e^{-k^2/Q_{sb}^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-Q_{sb}^2 (w - 2ik/Q_{sb}^2)^2/4} \right]^2. \quad (4.5.7)$$

As variáveis de integração eram mudas, de forma que foram substituídas por w . Agora, sabendo que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(v+h)^2} dv = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (4.5.8)$$

tendo então para [II],

$$\frac{k_T^2}{\pi Q_{sb}^2} e^{-k_T^2/Q_{sb}^2}. \quad (4.5.9)$$

Realizando exatamente os mesmo passos para a integral [I] da equação [4.5.3], obtém-se,

$${}_xW(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{2N_c}{\alpha_s(2\pi)^2} \left(\frac{\partial}{\partial b^2} b'^2 \frac{\partial}{\partial b^2} + k_T^2 \right) \frac{e^{-k_T^2/Q_{sb}^2}}{\pi Q_{sb}^2}. \quad (4.5.10)$$

Contudo, esta equação não é positiva definida. Logo, a fim de se obter uma representação coerente para a entropia, é necessário realizar a transformação [4.4.13]. Então,

$$\begin{aligned} {}_xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) &= \frac{N_c}{2\alpha_s\pi^5} \int d^2 b' e^{-\frac{(\vec{b}-\vec{b}')^2}{\ell^2}} \int d^2 k'_T e^{-\ell^2(\vec{k}-\vec{k}')^2} \left(\frac{\partial}{\partial b'^2} b'^2 \frac{\partial}{\partial b'^2} + k'^2 \right) \frac{e^{-\frac{k'^2}{Q_{sb}^2}}}{Q_{sb}^2} \\ &= \frac{N_c}{2\alpha_s\pi^5} \int d^2 b' e^{-\frac{(\vec{b}-\vec{b}')^2}{\ell^2}} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\partial}{\partial b'^2} b'^2 \frac{\partial}{\partial b'^2} \frac{1}{Q_{sb}^2} \underbrace{\int d^2 k' e^{-\ell^2(\vec{k}-\vec{k}')^2 - \frac{k'^2}{Q_{sb}^2}}}_{III} + \frac{1}{Q_{sb}^2} \underbrace{\int d^2 k' k'^2 e^{-\ell^2(\vec{k}-\vec{k}')^2 - \frac{k'^2}{Q_{sb}^2}}}_{IV} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

A integral [IV] pode ser escrita na forma,

$$\begin{aligned} IV &= \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 e^{-\frac{k_1'^2}{Q_{sb}^2}} e^{-\ell^2(k_1-k_1')^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 (k_1'^2 + k_2'^2) e^{-\frac{k_2'^2}{Q_{sb}^2}} e^{-\ell^2(k_2-k_2')^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 e^{-\frac{k_1'^2}{Q_{sb}^2}} e^{-\ell^2(k_1-k_1')^2} \left[\underbrace{k_1'^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 e^{-\frac{k_2'^2}{Q_{sb}^2}} e^{-\ell^2(k_2-k_2')^2}}_V + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk'_2 k_2'^2 e^{-\frac{k_2'^2}{Q_{sb}^2}} e^{-\ell^2(k_2-k_2')^2}}_{VI} \right] \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Realizando o conjunto de definições,

$$a \equiv \frac{1 + \ell^2 Q_{sb}^2}{Q_{sb}^2}, \quad (4.5.13)$$

$$b_n = 2\ell^2 k_n, \quad b_1^2 + b_2^2 = 4\ell^4 k^2 \equiv b^2, \quad (4.5.14)$$

$$c_n \equiv -\ell^2 k_n^2, \quad c_1 + c_2 = -\ell^2 k^2 \equiv c, \quad (4.5.15)$$

Aqui, b é simplesmente um parâmetro e não deve ser confundido com o bi-vetor \vec{b} . Além disso, considera-se,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} e^c. \quad (4.5.16)$$

e,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2+bx+c} = -\frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} e^c = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} e^c \left(\frac{1}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \right). \quad (4.5.17)$$

Utilizando a integral gaussiana [4.5.16] em [V] e [4.5.17] em [VI], [4.5.12] toma a forma,

$$\begin{aligned}
 IV &= \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 e^{-\frac{k_1'^2}{Q_{sb}^2}} e^{-\ell^2(k_1-k'_1)^2} \left[k_1'^2 \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b_2^2/4a} e^{c_2} + \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b_2^2/4a} e^{c_2} \left(\frac{1}{2a} + \frac{b_2^2}{4a^2} \right) \right] \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b_2^2/4a} e^{c_2} \left[\left(\frac{1}{2a} + \frac{b_2^2}{4a^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+b_1x+c_1} + \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2+b_1x+c_1} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b_2^2/4a} e^{c_2} \left[\left(\frac{1}{2a} + \frac{b_2^2}{4a^2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b_1^2/4a} e^{c_1} + \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b_1^2/4a} e^{c_1} \left(\frac{1}{2a} + \frac{b_1^2}{4a^2} \right) \right] \\
 &= \frac{\pi}{a} e^{b^2/4a} e^c \left(\frac{1}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

Utilizando o mesmo método para a integral [III] (eq. [4.5.11]), em especial, a integral gaussiana [4.5.16], obtém-se,

$$III = \frac{\pi}{a} e^{b^2/4a} e^c. \tag{4.5.19}$$

Substituindo estas integrais na expressão [4.5.11], encontra-se,

$$xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{N_c e^{-\ell^2 k_T^2}}{2\alpha_s \pi^4} \int d^2 b' e^{-\frac{(\vec{b}-\vec{b}')^2}{\ell^2}} \left[\frac{\partial}{\partial b'^2} b'^2 \frac{\partial}{\partial b'^2} + \frac{Q_{sb}^2}{1 + \ell^2 Q_{sb}^2} + \frac{Q_{sb}^4 \ell^4 k^2}{(1 + \ell^2 Q_{sb}^2)^2} \right] \frac{e^{\frac{Q_{sb}^2 \ell^4 k^2}{1 + \ell^2 Q_{sb}^2}}}{1 + \ell^2 Q_{sb}^2}. \tag{4.5.20}$$

Observando o integrando da equação [4.5.20], são definidas as funções,

$$F(b'^2) \equiv \frac{\partial}{\partial b'^2} b'^2 \frac{\partial}{\partial b'^2} \frac{e^{Q_{sb}^2 \ell^4 k^2 / (1 + \ell^2 Q_{sb}^2)}}{1 + \ell^2 Q_{sb}^2}, \tag{4.5.21}$$

$$G(b'^2) \equiv \frac{Q_{sb}^2}{(1 + \ell^2 Q_{sb}^2)^2} e^{Q_{sb}^2 \ell^4 k^2 / (1 + \ell^2 Q_{sb}^2)}, \tag{4.5.22}$$

e

$$H(b'^2) \equiv \frac{Q_{sb}^4}{(1 + \ell^2 Q_{sb}^2)^3} e^{Q_{sb}^2 \ell^4 k^2 / (1 + \ell^2 Q_{sb}^2)} \tag{4.5.23}$$

Utilizando da figura [4.5], nota-se que a contribuição dos termos $F(b'^2)$ e $H(b'^2)$ podem ser negligenciados frente a $G(b'^2)$, de forma que,

$$xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{N_c}{2\alpha_s \pi^4} \int d^2 b' \frac{Q_{sb}^2}{(1 + \ell^2 Q_{sb}^2)^2} e^{-k_T^2 \ell^2 / (1 + \ell^2 Q_{sb}^2) - (\vec{b}-\vec{b}')^2 / \ell^2} \tag{4.5.24}$$

Além disso, a figura [4.5] também revela que $G(b'^2)$ tem apenas um máximo global em $b' = 0$ e que a distribuição de *Husimi* é positiva definida. Utilizando desta informação e da forma do integrando, é possibilitada então o uso da *integração por ponto de sela* (Apêndice E), obtendo a forma,

$$\int d^2 b' \frac{Q_{sb}^2}{(1 + \ell^2 Q_{sb}^2)^2} e^{-k_T^2 \ell^2 / (1 + \ell^2 Q_{sb}^2) - (\vec{b}-\vec{b}')^2 / \ell^2} \approx 2\ell^2 \pi \frac{Q_s^2}{(1 + \ell^2 Q_s^2)^2} e^{-k_T^2 \ell^2 / (1 + \ell^2 Q_s^2) - b^2 / \ell^2}. \tag{4.5.25}$$

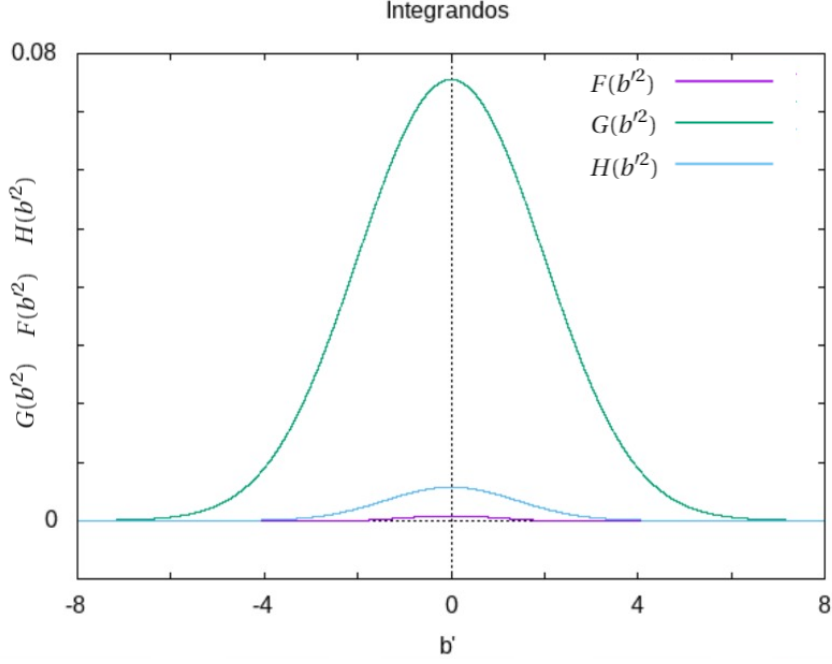


Figura 4.5: Integrandos da equação [4.5.20] analisado unidimensionalmente.

Justamente devido ao fato de $Q_{sb}(x, b = 0) = Q_s(x)$. Então, obtém-se distribuição de *Humisi*,

$$xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{N_c}{\alpha_s \pi^3} \frac{\ell^2 Q_s^2}{(1 + \ell^2 Q_s^2)^2} e^{-k_T^2 \ell^2 / (1 + \ell^2 Q_s^2) - b^2 / \ell^2}. \quad (4.5.26)$$

É possível utilizar a expressão [4.5.26] para computar a entropia de Wehrl [4.4.14],

$$S_W(x) = - \frac{N_c}{\alpha_s \pi^3} \frac{\ell^2 Q_s^2}{(1 + \ell^2 Q_s^2)^2} \int d^2 b d^2 k_T e^{-b^2 / \ell^2} e^{-\ell^2 k_T^2 / (1 + \ell^2 Q_s^2)} \ln x H. \quad (4.5.27)$$

Agora, avaliando $-\ln x H$ separadamente para obter os resultados,

$$-\ln x H = \ln \left[\frac{\alpha_s \pi^3}{N_c} \frac{(1 + \ell^2 Q_s^2)^2}{\ell^2 Q_s^2} \right] + \frac{b^2}{\ell^2} + \frac{\ell^2 k_T^2}{1 + \ell^2 Q_s^2}, \quad (4.5.28)$$

resultando em três integrais,

$$\int d^2 b d^2 k_T \frac{b^2}{\ell^2} e^{-b^2 / \ell^2} e^{-\ell^2 k_T^2 / (1 + \ell^2 Q_s^2)} = \pi^2 (1 + \ell^2 Q_s^2), \quad (4.5.29)$$

$$\int d^2 b d^2 k_T e^{-b^2 / \ell^2} \frac{\ell^2 k_T^2}{(1 + \ell^2 Q_s^2)} e^{-\ell^2 k_T^2 / (1 + \ell^2 Q_s^2)} = \pi^2 (1 + \ell^2 Q_s^2), \quad (4.5.30)$$

e,

$$\int d^2 b d^2 k_T e^{-b^2/\ell^2} e^{-\ell^2 k_T^2/(1+\ell^2 Q_s^2)} \ln \left[\frac{\alpha_s \pi^3 (1+\ell^2 Q_s^2)^2}{N_c \ell^2 Q_s^2} \right] = \pi^2 (1+\ell^2 Q_s^2) \ln \left[\frac{\alpha_s \pi^3 (1+\ell^2 Q_s^2)^2}{N_c \ell^2 Q_s^2} \right]. \quad (4.5.31)$$

Por fim, obtém-se,

$$S_W(x) = \frac{N_c}{\alpha_s \pi} \frac{\ell^2 Q_s^2}{1+\ell^2 Q_s^2} \left\{ 2 + \ln \left[\frac{\alpha_s \pi^3 (1+\ell^2 Q_s^2)^2}{N_c \ell^2 Q_s^2} \right] \right\}, \quad (4.5.32)$$

a entropia de *Wehrl* para os pártons. A fig. [4.6] mostra o comportamento das entropias estipuladas até o momento para alguns valores de ℓ , junto da entropia de *von Neumann* anteriormente computada.

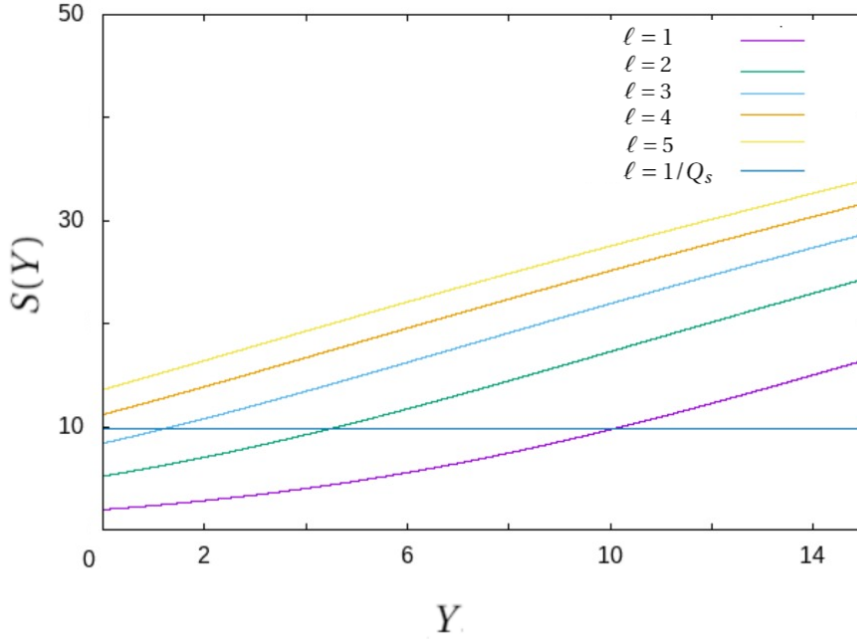


Figura 4.6: A liberdade quanto ao parâmetro ℓ foi explorada, tendo $\ell = 1$ na curva lilás, $\ell = 2$ na curva verde, $\ell = 3$ na curva ciano, $\ell = 4$ na curva laranja, $\ell = 5$ na curva amarela e por fim, azul na curva com $\ell = 1/Q_s(Y)$. Nesse caso, a entropia independe de Y . O parâmetro ℓ tem unidades de comprimento GeV^{-1} .

4.6 O LIMITE ASSINTÓTICO DA ENTROPIA DE WEHRL

Boa parte da literatura que atualmente estuda o comportamento da entropia partônica é concentrada nos limites assintóticos. Um desses casos será aqui desenvolvido, de onde o ponto de partida é a expressão [4.5.20],

$$xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{N_c}{2\alpha_s \pi^4} \int d^2 b' e^{-(\vec{b}-\vec{b}')^2/\ell^2} \left[\frac{\partial}{\partial b'^2} b'^2 \frac{\partial}{\partial b'^2} + \frac{Q_{sb}^2}{1+\ell^2 Q_{sb}^2} + \frac{Q_{sb}^4 \ell^4 k^2}{(1+\ell^2 Q_{sb}^2)^2} \right] \frac{e^{-k_T^2 \ell^2/(1+\ell^2 Q_{sb}^2)}}{(1+\ell^2 Q_{sb}^2)}. \quad (4.6.1)$$

Agora, a principal consideração é a de que $\ell^2 Q_s^2 \gg 1$. Neste caso, a função $H(b'^2)$ não pode mais ser

desprezada e obtém-se a forma,

$$xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{N_c}{2\alpha_s \pi^4} \int d^2 b' e^{-(\vec{b}-\vec{b}')^2/\ell^2} \left(\frac{1}{\ell^4 Q_{sb}^2} + \frac{k_T^2}{\ell^2 Q_{sb}^2} \right) e^{-k_T^2/Q_{sb}^2}, \quad (4.6.2)$$

onde as derivadas em relação a b' foram negligenciadas. Agora, utilizando $Q_{sb}^2 \approx Q_s^2$ e realizando a integração em b' , tem-se,

$$xH \approx F(k_T^2/Q_s^2, b) \quad (4.6.3)$$

Então a entropia de *Wehrl* é,

$$S_W = - \int d^2 b d^2 k_T F \ln F \quad (4.6.4)$$

Mudando as variáveis de integração,

$$\tau \equiv k_T^2/Q_s^2, \quad \therefore \quad d^2 k_T = Q_s^2 d\tau. \quad (4.6.5)$$

Assim, obtém-se,

$$S_W = -Q_s^2 \int d^2 b d\tau F \ln F \sim Q_s^2(x). \quad (4.6.6)$$

Sendo este resultado coerente com o obtido na referência [88].

Neste capítulo obteve-se expressões para as entropias de *von Neumann* e *Wehrl*. É possibilitada agora a análise dessas funções dando significado físico ao parâmetro ℓ e focando a atenção em energias que possam ser obtidas atualmente, para Y numa faixa entre 2 e no máximo 10.

Capítulo 5

Conclusões

O primeiro cálculo da entropia partônica considerou um hádron num espalhamento profundo inelástico, que em altas energias revela a sua estrutura interna gerando uma miríade de pártons. Assim, a região espacial ocupada pelo hádron é separada em duas, sendo a primeira etiquetada por A : região onde o hádron é sondado pelo espalhamento profundo inelástico e B : o restante do hádron. A partir desta divisão, considerou-se que elas estariam emaranhadas e analisando os estados físicos da região em que ocorre o espalhamento, é possível calcular a entropia de emaranhamento.

Para calcular esta entropia, foi necessário resolver a equação [4.3.1], obtendo $P_n(Y, \{r_n\})$, sendo interpretada como a probabilidade de se medir um estado físico com n -pártons ou dipolos. Para valores apreciados em uma rapidez $Y > 2$, obteve-se uma entropia de emaranhamento dada por,

$$S(Y) = \bar{\alpha}_s \omega Y, \quad (5.0.1)$$

onde ω esta relacionado com a probabilidade de se ter apenas um dipolo. É possível estabelecer uma conexão com a versão unidimensional do mesmo problema. Neste caso a entropia tomou a forma,

$$S(Y) = \omega_0 Y. \quad (5.0.2)$$

A junção das interpretações destes resultados unidos de dados obtidos a partir da Fig. [4.2] favorece o resultado de entropia máxima onde todos os estados são equiprováveis ilustrando pictoricamente a Fig. [5.1], onde na medida em que a entropia avança rumo ao regime de altas energias, o párton tem igual probabilidade de decair em n dipolos.

Outra abordagem para o cômputo de uma entropia partônica estudada neste trabalho, se da na obtenção das distribuições de *Wigner* ou *Husimi* do hádron, a fim de se construir uma aproximação de um espaço de fase, tendo como vantagem neste modelo o fato de que não é mais necessário considerar o emaranhamento, sendo esta a entropia de *Wehrl*. O uso desta abordagem resultou na equação [4.5.1].

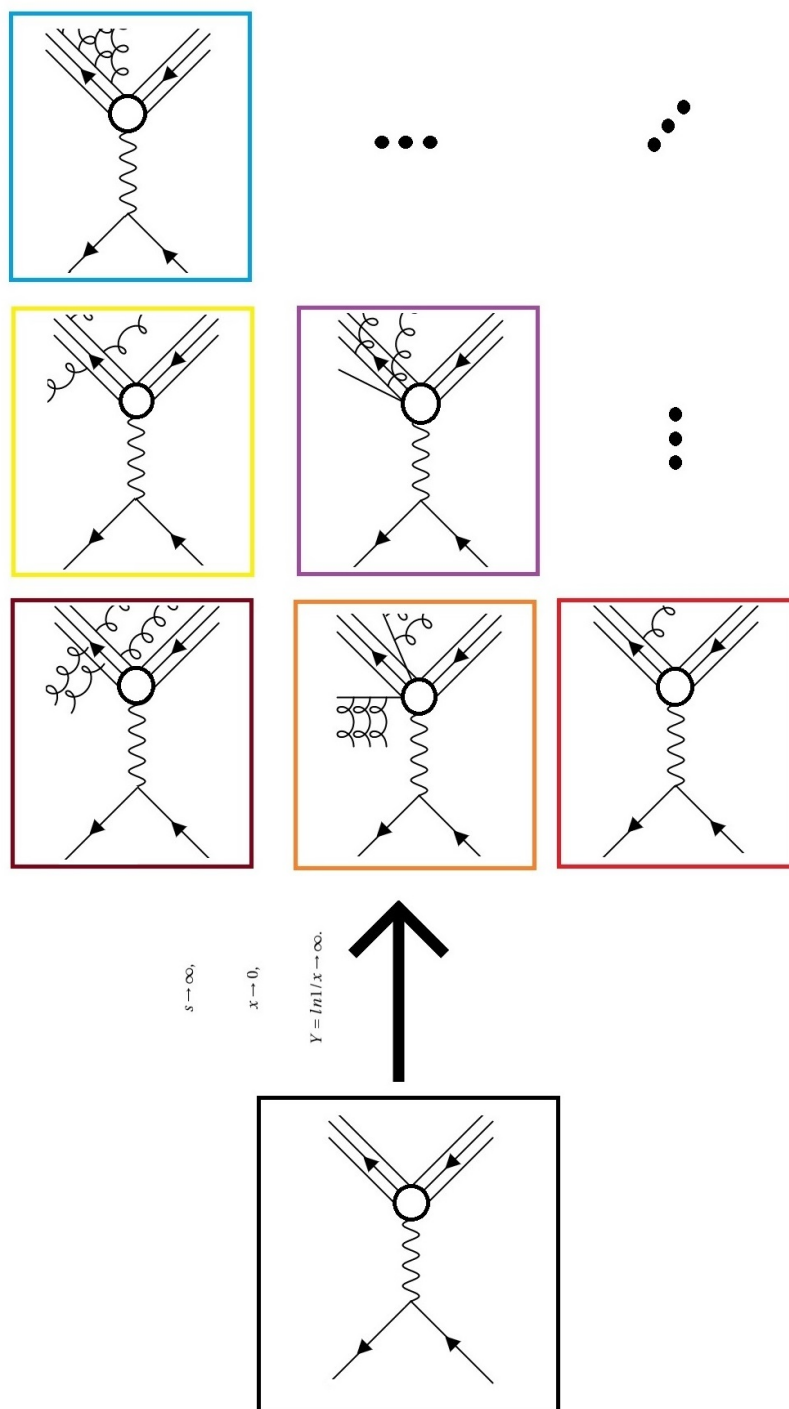


Figura 5.1: Representação da equiprobabilidade dos estados quânticos na entropia de *von Neumann* para os pártons. Inicialmente, em baixas energias o hádron pai não apresenta estrutura interna, e o espalhamento pode ser analisado a partir da QED. Conforme aumenta-se a energia, diminuindo o comprimento de onda do fóton virtual, a estrutura interna se revela. O caso se torna maximamente entrópico no limite das altas energias, onde não mais é possível estabelecer qual será o estado final do sistema, maximizando o caos.

Utilizando o formalismo GBW, considerou-se para a matriz-S deste sistema o *ansatz*,

$$\hat{\mathcal{P}} = e^{\frac{1}{4} r_T^2 Q_{sb}^2(x, \vec{b})}. \quad (5.0.3)$$

A partir disto, percebeu-se que a distribuição de *Wigner* adjacente não era positiva definida, complicando a definição de um espaço de fase. A fim de ajustar essa deficiência, fez-se uso da transformação de *Weistrass* [4.4.13] para obter a distribuição de *Husimi*,

$$xH(x, \vec{b}, \vec{k}_T) = \frac{N_c e^{-\ell^2 k_T^2}}{2\alpha_s \pi^4} \int d^2 b' e^{-\frac{(\vec{b}-\vec{b}')^2}{\ell^2}} [F(b'^2) + G(b'^2) + H(b' r)], \quad (5.0.4)$$

com,

$$F(b'^2) \equiv \frac{\partial}{\partial b'^2} b'^2 \frac{\partial}{\partial b'^2} \frac{e^{Q_{sb}^2 \ell^4 k^2 / (1 + \ell^2 Q_{sb}^2)}}{1 + \ell^2 Q_{sb}^2}, \quad (5.0.5)$$

$$G(b'^2) \equiv \frac{Q_{sb}^2}{(1 + \ell^2 Q_{sb}^2)^2} e^{Q_{sb}^2 \ell^4 k^2 / (1 + \ell^2 Q_{sb}^2)}, \quad (5.0.6)$$

e

$$H(b'^2) \equiv \frac{Q_{sb}^4}{(1 + \ell^2 Q_{sb}^2)^3} e^{Q_{sb}^2 \ell^4 k^2 / (1 + \ell^2 Q_{sb}^2)} \quad (5.0.7)$$

O cálculo numérico das expressões acima revelou não só que todas as curvas são centradas em $\vec{b}' = \vec{0}$, como que $F(b'^2)$ e $H(b'^2)$ pouco contribuem na integração em \vec{b}' , de forma que utilizando a integração por ponto de sela na expressão restante, resultou na entropia de *Wehrl* dada por,

$$S_W(x) = \frac{N_c}{\alpha_s \pi} \frac{\ell^2 Q_s^2}{1 + \ell^2 Q_s^2} \left\{ 2 + \ln \left[\frac{\alpha_s \pi^3}{N_c} \frac{(1 + \ell^2 Q_s^2)^2}{\ell^2 Q_s^2} \right] \right\}. \quad (5.0.8)$$

Resta agora uma análise do parâmetro ℓ que é introduzido a partir da transformação. Para isso, substituí-se valores que seriam apropriados com o caso físico investigado. Por exemplo, utilizando $\ell = 1 \text{ GeV}^{-1}$, sendo esta escolha na faixa de valores compatíveis com as escalas de comprimento na física dos hádrons. Outra substituição seria o raio médio dos hádrons R_h sendo aproximadamente 5 GeV^{-1} .

Uma escolha natural para as distribuições gluônicas em altas energias é $\ell = 1/Q_s$, pois Q_s é justamente a escala onde os glúons são tratados coerentemente como um campo clássico. Neste caso a entropia será máxima e constante,

$$S_W(x) = \frac{N_c}{2\alpha_s \pi} \left[2 + \ln \left(\frac{4\alpha_s \pi^3}{N_c} \right) \right] \approx 9,82 \quad (5.0.9)$$

A Fig. [5.2] mostra o comportamento destes resultados para energias realistas junto da entropia de *von Neumann*. Com o aumento da energia, tanto o caso em que $\ell = 1 \text{ GeV}^{-1}$ e S_{vN} tendem a entropia máxima do caso $\ell = 1/Q_s$. O uso de $\ell = R_H$ faz com que a entropia aumente abruptamente. Este comportamento reflete o fato de que a escolha de ℓ deve ser estar em conformidade com o princípio da incerteza,

$$\sigma_b \sigma_k \geq \frac{1}{2}, \quad (5.0.10)$$

assim, utilizando um calibre da ordem do raio do hádron, perde-se resolução na sonda, a multiplicidade aumenta e a entropia sofre um aumento abrupto.

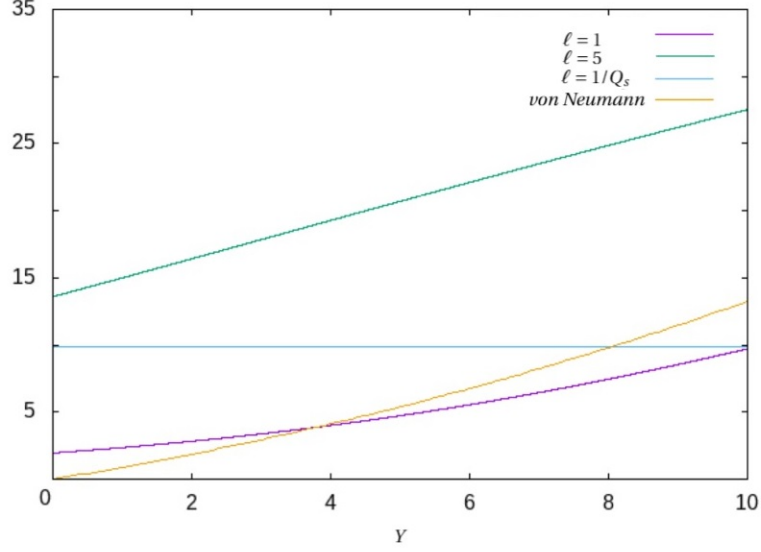


Figura 5.2: A entropia de emaranhamento quântica de *von Neumann* em amarelo, junto da entropia de *Wehrl* com $\ell = 1$ GeV^{-1} em lilás, $\ell = R_h \sim 5 \text{GeV}^{-1}$ em verde e o caso especial para os glúons em ciano, sendo $\ell = 1/Q_s$.

Os resultados obtidos abaixo da faixa de saturação $\ell = 1/Q_s$ estão de acordo com outros trabalhos já realizados como por exemplo [92].

Atualmente, tem-se questionado o tratamento da entropia a partir do emaranhamento, como por exemplo, na referência [93]. Nesta abordagem, os autores defendem que as medidas relativas a um DIS no modelo a pártons não é completa, e é verdade, ao tratar a entropia a partir do emaranhamento, a parte não sondada pelo DIS fora somada na parte medida a partir do traço parcial. Assim, não seria possível construir uma matriz densidade com toda a informação.

Além disso, num DIS, a única quantidade que pode ser medida é o número médio de partículas

$$\langle N \rangle = \text{Tr} \left[\int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) \hat{\rho} \right] \quad (5.0.11)$$

Estendendo as quantidades para as TMD's, só é possível medir a densidade média de partículas com um número fixo de *momentum* transversal em todos os casos possíveis. Todos esses observáveis serão diagonais na base do operador número e podem não carregar informações a respeito dos elementos fora da diagonal, fazendo então com que exista um número infinito de matrizes densidade análogas para uma descrição limitada dos resultados das medidas.

Os autores desta perspectiva percebem que essa limitação pode ela mesma, de forma mais geral, ser associada a uma entropia, a qual nomearam por *entropia de ignorância*, onde, de forma geral, consideram uma situação onde em princípio pode-se medir o conjunto de variáveis $\{O_i\}$ que não é completo, que não contém todas as variáveis do sistema. Então a matriz densidade que reproduz os resultados deste conjunto de variáveis é $\hat{\rho}_I(\alpha_j)$, sendo parametrizada pelo conjunto $\{\alpha_j\}$ que corresponde aos possíveis valores dos observáveis não incluídos em $\{O_i\}$. Então, para cada matriz densidade associada se tem uma entropia de *von Neumann*,

$$S(\alpha) = -\text{Tr}[\hat{\rho}(\alpha) \ln \hat{\rho}(\alpha)]. \quad (5.0.12)$$

Então a entropia de ignorância seria aquela que maximiza $S(\alpha)$ em respeito a variação de α ,

$$S_I = -Tr[\hat{\rho}_I(\bar{\alpha}) \ln \hat{\rho}_I(\bar{\alpha})], \quad (5.0.13)$$

onde,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} S(\alpha)|_{\bar{\alpha}} = 0. \quad (5.0.14)$$

Esta leitura difere consideravelmente da abordagem adotada neste trabalho e confirma o que o próprio *Wehrl* já tinha escrito em 1979 [71],

"(...) there is a tremendous variety of entropylike quantities, especially in the classical case, and perhaps every month somebody invents a new one." [têm-se uma variedade enorme de quantidades entrópicas, especialmente nos casos clássicos, talvez em todo mês alguém inventará uma nova.]

Obviamente, as noções entrópicas mais adequadas poderão ser estabelecidas a partir de medidas experimentais que confirmem o fenômeno ou de dados para que as noções aqui estudadas (e as que ainda virão a ser definidas) possam ser comparadas a fim de se obter qual é o caso que melhor descreve o hádron e os pártons.

Apêndice A

Variáveis de Mandelstam

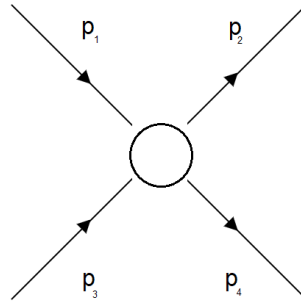


Figura A.1: Duas partículas com *momenta* p_1 e p_2 interagem de alguma forma espalhando-se com *momenta* p_3 e p_4 .

As variáveis de *Mandelstam* são quantidades numéricas que relacionam energia, *momentum* e os ângulos de espalhamento aos quais as partículas envolvidas se submetem (Fig.[A.1]) sendo estas *invariantes de Lorentz*. Utilizando a métrica de *Minkowski* (+, -, -, -), as variáveis s, t, u são definidas como,

- $s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$;
- $t \equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$;
- $u \equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2$,

sendo p_1 e p_2 os quadri-*momenta* das partículas incidentes e p_3 e p_4 os quadri-*momenta* das partículas espalhadas. Estas variáveis são equivalentes a algumas quantidades físicas de interesse envolvidas no processo de espalhamento: s é o quadrado da energia de centro de massa, $s = \sqrt{E_{cm}}$ e t é o quadrado do *momentum* transferido.

Estas variáveis possuem algumas propriedades interessantes, como por exemplo, a sua soma, sendo equivalente a soma do quadrado das massas inerciais das partículas envolvidas no espalhamento,

$$s + t + u = \sum_i^4 m_i^2. \quad (\text{A.0.1})$$

No limite relativístico, é possível aproximar a relação energia-*momentum* com $E^2 \approx \vec{p} \cdot \vec{p}$, de forma que as variáveis de *Maldestam* assumam a forma,

- $s \approx 2p_1 \cdot p_2 = 2p_3 \cdot p_4$;
- $t \approx -2p_1 \cdot p_3 = -2p_2 \cdot p_4$;
- $u \approx -2p_1 \cdot p_4 = -2p_3 \cdot p_2$,

A Fig.[A.2] mostra a interpretação dos canais s, t e u em relação ao respectivo diagrama de *Feynman* envolvido.

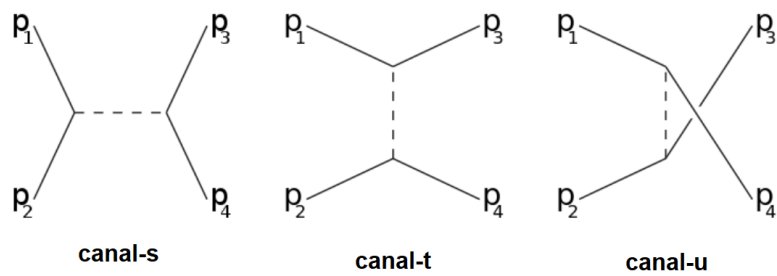


Figura A.2: Da esquerda para a direita, a representação relativa aos diagramas de *Feynman* respectiva ao canal s, t e u.

Apêndice B

Rapidez, massa transversa e *momentum* transverso

É usual no âmbito da teoria da relatividade restrita a identificação de grandezas que sejam covariantes com a transformada de *Lorentz* (Eq. [1.1.16]). Obviamente é possível reformular a mudança de referencial para qualquer direção de interesse, contudo, o fato de escolher um sistema onde a velocidade relativa entre os referenciais seja na direção de um eixo específico facilita não só cálculos mas principalmente os experimentos. Nesta seção assume-se um *boost* na direção do eixo z . A partir destas condições, caracteriza-se o *quadrimentum* P (em unidades naturais) na forma,

$$P = (E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \vec{p}_T, p_z). \quad (\text{B.0.1})$$

Ao bivector \vec{p}_T , da-se o nome de *momentum transverso*, contido no plano xy ,

$$\vec{p}_T \equiv (p_x, p_y), \quad \therefore p_T^2 = p_x^2 + p_y^2. \quad (\text{B.0.2})$$

Utilizando a relação de *de Broglie*,

$$p_T = k_T. \quad (\text{B.0.3})$$

O *momentum* transverso não se altera frente uma transformação de *Lorentz*, entretanto, a energia total de uma partícula e a componente do *momentum* paralela ao eixo z seguem a transformação,

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.4})$$

A relação energia-*momentum* é dada por,

$$E^2 = p^2 + m^2, \quad (\text{B.0.5})$$

contudo,

$$E^2 = p_T^2 + p_z^2 + m^2, \quad \therefore E^2 - p_z^2 = p_T^2 + m^2, \quad (\text{B.0.6})$$

Daí, surge a definição de um novo invariante de *Lorentz*, a *massa transversa* m_T , definida como,

$$m_T \equiv \sqrt{p_T^2 + m^2}. \quad (\text{B.0.7})$$

Outra grandeza relativística de interesse é o parâmetro hiperbólico, também chamado de *rapidez longitudinal* Y , tendo sua definição dada por,

$$Y \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right). \quad (\text{B.0.8})$$

Pode-se investigar as propriedades da rapidez no limite não relativístico, para isso, β toma a forma $\beta \equiv p_z/E$, então (B.0.8) é reescrita,

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{E(1 + p_z/E)}{E(1 - p_z/E)} \right\} = \frac{1}{2} [\ln(1 + \beta) - \ln(1 - \beta)]. \quad (\text{B.0.9})$$

Se $\beta \ll 1$, é possível utilizar as aproximações por séries de potências da função,

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{n+1}. \quad (\text{B.0.10})$$

Então,

$$Y \approx \frac{1}{2} \left\{ \left(\beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} \pm \dots \right) - \left(-\beta - \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{3} \pm \dots \right) \right\} \approx \beta + \frac{\beta^3}{6}. \quad (\text{B.0.11})$$

Sendo assim, no limite não relativístico, a rapidez converge para β :

$$Y \approx \beta. \quad (\text{B.0.12})$$

Seguindo na análise das grandezas introduzidas, é possível escrever a energia total E e o *momentum* transverso m_T em função da massa transversa e da rapidez. Para isso, realizando algumas manipulações algébricas em (B.0.8), obtêm-se,

$$e^{-Y} = \sqrt{\frac{E - p_z}{E + p_z}}, \quad \therefore \quad e^Y = \sqrt{\frac{E + p_z}{E - p_z}}. \quad (\text{B.0.13})$$

Agora,

$$e^Y \pm e^{-Y} = \sqrt{\frac{E + p_z}{E - p_z}} \pm \sqrt{\frac{E - p_z}{E + p_z}} = \frac{\sqrt{(E + p_z)(E + p_z) \pm \sqrt{(E - p_z)(E - p_z)}}}{\sqrt{E^2 + p_z^2}} = \frac{(E + p_z) \pm (E - p_z)}{m_T}. \quad (\text{B.0.14})$$

Então,

$$e^Y + e^{-Y} = \frac{2E}{m_T}, \quad \therefore \quad e^Y - e^{-Y} = \frac{2p_z}{m_T}. \quad (\text{B.0.15})$$

Logo,

$$E = m_T \cosh Y, \quad (\text{B.0.16})$$

e,

$$p_z = m_T \sinh Y. \quad (\text{B.0.17})$$

Sendo θ o ângulo entre o trivetor *momentum* \vec{p} e o eixo z , tem-se que $\cos\theta = \frac{p_z}{p}$, assim, partindo de (B.0.5),

$$E \pm p_z = \sqrt{p^2 + m^2} \pm p_z = p \sqrt{1 + \left(\frac{m}{p}\right)^2} \pm p_z. \quad (\text{B.0.18})$$

No limite relativístico, $m/p \ll 1$,

$$E \pm p_z \approx p \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{p}\right)^2 \right]. \quad (\text{B.0.19})$$

Então,

$$E + p_z \approx p(1 + p_z/p) = p(1 + \cos\theta) = 2p \cos^2(\theta/2). \quad (\text{B.0.20})$$

e

$$E - p_z \approx p(1 - p_z/p) = p(1 - \cos\theta) = 2p \sin^2(\theta/2). \quad (\text{B.0.21})$$

Substituindo as equações (B.0.20) e (B.0.21) na definição de Y ,

$$Y_{\beta \ll 1} \approx \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{\text{tg}(\theta/2)} \right]^2 = -\ln[\text{tg}(\theta/2)]. \quad (\text{B.0.22})$$

O último resultado da equação (B.0.22) é chamado de *pseudo-rapidez* η ,

$$\eta \equiv -\ln[\text{tg}(\theta/2)]. \quad (\text{B.0.23})$$

A pseudo-rapidez η é um ótimo parâmetro para determinar o sentido de propagação da partícula em relação ao ângulo polar θ . Sendo assim, classifica-se a pseudo-rapidez como *backward*, nos casos em que ($\eta < 0, \eta \rightarrow -\infty$) e como *forward* no caso em que ($\eta > 0, \eta \rightarrow \infty$).

Agora tendo o referencial S' uma velocidade relativa na direção z em relação ao referencial S , tem-se a rapidez Y' ,

$$Y' = \frac{1}{2} \ln F, \quad (\text{B.0.24})$$

com,

$$F = \frac{E' + p'_z}{E' - p'_z}. \quad (\text{B.0.25})$$

Realizando algumas operações em F ,

$$\frac{E' + p'_z}{E' - p'_z} = \frac{\gamma(E - \beta p_z) + \gamma(p_z - \beta E)}{\gamma(E - \beta p_z) - \gamma(p_z - \beta E)} \beta = \frac{(1 - \beta^2)(E + p_z)}{(1 + \beta^2)(E - p_z)}. \quad (\text{B.0.26})$$

Logo,

$$Y' = \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left[\frac{E + p_z}{E - p_z} \right]}_Y - \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right]}_{Y_\beta}. \quad (\text{B.0.27})$$

Interpreta-se a grandeza Y_β como a rapidez relativa entre os sistemas S e S' , podendo ser escrita de uma forma mais compacta,

$$Y = Y' + Y_\beta. \quad (\text{B.0.28})$$

Sendo assim, a diferença de rapidez ΔY é invariante sob *boosts*, uma vez que,

$$\Delta Y = \Delta Y'. \quad (\text{B.0.29})$$

Apêndice C

Variáveis do cone de luz

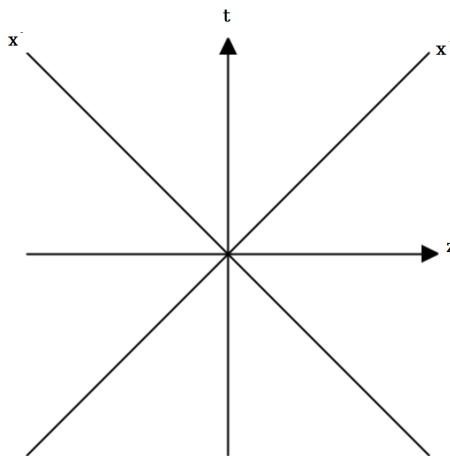


Figura C.1: Representação geométrica das variáveis do cone de luz.

O sistema de coordenadas das variáveis do cone de luz (Fig. [C.1]) são bem apropriados para a física de altas energias. Nele considera-se uma colisão no eixo z . Sendo a quadri-velocidade $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ e a quadri-posição $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, define-se,

$$v^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 + v^3), \quad (\text{C.0.1})$$

$$v^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 - v^3), \quad (\text{C.0.2})$$

e,

$$v_T \equiv (v^1, v^2). \quad (\text{C.0.3})$$

O tempo é definido como*,

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z). \quad (\text{C.0.4})$$

*Aqui t é a coordenada vertical do cone de luz (Fig. [C.1]) e não a variável de *Mandelstam* t do apêndice A.

A coordenada longitudinal x^- ,

$$x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z). \quad (\text{C.0.5})$$

Dessa forma, o produto escalar toma a forma,

$$p \cdot x = p^- x^+ + p^+ x^- - \vec{p}_T \cdot \vec{x}_T, \quad (\text{C.0.6})$$

daí,

$$p^- x^+ + p^+ x^- = p^0 x^0 - p^3 x^3. \quad (\text{C.0.7})$$

A variável p^- é conjugada ao tempo x^+ , sendo esta a *energia no referencial do cone de luz*, enquanto p^+ é conjugada a x^- , sendo este o *momentum longitudinal*.

Para a camada de massa,

$$p^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(E \pm p_z), \quad (\text{C.0.8})$$

tendo a propriedade,

$$p^+ p^- = \frac{1}{2} m_T. \quad (\text{C.0.9})$$

Por fim, a rapidez toma a forma,

$$Y = \ln \left(\frac{p^+}{m_T} \right). \quad (\text{C.0.10})$$

Apêndice D

O procedimento de *Gram-Schmidt*

O processo de *Gram-Schmidt* é um algoritmo simples para produzir uma base ortogonal ou ortonormal para qualquer sub-espaço não nulo. Sendo $\langle \phi_i^A | \otimes \langle \phi_j^B | = \langle \phi_i^A \phi_j^B |$ considere o produto interno,

$$\langle \phi_i^A \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle = \alpha_n \quad (\text{D.0.1})$$

com $|\alpha_n|^2 \neq 0$. Agora, sendo $|\phi_l^A\rangle \in \mathcal{H}_A, \exists |\phi_l^A\rangle \perp \langle \phi_l^A |$ e ϵ um número complexo arbitrário, tem-se

$$\| |\phi_l^A\rangle + \epsilon |\phi_l^A\rangle \|^2 = \| |\phi_l^A\rangle \|^2 + |\epsilon|^2 \| |\phi_l^A\rangle \|^2 = 1 + \Theta(\epsilon^2) \quad (\text{D.0.2})$$

Desconsiderando termos de segunda ordem em ϵ , a combinação linear $|\phi_l^A\rangle + \epsilon |\phi_l^A\rangle$ se torna um vetor unitário. Agora,

$$[\langle \phi_l^A | + \epsilon \langle \phi_l^A |] \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle = \langle \phi_l^A \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle + \epsilon \langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle = \alpha_n + \epsilon \langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle \quad (\text{D.0.3})$$

E,

$$\begin{aligned} \| [\langle \phi_l^A | + \epsilon \langle \phi_l^A |] \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle \|^2 &= \| \alpha_n + \epsilon \langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle \|^2 \\ &= \| \alpha_n \|^2 + 2\text{Re}(\epsilon \alpha_n \langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle) + \Theta(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{D.0.4})$$

O lado esquerdo da equação (D.0.4) é estacionário em respeito a qualquer variação de $|\phi_l^A\rangle$, de forma que,

$$\langle \phi_l^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi_{AB} \rangle = 0, \quad i \neq l \quad \forall |\phi_l^A\rangle \in \mathcal{H}_{A'}, \quad (\text{D.0.5})$$

sendo $\mathcal{H}_{A'}$ o conjunto de todos os estados pertencentes à \mathcal{H}_A ortogonais à $|\phi_l^A\rangle$. Realizando o procedimento similar no espaço vetorial \mathcal{H}_B é possível obter,

$$\langle \phi_i^A | \otimes \langle \phi_k^B | \psi_{AB} \rangle = 0, \quad k \neq j \quad \forall |\phi_k^B\rangle \in \mathcal{H}_{B'} \quad (\text{D.0.6})$$

Tendo o vetor $|\psi'_{AB}\rangle$ dado por,

$$|\psi'_{AB}\rangle = |\psi_{AB}\rangle - \alpha_n |\phi_j^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle \quad \therefore \quad |\psi_{AB}\rangle = |\psi'_{AB}\rangle + \alpha_n |\phi_j^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle, \quad (\text{D.0.7})$$

a definição de α_n ocasiona em,

$$\langle \phi_i^A | \otimes \langle \phi_j^B | \psi'_{AB} \rangle = 0. \quad (\text{D.0.8})$$

Logo, $|\psi'_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_{A'} \otimes \mathcal{H}_{B'}$. O procedimento explicitado pelas equações (D.0.1)-(D.0.8) pode ser repetido a fim de eliminar os k,l -ésimos estados e depois os seguintes, até se obter a forma,

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle. \quad (\text{D.0.9})$$

Apêndice E

Método de integração do ponto de sela não degenerado

O método da fase estacionária ou do ponto de sela é uma extensão do método de *Laplace* para se realizar uma aproximação integral, onde deforma-se o contorno da integral no plano complexo para passar próximo de um ponto estacionário. Pode tanto ser utilizado no plano complexo quanto em integrais reais.

As integrais que serão estimadas devem possuir a forma,

$$I(\lambda) = \int_{I_n} f(x) e^{\lambda S(x)} dx, \quad (\text{E.0.1})$$

sendo I_n o contorno n -dimensional e λ deve ser grande.

Agora, com $f, S: I^n \rightarrow I$ e $I \subset I^n$. Se,

$$T = \limsup_{x \in I} \Re(S(x)) < \infty, \quad (\text{E.0.2})$$

onde $\Re(x)$ denota a parte real e existe um número real positivo λ_0 em que,

$$\int_I |f(x) e^{\lambda_0 S(x)}| dx < \infty, \quad (\text{E.0.3})$$

Então têm-se,

$$\left| \int_I f(x) e^{\lambda S(x)} dx \right| \leq C e^{\lambda M}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geq \lambda_0. \quad (\text{E.0.4})$$

Para isso, sendo x um vetor n -dimensional, e

$$S''_{ij}(x) \equiv \left(\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad 1 \leq i, \quad j \leq n, \quad (\text{E.0.5})$$

denota a matriz *hessiana* da função $S(x)$. Se,

$$\vec{\phi}(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_k(x)) \quad (\text{E.0.6})$$

é um vetor funcional, então têm-se a matriz jacobiana definida como,

$$\vec{\phi}'(x) \equiv \left(\frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_j} \right), \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (\text{E.0.7})$$

O ponto de sela não degenerado $x_0 \in I_n$ de uma função holomórfica é um ponto crítico da função, onde a matriz da função *hessiana* tem um determinante diferente de zero.

Neste trabalho, utilizou-se do método para a expansão assintótica no caso de um ponto de sela não degenerado, sendo dada pela aproximação,

$$I(\lambda) \equiv \int_{I_n} f(x) e^{\lambda S(x)} dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} e^{\lambda S(x_0)} [f(x_0) + O(\lambda^{-1})] \prod_{j=1}^n (-\mu_j)^{-1/2}, \quad (\text{E.0.8})$$

Sendo $O(\lambda^{-1})$ a aproximação por séries de potências de λ^{-1} e $\{\mu_j\}$ o conjunto de autovalores da matriz *hessiana*.

Referências Bibliográficas

- [1] Von Mises L. "*Human action*", Ludwig von Mises Institute, 1966.
- [2] Salinas S. "*Introdução a física estatística*", Edusp, 1997.
- [3] Carnot S. "*Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*", Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure **1** (1872) 393.
- [4] Rocha J. F. "*Origens e evolução das idéias da física*", SciELO-EDUFBA, 2002.
- [5] Clausius R. "*On different forms of the fundamental equations of the mechanical theory of heat and their convenience for application*", Annalen der Physik und Chemie **124** (1865) 353.
- [6] Boltzmann L. "*Weitere Studien über das Wärmeleichgewicht unter Gasmolekülen*", Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften **66** (1872) 275.
- [7] Planck M. "*Wissenschaftliche Selbstbiographie*", 1948.
- [8] Planck M. "*Über des gesetzes der energieverteilung in normal spectrum*", Ann. Phys **309** (1901) 564.
- [9] Einstein A. "*Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*", Annalen der physik **322** (1905) 549.
- [10] Einstein, A. "*Über die Spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Vieweg, 1920.
- [11] Lorentz H. A. "*Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller than That of Light*", Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, **6** (1904), 809.
- [12] Einstein A. "*Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?*", Annalen der Physik **323** (1905) 639.
- [13] Einstein, A. "*Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*", Annalen der physik **322** (1905) 132.
- [14] Millikan R. A. "*A direct photoelectric determination of Planck's "h"*", Physical Review **7** (1916) 355.
- [15] Compton A. H. "*A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements*", Phys. Rev **21** (1923) 483.
- [16] Heisenberg W. "*Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*", Zeitschrift für Physik **43** (1927) 172.

- [17] Dirac P. A. M. "A new notation for quantum mechanics", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **35** (1939) 416.
- [18] Pauli W. "Über den Einfluß der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt", Zeitschrift für Physik **31** (1925) 373.
- [19] de Broglie L. "Recherches sur la théorie des quanta", 1924, Tese de Doutorado, Migration-université en cours d'affectation.
- [20] Schrödinger E. "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules", Physical Review **28** (1926)1049.
- [21] Lord Kelvin, "I. Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light", The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **2** (1901) 1.
- [22] Marion, Jerry B. "Classical dynamics of particles and systems", Academic Press, 2013.
- [23] M. Born "Statistical interpretation of quantum mechanics", Science **122** (1955) 675.
- [24] Heisenberg W. "Physics and beyond: Encounters and conversations.", 1971.
- [25] D. Griffiths "Introduction to quantum mechanics", Prentice Hall, 1995.
- [26] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev. **47** (1935) 777.
- [27] J. S. Bell "On the einstein podolsky rosen paradox", Physics Physique Fizika **1** (1964) 195.
- [28] Schrödinger E. "Discussion of probability relations between separated systems", Math. Proc. Cambridge Philosophical Society **31** (1935) 555.
- [29] Ekert A. K. "Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem", Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 661.
- [30] C. H. Bennet, *et al.* "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels", Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 1895.
- [31] Bose S. N. "Planck's law and the hypothesis of light quanta", Z. Phys. **26** (1924) 1.
- [32] Fermi E. "Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico", Rendiconti Lincei **3** (1926) 145.
- [33] Dirac P. A. M. "On the Theory of Quantum Mechanics", Proceedings of the Royal Society A. **762** (1926) 661.
- [34] Von Neumann J. "Measurement and Reversibility" e "The Measuring Process", capítulos V e VI no "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik", Springer, 1932.
- [35] Shannon C. E. "A Mathematical Theory of Communication", Bell System Technical Journal **27** (1948) 379.
- [36] Ehrenfest P. "Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik", Zeitschrift für Physik **45** (1927) 455.
- [37] Grib A. A. e Rodrigues Jr. W. A. "Nonlocality in Quantum Mechanics", Plenum Press, 1998.

- [38] Wehrl A. "On the relation between classical and quantum-mechanical entropy" Reports on Mathematical Physics **16** (1979) 3
- [39] Husimi K. "Some formal properties of the density matrix", Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan **22** (1940) 264.
- [40] Caruso F e Oguri V. "Física Moderna: origens clássicas e fundamentos quânticos", Elsevier, 2006.
- [41] Thomson J.J. "Cathode Rays", Philosophical Magazine **44** (1897) 293.
- [42] Millikan R. A. "On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant" Physical Review. Series II. **2** (1913) 109.
- [43] Rutherford E. "The Scattering of α and β rays by Matter and the Structure of the Atom" Philosophical Magazine. 6 (1911) 21.
- [44] Andrade E. D. C. "Book and film reviews: Rutherford and the Nature of the Atom", The Physics Teacher **2** (1964) 339.
- [45] Chadwick J. "Possible Existence of a Neutron", Nature **129** (1932) 312.
- [46] Pauli W. e Weisskopf V. F. "On Quantization of the Scalar Relativistic Wave Equation", Helv. Phys. Acta **7** (1934) 709.
- [47] Dirac P. A. M. "Directions in physics. lectures delivered during a visit to australia and new zealand", (1978).
- [48] Anderson C. D. "The Positive Electron", Physical Review **43** (1933) 491.
- [49] Feynman R. "The theory of positrons", Physical Review **76** (1949) 749.
- [50] Glashow S. "The renormalizability of vector meson interactions", Nucl. Phys. **10** (1959) 107.
- [51] Salam A. e Ward. J. C. "Weak and electromagnetic interactions", Nuovo Cimento **11** (1959) 568.
- [52] Weinberg S. "A Model of Leptons", Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [53] Yukawa H. "On the Interaction of Elementary Particles", Proc. Phys.-Math. Soc. Jpn. **17** (1935) 48.
- [54] Lattes C. M. G., Muirhead H., Occhialini G. P. S. e Powell C. F. "Processes involving charged mesons", Nature **159** (1947) 694.
- [55] Cowan Jr. C. L., Reines F., Harrison F. B., Kruse H. W. e McGuire A. D. "Detection of the Free Neutrino: a Confirmation", Science **124** (1956) 103.
- [56] Lamb W. E. "Fine structure of the hydrogen atom", Science **123** (1956) 439.
- [57] Nakano T. e Nishijima N. "Charge Independence for V-particles", Progress of Theoretical Physics **10** (1953) 581.
- [58] Gell-Mann M. "The Interpretation of the New Particles as Displaced Charged Multiplets", Il Nuovo Cimento **4** (1956) 848.

- [59] Gell-Mann M. "*The Eightfold Way: A Theory of strong interaction symmetry*", 1961.
- [60] Ne'eman Y. "*Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance*", Nuclear Physics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. **26** (1961) 222.
- [61] Gell-Mann M. "*A Schematic Model of Baryons and Mesons*", Physics Letters **8** (1964) 214.
- [62] Zweig G. "*An SU (3) model for strong interaction symmetry and its breaking*", Version 1. No. CERN-TH-401 (1964).
- [63] Joyce J. "*Finnegans wake*", Faber and Faber, 1939.
- [64] Greenberg O. W. "*Spin and Unitary Spin Independence in a Paraquark Model of Baryons and Mesons*" Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 598.
- [65] Bjorken J. D. "*Asymptotic sum rules at infinite momentum*", Physical Review **179** (1969) 1547.
- [66] Riordan M. "*The hunting of the quark: a true story of modern physics*, Plunkett Lake Press, 2019.
- [67] Friedman J. I. "*Deep inelastic scattering: Comparisons with the quark model*", Reviews of Modern Physics **63** (1991) 615.
- [68] Close F. "*The Infinity Puzzle: The personalities, politics, and extraordinary science behind the Higgs boson*", OUP Oxford, 2011.
- [69] Bjorken J. D. e Paschos E. A. "*Inelastic electron-proton and γ -proton scattering and the structure of the nucleon*", Physical Review **185** (1969) 1975.
- [70] Callen H. B. "*Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*", John Wiley & Sons, 2006.
- [71] Wehrl A. "*General properties of entropy*", Reviews of Modern Physics **50** (1978) 221.
- [72] Wehrl A. "*On the relation between classical and quantum-mechanical entropy*", Reports on Mathematical Physics. **16** (1979) 353.
- [73] Cahill K. E. e Glauber R. J. "*Ordered Expansions in Boson Amplitude Operators*", Phys. Rev. **177** (1969) 1857.
- [74] Wigner E. "*On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*", Phys. Rev. **40** (1932) 749.
- [75] Zayed A. I. "*Handbook of function and generalized function transformations*, CRC press, 2019.
- [76] Schwartz M. D. "*Quantum field theory and the standard model*", Cambridge University Press, 2014.
- [77] The ZEUS Experiment. Disponível em <http://www.mit.edu/~hasell/DKH_zeus.html>. Acesso em: 25 fev. 2020.
- [78] Altarelli G. e Parisi G. "*ALTARELLI 1977*", Nucl. Phys **126** (1977) 298.
- [79] Dokshitzer e Yuri L. "*Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and e^+e^- annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics*", Zh. Eksp. Teor. Fiz **73** (1977) 1216.
- [80] Gribov, Vladimir N. e Lipatov L. N. "*DEEP INELASTIC ep -SCATTERING IN A PERTURBATION THEORY*", Inst. of Nuclear Physics, 1972.

- [81] Kuraev, Eh A., Lipatov L. N. e Fadin V. S. "*Pomeranchuk singularity in non-abelian gauge theories*", Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki **72** (1977) 377.
- [82] Ya, Ya. "*Balitsky and Lipatov*", Sov. J. Nucl. Phys **28** (1978) 22.
- [83] Balitsky I. "*Operator expansion for high-energy scattering*", Nuclear Physics **463** (1996) 99.
- [84] Kovchegov e Yuri V. "*Small- x F_2 structure function of a nucleus including multiple Pomeron exchanges*", Physical Review D **60** (1999).
- [85] Rezaeian A. H. e Ivan S. "*Impact-parameter dependent Color Glass Condensate dipole model and new combined HERA data*", Physical Review D **88** (2013).
- [86] K. Kutak "*Gluon saturation and entropy production in proton-proton collisions*", Phys. Lett. B **705**, (2011) 217.
- [87] Kharzeev D. E. and Eugene M. Levin "*Deep inelastic scattering as a probe of entanglement*", Physical Review **95** (2017) 114.
- [88] Hagiwara Y., *et al.* "*Classical and quantum entropy of parton distributions*", Physical Review D **97** (2018)
- [89] Hatta Y. e Yoshikazu H. "*Husimi distribution for nucleon tomography*", EPJ Web of Conferences **112** (2016).
- [90] Bomhof C. J., Mulders P. J. e Pijlman F. "*The construction of gauge-links in arbitrary hard processes*", The European Physical Journal C-Particles and Fields **47** (2006) 147.
- [91] Hatta Y., Bo-Wen X. e Yuan F. "*Probing the small- x gluon tomography in correlated hard diffractive dijet production in deep inelastic scattering*", Physical review letters **116** (2016) 202.
- [92] Zhoudunming T., Kharzeev D e Ullrich T. "*The EPR paradox and quantum entanglement at sub-nucleonic scales*", arXiv preprint <[arXiv:1904.11974](https://arxiv.org/abs/1904.11974)>, (2019).
- [93] Haowu D., *et al* "*Entanglement or ignorance: which is responsible for parton model?*", arXiv preprint <[arXiv:2001.01726](https://arxiv.org/abs/2001.01726)>, (2020).