

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

FORMULAÇÃO DE SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA PARA  
MODELAGEM DOS PROCESSOS DE COMPACTAÇÃO  
EM BACIAS SEDIMENTARES

Paulo Sérgio Baumbach Lemos

Porto Alegre  
2019



PAULO SÉRGIO BAUMBACH LEMOS

**FORMULAÇÃO DE SOLUÇÕES DE  
REFERÊNCIA PARA MODELAGEM DOS  
PROCESSOS DE COMPACTAÇÃO EM BACIAS  
SEDIMENTARES**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de  
Doutor em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Samir Maghous

Coorientador: Prof. Dr. Eurípedes do Amaral Vargas Junior

Porto Alegre  
2019

### CIP - Catalogação na Publicação

Lemos, Paulo Sérgio Baumbach  
Formulação de soluções de referência para modelagem  
dos processos de compactação em bacias sedimentares /  
Paulo Sérgio Baumbach Lemos. -- 2019.  
233 f.  
Orientador: Samir Maghous.

Coorientador: Eurípedes do Amaral Vargas Junior.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2019.

1. bacia sedimentar. 2. compactação gravitacional.  
3. grandes deformações. 4. acoplamento  
elástico-plástico-viscoplástico. 5. simulação de  
elementos finitos. I. Maghous, Samir, orient. II.  
Vargas Junior, Eurípedes do Amaral, coorient. III.  
Titulo.



**PAULO SÉRGIO BAUMBACH LEMOS**

**FORMULAÇÃO DE SOLUÇÕES DE  
REFERÊNCIA PARA MODELAGEM DOS  
PROCESSOS DE COMPACTAÇÃO EM BACIAS  
SEDIMENTARES**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelos professores orientadores e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre 2019

---

**Samir Maghous**

Docteur École Nationale des  
Ponts et Chaussées  
Orientador

---

**Eurípedes do Amaral Vargas Junior**

Ph.D. Imperial College  
Coorientador

---

**Nilo Cesar Consoli**

Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Denise Bernaud Maghous (UFRGS)**

Docteur École Nationale des Ponts et Chaussées

---

**Américo Campos Filho (UFRGS)**

Dr. Universidade de São Paulo

---

**Mauro de Vasconcellos Real (FURG)**

Dr. Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

**Severino Pereira Cavalcanti Marques (UFAL)**

Dr. Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## RESUMO

LEMOS, P. S. B. **Formulação de soluções de referência para modelagem dos processos de compactação em bacias sedimentares**. 2019. 221 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

As bacias sedimentares resultam da deposição de sedimentos ao longo de períodos geológicos, que são transformados em rochas através do fenômeno natural chamado diagênese, que envolve processos físicos, químicos e biológicos. Como resultado da diagênese, as bacias sedimentares se revelam ambientes propícios à formação, migração e acúmulo de hidrocarbonetos, bem como de minerais e reservatórios de água. Nesse contexto, os simuladores de bacias que implementam modelos numéricos são classicamente utilizados para a reconstrução do estado mecânico ao longo do tempo geológico, com o objetivo específico de otimizar os processos de prospecção e exploração. A deformação do material geológico se origina principalmente nos processos de compactação mecânica e químico-mecânica. A compactação mecânica predomina nas camadas superiores das bacias e induz deformações independentes do tempo, enquanto a compactação químico-mecânica, resultante do fenômeno pressão-solução intergranular (IPS), prevalece nas camadas mais profundas e está associada à deformações diferidas. Os dois processos ocorrem simultaneamente nas camadas intermediárias das bacias e a compactação causa grandes variações irreversíveis de porosidade. Este trabalho é dedicado ao desenvolvimento de soluções semi-analíticas para a deformação induzida pela compactação gravitacional em bacias sedimentares. Formuladas no contexto do acoplamento plástico-viscoplástico em grandes deformações, a modelagem dedica ênfase especial aos efeitos do adensamento na rigidez e no endurecimento do material sedimentar, associado às grandes variações irreversíveis da porosidade. Ao nível do material, a compactação puramente mecânica é manipulada no contexto de elastoplasticidade finita, enquanto a componente viscoplástica do comportamento visa tratar deformações diferidas resultantes da compactação químico-mecânica. Na escala da bacia, as soluções semi-analíticas, que descrevem a evolução do estado mecânico da bacia sedimentar ao longo dos períodos de acreção e pós-acreção, são apresentadas em um cenário oedométrico simplificado. Embora as análises sejam realizadas em condições isotérmicas e drenadas, essas soluções podem ser vistas como soluções de referência, úteis para a verificação e como benchmarks de simuladores de bacia sedimentares. A abordagem proposta revela-se adequada para análises paramétricas, uma vez que requer apenas um software matemático padrão para a resolução de sistemas de equações diferenciais parciais. Ilustrações numéricas fornecem uma comparação quantitativa entre as soluções de referência e as predições de um simulador de bacias apropriado, baseado em elementos finitos, mostrando assim a capacidade da abordagem em capturar com precisão os recursos essenciais da deformação da bacia.

Palavras-chave: bacia sedimentar; compactação gravitacional; grandes deformações; acoplamento elástico-plástico-viscoplástico; endurecimento; simulação de elementos finitos.

## ABSTRACT

LEMOS, P. S. B. **Formulation of reference solutions for modeling of compaction process in sedimentary basins**. 2019. 221 f. Thesis (Doctorate in Civil Engineering) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Sedimentary basins result from deposition along geological periods of sediments which are transformed into rock through natural phenomena involving physical, chemical and biological processes, referred to as diagenesis. As a result of diagenesis processes, sedimentary basins reveal environments conducive to formation, migration, and accumulation of hydrocarbons, as well as of minerals and water reservoirs. In this context, the simulators of basins implementing numerical models are classically used for the reconstruction of the mechanical state over geological time, with the specific aim of optimizing the prospection and exploration processes. The deformation of the geological material mainly originates in the processes of mechanical and chemical-mechanical compaction. Mechanical compaction occurs in the upper layers of the basins inducing time-independent strains, whereas chemical-mechanical compaction resulting from the intergranular pressure-solution phenomenon (IPS) occurs in the deeper layers and it is associated with creep-like deformation. The two processes occur simultaneously in the intermediate layers and the compaction causes large irreversible variations of porosity. This work is devoted to the development of semi-analytical solutions for the deformation induced by gravitational compaction in sedimentary basins. Formulated within the framework of coupled plasticity-viscoplasticity at large strains, the modeling dedicates special emphasis to the effects of material densification associated with large irreversible porosity changes on the stiffness and hardening of the sediment material. At the material level, the purely mechanical compaction taking place in the upper layers of the basin is handled in the context of finite elastoplasticity, whereas the viscoplastic component of behavior is intended to address creep-like deformation resulting from chemo-mechanical that prevails at deeper layers. At the basin structure scale, semi-analytical solutions describing the evolution of mechanical state of the sedimentary basin along both the accretion and post-accretion periods are presented in the simplified oedometric setting. Although the analysis is carried out under isothermal and fully drained conditions, these solutions can be viewed as useful reference solutions for verification and benchmarks of basin simulators. The proposed approach may reveal suitable for parametric analyses since it requires only standard mathematics-based software for PDE system resolution. The numerical illustrations provide a quantitative comparison between the derived solutions and finite element predictions from an appropriate basin simulator, thus showing the ability of the approach to accurately capture essential features of basin deformation.

Key-words: sedimentary basin; gravitational compaction; large strains; coupled elasticity-plasticity-viscoplasticity; hardening; Finite element simulation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: roteamento sedimentar (ALLEN; ALLEN, 2013).....	20
Figura 2: espessura de sedimentos atual nos oceanos (WHITTAKER <i>et al.</i> , 2013).....	21
Figura 3: processo de pressão-solução (GUNDERSEN <i>et al.</i> , 2002).....	24
Figura 4: descrição geométrica do esqueleto (COUSSY, 2004). ....	29
Figura 5: geometria do modelo simplificado.....	30
Figura 6: geometria do modelo simplificado (repetido) com condição inicial de tensões e condição de contorno do campo de velocidades. ....	32
Figura 7: interpretação física da dilatação vertical. ....	34
Figura 8: decomposição do gradiente de transformação. ....	36
Figura 9: representação esquemática do critério de plasticidade inclinado. ....	40
Figura 10: pressão de consolidação plástica para diferentes valores de $p_{c0}$ e $m_p$ , com $\phi_0 = 0.65$ . .....	42
Figura 11: variação do módulo de endurecimento plástico para diferentes valores de $p_{c0}$ e $m_p$ , com $\phi_0 = 0.65$ . ....	43
Figura 12: representação esquemática do critério de viscoplasticidade inclinado. ....	44
Figura 13: pressão de consolidação viscoplástica para diferentes valores de $p_{vp0}$ e $m_{vp}$ , com $\phi_0 = 0.65$ . ....	46
Figura 14: variação do módulo de endurecimento viscoplástico para diferentes valores de $p_{vp0}$ e $m_{vp}$ , com $\phi_0 = 0.65$ . ....	47
Figura 15: comparação entre as variações das pressões de consolidação plástica e viscoplástica. ....	52
Figura 16: comparação entre as variações dos módulos de endurecimento plástico e viscoplástico. ....	52
Figura 17: comparação entre as variações das pressões de consolidação plástica e viscoplástica. ....	56
Figura 18: variação da porosidade euleriana, para $\phi_0 = 0.65$ . ....	57
Figura 19: lei de compactação gravitacional e representação esquemática da evolução da bacia sedimentar. ....	60
Figura 20: domínios de comportamento material da bacia sedimentar. ....	61
Figura 21: leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2. .....	89
Figura 22: perfis de porosidade euleriana da bacia sedimentar em $t=80\text{Ma}$ para os modelos (a) M1 e (b) M2. ....	92
Figura 23: perfis de tensões da bacia sedimentar em $t=80\text{Ma}$ para os modelos (a) M1 e (b) M2. ....	93

Figura 24: evoluções dos desvios na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2....	94
Figura 25: evolução do critério viscoplástico na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2. ....	95
Figura 26: leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2. ....	102
Figura 27: perfis de (a) jacobianos e (b) porosidade euleriana em $t=160\text{Ma}$ , para os modelos M1 e M2. ....	104
Figura 28: perfis de (a) massa específica e (b) das pressões de consolidação plástica e viscoplástica em $t=160\text{Ma}$ , para os modelos M1 e M2. ....	104
Figura 29: evoluções da dilatação vertical e jacobianos na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.....	105
Figura 30: evoluções da (a) porosidade euleriana e (b) massa específica na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.....	107
Figura 31: evoluções das tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2..	109
Figura 32: leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4. ....	126
Figura 33: perfis de jacobianos da bacia sedimentar (a) em $t=70\text{Ma}$ e (b) em $t=140\text{Ma}$ .....	128
Figura 34: perfil de porosidade euleriana da bacia sedimentar (a) em $t=70\text{Ma}$ e (b) em $t=140\text{Ma}$ .....	129
Figura 35: perfil de massa específica da bacia sedimentar (a) em $t=70\text{Ma}$ e (b) em $t=140\text{Ma}$ . ....	130
Figura 36: perfil de tensões da bacia sedimentar (a) em $t=70\text{Ma}$ e (b) em $t=140\text{Ma}$ .....	132
Figura 37: perfil da razão de tensões da bacia sedimentar (a) em $t=70\text{Ma}$ e (b) em $t=140\text{Ma}$ . ....	133
Figura 38: perfil das pressões de consolidação plástica e viscoplástica da bacia sedimentar (a) em $t=70\text{Ma}$ e (b) em $t=140\text{Ma}$ . ....	134
Figura 39: perfil dos módulos de compressão e cisalhamento da bacia sedimentar (a) em $t=70\text{Ma}$ e (b) em $t=140\text{Ma}$ . ....	135
Figura 40: evoluções da dilatação vertical e jacobianos na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4. ....	136
Figura 41: evoluções da porosidade euleriana na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.....	138
Figura 42: evoluções da massa específica na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4. ....	138
Figura 43: evoluções das tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4. ....	139
Figura 44: evoluções das pressões de consolidação plástica e viscoplástica na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4. ....	140
Figura 45: evoluções dos módulos de compressão e cisalhamento na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4. ....	141

Figura 46: evoluções da trajetória de tensão na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4. ....	142
Figura 47: evoluções dos desvios na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4. ....	143
Figura 48: discretização espacial e condições de contorno mecânicas do problema. ....	148
Figura 49: leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	151
Figura 50: perfis de jacobianos da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	154
Figura 51: perfis de porosidade euleriana da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	154
Figura 52: perfis de massa específica da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	155
Figura 53: perfis de tensões da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	158
Figura 54: perfis das razões de tensões da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	159
Figura 55: perfis das pressões de consolidação plástica e viscoplástica da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	159
Figura 56: evoluções dos jacobianos na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	163
Figura 57: evolução da porosidade euleriana na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	164
Figura 58: evolução da massa específica na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	164
Figura 59: evoluções das tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	165
Figura 60: evoluções das pressões de consolidação plástica e viscoplástica na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	166
Figura 61: evolução da trajetória de tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	166
Figura 62: evoluções dos módulos de compressão e cisalhamento na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	167
Figura 63: evolução do desvio na base da bacia sedimentar, para o modelo M2. ....	167
Figura 64: evoluções do critério viscoplástico na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF. ....	168
Figura 65: lei de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF. ....	169
Figura 66: perfis de jacobianos da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	171
Figura 67: perfis de porosidade euleriana da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	172
Figura 68: perfis de massa específica da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	172

Figura 69: perfis de tensões da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	175
Figura 70: perfis das razões de tensões da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma.....	175
Figura 71: perfis das pressões de consolidação plástica e viscoplástica da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	176
Figura 72: perfis dos módulos de compressão e cisalhamento da bacia sedimentar (a) em $t=60$ Ma e (b) em $t=120$ Ma. ....	176
Figura 73: evoluções dos jacobianos na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.....	177
Figura 74: evolução da porosidade euleriana na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.....	180
Figura 75: evolução da massa específica na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.....	180
Figura 76: evoluções das tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF. ....	181
Figura 77: evoluções das pressões de consolidação plástica e viscoplástica na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.....	182
Figura 78: evolução da trajetória de tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.....	182
Figura 79: evoluções dos módulos de compressão e cisalhamento na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF. ....	183
Figura 80: evolução do desvio na base da bacia sedimentar, para o modelo M4.....	184
Figura 81: método Lagrangeano atualizado (BRÜCH, 2016).....	195
Figura 82: elementos finitos hexaédricos de 20 e 8 nós (BRÜCH, 2016). ....	207
Figura 83: fluxograma do programa termoporomecânico (BRÜCH, 2016). ....	209
Figura 84: discretização temporal e interação entre os módulos térmico e poromecânico do simulador (BRÜCH, 2016).....	210
Figura 85: fluxograma do módulo térmico (BRÜCH, 2016). ....	211
Figura 86: fluxograma do módulo poromecânico (BRÜCH, 2016).....	212
Figura 87: algoritmo de integração das deformações plásticas (BRÜCH, 2016).....	217
Figura 88: algoritmo de integração das deformações viscoplásticas (BRÜCH, 2016). ....	221
Figura 89: algoritmo de integração simultânea das deformações plásticas e viscoplásticas (BRÜCH, 2016).....	222

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: parâmetros mecânicos de análise.....	88
Tabela 2: valores limites das leis de compactação. ....	89
Tabela 3: posições das fronteiras que dividem os domínios de comportamento dos modelos M1 e M2 em $t=80$ Ma (m).....	91
Tabela 4: valores limites da porosidade euleriana e tensões para os modelos M1 e M2 em $t=80$ Ma.....	91
Tabela 5: valores limites das leis de compactação. ....	102
Tabela 6: valores limites de dilatação vertical e jacobianos.....	106
Tabela 7: valores limites da porosidade euleriana e massa específica. ....	107
Tabela 8: valores limites das tensões (MPa). ....	109
Tabela 9: análises propostas e suas características.....	124
Tabela 10: parâmetros mecânicos de análise.....	125
Tabela 11: valores limites das leis de compactação M2, M3 e M4.....	126
Tabela 12: posições das fronteiras que dividem os domínios de comportamento (m).....	127
Tabela 13: valores limites de dilatação vertical e jacobianos em $t=70$ Ma. ....	128
Tabela 14: valores limites de dilatação vertical e jacobianos em $t=140$ Ma. ....	129
Tabela 15: valores limites da porosidade euleriana em $t=70$ Ma. ....	129
Tabela 16: valores limites da porosidade euleriana em $t=140$ Ma. ....	130
Tabela 17: valores limites da massa específica em $t=70$ Ma ( $\text{kg/m}^3$ ). ....	130
Tabela 18: valores limites da massa específica em $t=140$ Ma ( $\text{kg/m}^3$ ). ....	130
Tabela 19: valores limites das tensões em $t=70$ Ma (MPa).....	132
Tabela 20: valores limites das tensões em $t=140$ Ma (MPa).....	132
Tabela 21: valores limites da razão de tensões em $t=70$ Ma. ....	133
Tabela 22: valores limites da razão de tensões em $t=140$ Ma. ....	133
Tabela 23: valores limites dos endurecimentos plástico e viscoplástico em $t=70$ Ma (MPa). ....	134
Tabela 24: valores limites dos endurecimentos plástico e viscoplástico em $t=140$ Ma (MPa). ....	134
Tabela 25: valores limites dos módulos de compressão e cisalhamento em $t=70$ Ma (MPa). ....	135
Tabela 26: valores limites dos módulos de compressão e cisalhamento em $t=140$ Ma (MPa). ....	135
Tabela 27: valores limites de dilatação vertical e jacobianos.....	137
Tabela 28: valores limites da porosidade euleriana. ....	138
Tabela 29: valores limites da massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ). ....	139
Tabela 30: valores limites das tensões (MPa). ....	140

Tabela 31: valores limites das pressões de consolidação (MPa). .....	141
Tabela 32: valores limites módulos de compressão e cisalhamento (MPa). .....	142
Tabela 33: valores limites para $p$ e $q$ (MPa). .....	142
Tabela 34: parâmetros mecânicos de análise.....	145
Tabela 35: dados das malhas e dos tempos de processamento de cada análise.....	149
Tabela 36: tempos que delimitam as fases de comportamento e alturas que caracterizam os domínios de comportamento para cada discretização temporal e espacial. ....	149
Tabela 37: diferenças relativas entre as respostas. ....	149
Tabela 38: tempo total de análise dos modelos M2 e MEF (h). .....	151
Tabela 39: tempos e alturas que caracterizam o problema mecânico, para os modelos M2 e MEF.....	152
Tabela 40: posições das fronteiras que dividem os domínios de comportamento do modelo M2 (m). .....	153
Tabela 41: predições dos modelos M2 e MEF no perfil da bacia sedimentar em $t=60$ Ma. ..	156
Tabela 42: predições dos modelos M2 e MEF no perfil da bacia sedimentar em $t=120$ Ma. ....	156
Tabela 43: diferenças relativas entre as respostas M2 e MEF em $t=60$ Ma. ....	157
Tabela 44: diferenças relativas entre as respostas M2 e MEF em $t=120$ Ma. ....	157
Tabela 45: respostas dos modelos M2 e MEF na base da bacia sedimentar. ....	161
Tabela 46: diferenças relativas entre as respostas M2 e MEF.....	162
Tabela 47: respostas e diferenças relativas entre os modelos M2 e MEF na base da bacia sedimentar, em $t=50.6$ Ma. ....	162
Tabela 48: tempo total de análise dos modelos M4 e MEF (h). .....	169
Tabela 49: tempos e alturas que caracterizam o problema mecânico, para os modelos M4 e MEF.....	170
Tabela 50: posições das fronteiras que dividem os domínios de comportamento do modelo M4 (m). .....	171
Tabela 51: predições dos modelos M4 e MEF no perfil da bacia sedimentar em $t=60$ Ma. ..	173
Tabela 52: predições dos modelos M4 e MEF no perfil da bacia sedimentar em $t=120$ Ma. ....	173
Tabela 53: diferenças relativas entre as respostas M4 e MEF em $t=60$ Ma. ....	174
Tabela 54: diferenças relativas entre as respostas M4 e MEF em $t=120$ Ma. ....	174
Tabela 55: respostas dos modelos M4 e MEF na base da bacia sedimentar. ....	178
Tabela 56: diferenças relativas entre as respostas M4 e MEF.....	179
Tabela 57: respostas e diferenças relativas entre os modelos M4 e MEF na base da bacia sedimentar, em $t=50.6$ Ma. ....	179

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

EDO equação diferencial ordinária

EDP equação diferencial parcial

Ma milhões de anos

### Operadores matemáticos e notação tensorial

div operador divergência

$\nabla$  operador gradiente

det determinante

tr traço

$\langle \cdot \rangle$  notação de Macaulay

$\cdot$  e  $:$  contração tensorial e dupla contração tensorial

$\otimes$  produto tensorial

$\dot{O}$  taxa da grandeza  $O$

$O^{-1}$  inversa da grandeza  $O$

$\underline{O}$ ,  $\underline{\underline{O}}$  e  $\underline{\underline{\underline{O}}}$  tensores de primeira ordem (vetor), segunda ordem e quarta ordem referenciados à grandeza  $O$

$I_1$  primeiro invariante do tensor de tensão de Cauchy

$J_2$  segundo invariante do tensor de tensão desviador

### Vetores, tensores e componentes

$X_i$   $i = 1, 2, 3$  coordenadas do espaço euclidiano de dimensão 3 na configuração de referência

$x_i$   $i = 1, 2, 3$  coordenadas do espaço euclidiano de dimensão 3 na configuração atual

$e_i$   $i = 1, 2, 3$  vetores que formam a base ortonormal do espaço euclidiano de dimensão 3

$\underline{g}$  campo gravitacional

$g$  aceleração da gravidade

$\underline{\underline{\sigma}}$  tensor de tensão de Cauchy

$\sigma_h$  e  $\sigma_v$  componentes horizontal e vertical de tensão

$\underline{\underline{s}}$  tensor desviador de  $\underline{\underline{\sigma}}$

$\underline{u}$  campo euleriano de velocidade das partículas

$u_i$   $i = 1, 2, 3$  componentes do campo euleriano de velocidade das partículas

$\underline{\underline{F}}$  gradiente da transformação geométrica

$\underline{\underline{F}}^{el}$  gradiente da transformação geométrica elástica

$\underline{\underline{F}}^{ir}$  gradiente da transformação geométrica irreversível

$\underline{\underline{C}}$  tensor dos módulos elásticos

$\underline{\underline{C}}^{el}$  tensor de deformação elástica infinitesimal associado à sequência elástica  $\underline{\underline{F}}^{el}$  das partículas materiais

$\underline{\underline{d}}$ ,  $\underline{\underline{d}}^{ir}$ ,  $\underline{\underline{d}}^p$  e  $\underline{\underline{d}}^{vp}$  taxas de deformação total, irreversível, plástica e viscoplástica

$\underline{\underline{1}}$  e  $\underline{\underline{1}}$  tensores unitários de segunda e quarta ordem

### **Tempo e altura da bacia**

$t$  tempo

$T$  tempo em que uma determinada partícula é assentada na bacia sedimentar

$T^e$  tempo final da fase elástica

$T^p$  tempo final da fase elástica-plástica

$T^{vp}$  tempo final da fase elástica-plástica-viscoplástica

$T^s$  tempo final do período de deposição sedimentar

$T^f$  tempo final de análise

$H(t)$  lei de compactação gravitacional

$H^e$  altura da bacia sedimentar no tempo  $T^e$

$H^p$  altura da bacia sedimentar no tempo  $T^p$

$H^{vp}$  altura da bacia sedimentar no tempo  $T^{vp}$

$H^s$  altura da bacia sedimentar no tempo  $T^s$

$H^f$  altura da bacia sedimentar no tempo  $T^f$

$\Delta t$  incremento de tempo

$\Delta H$  incremento de altura da bacia sedimentar

### **Volumes infinitesimais**

$d\Omega_0$  volume infinitesimal total de uma partícula na configuração de referência

$d\Omega_0^s$  volume infinitesimal de sólidos de uma partícula na configuração de referência

$d\Omega_t$  volume infinitesimal total de uma partícula na configuração atual

$d\Omega_t^p$  volume infinitesimal dos poros interconectados de uma partícula na configuração atual

$d\Omega_u$  volume infinitesimal total de uma partícula na configuração relaxada

$d\Omega_u^s$  volume infinitesimal de sólidos de uma partícula na configuração relaxada

$d\Omega_u^p$  volume infinitesimal dos poros interconectados de uma partícula na configuração relaxada

### **Dilatações**

$\Lambda$  dilatação vertical

$J$  dilatação volumétrica ou jacobiano da transformação

$J_e$  componente elástica da dilatação volumétrica ou do jacobiano da transformação

$J_{ir}$  componente irreversível da dilatação volumétrica ou do jacobiano da transformação

$J_p$  componente plástica da dilatação volumétrica ou do jacobiano da transformação

$J_{vp}$  componente viscoplástica da dilatação volumétrica ou do jacobiano da transformação

$J_{ir}^{cr}$  valor crítico da componente irreversível da dilatação volumétrica ou do jacobiano da transformação

$J_p^{cr}$  valor crítico da componente plástica da dilatação volumétrica ou do jacobiano da transformação

$J_{vp}^{cr}$  valor crítico da componente viscoplástica da dilatação volumétrica ou do jacobiano da transformação

### **Propriedades mecânicas**

$\phi$  porosidade lagrangiana

$\phi_0$	porosidade lagrangiana inicial
$\phi^{el}$	componente elástica da porosidade lagrangiana
$\phi^{ir}$	componente irreversível da porosidade lagrangiana
$\varphi$	porosidade euleriana
$\rho$	massa específica do material na configuração atual
$\rho_0$	massa específica do material na configuração de referência
$K$ e $\mu$	módulos de compressão e cisalhamento do material
$k^s$ e $\mu^s$	módulos de compressão e cisalhamento da fase sólida que compõe o esqueleto
$E$ e $\nu$	módulos de Young e de Poisson
$E_0$ e $\nu_0$	módulos de Young e de Poisson iniciais
$\lambda$	primeiro coeficiente de Lamé
$M_d(t)$	massa de sedimentos depositados por unidade de área
$p_c$ e $p_{vp}$	pressões de consolidação plástica e viscoplástica do solo
$p_{c0}$ e $p_{vp0}$	pressão de consolidação inicial plástica e viscoplástica
$\eta_{vp}$	coeficiente de viscosidade viscoplástica do material

### **Plasticidade e viscoplasticidade**

$f^p$ e $f^{vp}$	critérios de plasticidade e viscoplasticidade
$a$	escalar positivo e constante que controla a inclinação da parte dúctil do critério de plastificação e viscoplastificação
$\dot{\chi}$	multiplicador plástico não-negativo
$m_p$	expoente de calibração da lei de endurecimento plástico
$m_{vp}$	constante viscoplástica do material
$h_p$ e $h_{vp}$	módulos de endurecimento plástico e viscoplástico
$n$	expoente de viscosidade
$g^{vp}$	potencial viscoplástico

## Funções mecânicas

$F_h^e$  e  $F_v^e$  funções mecânicas relacionadas ao domínio de comportamento elástico

$F_{jk}^i$   $i = p, vp, v$   $j = h, v$   $k = 1, 2$  funções mecânicas relacionadas aos domínios de comportamento plástico, elastoplástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico

$G_k^i$   $i = p, vp, v$   $k = 1, 2$  funções mecânicas relacionadas aos domínios de comportamento plástico, elastoplástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico

## Valores limites

$\Lambda^i$   $i = e, p, vp, s, f$  valores da dilatação vertical para as partículas localizadas nas fronteiras entre os domínios elástico, plástico, elastoplástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico ao término de cada fase de comportamento

$\sigma_j^i$   $i = e, p, vp, s, f$   $j = h, v$  valores das componentes de tensão para as partículas localizadas nas fronteiras entre os domínios elástico, plástico, elastoplástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico ao término de cada fase de comportamento

$J_{ir}^j$   $j = e, p, vp, s, f$  valores da componente irreversível da dilatação volumétrica para as partículas localizadas nas fronteiras entre os domínios elástico, plástico, elastoplástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico ao término de cada fase de comportamento

$u_3^i$   $i = e, p, vp$  valores da componente vertical de velocidade para as partículas localizadas nas fronteiras entre os domínios elástico, plástico, elastoplástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico ao término de cada fase de comportamento



## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	14
1.1 OBJETIVOS E DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA .....	15
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO .....	17
2. PROBLEMÁTICA DAS BACIAS SEDIMENTARES.....	19
2.1 ROTEAMENTO SEDIMENTAR.....	19
2.2 MECANISMOS DE COMPACTAÇÃO.....	21
2.2.1 Compactação mecânica .....	23
2.2.2 Compactação químico-mecânica.....	23
2.3 MODELAGEM E SIMULAÇÃO DOS PROCESSOS DE FORMAÇÃO E COMPACTAÇÃO.....	24
3. MODELO SIMPLIFICADO DE BACIA SEDIMENTAR .....	28
3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA .....	28
3.2 HIPÓTESES ADOTADAS .....	28
3.3 EQUAÇÕES DE CAMPO QUE REGEM O PROBLEMA.....	30
3.4 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO DAS EQUAÇÕES QUE REGEM O PROBLEMA.....	31
3.5 CARREGAMENTO E TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA.....	32
3.6 COMPONENTES DO MODELO CONSTITUTIVO DO MATERIAL SEDIMENTAR.....	34
3.6.1 Modelo de comportamento elástico do material sedimentar .....	38
3.6.2 Modelo de comportamento plástico do material sedimentar.....	39
3.6.3 Modelo de comportamento viscoplástico do material sedimentar .....	43
3.7 ACOPLAMENTO ELÁSTICO-PLÁSTICO-VISCOPLÁSTICO .....	47
3.7.1 Lei constitutiva em grandes deformações .....	48
3.7.2 Leis de endurecimento plástico-viscoplástico .....	50
3.8 FORMA DA SOLUÇÃO E RELAÇÕES AUXILIARES .....	53
4. FORMULAÇÃO DE SOLUÇÕES COM MÓDULOS ELÁSTICOS CONSTANTES ..	55
4.1 FORMULAÇÃO MECÂNICA DO PROBLEMA.....	58
4.2 PERÍODO DE DEPOSIÇÃO SEDIMENTAR.....	61
4.2.1 Fase elástica.....	63
4.2.2 Fase elástica-plástica .....	67

4.2.3	Fase elástica-plástica-viscoplástica .....	74
4.2.4	Fase elástica-viscoplástica .....	80
4.2.5	Estudo comparativo preliminar entre os modelos M1 e M2 .....	88
4.3	PERÍODO DE PÓS-DEPOSIÇÃO SEDIMENTAR .....	95
4.3.1	Fase elástica-viscoplástica .....	96
4.3.2	Estudo comparativo final entre os modelos M1 e M2.....	101
5.	FORMULAÇÃO DE SOLUÇÕES COM MÓDULOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS.....	110
5.1	PERÍODO DE DEPOSIÇÃO SEDIMENTAR.....	110
5.1.1	Fase elástica-plástica .....	110
5.1.2	Fase elástica-plástica-viscoplástica .....	114
5.1.3	Fase elástica-viscoplástica .....	118
5.2	PERÍODO DE PÓS-DEPOSIÇÃO SEDIMENTAR .....	120
5.2.1	Fase elástica-viscoplástica .....	121
5.3	ESTUDO COMPARATIVO DO EFEITO DO ADENSAMENTO SOBRE O MODELO .....	124
5.3.1	Análise global .....	127
5.3.2	Análise local .....	136
6.	ILUSTRAÇÕES NUMÉRICAS: SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA VERSUS PREDIÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS .....	144
6.1	DESCRIÇÃO DO SIMULADOR NUMÉRICO UTILIZADO .....	145
6.2	DESCRIÇÃO DO MODELO SIMULADO POR ELEMENTOS FINITOS.....	147
6.3	OBSERVAÇÕES RELATIVAS AO MODELO SEMI-ANALÍTICO.....	150
6.4	ANÁLISE 1 – MÓDULOS ELÁSTICOS CONSTANTES.....	151
6.4.1	Análise global .....	153
6.4.2	Análise local .....	160
6.5	ANÁLISE 2 – MÓDULOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS .....	169
6.5.1	Análise global .....	170
6.5.2	Análise local .....	177
7.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	185
7.1	CONCLUSÕES .....	185
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	188
	REFERÊNCIAS .....	189
	APÊNDICE A .....	194
	Discretização temporal .....	194

Discretização espacial.....	199
Fluxograma do programa termoporomecânico.....	208
Módulo térmico.....	210
Módulo poromecânico .....	212
Integração das deformações plásticas .....	213
Integração das deformações viscoplásticas .....	218
Integração simultânea das deformações irreversíveis .....	222

## 1. INTRODUÇÃO

As bacias sedimentares são estruturas naturais que se formam em grandes regiões da superfície terrestre. Devido à subsidência da litosfera, essas regiões retêm material sedimentar oriundo dos processos erosivos de rochas, que são transportados pelo roteamento sedimentar. Esses sedimentos são novamente transformados em rocha através do fenômeno da diagênese, que é o conjunto de processos físicos, químicos e biológicos. Esse processo ocorre ao longo de períodos geológicos de milhões de anos.

Essas regiões, que podem ser marinhas, continentais ou intermediárias, são ambientes naturais para a formação e acumulação de hidrocarbonetos, aquíferos subterrâneos e reservas minerais. A avaliação e exploração desses recursos requer uma compreensão abrangente dos múltiplos fenômenos acoplados que ocorrem na escala de tempo geológica. Nesse cenário, a modelagem de bacias sedimentares possui primordial importância, pois permite simular diferentes cenários da história da bacia.

Na perspectiva dos modelos analíticos, existe um hiato na existência de soluções de referência que descrevam a variação dos parâmetros que caracterizam o comportamento mecânico das bacias sedimentares. Alguns poucos modelos proveram significativas contribuições para a previsão do perfil de porosidade. Esses modelos, que possuem complexidade variável, normalmente colocam a porosidade como uma função ou exponencial ou logarítmica de algum parâmetro, como a profundidade ou a tensão efetiva vertical.

Já os modelos numéricos são mais numerosos e incorporam diferentes modelos e características das bacias sedimentares. Basicamente, eles procuram reconstruir o estado termoporomecânico das bacias, a partir da simulação dos eventos e fenômenos geológicos. Um dos aspectos principais das simulações diz respeito ao modelo mecânico usado para descrever a compactação ao longo do tempo, pois a subsidência tectônica e a deformação da bacia estão fortemente acopladas à evolução térmica e ao fluxo de fluidos. Nesse sentido, o modelo numérico deve ser capaz de lidar com os mecanismos de compactação que podem ocorrer em diferentes tipos de sedimentos.

Nas rochas siliciclásticas, por exemplo, dois tipos principais de mecanismos de compactação podem ocorrer: a compactação puramente mecânica, que ocorre devido ao rearranjo de grãos e à subsequente expulsão de fluidos dos poros e a compactação químico-mecânica, resultante da dissolução, difusão e precipitação de minerais, conhecida como mecanismo pressão-solução intergranular (IPS – *Intergranular Pressure-Solution*). O primeiro mecanismo prevalece nos estágios iniciais de uma camada recém depositada, enquanto o segundo mecanismo domina progressivamente a compactação à medida que a contínua sedimentação aumenta a temperatura e as tensões efetivas dos sedimentos (SCHMIDT; MCDONALD, 1979).

Nesse cenário, soluções que sirvam como referência desempenham importante papel. Para os simuladores numéricos, as soluções de referência auxiliam no processo de verificação dos modelos propostos. A verificação é o processo de avaliar a correção do software e a precisão numérica de uma solução para um determinado modelo matemático, no qual a associação ou o relacionamento da simulação com o mundo real não é um problema. O processo de verificação é basicamente realizado comparando as respostas do simulador aos benchmarks, que são soluções altamente precisas para modelos matemáticos específicos (OBERKAMPF; ROY, 2010).

## 1.1 OBJETIVOS E DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

O objetivo deste trabalho é a formulação de soluções de referência que descrevam os processos de sedimentação e compactação em bacias sedimentares, que sirvam como referência para simuladores numéricos. Para tal finalidade, foram desenvolvidos quatro modelos, que diferem entre si em função das leis de endurecimento plástico e viscoplástico e dos efeitos do adensamento sobre as propriedades mecânicas dos sedimentos.

O primeiro modelo desenvolvido utiliza leis de endurecimento mais simplificadas, que possibilitam o desenvolvimento analítico das respostas. Os demais modelos utilizam leis de endurecimento baseadas na análise micromecânica, que possibilitam respostas mais próximas à realidade. Eles também adicionam em sua formulação, de maneira gradativa, a influência do adensamento sobre as propriedades mecânicas do material sedimentar. A formulação e as características de cada modelo são apresentadas e exploradas.

Por fim, é feita uma comparação entre as respostas de dois modelos desenvolvidos e as predições de um simulador numérico de bacias sedimentares. Ao simulador numérico, que é sucintamente apresentado, incorporam-se os mesmos modelos utilizados na formulação das soluções de referência. O objetivo das comparações é confirmar a correção e precisão dos modelos desenvolvidos através de uma abordagem matemática diferente para o mesmo problema.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está dividido em sete capítulos. O primeiro trata da introdução do tema proposto bem como os objetivos do desenvolvimento da pesquisa.

O segundo capítulo apresenta, de forma sucinta, uma revisão sobre os conceitos básicos acerca da formação e dos mecanismos de compactação de bacias sedimentares. Nesse capítulo também é apresentada uma breve revisão sobre a modelagem e simulação dos processos de formação de bacias, do ponto de vista da geomecânica e da indústria de exploração do petróleo.

O terceiro capítulo apresenta o modelo simplificado de bacia sedimentar, com uma breve descrição do problema, a colocação das hipóteses adotadas e das equações de campo que regem o problema. O carregamento e a colocação do problema no âmbito das grandes deformações também são apresentados. É dada ênfase ao modelo constitutivo do material sedimentar, bem como ao acoplamento elástico-plástico-viscoplástico das deformações. Por fim, é apresentada a forma dos campos de tensão e velocidades que compõem a solução do problema.

O quarto capítulo apresenta a formulação mecânica do problema, para cada fase de comportamento do material, desconsiderando os efeitos do adensamento sobre os módulos elásticos do material sedimentar. São propostos dois modelos para a análise, o primeiro com leis de endurecimento plástico e viscoplástico mais simplificadas, o segundo modelo utiliza leis de endurecimento baseadas na análise micromecânica. A formulação é apresentada juntamente com as respostas para cada fase de comportamento, com o objetivo de explorar as características de cada modelo.

O quinto capítulo apresenta a formulação mecânica do problema considerando os efeitos do adensamento sobre os módulos elásticos do material. A formulação de cada fase de comportamento é abordada individualmente e, ao final do capítulo, as respostas são apresentadas e comparadas às do modelo anterior, demonstrando as principais características de cada formulação acerca dos efeitos do adensamento sobre os módulos elásticos do material sedimentar.

O sexto capítulo apresenta a comparação entre as respostas dos modelos desenvolvidos e as previsões de um simulador numérico de bacias sedimentares, que tem como objetivo confirmar a correção e precisão dos modelos desenvolvidos.

O sétimo capítulo apresenta as considerações finais do trabalho, onde são expostas as conclusões sobre os temas desenvolvidos no trabalho. Por fim, serão apresentadas as perspectivas e sugestões para os desenvolvimentos futuros da pesquisa.

## 2. PROBLEMÁTICA DAS BACIAS SEDIMENTARES

Bacias sedimentares são regiões da Terra onde o processo de subsidência da litosfera proporcionou um espaço de preenchimento e acomodação para os sedimentos (ALLEN; ALLEN, 2013). Estes sedimentos podem ser originados de rochas ígneas, metamórficas e sedimentares, e são transformados em rochas por meio da diagênese. O fenômeno da diagênese pode ser definido como todo processo físico, químico e biológico que age sobre um sedimento desde o momento em que foi depositado até que entre no domínio do metamorfismo (GILES, 1997).

### 2.1 ROTEAMENTO SEDIMENTAR

Roteamento sedimentar é o sistema geo-morfodinâmico que conecta as regiões de erosão, de transporte de sedimentos, de armazenamento temporário e da deposição de longo prazo dos sedimentos. Os sistemas de roteamento de sedimentos, antigos e modernos, são caracterizados por dinâmicas internas complexas, mas também são sensíveis às mudanças nos mecanismos externos, como o clima e a tectônica. Eles geralmente compreendem uma série de segmentos, cada um governado por um conjunto distinto de processos erosivos, transportacionais e deposicionais (ALLEN; ALLEN, 2013).

As zonas entre os segmentos envolvem complexos mecanismos de transferência de sedimentos e podem atuar como áreas de armazenamento temporário de sedimentos antes da redistribuição para o sistema descendente. O armazenamento temporário de sedimentos aumenta o tempo de transporte do sedimento através do sistema de roteamento e age, potencialmente, como um amortecimento ao sistema. A Figura 1 apresenta um esquema sobre o roteamento sedimentar.

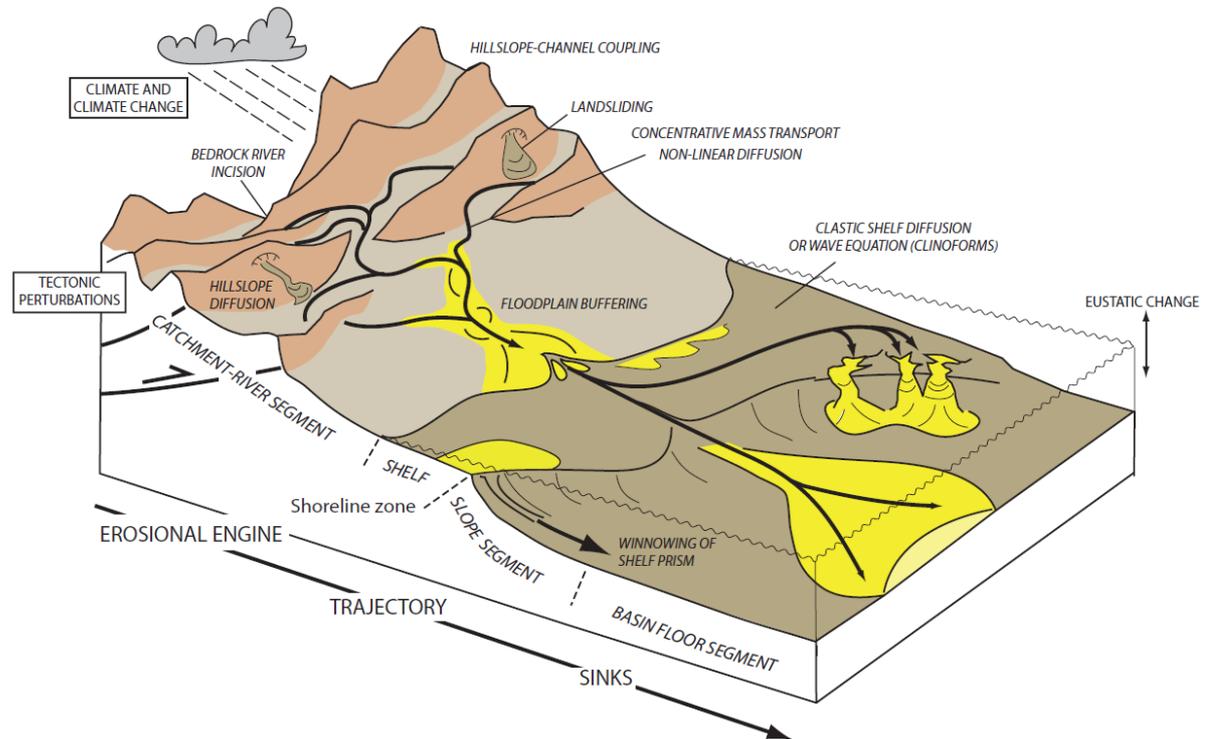


Figura 1: roteamento sedimentar (ALLEN; ALLEN, 2013)

O sedimento recebe uma carga variável de partículas desde as regiões montanhosas até o depósito final, através do intemperismo, produção de regolitos e erosão, acompanhadas pela liberação de solutos. O regolito é uma zona de mobilidade física e de mudanças químicas mediadas biologicamente, que varia em espessura de zero a mais de 100m. A maior parte do sedimento particulado e das cargas dissolvidas é transportada no ciclo hidrológico, principalmente pelo escoamento. O fluxo (ou rendimento) de sedimentos varia fortemente com a localidade, tamanho da área e com a escala de tempo das observações. Poucos rios estão em um estado prístino (sem interferência humana), e por isso a modelagem ou a previsão dos rendimentos dos sedimentos nos motores erosivos dos sistemas de roteamento é difícil (ALLEN; ALLEN, 2013). Estima-se que a produção média global de sedimentos seja de 135ton/km<sup>2</sup> por ano e que a quantidade total de sedimentos descarregados para o oceano é da ordem de  $2 \times 10^{10}$  toneladas por ano (ALLEN; ALLEN, 2005).

Uma informação importante para a modelagem e reconstrução do histórico de bacias é a taxa de deposição sedimentar. Vários trabalhos apresentam taxas de deposição sedimentar que, dentro de cada ambiente, variam entre 0.05mm/ano e 25mm/ano (Stephenson (1996), Zuo *et al.* (1997), Gutierrez e Wangen (2005), Ingall e Cappellen (1990)). Especificamente para

áreas centrais do Oceano Atlântico, Bjorlykke (2010) afirma que ela varia entre 0.001 a 0.01mm/ano.

Um banco de dados com a espessura de sedimentos atual nos oceanos foi compilado pela *National Geophysical Data Center* (DIVINS, 2003) e atualizado com informações do oceano Antártico por Whittaker *et al.* (2013). A Figura 2 apresenta o resultado destes trabalhos.

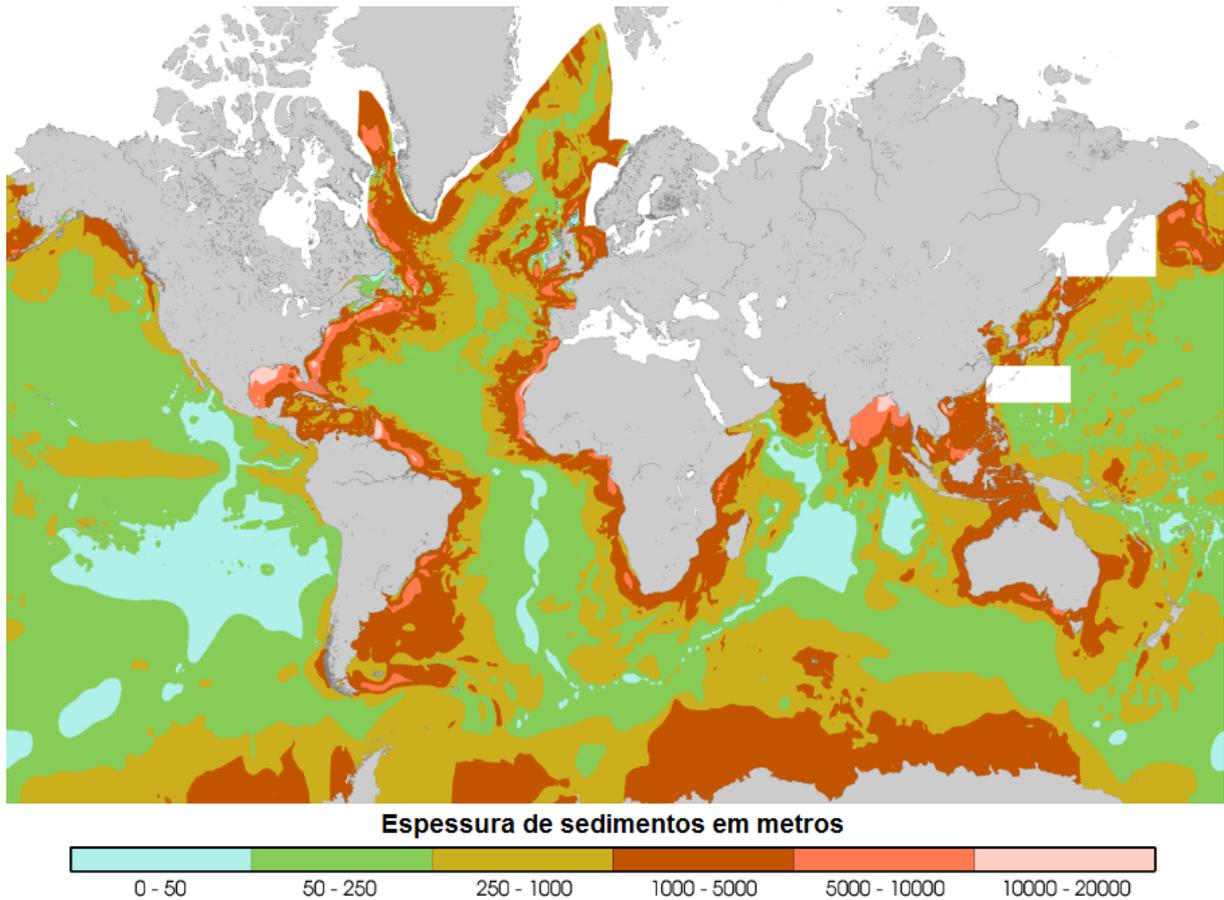


Figura 2: espessura de sedimentos atual nos oceanos (WHITTAKER *et al.*, 2013)

## 2.2 MECANISMOS DE COMPACTAÇÃO

O processo de diagênese compreende todo mecanismo físico, químico e biológico que atuam na formação de rochas sedimentares. Esses mecanismos atuam de forma acoplada, afetando diretamente uns aos outros.

Na perspectiva da análise mecânica da deformação das rochas siliciclásticas, dois mecanismos possuem destaque: a compactação puramente mecânica e a compactação químico-mecânica (Schneider *et al.* (1996), Gutierrez e Wangen (2005), Zhang e Spiers (2005)).

A compactação puramente mecânica, que envolve principalmente o rearranjo das partículas do sedimento, prevalece nas camadas superiores das bacias. A compactação químico-mecânica, que resulta do mecanismo pressão-solução induzido por tensões, ocorre nas camadas mais profundas onde tanto as tensões quanto as temperaturas são maiores.

Não há uma delimitação espacial clara entre os mecanismos, podendo existir uma zona de transição onde os dois processos ocorrem simultaneamente, com grande interdependência. Essa zona de transição pode estar localizada a uma profundidade que varia desde algumas centenas de metros, para sedimentos carbonáticos, até 1.5km para arenitos. Abaixo dessa região, os mecanismos de pressão-solução controlam o processo de deformação da bacia (Schmidt e McDonald (1979), Angevine e Turcotte (1983), Tada e Siever (1989), Renard *et al.* (1999), Yang (2000), Hu *et al.* (2010), Hueckel *et al.* (2016)).

Não há um consenso acerca da contribuição de cada processo na diminuição da porosidade na rocha sedimentar. Alguns estudos indicam que a compactação puramente mecânica pode reduzir a porosidade para valores de até 25%. Outros estudos indicam que a compactação puramente mecânica não é capaz de reduzir a porosidade além de 30-35%, sendo que a perda de porosidade adicional seria desencadeada pela compactação químico-mecânica (Boer (1977), Schneider *et al.* (1996), Bjorlykke (2014)).

Hedberg (1936) apresenta um estudo que descreve, em quatro etapas, o processo pelo qual uma argila é consolidada e litificada para formar um folhelho. A primeira etapa é caracterizada pelo rearranjo mecânico dos grãos e ocorre com porosidades na faixa de 75% a 90%. Quando uma camada de sedimentos com alta porosidade é submetida à pressão gravitacional, o fluido contido nos poros é primeiramente expulso como consequência de um rearranjo mecânico das partículas. Algum fluido adsorvido é perdido.

A segunda etapa ocorre com porosidades entre 35% a 75%. A expulsão do fluido continua. O fluido adsorvido se move dos pontos de maior tensão, na região de contato entre os grãos, para poros maiores. Com o contínuo aumento da pressão, o limite inferior deste processo é atingido quando os grãos começam a entrar em contato uns com os outros. Apenas uma pequena quantidade de fluido adsorvido permanece, e quase todo fluido contido nos poros já foi expulso.

A terceira etapa é caracterizada pela deformação mecânica, e acontece entre porosidades de 10% a 35%. As partículas já estão em contato e a consolidação só pode acontecer com a alteração da forma dos grãos. Este é um processo mecânico com flexão, esmagamento e granulação das partículas. Mais fluido adsorvido é expulso, e o reajuste químico começa.

A quarta etapa é o estágio de recristalização, abrangendo porosidades entre 0% e 10%. O reajuste químico se torna o fator dominante. O volume total é reduzido pela formação de minerais mais densos e os poros são preenchidos por estes novos minerais e sua cimentação. Este processo ocorre com grandes pressões e altas temperaturas nas profundidades do oceano.

### **2.2.1 Compactação mecânica**

A compactação puramente mecânica se dá pela acomodação dos sedimentos. Essa acomodação envolve rotação, deslizamento, flexão e fraturamento dos grãos.

Um carregamento aplicado no topo de uma camada de material sedimentar saturado é sustentado inicialmente pelo fluido contido nos poros do esqueleto. Esse carregamento é equilibrado pelo excesso de poropressão. Gradualmente o equilíbrio é transferido ao esqueleto, em função da expulsão do fluido através dos poros interconectados. Nesse processo de transferência do carregamento ocorre a redução do volume do material. O processo termina quando o excesso de poropressão é aliviado, restando ao fluido a distribuição hidrostática de pressões.

### **2.2.2 Compactação químico-mecânica**

O fenômeno de pressão-solução (IPS – *Intergranular Pressure-Solution*) é responsável pelo processo químico-mecânico de compactação. Ele ocorre devido a um gradiente de potencial químico, provocado por elevadas tensões de contato entre os grãos. Esse processo ocorre principalmente em rochas sedimentares e é descrito em três etapas: a dissolução de minerais na superfície de contato dos grãos; a difusão do soluto ao longo do contato; a precipitação dos minerais nas paredes livres dos grãos.

A mais lenta entre as três etapas controla a velocidade do processo de deformação (Rutter (1983), Angevine e Turcotte (1983), Lehner (1995), Meer e Spiers (1997), Meer *et al.* (2000), Gundersen *et al.* (2002)). Bruch (2016) ressalta que não há um consenso sobre as velocidades de cada etapa. A Figura 3 apresenta um esquema das três etapas do processo.

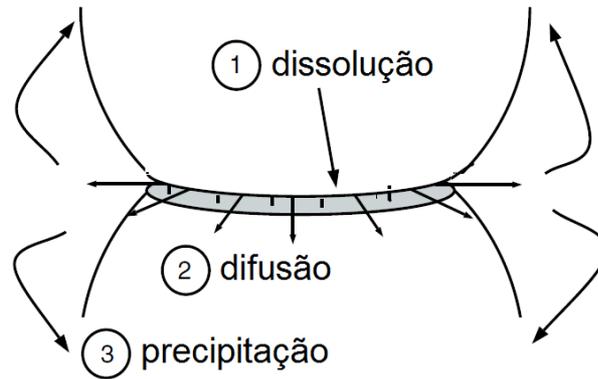


Figura 3: processo de pressão-solução (GUNDERSEN *et al.*, 2002)

### 2.3 MODELAGEM E SIMULAÇÃO DOS PROCESSOS DE FORMAÇÃO E COMPACTAÇÃO

A modelagem de bacias envolve muitos campos da ciência, como a física, a química, a biologia e a geologia. Muitos modelos foram desenvolvidos ao longo dos anos, com diferentes graus de complexidade. Muitos fatores estão relacionados a essa complexidade. O primeiro deles corresponde à escala de tempo envolvida. Do ponto de vista geológico, a escala de tempo é da ordem de milhão de anos (Ma). A bacia de Campos, por exemplo, situada na costa brasileira entre Rio de Janeiro e Espírito Santo, data do período geológico cretáceo, compreendido entre 145 e 66 milhões de anos atrás. Outro fator relacionado à geologia é a escala espacial. As bacias sedimentares são estruturas cujas dimensões são da ordem das centenas de metros até as dimensões continentais, da ordem de centenas de quilômetros.

A grande variação de porosidade, resultante do processo de compactação, é outro fator relacionado à complexidade dos modelos. Como referência, Hamilton (1959) cita porosidades iniciais de 0.72 e o fechamento total dos poros nas camadas mais profundas de bacias sedimentares marinhas.

A natureza porosa do material sedimentar juntamente com a presença de fluidos contextualiza a descrição material segundo a poromecânica, que é definida como o estudo de materiais porosos onde o comportamento é significativamente influenciado pelo fluido que permeia o material (COUSSY, 2004). O fenômeno de acoplamento hidromecânico é o resultado da descrição do comportamento material segundo essa teoria, tema inicialmente abordado por Maurice Anthony Biot.

O processo de sedimentação consiste na acreção de material sedimentar em uma determinada região. Essa característica introduz uma dificuldade adicional aos esforços de modelagem da bacia sedimentar, relativa à configuração de referência. Sendo um sistema material aberto, não é possível definir uma configuração de referência para as partículas.

Do ponto de vista das soluções de referência, o domínio sobre todos os termos do modelo matemático é mais importante que qualquer realismo físico da solução (OBERKAMPF; ROY, 2010). De fato, soluções exatas e realistas são muitas vezes evitadas para a verificação de códigos devido à presença de singularidades e/ou descontinuidades.

Os modelos matemáticos geralmente assumem a forma de equações integrais ou diferenciais. Como solução dessas equações, Oberkampff e Roy (2010) definem o conceito (mais amplo que o conceito rigoroso matemático) de solução em forma de funções elementares (logarítmicas, exponenciais, trigonométricas, por exemplo), funções especiais (*LambertW*, por exemplo) e solução numérica de sistemas de equações diferenciais ordinárias ou parciais (séries, Runge-Kutta, por exemplo), de variáveis independentes. Os modelos desenvolvidos nesse trabalho consistem em combinações dessas soluções.

No contexto da geomecânica, sob o ponto de vista de modelos analíticos, alguns pesquisadores forneceram significativas contribuições. Athy (1930) propôs um estudo puramente fenomenológico, resultando em uma relação de decréscimo exponencial da porosidade com o aumento da profundidade, descrita apenas por uma porosidade inicial e um parâmetro de compactação. De forma análoga, recalque, densidade e compactação são modeladas, para diferentes tipos de sedimentos, sob a forma de leis exponenciais em função da profundidade.

Hubbert e Rubey (1959) formularam uma lei de porosidade função da tensão efetiva de Terzaghi. Smith (1971) descreve um modelo matemático de sedimentação e compactação de rochas xistosas, onde a porosidade é descrita com uma lei exponencial dependente da tensão efetiva vertical. O modelo considera a dependência da permeabilidade na porosidade, e a dependência da viscosidade de água na salinidade, temperatura e pressão.

Schneider *et al.* (1996) desenvolveram uma extensão do modelo de Athy. O modelo é descrito por dois termos exponenciais, funções da tensão efetiva vertical e que tem dois diferentes parâmetros de compactação para porosidades altas e baixas.

Hantschel e Kauerauf (2009) citam dois modelos: Compressibility Model e Mudstone Model. O primeiro modelo assume um decréscimo exponencial na compressibilidade entre valores de referência, que correspondem à mínima porosidade. O segundo modelo, que se destaca especialmente para rochas clássicas, assume uma lei logarítmica para o índice de vazios, que é função da tensão efetiva vertical.

Sob o ponto de vista de modelos numéricos, Gibson (1958) foi o precursor na modelagem de compactação de sedimentos utilizando a teoria da consolidação. No trabalho foi assumida uma taxa de deposição sedimentar constante, uma única litologia e propriedades constantes para os sedimentos. A teoria foi baseada na equação de consolidação para pequenas deformações de Terzagui, aplicada à análise da consolidação de depósitos superficiais do solo. Schneider e Hay (2001) desenvolveram um modelo macroscópico visco-elasto-plástico para simular a compactação mecânica e químico-mecânica de arenitos quartzosos. Utilizou-se o software Temispack para as simulações computacionais bidimensionais.

Zhao *et al.* (2001) desenvolveram um modelo em elementos finitos para simular a interação rocha-fluido em bacias sedimentares saturadas. O modelo simula as reações que ocorrem entre os compostos químicos do fluido e os minerais sólidos da rocha. Gutierrez e Wangen (2005) modelaram a compactação e o desenvolvimento de excesso de poropressão ao longo do período de deposição sedimentar em bacias do Mar do Norte. O modelo unidimensional descreve a porosidade em função da tensão efetiva vertical. Bernaud *et al.* (2006) desenvolveram um modelo constitutivo poroelastoplástico em grandes deformações. O modelo foi implementado em uma ferramenta computacional baseada em elementos finitos, para a simulação bidimensional dos processos de deposição e compactação mecânica em bacias sedimentares.

Buiter *et al.* (2009) analisaram a inversão de bacias sedimentares extensionais através de um modelo acoplado termomecânico, com critério de plasticidade de Drucker-Prager. Mello *et al.* (2009) desenvolveram um modelo em elementos finitos para resolver numericamente alguns processos geológicos envolvidos na evolução de bacias sedimentares, tais como deposição de sedimentos, geração de hidrocarbonetos, escoamento de múltiplos fluidos e fluxo de calor em meios porosos. Gunzburger (2010) estudou a bacia leste de Paris a partir da modelagem numérica de rochas calcárias. Jarosinski *et al.* (2011) estudaram os mecanismos de inversão tectônica da bacia de Panónia, na Europa Central. Os autores utilizaram uma ferramenta computacional baseada no método dos elementos finitos para simular o comportamento dos sedi-

mentos por meio de um modelo em estado plano de deformação com acoplamento termo-elastoviscoplastico.

Duretz *et al.* (2016) utilizaram o método das diferenças finitas aplicado a um modelo acoplado termomecânico bidimensional para simular os mecanismos de obducção do Ofiolito de Omã. Akaki *et al.* (2016) desenvolveram um modelo termo-químico-mecânico em grandes deformações e um programa em elementos finitos bidimensional para simular os efeitos da variação de pressão causada por terremotos na fossa de Nankai sobre o comportamento de hidratos de metano. Brüch (2016) desenvolveu um modelo constitutivo para o material poroso saturado no contexto da termoporomecânica finita e uma ferramenta computacional baseada no método dos elementos finitos para representar os processos de formação e compactação gravitacional de uma bacia sedimentar.

No contexto da exploração do petróleo, o primeiro programa computacional para a simulação de bacias foi desenvolvido por Yüklér *et al.* (1979). A característica principal era a simulação do fluxo de calor unidimensional. Adicionalmente foram introduzidos modelos geoquímicos para a construção de mapas de geração e expulsão de petróleo, para a avaliação da maturidade da rocha fonte. Uma das principais tarefas foi calcular e calibrar o histórico de temperatura durante a evolução de uma bacia geológica. Uma vez conhecidas as paleo-temperaturas, as equações para a cinética química poderiam ser usadas para avaliar as taxas de craqueamento da geração de petróleo. Outra parte importante da análise foi a previsão das poropressões. O estado de compactação e a porosidade relacionada facilitaram a determinação de condutividades térmicas para cálculos de fluxo de calor (HANTSCHHEL; KAUERAUF, 2009).

Durante a década de noventa novos programas foram criados trazendo novidades, tais como a utilização de modelos de fluxo de fluidos com três fases e a análise bidimensional da lei de Darcy (Ungerer *et al.* (1990), Hermanrud (1993)).

Ao final da década de noventa uma nova geração de programas de modelagem foi lançada, mudando o fluxo de trabalho da maioria dos estudos de modelagem de bacias. Muitas características novas foram relacionadas à migração de petróleo e as características dos reservatórios. A maioria dos programas e ferramentas focou-se em funções tridimensionais com recursos aprimorados para a construção de modelos e o aumento do desempenho do simulador. A partir desse momento os cálculos dos campos de temperatura e poropressão foram realizados de forma tridimensional. A modelagem do fluxo dos fluidos também passou a ser tridimensional (HANTSCHHEL; KAUERAUF, 2009).

### 3. MODELO SIMPLIFICADO DE BACIA SEDIMENTAR

Neste capítulo é definido o modelo mecânico simplificado de bacia sedimentar, com base em hipóteses sobre o cenário geológico, a geometria e condições de carregamento que viabilizam a sua análise via abordagem analítica do problema.

#### 3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Bacias sedimentares são regiões da crosta terrestre que resultam de um processo de subsidência da litosfera, com acúmulo e acomodação dos sedimentos. Esse processo é simplificado da seguinte forma: os sedimentos são depositados ao longo de milhões de anos sobre uma região de acumulação.

Enquanto o processo de sedimentação está em transcurso, as camadas de sedimentos encontram-se em processo de compactação gravitacional. Essa compactação deforma gradativamente o material sedimentar, reduzindo consideravelmente a sua porosidade, expulsando os fluidos dos seus poros e modificando as características termoporomecânicas. O fenômeno da diagênese produz a litificação dos sedimentos, que consiste na formação da rocha sedimentar. Durante a litificação, o material é submetido à compactação mecânica e químico-mecânica. As deformações mecânicas ocorrem nas camadas mais superficiais, enquanto a compactação químico-mecânica ocorre nas camadas mais profundas, onde os níveis de tensão e temperaturas são mais intensos. Em uma zona intermediária, os dois processos ocorrem simultaneamente.

Durante a evolução da bacia sedimentar, a taxa de sedimentação pode variar consideravelmente. Taxas positivas correspondem aos períodos de acreção de sedimentos, enquanto taxas negativas correspondem à erosão da rocha sedimentar.

#### 3.2 HIPÓTESES ADOTADAS

A partir da sucinta descrição realizada na seção anterior, coloca-se um conjunto de suposições ao problema, que consistem nas hipóteses do modelo simplificado de bacia sedimentar. Essas hipóteses dizem respeito ao material, geometria e carregamento.

A primeira hipótese é feita acerca do material sedimentar. O material sedimentar é isótropo na sua configuração de referência. Adicionalmente, a anisotropia induzida pelo processo de compactação (ovalização dos poros) é desconsiderada.

Na mecânica dos meios porosos, o conceito de esqueleto tem primordial importância. O esqueleto é formado pela matriz (composta tanto pelo material sólido quanto por possíveis poros oclusos) e pelo volume dos poros interconectados sem a presença de fluido (Figura 4). Do ponto de vista da transformação geométrica irreversível, considera-se que a fase sólida do esqueleto do meio poroso é incompressível e, assim, toda a variação volumétrica do material se dá exclusivamente pela variação irreversível dos poros interconectados.

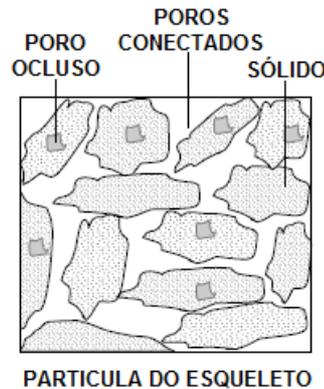


Figura 4: descrição geométrica do esqueleto (COUSSY, 2004).

Para o modelo proposto, considera-se que o processo de compactação ocorre sob condições oedométricas, sem a presença da tectônica de placas (carregamentos laterais). Tais hipóteses implicam em uma cinemática unidimensional para a bacia sedimentar.

A bacia sedimentar é geometricamente modelada como uma camada de dimensões horizontais infinitas, perpendiculares à direção  $\underline{e}_3$ , assentada sobre um substrato rígido e sem atrito localizado no plano  $x_3 = 0$ . Em função da acreção de sedimentos (através da massa de sedimentos depositados por unidade de área  $M_d(t)$ ) e da compactação (em função do campo gravitacional  $\underline{g} = -g\underline{e}_3$ ), a espessura da camada sedimentar varia com o tempo. Assumindo que o topo da bacia sedimentar permanece horizontal, a posição da sua fronteira superior é definida pela lei de compactação gravitacional  $x_3 = H(t)$ .

Na Figura 5, apresenta-se a geometria do modelo:

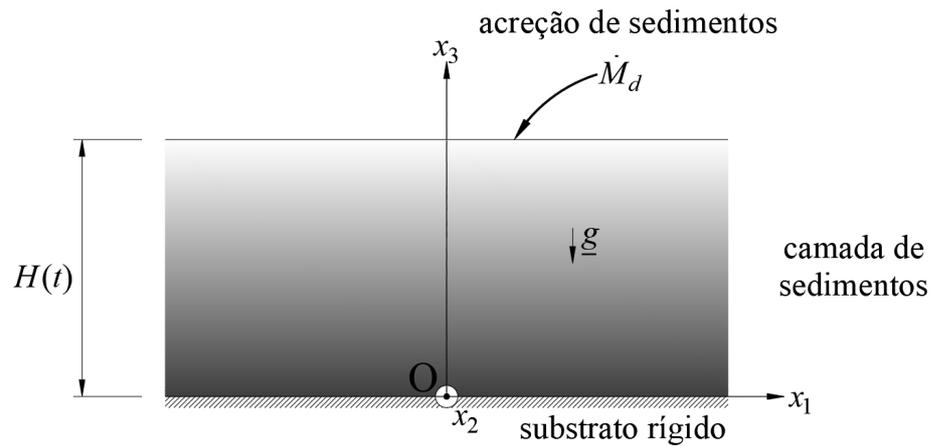


Figura 5: geometria do modelo simplificado.

Considera-se uma evolução em condições drenadas, onde não há desenvolvimento de excesso de poropressão. O problema também é colocado sob condições isotérmicas, desconsiderando o campo geotérmico e seu efeito no comportamento do sedimento.

As hipóteses descritas são resumidas a seguir:

1. Material sedimentar isotrópico na configuração de referência, e desconsideração da anisotropia induzida pela compactação;
2. Invariância de volume da fase sólida do esqueleto durante a transformação geométrica irreversível;
3. Compactação oedométrica (ausência de sequências tectônicas);
4. Modelo geométrico exposto na Figura 5;
5. Evolução em condições drenadas e isotérmicas;
6. Deformações elásticas infinitesimais.

### 3.3 EQUAÇÕES DE CAMPO QUE REGEM O PROBLEMA

A hipótese de cinemática unidimensional na direção  $e_3$  permite definir as grandezas em função da posição  $x_3$  e do tempo  $t$ .

A evolução da bacia tem caráter quase estático, o que possibilita negligenciar as forças inerciais. Assim, o balanço de momentum tem a forma

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}(x_3, t) + \rho(x_3, t) \underline{g} = \underline{0} \quad (1)$$

onde  $\underline{\underline{\sigma}}$  é o tensor de tensão de Cauchy e  $\rho$  é a massa específica do material na configuração atual.

A evolução da massa específica do material sedimentar pode ser descrita pela expressão euleriana da conservação de massa, dada por:

$$\frac{\partial \rho(x_3, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(x_3, t) \underline{u}(x_3, t)) = 0 \quad (2)$$

onde  $\underline{u}$  é o campo euleriano de velocidade das partículas de sedimento.

A conservação de massa, em sua formulação lagrangiana, é dada por:

$$\rho(x_3, t) = \frac{\rho_0}{J(x_3, t)} \quad (3)$$

onde  $\rho_0$  é a massa específica inicial das partículas de sedimento e  $J = \frac{d\Omega_t}{d\Omega_0}$  é o jacobiano da transformação (ou dilatação volumétrica), que corresponde a razão entre os volumes de uma partícula na configuração atual e de referência e equivale a uma medida de dilatação volumétrica das partículas.

### 3.4 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO DAS EQUAÇÕES QUE REGEM O PROBLEMA

Como a bacia sedimentar é um sistema material aberto, supõe-se que as partículas de sedimentos depositadas no topo da camada encontram-se em estado natural. Essa condição é expressa por:

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_3 = H(t), t) = \underline{\underline{0}} \quad (4)$$

$$\rho(x_3 = H(t), t) = \rho_0 \quad (5)$$

$$J(x_3 = H(t), t) = 1 \quad (6)$$

Como a camada de sedimentos é assentada sobre um substrato rígido e sem atrito, as partículas sedimentares localizadas na posição  $x_3 = 0$  apresentam velocidade nula. A partir dessa observação, define-se a seguinte condição de contorno sobre o campo de velocidade:

$$\underline{u}(x_3 = 0, t) \cdot \underline{e}_3 = 0 \quad (7)$$

A Figura 6 apresenta a geometria do modelo simplificado (repetido) com a condição inicial de tensões e a condição de contorno do campo euleriano de velocidade.

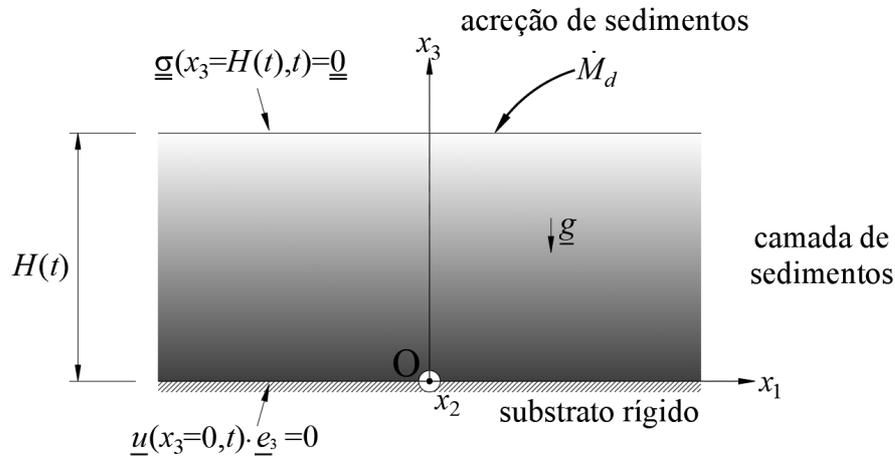


Figura 6: geometria do modelo simplificado (repetido) com condição inicial de tensões e condição de contorno do campo de velocidades.

### 3.5 CARREGAMENTO E TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA

A massa de sedimentos depositados por unidade de área  $M_d(t)$  consiste em um dado do problema e caracteriza a intensidade do carregamento gravitacional da bacia sedimentar. No intervalo  $[0, t]$  ela é calculada por:

$$M_d(t) = \int_0^{H(t)} \rho(x_3, t) dx_3 \quad (8)$$

É assumido que a taxa de massa depositada  $\dot{M}_d(t)$  é conhecida. A partir da equação anterior, a derivada material da massa depositada é dada por:

$$\dot{M}_d(t) = \dot{H}(t)\rho_0 + \int_0^{H(t)} \frac{\partial \rho(x_3, t)}{\partial t} dx_3 \quad (9)$$

Combinando a expressão anterior com (2), juntamente com a condição de contorno (7), tem-se:

$$\dot{H}(t) = \frac{\dot{M}_d(t)}{\rho_0} + u_3(H(t), t) \quad (10)$$

onde  $u_3$  é a componente do campo euleriano de velocidade das partículas  $\underline{u}$  na direção  $\underline{e}_3$ .

Adicionalmente, é usual que a massa de sedimentos depositados por unidade de área seja uma função monotônica crescente, da forma:

$$M_d(t) = \dot{M}_d t \quad (11)$$

onde  $\dot{M}_d$  corresponde a um valor constante.

A descrição do problema em grandes deformações demanda a definição do gradiente da transformação  $\underline{F}$ . Para isso, torna-se necessário a definição de uma configuração de referência para as partículas. No entanto, como o problema é descrito por um aporte contínuo de material sedimentar (ou seja, a bacia sedimentar corresponde a um sistema material aberto), torna-se impossível definir uma configuração de referência para o conjunto de partículas sedimentares que formam a bacia. Porém, é possível definir uma configuração de referência para cada partícula assentada. Essa configuração de referência corresponde à posição da partícula no tempo  $T(x_3, t)$  em que ela é assentada na bacia sedimentar.

Relativo a essa configuração de referência de cada partícula, é introduzido o conceito de dilatação vertical. A razão entre a altura de uma partícula na configuração atual no tempo  $t$  e a

sua altura na configuração de referência no tempo  $T(x_3, t)$  é representada pela dilatação vertical  $\Lambda(x_3, t)$ . A Figura 7 apresenta a sua interpretação física.

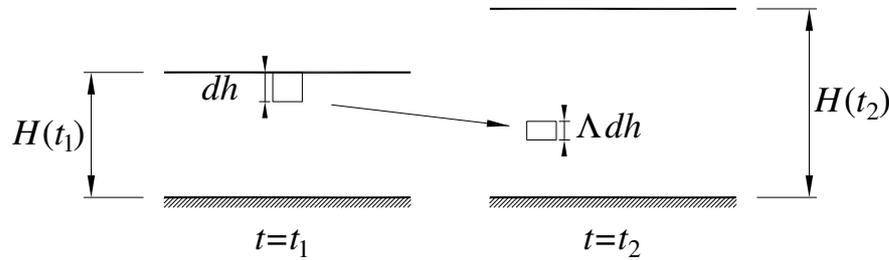


Figura 7: interpretação física da dilatação vertical.

A partir da sua definição, tem-se a condição inicial para a partícula assentada:

$$\Lambda(x_3 = H(t), t) = 1 \quad (12)$$

Após a definição da dilatação vertical, o gradiente da transformação geométrica de uma partícula entre a configuração de referência e a configuração atual é dado por:

$$\underline{\underline{F}}(x_3, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \Lambda(x_3, t) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (13)$$

Dada a relação  $J = \det \underline{\underline{F}}$ , o jacobiano da transformação geométrica é, portanto, igual a:

$$J = \det \underline{\underline{F}} = \Lambda \quad (14)$$

Como  $\underline{\underline{F}}(x_3, t)$  e  $\Lambda(x_3, t)$  dependem da coordenada  $x_3$  na configuração atual, essas quantidades aparecem como campos eulerianos, mesmo que as suas definições sejam inspiradas em uma descrição lagrangiana do movimento.

### 3.6 COMPONENTES DO MODELO CONSTITUTIVO DO MATERIAL SEDIMENTAR

A apresentação do modelo constitutivo do material sedimentar é feita através de uma abordagem macroscópica para a descrição de um meio poroso na ausência de fluidos. Para isso, considera-se que o conceito porosidade refere apenas aos poros interconectados.

Em termos de volumes infinitesimais do meio poroso, a porosidade lagrangiana  $\phi$  é definida como a razão entre o volume dos poros interconectados na configuração atual  $d\Omega_t^p$  e o volume total na configuração de referência  $d\Omega_0$ . Em contrapartida, a porosidade euleriana  $\varphi$  é definida como a razão entre o volume dos poros interconectados na configuração atual  $d\Omega_t^p$  e o volume total na configuração atual  $d\Omega_t$ . Essas definições consistem em adaptações ao exposto por Coussy (2004) ao caso do um meio poroso na ausência de fluido. As equações (15) e (16) apresentam essas definições.

$$\phi = \frac{d\Omega_t^p}{d\Omega_0} \quad (15)$$

$$\varphi = \frac{d\Omega_t^p}{d\Omega_t} \quad (16)$$

A relação entre as porosidades lagrangiana e euleriana se dá por meio do jacobiano da transformação:

$$\phi = J\varphi \quad (17)$$

Um volume infinitesimal do meio poroso na configuração atual está submetido a um estado de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ . É assumido que, na escala macroscópica, a decomposição multiplicativa da transformação geométrica do volume infinitesimal em uma parte elástica e uma parte irreversível é válida para meios porosos (DORMIEUX; MAGHOUS, 1999). Ao remover o carregamento aplicado ao volume na configuração de referência  $d\Omega_0$ , o volume  $d\Omega_t$  passa à configuração relaxada  $d\Omega_u$ . A transformação geométrica elástica corresponde à transformação entre  $d\Omega_t$  e  $d\Omega_u$  que, segundo a hipótese colocada na seção 3.2, é considerada infinitesimal. A decomposição multiplicativa da transformação geométrica é apresentada na Figura 8.

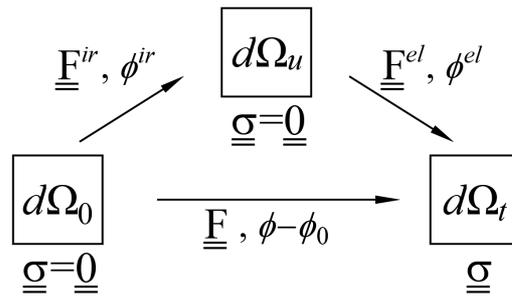


Figura 8: decomposição do gradiente de transformação.

O gradiente da transformação geométrica  $\underline{\underline{F}}$  do esqueleto pode ser decomposto entre o gradiente da transformação geométrica elástica  $\underline{\underline{F}}^{el}$  e o gradiente da transformação geométrica irreversível  $\underline{\underline{F}}^{ir}$  (DORMIEUX; MAGHOUS, 1999):

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^{el} \cdot \underline{\underline{F}}^{ir} \quad (18)$$

As componentes elásticas e irreversíveis do jacobiano da transformação são definidas como:

$$\begin{aligned} J_e &= \det \underline{\underline{F}}^e = \frac{d\Omega_t}{d\Omega_u} \\ J_{ir} &= \det \underline{\underline{F}}^{ir} = \frac{d\Omega_u}{d\Omega_0} \end{aligned} \quad (19)$$

A partir da decomposição multiplicativa (18) e das expressões anteriores, pode-se definir:

$$J = J_e J_{ir} \quad (20)$$

A parte elástica e a parte irreversível da variação de porosidade são definidas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \phi^{el} &= \frac{d\Omega_t^p - d\Omega_u^p}{d\Omega_u} \\ \phi^{ir} &= \frac{d\Omega_u^p - d\Omega_0^p}{d\Omega_0} \end{aligned} \quad (21)$$

Assim, a variação da porosidade lagrangiana pode ser colocada como:

$$\phi - \phi_0 = \phi^{ir} + J_{ir} \phi^{el} \quad (22)$$

Conforme colocado na seção 3.2, considera-se que a fase sólida que constitui o esqueleto é incompressível. Mais especificamente, ela é incompressível durante a transformação irreversível do volume infinitesimal poroso. Essa consideração permite o seguinte balanço de massa sólida:

$$d\Omega_u^s = d\Omega_0^s \quad (23)$$

Essa expressão pode ser reescrita, a partir do volume infinitesimal total e dos poros, como:

$$d\Omega_u - d\Omega_u^p = d\Omega_0 - d\Omega_0^p \quad (24)$$

Dividindo a expressão por  $d\Omega_0$ , tem-se:

$$\frac{d\Omega_u}{d\Omega_0} = \frac{d\Omega_0}{d\Omega_0} + \frac{d\Omega_u^p - d\Omega_0^p}{d\Omega_0} \quad (25)$$

Substituindo as equações (19) e (21) na expressão anterior, determina-se a relação entre  $J_{ir}$  e  $\phi^{ir}$ :

$$J_{ir} = 1 + \phi^{ir} \quad (26)$$

Como a transformação geométrica elástica é considerada infinitesimal, tem-se que  $\underline{\underline{F}}^e \approx \underline{\underline{1}}$ ,  $J_e \approx 1$  e  $|\phi^{el}| \ll 1$ . Assim, o gradiente de transformação geométrica, o jacobiano da transformação, e o balanço de porosidade lagrangiana podem ser aproximados como:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^{el} \cdot \underline{\underline{F}}^{ir} \approx \underline{\underline{F}}^{ir} \quad (27)$$

$$J = J_e J_{ir} \approx J_{ir} \quad (28)$$

$$\phi - \phi_0 = \phi^{ir} + J_{ir} \phi^{el} \approx \phi^{ir} \quad (29)$$

Substituindo a equação (26) na expressão(29), tem-se:

$$J_{ir} = 1 + \phi - \phi_0 \quad (30)$$

Substituindo (28) em (17), e substituindo na equação anterior, chega-se à expressão:

$$\phi = 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{ir}} \quad (31)$$

A equação anterior relaciona a porosidade euleriana à porosidade lagrangiana inicial e à componente irreversível do jacobiano da transformação.

O gradiente  $\underline{\underline{F}}^{ir}$  engloba as componentes instantânea e diferida da transformação irreversível do esqueleto sólido. Neste trabalho, a componente instantânea será modelada no contexto da plasticidade finita, enquanto a componente diferida será modelada via componente viscoplástica finita da deformação.

### 3.6.1 Modelo de comportamento elástico do material sedimentar

O comportamento elástico linear é classicamente descrito pela lei de comportamento

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{el} \quad (32)$$

onde  $\underline{\underline{C}}$  é o tensor dos módulos elásticos e  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{el}$  é o tensor de deformação elástica infinitesimal associado à sequência elástica  $\underline{\underline{F}}^{el}$  das partículas materiais.

O tensor dos módulos elásticos  $\underline{\underline{C}}$  caracteriza as propriedades elásticas do material na configuração relaxada  $d\Omega_u$  e, assim, ele depende das modificações da geometria (microestrutura) que ocorreram durante a sequência irreversível  $\underline{\underline{F}}^{ir} \rightarrow \underline{\underline{C}}(\underline{\underline{F}}^{ir})$ .

Considerando um material isotrópico, o tensor dos módulos elásticos é dado por

$$\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{F}}^{ir}) = K(\underline{\underline{F}}^{ir})\underline{\underline{1}}\otimes\underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{F}}^{ir})\left(\underline{\underline{1}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}}\otimes\underline{\underline{1}}\right) \quad (33)$$

onde  $K$  e  $\mu$  são os módulos de compressão e cisalhamento, respectivamente.  $\underline{\underline{1}}$  e  $\underline{\underline{1}}$  são os tensores unitários de quarta e primeira ordem, respectivamente.

Adicionalmente, as relações entre os módulos de compressão e cisalhamento e os módulos de Young  $E$  e de Poisson  $\nu$  são dadas por:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (34)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (35)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (36)$$

onde  $\lambda$  é o primeiro coeficiente de Lamé.

### 3.6.2 Modelo de comportamento plástico do material sedimentar

A componente plástica do modelo constitutivo tem como objetivo representar a deformação resultante da compactação puramente mecânica, originadas pela acomodação do material sedimentar. As características fundamentais que descrevem o comportamento plástico são o critério de plasticidade, a regra de fluxo plástico e a lei de endurecimento associada. O desenvolvimento é apresentado no contexto das deformações plásticas irreversíveis, ou seja, na ausência de deformações irreversíveis de outra natureza, onde a porosidade euleriana é função apenas da dilatação volumétrica plástica  $\varphi = 1 - \frac{1-\phi_0}{J_p}$ .

Para a formulação de um critério de plasticidade isotrópico simplificado, recorre-se ao conceito do “*cap model*”. Referenciando-se ao plano ( $p = -I_1/3 = -\text{tr}\underline{\underline{\sigma}}/3$ ,  $q = \sqrt{J_2} = \sqrt{\underline{\underline{s}}:\underline{\underline{s}}/2}$ ) exposto na Figura 9, a superfície de escoamento é delimitada no domínio dilatante por uma linha

reta que representa o regime de falha frágil, denominada de linha de estado crítico. Já o domínio contractivo, que corresponde à falha dúctil e ao endurecimento do material, é delimitado por uma linha reta inclinada. O critério que descreve esse domínio é descrito pela seguinte equação:

$$f^p(\underline{\underline{\sigma}}, p_c) = p + aq - p_c = 0 \quad (37)$$

onde  $a$  é um escalar positivo e constante que controla a inclinação da parte dúctil do critério de plastificação e  $p_c$  é a pressão de consolidação do solo (semelhante ao introduzido no modelo Cam-Clay), que define o parâmetro de endurecimento do modelo plástico.

Ressalta-se que esse critério de plasticidade simplificado já foi utilizado em aplicações da engenharia de petróleo (por exemplo, Charlez e Fairhurst (1997)). É importante observar que, na ausência tectônica de placas, a compactação produzirá estados de tensão puramente contractivos.

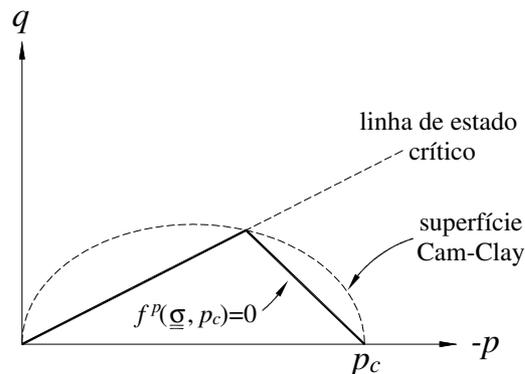


Figura 9: representação esquemática do critério de plasticidade inclinado.

Adotando uma regra de fluxo associada (HILL, 1950), a taxa de deformação plástica tem a forma:

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\chi} \frac{\partial f^p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (38)$$

onde  $\dot{\chi}$  é o multiplicador plástico não-negativo.

A expressão anterior é reescrita para o critério plástico (37), resultando em:

$$\underline{d}^p = \dot{\chi} \left( -\frac{1}{3} \underline{1} + \frac{a}{2\sqrt{J_2}} \underline{s} \right) \quad (39)$$

A lei de endurecimento plástico descreve a evolução da pressão de consolidação  $p_c$  em função do adensamento irreversível plástico do material. A sua formulação partiu de uma análise micromecânica, no contexto das grandes deformações plásticas, para determinar a carga limite de uma esfera oca submetida a uma compressão isótropa (BARTHÉLÉMY; DORMIEUX; MAGHOUS, 2003). Essa lei previne o desenvolvimento de porosidades negativas sob altos níveis de tensão de compressão isotrópica, levando a pressão de consolidação a um valor infinito quando  $\varphi \rightarrow 0$  ( $J_p \rightarrow J_p^{cr} = 1 - \phi_0$ ), conforme Deudé *et al.* (2004). Brüch *et al.* (2019) propuseram uma extensão dessa lei, com a utilização de um expoente de calibração do modelo  $m_p$ , resultando na seguinte forma:

$$p_c(J_p) = p_{c0} \left( \frac{\ln \varphi}{\ln \phi_0} \right)^{m_p} = p_{c0} \left( \frac{\ln \left( 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_p} \right)}{\ln \phi_0} \right)^{m_p} \quad (40)$$

onde  $p_{c0}$  é a pressão de consolidação plástica inicial do material sedimentar.

Conforme exposto, a principal característica dessa lei diz respeito ao seu comportamento assintótico na vizinhança de  $\varphi = 0$  (ou seja, na vizinhança de  $J_p^{cr}$ ):

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} p_c(\varphi) = \lim_{J_p \rightarrow J_p^{cr}} p_c(J_p) = +\infty \quad (41)$$

Na Figura 10, apresenta-se a variação da pressão de consolidação plástica para diferentes valores de  $p_{c0}$  e  $m_p$ , com  $\phi_0 = 0.65$ .

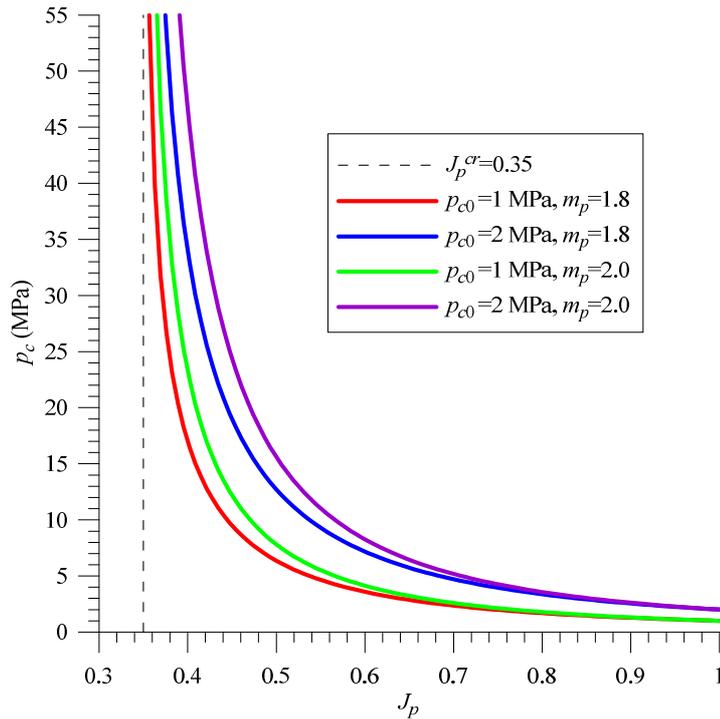


Figura 10: pressão de consolidação plástica para diferentes valores de  $p_{c0}$  e  $m_p$ , com  $\phi_0 = 0.65$ .

A taxa da lei de endurecimento plástica é dada por:

$$\dot{p}_c(J_p) = -h_p(J_p) \frac{\dot{J}_p}{J_p} \quad (42)$$

onde  $h_p$  é o módulo de endurecimento plástico, dado por

$$h_p(J_p) = \frac{m_p(1-\phi_0)p_c}{J_p \phi \ln \phi} = \frac{m_p(1-\phi_0)p_c}{J_p \left(1 - \frac{1-\phi_0}{J_p}\right) \ln \left(1 - \frac{1-\phi_0}{J_p}\right)} \quad (43)$$

O módulo  $h_p$  apresenta importante papel na formulação do sistema que descreve o comportamento mecânico do material sedimentar.

Assim como a pressão de consolidação plástica, o módulo de endurecimento também assume valores infinitos na vizinhança de  $\phi = 0$  (ou seja, na vizinhança de  $J_p^{cr}$ ):

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} h_p(\varphi) = \lim_{J_p \rightarrow J_p^{cr}} h_p(J_p) = +\infty \quad (44)$$

Sua variação é apresentada na Figura 11, para diferentes valores de  $p_{c0}$  e  $m_p$ , com  $\phi_0 = 0.65$ .

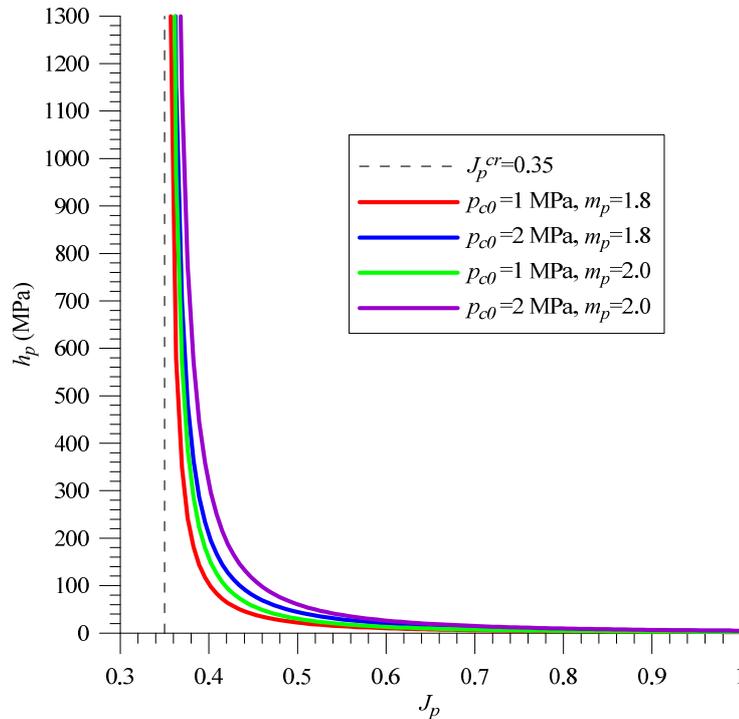


Figura 11: variação do módulo de endurecimento plástico para diferentes valores de  $p_{c0}$  e  $m_p$ , com  $\phi_0 = 0.65$ .

### 3.6.3 Modelo de comportamento viscoplástico do material sedimentar

A componente viscoplástica do modelo constitutivo visa representar a deformação resultante da compactação químico-mecânica, induzida pelo mecanismo pressão-solução intergranular (IPS). Assim como no modelo plástico, as características fundamentais que descrevem o comportamento viscoplástico são o critério de viscoplasticidade, a regra de fluxo viscoplástico e a lei de endurecimento associada. O desenvolvimento é apresentado no contexto das deformações viscoplásticas irreversíveis, ou seja, na ausência de deformações irreversíveis de outra natureza, onde a porosidade euleriana é função apenas da dilatação volumétrica viscoplástica

$$\varphi = 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{vp}}$$

O critério de viscoplasticidade  $f^{vp}$  utilizado é análogo ao critério plástico abordado na seção precedente, apresentando as mesmas características em relação ao comportamento dilatante e contractivo. Referenciando-se ao plano ( $p = -I_1/3 = -\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}/3$ ,  $q = \sqrt{J_2} = \sqrt{\underline{\underline{s}}:\underline{\underline{s}}/2}$ ), a superfície de escoamento é apresentada na Figura 12. A formulação do domínio contractivo é dada na equação (45).

$$f^{vp}(\underline{\underline{\sigma}}, p_{vp}) = p + aq - p_{vp} = 0 \quad (45)$$

onde  $p_{vp}$  é a pressão de consolidação do solo que define o parâmetro de endurecimento do modelo viscoplástico.

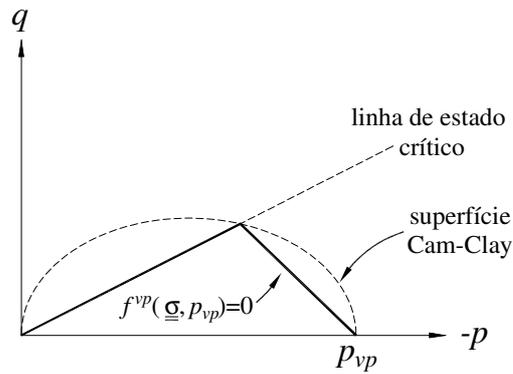


Figura 12: representação esquemática do critério de viscoplasticidade inclinado.

A taxa de deformação viscoplástica utilizada está baseada no princípio da teoria de Perzyna (PERZYNA, 1966)

$$\underline{\underline{d}}^{vp} = \frac{\langle f^{vp} \rangle^n}{\eta_{vp}} \frac{\partial g^{vp}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (46)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  corresponde a notação de Macaulay,  $\eta_{vp}$  é o coeficiente de viscosidade viscoplástica do material,  $n$  é o expoente de viscosidade e  $g^{vp}$  é o potencial viscoplástico que define a direção da taxa de deformação viscoplástica. Neste trabalho, adota-se  $n=1$  e  $g^{vp} = f^{vp}$ .

Para o critério viscoplástico (45), a expressão anterior resulta em:

$$\underline{d}^{vp} = \frac{\langle f^{vp} \rangle}{\eta_{vp}} \left( -\frac{1}{3} \underline{1} + \frac{a}{2\sqrt{J_2}} \underline{s} \right) \quad (47)$$

A lei de endurecimento viscoplástica descreve a evolução da pressão de consolidação  $p_{vp}$  em função do adensamento irreversível viscoplástico do material. Ela foi formulada por Brüch *et al.* (2016) e decorre da ideia heurística de que a similaridade pode ser preservada entre o modelo plástico e o modelo viscoplástico:

$$p_{vp}(J_{vp}) = p_{vp0} \left( \frac{\ln \varphi}{\ln \phi_0} \right)^{m_{vp}} = p_{vp0} \left( \frac{\ln \left( 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{vp}} \right)}{\ln \phi_0} \right)^{m_{vp}} \quad (48)$$

onde  $p_{vp0}$  é a pressão de consolidação viscoplástica inicial do material sedimentar e  $m_{vp}$  é uma constante material, responsável por controlar a magnitude relativa das deformações viscoplásticas em relação às deformações plásticas.

Assim como no caso plástico, a principal característica da lei de endurecimento viscoplástico diz respeito ao seu comportamento assintótico na vizinhança de  $\varphi = 0$  (ou seja, na vizinhança de  $J_{vp} \rightarrow J_{vp}^{cr} = 1 - \phi_0$ ):

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} p_{vp}(\varphi) = \lim_{J_{vp} \rightarrow J_{vp}^{cr}} p_{vp}(J_{vp}) = +\infty \quad (49)$$

Na Figura 13, apresenta-se a variação da pressão de consolidação viscoplástica para diferentes valores de  $p_{vp0}$  e  $m_{vp}$ , com  $\phi_0 = 0.65$ .

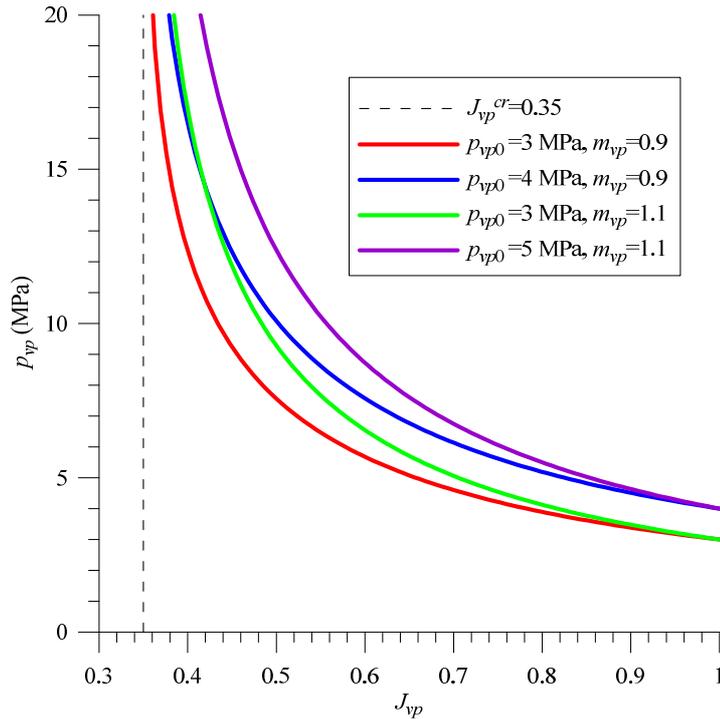


Figura 13: pressão de consolidação viscoplástica para diferentes valores de  $p_{vp0}$  e  $m_{vp}$ , com  $\phi_0 = 0.65$ .

A taxa da lei de endurecimento viscoplástica é dada por:

$$\dot{p}_{vp}(J_{vp}) = -h_{vp}(J_{vp}) \frac{\dot{J}_{vp}}{J_{vp}} \quad (50)$$

onde  $h_{vp}$  é o módulo de endurecimento viscoplástico, dado por

$$h_{vp}(J_{vp}) = \frac{m_{vp}(1-\phi_0)p_{vp}}{J_{vp}\phi \ln \phi} = \frac{m_{vp}(1-\phi_0)p_{vp}}{J_{vp} \left(1 - \frac{1-\phi_0}{J_{vp}}\right) \ln \left(1 - \frac{1-\phi_0}{J_{vp}}\right)} \quad (51)$$

Assim como no modelo plástico, o módulo  $h_{vp}$  apresenta importante papel na formulação do sistema que descreve o comportamento mecânico do material.

O módulo de endurecimento viscoplástico assume valores infinitos na vizinhança de  $\phi = 0$  (ou seja, na vizinhança de  $J_{vp}^{cr}$ ):

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} h_{vp}(\phi) = \lim_{J_{vp} \rightarrow J_{vp}^{cr}} h_{vp}(J_{vp}) = +\infty \quad (52)$$

Sua variação é apresentada na Figura 14, para diferentes valores de  $p_{vp0}$  e  $m_{vp}$ , com  $\phi_0 = 0.65$ .

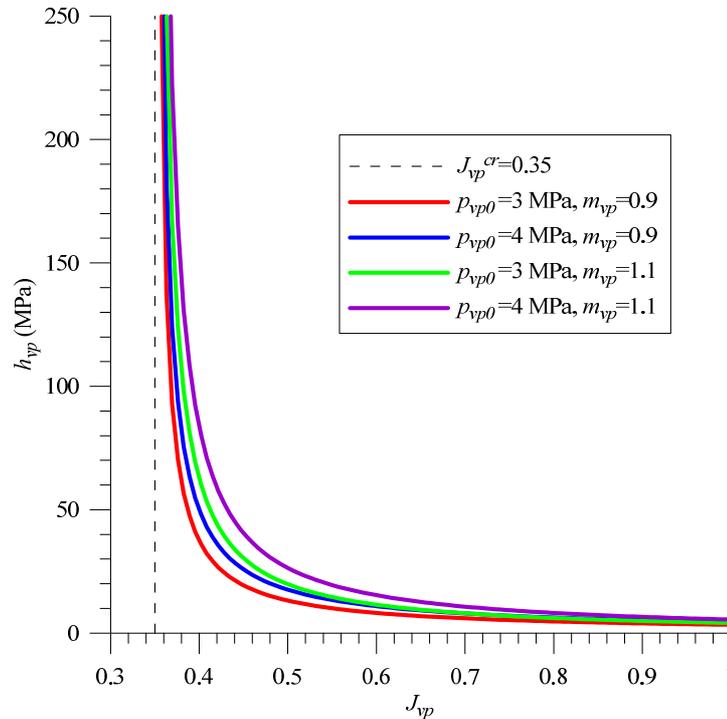


Figura 14: variação do módulo de endurecimento viscoplástico para diferentes valores de  $p_{vp0}$  e  $m_{vp}$ , com  $\phi_0 = 0.65$ .

### 3.7 ACOPLAMENTO ELÁSTICO-PLÁSTICO-VISCOPLÁSTICO

Como abordado anteriormente, o material sedimentar depositado na bacia está submetido aos mecanismos de compactação mecânica e químico-mecânica, que são incorporados ao modelo através das componentes plástica e viscoplástica de deformação, respectivamente. Conforme Maghous (2009), essas duas contribuições são adicionadas ao modelo através da taxa de deformação irreversível  $\underline{\underline{d}}^{ir}$ , que é aditivamente dividida em duas parcelas:

$$\underline{\underline{d}}^{ir} = \underline{\underline{d}}^p + \underline{\underline{d}}^{vp} \quad (53)$$

Agora, a expressão para a porosidade euleriana, dada na equação (31), incorpora o acoplamento plástico-viscoplástico à sua formulação, através da decomposição multiplicativa:

$$J_{ir} = J_p J_{vp} \quad (54)$$

Sobre as componentes  $J_{ir}$ ,  $J_p$  e  $J_{vp}$ , tem-se as seguintes condições iniciais para as partículas assentadas no topo da camada sedimentar:

$$\begin{aligned} J_{ir}(x_3 = H(t), t) &= 1 \\ J_p(x_3 = H(t), t) &= 1 \\ J_{vp}(x_3 = H(t), t) &= 1 \end{aligned} \quad (55)$$

A grande variação irreversível de porosidade afeta as propriedades elásticas do esqueleto (DORMIEUX; MAGHOUS, 2000). Os efeitos das mudanças na microestrutura do material sobre os módulos elásticos drenados do esqueleto são avaliados a partir dos limites variacionais superiores de Hashin-Shtrikman para materiais compósitos isotrópicos com inclusões esféricas (Hashin e Shtrikman (1963), Hashin (1983)). Estes limites coincidem com as estimativas micromecânicas de Mori-Tanaka (Maghous *et al.* (2009)) e são conhecidos por modelar razoavelmente as propriedades elásticas de meios porosos isotrópicos (Zaoui (2002), Dormieux *et al.* (2006)). O módulo de compressão  $K$  e o módulo de cisalhamento  $\mu$  homogeneizados são funções da porosidade euleriana  $\varphi$  e dos módulos de compressão e cisalhamento da fase sólida que compõe o esqueleto (considerados constantes),  $k^s$  e  $\mu^s$ , respectivamente (Bernaud *et al.* (2006)):

$$\begin{cases} K(\varphi) = \frac{4k^s \mu^s (1 - \varphi)}{3k^s \varphi + 4\mu^s} \\ \mu(\varphi) = \frac{\mu^s (1 - \varphi)(9k^s + 8\mu^s)}{k^s (9 + 6\varphi) + \mu^s (8 + 12\varphi)} \end{cases} \quad (56)$$

As equações (31), (53) e (56) introduzem um forte acoplamento entre os módulos elásticos e as componentes plástica e viscoplástica do modelo constitutivo.

### 3.7.1 Lei constitutiva em grandes deformações

Formulações mais abrangentes relacionam a evolução dos módulos elásticos à transformação finita (Meroi *et al.* (1995), Bourgeois e Dormieux (1997), Dormieux e Maghous (1999),

Dormieux e Maghous (2000)). A equação de estado do material resultante dessa consideração é colocada em forma de taxa:

$$\frac{D_J \underline{\underline{\sigma}}}{Dt} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\zeta}} : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^{ir}) + \underline{\underline{\dot{\zeta}}} : \underline{\underline{\zeta}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (57)$$

onde  $\frac{D_J \underline{\underline{\sigma}}}{Dt}$  é a derivada de Jaumann do tensor de tensão e  $\underline{\underline{\Omega}}$  é a taxa de rotação.

Na expressão anterior, o tensor dos módulos elásticos do esqueleto apresenta dependência em relação à porosidade, através dos termos apresentados em (56), resultando em:

$$\underline{\underline{\zeta}} = \underline{\underline{\zeta}}(\varphi) = K(\varphi) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\mu(\varphi) \left( \underline{\underline{1}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) \quad (58)$$

Dada a característica unidimensional do problema oedométrico, a taxa de rotação  $\underline{\underline{\Omega}}$  é nula. Assim, a equação (57) pode ser simplificada como:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{\zeta}} : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^{ir}) + \underline{\underline{\dot{\zeta}}} : \underline{\underline{\zeta}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (59)$$

A equação anterior envolve a clássica derivada particular do tensor de tensão de Cauchy e o termo  $\underline{\underline{\dot{\zeta}}} : \underline{\underline{\zeta}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}$ , que representa a influência das grandes deformações irreversíveis sobre as propriedades elásticas. Para o cálculo desse termo, tomam-se a taxa e a inversa do tensor dos módulos elásticos, dados por:

$$\underline{\underline{\dot{\zeta}}}(\varphi) = \underline{\underline{\dot{K}}}(\varphi) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\underline{\underline{\dot{\mu}}}(\varphi) \left( \underline{\underline{1}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) \quad (60)$$

$$\underline{\underline{\zeta}}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{9K(\varphi)} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + \frac{1}{2\mu(\varphi)} \left( \underline{\underline{1}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) \quad (61)$$

Calcula-se então a dupla contração tensorial:

$$\dot{\underline{\underline{C}}}: \underline{\underline{C}}^{-1} = \frac{\dot{K}}{3K} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \left( \underline{\underline{1}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \right) \quad (62)$$

Assim, o termo  $\dot{\underline{\underline{C}}}: \underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}$  é calculado, resultando em:

$$\dot{\underline{\underline{C}}}: \underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}}{3} \frac{\dot{K}}{K} \underline{\underline{1}} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \underline{\underline{s}} \quad (63)$$

Por fim, a lei constitutiva em grandes deformações (59) pode ser reescrita como:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^{ir}) + \frac{\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}}{3} \frac{\dot{K}}{K} \underline{\underline{1}} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \underline{\underline{s}} \quad (64)$$

### 3.7.2 Leis de endurecimento plástico-viscoplástico

As leis de endurecimento plástico e viscoplástico, juntamente com as expressões das suas taxas e de seus módulos são colocadas como funções da dilatação volumétrica irreversível  $J_{ir}$ , evidenciando o acoplamento plástico-viscoplástico expresso pelas equações (31), (53) e (56):

$$p_c(J_{ir}) = p_{c0} \left( \frac{\ln \varphi}{\ln \phi_0} \right)^{m_p} = p_{c0} \left( \frac{\ln \left( 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{ir}} \right)}{\ln \phi_0} \right)^{m_p} \quad (65)$$

$$\dot{p}_c(J_{ir}) = -h_p(J_{ir}) \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} \quad (66)$$

$$h_p(J_{ir}) = \frac{m_p(1 - \phi_0) p_c}{J_{ir} \varphi \ln \varphi} = \frac{m_p(1 - \phi_0) p_c}{J_{ir} \left( 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{ir}} \right) \ln \left( 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{ir}} \right)} \quad (67)$$

$$p_{vp}(J_{ir}) = p_{vp0} \left( \frac{\ln \varphi}{\ln \phi_0} \right)^{m_{vp}} = p_{vp0} \left( \frac{\ln \left( 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{ir}} \right)}{\ln \phi_0} \right)^{m_{vp}} \quad (68)$$

$$\dot{p}_{vp}(J_{ir}) = -h_{vp}(J_{ir}) \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} \quad (69)$$

$$h_{vp}(J_{ir}) = \frac{m_{vp}(1 - \phi_0)p_{vp}}{J_{ir}\varphi \ln \varphi} = \frac{m_{vp}(1 - \phi_0)p_{vp}}{J_{ir} \left( 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{ir}} \right) \ln \left( 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{ir}} \right)} \quad (70)$$

Conforme exposto no capítulo 2.2, o processo de compactação mecânica ocorre em camadas superiores da bacia sedimentar, acima das camadas onde o processo de compactação químico-mecânico é preponderante. Do ponto de vista mecânico, para que essa característica seja corretamente modelada, a condição  $p_{c0} \leq p_{vp0}$  deve ser imposta. Adicionalmente, para a correta transição entre os mecanismos de compactação, a condição  $m_p > m_{vp}$  deve ser imposta a fim de garantir  $p_c(J_{ir}) > p_{vp}(J_{ir})$  para um determinado valor de  $J_{ir}$ .

Na Figura 15, apresenta-se uma comparação entre as variações das pressões de consolidação plástica e viscoplástica para as leis (65) e (68), para  $\phi_0 = 0.65$ ,  $p_{c0} = 1.0$  MPa,  $p_{vp0} = 2.0$  MPa,  $m_p = 2.0$  e  $m_{vp} = 1.0$ . Na Figura 16, apresenta-se uma comparação entre as variações dos módulos de endurecimento plástico e viscoplástico, para os mesmos parâmetros informados.

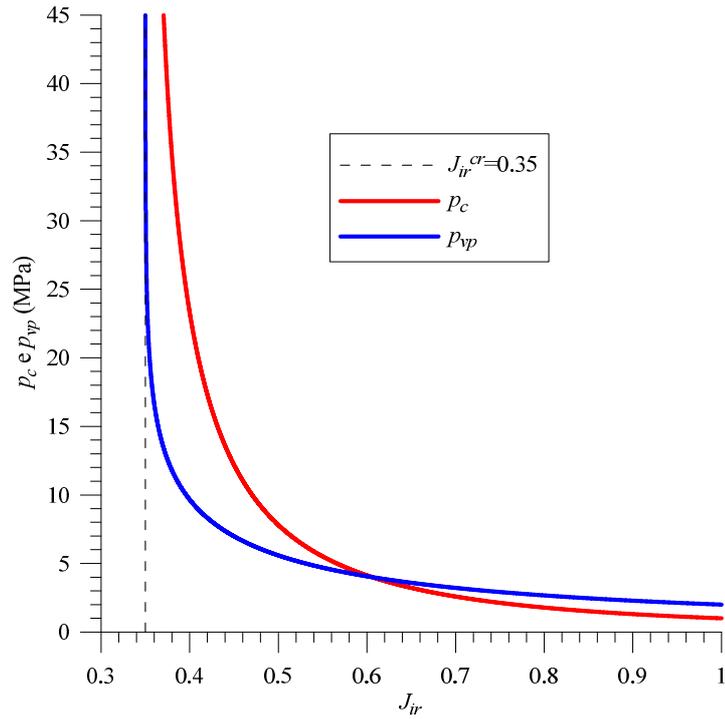


Figura 15: comparação entre as variações das pressões de consolidação plástica e viscoplástica.

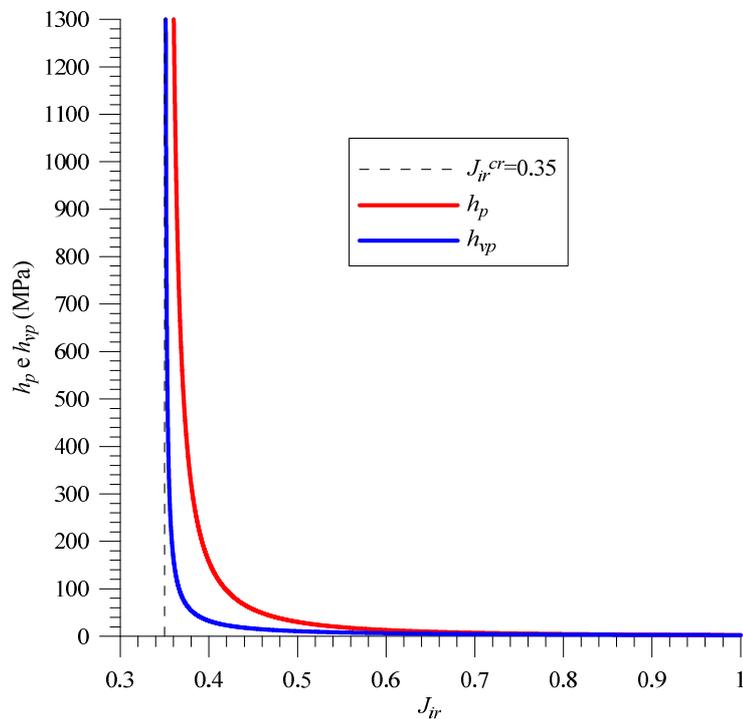


Figura 16: comparação entre as variações dos módulos de endurecimento plástico e viscoplástico.

Em ambas as figuras, é evidenciado o comportamento assintótico na vizinhança de  $\phi = 0$  (ou seja, na vizinhança de  $J_{ir} \rightarrow J_{ir}^{cr} = 1 - \phi_0$ ).

### 3.8 FORMA DA SOLUÇÃO E RELAÇÕES AUXILIARES

As hipóteses adotadas, expostas na seção 3.2, conduzem os campos de velocidade e de tensão às seguintes formas:

$$\underline{u}(x_3, t) = u_3(x_3, t)\underline{e}_3 \quad (71)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_3, t) = \sigma_h(x_3, t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \sigma_v(x_3, t)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (72)$$

onde  $\sigma_h$  e  $\sigma_v$  correspondem às componentes horizontal e vertical de tensões.

Adicionalmente, a partir do campo de tensão anterior, o campo desviador de tensão assume a forma:

$$\underline{\underline{s}}(x_3, t) = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} I_1 \underline{\underline{1}} = \frac{\sigma_v - \sigma_h}{3} (-\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad (73)$$

onde  $I_1 = \text{tr}\underline{\underline{\sigma}} = 2\sigma_h + \sigma_v$  corresponde ao primeiro invariante do tensor de tensão de Cauchy, calculado pelo traço do tensor de tensão.

De forma auxiliar, as seguintes relações são pertinentes ao desenvolvimento das soluções. O gradiente do campo euleriano de velocidade  $\underline{\underline{\nabla}}u$  está relacionado à  $\underline{\underline{F}}$  por  $\underline{\underline{\nabla}}u = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$ , que pode ser calculada como:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (74)$$

O tensor taxa de deformação  $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}u + \underline{\underline{\nabla}}u)$  é dado por:

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (75)$$

A tensão vertical de uma partícula localizada em  $x_3$  é estaticamente determinada e pode ser calculada, independente do comportamento constitutivo do material sedimentar, como o peso

das partículas assentadas sobre ela por unidade de área. Matematicamente, isso é colocado como:

$$\sigma_v(x_3, t) = - \int_{x_3}^{H(t)} \rho(\eta, t) g d\eta \quad (76)$$

A partir da expressão anterior, calcula-se a derivada material do volume integral com limites variáveis, resultando em:

$$\dot{\sigma}_v = \rho(x_3, t) u_3(x_3, t) g - \rho_0 g \dot{H}(t) - \int_{x_3}^{H(t)} \frac{\partial \rho(\eta, t)}{\partial t} g d\eta \quad (77)$$

Substituindo expressão euleriana da conservação de massa (2) e a lei de compactação (10) na expressão anterior, tem-se:

$$\dot{\sigma}_v(x_3, t) = -\dot{M}_d(t) g \quad (78)$$

Esta equação traduz que o equilíbrio na direção vertical independe do comportamento do material sedimentar.

Por fim, as relações entre as taxas de deformação irreversíveis e as componentes irreversíveis dos jacobianos são dadas por:

$$\text{tr} \underline{\underline{d}}^{ir} = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} \quad (79)$$

$$\text{tr} \underline{\underline{d}}^p = \frac{\dot{J}_p}{J_p} \quad (80)$$

$$\text{tr} \underline{\underline{d}}^{vp} = \frac{\dot{J}_{vp}}{J_{vp}} \quad (81)$$

## 4. FORMULAÇÃO DE SOLUÇÕES COM MÓDULOS ELÁSTICOS CONSTANTES

Após a definição do modelo simplificado de bacia sedimentar, o objetivo é obter soluções que descrevam o comportamento mecânico do material que forma a bacia sedimentar. A primeira etapa desta tarefa é realizada para a situação onde os efeitos do adensamento sobre os módulos elásticos do material sedimentar são desconsiderados.

Inicialmente é feita uma descrição da formulação mecânica do problema, onde são estabelecidos as fases e os domínios de comportamento do material. Nessa descrição, são definidos os tempos que delimitam cada fase, bem como as posições das fronteiras entre os domínios.

As leis de endurecimento (65) e (68) apresentam módulos de endurecimento, definidos em (66) e (69), que são funções da componente irreversível do jacobiano da transformação. Essa característica dificulta ou impossibilita o desenvolvimento de soluções analíticas para os sistemas não-lineares de equações diferenciais parciais (sistemas não-lineares EDP) que descrevem o comportamento mecânico do material, nas respectivas fases de comportamento. Assim, as respostas são obtidas numericamente.

Com o objetivo de obter soluções analíticas, são propostas leis de endurecimento plástico e viscoplástico adicionais, que simplificam a formulação. Essas leis referem a materiais com endurecimento linear ou que variam linearmente com a dilatação volumétrica irreversível. Elas apresentam módulos de endurecimento constantes, definidos no contexto do acoplamento plástico-viscoplástico, como:

$$h_p = -J_{ir} \frac{\partial p_c}{\partial J_{ir}} = \text{constante} \quad (82)$$

$$h_{vp} = -J_{ir} \frac{\partial p_{vp}}{\partial J_{ir}} = \text{constante} \quad (83)$$

Assim, as leis de endurecimento resultam em:

$$p_c(J_{ir}) = p_{c0} - h_p \ln J_{ir} \quad (84)$$

$$p_{vp}(J_{ir}) = p_{vp0} - h_{vp} \ln J_{ir} \quad (85)$$

Dessa forma, a formulação consiste em um sistema linear EDP.

Assim como as observações apresentadas no capítulo 3 acerca dos parâmetros das leis de endurecimento plástica e viscoplástica, as seguintes condições devem ser observadas:

$$\begin{cases} p_{vp0} > p_{c0} \\ h_p > h_{vp} \end{cases} \quad (86)$$

Na Figura 17, apresenta-se uma comparação entre as variações das pressões de consolidação plástica e viscoplástica para as leis (84) e (85), para  $p_{c0} = 1.0$  MPa,  $p_{vp0} = 4.0$  MPa,  $h_p = 8.0$  e  $h_{vp} = 5.0$ . Adicionalmente, apresenta-se o limite  $J_{ir}^{cr}$  para  $\phi_0 = 0.65$ .

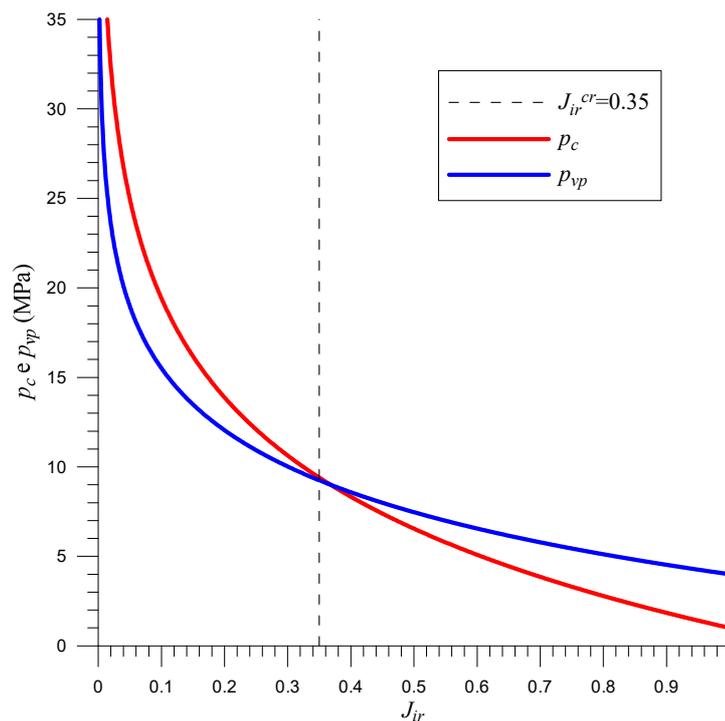


Figura 17: comparação entre as variações das pressões de consolidação plástica e viscoplástica.

A característica marcante das leis de endurecimento plástico e viscoplástico propostas em (84) e (85) é verificada na figura anterior. Diferente das leis (65) e (68), verifica-se que elas estão definidas para valores inferiores ao limite físico da componente irreversível do jacobiano. Ou seja, elas não fornecem endurecimento suficiente ao material e, assim, não há um comporta-

mento assintótico na vizinhança de  $J_{ir}^{cr}$ . Como consequência, há a ocorrência de porosidade euleriana negativa, conforme Figura 18.

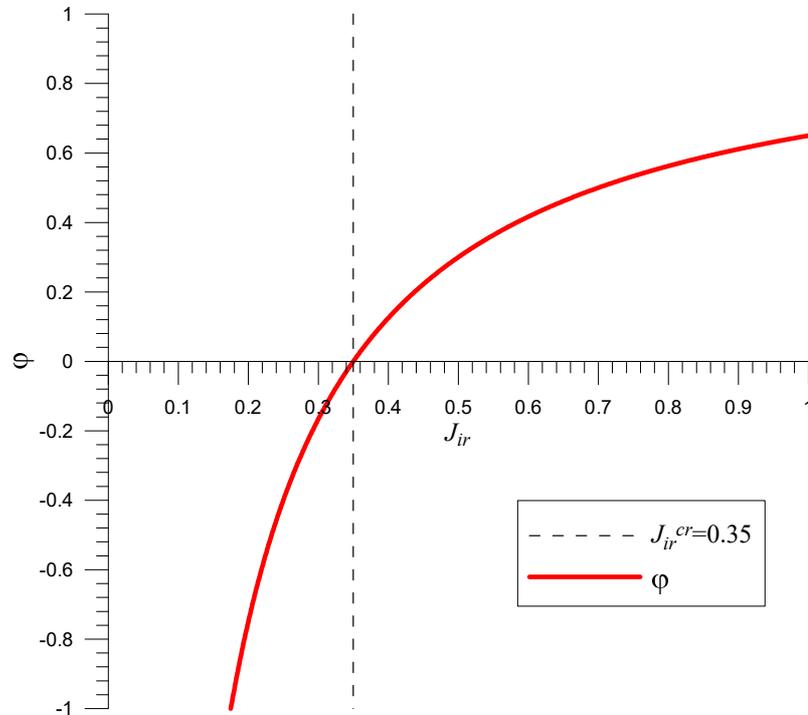


Figura 18: variação da porosidade euleriana, para  $\phi_0 = 0.65$ .

Na sequência de desenvolvimento, cada fase de comportamento é colocada de forma que as respostas analíticas sejam primeiro apresentadas e sirvam como referência para as respostas obtidas numericamente. Quando necessário, as respostas obtidas para as leis de endurecimento (84) e (85) serão identificadas como “M1”. Já as respostas obtidas para as leis de endurecimento (65) e (68) serão identificadas como “M2”.

Após a formulação de cada fase, são apresentadas as comparações entre os modelos. Para a análise proposta, a interpretação das respostas será feita em dois cenários: no primeiro, chamado de **análise global**, serão comparados os perfis de respostas em um determinado tempo da análise, que caracterizam o comportamento global da bacia sedimentar; no segundo, chamado de **análise local**, será analisado a evolução dos campos mecânicos ligados às partículas de sedimentos localizadas em  $x_3 = 0$ , ou seja, as partículas depositadas diretamente no substrato rígido. Essas partículas são depositadas no início do processo de acreção, em  $t = 0$ , e o estado mecânico delas está associado ao mais alto nível de deformação e tensão ao longo do processo de compactação.

## 4.1 FORMULAÇÃO MECÂNICA DO PROBLEMA

A evolução temporal da sedimentação e da compactação é dividida em cinco fases consecutivas (Figura 19), distintas entre si pelos domínios de comportamento das partículas da bacia sedimentar. A ocorrência de cada fase está condicionada às características mecânicas e temporais da análise.

Referenciando à Figura 19, as quatro primeiras fases compõem o período de deposição sedimentar, enquanto a última está referida ao período não-deposicional:

1. **Fase elástica:** essa fase marca o início do período de deposição do sedimento, quando todas as partículas assentadas se comportam de forma elástica. O domínio temporal compreende o intervalo  $t \in [0, T^e]$  e o domínio espacial se estende por  $x_3 \in [0, H(t)]$ . Essa fase termina quando o estado de tensão das partículas em  $x_3 = 0$  conduz à condição  $f^p(\underline{\underline{\sigma}}, p_{c0}) = 0$  no tempo  $t = T^e$ . Nesse tempo, o maciço tem a altura  $H(T^e) = H^e$ ;
2. **Fase elástica-plástica:** nessa fase, a parte superior das partículas se comporta de forma elástica e o restante apresenta o comportamento elastoplástico. O domínio temporal compreende o intervalo  $t \in [T^e, T^p]$ . O comportamento elástico se desenvolve no domínio espacial  $x_3 \in [H(t) - H^e, H(t)]$ , enquanto o comportamento elastoplástico se desenvolve no domínio espacial  $x_3 \in [0, H(t) - H^e]$ . Essa fase termina quando o estado de tensão das partículas em  $x_3 = 0$  conduz à condição  $f^{vp}(\underline{\underline{\sigma}}, p_{vp}) = 0$  no tempo  $t = T^p$ . Nesse tempo, o maciço tem a altura  $H(T^p) = H^p$ ;
3. **Fase elástica-plástica-viscoplástica:** começando pelo topo da bacia sedimentar e movendo-se para baixo, a bacia exhibe nesta fase três camadas distintas: uma camada elástica seguida por uma camada elastoplástica, enquanto as partículas na camada inferior sofrem deformações elastoplásticas-viscoplásticas. O domínio temporal compreende o intervalo  $t \in [T^p, T^{vp}]$ . O comportamento elástico se desenvolve no mesmo domínio espacial da fase precedente  $x_3 \in [H(t) - H^e, H(t)]$ . O comportamento elastoplástico se desenvolve em  $x_3 \in [H(t) - H^p, H(t) - H^e]$ , e o comportamento elastoplástico-viscoplástico se desenvolve para  $x_3 \in [0, H(t) - H^p]$ . Essa fase termina quando as par-

tículas em  $x_3 = 0$  apresentam  $\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{0}}$  ( $\dot{\chi} = 0$ ) no tempo  $t = T^{vp}$ . Nesse tempo, o maciço tem a altura  $H(T^{vp}) = H^{vp}$ ;

4. **Fase elástica-viscoplástica no período de deposição sedimentar:** em adição às três camadas formadas na fase anterior, uma parte das partículas assentadas desenvolve o comportamento elasto-viscoplástico. O domínio temporal compreende o intervalo  $t \in [T^{vp}, T^s]$ . Os comportamentos elástico e elastoplástico se desenvolvem nos mesmos domínios espaciais da fase precedente,  $x_3 \in [H(t) - H^e, H(t)]$  e  $x_3 \in [H(t) - H^p, H(t) - H^e]$ . O comportamento elastoplástico-viscoplástico se desenvolve em  $x_3 \in [H(t) - H^{vp}, H(t) - H^p]$ , e o comportamento elasto-viscoplástico se desenvolve em  $x_3 \in [0, H(t) - H^{vp}]$ . Essa fase termina ao final do período de deposição sedimentar no tempo  $t = T^s$ . Nesse tempo, o maciço tem a altura  $H(T^s) = H^s$ ;
5. **Fase elástica-viscoplástica no período pós-deposição sedimentar:** essa fase marca o início do período não-deposicional da bacia sedimentar. O domínio temporal compreende à  $t \geq T^s$ . Os comportamentos elástico e elastoplástico não evoluem e, assim, apresentam os mesmos domínios espaciais da fase precedente. O comportamento elasto-viscoplástico se desenvolve para  $x_3 \in [0, H(t) - H^p]$ . Essa fase termina no tempo final de análise  $t = T^f$ , quando a bacia tem a altura  $H(T^f) = H^f$ .

Algumas condições foram subentendidas na descrição das fases de comportamento das partículas. Com a finalidade de apresentar o tema de forma clara, elas são evidenciadas:

$$\begin{cases} T^e \leq T^p \leq T^{vp} \leq T^s \leq T^f \\ H^e \leq H^p \leq H^{vp} \leq H^s \end{cases} \quad (87)$$

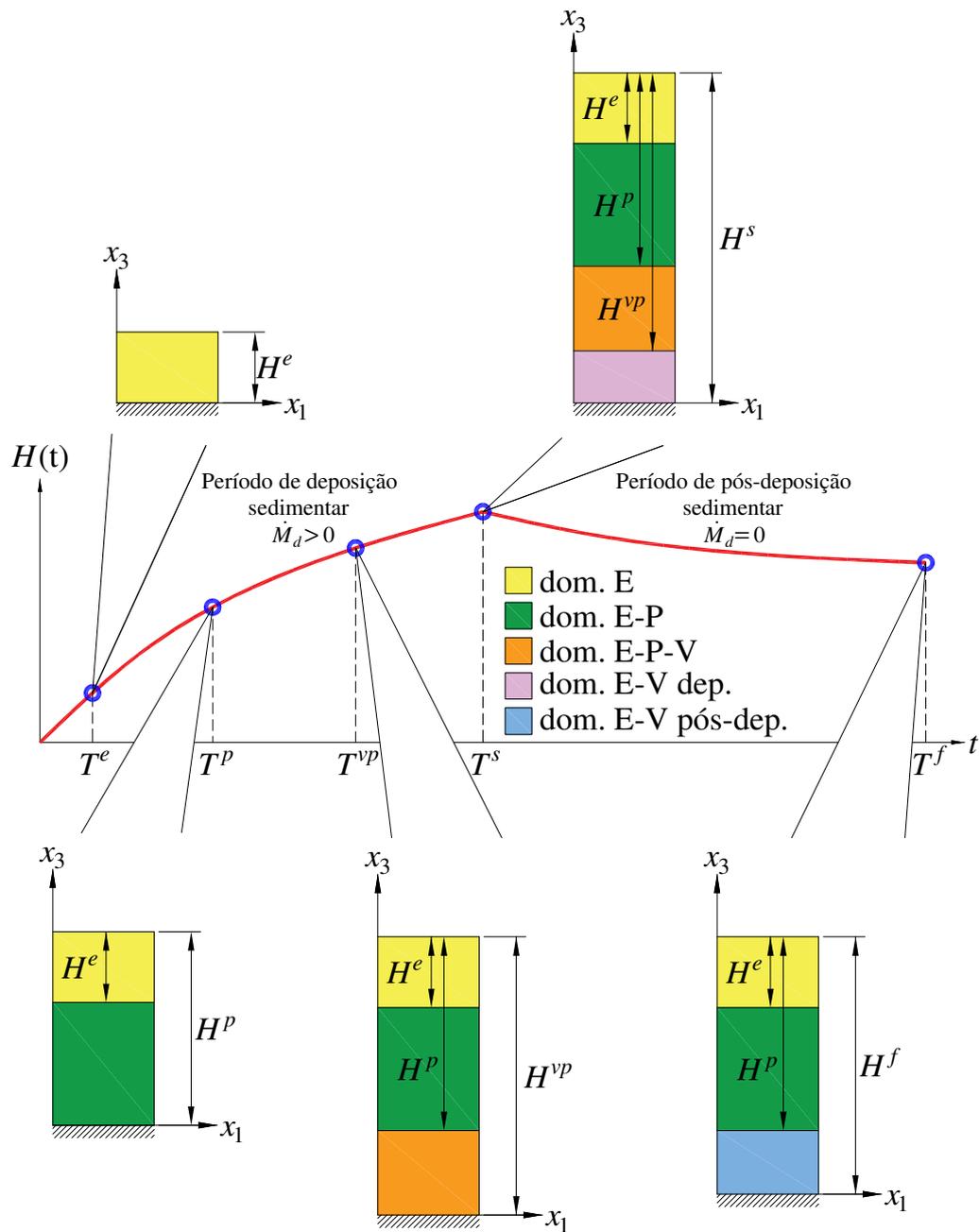


Figura 19: lei de compactação gravitacional e representação esquemática da evolução da bacia sedimentar.

É necessário ressaltar que as alturas  $H^e$  e  $H^p$  são constantes ao longo do tempo. Geometricamente isso significa que, após as suas formações, elas se movem na direção  $\underline{e}_3$  à medida que os sedimentos são depositados. A mesma observação é válida para a altura  $H^{vp}$ , que se mantém constante no período de deposição sedimentar, sendo anulada no período não-deposicional.

O sistema de equações diferenciais que descreve o comportamento da bacia sedimentar é composto pelo balanço de momentum (1), o balanço de massa (3), a relação entre os gradientes de velocidade e da transformação (74), a relação entre a taxa de deformação irreversível e a componente irreversível do jacobiano da transformação (79) e a lei constitutiva (59). Esse sistema relaciona os campos incógnitos  $\Lambda$ ,  $J_{ir}$ ,  $\sigma_h$ ,  $\sigma_v$  e  $u_3$  do problema. Ele corresponde a um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem. Ele pode ser linear ou não-linear, dependendo dos modelos utilizados.

Para o entendimento da formulação mecânica, são apresentadas na Figura 20 duas configurações para a bacia sedimentar. A primeira corresponde a um tempo da fase elástica-viscoplástica, no período de deposição de sedimentos. A segunda corresponde a um tempo da fase elástica-viscoplástica, no período não-deposicional. São apresentadas as taxas de deformação relevantes para a formulação dos domínios em cada fase.

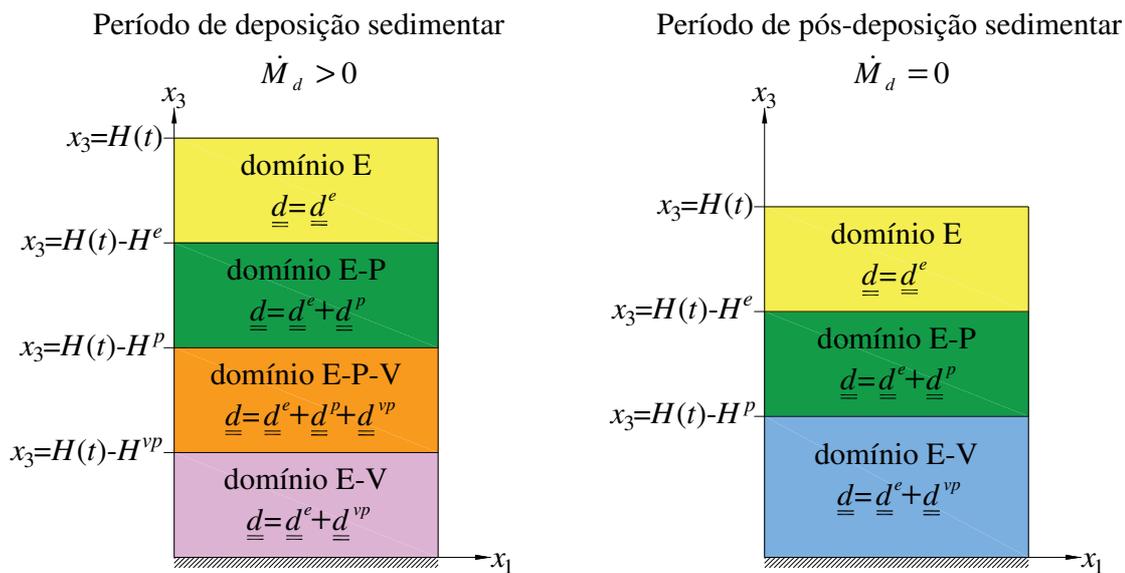


Figura 20: domínios de comportamento material da bacia sedimentar.

## 4.2 PERÍODO DE DEPOSIÇÃO SEDIMENTAR

No período de deposição sedimentar, o domínio material é variável devido ao acréscimo contínuo de partículas à bacia sedimentar, isto é, trata-se de um sistema material aberto. Por essa razão, é utilizada uma descrição euleriana do movimento das partículas.

É assumido que o processo de sedimentação tem caráter monotônico durante a fase de deposição dos sedimentos, isto é  $\dot{M}_d > 0$ , excluindo qualquer período de erosão. Sob essa hipótese, os campos que descrevem o comportamento mecânico da bacia sedimentar podem ser colocados como funções da dilatação vertical. Em particular, o campo de tensão pode ser reescrito como:

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_3, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\Lambda(x_3, t)) \quad (88)$$

Conforme exposto anteriormente, a formulação do modelo M2, onde os módulos de endurecimento são funções da componente irreversível do jacobiano, não possui solução analítica. Assim, a solução em cada fase do problema é obtida de forma incremental, discretizando o domínio temporal em incrementos de tempo  $\Delta t$  e solucionando o sistema não-linear EDP para cada configuração da bacia sedimentar, definida pela altura  $H(t)$ .

Para cada incremento de tempo  $\Delta t$ , o incremento de altura é calculado através da discretização da equação (10). A altura da bacia sedimentar é atualizada utilizando:

$$H(t + \Delta t) = H(t) + \Delta H \quad \text{com} \quad \Delta H \approx \Delta t \left( \frac{\dot{M}_d(t)}{\rho_0} + u_3(H(t), t) \right) \quad (89)$$

O esquema incremental bem como a solução dos sistemas não-lineares EDP foram realizados com o *software* MAPLE. Os sistemas EDP resultantes das formulações de cada fase apresentam uma característica especial. Baseado na observação (88), todas as equações diferenciais são colocadas de forma que só existam derivadas em relação a variável espacial  $x_3$ . Essa característica permite tratar um sistema EDP como um sistema EDO (sistema de equações diferenciais ordinário), onde a variável temporal é parametrizada. Assim, uma técnica de diferenças finitas com extrapolação de Richardson é usada para resolver o problema de valor de contorno em cada tempo.

Nesse processo incremental, devem ser observadas as condições de continuidade nas interfaces das camadas, isto é, em  $x_3 = H(t) - H^e$ ,  $x_3 = H(t) - H^p$  e  $x_3 = H(t) - H^{vp}$ .

### 4.2.1 Fase elástica

No início do processo, a altura da bacia sedimentar é  $H(0) = 0$ . Progressivamente ela vai aumentando conforme o sedimento é assentado. A deformação induzida pela gravidade permanece elástica até a altura da bacia atingir o limiar  $H^e$ . Ressalta-se que o desenvolvimento apresentado nesta fase independe das leis de endurecimento utilizadas.

A relação (79), aplicada ao domínio elástico ( $\underline{\underline{d}}^{ir} = \underline{\underline{0}}$ ), resulta em:

$$tr \underline{\underline{d}}^{ir} = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = 0 \quad (90)$$

Baseado na observação (88), a equação (90) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = 0 \quad (91)$$

Essa expressão possui a condição inicial dada na expressão (55). Ela apresenta solução trivial, porém foi apresentada para o melhor entendimento da formulação.

Substituindo na lei constitutiva (59) os termos relativos à taxa de deformação total (75) e ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58), têm-se:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (92)$$

onde  $F_h^e = K - 2/3\mu$  e  $F_v^e = K + 4/3\mu$  são constantes mecânicas associadas ao material. A constante  $F_v^e$  também é definida como o módulo de elasticidade oedométrico.

Baseado na observação (88), a equação (92) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial x_3} = \left[ \frac{F_h^e}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ \frac{F_v^e}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (93)$$

Essa equação diferencial possui a condição inicial dada na expressão (4).

Do balanço de momentum (1), tem-se:

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{\Lambda} \quad (94)$$

Combinando a componente vertical de (93) à expressão anterior, tem-se:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_v^e} \quad (95)$$

Essa expressão possui a condição inicial dada na expressão (12).

Combinando (78) à componente vertical em (92), pode-se reescrever a relação (74) como:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{-\dot{M}_d g}{F_v^e} \quad (96)$$

Essa expressão possui a condição de contorno dada na expressão (7).

As equações (91), (93), (95) e (96) formam o sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento mecânico do domínio elástico da bacia sedimentar na fase elástica. Elas são agrupadas, em conjunto com as suas condições iniciais e de contorno, para o melhor entendimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_v^e} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_h^e}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_v^e}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{g}{F_v^e} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (97)$$

$$\begin{cases} \Lambda(H(t), t) = 1 \\ \sigma_h(H(t), t) = 0 \\ \sigma_v(H(t), t) = 0 \\ J_{ir}(H(t), t) = 1 \\ u_3(0, t) = 0 \end{cases} \quad (98)$$

Esse sistema é então integrado em seu domínio espacial,  $x_3 \in [0, H(t)]$ , resultando nas equações que descrevem o comportamento mecânico da bacia sedimentar no domínio elástico:

$$\begin{cases} \Lambda(x_3, t) = 1 - \frac{\rho_0 g}{F_v^e} (H(t) - x_3) \\ \sigma_h(x_3, t) = -F_h^e \ln \frac{1}{\Lambda(x_3, t)} \\ \sigma_v(x_3, t) = -F_v^e \ln \frac{1}{\Lambda(x_3, t)} \\ J_{ir}(x_3, t) = 1 \\ u_3(x_3, t) = -\frac{g}{F_v^e} \dot{M}_d x_3 \end{cases} \quad (99)$$

Com a expressão da velocidade das partículas nesse domínio, calcula-se a velocidade no topo do maciço rochoso:

$$u_3(H(t), t) = -\frac{g}{F_v^e} \dot{M}_d H(t) \quad (100)$$

Substituindo a equação anterior em (10), e então integrando-a com a condição inicial  $H(0)=0$ , obtém-se a lei de compactação da fase elástica:

$$H(t) = \frac{F_v^e}{\rho_0 g} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{g}{F_v^e} M_d(t)\right) \right] \quad (101)$$

Essa fase é encerrada quando o estado de tensão das partículas na posição  $x_3 = 0$  atinge a condição  $f^p(\underline{\sigma}, p_{c0}) = 0$  no tempo  $t = T^e$ . Nesse tempo, a bacia sedimentar é caracterizada pelos seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Lambda^e = \Lambda(0, T^e) = e^{-\frac{p_{c0}}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a}} \\
\sigma_h^e = \sigma_h(0, T^e) = -F_h^e \ln \frac{1}{\Lambda^e} = -\frac{F_h^e p_{c0}}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \\
\sigma_v^e = \sigma_v(0, T^e) = -F_v^e \ln \frac{1}{\Lambda^e} = -\frac{F_v^e p_{c0}}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \\
J_{ir}^e = J_{ir}(0, T^e) = 1 \\
u_3^e = u_3(H^e, T^e) = -\frac{g}{F_v^e} \dot{M}_d H^e \\
H^e = H(T^e) = \frac{F_v^e}{\rho_0 g} (1 - \Lambda^e) \\
M_d^e = M_d(T^e) = \frac{F_v^e}{g} \ln \frac{1}{\Lambda^e}
\end{array} \right. \quad (102)$$

Se a massa de sedimentos depositados por unidade de área  $M_d(t)$  for uma função da forma apresentada na expressão (11), o tempo  $T^e$  é dado por:

$$T^e = \frac{F_v^e}{g \dot{M}_d} \ln \frac{1}{\Lambda^e} = \frac{F_v^e}{g \dot{M}_d} \frac{p_{c0}}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \quad (103)$$

A afirmação feita em 4.1 acerca da invariabilidade temporal da altura  $H^e$  é facilmente verificada através da expressão apresentada em (102), uma vez que a equação só envolve termos que são constantes em relação ao tempo.

Para  $t \geq T^e$ , as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elástico e elastoplástico são dadas por:

$$\begin{array}{l}
\text{continuidade na fronteira} \\
\text{elástica/elastoplástica}
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\Lambda(H(t) - H^e, t) = \Lambda^e \\
\sigma_h(H(t) - H^e, t) = \sigma_h^e \\
\sigma_v(H(t) - H^e, t) = \sigma_v^e \\
J_{ir}(H(t) - H^e, t) = J_{ir}^e
\end{array} \right. \quad (104)$$

### 4.2.2 Fase elástica-plástica

Deformações elastoplástica se desenvolvem nas camadas mais profundas para  $t \geq T^e$ , isto é, quando a altura da bacia sedimentar é maior que  $H^e$ . A altura da camada elástica permanece constante no tempo, igual a  $H^e$ . Assim, o domínio elástico é definido no intervalo espacial  $x_3 \in [H(t) - H^e, H(t)]$  (Figura 19). Em contrapartida, a altura da camada elastoplástica aumenta a partir de  $x_3 = 0$ , conforme os sedimentos são assentados. Esse domínio é definido no intervalo espacial  $x_3 \in [0, H(t) - H^e]$ .

O desenvolvimento apresentado a seguir aplica-se ao modelo M1.

A relação (79), aplicada à taxa de deformação plástica (39), resulta em:

$$\text{tr} \underline{\underline{d}}^{ir} = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = -\dot{\chi} \quad (105)$$

Substituindo na lei constitutiva (59) os termos relativos à taxa de deformação total (75), à taxa de deformação plástica (39) e ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58), têm-se:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = & \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \dot{\chi} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \\ & + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \dot{\chi} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (106)$$

A condição de consistência  $\dot{f}^p = 0$  aplicada ao critério plástico (37) resulta em:

$$\dot{f}^p = \frac{\partial f^p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \dot{p}_c = -\frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \frac{a}{2\sqrt{J_2}} \underline{s} : \underline{\underline{\dot{s}}} - \dot{p}_c = 0 \quad (107)$$

Substituindo a expressão (105) na taxa da lei de endurecimento plástica (66) e então calculando a equação precedente, determina-se a expressão para o multiplicador plástico:

$$\dot{\chi} = G_1^p \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \text{ com } G_1^p = -\frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a}{K + a^2\mu + h_p} \quad (108)$$

Substituindo a expressão anterior em (106), tem-se:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \left[ F_{h1}^p \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ F_{v1}^p \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (109)$$

onde:

$$\begin{cases} F_{h1}^p = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_1^p \\ F_{v1}^p = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_1^p \end{cases} \quad (110)$$

Baseado na observação (88), a equação (109) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial x_3} = \left[ \frac{F_{h1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ \frac{F_{v1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (111)$$

Combinando a taxa de tensão vertical da expressão anterior ao balanço de momentum (1), resulta em:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^p} \quad (112)$$

Combinando as expressões (105) e (108), baseado na observação (88), tem-se:

$$\frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = -\frac{G_1^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \quad (113)$$

Combinando as equações (78) e a componente vertical de tensão em (109), pode-se reescrever a relação (74) como:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{g}{F_{v1}^p} \dot{M}_d \quad (114)$$

A expressão anterior tem a condição de contorno (7).

As equações (111), (112), (113) e (114) formam o sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento mecânico do domínio elastoplástico da bacia sedimentar na fase elástica-plástica. As equações (111) à (113) possuem as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elástico e elastoplástico dadas por (104). As equações são agrupadas, em conjunto com as suas condições de continuidade e de contorno, para o melhor entendimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^p} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = -\frac{G_1^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{g}{F_{v1}^p} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (115)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^e = \Lambda(H(t) - H^e, t) \\ \sigma_h^e = \sigma_h(H(t) - H^e, t) \\ \sigma_v^e = \sigma_v(H(t) - H^e, t) \\ J_{ir}^e = J_{ir}(H(t) - H^e, t) \\ u_3(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (116)$$

Esse sistema é então integrado em seu domínio espacial,  $x_3 \in [0, H(t) - H^e]$ , resultando nas equações que descrevem o comportamento mecânico da bacia sedimentar no domínio elastoplástico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(x_3, t) = \Lambda^e - \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^p} (H(t) - H^e - x_3) \\ \sigma_h(x_3, t) = \sigma_h^e - F_{h1}^p \ln \frac{\Lambda^e}{\Lambda(x_3, t)} \\ \sigma_v(x_3, t) = \sigma_v^e - F_{v1}^p \ln \frac{\Lambda^e}{\Lambda(x_3, t)} \\ J_{ir}(x_3, t) = J_{ir}^e \left( \frac{\Lambda^e}{\Lambda(x_3, t)} \right)^{G_1^p} \\ u_3(x_3, t) = -\frac{g}{F_{v1}^p} \dot{M}_d x_3 \end{array} \right. \quad (117)$$

Com a expressão da velocidade das partículas nesse domínio, calcula-se a velocidade no topo da camada elastoplástica:

$$u_3(H(t) - H^e, t) = -\frac{g}{F_{v1}^p} \dot{M}_d (H(t) - H^e) \quad (118)$$

A velocidade no topo da bacia sedimentar é dada por:

$$u_3(H(t), t) = u_3^e + u_3(H(t) - H^e, t) \quad (119)$$

Substituindo a equação anterior em (10) e então a integrando com a condição inicial  $H(T^e) = H^e$ , obtém-se a lei de compactação da fase elástica-plástica:

$$H(t) = H^e + F_{v1}^p \Delta_p \left[ 1 - \exp \left( -\frac{g}{F_{v1}^p} [M_d(t) - M_d^e] \right) \right] \quad (120)$$

onde:

$$\Delta_p = \frac{1}{\rho_0 g} - \frac{H^e}{F_v^e} \quad (121)$$

Essa fase é encerrada quando o estado de tensão das partículas na posição  $x_3 = 0$  atinge a condição  $f^{vp}(\underline{\sigma}, p_{vp0}) = 0$ , no tempo  $t = T^p$ . Nesse tempo, a bacia sedimentar é caracterizada pelos seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^p = \Lambda(0, T^p) = \Lambda^e \exp\left(\frac{p_{vp0} - p_{c0}}{G_1^p (h_p - h_{vp})}\right) \\ \sigma_h^p = \sigma_h(0, T^p) = \sigma_h^e - F_{h1}^p \ln \frac{\Lambda^e}{\Lambda^p} \\ \sigma_v^p = \sigma_v(0, T^p) = \sigma_v^e - F_{v1}^p \ln \frac{\Lambda^e}{\Lambda^p} \\ J_{ir}^p = J_{ir}(0, T^p) = \exp\left(-\frac{p_{vp0} - p_{c0}}{h_p - h_{vp}}\right) \\ u_3^p = u_3(H^p - H^e, T^p) = -\frac{g}{F_{v1}^p} \dot{M}_d (H^p - H^e) \\ H^p = H(T^p) = H^e + \frac{F_{v1}^p}{\rho_0 g} (\Lambda^e - \Lambda^p) \\ M_d^p = M_d(T^p) = M_d^e + \frac{F_{v1}^p}{g} \ln \frac{\Lambda^e}{\Lambda^p} \end{array} \right. \quad (122)$$

Se a massa de sedimentos depositados por unidade de área  $M_d(t)$  for uma função da forma apresentada na expressão (11), o tempo  $T^e$  é dado por:

$$T^p = T^e + \frac{F_{v1}^p}{g \dot{M}_d} \ln \frac{\Lambda^e}{\Lambda^p} \quad (123)$$

A afirmação feita em 4.1 acerca da invariabilidade temporal da altura  $H^p$  é facilmente verificada através da expressão apresentada em (122). Novamente, a equação só envolve termos constantes.

Para  $t \geq T^p$ , as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elastoplástico e elastoplástico-viscoplástico são dadas por:

$$\begin{array}{l}
\text{continuidade na fronteira} \\
\text{elastoplástica/elastoplástica-viscoplástica}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\sigma_h(H(t) - H^p, t) = \sigma_h^p \\
\sigma_v(H(t) - H^p, t) = \sigma_v^p \\
\Lambda(H(t) - H^p, t) = \Lambda^p \\
J_{ir}(H(t) - H^p, t) = J_{ir}^p
\end{array}
\right. \quad (124)$$

Nessa fase, o domínio elástico também é descrito pelas equações apresentadas em (99). A única observação diz respeito a expressão que descreve a velocidade na camada elástica. A ela, deve ser adicionado à velocidade no topo da camada elastoplástica, em  $x_3 = H(t) - H^e$ .

Para que a componente horizontal de tensão seja de compressão no domínio elastoplástico, algumas condições devem ser impostas sobre o escalar positivo e constante que controla a inclinação da parte dúctil da superfície de plastificação,  $a$ . Em (109), o termo  $\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$  é sempre negativo, o que remete a análise de  $\dot{\sigma}_h < 0$  ao termo  $F_{hl}^p$ , que deve ser positivo. Isso determina três domínios de validade para  $a$ , que são funções das propriedades elásticas do material, bem como ao módulo de endurecimento plástico:

1. Para  $0 < h_p \leq \frac{E}{9\nu}$ ,  $a \geq a^+$ ;
2. Para  $\frac{E}{9\nu} \leq h_p \leq \frac{E}{8\nu}$ ,  $0 < a \leq a^- \cup a \geq a^+$ ;
3. Para  $h_p > \frac{E}{8\nu}$ ,  $\dot{\sigma}_h < 0$  para qualquer valor de  $a$ .

onde:

$$a_{\pm}^+ = \frac{\sqrt{3}}{6} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{6\nu}{E} h_p} \quad (125)$$

Para o modelo M2, o sistema EDP que descreve o comportamento mecânico no domínio elastoplástico é formulado de modo semelhante ao sistema (115). Ele resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^p(J_{ir})} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^p(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^p(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^p(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^p(J_{ir})} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (126)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1^p(J_{ir}) = - \frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a}{K + a^2 \mu + h_p} \\ F_{h1}^p(J_{ir}) = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^p \\ F_{v1}^p(J_{ir}) = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^p \end{array} \right. \quad (127)$$

Observa-se que  $h_p = h_p(\varphi) = h_p(J_{ir})$ , devido à expressão (66).

O sistema é resolvido em cada tempo, pelo processo incremental descrito em 4.2. A fase é encerrada sob as mesmas condições descritas anteriormente. No tempo  $t = T^p$ , a bacia sedimentar é caracterizada pelos seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} T^p \text{ calculado pelo processo incremental} \\ H^p \text{ calculado pelo processo incremental} \\ \sigma_h^p = \sigma_h(0, T^p) \\ \sigma_v^p = \sigma_v(0, T^p) \\ \Lambda^p = \Lambda(0, T^p) \\ J_{ir}^p = J_{ir}(0, T^p) \\ u_3^p = u_3(H^p - H^e, T^p) \end{array} \right. \quad (128)$$

As condições sobre  $a$ , para que  $\dot{\sigma}_h < 0$ , são complexas e não podem ser explicitamente determinadas em função do módulo de endurecimento plástico variável  $h_p(J_{ir})$ . Assim, o valor de  $a$  adotado nas análises é testado e a condição  $\dot{\sigma}_h < 0$  é posteriormente verificada.

Devido à  $h_p(J_{ir})$ , a invariabilidade temporal da altura  $H^p$  não é facilmente provada, porém ela é observada. Há um conjunto de características mecânicas que levam à formação de  $H^p$ , que se mantém constante ao longo do tempo.

### 4.2.3 Fase elástica-plástica-viscoplástica

A resposta da bacia sedimentar na fase elástica-plástica-viscoplástica ocorre para  $t \geq T^p$ , isto é, quando a altura da bacia é maior que  $H^p$ . Assim como o domínio elástico, a altura da camada elastoplástica  $x_3 \in [H(t) - H^p, H(t) - H^e]$  (Figura 19) permanece constante no tempo. Em contrapartida, a altura da camada elastoplástica-viscoplástica aumenta a partir de  $x_3 = 0$ , conforme os sedimentos são assentados. Este domínio é definido no intervalo espacial  $x_3 \in [0, H(t) - H^p]$ .

O desenvolvimento apresentado a seguir aplica-se ao modelo M1.

A relação (79), aplicada às taxas de deformação plástica (39) e viscoplástica (47), resulta em:

$$tr \underline{\underline{d}}^{ir} = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = - \left( \dot{\chi} + \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \right) = -\Psi \quad (129)$$

De forma similar à seção 4.2.2, substituindo na lei constitutiva (59) os termos relativos à taxa de deformação total (75), à taxa de deformação plástica (39), à taxa de deformação viscoplástica (47) e ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58), têm-se:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = & \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \Psi \right] (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \\ & + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \Psi \right] e_3 \otimes e_3 \end{aligned} \quad (130)$$

Novamente, a condição de consistência  $\dot{f}^p = 0$  possibilita a determinação da função  $\Psi$ :

$$\Psi = G_1^{vp} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \text{ com } G_1^{vp} = -\frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a}{K + a^2\mu + h_p} \quad (131)$$

A constante  $G_1^{vp}$  é igual à  $G_1^p$  da fase precedente. Entretanto, ela será diferenciada por coerência à nomenclatura utilizada.

Substituindo a equação anterior em (130), tem-se:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \left[ F_{h1}^{vp} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ F_{v1}^{vp} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (132)$$

onde:

$$\begin{cases} F_{h1}^{vp} = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_1^{vp} \\ F_{v1}^{vp} = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_1^{vp} \end{cases} \quad (133)$$

Baseado na observação (88), a equação (132) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial x_3} = \left[ \frac{F_{h1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ \frac{F_{v1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (134)$$

Combinando a taxa de tensão vertical da expressão anterior ao balanço de momentum (1), resulta em:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^{vp}} \quad (135)$$

Agrupando as expressões (129) e (131), baseado na observação (88), tem-se:

$$\frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^{vp}}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \quad (136)$$

Substituindo as equações (78) e (132) em (74), obtém-se:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^{vp}} \dot{M}_d \quad (137)$$

A expressão anterior tem a condição de contorno (7).

As equações (134), (135), (136) e (137) formam o sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento mecânico do domínio elastoplástico-viscoplástico da bacia sedimentar na fase elástica-plástica-viscoplástica. As equações (134) à (136) possuem as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elastoplástico e elastoplástico-viscoplástico dadas por (124). As equações são agrupadas, em conjunto com as suas condições de continuidade e de contorno, para o melhor entendimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^{vp}} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^{vp}}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^{vp}}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^{vp}}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^{vp}} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (138)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(H(t) - H^p, t) = \Lambda^p \\ \sigma_h(H(t) - H^p, t) = \sigma_h^p \\ \sigma_v(H(t) - H^p, t) = \sigma_v^p \\ J_{ir}(H(t) - H^p, t) = J_{ir}^p \\ u_3(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (139)$$

Esse sistema é então integrado em seu domínio espacial,  $x_3 \in [0, H(t) - H^p]$ , resultando nas equações que descrevem o comportamento mecânico da bacia sedimentar no domínio elasto-plástico-viscoplástico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(x_3, t) = \Lambda^p - \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^{vp}} (H(t) - H^p - x_3) \\ \sigma_h(x_3, t) = \sigma_h^p - F_{h1}^{vp} \ln \frac{\Lambda^p}{\Lambda(x_3, t)} \\ \sigma_v(x_3, t) = \sigma_v^p - F_{v1}^{vp} \ln \frac{\Lambda^p}{\Lambda(x_3, t)} \\ J_{ir}(x_3, t) = J_{ir}^p \left( \frac{\Lambda^p}{\Lambda(x_3, t)} \right)^{G_1^{vp}} \\ u_3(x_3, t) = -\frac{g}{F_{v1}^{vp}} \dot{M}_d x_3 \end{array} \right. \quad (140)$$

Com a expressão da velocidade das partículas nesse domínio, calcula-se a velocidade no topo da camada elastoplástica-viscoplástica:

$$u_3(H(t) - H^p, t) = -\frac{g}{F_{v1}^{vp}} \dot{M}_d (H(t) - H^p) \quad (141)$$

A velocidade no topo da bacia sedimentar é dada por:

$$u_3(H(t), t) = u_3^e + u_3^p + u_3(H(t) - H^p, t) \quad (142)$$

Substituindo a equação anterior em (10) e então a integrando com a condição inicial  $H(T^p) = H^p$ , obtém-se a lei de compactação da fase elástica-plástica-viscoplástica:

$$H(t) = H^p + F_{v1}^{vp} \Delta_{vp} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{g}{F_{v1}^{vp}} [M_d(t) - M_d^p] \right) \right] \quad (143)$$

onde:

$$\Delta_{vp} = \Delta_p - \frac{H^p - H^e}{F_{v1}^p} \quad (144)$$

Essa fase é encerrada quando a partícula na posição  $x_3 = 0$  atinge a condição  $\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{0}}$  ( $\dot{\chi} = 0$ ), no tempo  $t = T^{vp}$ . Essa condição pode ser reescrita, a partir de (129) e (131), como:

$$\dot{\chi}(x_3 = 0, t) = G_1^{vp} \frac{\dot{\Lambda}(x_3 = 0, t)}{\Lambda(x_3 = 0, t)} - \frac{f^{vp}(x_3 = 0, t)}{\eta_{vp}} = 0 \quad (145)$$

Para uma função  $M_d(t)$  previamente determinada, a expressão anterior fornece o tempo  $T^{vp}$ . Sua avaliação analítica resulta em uma expressão complexa. Assim, a solução é obtida numericamente. Por fim, nesse tempo, a bacia sedimentar é caracterizada pelos seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{vp} \rightarrow M_d^{vp} = M_d(T^{vp}) \rightarrow \text{solução numérica para } \dot{\chi}(0, t) = 0 \\ H^{vp} = H(T^{vp}) = H^p + F_{v1}^{vp} \Delta_{vp} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{g}{F_{v1}^{vp}} [M_d^{vp} - M_d^p]\right) \right] \\ \Lambda^{vp} = \Lambda(0, T^{vp}) = \Lambda^p - \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^{vp}} (H^{vp} - H^p) \\ \sigma_h^{vp} = \sigma_h(0, T^{vp}) = \sigma_h^p - F_{h1}^{vp} \ln \frac{\Lambda^p}{\Lambda^{vp}} \\ \sigma_v^{vp} = \sigma_v(0, T^{vp}) = \sigma_v^p - F_{v1}^{vp} \ln \frac{\Lambda^p}{\Lambda^{vp}} \\ J_{ir}^{vp} = J_{ir}(0, T^{vp}) = J_{ir}^p \left( \frac{\Lambda^p}{\Lambda^{vp}} \right)^{G_1^{vp}} \\ u_3^{vp} = u_3(H^{vp} - H^p, T^{vp}) = -\frac{g}{F_{v1}^{vp}} \dot{M}_d (H^{vp} - H^p) \end{array} \right. \quad (146)$$

A afirmação feita em 4.1 acerca da invariabilidade temporal da altura  $H^{vp}$  é facilmente verificada através da expressão apresentada em (146). Mais uma vez, a equação só envolve termos constantes.

Para  $t \geq T^{vp}$ , as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elasto-plástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico são dadas por:

$$\begin{array}{l}
\text{continuidade na fronteira} \\
\text{elastoplástica-viscoplástica} \\
\text{elasto-viscoplástica}
\end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\sigma_h(H(t) - H^{vp}, t) = \sigma_h^{vp} \\
\sigma_v(H(t) - H^{vp}, t) = \sigma_v^{vp} \\
\Lambda(H(t) - H^{vp}, t) = \Lambda^{vp} \\
J_{ir}(H(t) - H^{vp}, t) = J_{ir}^{vp}
\end{array} \right. \quad (147)$$

Nessa fase, os domínios elástico e elastoplástico também são descritos pelas equações (99) e (117), respectivamente. Novamente, as expressões que descrevem os campos de velocidade nas respectivas camadas devem adicionar o termo relativo à velocidade no topo da camada elastoplástica-viscoplástica, em  $x_3 = H(t) - H^p$ .

Para que a componente horizontal de tensão seja de compressão no domínio elastoplástico-viscoplástico, as mesmas condições sobre  $a$  da fase anterior são verdadeiras.

Para o modelo M2, o sistema EDP que descreve o comportamento mecânico no domínio elastoplástico-viscoplástico é formulado de forma semelhante ao sistema (138). Ele resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^{vp}(J_{ir})} \\
\frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^{vp}(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\
\frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^{vp}(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\
\frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^{vp}(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\
\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^{vp}(J_{ir})} \dot{M}_d
\end{array} \right. \quad (148)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1^{vp}(J_{ir}) = -\frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a}{K + a^2\mu + h_p(J_{ir})} \\ F_{h1}^{vp}(J_{ir}) = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_1^{vp}(J_{ir}) \\ F_{v1}^{vp}(J_{ir}) = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_1^{vp}(J_{ir}) \end{array} \right. \quad (149)$$

O sistema é resolvido em cada tempo, pelo processo incremental descrito em 4.2. A fase é encerrada sob as mesmas condições descritas anteriormente. No tempo  $t = T^{vp}$ , a bacia sedimentar é caracterizada pelos seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{vp} \text{ calculado pelo processo incremental} \\ H^{vp} \text{ calculado pelo processo incremental} \\ \sigma_h^{vp} = \sigma_h(0, T^{vp}) \\ \sigma_v^{vp} = \sigma_v(0, T^{vp}) \\ \Lambda^{vp} = \Lambda(0, T^{vp}) \\ J_{ir}^{vp} = J_{ir}(0, T^{vp}) \\ u_3^{vp} = u_3(H^{vp} - H^p, T^{vp}) \end{array} \right. \quad (150)$$

Para que a componente horizontal de tensão seja de compressão, a mesma observação sobre  $a$  da fase anterior é verdadeira.

Assim como na fase anterior, a invariabilidade temporal da altura  $H^{vp}$  não é facilmente provada, porém ela é observada. Novamente, um conjunto de características mecânicas que levam à formação de  $H^{vp}$  se mantém constante ao longo do tempo.

#### 4.2.4 Fase elástica-viscoplástica

Conforme a acreção de sedimentos prossegue para  $t \geq T^s$ , uma nova camada, denominada elasto-viscoplástica, se desenvolve no domínio material  $0 \leq x_3 \leq H(t) - H^{vp}$  (Figura 19 e Figura 20). Nessa camada, não há o desenvolvimento de deformação plástica, ou seja,  $\underline{\underline{d}}^p = 0$ . Logo, a única componente de deformação que se desenvolve é a viscoplástica e, portanto,

$\underline{\underline{d}}^{ir} = \underline{\underline{d}}^{vp}$ . As camadas elástica, elastoplástica e elastoplástica-viscoplástica permanecem com espessuras constantes, iguais à  $H^e$ ,  $H^p - H^e$  e  $H^{vp} - H^p$ , respectivamente.

O desenvolvimento apresentado a seguir aplica-se ao modelo M1.

A relação (79), aplicada à taxa de deformação viscoplástica (47), resulta em:

$$tr \underline{\underline{d}}^{ir} = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = -\frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \quad (151)$$

De forma similar à seção 4.2.2, substituindo na lei constitutiva (59) os termos relativos à taxa de deformação total (75), à taxa de deformação viscoplástica (47) e ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58), têm-se:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = & \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \\ & + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (152)$$

Baseado na observação (88), a equação (151) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda} = -\frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \quad (153)$$

Diferente das fases precedentes, o termo  $\dot{\Lambda}$  na expressão anterior não é passível de eliminação. Isso faz com que a solução analítica seja muito complexa ou não exista. Para contornar tal problema, a derivada segunda da equação anterior é anulada. Isso equivale à condição  $\dot{f}^{vp} = 0$ . Essa hipótese de simplificação leva à equação:

$$-\frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = G_1^v \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad \text{com} \quad G_1^v = -\frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a}{K + a^2 \mu + h_{vp}} \quad (154)$$

A qualidade das respostas obtidas por esse procedimento será avaliada posteriormente, pela união de duas metodologias. Primeiramente, substituindo as equações resultantes em (151) e

então avaliando o desvio produzido pela simplificação. Em um segundo momento, a solução desenvolvida será comparada à predição obtida em um simulador de elementos finitos. A avaliação em conjunto das diferenças obtidas pelo primeiro processo e a precisão obtidas pelo segundo processo atestarão a qualidade da hipótese de simplificação proposta.

Uma alternativa à simplificação proposta consiste em resolver a equação (151) de forma discreta no tempo, tratando o termo  $\dot{\Lambda}$  como a razão  $(\Lambda^{t_i} - \Lambda^{t_{i-1}})/\Delta t$ , onde:  $\Lambda^{t_i}$  corresponde ao valor de da dilatação vertical no tempo atual  $t_i$ ,  $\Lambda^{t_{i-1}}$  é o valor da dilatação vertical no tempo anterior  $t_{i-1}$  e  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ . Ressalta-se que essa abordagem também provoca desvios em relação à solução do problema, devido às características numéricas da solução e à alteração na geometria da bacia entre os dois tempos.

Substituindo a equação anterior em (153), e então, com a expressão resultante, substituindo em (152), tem-se:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \left[ F_{h1}^v \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ F_{v1}^v \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (155)$$

onde:

$$\begin{cases} F_{h1}^v = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^v \\ F_{v1}^v = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^v \end{cases} \quad (156)$$

O sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento mecânico da bacia sedimentar no domínio elasto-viscoplástico na fase elástica-plástica-viscoplástica é construído de forma similar às fases precedentes. As equações são agrupadas, em conjunto com as suas condições de continuidade e de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^v} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^v}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^v}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^v}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^v} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (157)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(H(t) - H^{vp}, t) = \Lambda^{vp} \\ \sigma_h(H(t) - H^{vp}, t) = \sigma_h^{vp} \\ \sigma_v(H(t) - H^{vp}, t) = \sigma_v^{vp} \\ J_{ir}(H(t) - H^{vp}, t) = J_{ir}^{vp} \\ u_3(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (158)$$

Esse sistema é então integrado em seu domínio espacial,  $x_3 \in [0, H(t) - H^{vp}]$ , resultando nas equações que descrevem o comportamento mecânico da bacia sedimentar no domínio elasto-viscoplástico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(x_3, t) = \Lambda^{vp} - \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^v} (H(t) - H^{vp} - x_3) \\ \sigma_h(x_3, t) = \sigma_h^{vp} - F_{h1}^v \ln \frac{\Lambda^{vp}}{\Lambda(x_3, t)} \\ \sigma_v(x_3, t) = \sigma_v^{vp} - F_{v1}^v \ln \frac{\Lambda^{vp}}{\Lambda(x_3, t)} \\ J_{ir}(x_3, t) = J_{ir}^{vp} \left( \frac{\Lambda^{vp}}{\Lambda(x_3, t)} \right)^{G_1^v} \\ u_3(x_3, t) = - \frac{g}{F_{v1}^v} \dot{M}_d x_3 \end{array} \right. \quad (159)$$

Com a expressão da velocidade das partículas nesse domínio, calcula-se a velocidade no topo da camada elastoplástica-viscoplástica:

$$u_3(H(t) - H^{vp}, t) = -\frac{g}{F_{v1}^v} \dot{M}_d (H(t) - H^{vp}) \quad (160)$$

A velocidade no topo da bacia sedimentar é dada por:

$$u_3(H(t), t) = u_3^e + u_3^p + u_3^{vp} + u_3(H(t) - H^{vp}, t) \quad (161)$$

Substituindo a equação anterior em (10) e então a integrando com a condição inicial  $H(T^{vp}) = H^{vp}$ , obtém-se a lei de compactação da fase elástica- viscoplástica:

$$H(t) = H^{vp} + F_{v1}^v \Delta_v \left[ 1 - \exp\left(-\frac{g}{F_{v1}^v} [M_d(t) - M_d^{vp}]\right) \right] \quad (162)$$

onde:

$$\Delta_v = \Delta_{vp} - \frac{H^{vp} - H^p}{F_{v1}^{vp}} \quad (163)$$

Uma característica importante a ser observada acerca da lei de compactação gravitacional diz respeito ao comportamento assintótico da expressão (162). Se a função  $M_d(t)$  for infinitamente crescente, a lei de compactação tende ao valor assintótico:

$$H^{assin} = H^{vp} + F_{v1}^v \Delta_v \quad (164)$$

Essa fase é encerrada no tempo  $t = T^s$ , que consiste em um dado conhecido do problema. Nesse tempo, a bacia sedimentar possui os seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l}
M_d^s = M_d(T^s) \\
H^s = H(T^s) \\
\Lambda^s = \Lambda(0, T^s) = \Lambda^{vp} - \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^v} (H^s - H^{vp}) \\
\sigma_h^s = \sigma_h(0, T^s) = \sigma_h^{vp} - F_{h1}^v \ln \frac{\Lambda^{vp}}{\Lambda^s} \\
\sigma_v^s = \sigma_v(0, T^s) = \sigma_v^{vp} - F_{v1}^v \ln \frac{\Lambda^{vp}}{\Lambda^s} \\
J_{ir}^s = J_{ir}(0, T^s) = J_{ir}^{vp} \left( \frac{\Lambda^{vp}}{\Lambda^s} \right)^{G_1^v} \\
u_3^s = u_3(H^s - H^{vp}, T^s) = -\frac{g}{F_{v1}^v} \dot{M}_d (H^s - H^{vp})
\end{array} \right. \quad (165)$$

Nessa fase, os domínios elástico, elastoplástico e elastoplástico-viscoplástico são descritos pelas equações (99), (117) e (140), respectivamente. As expressões que descrevem os campos de velocidade nas respectivas camadas devem adicionar o termo relativo à velocidade no topo da camada elasto-viscoplástica, em  $x_3 = H(t) - H^{vp}$ .

Para que a componente horizontal de tensão seja de compressão no domínio elasto-viscoplástico, as condições sobre  $a$  são dadas por:

1. Para  $0 < h_{vp} \leq \frac{E}{9\nu}$ ,  $a \geq a^+$ ;
2. Para  $\frac{E}{9\nu} \leq h_{vp} \leq \frac{E}{8\nu}$ ,  $0 < a \leq a^- \cup a \geq a^+$ ;
3. Para  $h_{vp} > \frac{E}{8\nu}$ ,  $\dot{\sigma}_h < 0$  para qualquer valor de  $a$ .

onde:

$$a_{\pm}^+ = \frac{\sqrt{3}}{6} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{6\nu}{E} h_{vp}} \quad (166)$$

Para o modelo M2, o sistema EDP que descreve o comportamento mecânico no domínio elasto-viscoplástico é formulado de forma semelhante ao sistema (157). Ele resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^v(J_{ir})} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^v(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^v(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^v(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^v(J_{ir})} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (167)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1^v(J_{ir}) = - \frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a}{K + a^2 \mu + h_{vp}(J_{ir})} \\ F_{h1}^v(J_{ir}) = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^{vp}(J_{ir}) \\ F_{v1}^v(J_{ir}) = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^{vp}(J_{ir}) \end{array} \right. \quad (168)$$

O módulo de endurecimento viscoplástico  $h_{vp}(J_{ir}) = h_{vp}(\varphi)$  foi definido em (69).

O mesmo procedimento de simplificação da equação (151) foi utilizado para a formulação do sistema EDP (167), e assim, o mesmo processo de avaliação da validade posterior será utilizado.

O sistema é resolvido em cada tempo, pelo processo incremental descrito em 4.2. A fase é encerrada sob as mesmas condições descritas anteriormente. No tempo  $t = T^s$ , a bacia sedimentar possui os seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} H^s \text{ calculado pelo processo incremental} \\ \sigma_h^s = \sigma_h(0, T^s) \\ \sigma_v^s = \sigma_v(0, T^s) \\ \Lambda^s = \Lambda(0, T^s) \\ J_{ir}^s = J_{ir}(0, T^s) \\ u_3^s = u_3(H^s - H^{vp}, T^s) \end{array} \right. \quad (169)$$

De forma similar às fases precedentes, para que  $\dot{\sigma}_h < 0$ , as condições sobre  $a$  são complexas e não podem ser explicitamente determinadas em função do módulo de endurecimento viscoplástico variável  $h_{vp}(J_{ir})$ . Assim, o valor de  $a$  adotado nas análises é testado e a condição  $\dot{\sigma}_h < 0$  é posteriormente verificada.

### 4.2.5 Estudo comparativo preliminar entre os modelos M1 e M2

Com o intuito de destacar as principais características da formulação apresentada para o período de acreção de sedimentos, é proposta uma comparação entre as respostas dos modelos M1 e M2.

Os parâmetros mecânicos que definem a situação de comparação são apresentados na Tabela 1. Na análise proposta, o tempo final de sedimentação e o tempo final de análise são  $T^s = 80\text{Ma}$  e  $T^f = 160\text{Ma}$ , respectivamente. Considera-se que o material sedimentar que entra no sistema no topo da bacia tem as mesmas propriedades mecânicas iniciais durante todo o período de deposição dos sedimentos.

Tabela 1: parâmetros mecânicos de análise.

parâmetro	símbolo	valor
tempo de deposição sedimentar (Ma)	$T^s$	80
tempo final de análise (Ma)	$T^f$	160
aceleração da gravidade ( $\text{m/s}^2$ )	$g$	9.80665
taxa de deposição sedimentar ( $\text{t/km}^2/\text{ano}$ )	$\dot{M}_d$	65
porosidade inicial	$\phi_0$	0.70
massa específica inicial ( $\text{kg/m}^3$ )	$\rho_0$	650
módulo de Young (MPa)	$E$	1000
módulo de Poisson	$\nu$	0.33
inclinação da superfície plástica/viscoplástica	$a$	1.158
pressão de consolidação plástica inicial (MPa)	$p_{c0}$	1.0
módulo de endurecimento plástico (MPa)	$h_p$	7.5
expoente da lei de endurecimento plástica	$m_p$	2.0
pressão de consolidação viscoplástica inicial (MPa)	$p_{vp0}$	2.5
módulo de endurecimento viscoplástico (MPa)	$h_{vp}$	5.4
expoente da lei de endurecimento viscoplástica	$m_{vp}$	1.0
coeficiente de viscosidade viscoplástica ( $\text{MPa} \times \text{Ma}$ )	$\eta_{vp}$	100

Na escala da bacia, uma das principais características na modelagem de bacias sedimentares diz respeito à avaliação da lei de compactação  $t \rightarrow H(t)$ , que é apresentada na Figura 21.

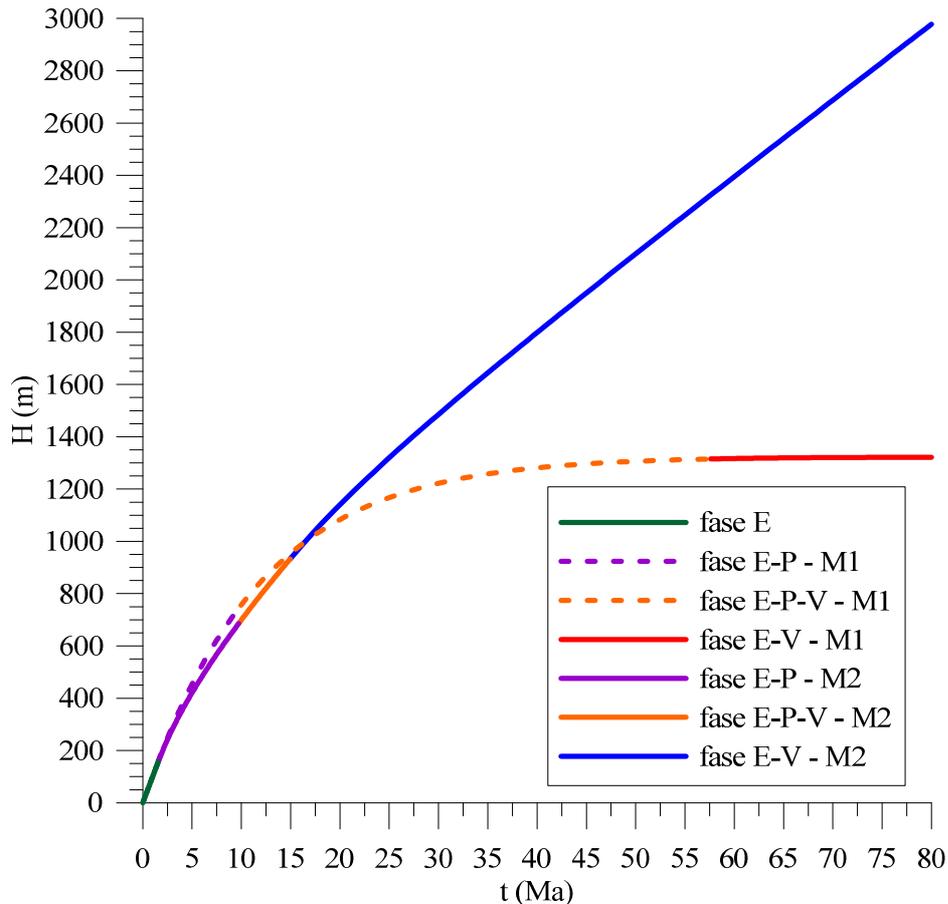


Figura 21: leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.

Os valores limites das curvas da figura anterior são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: valores limites das leis de compactação.

parâmetro	M1	M2
$T^e$ (Ma)	1.57	1.57
$T^p$ (Ma)	9.97	9.72
$T^{vp}$ (Ma)	57.61	14.94
$T^s$ (Ma)	80.00	80.00
$H^e$ (m)	156.68	156.68
$H^p$ (m)	755.37	685.48
$H^{vp}$ (m)	1315.06	932.39
$H^s$ (m)	1321.54	2977.95

As leis de compactação gravitacional apresentadas na figura anterior destacam cada fase de comportamento da bacia sedimentar. Em relação à fase elástica, o comportamento das respostas independe do modelo de endurecimento utilizado. Assim, nessa fase, as leis de compactação são coincidentes para ambos os modelos. O parâmetro mecânico que comanda a espessura

da camada elástica corresponde à pressão de consolidação plástica inicial  $p_{c_0}$ . Em bacias sedimentares reais, essa camada possui pequena espessura (poucas dezenas de metros). Para facilitar a visualização das respostas da análise em questão, esse parâmetro foi fixado de forma que a camada elástica apresentasse uma maior espessura.

A grande diferença de comportamento observada entre as leis de compactação resulta do endurecimento de cada modelo. A influência do endurecimento nas leis de compactação pode ser explicada pela análise da taxa da lei de compactação  $\dot{H}$ . A formulação dessa taxa (apresentada na equação (10)) envolve os termos  $F_{v1}$  ( $F_{v1}^p$ ,  $F_{v1}^{vp}$  e  $F_{v1}^v$ ), que compõem as expressões dos campos de velocidade em cada domínio. No modelo M2, esses termos estão submetidos aos efeitos do adensamento do material, através dos módulos de endurecimento plástico e viscoplástico  $h_p(\varphi)$  e  $h_{vp}(\varphi)$ . A redução da porosidade euleriana ocasiona um aumento da intensidade de  $F_{v1}$ , com subsequente redução na magnitude da velocidade no topo da bacia sedimentar. Como consequência, a taxa  $\dot{H}$  varia mais lentamente. O efeito do adensamento sobre o comportamento do modelo M2 também ocasiona a redução da duração da fase elástica-plástica-viscoplástica, com uma consecutiva redução na altura da camada elastoplástica-viscoplástica, conforme observado na Tabela 2.

Outra característica importante diz respeito ao comportamento assintótico do modelo M1, no período de sedimentação. A lei de compactação gravitacional apresenta  $H^s = 1321.54$  m no tempo final de sedimentação  $T^s = 80$  Ma. Conforme a equação (164), a altura assintótica do maciço é de  $H^{\text{assin}} = 1322.03$  m. Ou seja, durante o tempo de análise, o modelo desenvolveu 99.96% da altura  $H^{\text{assin}}$ .

O nível de compactação da bacia sedimentar é definido no tempo  $t$  como  $1 - H(t)/\mathcal{H}$ , onde  $\mathcal{H}$  corresponde a altura total da bacia no tempo  $t$ , na ausência de compactação do material, calculada por:

$$\mathcal{H} = \dot{M}_d T^s / \rho_0 \quad (170)$$

Para os dados da Tabela 1, o cálculo dessa altura resulta em  $\mathcal{H} = 8000$  m. Assim, os níveis de compactação da bacia sedimentar para os modelos M1 e M2 ao final do período de acreção

(em  $t = T^s$ ) são 83.5% e 62.8%, respectivamente. Esses resultados justificam a abordagem em grandes deformações dada ao problema.

Ao término do período de deposição sedimentar, a resposta global da bacia é apresentada em termos de perfis de porosidade euleriana e tensões, respectivamente na Figura 22 e Figura 23. Na Tabela 3, apresenta-se os valores das posições que dividem os domínios de comportamento dos modelos. Os valores limites da porosidade e das componentes de tensão dos domínios são apresentados na Tabela 4.

Tabela 3: posições das fronteiras que dividem os domínios de comportamento dos modelos M1 e M2 em  $t=80$  Ma (m).

$x_3$	M1	M2
$H(t)$	1321.54	2977.95
$H(t) - H^e$	1164.86	2821.27
$H(t) - H^p$	566.17	2292.47
$H(t) - H^{vp}$	6.48	2045.56
base	0.00	0.00

Tabela 4: valores limites da porosidade euleriana e tensões para os modelos M1 e M2 em  $t=80$  Ma.

Modelo M1					
$x_3$	0.00m	6.48m	566.17m	1164.86m	1321.54m
$\varphi$	-495.23910	-33.79616	0.38547	0.70000	0.70000
$\sigma_v$ (MPa)	-50.99458	-36.62348	-6.36879	-0.99691	0.00000
$\sigma_h$ (MPa)	-35.65128	-24.79502	-4.15530	-0.49102	0.00000
Modelo M2					
$x_3$	0.00m	2045.56m	2292.47m	2821.27m	2977.95m
$\varphi$	0.00088	0.33261	0.41105	0.70000	0.70000
$\sigma_v$ (MPa)	-50.99458	-9.51792	-6.20873	-0.99691	0.00000
$\sigma_h$ (MPa)	-26.88116	-5.82463	-4.01698	-0.49102	0.00000

Em virtude da invariância da componente irreversível da dilatação volumétrica  $J_{ir}$  no domínio elástico dos dois modelos, a porosidade euleriana (que é uma função de  $J_{ir}$ , conforme a equação (31)) também não apresenta variação nesse domínio.

Verifica-se na Figura 22 (a) e nos dados da Tabela 4 que o perfil de porosidade do modelo M1 apresenta valores negativos a partir da posição  $x_3 = 350$  m, no domínio elastoplástico-

viscoplástico. Esse comportamento condiz com as observações feitas acerca das leis de endurecimento do modelo M1, apresentadas na Figura 18. Conforme exposto anteriormente, essas leis de endurecimento estão definidas para valores inferiores ao valor crítico  $J_{ir}^{cr} = 1 - \phi_0 = 0.30$ , possibilitando a ocorrência de porosidades negativas.

O modelo M2 apresenta uma tendência finita à porosidade. A partir da posição  $x_3 = 400$  m, a porosidade apresenta valores muito próximos à condição de fechamento total. Esse comportamento se reflete em outras variáveis mecânicas, como a massa específica. Como referência, ela apresenta a tendência finita  $\rho \rightarrow \rho_0 / J_{ir}^{cr} \approx 2167 \text{ kg/m}^3$ .

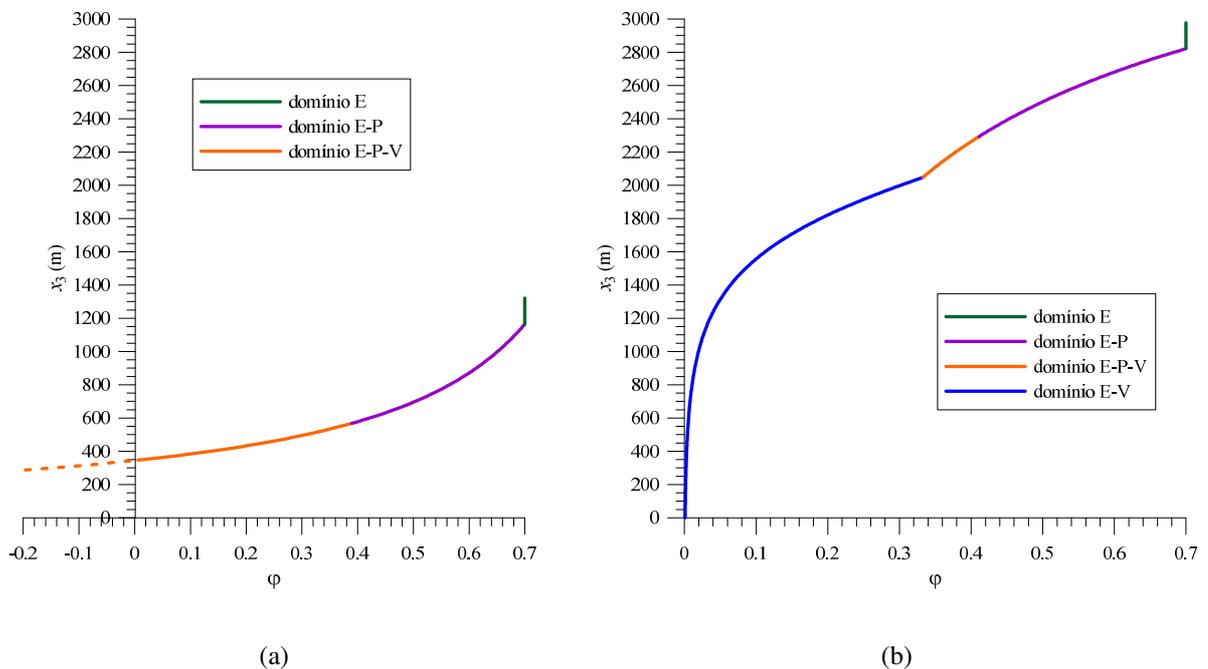


Figura 22: perfis de porosidade euleriana da bacia sedimentar em  $t=80\text{Ma}$  para os modelos (a) M1 e (b) M2.

Ambos os modelos apresentam variação linear para as componentes de tensão no domínio elástico. Conforme mencionado anteriormente, a componente vertical de tensão  $\sigma_v$  é estaticamente determinada e, assim, independe do comportamento do material. Em oposição a isso, a componente horizontal de tensão  $\sigma_h$  apresenta dependência do modelo constitutivo. Em especial, o parâmetro de maior influência sobre o comportamento dessa componente de tensão corresponde ao escalar  $a$ , que controla a inclinação da parte dúctil do critério de plastificação. Para o modelo M1, um aumento de 0.001% no valor de  $a$  produz um aumento de 5% na intensidade da componente horizontal de tensão. Para o modelo M2, o mesmo aumento de  $a$  produz um aumento de 7.5% para essa componente.

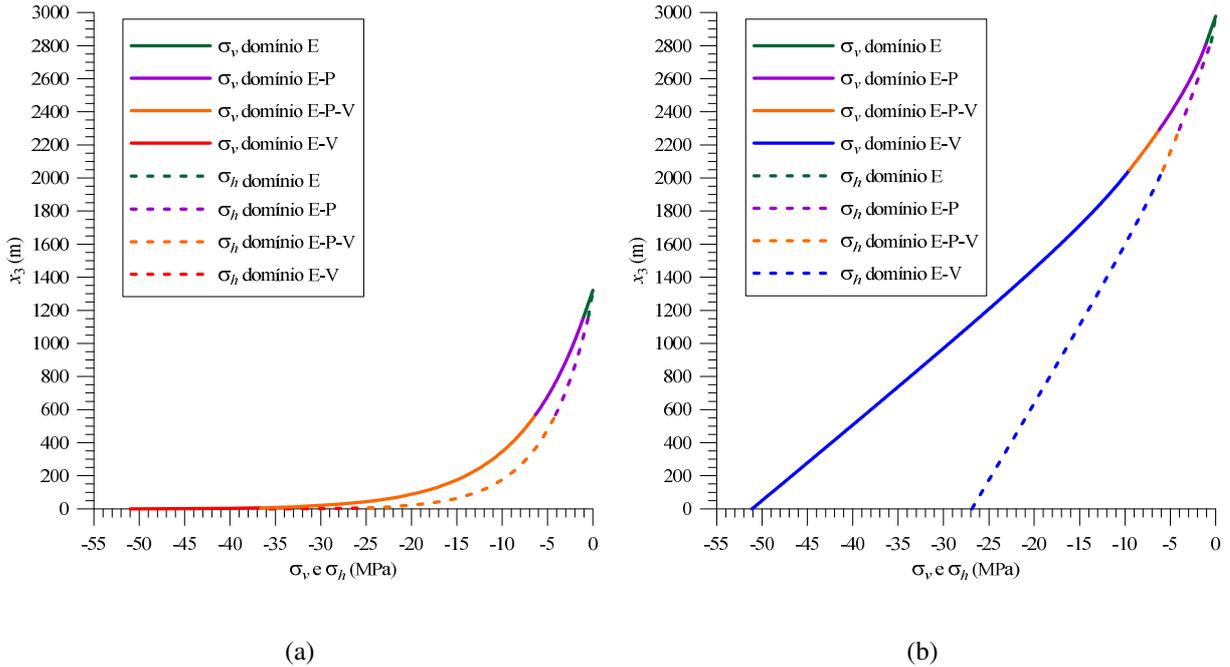


Figura 23: perfis de tensões da bacia sedimentar em  $t=80\text{Ma}$  para os modelos (a) M1 e (b) M2.

Em ambos os modelos, a maior variação de intensidade das componentes de tensão ocorre no domínio elasto-viscoplástico. Devido a pequena espessura dessa camada no modelo M1, as componentes de tensão apresentam uma variação média de 40% em apenas 6.48m.

Na formulação mecânica da elástica-viscoplástica, para ambos os modelos foi utilizada a simplificação da equação (151). Para o estudo em questão, é feita uma avaliação parcial desse procedimento, através do primeiro processo proposto anteriormente. Esse processo é feito avaliando os desvios dos modelos, induzidos pela aproximação apresentada na seção 4.2.4, em relação à solução do problema. A expressão do desvio é dada por:

$$desvio = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} - \left( -\frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \right) \quad (171)$$

Na Figura 24, apresenta-se as evoluções do desvio para as partículas situadas na base da bacia sedimentar.

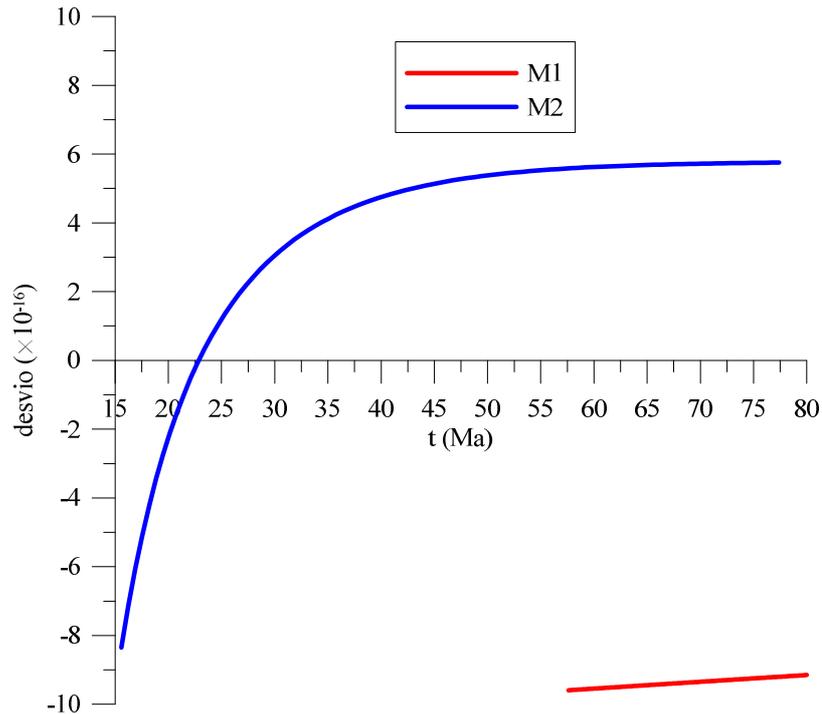


Figura 24: evoluções dos desvios na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.

Inicialmente se observa que, devido à diferença de duração da fase elástica-viscoplástica, os desvios dos dois modelos são avaliados em períodos diferentes. A avaliação da qualidade das soluções obtidas pelo procedimento de simplificação proposto parte do princípio que se as respostas correspondessem às soluções do problema, o desvio seria nulo. De forma preliminar, avaliando a pequena magnitude dos erros absolutos (da ordem de  $10^{-16}$ ), considera-se que o processo de simplificação é razoável para os dois modelos. A avaliação final desse procedimento necessita da comparação das respostas obtidas com as do simulador de elementos finitos, feitas no capítulo 5.3.2.

A hipótese de simplificação impõe a condição  $\dot{f}^{vp} = 0$  sobre os modelos. Esse comportamento pode ser observado na Figura 25, onde os critérios viscoplásticos apresentam comportamento estacionário durante a fase elástica-viscoplástica.

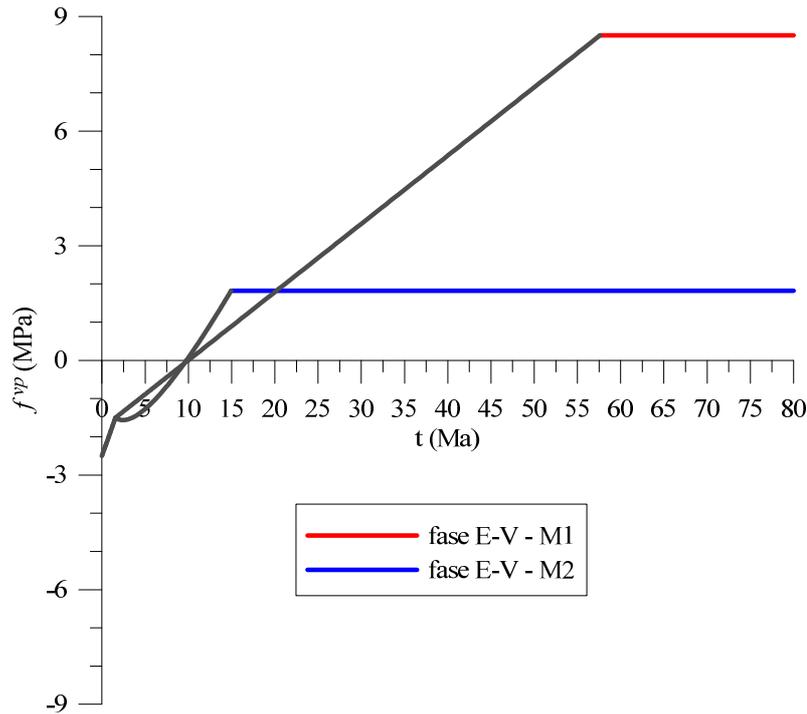


Figura 25: evolução do critério viscoplástico na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.

### 4.3 PERÍODO DE PÓS-DEPOSIÇÃO SEDIMENTAR

No período não-deposicional ( $t > T^s$ ), a bacia sedimentar se comporta como um sistema fechado pois não há o acréscimo de sedimentos ( $\dot{M}_d = 0$ ). Por essa razão, é utilizada uma descrição lagrangiana para o movimento das partículas. Para isso, a configuração da bacia sedimentar ao final do período de deposição é tomada como referência para as partículas de sedimento, ou seja,  $X_3 = x_3(T^s)$ . Na configuração atual da bacia, a posição das partículas no tempo  $t$  é definida como  $x_3(X_3, t) = X_3 + \xi_3(X_3, t)$ , onde  $\underline{\xi} = \xi_3(X_3, t) \underline{e}_3$  é o vetor deslocamento.

A característica principal da deformação da bacia sedimentar durante o período não-deposicional reside no fato de que as deformações não evoluírem nas camadas elástica e plástica superiores. O campo de deformação evolui ( $\underline{d} \neq 0$ ) apenas nas camadas que possuem deformações viscoplásticas, ou seja, em  $0 \leq X_3 \leq H^s - H^p$ . A espessura dessa camada cresce com o tempo, devido aos efeitos da compactação viscoplástica.

A resposta da camada elasto-viscoplástica da bacia sedimentar é estudada durante o período de pós-deposição sedimentar  $T^s \leq t \leq T^f$ , que corresponde ao tempo geológico total escolhido para a análise.

O sistema EDP que descreve o comportamento mecânico da bacia sedimentar, que envolve as leis de endurecimento (84) e (85) (modelo M1), possui solução semi-analítica. Devido à complexidade da função dilatação vertical resultante, a lei de compactação gravitacional é obtida numericamente.

O sistema EDP, que utiliza as leis de endurecimento (65) e (68) (modelo M2) em sua formulação, possui solução analítica para quase todas as funções que o compõem. Em função da complexidade da lei de endurecimento viscoplástica, a dilatação vertical e a lei de compactação gravitacional são obtidas numericamente.

Todas as soluções numéricas são obtidas de forma contínua, com o *software* MAPLE. As equações diferenciais que fornecem as leis de compactação gravitacional envolvem apenas derivadas em relação à variável espacial. Assim, as equações são tratadas como EDO (equações diferenciais ordinárias), onde a variável temporal  $t$  é parametrizada. Já a equação diferencial que fornece a função dilatação vertical do modelo M2 envolve apenas derivadas em relação à variável temporal. Ela também é tratada como EDO, porém a variável espacial  $x_3$  é parametrizada. Em ambos os casos, um algoritmo para o método de Runge-Kutta Fehlberg é usado para resolver o problema de valor de inicial, com acurácia de quinta ordem.

### 4.3.1 Fase elástica-viscoplástica

O desenvolvimento apresentado a seguir utiliza as leis de endurecimento (84) e (85).

Nesse período, a taxa de sedimentos depositados é nula ( $\dot{M}_d = 0$ ). Isso implica na nulidade da taxa de tensão vertical (ver equação (78)):

$$\dot{\sigma}_v = 0 \quad (172)$$

Integrando essa expressão entre os tempos  $T^s$  e  $t$ , tem-se:

$$\sigma_v(X_3, T^s) = \sigma_v^{ps}(X_3) \quad (173)$$

onde  $\sigma_v^{ps}(X_3) = \sigma_v(x_3 = X_3, t = T^s)$  corresponde ao perfil da componente vertical de tensão ao término do período de deposição sedimentar, em  $t = T^s$ .

A lei constitutiva (59) aplicada à taxa de deformação total (75), à taxa de deformação viscoplástica (47) e ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58), resulta em:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\sigma}} = & \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \\ & + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (174)$$

Igualando a taxa de tensão vertical de (172) à componente vertical de (174), tem-se:

$$\frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} = - \frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (175)$$

Substituindo a expressão anterior na componente horizontal de (174), tem-se:

$$\dot{\sigma}_h = - \frac{K \mu (2 - \sqrt{3} a)}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (176)$$

A expressão anterior possui a condição inicial:

$$\sigma_h(X_3, T^s) = \sigma_h^{ps}(X_3) \quad (177)$$

onde  $\sigma_h^{ps}(X_3) = \sigma_h(x_3 = X_3, t = T^s)$  corresponde ao perfil da componente horizontal de tensão conhecida (calculada) ao término do período de acreção, em  $t = T^s$ .

O critério viscoplástico (45) pode ser reescrito na forma:

$$f^{vp} = A\sigma_h + B\sigma_v - p_{vp} \text{ com } \begin{cases} A = -\frac{2}{3} + a\frac{\sqrt{3}}{3} \\ B = -\frac{1}{3} - a\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad (178)$$

Assim, a equação (175) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{A\sigma_h + B\sigma_v - p_{vp}}{\eta_{vp}} = -\frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (179)$$

A relação (79) aplicada à taxa de deformação viscoplástica (47), resulta em:

$$\underline{\underline{trd^{ir}}} = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = -\frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \quad (180)$$

A equação anterior pode ser reescrita, a partir de (175), como:

$$\frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = \frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (181)$$

As condições iniciais para  $\Lambda$  e  $J_{ir}$  são:

$$\begin{cases} \Lambda(X_3, T^s) = \Lambda^{ps}(X_3) \\ J_{ir}(X_3, T^s) = J_{ir}^{ps}(X_3) \end{cases} \quad (182)$$

onde  $\Lambda^{ps}(X_3) = \Lambda(x_3 = X_3, t = T^s)$  e  $J_{ir}^{ps}(X_3) = J_{ir}(x_3 = X_3, t = T^s)$  correspondem aos perfis de dilatação vertical e dilatação volumétrica irreversível conhecidos (calculados) ao término do período de deposição sedimentar, em  $t = T^s$ .

As equações (172), (176), (179) e (181) formam o sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento mecânico do domínio elasto-viscoplástico da bacia sedimentar na fase elástica-viscoplástica. As equações são agrupadas, em conjunto com as suas condições iniciais, para o melhor entendimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_v = 0 \\ \dot{\sigma}_h = -\frac{K\mu(2-\sqrt{3}a)}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \\ \frac{A\sigma_h + B\sigma_v - p_{vp}}{\eta_{vp}} = -\frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \\ \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = \frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \end{array} \right. \quad (183)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(X_3, T^s) = \Lambda^{ps}(X_3) \\ \sigma_h(X_3, T^s) = \sigma_h^{ps}(X_3) \\ \sigma_v(X_3, T^s) = \sigma_v^{ps}(X_3) \\ J_{ir}(X_3, T^s) = J_{ir}^{ps}(X_3) \end{array} \right. \quad (184)$$

Esse sistema é então integrado em seu domínio temporal,  $t \in [T^s, t]$ , resultando nas equações que descrevem o comportamento mecânico da bacia sedimentar no domínio elasto-viscoplástico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(X_3, t) = \exp \left[ \left( \ln \Lambda^{ps}(X_3) + \frac{F(X_3)}{E} \right) \exp \left( -\frac{E}{\eta D} (t - T^s) \right) - \frac{F(X_3)}{E} \right] \\ \sigma_h(x_3, t) = \sigma_h^{ps}(X_3) + \frac{K\mu(2-\sqrt{3}a)}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \ln \frac{\Lambda^{ps}(X_3)}{\Lambda(X_3, t)} \\ \sigma_v(x_3, t) = \sigma_v^{ps}(X_3) \\ J_{ir}(X_3, t) = J_{ir}^{ps}(X_3) \left( \frac{\Lambda^{ps}(X_3)}{\Lambda(X_3, t)} \right)^{\frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a}} \end{array} \right. \quad (185)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = -\frac{K\mu(2-\sqrt{3}a)}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \\ D = \frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \\ E = AC + Dh_{vp} \\ F(X_3) = A\sigma_h^{ps}(X_3) + B\sigma_v^{ps}(X_3) - E \ln \Lambda^{ps}(X_3) - p_{vp}^{ps}(X_3) \end{array} \right. \quad (186)$$

Uma vez calculado o campo de dilatação vertical  $\Lambda(X_3, t)$ , a lei de compactação  $t \rightarrow H(t)$  é obtida a partir do deslocamento de partículas localizadas no topo da bacia sedimentar. O campo de deslocamento resulta da integração numérica das seguintes relações:

$$\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{e}_3 = \frac{\partial \xi_3(X_3, t)}{\partial X_3} = \Lambda(X_3, t) - 1 \quad (187)$$

onde  $\xi_3$  é a componente  $e_3$  do vetor de deslocamento  $\underline{\xi}$ .

Para o tempo final da análise, em  $t = T^f$ , a bacia sedimentar possui os seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} T^f \text{ dado do problema} \\ H^f \text{ resposta numérica} \\ \sigma_h^f = \sigma_h(0, T^f) \\ \sigma_v^f = \sigma_v(0, T^f) \\ \Lambda^f = \Lambda(0, T^f) \\ J_{ir}^f = J_{ir}(0, T^f) \end{array} \right. \quad (188)$$

A condição sobre  $a$  para que a componente horizontal de tensão seja de compressão no do-

mínio elasto-viscoplástico é dada por  $a > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Para as leis de endurecimento (65) e (68), o sistema EDP que descreve o comportamento mecânico no domínio elasto-viscoplástico é idêntico ao sistema (183). Devido à complexidade da lei de endurecimento viscoplástica do modelo, equação diferencial que fornece a dilatação

vertical é resolvida numericamente. No domínio temporal  $t \in [T^s, t]$ , as equações que descrevem o comportamento mecânico da bacia sedimentar são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(X_3, t) \text{ resposta numérica} \\ \sigma_h(x_3, t) = \sigma_h^{ps}(X_3) + \frac{K\mu(2 - \sqrt{3}a)}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \ln \frac{\Lambda^{ps}(X_3)}{\Lambda(X_3, t)} \\ \sigma_v(x_3, t) = \sigma_v^{ps}(X_3) \\ J_{ir}(X_3, t) = J_{ir}^{ps}(X_3) \left( \frac{\Lambda^{ps}(X_3)}{\Lambda(X_3, t)} \right)^{-\frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a}} \end{array} \right. \quad (189)$$

A lei de compactação gravitacional pode ser obtida de forma semelhante ao exposto anteriormente. Novamente, devido à complexidade das expressões envolvidas, busca-se uma solução numérica.

Assim como o caso anterior, a condição sobre  $a$  para que a componente horizontal de tensão seja de compressão é dada por  $a > \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

### 4.3.2 Estudo comparativo final entre os modelos M1 e M2

A presente seção estende ao período de pós-deposição sedimentar o estudo apresentado na seção 4.2.5. Os parâmetros mecânicos que definem a situação de comparação são apresentados na Tabela 1. Novamente, o tempo final de sedimentação e o tempo final de análise são  $T^s = 80\text{Ma}$  e  $T^f = 160\text{Ma}$ , respectivamente.

Na escala da bacia, uma das principais características na modelagem de bacias sedimentares diz respeito a avaliação da lei de compactação  $t \rightarrow H(t)$ , que é apresentada na Figura 26. Os valores limites são expostos na Tabela 5.

Na ausência da acreção de sedimentos, a compactação gravitacional reduz a altura da bacia sedimentar. Esse comportamento ressalta o comportamento diferido das deformações nesse período.

Os níveis de compactação da bacia sedimentar para os modelos M1 e M2 ao final do período de pós-sedimentação (em  $t = T^f$ ) são de 85.4% e 63.2%, respectivamente. Isso corresponde a um aumento de 1.9% e 0.4% na compactação, quando comparados ao tempo  $t = T^s$  (exposto na seção 4.2.5).

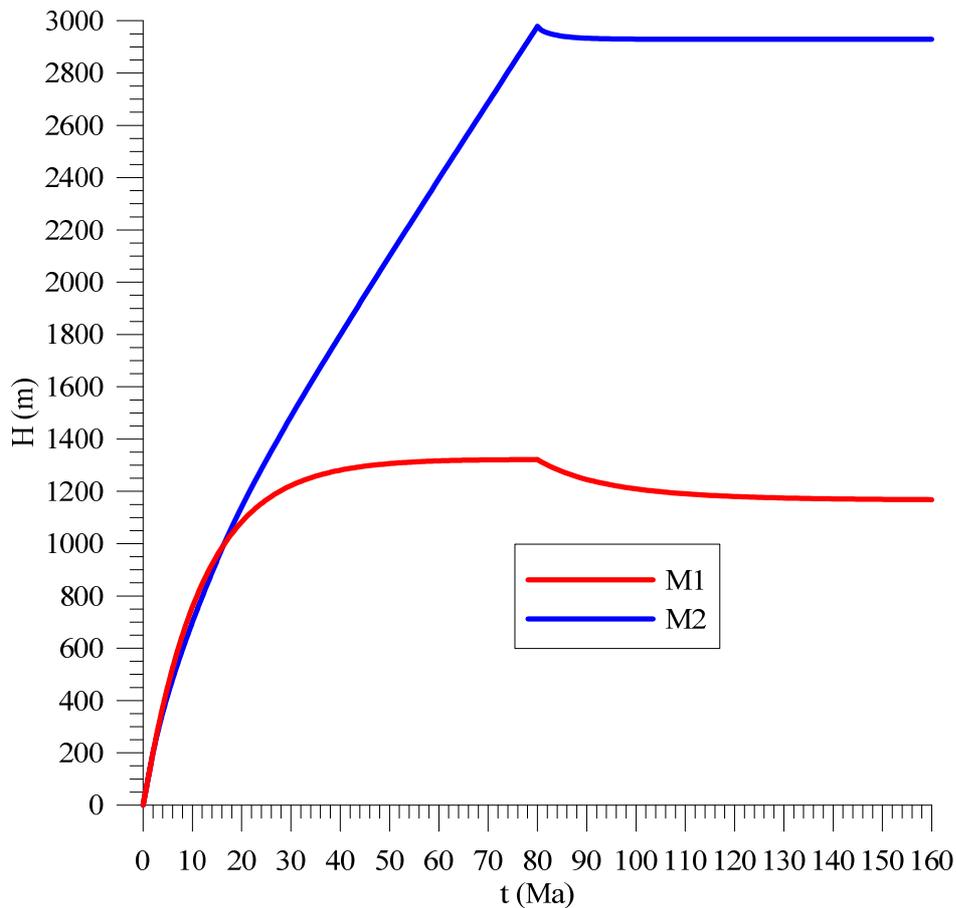


Figura 26: leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.

Tabela 5: valores limites das leis de compactação.

parâmetro	M1	M2
$T^e$ (Ma)	1.57	1.57
$T^p$ (Ma)	9.97	9.72
$T^{vp}$ (Ma)	57.61	14.94
$T^s$ (Ma)	80.00	80.00
$T^f$ (Ma)	160.00	160.00
$H^e$ (m)	156.68	156.68
$H^p$ (m)	755.37	685.48
$H^{vp}$ (m)	1315.06	932.39
$H^s$ (m)	1321.54	2977.95
$H^f$ (m)	1168.37	2941.18

A rigor, ambas as leis de compactação apresentam evolução das componentes diferidas de deformação (conforme Tabela 6, da posterior seção 0). No entanto, a lei de compactação do modelo M2 se apresenta praticamente estável para o tempo  $t \approx 112$  Ma. Já no modelo M1, essa estabilização ocorre para o tempo  $t \approx 130$  Ma.

### **Análise global**

Na análise global, serão apresentados os perfis das variáveis mecânicas no tempo  $t = T^f = 160$  Ma, para os modelos M1 e M2.

A análise global é ilustrada da Figura 27 à Figura 28, apresentando os perfis: das componentes do jacobiano, da porosidade euleriana, da massa específica e das tensões. De forma geral, apesar da diferença de comportamento entre os modelos M1 e M2, todos os perfis revelam os efeitos do adensamento do material sedimentar em função da compactação.

As tendências de valores negativos para a porosidade euleriana e de crescimento irrestrito da massa específica apresentada para o modelo M1 são confrontadas com a variação de  $J$  e  $J_{ir}$ , na Figura 27(a).

Conforme observado anteriormente, as leis de endurecimento do modelo M1 possibilitam a definição de  $J_{ir}$  abaixo do valor crítico  $J_{ir}^{cr}$ . Para a bacia em análise, as partículas posicionadas abaixo de  $x_3 \approx 220$  m apresentam valores abaixo de  $J_{ir}^{cr} = 1 - \phi_0 = 0.30$ . Como resultado, essas partículas apresentam porosidades negativas e uma variação irrestrita da massa específica (acima do valor de referência  $\rho \rightarrow \rho_0 / J_{ir}^{cr} \approx 2167 \text{ kg/m}^3$ ).

As leis de endurecimento do modelo M2 impõem um comportamento assintótico à componente irreversível da dilatação volumétrica  $J_{ir}$ . Como consequência, o perfil de porosidades eulerianas apresenta valores finitos, muito próximos à condição de fechamento total dos poros. Em específico, as partículas posicionadas abaixo de  $x_3 = 600$  m apresentam níveis de porosidade muito próximos a zero. As mesmas partículas apresentam valores de massa específica próximos à  $2167 \text{ kg/m}^3$ .

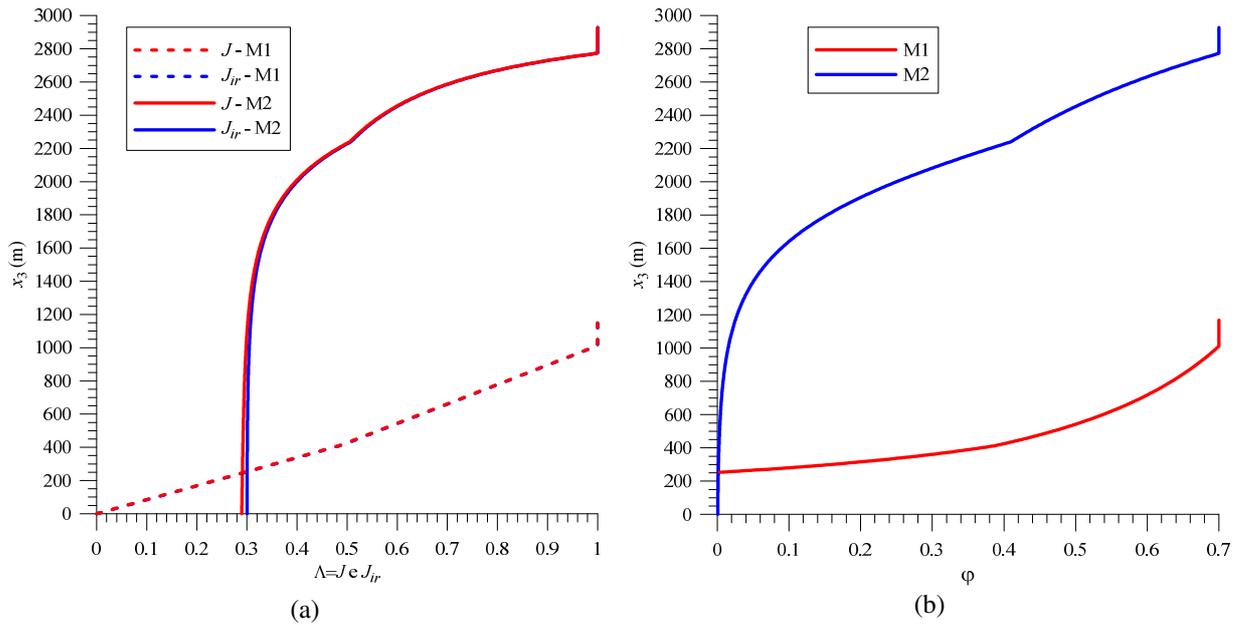


Figura 27: perfis de (a) jacobianos e (b) porosidade euleriana em  $t=160\text{Ma}$ , para os modelos M1 e M2.

Observa-se no perfil de jacobianos que as componentes  $J$  e  $J_{ir}$  são muito próximas para o modelo M1, o que reforça a hipótese de deformações elásticas infinitesimais ( $J \approx J_{ir}$ ). Já o modelo M2 apresenta um pequeno distanciamento entre essas componentes, para as partículas posicionadas abaixo de  $x_3 = 1400$  m. Isso indica um leve distanciamento da hipótese de elasticidade infinitesimal.

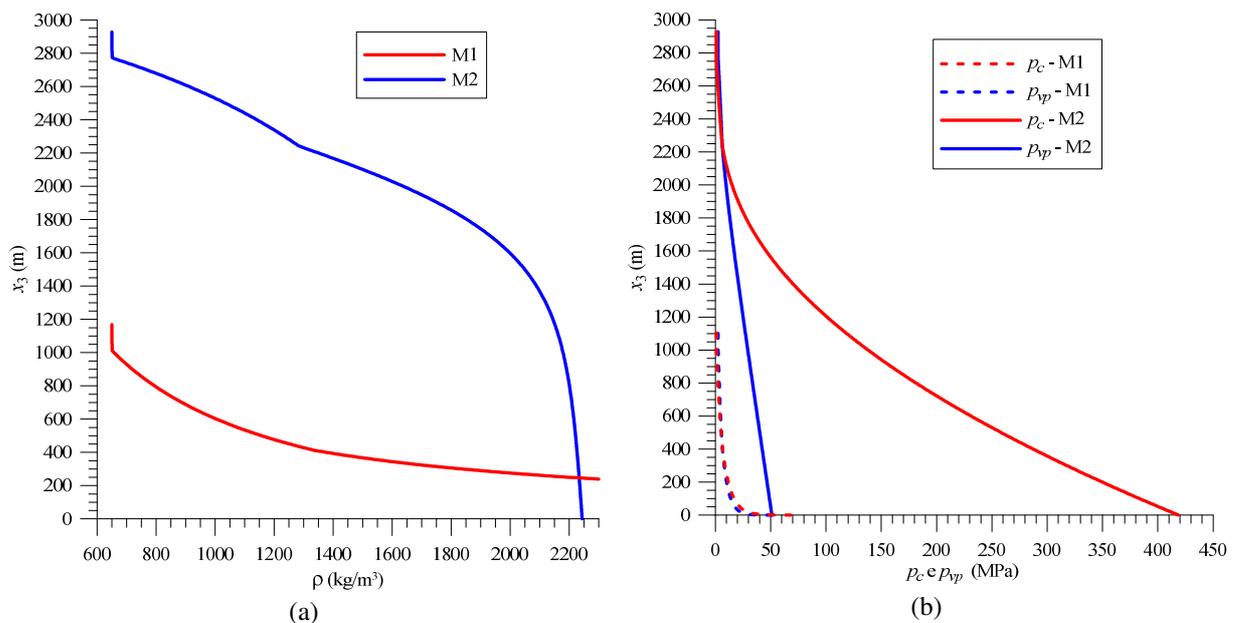


Figura 28: perfis de (a) massa específica e (b) das pressões de consolidação plástica e viscoplástica em  $t=160\text{Ma}$ , para os modelos M1 e M2.

Por fim, o perfil das pressões de consolidação plástica e viscoplástica ilustra a diferença de comportamento entre as leis de endurecimento dos modelos M1 e M2. Na base da bacia, a pressão de consolidação plástica do modelo M2 é aproximadamente sete vezes maior que a do modelo M1.

### Análise local

Na Figura 29, apresenta-se a evolução da dilatação vertical e da componente irreversível do jacobiano para as partículas situadas na base da bacia sedimentar. Os valores limites são apresentados na Tabela 6.

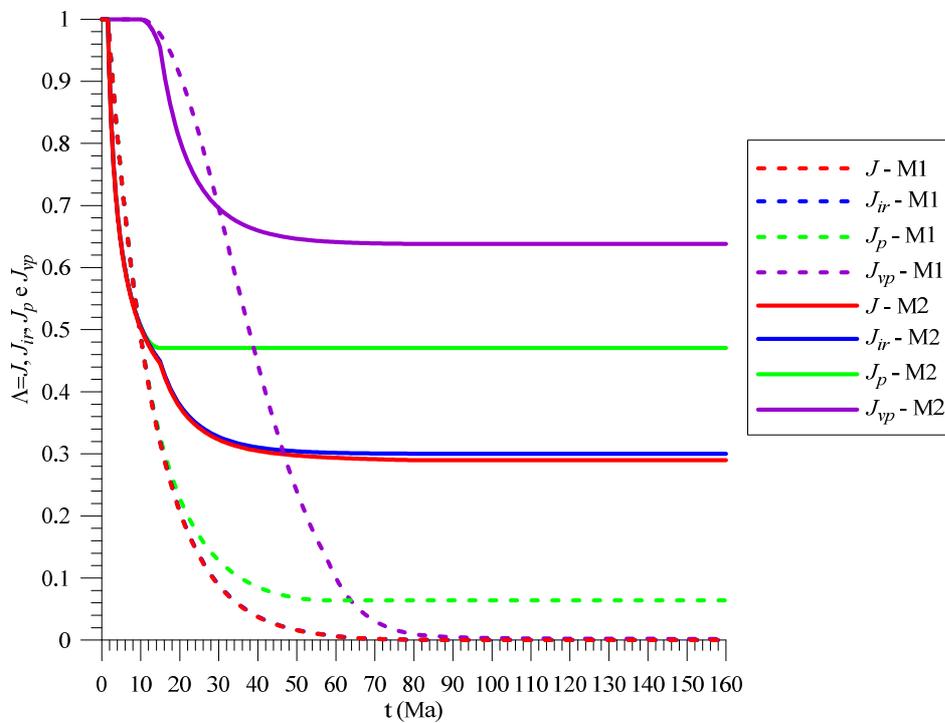


Figura 29: evoluções da dilatação vertical e jacobianos na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.

Tabela 6: valores limites de dilatação vertical e jacobianos.

modelo	parâmetro	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M1	$\Lambda = J$	0.99933	0.48711	0.00827	0.00058	0.00012
	$J_{ir}$	1.00000	0.48921	0.00851	0.00060	0.00013
	$J_p$	1.00000	0.48921	0.06403	0.06403	0.06403
	$J_{vp}$	1.00000	1.00000	0.13294	0.00944	0.00200
M2	$\Lambda = J$	0.99933	0.50674	0.44606	0.28975	0.28969
	$J_{ir}$	1.00000	0.50920	0.44918	0.30026	0.30020
	$J_p$	1.00000	0.50920	0.47046	0.47046	0.47046
	$J_{vp}$	1.00000	1.00000	0.95477	0.63824	0.63811

Com os dados apresentados na Tabela 6, observa-se que a hipótese de elasticidade infinitesimal ( $J_{ir} \approx J$ ) é verificada, uma vez que o valor limite da dilatação volumétrica é aproximadamente igual à unidade. Na fase elástica, a ausência de variação da componente irreversível do jacobiano ocasiona a invariância das propriedades mecânicas que dependem desse parâmetro (porosidade euleriana, pressões de consolidação, etc.).

Durante a fase elástica-plástica, a evolução da componente plástica da dilatação volumétrica é igual à componente irreversível. Nesse período, a componente viscoplástica não apresenta variação. Esse comportamento indica que até o término dessa fase, só a componente plástica de deformação está ativa na bacia sedimentar.

No tempo  $t = 15$  Ma, o modelo M1 atinge o limite  $J_{ir}^{cr} = 1 - \phi_0 = 0.30$ . Conforme exposto anteriormente, esse valor corresponde ao fechamento total dos poros do meio poroso. O efeito dessa ocorrência corresponde ao desenvolvimento de porosidade euleriana negativa na sequência do processo de deformação da bacia sedimentar. A origem desse comportamento já foi discutida e diz respeito à insuficiência de endurecimento fornecido pelas leis do modelo M1.

A condição de encerramento da fase elástica-plástica-viscoplástica,  $\dot{\chi} = 0$ , é equivalente à  $\dot{J}_p = 0$  (conforme a equação (80)). Isso condiz com o comportamento observado para a componente plástica do jacobiano nos dois modelos, que apresentam retas tangentes horizontais nos tempos finais das respectivas fases. No tempo  $t = 10$  Ma, o modelo M2 apresenta uma dilatação volumétrica plástica que é aproximadamente sete vezes maior que a do modelo M1.

A partir do tempo  $t = 60$  Ma, a componente irreversível do jacobiano do modelo M2 apresenta o comportamento assintótico, em torno do valor  $J_{ir}^{cr} = 1 - \phi_0 = 0.30$ . Esse modelo apresenta uma sensível separação entre as curvas  $\Lambda = J$  e  $J_{ir}$ , que implica em deformações elásticas que iniciam um leve distanciamento da hipótese infinitesimal. Já o modelo M1, apresenta a tendência de nulidade das componentes  $\Lambda = J$  e  $J_{ir}$ .

No período de pós-sedimentação, ambos os modelos apresentam comportamento assintótico. Ou seja, as dilatações volumétricas dos dois modelos rapidamente se estabilizam.

Na Figura 30 apresentam-se as evoluções da porosidade euleriana  $\varphi(x_3 = 0, t)$  e da massa específica  $\rho(x_3 = 0, t)$ . Os valores limites são expostos na Tabela 7.

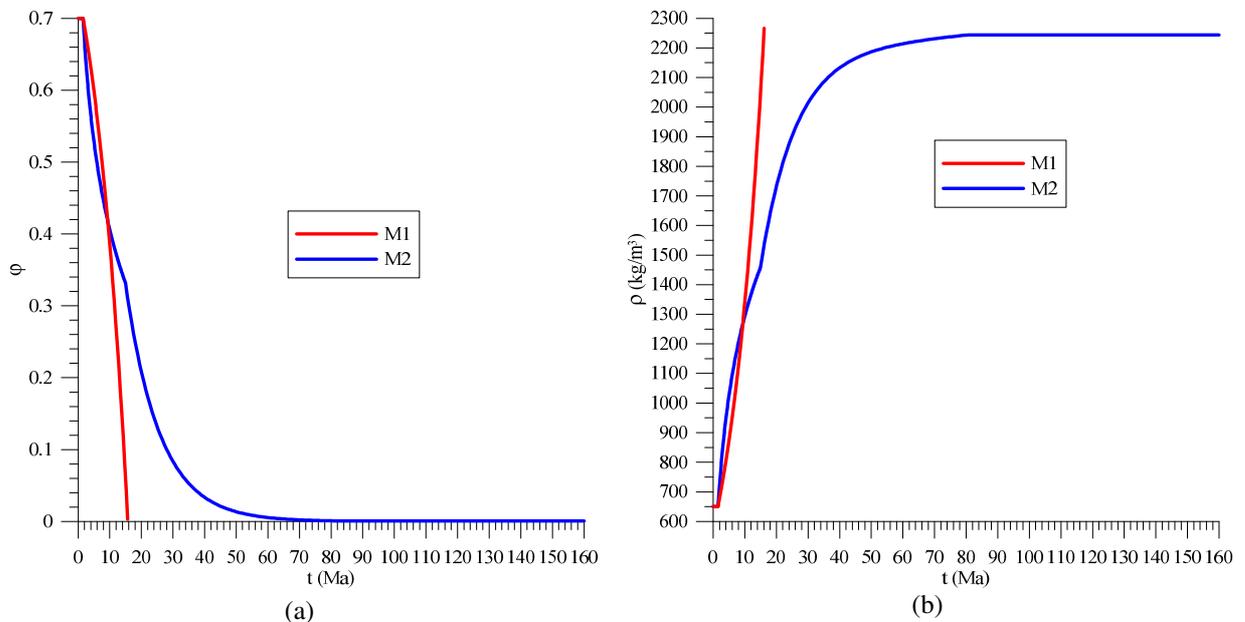


Figura 30: evoluções da (a) porosidade euleriana e (b) massa específica na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.

Tabela 7: valores limites da porosidade euleriana e massa específica.

modelo	parâmetro	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M1	$\varphi$	0.70000	0.38718	-34.24628	-495.23915	-2344.46007
	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	650.44	1334.40	78591.67	1120079.14	5301976.79
M2	$\varphi$	0.70000	0.41085	0.33212	0.00088	0.00068
	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	650.44	1282.70	1457.55	2243.34	2243.79

Tanto a porosidade euleriana quanto a massa específica refletem as características de cada modelo, já observadas na evolução das componentes da dilatação volumétrica. A partir do tempo  $t = 15$  Ma, o modelo M1 apresenta porosidades negativas e massa específica com evolução ilimitada.

O modelo M2 apresenta suave evolução dos dois parâmetros mecânicos. Em termos de porosidade, esse modelo encerra o período de deposição de sedimentos com quase o fechamento total dos poros, apresentando uma pequena variação no período seguinte. Para a massa específica, o modelo M2 apresenta o início de um comportamento assintótico, correspondente à massa específica de fechamento total dos poros ( $\rho \rightarrow \rho_0 / J_{ir}^{cr} \approx 2167 \text{ kg/m}^3$ ).

Uma característica a ser observada na Tabela 7, para a fase elástica, diz respeito à forma com que a porosidade e a massa específica evoluem. Conforme definido pelo balanço de massa (3), a massa específica é uma função da dilatação volumétrica do material ( $J = \Lambda$ ), enquanto a porosidade é definida como uma função da componente irreversível da dilatação volumétrica. Verifica-se que ao final da fase elástica, a porosidade não variou, enquanto a massa específica apresenta uma pequena variação, que condiz com a variação de  $J$ .

A evolução do estado de tensões na bacia sedimentar  $\underline{\underline{\sigma}}(x_3 = 0, t)$  é apresentada na Figura 31, e seus valores limites são expostos na Tabela 8.

Diferente da componente vertical de tensão, a componente horizontal se desenvolve segundo a lei constitutiva de cada modelo. O comportamento apresentado para essa componente é altamente dependente do escalar positivo e constante  $a$ , que controla a inclinação da parte dúctil da superfície de plastificação. Ressalta-se que as respostas dessa componente de tensão, tanto do modelo M1 quanto do modelo M2, são para o mesmo valor de  $a$ .

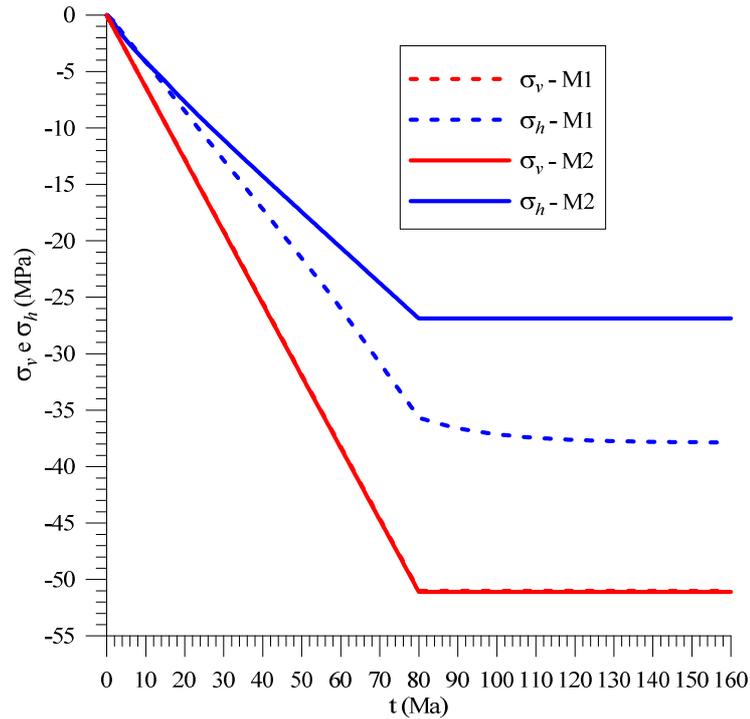


Figura 31: evoluções das tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M1 e M2.

Tabela 8: valores limites das tensões (MPa).

modelo	parâmetro	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M1	$\sigma_v$	-0.99903	-6.35294	-36.71985	-50.99458	-50.99458
	$\sigma_h$	-0.49206	-4.14449	-24.86076	-35.65130	-37.85930
M2	$\sigma_v$	-0.99903	-6.21565	-9.54339	-50.99458	-50.99458
	$\sigma_h$	-0.49206	-4.02088	-5.83822	-26.88116	-26.88144

No período de pós-sedimentação, o comportamento estacionário da componente vertical de tensão de ambos os modelos condiz com a predição da equação (172), ou seja, ela não apresenta variação. Já a componente horizontal de tensão, que apresenta diferença na evolução dos dois modelos, desenvolve um aumento de intensidade. Essa variação é mais sensível para o modelo M1.

## 5. FORMULAÇÃO DE SOLUÇÕES COM MÓDULOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS

No capítulo anterior foram apresentados a descrição da formulação mecânica do problema e a comparação entre as respostas para os modelos M1 e M2, desconsiderando quaisquer variações dos módulos elásticos do material. O presente capítulo tem como objetivo a obtenção de soluções que descrevam o comportamento mecânico da bacia sedimentar apenas para as leis de endurecimento (65) e (68), considerando os efeitos do adensamento sobre os módulos elásticos do material.

O modelo desenvolvido e exposto neste capítulo apresenta um maior grau de complexidade quando comparado ao modelo M2. Essa característica dificulta ou impossibilita o desenvolvimento de soluções analíticas para os sistemas não-lineares EDP que descrevem o comportamento mecânico do material (à exceção da fase elástica). Assim, as respostas são obtidas numericamente.

### 5.1 PERÍODO DE DEPOSIÇÃO SEDIMENTAR

As mesmas considerações e metodologias apresentadas na seção 4.2 são válidas para a presente formulação. O mesmo esquema temporal incremental é utilizado para a solução, assim como o cálculo do incremento e a atualização da altura da bacia sedimentar.

Tanto o esquema incremental quanto a solução dos sistemas não-lineares EDP foram realizados com o *software* MAPLE. Os sistemas EDP apresentam as mesmas características e são resolvidos com a mesma técnica de diferenças finitas com extrapolação de Richardson para o problema de valor de contorno em cada tempo.

Conforme mencionado, a fase elástica possui solução analítica. Essa solução corresponde àquela apresentada em 4.2.1, e por isso não será rerepresentada.

#### 5.1.1 Fase elástica-plástica

A resposta da bacia sedimentar na fase elástica-plástica ocorre para os mesmos domínios temporal e espacial, descritos em 4.2.2.

A relação (79), aplicada à taxa de deformação plástica (39), resulta em:

$$\underline{\underline{tr}} d^{ir} = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = -\dot{\chi} \quad (190)$$

Substituindo na lei constitutiva (59) os termos relativos à taxa de deformação total (75), à taxa de deformação plástica (39), ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58) juntamente com o termo que representa a influência do adensamento os módulos elásticos (63), têm-se:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = & \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \dot{\chi} + \frac{\underline{\underline{tr}} \sigma}{3} \frac{\dot{K}}{K} - \frac{(\sigma_v - \sigma_h)}{3} \frac{\dot{\mu}}{\mu} \right] (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \\ & + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \dot{\chi} + \frac{\underline{\underline{tr}} \sigma}{3} \frac{\dot{K}}{K} + \frac{2(\sigma_v - \sigma_h)}{3} \frac{\dot{\mu}}{\mu} \right] e_3 \otimes e_3 \end{aligned} \quad (191)$$

A determinação da expressão do multiplicador plástico é feita da mesma forma que em 4.2.2, resultando em:

$$\dot{\chi} = G_1^p(J_{ir}) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + G_2^p(J_{ir}) \dot{J}_{ir} \text{ com } \begin{cases} G_1^p(J_{ir}) = -\frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a}{K + a^2 \mu + h_p} \\ G_2^p(J_{ir}) = -\frac{(\sigma_v + 2\sigma_h) \bar{K} + a\sqrt{3}(\sigma_v - \sigma_h) \bar{\mu}}{K + a^2 \mu + h_p} \end{cases} \quad (192)$$

onde os parâmetros de rigidez adimensionais  $\bar{K}$  e  $\bar{\mu}$  são definidos por  $\bar{K} = \frac{1}{3K} \frac{\partial K}{\partial J_{ir}}$  e

$\bar{\mu} = \frac{1}{3\mu} \frac{\partial \mu}{\partial J_{ir}}$ . Observa-se que  $h_p = h_p(\varphi) = h_p(J_{ir})$ , devido à expressão (66).

A partir das expressões (56), tem-se:

$$\begin{cases} \bar{K} = -\frac{1}{3} \frac{3k^s + 4\mu^s}{J_{ir}(3k^s + 4\mu^s) - 3k^s(1 - \phi_0)} \\ \bar{\mu} = -\frac{5}{3} \frac{3k^s + 4\mu^s}{3k^s(5J_{ir} - 2(1 - \phi_0)) + 4\mu^s(5J_{ir} - 3(1 - \phi_0))} \end{cases} \quad (193)$$

Substituindo a equação (192) em (191), tem-se:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \left[ F_{h1}^p \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + F_{h2}^p \dot{J}_{ir} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ F_{v1}^p \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + F_{v2}^p \dot{J}_{ir} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (194)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{h1}^p(J_{ir}) = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^p \\ F_{h2}^p(J_{ir}) = \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_2^p + (\sigma_v + 2\sigma_h) \bar{K} - (\sigma_v - \sigma_h) \bar{\mu} \\ F_{v1}^p(J_{ir}) = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^p \\ F_{v2}^p(J_{ir}) = \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_2^p + (\sigma_v + 2\sigma_h) \bar{K} + 2(\sigma_v - \sigma_h) \bar{\mu} \end{array} \right. \quad (195)$$

Baseado na observação (88), a equação (194) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial x_3} = \left[ \frac{F_{h1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{h2}^p \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ \frac{F_{v1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{v2}^p \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (196)$$

Combinando a taxa de tensão vertical da expressão anterior ao balanço de momentum (1), resulta em:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^p} - \Lambda \frac{F_{v2}^p}{F_{v1}^p} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \quad (197)$$

Combinando as expressões (190) e (192), baseado na observação (88), tem-se:

$$\frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^p}{\Lambda(1 + G_2^p J_{ir})} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \quad (198)$$

Combinando as equações (78) e a componente vertical de tensão em (194), pode-se reescrever a relação (74) como:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^p + \Lambda F_{v2}^p} \frac{\partial J_{ir}}{\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3}} \dot{M}_d \quad (199)$$

A expressão anterior tem a condição de contorno (7).

As equações (196), (197), (198) e (199) formam o sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento mecânico do domínio elastoplástico da bacia sedimentar na fase elástica-plástica. As equações (196) à (198) possuem as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elástico e elastoplástico dadas por (104). As equações são agrupadas, em conjunto com as suas condições de continuidade e contorno, para o melhor entendimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^p} - \Lambda \frac{F_{v2}^p}{F_{v1}^p} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{h2}^p \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{v2}^p \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^p}{\Lambda(1+G_2^p J_{ir})} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^p + \Lambda F_{v2}^p} \frac{\partial J_{ir}}{\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3}} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (200)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^e = \Lambda(H(t) - H^e, t) \\ \sigma_h^e = \sigma_h(H(t) - H^e, t) \\ \sigma_v^e = \sigma_v(H(t) - H^e, t) \\ J_{ir}^e = J_{ir}(H(t) - H^e, t) \\ u_3(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (201)$$

O sistema é resolvido em cada tempo, pelo processo incremental descrito em 4.2. A fase é encerrada sob as mesmas condições descritas anteriormente. No tempo  $t = T^p$ , a bacia sedimentar possui os seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} T^p \text{ calculado pelo processo incremental} \\ H^p \text{ calculado pelo processo incremental} \\ \sigma_h^p = \sigma_h(0, T^p) \\ \sigma_v^p = \sigma_v(0, T^p) \\ \Lambda^p = \Lambda(0, T^p) \\ J_{ir}^p = J_{ir}(0, T^p) \\ u_3^p = u_3(H^p - H^e, T^p) \end{array} \right. \quad (202)$$

As condições sobre  $a$ , para que  $\dot{\sigma}_h < 0$ , são complexas e não podem ser explicitamente determinadas. Assim, o valor de  $a$  adotado nas análises é testado e a condição  $\dot{\sigma}_h < 0$  é posteriormente verificada.

Para  $t \geq T^p$ , as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elastoplástico e elastoplástico-viscoplástico são dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} \text{continuidade na fronteira} \\ \text{elastoplástica/elastoplástica-viscoplástica} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_h(H(t) - H^p, t) = \sigma_h^p \\ \sigma_v(H(t) - H^p, t) = \sigma_v^p \\ \Lambda(H(t) - H^p, t) = \Lambda^p \\ J_{ir}(H(t) - H^p, t) = J_{ir}^p \end{array} \right. \quad (203)$$

### 5.1.2 Fase elástica-plástica-viscoplástica

A resposta da bacia sedimentar na fase elástica-plástica-viscoplástica ocorre para os mesmos domínios temporal e espacial, descritos em 4.2.3.

A relação (79) aplicada às taxas de deformação plástica (39) e viscoplástica (47) resulta em:

$$\text{tr} d_{ir}^{\equiv} = \frac{j_{ir}}{J_{ir}} = - \left( \dot{\chi} + \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \right) = -\Psi \quad (204)$$

Substituindo na lei constitutiva (59) os termos relativos à taxa de deformação total (75), à taxa de deformação plástica (39), à taxa de deformação viscoplástica (47), ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58) juntamente com o termo que representa a influência do adensamento sobre os módulos elásticos (63), têm-se:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\sigma}} = & \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \Psi + \frac{tr \underline{\sigma}}{3} \frac{\dot{K}}{K} - \frac{(\sigma_v - \sigma_h)}{3} \frac{\dot{\mu}}{\mu} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \\ & + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \Psi + \frac{tr \underline{\sigma}}{3} \frac{\dot{K}}{K} + \frac{2(\sigma_v - \sigma_h)}{3} \frac{\dot{\mu}}{\mu} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (205)$$

Resulta da condição de consistência  $\dot{f}^p = 0$  que

$$\Psi = G_1^{vp}(J_{ir}) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + G_2^{vp}(J_{ir}) \dot{J}_{ir} \text{ com } \begin{cases} G_1^{vp}(J_{ir}) = -\frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a}{K + a^2 \mu + h_p} \\ G_2^{vp}(J_{ir}) = -\frac{(\sigma_v + 2\sigma_h) \bar{K} + a\sqrt{3}(\sigma_v - \sigma_h) \bar{\mu}}{K + a^2 \mu + h_p} \end{cases} \quad (206)$$

Substituindo a equação anterior em (205), tem-se:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \left[ F_{h1}^{vp} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + F_{h2}^{vp} \dot{J}_{ir} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ F_{v1}^{vp} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + F_{v2}^{vp} \dot{J}_{ir} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (207)$$

onde:

$$\begin{cases} F_{h1}^{vp}(J_{ir}) = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^{vp} \\ F_{h2}^{vp}(J_{ir}) = \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_2^{vp} + (\sigma_v + 2\sigma_h) \bar{K} - (\sigma_v - \sigma_h) \bar{\mu} \\ F_{v1}^{vp}(J_{ir}) = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_1^{vp} \\ F_{v2}^{vp}(J_{ir}) = \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) G_2^{vp} + (\sigma_v + 2\sigma_h) \bar{K} + 2(\sigma_v - \sigma_h) \bar{\mu} \end{cases} \quad (208)$$

Baseado na observação (88), a equação (207) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial x_3} = \left[ \frac{F_{h1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{h2}^p \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ \frac{F_{v1}^p}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{v2}^p \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (209)$$

Combinando a taxa de tensão vertical da expressão anterior ao balanço de momentum (1), tem-se:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^{vp}} - \Lambda \frac{F_{v2}^{vp}}{F_{v1}^{vp}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \quad (210)$$

Combinando as expressões (204) e (206), baseado na observação (88), obtém-se:

$$\frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^{vp}}{\Lambda(1 + G_2^{vp} J_{ir})} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \quad (211)$$

Combinando as equações (78) e a componente vertical de tensão em (207), pode-se reescrever a relação (74) como:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^{vp} + \Lambda F_{v2}^{vp} \frac{\partial x_3}{\partial \Lambda}} \dot{M}_d \quad (212)$$

A expressão anterior tem a condição de contorno (7).

As equações (209), (210), (211) e (212) formam o sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento mecânico do domínio elastoplástico-viscoplástico da bacia sedimentar na fase elástica-plástica-viscoplástica. As equações (209) à (211) possuem as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elastoplástico e elastoplástico-viscoplástico dadas por (203). As equações são agrupadas, em conjunto com as suas condições de continuidade e contorno, para o melhor entendimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^{vp}} - \Lambda \frac{F_{v2}^{vp}}{F_{v1}^{vp}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^{vp}}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{h2}^{vp} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^{vp}}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{v2}^{vp} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^{vp}}{\Lambda(1+G_2^{vp}J_{ir})} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^{vp} + \Lambda F_{v2}^{vp} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3}} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (213)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(H(t) - H^p, t) = \Lambda^p \\ \sigma_h(H(t) - H^p, t) = \sigma_h^p \\ \sigma_v(H(t) - H^p, t) = \sigma_v^p \\ J_{ir}(H(t) - H^p, t) = J_{ir}^p \\ u_3(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (214)$$

O sistema é resolvido em cada tempo, pelo processo incremental descrito em 4.2. A fase é encerrada sob as mesmas condições descritas anteriormente. No tempo  $t = T^{vp}$ , a bacia sedimentar possui os seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{vp} \text{ dado pelo processo incremental} \\ H^{vp} \text{ dado pelo processo incremental} \\ \sigma_h^{vp} = \sigma_h(0, T^{vp}) \\ \sigma_v^{vp} = \sigma_v(0, T^{vp}) \\ \Lambda^{vp} = \Lambda(0, T^{vp}) \\ J_{ir}^{vp} = J_{ir}(0, T^{vp}) \\ u_3^{vp} = u_3(H^{vp} - H^p, T^{vp}) \end{array} \right. \quad (215)$$

As condições sobre  $a$ , para que  $\sigma_h < 0$ , são complexas e não podem ser explicitamente determinadas. Assim, o valor de  $a$  adotado nas análises é testado e a condição  $\sigma_h < 0$  é posteriormente verificada.

Para  $t \geq T^{vp}$ , as condições de continuidade na fronteira entre os domínios elastoplástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico são dadas por:

$$\begin{array}{l} \text{continuidade na fronteira} \\ \text{elastoplástica-viscoplástica/} \\ \text{elasto-viscoplástica} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_h(H(t) - H^{vp}, t) = \sigma_h^{vp} \\ \sigma_v(H(t) - H^{vp}, t) = \sigma_v^{vp} \\ \Lambda(H(t) - H^{vp}, t) = \Lambda^{vp} \\ J_{ir}(H(t) - H^{vp}, t) = J_{ir}^{vp} \end{array} \right. \quad (216)$$

### 5.1.3 Fase elástica-viscoplástica

A resposta da bacia sedimentar na fase elástica-viscoplástica ocorre para os mesmos domínios temporal e espacial, descritos em 4.2.4.

A relação (79) aplicada à taxa de deformação viscoplástica (47) resulta em:

$$\underline{\underline{tr}} d^{ir} = \frac{j_{ir}}{J_{ir}} = -\frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \quad (217)$$

Substituindo na lei constitutiva (59) os termos relativos à taxa de deformação total (75), à taxa de deformação viscoplástica (47) e ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58), têm-se:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = & \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} + \frac{\underline{\underline{tr}} \underline{\underline{\sigma}} \dot{K}}{3 K} - \frac{(\sigma_v - \sigma_h) \dot{\mu}}{3 \mu} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \\ & + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} + \frac{\underline{\underline{tr}} \underline{\underline{\sigma}} \dot{K}}{3 K} + \frac{2(\sigma_v - \sigma_h) \dot{\mu}}{3 \mu} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (218)$$

Através da mesma hipótese de simplificação proposta em 4.2.4, a equação (217) pode ser reescrita como:

$$-\frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = G_1^v(J_{ir}) \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + G_2^v(J_{ir}) \dot{J}_{ir} \text{ com } \begin{cases} G_1^v(J_{ir}) = -\frac{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a}{K + a^2\mu + h_{vp}} \\ G_2^v(J_{ir}) = -\frac{(\sigma_v + 2\sigma_h)\bar{K} + a\sqrt{3}(\sigma_v - \sigma_h)\bar{\mu}}{K + a^2\mu + h_{vp}} \end{cases} \quad (219)$$

onde  $h_{vp} = h_{vp}(\varphi) = h_{vp}(J_{ir})$ , devido à expressão (69).

Substituindo as expressões (217) e (219) em (218), tem-se:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \left[ F_{h1}^v \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + F_{h2}^v \dot{J}_{ir} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[ F_{v1}^v \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + F_{v2}^v \dot{J}_{ir} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (220)$$

onde:

$$\begin{cases} F_{h1}^v(J_{ir}) = F_h^e + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_1^v \\ F_{h2}^v(J_{ir}) = \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_2^v + (\sigma_v + 2\sigma_h)\bar{K} - (\sigma_v - \sigma_h)\bar{\mu} \\ F_{v1}^v(J_{ir}) = F_v^e + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_1^v \\ F_{v2}^v(J_{ir}) = \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a \right) G_2^v + (\sigma_v + 2\sigma_h)\bar{K} + 2(\sigma_v - \sigma_h)\bar{\mu} \end{cases} \quad (221)$$

O sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento mecânico da bacia sedimentar no domínio elasto-viscoplástico na fase elástica-plástica-viscoplástica é construído de forma similar às fases precedentes. As equações são agrupadas, em conjunto com as suas condições de continuidade e de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_{v1}^v} - \Lambda \frac{F_{v2}^v}{F_{v1}^{vp}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_{h1}^v}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{h2}^v \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_{v1}^v}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} + F_{v2}^v \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \\ \frac{1}{J_{ir}} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = - \frac{G_1^v}{\Lambda(1+G_2^v J_{ir})} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = - \frac{g}{F_{v1}^v + \Lambda F_{v2}^v} \frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} \dot{M}_d \end{array} \right. \quad (222)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(H(t) - H^{vp}, t) = \Lambda^{vp} \\ \sigma_h(H(t) - H^{vp}, t) = \sigma_h^{vp} \\ \sigma_v(H(t) - H^{vp}, t) = \sigma_v^{vp} \\ J_{ir}(H(t) - H^{vp}, t) = J_{ir}^{vp} \\ u_3(0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (223)$$

Essa fase é encerrada no tempo  $t = T^s$ , que consiste em um dado conhecido do problema.

Nesse tempo, a bacia sedimentar possui os seguintes valores limites:

$$\left\{ \begin{array}{l} H^s \text{ calculado pelo processo incremental} \\ \sigma_h^s = \sigma_h(0, T^s) \\ \sigma_v^s = \sigma_v(0, T^s) \\ \Lambda^s = \Lambda(0, T^s) \\ J_{ir}^s = J_{ir}(0, T^s) \\ u_3^s = u_3(H^s - H^{vp}, T^s) \end{array} \right. \quad (224)$$

## 5.2 PERÍODO DE PÓS-DEPOSIÇÃO SEDIMENTAR

As mesmas considerações e metodologias apresentadas na seção 4.3 são válidas para a presente formulação. A lei de compactação é novamente obtida pela posição das partículas  $x_3(X_3, t) = X_3 + \xi_3(X_3, t)$ .

A solução do problema é obtida de forma contínua, com o *software* MAPLE. A equação diferencial que fornece a lei de compactação gravitacional envolve apenas derivadas em relação à variável espacial, sendo tratada como EDO com a variável temporal  $t$  parametrizada. Já o sistema não-linear EDP que descreve o comportamento mecânico da bacia sedimentar é manipulado para que só existam derivadas em relação a variável temporal  $t$ , sendo tratado como um sistema não-linear EDO com a variável espacial parametrizada. Um algoritmo para o método de Runge-Kutta Fehlberg é usado para resolver o problema de valor de inicial, com acurácia de quinta ordem.

### 5.2.1 Fase elástica-viscoplástica

A resposta da bacia sedimentar na fase elástica-viscoplástica ocorre para os mesmos domínios temporal e espacial, descritos em 4.3.1.

A taxa de tensão vertical é nula devido à interrupção da acreção de sedimentos ( $\dot{M}_d = 0$ ):

$$\dot{\sigma}_v = 0 \quad (225)$$

que integrada entre os tempos  $T^s$  e  $t$  fornece

$$\sigma_v(X_3, t) = \sigma_v^{ps}(X_3) \quad (226)$$

onde  $\sigma_v^{ps}(X_3) = \sigma_v(x_3 = X_3, t = T^s)$  é a distribuição da componente vertical de tensão conhecida (calculada) ao término do período de acreção, no tempo  $t = T^s$ .

A lei constitutiva (59) aplicada às taxas de deformação total (75) e viscoplástica (47), e ao tensor dos módulos elásticos do esqueleto (58), fornece:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = & \left[ F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} + \frac{tr \underline{\underline{\sigma}} \dot{K}}{3 K} - \frac{(\sigma_v - \sigma_h) \dot{\mu}}{3 \mu} \right] (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \\ & + \left[ F_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} + \frac{tr \underline{\underline{\sigma}} \dot{K}}{3 K} + \frac{2(\sigma_v - \sigma_h) \dot{\mu}}{3 \mu} \right] e_3 \otimes e_3 \end{aligned} \quad (227)$$

A taxa de tensão horizontal da expressão anterior possui a seguinte condição inicial:

$$\sigma_h(X_3, T^s) = \sigma_h^{ps}(X_3) \quad (228)$$

onde  $\sigma_h^{ps}(X_3) = \sigma_h(x_3 = X_3, t = T^s)$  é a distribuição da componente horizontal de tensão conhecida (calculada) ao término do período de acreção, no tempo  $t = T^s$ .

Igualando a componente vertical da taxa de tensão em (227) à equação (225), tem-se:

$$\frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} = - \frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{(\sigma_v + 2\sigma_h)\bar{K} + 2(\sigma_v - \sigma_h)\bar{\mu}}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} j_{ir} \quad (229)$$

Com a equação (178), a expressão anterior pode ser reescrita na forma

$$\frac{A\sigma_h + B\sigma_v - p_{vp}}{\eta_{vp}} = - \frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{(\sigma_v + 2\sigma_h)\bar{K} + 2(\sigma_v - \sigma_h)\bar{\mu}}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3}\mu a} j_{ir} \quad (230)$$

A relação (79) aplicada à taxa de deformação viscoplástica (47) resulta em:

$$tr d_{ir}^{\dot{}} = \frac{j_{ir}}{J_{ir}} = - \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} \quad (231)$$

A equação anterior pode ser reescrita, a partir de (178), como:

$$\frac{j_{ir}}{J_{ir}} = - \frac{A\sigma_h + B\sigma_v - p_{vp}}{\eta_{vp}} \quad (232)$$

As condições iniciais para  $\Lambda$  e  $J_{ir}$  são:

$$\begin{cases} \Lambda(X_3, T^s) = \Lambda^{ps}(X_3) \\ J_{ir}(X_3, T^s) = J_{ir}^{ps}(X_3) \end{cases} \quad (233)$$

onde  $\Lambda^{ps}(X_3) = \Lambda(x_3 = X_3, t = T^s)$  e  $J_{ir}^{ps}(X_3) = J_{ir}(x_3 = X_3, t = T^s)$  correspondem aos perfis de dilatação vertical e dilatação volumétrica irreversível conhecidos (calculados) ao término do período de acreção, no tempo  $t = T^s$ .

As equações (225), (227), (230) e (232) formam o sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento mecânico do domínio elasto-viscoplástico da bacia sedimentar na fase elástica-viscoplástica. As equações são agrupadas, em conjunto com as suas condições iniciais, para o melhor entendimento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_v = 0 \\ \dot{\sigma}_h = F_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left( K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta_{vp}} + \frac{tr \underline{\sigma}}{3} \frac{\dot{K}}{K} - \frac{(\sigma_v - \sigma_h)}{3} \frac{\dot{\mu}}{\mu} \\ \frac{A\sigma_h + B\sigma_v - p_{vp}}{\eta_{vp}} = - \frac{F_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{(\sigma_v + 2\sigma_h)\bar{K} + 2(\sigma_v - \sigma_h)\bar{\mu}}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a} j_{ir} \\ \frac{j_{ir}}{J_{ir}} = - \frac{A\sigma_h + B\sigma_v - p_{vp}}{\eta_{vp}} \end{array} \right. \quad (234)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(X_3, T^s) = \Lambda^{ps}(X_3) \\ \sigma_h(X_3, T^s) = \sigma_h^{ps}(X_3) \\ \sigma_v(X_3, T^s) = \sigma_v^{ps}(X_3) \\ J_{ir}(X_3, T^s) = J_{ir}^{ps}(X_3) \end{array} \right. \quad (235)$$

A descrição do comportamento mecânico da bacia sedimentar no domínio elasto-viscoplástico é obtida pela integração numérica desse sistema em seu domínio temporal,  $t \in [T^s, t]$ .

Uma vez calculado o dilatação vertical  $\Lambda(X_3, t)$ , a lei de compactação  $t \rightarrow H(t)$  é então obtida numericamente a partir do deslocamento das partículas localizadas no topo da bacia sedimentar, de forma análoga à seção 4.3.1.

Para o tempo final da análise, no tempo  $t = T^f$ , a bacia sedimentar possui os seguintes valores limites:

$$\begin{cases} T^f \text{ dado do problema} \\ H^f \text{ resposta numérica} \\ \sigma_h^f = \sigma_h(0, T^f) \\ \sigma_v^f = \sigma_v(0, T^f) \\ \Lambda^f = \Lambda(0, T^f) \\ J_{ir}^f = J_{ir}(0, T^f) \end{cases} \quad (236)$$

### 5.3 ESTUDO COMPARATIVO DO EFEITO DO ADENSAMENTO SOBRE O MODELO

Esta seção tem como objetivos demonstrar as características do modelo desenvolvido. Conforme apresentado ao longo do capítulo, a característica marcante do modelo reside na influência do adensamento sobre os módulos elásticos do material sedimentar. Para facilitar o entendimento dessa característica, são propostas três análises: 1) análise sem a influência do adensamento nos módulos elásticos e sem os seus efeitos sobre o modelo constitutivo, que corresponde ao modelo M2 da seção 3.8; 2) análise com a influência do adensamento sobre os módulos elásticos, porém sem os seus efeitos sobre o modelo constitutivo. Esse modelo é identificado como “M3”; 3) análise com a influência do adensamento sobre os módulos elásticos e com os seus efeitos sobre o modelo constitutivo. Esse modelo é identificado como “M4”. Na Tabela 9 apresenta-se um resumo das características de cada modelo.

Tabela 9: análises propostas e suas características.

modelo	módulos elásticos	termo $\dot{\underline{C}} : \underline{C}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}$ em (59)
M2	constantes $K(\varphi) = K_0$ e $\mu(\varphi) = \mu_0$	desconsiderado
M3	variáveis (eq. (56))	desconsiderado
M4	variáveis (eq. (56))	Considerado

As respostas da bacia sedimentar serão novamente analisadas em dois cenários: análise global e análise local. Na análise global serão comparados os perfis de respostas no fim do período de deposição sedimentar (em  $t = T^s$ ) e no fim do período de pós-deposição sedimentar (em  $t = T^f$ ). A análise local corresponde ao estudo dos campos mecânicos ligados às partículas de sedimentos localizadas em  $x_3 = 0$ , ou seja, as partículas depositadas diretamente no fundo do oceano.

Para a análise, o tempo final de sedimentação e o tempo final de análise são de  $T^s = 70$  Ma e  $T^f = 140$  Ma, respectivamente. Considera-se que o material sedimentar que entra no sistema no topo da bacia sedimentar tem as mesmas propriedades mecânicas iniciais durante todo o período de deposição dos sedimentos. Na Tabela 10, apresentam-se os parâmetros mecânicos que definem o cenário de análise.

Tabela 10: parâmetros mecânicos de análise.

parâmetro	símbolo	valor
tempo de deposição sedimentar (Ma)	$T^s$	70
tempo final de análise (Ma)	$T^f$	140
aceleração da gravidade ( $m/s^2$ )	$g$	9.80665
taxa de deposição sedimentar ( $t/km^2/ano$ )	$\dot{M}_d$	75
porosidade inicial	$\phi_0$	0.75
massa específica inicial ( $kg/m^3$ )	$\rho_0$	750
módulo de Young inicial (MPa)	$E_0$	1000
módulo de Poisson inicial	$\nu_0$	0.33
inclinação da superfície plástica/viscoplástica	$a$	1.1535
pressão de consolidação plástica inicial (MPa)	$p_{c0}$	2.0
expoente da lei de endurecimento plástica	$m_p$	1.6
pressão de consolidação viscoplástica inicial (MPa)	$p_{vp0}$	4.5
expoente da lei de endurecimento viscoplástica	$m_{vp}$	1.0
coeficiente de viscosidade viscoplástica (MPa×Ma)	$\eta_{vp}$	1000

Na Figura 32, apresentam-se as leis de compactação gravitacional para os modelos M2, M3 e M4. Os valores limites das leis de compactação são apresentados na Tabela 11.

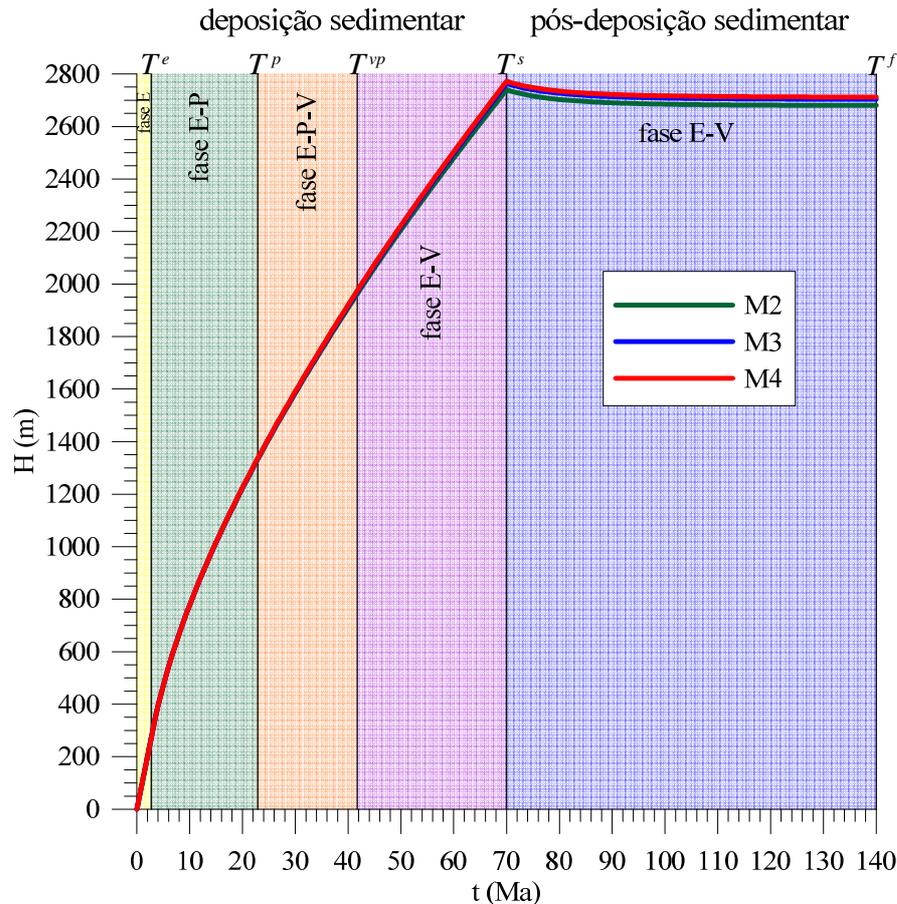


Figura 32: leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Tabela 11: valores limites das leis de compactação M2, M3 e M4.

parâmetro	M2	M3	M4
$T^e$ (Ma)	2.72	2.72	2.72
$T^p$ (Ma)	22.90	22.90	22.90
$T^{vp}$ (Ma)	41.74	41.74	41.74
$T^s$ (Ma)	70.00	70.00	70.00
$T^f$ (Ma)	140.00	140.00	140.00
$H^e$ (m)	271.84	271.84	271.84
$H^p$ (m)	1332.99	1335.18	1336.81
$H^{vp}$ (m)	1962.81	1971.23	1975.14
$H^s$ (m)	2739.72	2764.06	2772.16
$H^f$ (m)	2680.01	2703.43	2711.83

As diferentes fases relacionadas ao comportamento da bacia sedimentar, descritas na seção 4.1, são destacadas na figura anterior.

As respostas dos três modelos apresentam um comportamento semelhante. Verifica-se que o aumento gradativo da influência do adensamento em cada modelo proporciona um pequeno aumento da rigidez da bacia sedimentar, evidenciada pela maior altura do modelo M4.

Baseado nos dados apresentados na Tabela 11, verifica-se que a influência do adensamento já se faz presente desde a fase elástica-plástica, resultando em maiores alturas  $H^p$  e  $H^{vp}$  para os modelos M3 e M4, respectivamente.

Ao final do período de pós-sedimentação, no tempo  $T^f$ , os níveis de compactação da bacia sedimentar (para  $\mathcal{H} = 7000$  m) para os modelos M2, M3 e M4 são respectivamente 61.71%, 61.38% e 61.26%. Novamente, esses resultados reforçam a importância da formulação em grandes deformações.

### 5.3.1 Análise global

Conforme mencionado anteriormente, na análise global serão comparados os perfis de respostas em  $t = T^s = 70$  Ma e  $t = T^f = 140$  Ma. Adicionalmente, os valores apresentados nas tabelas correspondem àqueles referentes às posições que dividem os domínios de comportamento do modelo M4, apresentados na Tabela 12.

Tabela 12: posições das fronteiras que dividem os domínios de comportamento (m).

$x_3$	$t = T^s = 70$ Ma	$t = T^f = 140$ Ma
$H(t)$	2772.16	2711.83
$H(t) - H^e$	2500.33	2440.00
$H(t) - H^p$	1435.36	1375.03
$H(t) - H^{vp}$	797.03	*
base	0.00	0.00

\*fronteira inexistente no período de pós-acreção

A resposta global da bacia sedimentar é inicialmente apresentada da Figura 33 à Figura 35, que ilustram os perfis de jacobianos da transformação, da porosidade euleriana e da massa específica. Os valores limites dessas variáveis são apresentados da Tabela 13 à Tabela 18.

A análise dessas respostas suscita os seguintes comentários gerais: no domínio elástico, as variáveis analisadas ou não apresentam variação ou ela é muito pequena; com o aumento da profundidade, as variáveis apresentam comportamentos que refletem o adensamento do material, com redução dos valores dos jacobianos e porosidade e aumento da massa específica; com a evolução da compactação viscoplástica no período de pós-acreção de sedimentos, os perfis em  $t = T^f$  apresentam uma sutil amplificação dos efeitos da compactação, com redução dos valores dos jacobianos e porosidade e aumento da massa específica no domínio elástico-viscoplástico.

Verifica-se que o aumento de rigidez do material sedimentar devido ao efeito do adensamento (modelos M3 e M4) aumenta a proximidade entre a dilatação volumétrica  $J = \Lambda$  e a sua componente irreversível  $J_{ir}$ , reforçando a hipótese de deformações elásticas infinitesimais. Ambos os perfis de jacobianos da transformação evidenciam a tendência de comportamento assintótico da componente irreversível da dilatação volumétrica  $J_{ir} \rightarrow J_{ir}^{cr} = 0.25$ . Esse comportamento condiz com as tendências observadas: de fechamento dos poros com o aumento da profundidade, evidenciado nos perfis de porosidade euleriana; do valor limite  $\rho \rightarrow \rho_0 / J_{ir}^{cr} = 3000 \text{ kg/m}^3$ , observado nos perfis de massa específica.

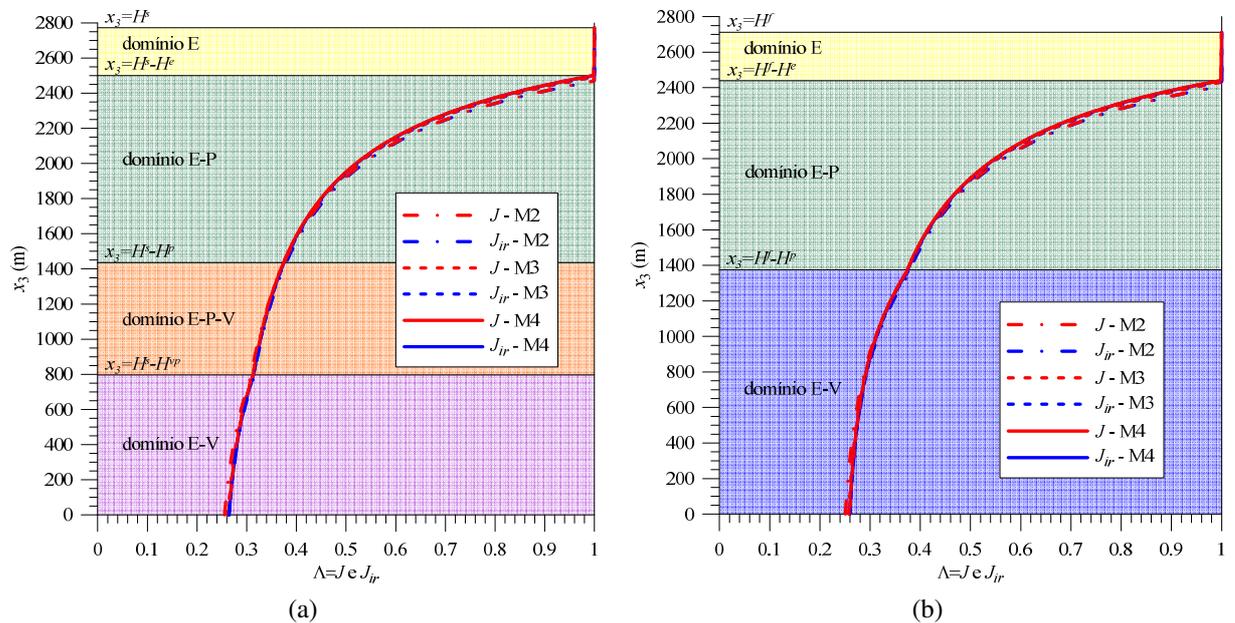


Figura 33: perfis de jacobianos da bacia sedimentar (a) em  $t=70\text{Ma}$  e (b) em  $t=140\text{Ma}$ .

Tabela 13: valores limites de dilatação vertical e jacobianos em  $t=70\text{Ma}$ .

modelo	parâmetro	0.00m	797.03m	1435.36m	2500.33m	2772.16m
M2	$\Lambda = J$	0.25524	0.30846	0.37448	0.99881	*
	$J_{ir}$	0.26419	0.31477	0.37857	1.00000	*
M3	$\Lambda = J$	0.26226	0.31178	0.37315	0.99866	*
	$J_{ir}$	0.26419	0.31378	0.37503	1.00000	*
M4	$\Lambda = J$	0.26388	0.31298	0.37402	0.99865	1.00000
	$J_{ir}$	0.26419	0.31367	0.37481	1.00000	1.00000

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Tabela 14: valores limites de dilatação vertical e jacobianos em  $t=140\text{Ma}$ .

modelo	parâmetro	0.00m	1375.03m	2440.00m	2711.83m
M2	$\Lambda = J$	0.25068	0.37426	0.99880	*
	$J_{ir}$	0.25948	0.37836	1.00000	*
M3	$\Lambda = J$	0.25758	0.37335	0.99868	*
	$J_{ir}$	0.25948	0.37523	1.00000	*
M4	$\Lambda = J$	0.25924	0.37402	0.99865	1.00000
	$J_{ir}$	0.25947	0.37481	1.00000	1.00000

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Verifica-se nos dados apresentados na Tabela 13 e Tabela 14 que os perfis da dilatação volumétrica e de sua componente irreversível apresentam uma sutil redução das suas intensidades entre os tempos em  $t = T^s = 70\text{Ma}$  e  $t = T^f = 140\text{Ma}$ . Isso corresponde aos efeitos diferidos da componente viscoplástica de deformação, que segue evoluindo durante o período de pós-sedimentação.

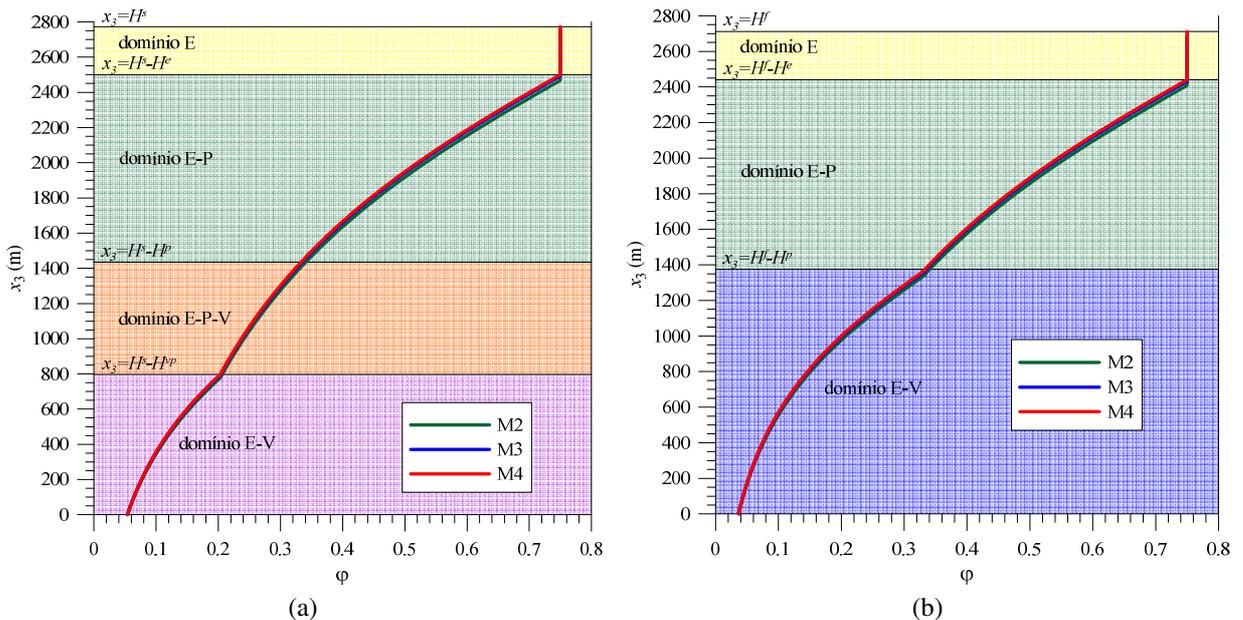


Figura 34: perfil de porosidade euleriana da bacia sedimentar (a) em  $t=70\text{Ma}$  e (b) em  $t=140\text{Ma}$ .

Tabela 15: valores limites da porosidade euleriana em  $t=70\text{Ma}$ .

modelo	0.00m	797.03m	1435.36m	2500.33m	2772.16m
M2	0.05372	0.20576	0.33962	0.75000	*
M3	0.05370	0.20327	0.33339	0.75000	*
M4	0.05369	0.20299	0.33299	0.75000	0.75000

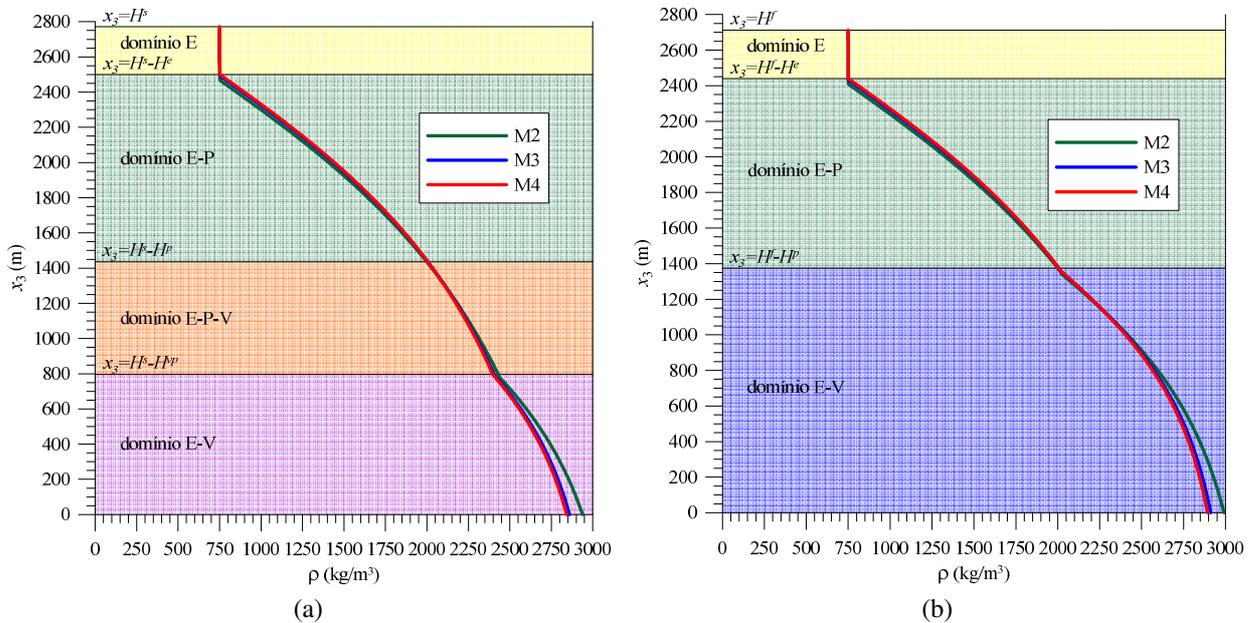
\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Tabela 16: valores limites da porosidade euleriana em  $t=140\text{Ma}$ .

modelo	0.00m	1375.03m	2440.00m	2711.83m
M2	0.03653	0.33925	0.75000	*
M3	0.03652	0.33375	0.75000	*
M4	0.03651	0.33299	0.75000	0.75000

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Observa-se na Tabela 15 à Tabela 18 que tanto a porosidade euleriana quanto a massa específica apresentam uma evolução dos seus valores entre os tempos em  $t=T^s=70\text{Ma}$  e  $t=T^f=140\text{Ma}$ , no sentido do efeito do adensamento sobre o material sedimentar. O perfil de porosidade em  $t=T^f$  apresenta um maior nível de fechamento dos poros, enquanto o perfil de massa específica apresenta uma sutil elevação dos valores.

Figura 35: perfil de massa específica da bacia sedimentar (a) em  $t=70\text{Ma}$  e (b) em  $t=140\text{Ma}$ .Tabela 17: valores limites da massa específica em  $t=70\text{Ma}$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

modelo	0.00m	797.03m	1435.36m	2500.33m	2772.16m
M2	2938.46	2431.41	2002.79	750.89	*
M3	2859.75	2405.56	2009.92	751.00	*
M4	2842.25	2396.33	2005.24	751.01	750.00

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Tabela 18: valores limites da massa específica em  $t=140\text{Ma}$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ).

modelo	0.00m	1375.03m	2440.00m	2711.83m
M2	2991.82	2003.95	750.90	*
M3	2911.67	2008.81	750.99	*
M4	2893.06	2005.24	751.01	750.00

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Verifica-se que o modelo M2 apresenta um afastamento da resposta da massa específica em relação aos outros modelos. Esse efeito está relacionado a uma característica do modelo M2. Conforme observado no capítulo 4, esse modelo apresenta um leve distanciamento da hipótese de elasticidade infinitesimal, que produz uma pequena diferença entre  $J$  e  $J_{ir}$ . Isso é novamente observado, conforme os dados apresentados na Tabela 13 e Tabela 14. Essa característica está relacionada a invariância dos módulos elásticos desse modelo. Somada a essa característica, a massa específica é calculada através da dilatação volumétrica  $J = \Lambda$ , conforme a equação (3), o que produz as diferenças observadas.

A sequência de análise da resposta global da bacia sedimentar é apresentada na Figura 36 e Figura 37, que ilustram os perfis de tensões e da razão de tensões. A razão entre as componentes de tensão  $\sigma_h/\sigma_v$  é um parâmetro similar ao coeficiente de empuxo lateral, clássico na mecânica dos solos. Os valores limites dessas variáveis são apresentados da Tabela 19 à Tabela 22.

As sutis diferenças observadas na componente vertical de tensão são devidas exclusivamente às diferenças entre as alturas dos modelos de bacia sedimentar. O efeito do adensamento sobre os módulos elásticos do material sedimentar é gradualmente evidenciado nos modelos M2, M3 e M4, para os perfis da componente horizontal de tensão e razão de tensões. Verifica-se que, em relação ao modelo M2, a intensidade dessa componente de tensão é maior para o modelo M4. Para os dados da Tabela 10, os efeitos do adensamento sobre o modelo M3 aumentaram 41% a intensidade da componente horizontal, enquanto que para o modelo M4 esses efeitos elevaram a intensidade em 68%.

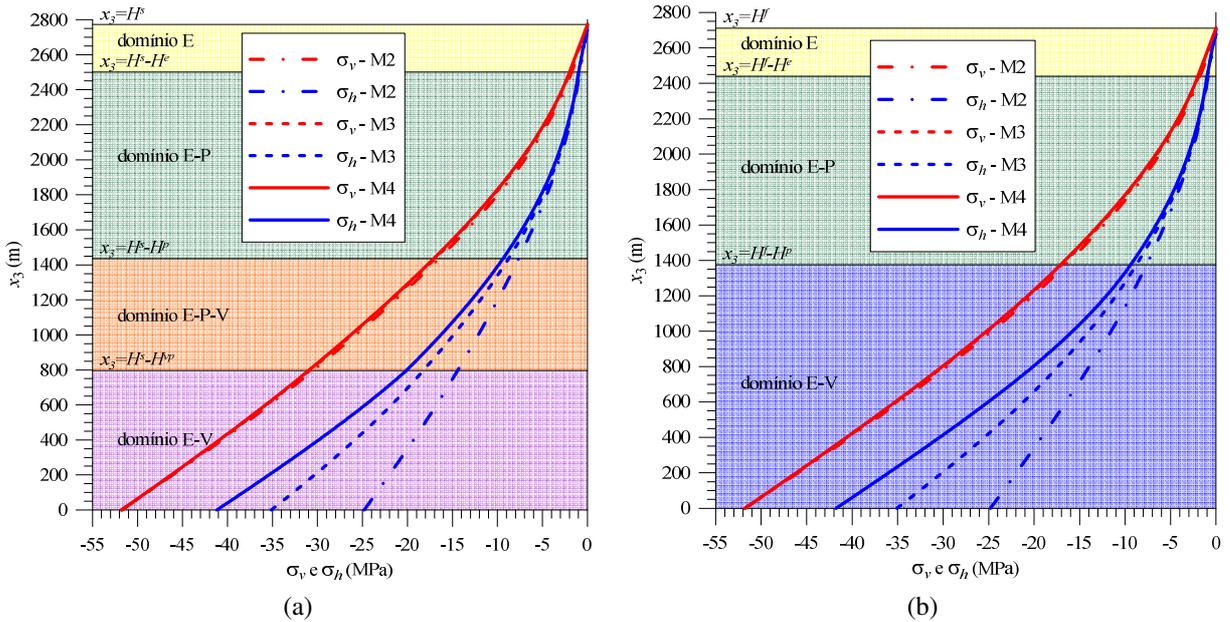


Figura 36: perfil de tensões da bacia sedimentar (a) em  $t=70\text{Ma}$  e (b) em  $t=140\text{Ma}$ .

Tabela 19: valores limites das tensões em  $t=70\text{Ma}$  (MPa).

modelo	parâmetro	0.00m	797.03m	1435.36m	2500.33m	2772.16m
M2	$\sigma_v$	-51.48491	-30.56651	-16.60980	-1.76423	*
	$\sigma_h$	-24.81992	-14.45723	-7.67850	-0.86895	*
M3	$\sigma_v$	-51.48491	-30.94077	-17.06740	-1.98346	*
	$\sigma_h$	-35.15072	-18.28533	-8.83746	-0.97693	*
M4	$\sigma_v$	-51.48491	-30.98328	-17.09670	-2.00070	0.00000
	$\sigma_h$	-41.18913	-20.12609	-9.39129	-0.98542	0.00000

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Tabela 20: valores limites das tensões em  $t=140\text{Ma}$  (MPa).

modelo	parâmetro	0.00m	1375.03m	2440.00m	2711.83m
M2	$\sigma_v$	-51.48491	-16.60980	-1.76423	*
	$\sigma_h$	-24.81992	-7.67850	-0.86895	*
M3	$\sigma_v$	-51.48491	-17.06740	-1.98346	*
	$\sigma_h$	-35.07682	-8.83746	-0.97693	*
M4	$\sigma_v$	-51.48491	-17.09670	-2.00070	0.00000
	$\sigma_h$	-41.75913	-9.39129	-0.98542	0.00000

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Para os modelos M3 e M4, verifica-se na Tabela 19 à Tabela 22 a evolução do perfil da componente horizontal de tensão (e, conseqüentemente, do perfil da razão de tensões) entre os tempos em  $t = T^s = 70\text{Ma}$  e  $t = T^f = 140\text{Ma}$ . Essa variação corresponde também aos efeitos diferidos da deformação viscoplástica sobre os modelos. A variação dessa componente de

tensão no modelo M2 é muito pequena, estando fora do intervalo numérico apresentado nas tabelas.

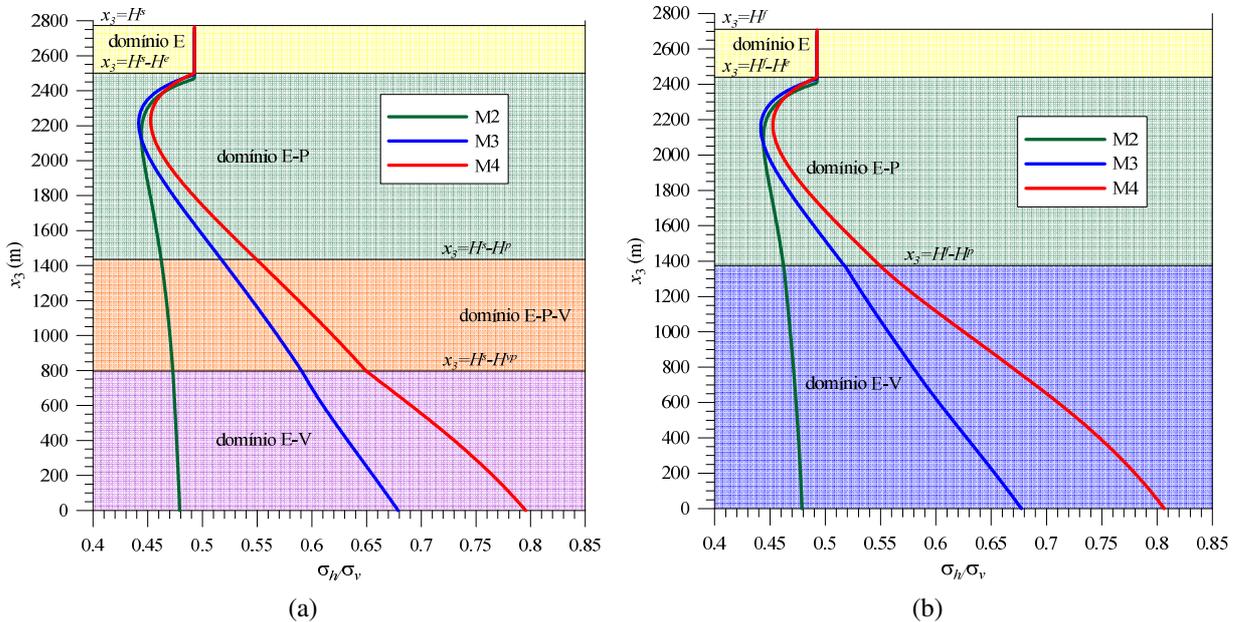


Figura 37: perfil da razão de tensões da bacia sedimentar (a) em  $t=70\text{Ma}$  e (b) em  $t=140\text{Ma}$ .

Tabela 21: valores limites da razão de tensões em  $t=70\text{Ma}$ .

modelo	0.00m	797.03m	1435.36m	2500.33m	2772.16m
M2	0.47924	0.47298	0.46229	0.49254	*
M3	0.67877	0.59098	0.51780	0.49254	*
M4	0.79540	0.64959	0.54943	0.49057	*

\*divisão por zero

Tabela 22: valores limites da razão de tensões em  $t=140\text{Ma}$ .

modelo	0.00m	1375.03m	2440.00m	2711.83m
M2	0.47906	0.46232	0.49254	*
M3	0.67735	0.51763	0.49254	*
M4	0.80640	0.54997	0.49057	*

\*divisão por zero

Em função dos valores utilizados para o parâmetro  $a$ , que controla a inclinação da parte dúctil dos critérios de plastificação e viscoplastificação e que tem grande influência sobre a componente horizontal de tensão, o perfil da razão de tensões apresenta valores em um intervalo razoavelmente grande ( $0.45 \leq \sigma_h / \sigma_v \leq 0.82$ ). Adicionalmente, no domínio elástico a razão é de  $\nu_0 / (1 - \nu_0) = 0.4925$ .

A parte final de análise da resposta global da bacia sedimentar é apresentada na Figura 38 e Figura 39, que ilustram os perfis pressões de consolidação e módulos de compressão e cisalhamento. Os valores limites dessas variáveis são apresentados da Tabela 23 à Tabela 26.

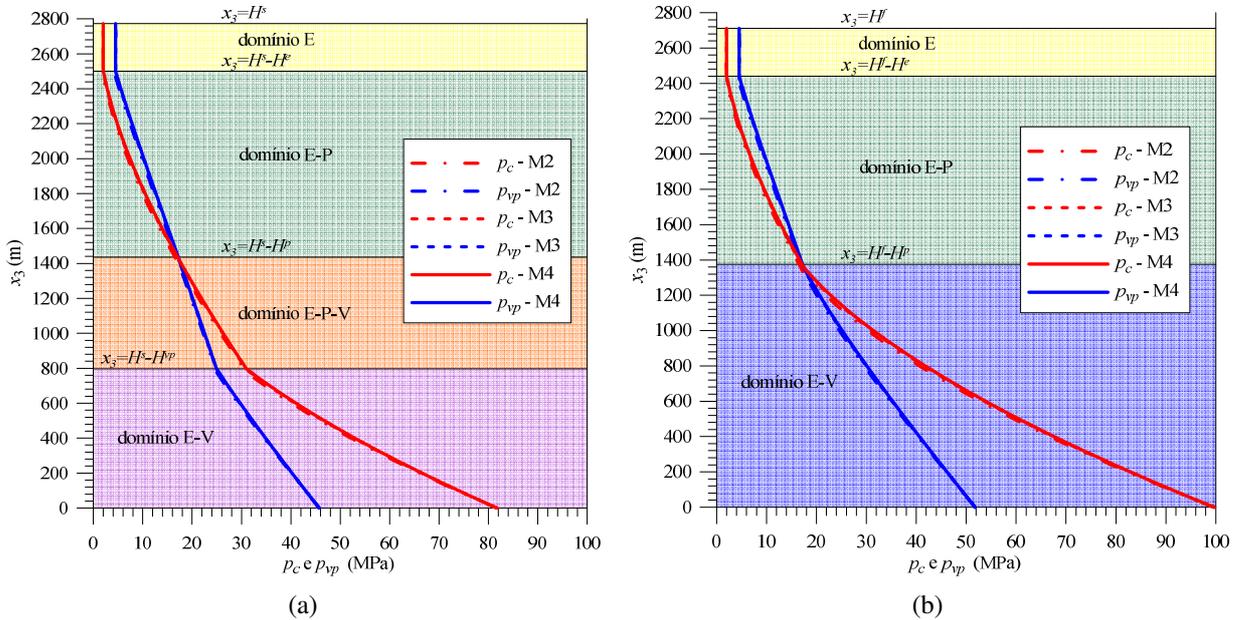


Figura 38: perfil das pressões de consolidação plástica e viscoplástica da bacia sedimentar (a) em  $t=70\text{Ma}$  e (b) em  $t=140\text{Ma}$ .

Tabela 23: valores limites dos endurecimentos plástico e viscoplástico em  $t=70\text{Ma}$  (MPa).

modelo	parâmetro	0.00m	797.03m	1435.36m	2500.33m	2772.16m
M2	$p_c$	81.72347	30.55535	16.60361	2.00000	*
	$p_{vp}$	45.73888	24.73138	16.89256	4.50000	*
M3	$p_c$	81.73229	30.93200	17.06169	2.00000	*
	$p_{vp}$	45.74196	24.92148	17.18235	4.50000	*
M4	$p_c$	81.74051	30.97576	17.09136	2.00000	2.00000
	$p_{vp}$	45.74484	24.94351	17.20102	4.50000	4.50000

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Tabela 24: valores limites dos endurecimentos plástico e viscoplástico em  $t=140\text{Ma}$  (MPa).

modelo	parâmetro	0.00m	1375.03m	2440.00m	2711.83m
M2	$p_c$	99.63932	16.60361	2.00000	*
	$p_{vp}$	51.77117	16.89256	4.50000	*
M3	$p_c$	99.64813	17.06169	2.00000	*
	$p_{vp}$	51.77403	17.18235	4.50000	*
M4	$p_c$	99.65878	17.09136	2.00000	2.00000
	$p_{vp}$	51.77749	17.20102	4.50000	4.50000

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Tanto as pressões de consolidação quanto os módulos de compressão e cisalhamento são parâmetros sensíveis à pequena variação da dilatação volumétrica irreversível entre os tempos

$t = T^s = 70\text{Ma}$  e  $t = T^f = 140\text{Ma}$ . Nesse intervalo, a dilatação volumétrica irreversível  $J_{ir}$  apresenta variações inferiores à 2%. No entanto, a pressão de consolidação plástica apresenta aproximadamente 22% de aumento, enquanto o módulo de compressão exibe um aumento aproximado de 32% (para os modelos M3 e M4).

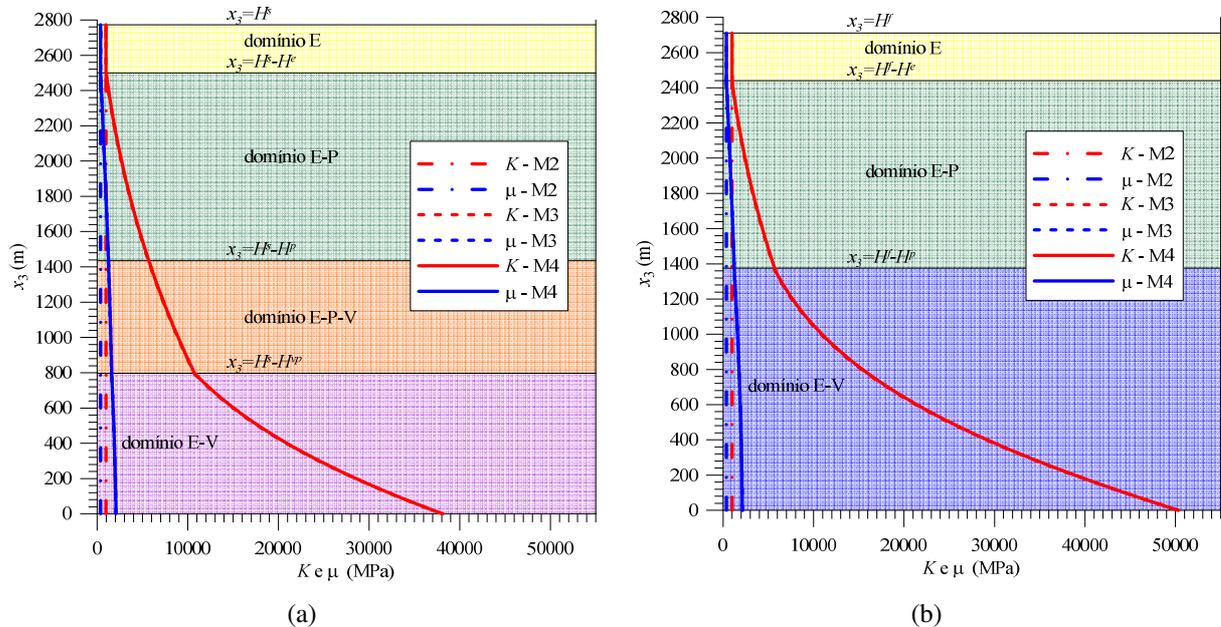


Figura 39: perfil dos módulos de compressão e cisalhamento da bacia sedimentar (a) em  $t=70\text{Ma}$  e (b) em  $t=140\text{Ma}$ .

Tabela 25: valores limites dos módulos de compressão e cisalhamento em  $t=70\text{Ma}$  (MPa).

modelo	parâmetro	0.00m	797.03m	1435.36m	2500.33m	2772.16m
M2	$K$	980.39	980.39	980.39	980.39	*
	$\mu$	375.94	375.94	375.94	375.94	*
M3	$K$	38108.28	10744.49	5693.69	980.39	*
	$\mu$	2071.55	1589.44	1234.51	375.94	*
M4	$K$	38113.69	10744.61	5693.57	980.39	980.39
	$\mu$	2071.58	1589.45	1234.49	375.94	375.94

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

Tabela 26: valores limites dos módulos de compressão e cisalhamento em  $t=140\text{Ma}$  (MPa).

modelo	parâmetro	0.00m	1375.03m	2440.00m	2711.83m
M2	$K$	980.39	980.39	980.39	*
	$\mu$	375.94	375.94	375.94	*
M3	$K$	50308.77	5693.69	980.39	*
	$\mu$	2133.16	1234.51	375.94	*
M4	$K$	50316.21	5693.57	980.39	980.39
	$\mu$	2133.19	1234.49	375.94	375.94

\*sem valor limite, cota superior à altura da bacia sedimentar

### 5.3.2 Análise local

A evolução temporal das diferentes componentes do jacobiano da transformação é apresentada na Figura 40. Verifica-se que a evolução das componentes irreversíveis da dilatação volumétrica  $J_p$ ,  $J_{vp}$  e  $J_{ir}$  é praticamente a mesma para os três modelos (Tabela 27). A diferença entre os modelos diz respeito apenas à dilatação volumétrica  $J$ . Verifica-se que o aumento da rigidez do material sedimentar devido ao adensamento aumenta a proximidade entre a dilatação volumétrica  $J$  e a sua componente irreversível  $J_{ir}$ , validando e reforçando a hipótese de deformações elásticas infinitesimais. Esse efeito é tão maior quanto maior for a complexidade de cada modelo em relação ao efeito do adensamento (maior para o modelo M4, menor para o modelo M2). Os três modelos apresentam a tendência de comportamento limite para a componente irreversível da dilatação volumétrica, ou seja,  $J_{ir} \rightarrow J_{ir}^{cr} = 0.25$ .

Adicionalmente, verifica-se que a compactação mecânica, que é modelada pela componente plástica, prevalece para  $t \leq T^p$ . Nesse intervalo de tempo, a componente plástica da dilatação volumétrica plástica  $J_p$  apresenta significativa redução. Por sua vez, a compactação químico-mecânica, modelada pela componente viscoplástica, é ativada em  $t = T^p$  e prevalece para  $t > T^{vp}$ . Após o término da acreção de material sedimentar, todas as variáveis apresentam rápida estabilização.

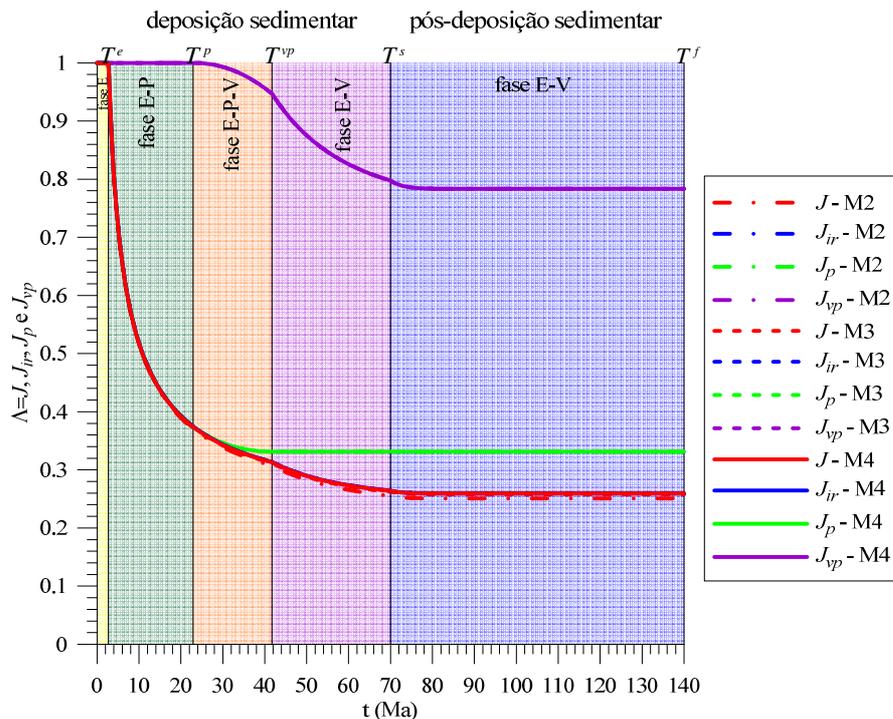


Figura 40: evoluções da dilatação vertical e jacobianos na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Tabela 27: valores limites de dilatação vertical e jacobianos.

modelo	parâmetro	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M2	$\Lambda = J$	0.99865	0.37062	0.30730	0.25524	0.25068
	$J_{ir}$	1.00000	0.37480	0.31367	0.26419	0.25948
	$J_p$	1.00000	0.37480	0.33123	0.33123	0.33123
	$J_{vp}$	1.00000	1.00000	0.94699	0.79761	0.78338
M3	$\Lambda = J$	0.99865	0.37292	0.31167	0.26226	0.25758
	$J_{ir}$	1.00000	0.37480	0.31367	0.26419	0.25948
	$J_p$	1.00000	0.37480	0.33123	0.33123	0.33123
	$J_{vp}$	1.00000	1.00000	0.94700	0.79760	0.78338
M4	$\Lambda = J$	0.99865	0.37402	0.31298	0.26388	0.25924
	$J_{ir}$	1.00000	0.37481	0.31367	0.26419	0.25947
	$J_p$	1.00000	0.37481	0.33123	0.33123	0.33123
	$J_{vp}$	1.00000	1.00000	0.94700	0.79760	0.78337

As evoluções da porosidade euleriana  $\varphi(x_3 = 0, t)$  e da massa específica  $\rho(x_3 = 0, t)$  são apresentadas na Figura 41 e na Figura 42, respectivamente. De forma geral, o comportamento observado para as duas variáveis condiz com o adensamento do material sedimentar, que reduz a porosidade e aumenta a massa específica das partículas.

A Figura 41 ressalta uma característica importante da formulação da porosidade euleriana, acerca da sua dependência da componente irreversível da dilatação volumétrica  $J_{ir}$ . Como a evolução de  $J_{ir}$  é praticamente a mesma, a evolução da porosidade euleriana é também praticamente igual para os três modelos, conforme os dados apresentados na Tabela 28.

Já a Figura 42 ressalta uma característica importante da formulação da massa específica e a sua dependência da dilatação volumétrica  $J = \Lambda$  (conforme a equação (3)). Conforme abordado anteriormente, a evolução de  $J = \Lambda$  apresenta sensível diferença entre os modelos. Como efeito, são observadas variações na massa específica, conforme os dados apresentados na Tabela 29.

Após o término da acreção de material sedimentar, tanto a porosidade quanto a massa específica apresentam rápida estabilização.

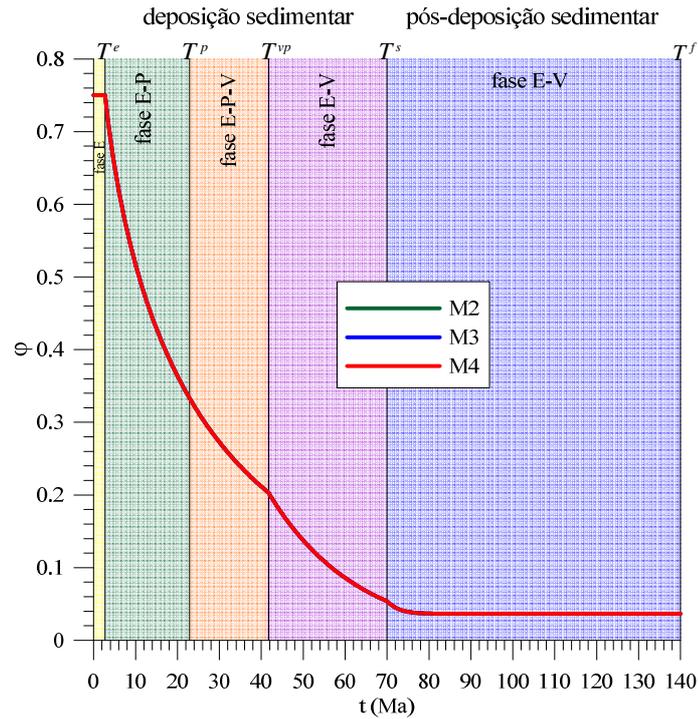


Figura 41: evoluções da porosidade euleriana na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Tabela 28: valores limites da porosidade euleriana.

modelo	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M2	0.75000	0.33297	0.20298	0.05372	0.03653
M3	0.75000	0.33298	0.20299	0.05370	0.03652
M4	0.75000	0.33299	0.20299	0.05369	0.03651

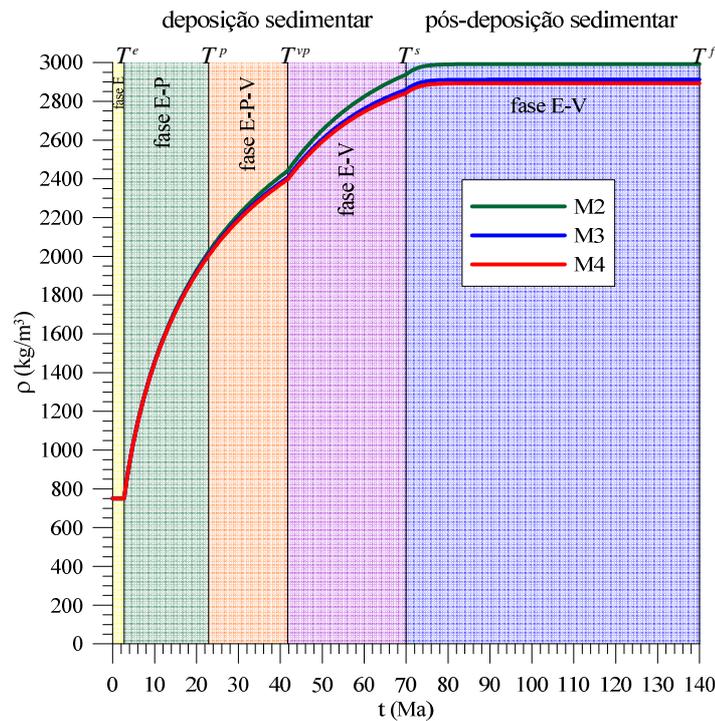


Figura 42: evoluções da massa específica na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Tabela 29: valores limites da massa específica (kg/m<sup>3</sup>).

modelo	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M2	751.01	2023.62	2440.58	2938.46	2991.82
M3	751.01	2011.15	2406.43	2859.75	2911.67
M4	751.01	2005.24	2396.33	2842.25	2893.06

A evolução do estado de tensões na bacia sedimentar  $\underline{\underline{\sigma}}(x_3 = 0, t)$  é apresentada na Figura 43. Como esperado, o comportamento da componente vertical de tensão é estaticamente determinado e independente do comportamento constitutivo, apresentando instantânea estabilização na fase de pós-acreção. Já a componente horizontal de tensão corresponde a variável que sofre a maior influência do adensamento do material sedimentar. Para essa variável, através da análise de cada modelo, verifica-se claramente a contribuição do adensamento sobre os módulos elásticos, bem como sua influência sobre o modelo constitutivo. Após o término da acreção de material sedimentar, essa componente de tensão apresenta rápida estabilização para todos os modelos. Os modelos M2 e M3 apresentam uma suave redução na intensidade enquanto o modelo M4 apresenta um aumento de intensidade.

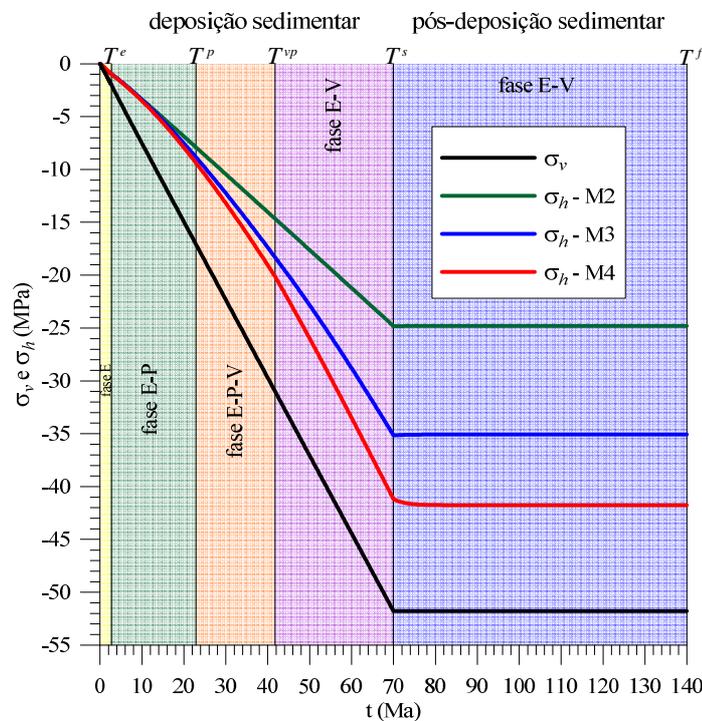


Figura 43: evoluções das tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Tabela 30: valores limites das tensões (MPa).

modelo	parâmetro	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M2	$\sigma_v$	-2.00070	-17.09898	-30.98715	-51.48491	-51.48491
	$\sigma_h$	-0.98542	-7.91426	-14.66261	-24.81992	-24.81061
M3	$\sigma_v$	-2.00070	-17.09745	-30.98425	-51.48491	-51.48491
	$\sigma_h$	-0.98542	-8.85620	-18.31707	-35.15073	-35.07682
M4	$\sigma_v$	-2.00070	-17.09670	-30.98328	-51.48491	-51.48491
	$\sigma_h$	-0.98542	-9.39129	-20.12609	-41.18913	-41.75913

A evolução das pressões de consolidação plástica e viscoplástica é apresentada na Figura 44. As leis de endurecimento das pressões de consolidação são funções da dilatação volumétrica irreversível  $J_{ir}$ . Em virtude da proximidade das respostas de  $J_{ir}$  para todos os modelos, as evoluções de  $p_c$  e  $p_{vp}$  são aproximadamente iguais, conforme os dados apresentados na Tabela 31.

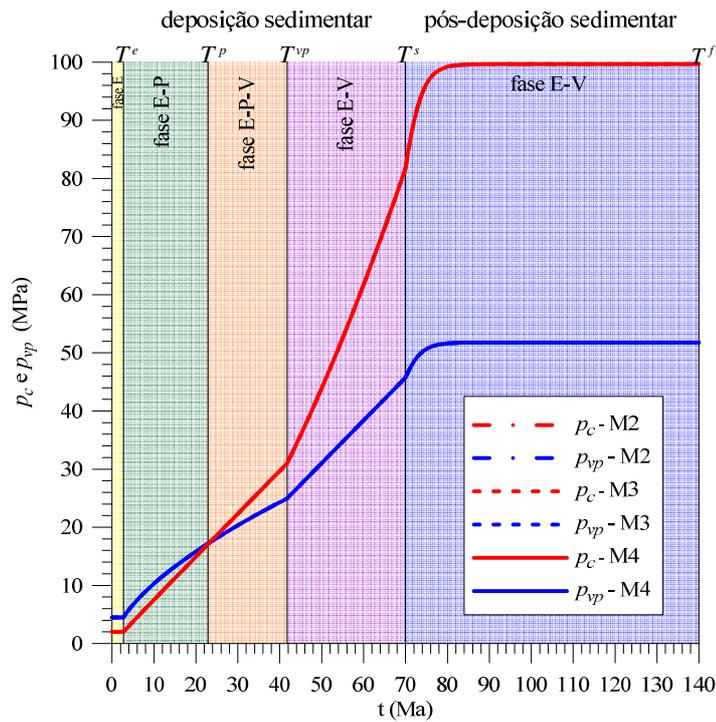


Figura 44: evoluções das pressões de consolidação plástica e viscoplástica na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Tabela 31: valores limites das pressões de consolidação (MPa).

modelo	parâmetro	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M2	$p_c$	2.00000	17.09261	30.97584	81.72347	99.63932
	$p_{vp}$	4.50000	17.20181	24.94354	45.73888	51.77117
M3	$p_c$	2.00000	17.09174	30.97547	81.73229	99.64813
	$p_{vp}$	4.50000	17.20125	24.94336	45.74196	51.77403
M4	$p_c$	2.00000	17.09136	30.97576	81.74051	99.65878
	$p_{vp}$	4.50000	17.20102	24.94351	45.74484	51.77749

Na Figura 45, apresenta-se a evolução dos módulos de compressão e cisalhamento. A formulação do modelo M2 não contempla a evolução dos módulos elásticos em função do adensamento do material sedimentar e naturalmente não apresenta variação na figura. Já os modelos M3 e M4 incorporam os efeitos do adensamento sobre os módulos elásticos, aumentando em mais de 50 vezes (Tabela 32) o valor do módulo de compressão no período de pós-acreção.

Adicionalmente, em função da proximidade das evoluções das dilatações volumétricas irreversíveis dos modelos M3 e M4, verifica-se que a evolução de  $K(\varphi)$  e  $\mu(\varphi)$  é praticamente a mesma, conforme a Tabela 32.

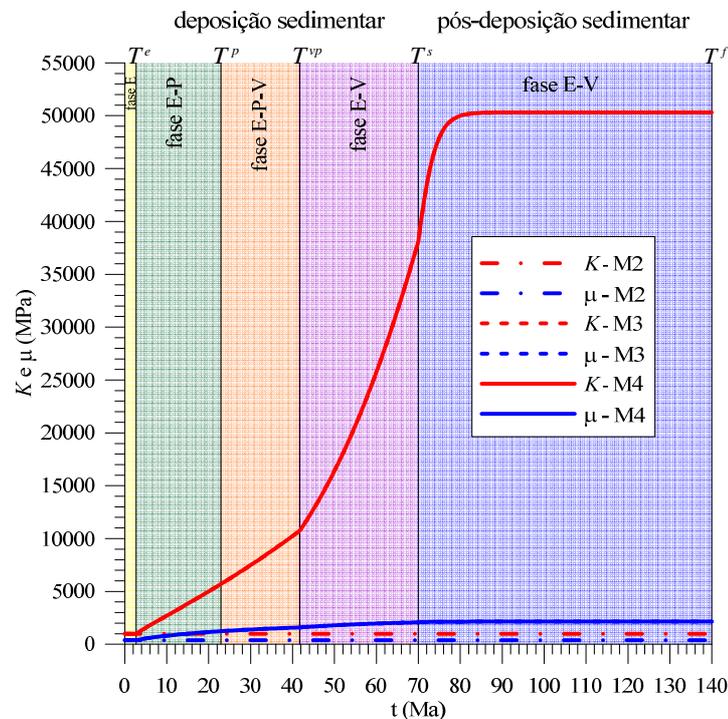


Figura 45: evoluções dos módulos de compressão e cisalhamento na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Tabela 32: valores limites módulos de compressão e cisalhamento (MPa).

modelo	parâmetro	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M2	$K$	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39
	$\mu$	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94
M3	$K$	980.39	5693.69	10744.49	38108.28	50308.77
	$\mu$	375.94	1234.51	1589.44	2071.55	2133.16
M4	$K$	980.39	5693.57	10744.61	38113.69	50316.21
	$\mu$	375.94	1234.49	1589.45	2071.58	2133.19

Na Figura 46, apresenta-se a trajetória de tensão para as partículas na base da bacia sedimentar. Verifica-se que com o aumento da complexidade do modelo em relação ao adensamento, a trajetória de tensão resultante apresenta uma redução na intensidade da componente distorcional  $q$  (ver Tabela 33). A causa dessa característica diz respeito à evolução da componente horizontal de tensão, que apresenta maior intensidade para o modelo M4.

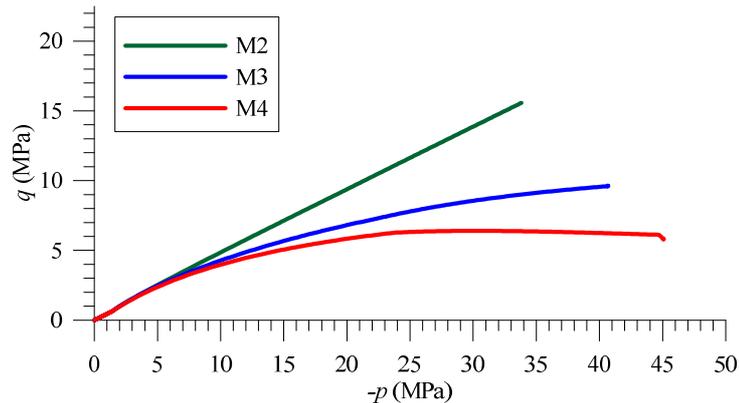


Figura 46: evoluções da trajetória de tensão na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Tabela 33: valores limites para  $p$  e  $q$  (MPa).

modelo	parâmetro	$T^e$	$T^p$	$T^{vp}$	$T^s$	$T^f$
M2	$-p$	1.32	10.98	20.10	33.81	33.80
	$q$	0.59	5.30	9.42	15.57	15.58
M3	$-p$	1.32	11.60	22.54	40.70	40.65
	$q$	0.59	4.76	7.31	9.60	9.65
M4	$-p$	1.32	11.96	23.75	44.72	45.10
	$q$	0.59	4.45	6.27	6.12	5.79

Como primeira avaliação do processo de simplificação dos modelos, proposto na seção 4.2.4, apresentam-se na Figura 47 as evoluções dos desvios para as partículas situadas na base da bacia sedimentar, conforme a definição apresentada na equação (171).

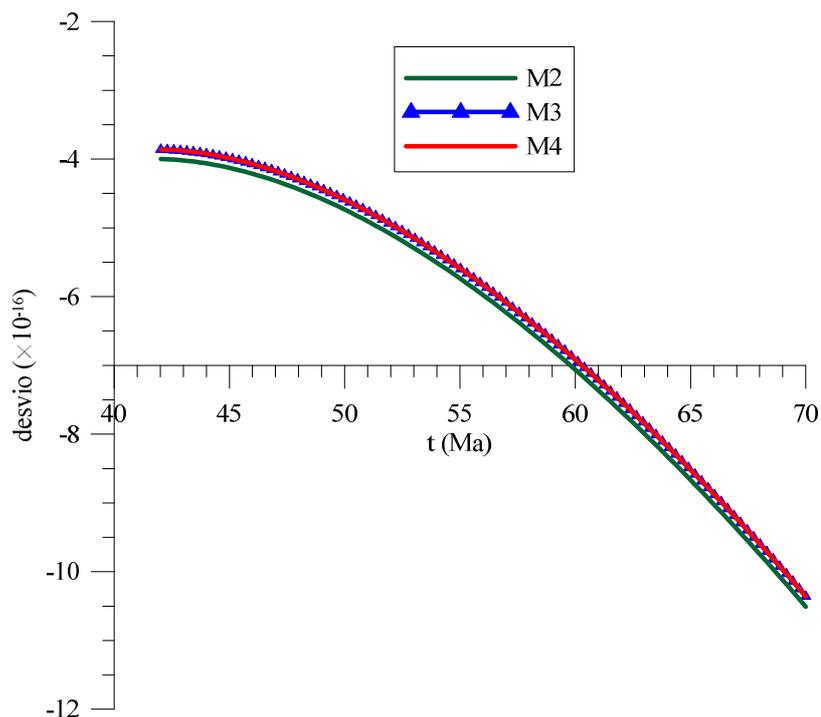


Figura 47: evoluções dos desvios na base da bacia sedimentar, para os modelos M2, M3 e M4.

Além dos valores pequenos (da ordem de  $10^{-16}$ ), os três modelos apresentam comportamentos semelhantes para as evoluções dos desvios. Na seção 5.3.2 esses resultados serão comparados e confrontados com as previsões de um simulador de elementos finitos, com o propósito de julgar a qualidade da hipótese de simplificação proposta.

## 6. ILUSTRAÇÕES NUMÉRICAS: SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA VERSUS PREDIÇÕES POR ELEMENTOS FINITOS

Este capítulo tem como objetivo a comparação entre as respostas das soluções desenvolvidas (modelos M2 e M4) e as predições de um simulador de elementos finitos. Para tal, será utilizado o simulador numérico desenvolvido por Brüch (2016). As análises propostas não têm como objetivo a verificação do simulador de bacias sedimentares, mas sim a utilização de suas respostas como uma ferramenta auxiliar, que corrobora a correção e precisão do modelo semi-analítico e de suas hipóteses simplificadoras.

As características de cada modelo já foram analisadas nos capítulos precedentes e são válidas para os estudos propostos. Assim, as análises realizadas nesse capítulo se concentram na proximidade entre as respostas semi-analíticas e do simulador numérico, porém observações adicionais sobre os modelos M2 e M4 também serão realizadas. Novamente, a situação de análise proposta tem caráter teórico, que não corresponde a uma bacia sedimentar real, mas sim a uma situação matemática restrita e controlada.

Os parâmetros mecânicos que definem o cenário de comparação entre as predições dos modelos M2, M4 e o simulador de elementos finitos são apresentados na Tabela 34. Nas análises propostas, o tempo final de sedimentação e o tempo final de análise são  $T^s = 60 \text{ Ma}$  e  $T^f = 120 \text{ Ma}$ , respectivamente. Considera-se que o material sedimentar que entra no sistema no topo da bacia sedimentar tem as mesmas propriedades mecânicas iniciais durante todo o período de deposição dos sedimentos.

Para a clareza das comparações, as respostas dos modelos M2 e M4 serão apresentadas em linhas contínuas. As respostas do simulador numérico de bacias sedimentares serão apresentadas em pontos discretos (triângulos preenchidos ou não, cruces e losangos), denominados "MEF" (método dos elementos finitos). Nas figuras e tabelas, tanto os tempos (que dividem as fases de comportamento) quanto as coordenadas das fronteiras entre os domínios de comportamento se referem às respostas semi-analíticas.

Adicionalmente, as tabelas apresentarão a diferença relativa percentuais das respostas MEF em relação às respostas semi-analíticas. Essa diferença é equacionada da seguinte forma:

$$DR\% = \left| \frac{\text{valor}_{M2,M4} - \text{valor}_{MEF}}{\text{valor}_{M2,M4}} \right| \quad (237)$$

Tabela 34: parâmetros mecânicos de análise.

parâmetro	símbolo	valor
tempo de deposição sedimentar (Ma)	$T^s$	60
tempo final de análise (Ma)	$T^f$	120
aceleração da gravidade (m/s <sup>2</sup> )	$g$	9.80665
taxa de deposição sedimentar (t/km <sup>2</sup> /ano)	$\dot{M}_d$	80
porosidade inicial	$\phi_0$	0.72
massa específica inicial (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_0$	800
módulo de Young inicial (MPa)	$E_0$	1000
módulo de Poisson inicial	$\nu_0$	0.33
inclinação da superfície plástica/viscoplástica	$a$	1.1545
pressão de consolidação plástica inicial (MPa)	$p_{c0}$	4.0
expoente da lei de endurecimento plástica	$m_p$	1.3
pressão de consolidação viscoplástica inicial (MPa)	$p_{vp0}$	5.0
expoente da lei de endurecimento viscoplástica	$m_{vp}$	1.0
coeficiente de viscosidade viscoplástica (MPa×Ma)	$\eta_{vp}$	1000

## 6.1 DESCRIÇÃO DO SIMULADOR NUMÉRICO UTILIZADO

O simulador numérico utilizado corresponde ao desenvolvido por Brüch (2016). Segundo o autor, ele consiste em um modelo constitutivo para um material poroso saturado e em uma ferramenta numérica baseada no método dos elementos finitos para representar os processos de formação e compactação gravitacional de uma bacia sedimentar.

O modelo constitutivo adotado baseia-se no modelo apresentado em Maghous *et al.* (2014), sendo o resultado de pesquisas desenvolvidas por Bourgeois *et al.* (1995), Bourgeois e Dormieux (1997), Dormieux e Maghous (1999), Dormieux e Maghous (2000), Bernaud *et al.* (2002), Barthélémy *et al.* (2003), Deudé *et al.* (2004) e Bernaud *et al.* (2006) para representar o comportamento de um material sedimentar submetido à deformações de natureza puramente mecânicas. Ele consiste em um modelo macroscópico de um material poroso saturado por um único fluido, definido no contexto da poroplasticidade finita, que considera a evolução das propriedades promecânicas em função das mudanças de caráter irreversível que ocorrem na sua microestrutura. O comportamento plástico do material é definido pelo modelo Cam-Clay modificado em con-

junto com uma lei de encruamento logarítmica desenvolvida segundo uma abordagem micromecânica que evita o desenvolvimento de porosidade negativa no material quando este é submetido a altos níveis de tensão confinante. Em Brüch *et al.* (2019), a lei de encruamento logarítmica foi modificada, recebendo um expoente de calibração (conforme a equação (65)). Adicionalmente, o critério plástico simplificado apresentado na equação (37) foi adicionado ao modelo.

Com o intuito de representar as deformações químico-mecânicas que ocorrem nas camadas mais profundas da bacia sedimentar, termos adicionais foram introduzidos nas equações de estado do material. Os fenômenos de pressão-solução intergranular são simulados com um modelo viscoplástico baseado no princípio da teoria de Perzyna (1966) em conjunto com uma regra de fluxo associada definida pelo modelo Cam-Clay modificado, e uma lei de encruamento obtida segundo uma abordagem fenomenológica. Para representar a natureza interdependente das deformações mecânicas e químico-mecânicas, os comportamentos plástico e viscoplástico foram acoplados através da dilatação volumétrica irreversível (conforme o acoplamento apresentado nas leis de endurecimento plástico e viscoplástico, dadas nas equações (65) e (68)). De forma suplementar, o critério viscoplástico simplificado apresentado na equação (45) foi adicionado ao modelo.

Os efeitos da temperatura foram incorporados ao modelo constitutivo através de um acoplamento parcial. Enquanto a temperatura atua diretamente sobre o comportamento do material a partir de termos adicionados nas equações de estado poromecânicas, os termos relativos às deformações e variações de pressão foram desconsiderados na equação de balanço de entropia. Assim, a evolução do campo de temperaturas na bacia sedimentar é obtida a partir da solução de um problema de condução térmica. Os efeitos poromecânicos são considerados no problema de evolução térmica através das modificações da geometria e das propriedades térmicas do material que ocorrem ao longo do processo de deformação.

A mudança das propriedades do material poroso em função da variação de temperatura e da evolução de caráter irreversível da sua microestrutura é uma característica fundamental do modelo. A evolução desses parâmetros em função da porosidade é determinada por meio de leis de homogeneização obtidas de abordagens variacionais e estimativas micromecânicas, enquanto que os efeitos térmicos são determinados em função de modelos desenvolvidos a partir de observações de experimentos realizados em laboratório.

A ferramenta computacional baseia-se no método dos elementos finitos com uma interface de multiprocessamento em memória compartilhada. São utilizados elementos hexaédricos para

representar as incógnitas que definem o problema termoporomecânico: deslocamentos, pressões e temperaturas. Os processos de deposição/erosão sedimentar são simulados a partir de um algoritmo de ativação/desativação de elementos (Hanafy e Emery (1980), Bernaud *et al.* (1995)). O funcionamento do programa termoporomecânico ocorre por meio da interação do módulo de deposição/erosão sedimentar, e dos módulos térmico e poromecânico.

No Apêndice A, apresentam-se detalhadamente as características do simulador numérico, tais como a discretização temporal e espacial, o fluxograma do programa termoporomecânico e os algoritmos de integração das deformações plásticas e viscoplásticas.

## 6.2 DESCRIÇÃO DO MODELO SIMULADO POR ELEMENTOS FINITOS

O problema analisado corresponde a uma compactação unidimensional induzida unicamente pelos efeitos gravitacionais em uma bacia sedimentar que se forma durante o período geológico  $0 \leq t \leq T^s = 60 \text{ Ma}$ , pela continua acreção de material a uma taxa constante equivalente à  $\dot{M}_d = 2.54 \times 10^{-9} \text{ kg/s}$  por metro quadrado ( $\dot{M}_d = 80 \text{ t/km}^2/\text{ano}$ ). O problema simulado desconsiderando os efeitos térmicos e da poropressão. Em sua configuração de referência, supõe-se que o material sedimentar exhibe as mesmas propriedades mecânicas ao longo da fase de acreção.

Conforme exposto na seção 6.1, o simulador numérico utiliza o algoritmo de ativação/desativação de elementos para a simulação da sedimentação do material. O sistema fechado fictício consiste em uma coluna, definido pela altura total de material depositado na ausência de compactação  $\mathcal{H}$ . Os dados da Tabela 34 aplicados à equação (170), resulta em uma altura do modelo igual à  $\mathcal{H} = 6000 \text{ m}$ . As dimensões horizontais do modelo são definidas como  $L_1 = L_2 = 100 \text{ m}$  (Figura 48).

As condições de contorno do modelo de elementos finitos são indicadas na Figura 48, e são consistentes com a hipótese oedométrica adotada na análise. O plano  $x_3 = 0$  define o substrato rígido, implicando na condição de restrição ao deslocamento vertical  $\underline{\xi}(x_3 = 0, t) \cdot \underline{e}_3 = 0$ . Os deslocamentos normais ao longo das superfícies laterais definidas por  $x_i = 0$  e  $x_i = L_i$  (

$i = 1, 2$ ) são mantidos nulos ao longo da análise  $\underline{\xi}(x_i = 0, t) \cdot \underline{e}_i = \underline{\xi}(x_i = L_i, t) \cdot \underline{e}_i = 0$ . Durante a simulação numérica, a superfície superior permanece livre de tensões:  $\underline{T} = \underline{\sigma}(x_3 = H(t), t) \cdot \underline{e}_3 = \underline{0}$ .

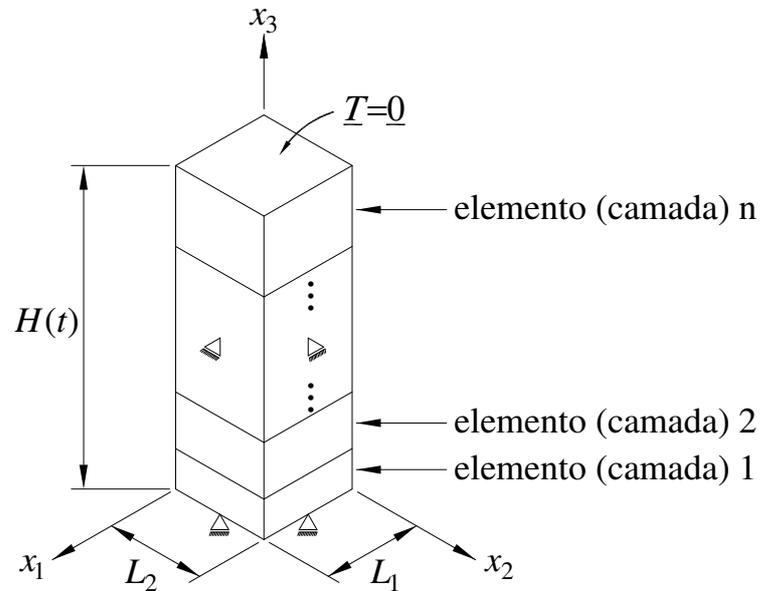


Figura 48: discretização espacial e condições de contorno mecânicas do problema.

Foram realizados estudos acerca das discretizações temporais e espaciais. As análises foram realizadas para o modelo sem a evolução das propriedades elásticas e seus efeitos sobre o modelo constitutivo (que condiz com o modelo M2), e suas conclusões foram extrapoladas para o modelo que contempla a evolução dos módulos elásticos (referente ao modelo M4). Os estudos analisaram as respostas para as alturas da bacia sedimentar ao término do período de sedimentação  $H^s$  e o respectivo tempo de processamento. Ressalta-se que foi utilizado um esquema de integração numérica 3x3x3, com um total de 27 pontos para a quadratura gaussiana.

A discretização temporal foi definida em três níveis para  $\delta t_{fixo}$ : 500, 1000 e 10000 anos. Adicionalmente, o tempo característico de relaxação do material para os dados apresentados é constante igual a  $\Delta t_{ref}^{vp} \approx 0.675Ma$ . A análise foi realizada para o período de sedimentação, igual a  $T^s = 60Ma$ . Para a discretização espacial, a coluna com  $\mathcal{H} = 6000m$  foi testada para 30, 60 e 120 elementos. A Tabela 35 apresenta as informações de cada malha, bem como o tempo total de processamento de cada análise.

Tabela 35: dados das malhas e dos tempos de processamento de cada análise.

propriedades da malha			tempo de processamento (h)		
<i>elementos</i>	<i>nós</i>	<i>gdl</i>	$\delta t_{\text{fixo}} = 500$ anos	$\delta t_{\text{fixo}} = 1000$ anos	$\delta t_{\text{fixo}} = 10000$ anos
30	368	1104	16.64	10.76	1.22
60	728	2184	40.31	21.05	2.34
120	1448	4344	74.43	33.58	4.10

A Tabela 36 apresenta, para cada discretização temporal e espacial, os tempos que delimitam as fases de comportamento bem como as alturas que caracterizam os domínios de comportamento.

Tabela 36: tempos que delimitam as fases de comportamento e alturas que caracterizam os domínios de comportamento para cada discretização temporal e espacial.

$\delta t_{\text{fixo}}$ (anos)	30 elementos			60 elementos			120 elementos		
	500	1000	10000	500	1000	10000	500	1000	10000
$T^e$ (Ma)	5.3315	5.3320	5.3400	5.2185	5.2190	5.2200	5.1625	5.1630	5.1700
$T^p$ (Ma)	13.6640	13.6650	13.6500	13.5660	13.5660	13.5700	13.5120	13.5130	13.5100
$T^{vp}$ (Ma)	43.1000	43.0000	43.0000	42.5000	42.5000	42.1000	41.9000	41.9000	41.5000
$H^e$ (m)	532.40	532.45	533.24	521.13	521.18	521.28	515.54	515.59	516.29
$H^p$ (m)	1120.09	1120.15	1118.96	1112.97	1112.98	1112.71	1110.04	1110.10	1109.52
$H^{vp}$ (m)	2310.54	2307.29	2306.36	2290.71	2290.70	2275.86	2271.00	2270.99	2256.37
$H^s$ (m)	2834.42	2834.44	2833.03	2835.12	2835.09	2833.10	2835.97	2835.95	2834.27

A Tabela 37 apresenta as diferenças relativas obtidas entre as respostas numéricas, apresentadas na Tabela 36. Os dados são comparados ao estudo com a discretização temporal e espacial mais refinada ( $\delta t_{\text{fixo}} = 500$  anos e 120 elementos), considerada a mais precisa.

Tabela 37: diferenças relativas entre as respostas.

$\delta t_{\text{fixo}}$ (anos)	30 elementos			60 elementos			120 elementos		
	500	1000	10000	500	1000	10000	500	1000	10000
$T^e$	3.27%	3.28%	3.44%	1.08%	1.09%	1.11%	0.00%	0.01%	0.15%
$T^p$	1.12%	1.13%	1.02%	0.40%	0.40%	0.43%	0.00%	0.01%	0.01%
$T^{vp}$	2.86%	2.63%	2.63%	1.43%	1.43%	0.48%	0.00%	0.00%	0.95%
$H^e$	3.27%	3.28%	3.43%	1.08%	1.09%	1.11%	0.00%	0.01%	0.15%
$H^p$	0.91%	0.91%	0.80%	0.26%	0.26%	0.24%	0.00%	0.01%	0.05%
$H^{vp}$	1.74%	1.60%	1.56%	0.87%	0.87%	0.21%	0.00%	0.00%	0.64%
$H^s$	0.05%	0.05%	0.10%	0.03%	0.03%	0.10%	0.00%	0.00%	0.06%

Baseado nos resultados apresentados na Tabela 35, Tabela 36 e Tabela 37, foi escolhido a discretização temporal de  $\delta t_{\text{fixo}} = 10000$  anos e a discretização espacial de 60 elementos. Essa

configuração apresentou um tempo de processamento reduzido e diferenças relativas médias inferiores a 1%. Assim, a malha do modelo consiste em uma coluna com  $n = 60$  elementos hexaédricos com altura inicial de  $L=100\text{m}$ , regularmente distribuídos ao longo da altura. O modelo numérico corresponde a 728 nós, com 2184 graus de liberdade (correspondentes aos deslocamentos globais).

Adicionalmente, os dados expostos na Tabela 37 permitem concluir preliminarmente que, para as configurações de discretização analisadas, o número de elementos na malha representa o fator preponderante sobre a precisão das respostas. Os percentuais das diferenças relativas se mantêm praticamente constantes para cada patamar de discretização espacial. A redução desses percentuais só é significativa para uma quantidade maior de elementos.

### 6.3 OBSERVAÇÕES RELATIVAS AO MODELO SEMI-ANALÍTICO

Conforme abordado na seção 4.2, o sistema não-linear EDP que descreve o comportamento mecânico da bacia sedimentar no período de acreção é manipulado e solucionado, a cada passo de tempo, como um sistema não-linear EDO em um problema de valor de contorno. A solução é obtida com uma técnica de diferenças finitas com extrapolação de Richardson. A rotina computacional do *software* MAPLE foi configurada para que a tolerância absoluta a erros para a solução seja de  $10^{-6}$ . O solucionador numérico utiliza internamente uma malha discreta de pontos para calcular a solução aproximada. Essa malha é ajustada (através de um algoritmo adaptativo) conforme maior precisão seja necessária. O número inicial de pontos da malha é de 128.

Para o período de pós acreção, conforme a seção 4.3, o sistema não-linear que descreve o comportamento mecânico da bacia sedimentar é manipulado e solucionado como um sistema não-linear EDO em um problema de valor inicial. A solução é obtida por um algoritmo do método de Runge-Kutta Fehlberg, com acurácia de quinta ordem. O desvio para a solução é de  $10^{-6}$ .

Para o período de acreção sedimentar, as soluções semi-analíticas desenvolvidas utilizam em seus processos temporais incrementais o mesmo  $\delta t_{\text{fixo}} = 10000$  anos .

## 6.4 ANÁLISE 1 – MÓDULOS ELÁSTICOS CONSTANTES

A primeira análise compara as respostas da solução semi-analítica do modelo M2 às predições do simulador numérico de elementos finitos (MEF). Os tempos de processamentos das análises são apresentados na Tabela 38.

Tabela 38: tempo total de análise dos modelos M2 e MEF (h).

	M2	MEF
tempo de análise	2.91	4.99

Verifica-se que o processamento do modelo M2 foi 42% mais rápido que o modelo MEF.

Na Figura 49, apresentam-se as leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar  $t \rightarrow H(t)$  para os modelos M2 e MEF. A Tabela 39 apresenta um resumo dos tempos e alturas que caracterizam as fases e os domínios de comportamento das respostas, bem com as diferenças relativas.

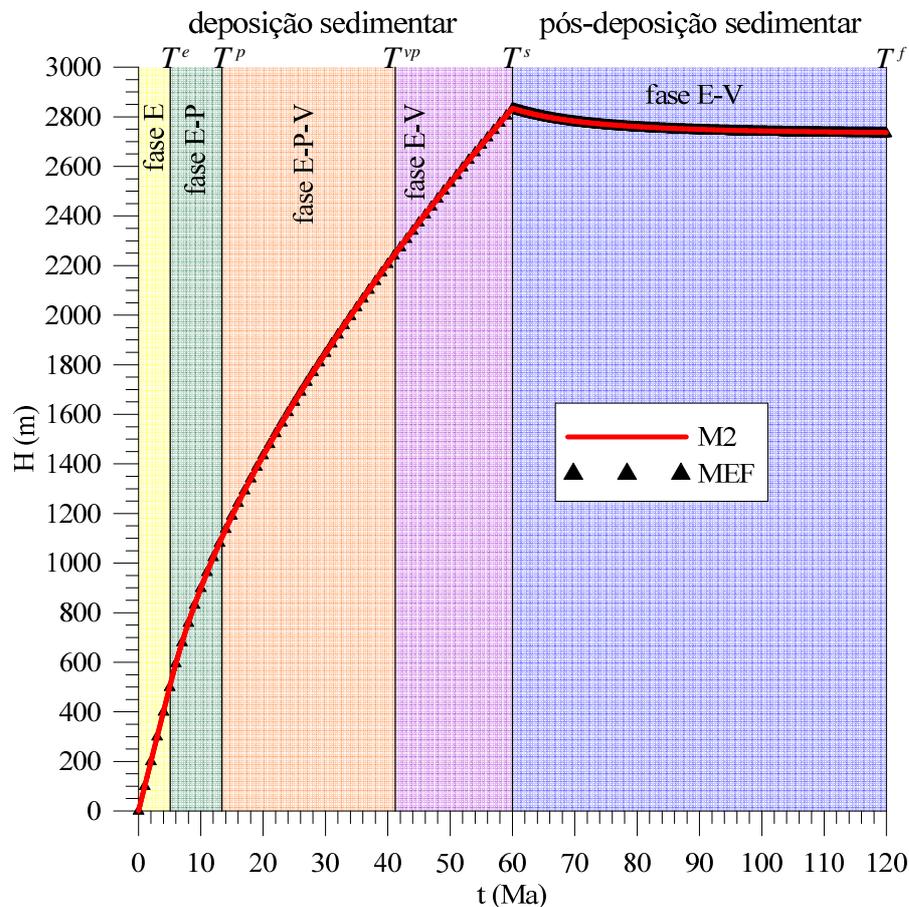


Figura 49: leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

Tabela 39: tempos e alturas que caracterizam o problema mecânico, para os modelos M2 e MEF.

	M2	MEF	diferença relativa
$T^e$ (Ma)	5.10	5.22	2.35%
$T^p$ (Ma)	13.40	13.57	1.27%
$T^{vp}$ (Ma)	41.19	42.20	2.45%
$H^e$ (m)	509.20	521.28	2.37%
$H^p$ (m)	1103.29	1112.69	0.85%
$H^{vp}$ (m)	2247.42	2279.29	1.42%
$H^s$ (m)	2834.03	2833.10	0.03%
$H^f$ (m)	2736.79	2733.58	0.12%

Verifica-se que as predições dos modelos M2 e MEF apresentam boa proximidade, o que representa um indicativo preliminar favorável à qualidade da hipótese simplificadora introduzida na seção 4.2.4 (relativo à fase elástica-viscoplástico do período de acreção de sedimentos). Observa-se que a maior diferença percentual é de 2.45%, para o tempo  $T^{vp}$ .

No contexto de uma simulação numérica, um resultado “correto” depende de muitos fatores. A correta definição do modelo numérico, a discretização espacial e temporal, a tolerância da convergência dos processos iterativos, a precisão da máquina e o esquema numérico são fatores que tem grande influência sobre as predições. Na análise atual, parte das diferenças observadas entre as respostas M2 e MEF estão associadas a um cenário com três fatores: (a) discretização espacial do modelo MEF; (b) respostas avaliadas nos pontos de Gauss do modelo MEF; (c) hipótese simplificadora do modelo M2 para a fase elástica-viscoplástica.

Em relação ao fator (a), verifica-se na Tabela 36 que o aumento da discretização espacial aproxima as alturas que caracterizam as espessuras de cada domínio material, fato que também repercutirá sobre os tempos que limitam as fases de comportamento. O fator (b) não foi mencionado no capítulo 6.1, e por isso é feita uma breve abordagem sobre o tema. As incógnitas nodais do simulador, pertinentes à análise, correspondem aos deslocamentos. Todas as avaliações que se baseiam nesses valores nodais (como a convergência do algoritmo não-linear) são feitas com a precisão estipulada para o algoritmo. No entanto, as avaliações de tensões e deformações são realizadas nos pontos de integração de Gauss, que estão distantes dos nós do modelo. Assim, as avaliações que dependem dessas respostas (como o cálculo dos critérios de plasticidade e viscoplasticidade) apresentarão pequenas discrepâncias, pois o si-

mulador não possui uma rotina de extrapolação dos valores nos pontos de Gauss e suavização dessas respostas. Já o fator (c) é inerente ao processo de simplificação e será discutido ao longo da análise.

Por fim, o nível de compactação da bacia sedimentar ao término do período de análise corresponde à 54.39%, que reforça a importância da modelagem no âmbito das grandes deformações.

### 6.4.1 Análise global

As previsões dos modelos M2 e MEF para o perfil de partículas da bacia sedimentar são apresentadas na Tabela 41 e na Tabela 42, para os tempos  $t = T^s$  e  $t = T^f$ , respectivamente. As respostas são apresentadas para as posições que dividem os domínios de comportamento do material sedimentar, referenciadas ao modelo M2 (conforme a Tabela 40). Adicionalmente, para os perfis no tempo  $t = T^s$ , apresentam-se as previsões para a coordenada  $x_3 = 293.31\text{m}$ , que corresponde ao ponto médio da camada elasto-viscoplástica. As diferenças relativas entre as previsões dos modelos M2 e MEF são apresentadas na Tabela 43 e na Tabela 44, para os tempos  $t = T^s$  e  $t = T^f$ , respectivamente.

Tabela 40: posições das fronteiras que dividem os domínios de comportamento do modelo M2 (m).

$x_3$	$t = T^s = 60\text{ Ma}$	$t = T^f = 120\text{ Ma}$
$H(t)$	2834.03	2736.79
$H(t) - H^e$	2324.83	2227.59
$H(t) - H^p$	1730.74	1633.51
$H(t) - H^{vp}$	586.61	*
base	0.00	0.00

\*fronteira inexistente no período de pós-acreção

A resposta global da bacia sedimentar é inicialmente apresentada da Figura 50 à Figura 52, que ilustram os perfis de jacobianos da transformação, da porosidade euleriana e da massa específica.

No tempo  $t = T^s$ , no domínio elasto-viscoplástico, são observadas diferenças entre as respostas M2 e MEF. Essas discordâncias são ocasionadas pela hipótese de simplificação descrita na seção 4.2.4. As previsões para as componentes da dilatação volumétrica são pouco influenciadas por essa simplificação e apresentam diferenças relativas inferiores à 2% nesse domínio.

Já a porosidade euleriana apresenta a maior diferença relativa, que é inferior à 12% (que corresponde a uma diferença de  $\Delta\phi=0.01390$ ), no ponto médio do domínio elasto-viscoplastico.

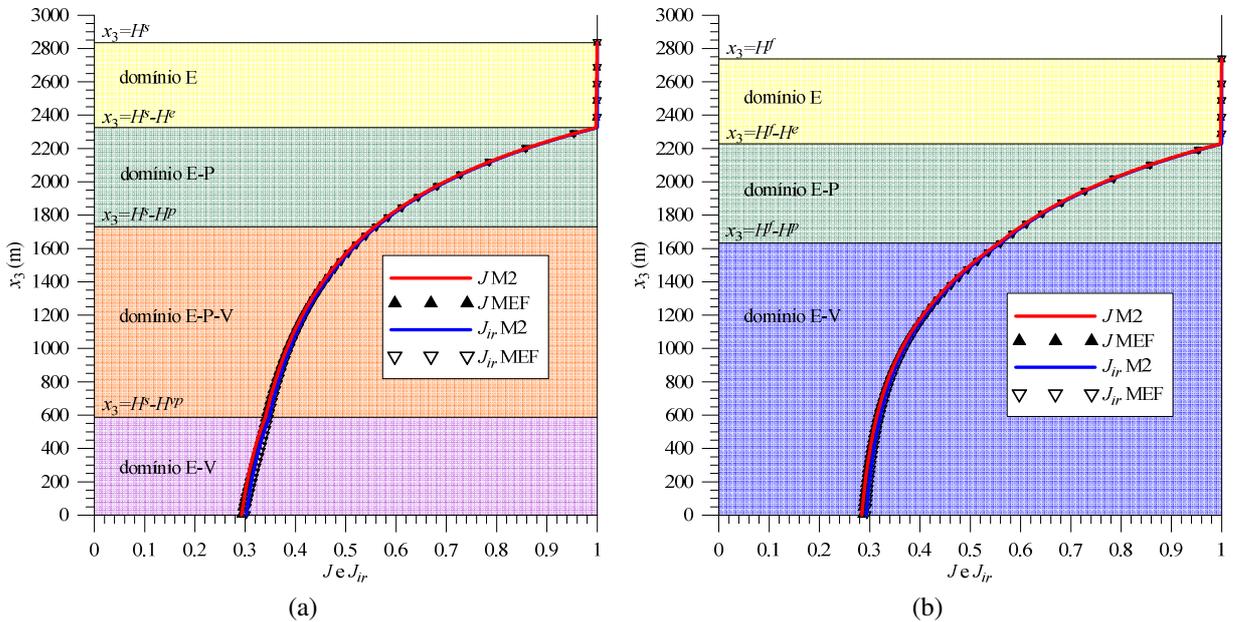


Figura 50: perfis de jacobianos da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

Em adição aos comentários acerca do modelo M2, feitos nos capítulos 4 e 5, verifica-se que a única evolução de todas as variáveis mecânicas nos domínios elástico e elastoplástico, entre  $t = 60\text{Ma}$  e  $t = 120\text{Ma}$ , são referentes à translação vertical dessas camadas, em função do efeito diferido da deformação no domínio elasto-viscoplastico. Por exemplo, a distribuição de  $J$  e  $J_{ir}$  dentro dos domínios elástico e elastoplástico não apresenta variação entre os tempos  $t = T^s$  e  $t = T^f$ . A única variação desses dois domínios diz respeito ao deslocamento de corpo rígido nesse intervalo de tempo.

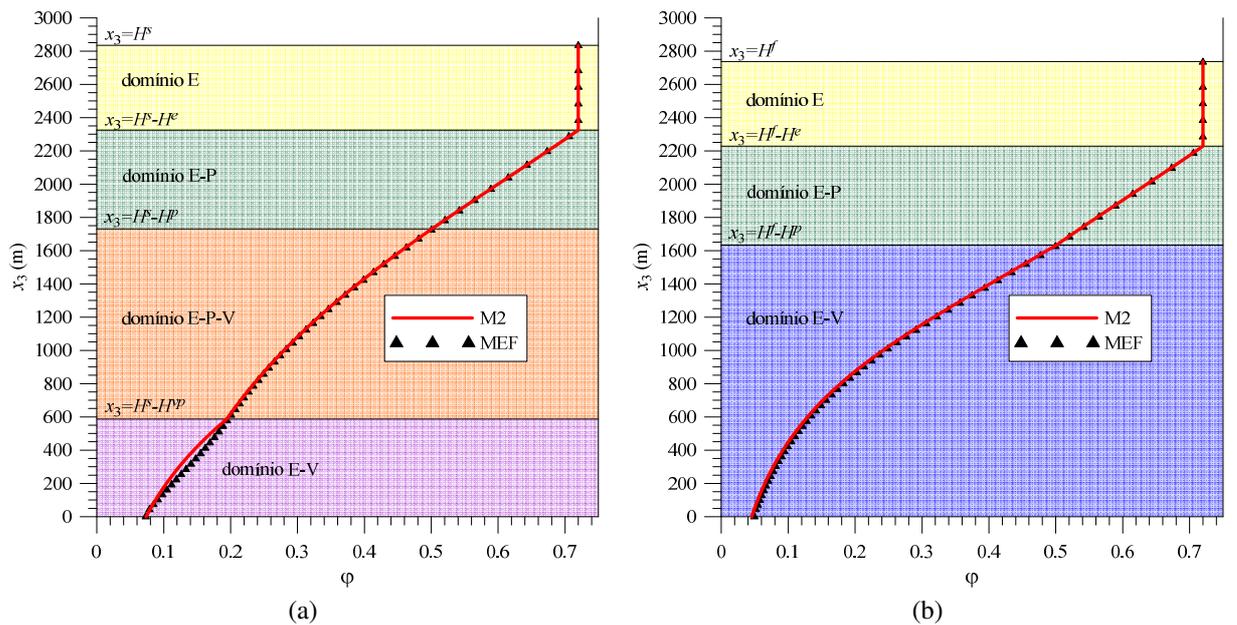


Figura 51: perfis de porosidade euleriana da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

No período de pós-sedimentação, toda a evolução das variáveis mecânicas ocorre apenas no domínio elasto-viscoplástico. Em termos de  $J$ ,  $J_{ir}$  e  $\varphi$ , verifica-se uma redução das intensidades, no sentido do fechamentos dos poros em decorrência do adensamento do material sedimentar.

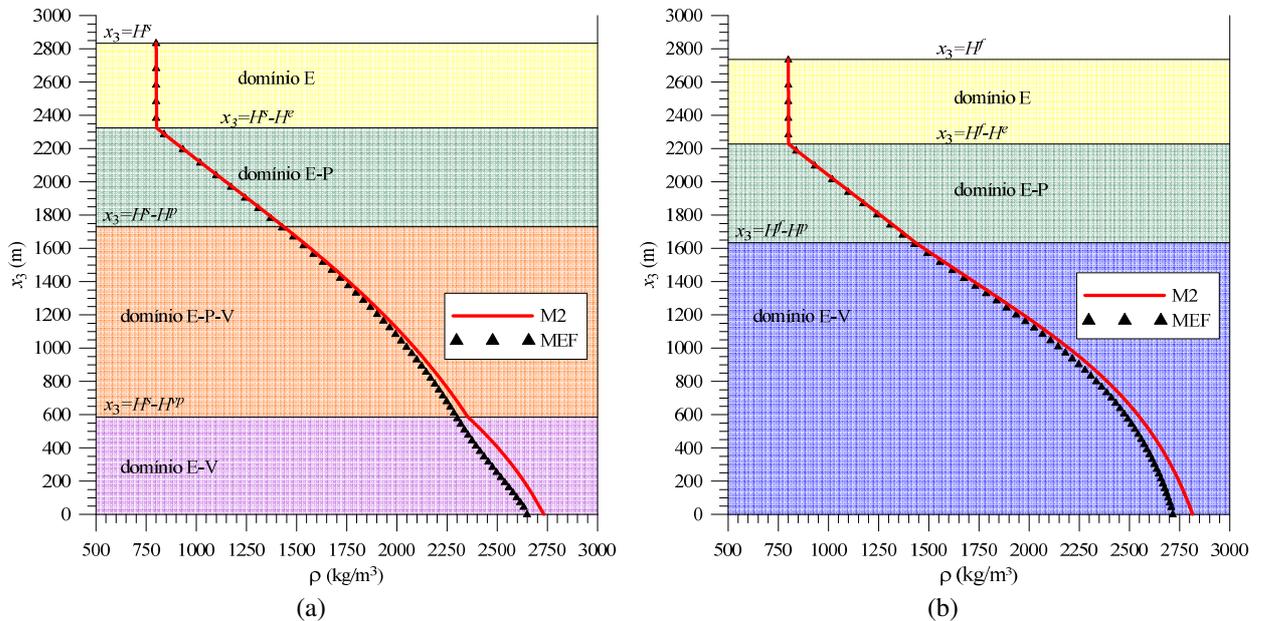


Figura 52: perfis de massa específica da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

O perfil de massa específica apresenta diferenças entre as previsões dos dois modelos. Ao comportamento da massa específica do modelo M2, abordado na seção 5.3.1, adiciona-se a uma característica do modelo MEF. Conforme exposto na seção 6.1, a hipótese de elasticidade infinitesimal  $J \approx J_{ir}$  é imposta ao modelo numérico. Assim, a massa específica do modelo MEF é atualizada através da componente  $J_{ir}$ . A soma dessas características produz as diferenças observadas, que são inferiores à 5% em ambos os tempos.

À exceção da massa específica, após o término do período de acreção de sedimentos, as diferenças referentes à hipótese de simplificação são rapidamente dissipadas, não sendo mais observados após um intervalo de 3 Ma. Isso pode ser comprovado pela boa proximidade das respostas dos modelos M2 e MEF no tempo  $t = T^f = 120$  Ma.

Tabela 41: predições dos modelos M2 e MEF no perfil da bacia sedimentar em  $t=60$  Ma.

$x_3$ (m)	0		293.31		$H^s - H^{vp} = 586.61$		$H^s - H^p = 1730.74$		$H^s - H^e = 2324.83$		$H^s = 2834.03$	
parâmetro	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF
$J$	0.29283	0.29041	0.31036	0.31283	0.33965	0.33815	0.55648	0.55831	0.99612	0.96908	1.00000	0.99973
$J_{ir}$	0.30226	0.30207	0.31871	0.32384	0.34713	0.34845	0.56043	0.56256	0.99882	0.97183	1.00000	1.00000
$\varphi$	0.07366	0.07305	0.12147	0.13537	0.19339	0.19642	0.50039	0.50213	0.71967	0.71149	0.72000	0.72000
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2731.94	2648.42	2577.67	2470.35	2355.38	2295.94	1437.62	1422.27	803.12	823.63	800.00	800.00
$\sigma_v$ (MPa)	-47.07683	-45.76414	-39.46294	-38.74839	-32.38424	-31.90997	-10.54456	-10.48018	-4.00752	-4.00250	0.00000	-0.39961
$\sigma_h$ (MPa)	-23.08372	-22.43640	-19.33817	-18.98689	-15.85903	-15.62505	-5.14356	-5.11213	-1.97375	-1.96884	0.00000	-0.19682
$\sigma_h/\sigma_v$	0.49034	0.49026	0.49003	0.49000	0.48971	0.48966	0.48779	0.48779	0.49251	0.49190	*	0.49253
$p_c$ (MPa)	59.13209	59.38780	44.83471	41.87570	32.42660	32.03308	10.54393	10.47927	4.00728	4.19275	4.00000	4.00000
$p_{vp}$ (MPa)	39.69976	39.83116	32.08629	30.44360	25.00799	24.77381	10.53834	10.48763	5.00700	5.18276	5.00000	5.00000

\*divisão por zero

Tabela 42: predições dos modelos M2 e MEF no perfil da bacia sedimentar em  $t=120$  Ma.

$x_3$ (m)	0		$H^f - H^p = 1633.51$		$H^f - H^e = 2227.59$		$H^f = 2736.79$	
parâmetro	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF
$J$	0.28416	0.28319	0.55635	0.55911	0.99612	0.96994	1.00000	0.99975
$J_{ir}$	0.29331	0.29456	0.56031	0.56334	0.99882	0.97268	1.00000	1.00000
$\varphi$	0.04537	0.04942	0.50027	0.50276	0.71967	0.71175	0.72000	0.72000
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2815.35	2715.93	1437.93	1420.43	803.12	822.92	800.00	800.00
$\sigma_v$ (MPa)	-47.07683	-45.77958	-10.54456	-10.43245	-4.00752	-3.98814	0.00000	-0.37548
$\sigma_h$ (MPa)	-23.08112	-22.44183	-5.14354	-5.08874	-1.97375	-1.96185	0.00000	-0.18494
$\sigma_h/\sigma_v$	0.49029	0.49021	0.48779	0.48778	0.49251	0.49192	*	0.49253
$p_c$ (MPa)	73.79289	71.16116	10.54829	10.45586	4.00728	4.18695	4.00000	4.00000
$p_{vp}$ (MPa)	47.07401	45.77688	10.54169	10.46926	5.00700	5.17727	5.00000	5.00000

\*divisão por zero

Tabela 43: diferenças relativas entre as respostas M2 e MEF em  $t=60$  Ma.

$x_3$ (m)	0	293.31	$H^s - H^{vp}$ =586.61	$H^s - H^p$ =1730.74	$H^s - H^e$ =2324.83	$H^s$ =2834.03
$J$	0.83%	0.80%	0.44%	0.33%	2.71%	0.03%
$J_{ir}$	0.06%	1.61%	0.38%	0.38%	2.70%	0.00%
$\varphi$	0.83%	11.44%	1.57%	0.35%	1.14%	0.00%
$\rho$	3.06%	4.16%	2.52%	1.07%	2.55%	0.00%
$\sigma_v$	2.79%	1.81%	1.46%	0.61%	0.13%	*
$\sigma_h$	2.80%	1.82%	1.48%	0.61%	0.25%	*
$\sigma_h/\sigma_v$	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.12%	*
$p_c$	0.43%	6.60%	1.21%	0.61%	4.63%	0.00%
$p_{vp}$	0.33%	5.12%	0.94%	0.48%	3.51%	0.00%

\*divisão por zero

Tabela 44: diferenças relativas entre as respostas M2 e MEF em  $t=120$  Ma.

$x_3$ (m)	0	$H^f - H^p =$ 1633.51	$H^f - H^e =$ 2227.59	$H^f =$ 2736.79
$J$	0.34%	0.49%	2.63%	0.02%
$J_{ir}$	0.43%	0.54%	2.62%	0.00%
$\varphi$	8.92%	0.50%	1.10%	0.00%
$\rho$	3.53%	1.22%	2.47%	0.00%
$\sigma_v$	2.76%	1.06%	0.48%	*
$\sigma_h$	2.77%	1.07%	0.60%	*
$\sigma_h/\sigma_v$	0.01%	0.00%	0.12%	*
$p_c$	3.57%	0.88%	4.48%	0.00%
$p_{vp}$	2.76%	0.69%	3.40%	0.00%

\*divisão por zero

A sequência de análise da resposta global da bacia sedimentar é apresentada da Figura 53 à Figura 55, que ilustram os perfis de tensões, da razão de tensões e pressões de consolidação.

Para o tempo  $t=T^s$ , os perfis de tensões e da razão de tensões apresentam pouca influência devido ao processo de simplificação e, por isso, são observadas diferenças relativas inferiores à 3% na base da bacia sedimentar (conforme a Tabela 43). O efeito da simplificação é visivelmente mais acentuado para as pressões de consolidação, que apresentam diferenças relativas inferiores à 7% (6.60% para  $p_c$ , 5.12% para  $p_{vp}$ ), no ponto médio da camada elasto-viscoplástica.

Para o tempo  $t=T^f$ , todos os perfis apresentam pequenas diferenças relativas. Conforme a Tabela 44, para as componentes de tensão as diferenças relativas são inferiores à 4% na base

da bacia sedimentar. As pressões de consolidação apresentam diferenças relativas inferiores à 5%, na fronteira elasto-plástica, devido à diferença de altura da bacia sedimentar entre os modelos M2 e MEF. As razões de tensões praticamente não apresentam diferenças relativas.

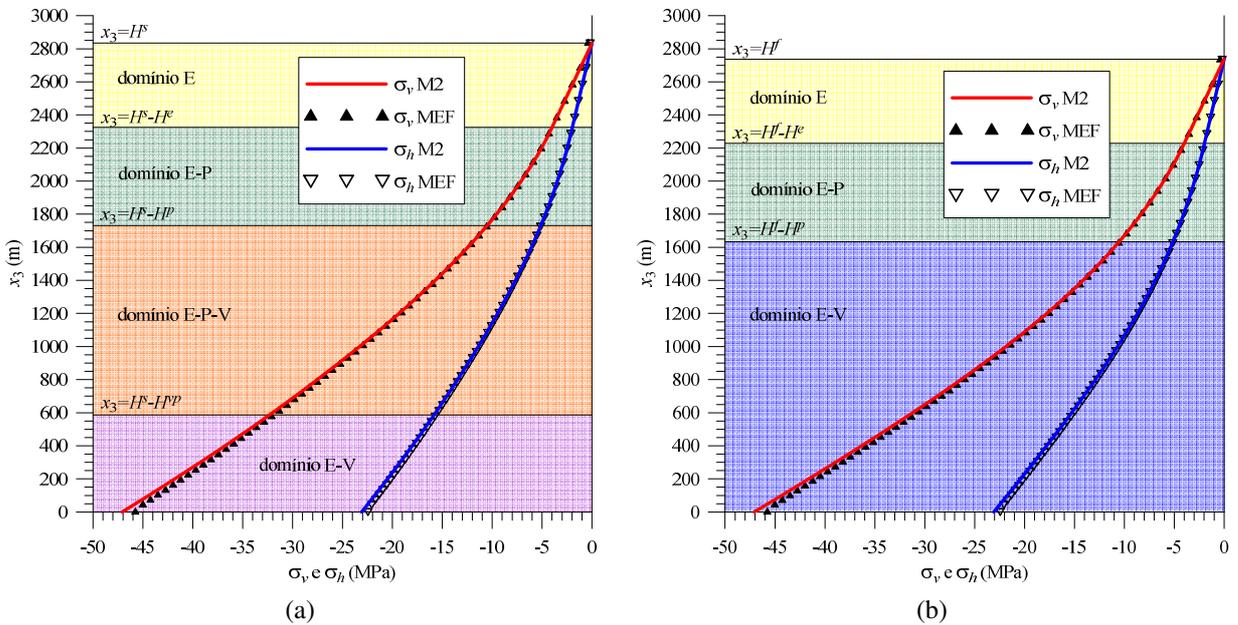


Figura 53: perfis de tensões da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

Conforme os dados apresentados na Tabela 41 e Tabela 42, verifica-se que a componente horizontal de tensões apresenta uma pequena redução de intensidade entre os tempos  $t=T^s$  e  $t=T^f$ . Essa redução ocorre devido ao valor do parâmetro  $a$ . Segundo a análise realizada ao final da seção 4.3.1, para que a componente horizontal de tensão continue aumentando a sua intensidade no sentido da compressão, o valor desse parâmetro deve ser maior que  $a > \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.1547$ , que é superior ao fixado para a presente análise ( $a = 1.1545$ ).

Uma característica observada nos perfis da razão de tensões diz respeito à pequena variação desse parâmetro ao longo da altura da bacia (intervalo de  $0.4875 \leq \sigma_h/\sigma_v \leq 0.4925$ ). A utilização de valores constantes para o coeficiente de empuxo lateral (similar à  $\sigma_h/\sigma_v$ ) é prática comum para as disciplinas que envolvem a análise de bacias sedimentares.

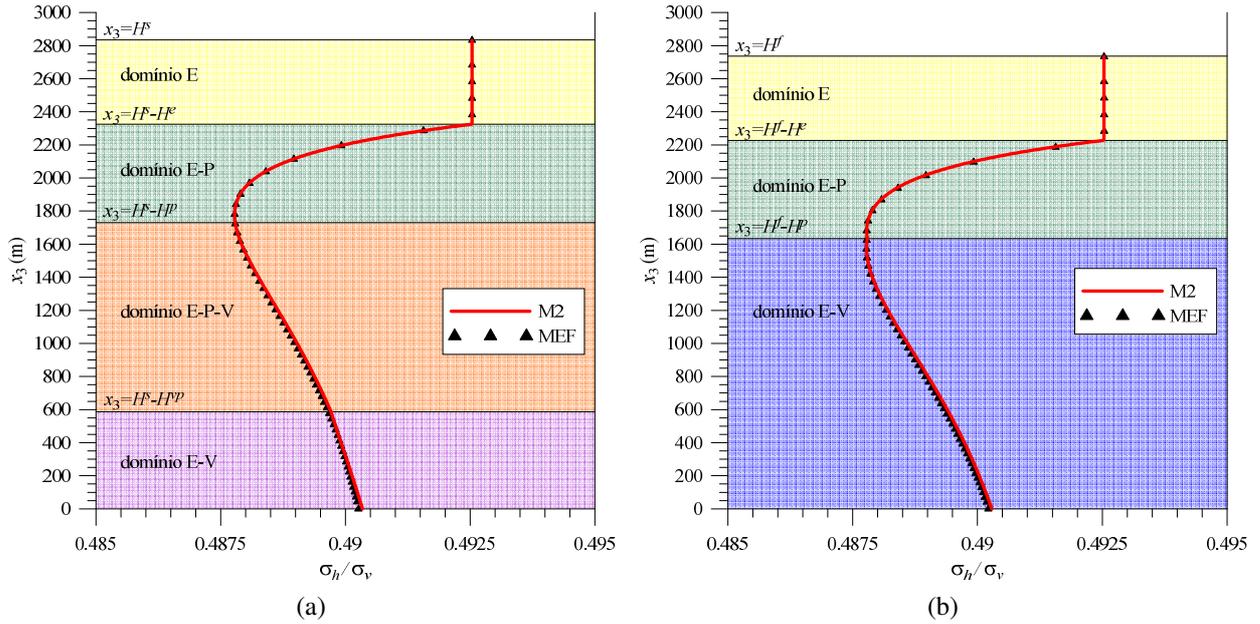


Figura 54: perfis das razões de tensões da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

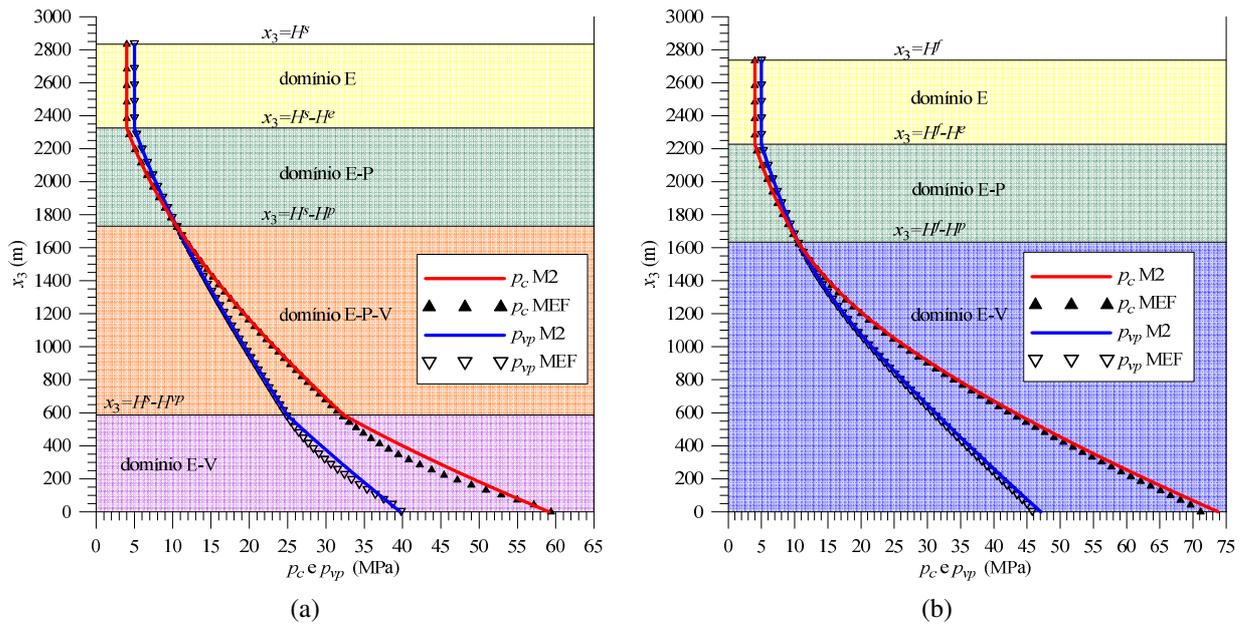


Figura 55: perfis das pressões de consolidação plástica e viscoplástica da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

Por fim, destaca-se a variação das pressões de consolidação plástica e viscoplástica entre os tempos  $t = T^s$  e  $t = T^f$ , que apresenta um aumento médio de 22%.

### 6.4.2 Análise local

As predições dos modelos M2 e MEF para as partículas localizadas na base da bacia sedimentar são apresentadas na Tabela 45, para todos os tempos que delimitam as fases de comportamento da bacia sedimentar. Na Tabela 46, apresenta-se as diferenças relativas da resposta MEF em relação à M2. Na Tabela 47, apresenta-se uma compilação de respostas e diferenças relativas para o tempo  $t=50.6\text{Ma}$ , que corresponde à metade da fase elástica-viscoplástico do período de deposição sedimentar. Essa última tabela foi apresentada para enriquecer a análise da hipótese simplificadora realizada nessa fase.

A evolução temporal das componentes da dilatação volumétrica é apresentada na Figura 56. As respostas dos modelos apresentam sutis diferenças durante a fase elástica-viscoplástica. Segundo os dados da Tabela 47, a diferença percentual máxima na metade dessa fase é inferior a 2%. Esse comportamento é resultado direto da hipótese de simplificação apresentada na seção 4.2.4.

Para ambos os modelos, as respostas para  $J$  e  $J_{ir}$  iniciam um sutil distanciamento entre si durante a fase elástica-plástica-viscoplástica, que indica o início da perda de validade da hipótese de elasticidade infinitesimal ( $J \approx J_{ir}$ ). Essa característica já foi observada e comentada para o modelo M2 e tem como causa a invariabilidade dos módulos elásticos em relação ao adensamento do material sedimentar.

Os modelos apresentam o comportamento limite para a componente irreversível da dilatação volumétrica  $J_{ir} \rightarrow J_{ir}^{cr} = 0.28$ . Verifica-se que a compactação mecânica prevalece para  $t \leq T^p$ , se estabilizando no tempo  $t = T^{vp}$ , quando  $\underline{\underline{d}}^p = 0$  (e, conseqüentemente,  $\dot{J}_p = 0$ ). A compactação químico-mecânica se distribui ao longo das fases elástica-plástica-viscoplástica e elástica-viscoplástica. Em um período inferior a 10 Ma após o término da deposição material sedimentar, as componentes  $J$ ,  $J_{ir}$  e  $J_{vp}$  se estabilizam.

Tabela 45: respostas dos modelos M2 e MEF na base da bacia sedimentar.

$t$ (Ma)	$t=0$		$t=T^e=5.10$		$t=T^p=13.47$		$t=T^{vp}=41.19$		$t=T^s=60$		$t=T^f=120$	
parâmetro	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF	M2	MEF
$J$	1.00000	1.00000	0.99730	0.99758	0.55728	0.57000	0.34001	0.33962	0.29283	0.29041	0.28416	0.28319
$J_{ir}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.56123	0.57419	0.34749	0.34985	0.30226	0.30207	0.29331	0.29456
$J_p$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.56123	0.57419	0.38178	0.38243	0.38178	0.38236	0.38178	0.38236
$J_{vp}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.91018	0.91481	0.79173	0.79002	0.76827	0.77038
$\varphi$	0.72000	0.72000	0.72000	0.72000	0.50109	0.51227	0.19421	0.19965	0.07366	0.07305	0.04537	0.04942
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	800.00	800.00	802.16	800.00	1435.55	1393.26	2352.87	2286.69	2731.94	2648.42	2815.35	2715.93
$\sigma_v$ (MPa)	0.00000	0.00000	-4.00024	-3.59663	-10.51660	-10.08479	-32.31959	-31.49540	-47.07683	-45.76414	-47.07683	-45.77958
$\sigma_h$ (MPa)	0.00000	0.00000	-1.97027	-1.77148	-5.12991	-4.91916	-15.82728	-15.42121	-23.08372	-22.43640	-23.08112	-22.44183
$p_c$ (MPa)	4.00000	4.00000	4.00000	4.00000	10.51597	10.08369	32.31769	31.61289	59.13202	59.38780	73.79289	71.16116
$p_{vp}$ (MPa)	5.00000	5.00000	5.00000	5.00000	10.51683	10.18213	24.94335	24.52370	39.69972	39.83116	47.07401	45.77688
$p$ (MPa)	0.00000	0.00000	2.64692	2.37986	6.92547	6.64104	21.32472	20.77928	31.08142	30.21231	31.07969	30.22108
$q$ (MPa)	0.00000	0.00000	1.17200	1.05376	3.11001	2.98238	9.52185	9.28044	13.85243	13.46828	13.85393	13.47406
$K$ (MPa)	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39	980.39
$\mu$ (MPa)	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94	375.94

Tabela 46: diferenças relativas entre as respostas M2 e MEF.

$t$ (Ma)	$t=0$	$T^e = 5.10$	$T^p = 13.47$	$T^{vp} = 41.19$	$T^s = 60$	$T^f = 120$
$J$	0.00%	0.03%	2.28%	0.12%	0.83%	0.34%
$J_{ir}$	0.00%	0.00%	2.31%	0.68%	0.06%	0.43%
$J_p$	0.00%	0.00%	2.31%	0.17%	0.15%	0.15%
$J_{vp}$	0.00%	0.00%	0.00%	0.51%	0.22%	0.27%
$\varphi$	0.00%	0.00%	2.23%	2.80%	0.83%	8.92%
$\rho$	0.00%	0.27%	2.95%	2.81%	3.06%	3.53%
$\sigma_v$	*	10.09%	4.11%	2.55%	2.79%	2.76%
$\sigma_h$	*	10.09%	4.11%	2.57%	2.80%	2.77%
$p_c$	0.00%	0.00%	4.11%	2.18%	0.43%	3.57%
$p_{vp}$	0.00%	0.00%	3.18%	1.68%	0.33%	2.76%
$p$	*	10.09%	4.11%	2.56%	2.80%	2.76%
$q$	*	10.09%	4.10%	2.54%	2.77%	2.74%
$K$	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
$\mu$	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

\*divisão por zero

Tabela 47: respostas e diferenças relativas entre os modelos M2 e MEF na base da bacia sedimentar, em  $t=50.6$  Ma.

parâmetro	M2	MEF	dif. rel. %
$J$	0.30968	0.31324	1.15%
$J_{ir}$	0.31806	0.32425	1.95%
$J_p$	0.38178	0.38236	0.15%
$J_{vp}$	0.83311	0.84803	1.79%
$\varphi$	0.11967	0.13646	14.04%
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2583.35	2467.23	4.49%
$\sigma_v$ (MPa)	-39.69045	-38.63519	2.66%
$\sigma_h$ (MPa)	-19.45005	-18.93125	2.67%
$p_c$ (MPa)	45.24837	41.64892	7.95%
$p_{vp}$ (MPa)	32.31377	30.31732	6.18%
$p$ (MPa)	26.19685	25.49923	2.66%
$q$ (MPa)	11.68580	11.37607	2.65%
$K$ (MPa)	980.39	980.39	0.00%
$\mu$ (MPa)	375.94	375.94	0.00%

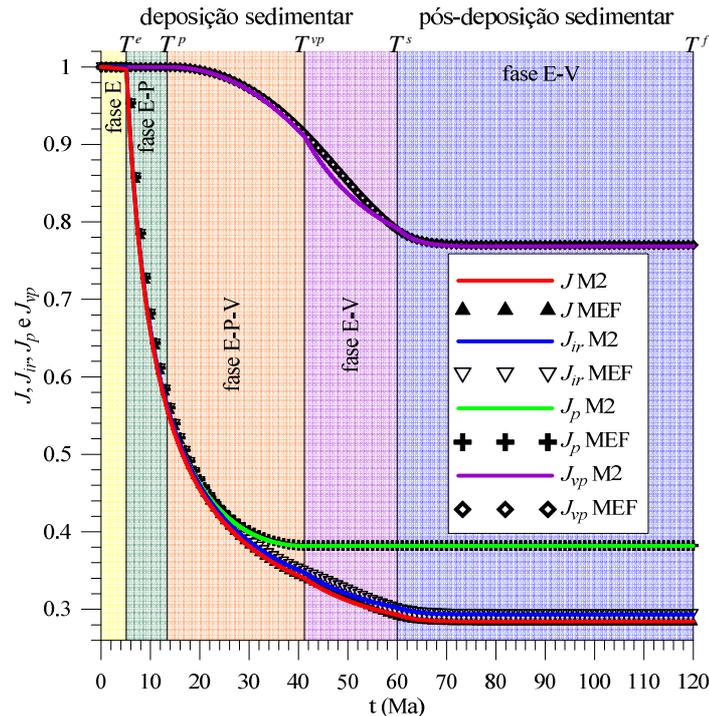


Figura 56: evoluções dos jacobianos na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

As evoluções da porosidade euleriana  $\varphi(x_3 = 0, t)$  e da massa específica  $\rho(x_3 = 0, t)$  são apresentadas na Figura 57 e na Figura 58, respectivamente. Conforme esperado, a redução da porosidade e o aumento da massa específica são consequências diretas do adensamento do material.

A evolução da porosidade euleriana apresenta boa aproximação entre os modelos M2 e MEF. Conforme a Tabela 47, uma diferença relativa de 14% (equivalente à  $\Delta\varphi=0.01679$ ) é observada durante a fase elástica-viscoplástica, consequência da hipótese de simplificação apresentada na seção 4.2.4). Já no período de pós-acreção, a diferença relativa máxima observada é inferior à 9%, que corresponde à  $\Delta\varphi=0.00405$ .

Para a avaliação da evolução da massa específica é necessário ressaltar uma diferença essencial para os dois modelos na forma de atualização dessa variável. No modelo M2, a massa específica é calculada através da dilatação volumétrica  $J = \Lambda$ , conforme a equação (3). Baseado na hipótese de elasticidade infinitesimal ( $J \approx J_{ir}$ ), o modelo MEF calcula a massa específica utilizando a componente irreversível da dilatação volumétrica  $J_{ir}$ . A sensível diferença observada na evolução de  $J$  e  $J_{ir}$  ocasiona as diferenças observadas entre as predições de  $\rho$

para os modelos M2 e MEF, que atingem diferenças relativas de 4.5% durante a fase elástica-viscoplástica (Tabela 47). De forma geral, todas as respostas do modelo MEF serão afetadas por essa diferença, em função do equilíbrio de forças.

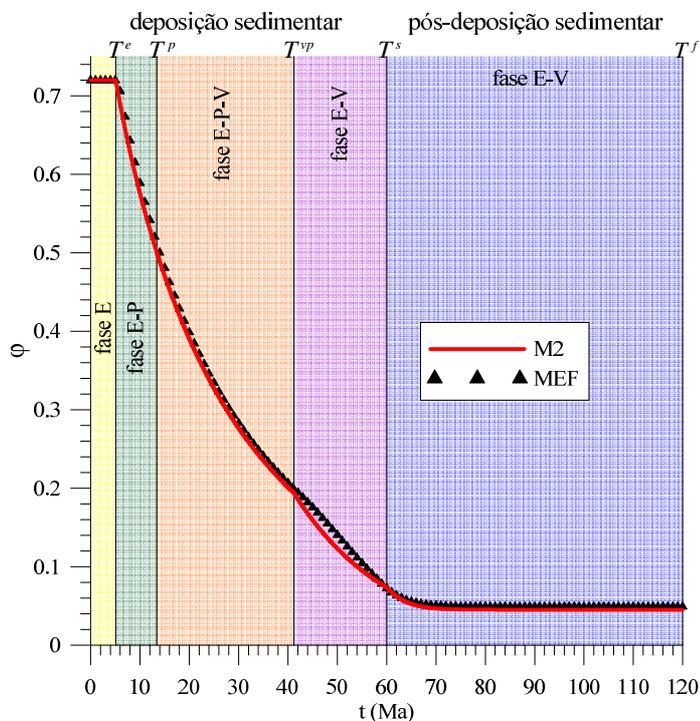


Figura 57: evolução da porosidade euleriana na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

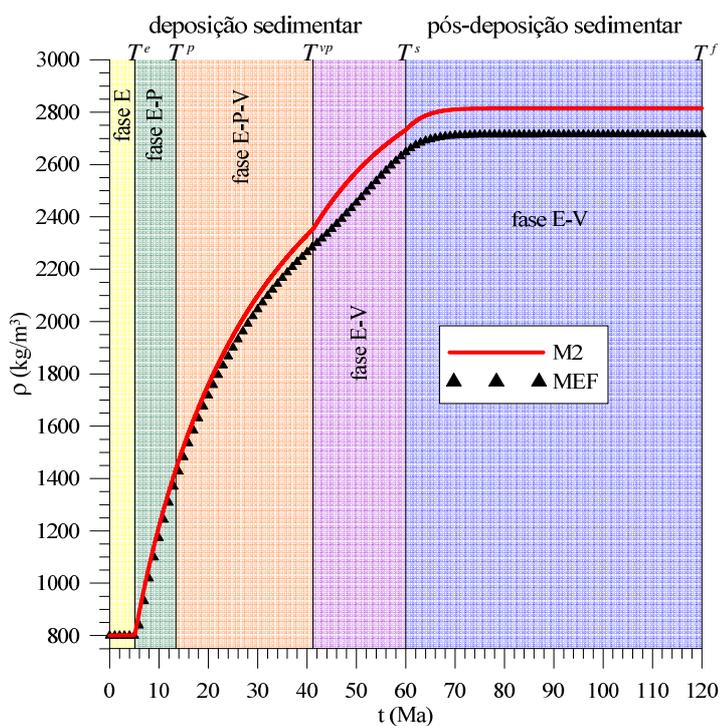


Figura 58: evolução da massa específica na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

As evoluções do estado de tensões  $\underline{\sigma}(x_3 = 0, t)$  e das pressões de consolidação  $p_c(x_3 = 0, t)$  e  $p_{vp}(x_3 = 0, t)$  apresentadas na Figura 59 e na Figura 60, respectivamente.

Como resultado direto da diferença observada na evolução da massa específica, as componentes vertical e horizontal de tensões do modelo MEF apresentam ligeira redução em suas intensidades. As diferenças relativas máximas observadas são inferiores à 3%, que equivale a diferenças inferiores à 1.5 MPa.

Já as pressões de consolidação plástica e viscoplástica do modelo MEF apresentam diferenças cuja origem está relacionada à evolução da porosidade euleriana. Na metade da fase elástica-viscoplástica do período de deposição sedimentar, a diferença relativa de 14% para a porosidade euleriana produz diferenças relativas inferiores à 8% nas pressões de consolidação. Já no período de pós-deposição sedimentar, as diferenças relativas são inferiores à 4%.

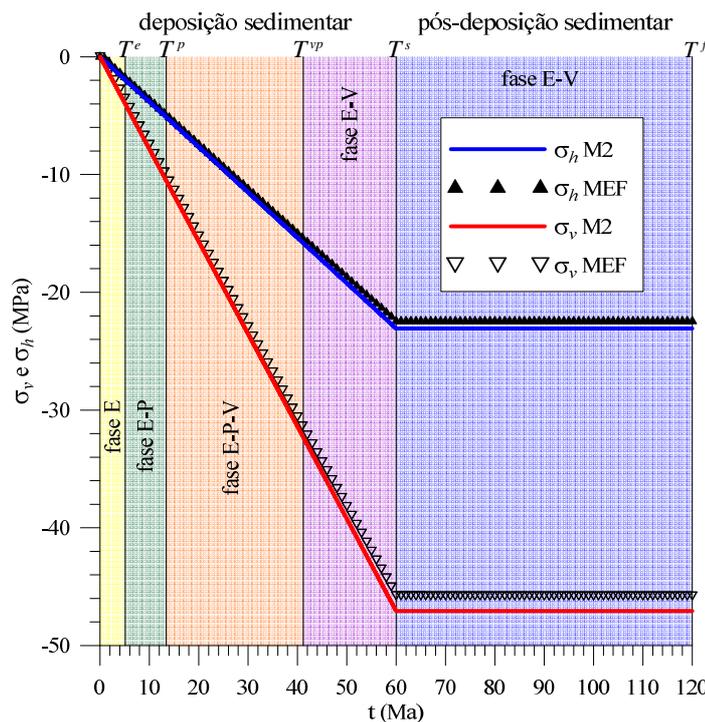


Figura 59: evoluções das tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

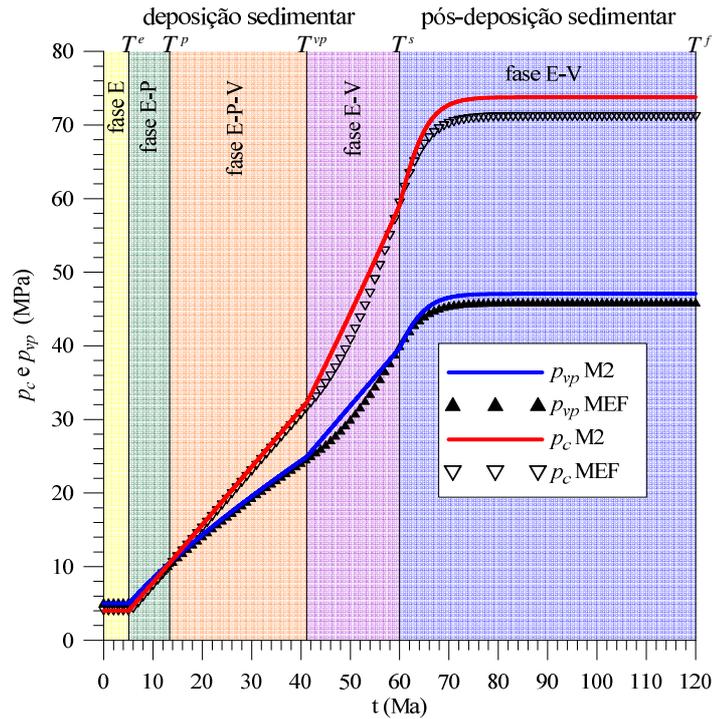


Figura 60: evoluções das pressões de consolidação plástica e viscoplástica na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

A trajetória de tensões e a evolução dos módulos de compressão e cisalhamento são apresentados na Figura 61 e na Figura 62, respectivamente. As trajetórias de tensões apresentam pequenas diferenças, que tem origem nas diferenças observadas na evolução das componentes vertical e horizontal de tensão do modelo MEF. Conforme esperado, os módulos de compressão e cisalhamento são idênticos para as respostas M2 e MEF, não apresentando variações.

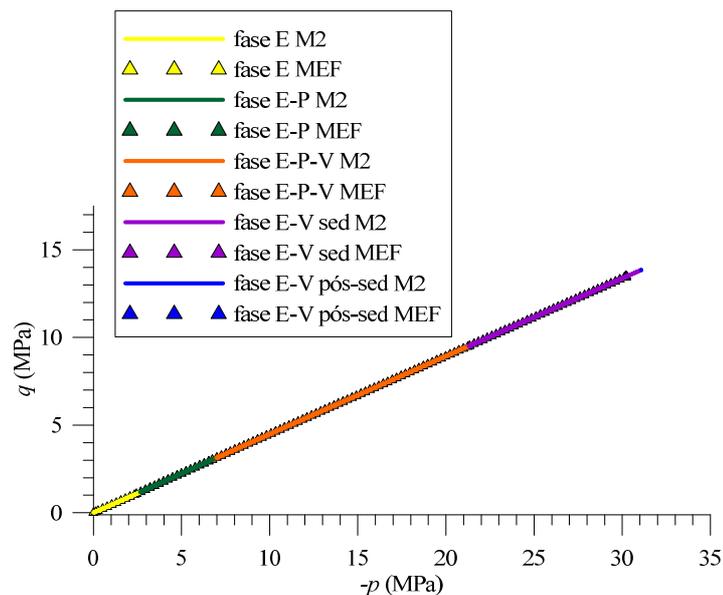


Figura 61: evolução da trajetória de tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

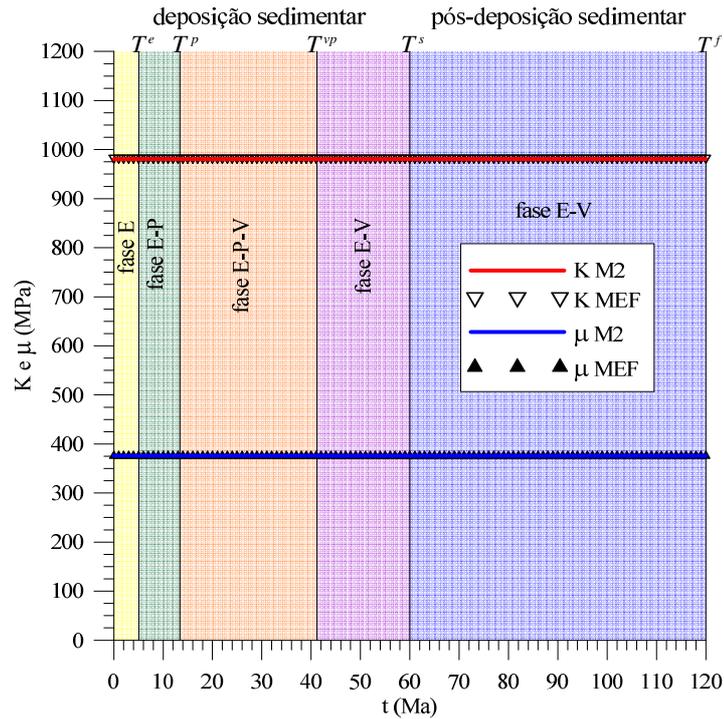


Figura 62: evoluções dos módulos de compressão e cisalhamento na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

Como parte da avaliação do processo de simplificação do modelo M2, proposto na seção 4.2.4, apresenta-se na Figura 63 a evolução do desvio para as partículas situadas na base da bacia sedimentar, conforme a definição apresentada na equação (171).

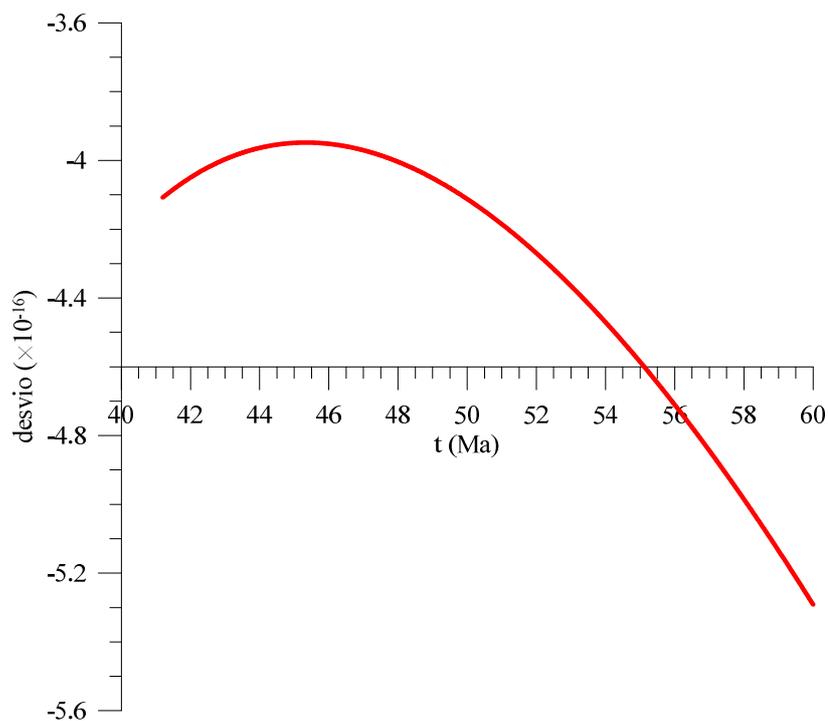


Figura 63: evolução do desvio na base da bacia sedimentar, para o modelo M2.

O desvio apresenta valores muito pequenos, da ordem de  $10^{-16}$ . Avaliando em conjunto a evolução do desvio na base da bacia sedimentar e as previsões dos modelos, verifica-se que a hipótese de simplificação proposta na seção 4.2.4 produz resultados satisfatórios para a análise em questão. Essa avaliação é estendida aos estudos do modelo M2, expostos nos capítulos 4 e 5, que apresentam evoluções dos desvios de mesma ordem ( $10^{-16}$ ). Baseado nessas ponderações, conclui-se que a simplificação proposta produz respostas satisfatórias à fase elástica-viscoplástica do modelo M2.

Adicionalmente, a evolução do critério viscoplástico é apresentada na Figura 64. A diferença observada na fase elástica-viscoplástica diz respeito à hipótese de simplificação, que impõe a condição  $\dot{f}^{vp} = 0$  ao modelo M2. Já o modelo MEF, que não utiliza essa simplificação, apresenta uma evolução suave e não-linear.

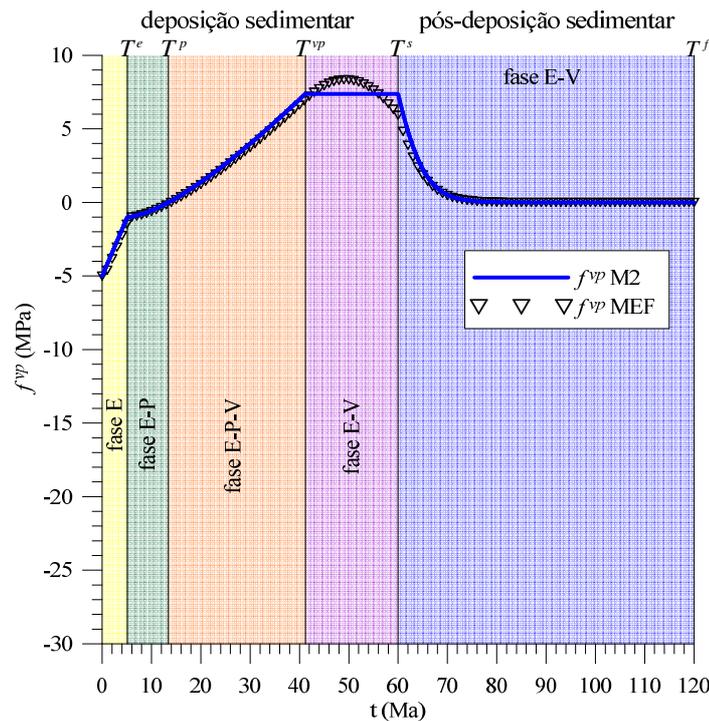


Figura 64: evoluções do critério viscoplástico na base da bacia sedimentar, para os modelos M2 e MEF.

## 6.5 ANÁLISE 2 – MÓDULOS ELÁSTICOS VARIÁVEIS

A segunda análise compara as respostas da solução semi-analítica do modelo M4 às previsões do simulador numérico de elementos finitos MEF. Os tempos de processamentos das análises são apresentados na Tabela 48.

Tabela 48: tempo total de análise dos modelos M4 e MEF (h).

	M4	MEF
tempo de análise	21.11	13.21

Nesse caso, o tempo total de análise da solução semi-analítica superou em 60% o tempo de processamento do modelo MEF. O menor tempo de processamento do modelo MEF está relacionado à discretização do modelo de elementos finitos, que é razoavelmente pequena (60 elementos finitos).

Na Figura 65, apresentam-se as leis de compactação gravitacional da bacia sedimentar  $t \rightarrow H(t)$  para os modelos M4 e MEF. A Tabela 49 apresenta um resumo dos tempos e alturas que caracterizam as fases e os domínios de comportamento das respostas, bem com as diferenças relativas.

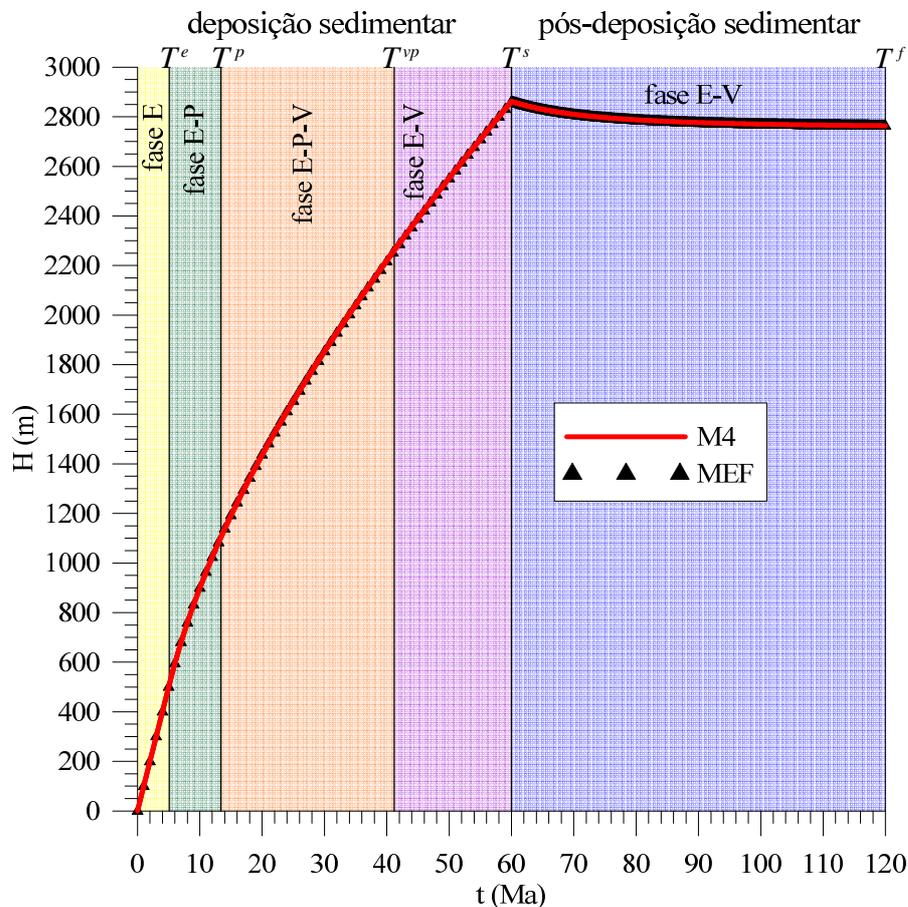


Figura 65: lei de compactação gravitacional da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.

Tabela 49: tempos e alturas que caracterizam o problema mecânico, para os modelos M4 e MEF.

	M4	MEF	diferença relativa
$T^e$ (Ma)	5.10	5.22	2.35%
$T^p$ (Ma)	13.47	13.55	0.59%
$T^{vp}$ (Ma)	41.19	40.90	0.70%
$H^e$ (m)	509.20	521.28	2.37%
$H^p$ (m)	1108.30	1112.56	0.38%
$H^{vp}$ (m)	2260.88	2247.36	0.60%
$H^s$ (m)	2861.84	2860.57	0.04%
$H^f$ (m)	2763.99	2762.95	0.04%

Assim como na análise da seção anterior, verifica-se que as predições dos modelos M4 e MEF apresentam boa proximidade. Mais uma vez, isso é um indicativo preliminar favorável à qualidade da hipótese simplificadora introduzida na seção 4.2.4 (relativo à fase elástica-viscoplástica do período de acreção de sedimentos). A maior diferença percentual observada foi de 2.37%, para a altura  $H^e$ .

As conclusões da análise anterior são extrapoladas à análise atual, sendo parte das diferenças relativas observadas creditadas à discretização espacial do modelo MEF. Os outros dois fatores, relativos às respostas avaliadas nos pontos de Gauss do modelo MEF e à hipótese simplificado do modelo M4, também desempenham significativo.

O nível de compactação da bacia sedimentar ao término do período de análise corresponde à 53.93%, inferior ao observado na análise anterior (54.39%). Esse resultado condiz com as observações do comportamento dos modelos M2 e M4, apresentadas no capítulo 5.

### 6.5.1 Análise global

As predições dos modelos M4 e MEF para o perfil de partículas da bacia sedimentar são apresentadas na Tabela 51 e na Tabela 52, para os tempos  $t = T^s$  e  $t = T^f$ , respectivamente. As respostas são apresentadas para as posições que dividem os domínios de comportamento do material sedimentar, referenciadas ao modelo M4 (conforme a Tabela 50). Adicionalmente, para os perfis no tempo  $t = T^s$ , apresentam-se as predições para a coordenada  $x_3 = 300.48\text{m}$ , que corresponde ao ponto médio da camada elasto-viscoplástica. As diferenças relativas entre

as previsões dos modelos M4 e MEF são apresentadas na Tabela 53 e na Tabela 54, para os tempos  $t = T^s$  e  $t = T^f$ , respectivamente.

Tabela 50: posições das fronteiras que dividem os domínios de comportamento do modelo M4 (m).

$x_3$	$t = T^s = 60 \text{ Ma}$	$t = T^f = 120 \text{ Ma}$
$H(t)$	2861.84	2763.99
$H(t) - H^e$	2352.64	2254.79
$H(t) - H^p$	1753.44	1655.69
$H(t) - H^{vp}$	600.96	*
base	0.00	0.00

\*fronteira inexistente no período de pós-acreção

A resposta global da bacia sedimentar é inicialmente apresentada da Figura 66 à Figura 68, que ilustram os perfis de jacobianos da transformação, da porosidade euleriana e da massa específica.

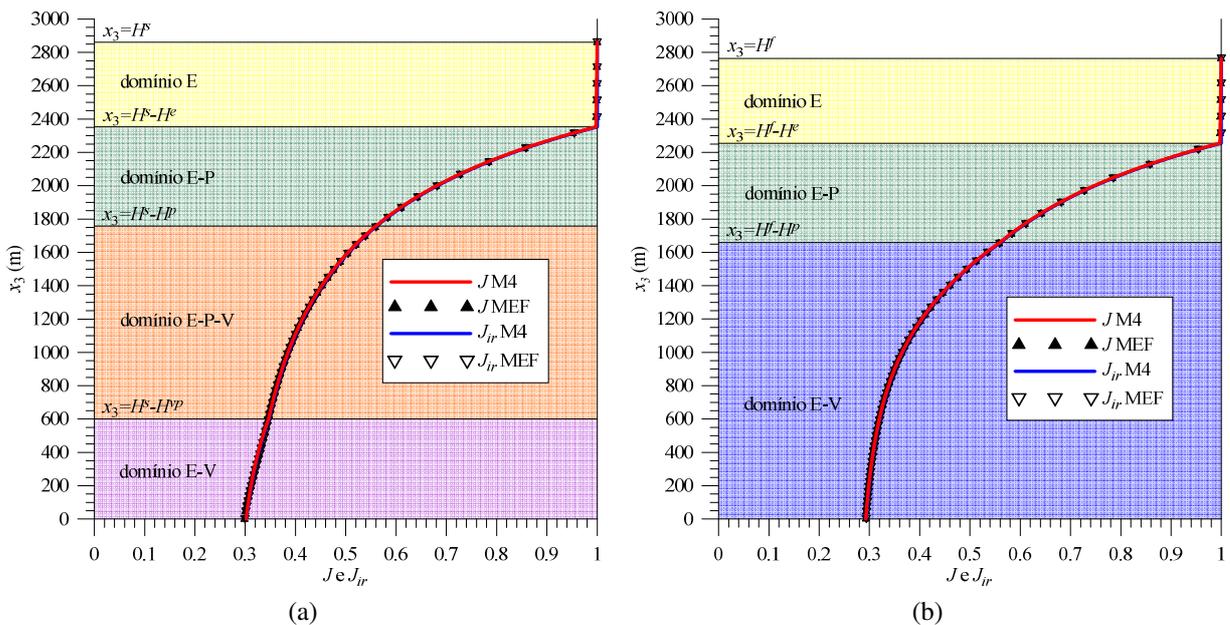


Figura 66: perfis de jacobianos da bacia sedimentar (a) em  $t=60 \text{ Ma}$  e (b) em  $t=120 \text{ Ma}$ .

Para o tempo  $t = T^s$ , as três variáveis apresentam boa proximidade entre as previsões do modelo M4 e MEF. No domínio elasto-viscoplástico, a hipótese de simplificação apresenta pequena influência sobre as respostas. A maior diferença relativa observada corresponde à porosidade euleriana na base da bacia, que apresenta valores inferiores à 12% (que corresponde à  $\Delta \varphi = 0.00876$ ). Dilatações volumétricas e massa específica apresentam diferenças relativas inferiores à 3%. Para o tempo  $t = T^f$ , as três variáveis apresentam diferenças relativas inferior-

res à 3%, à exceção da porosidade euleriana que reduz de 11.90% (para o tempo  $t=T^s$ ) para 3.59%.

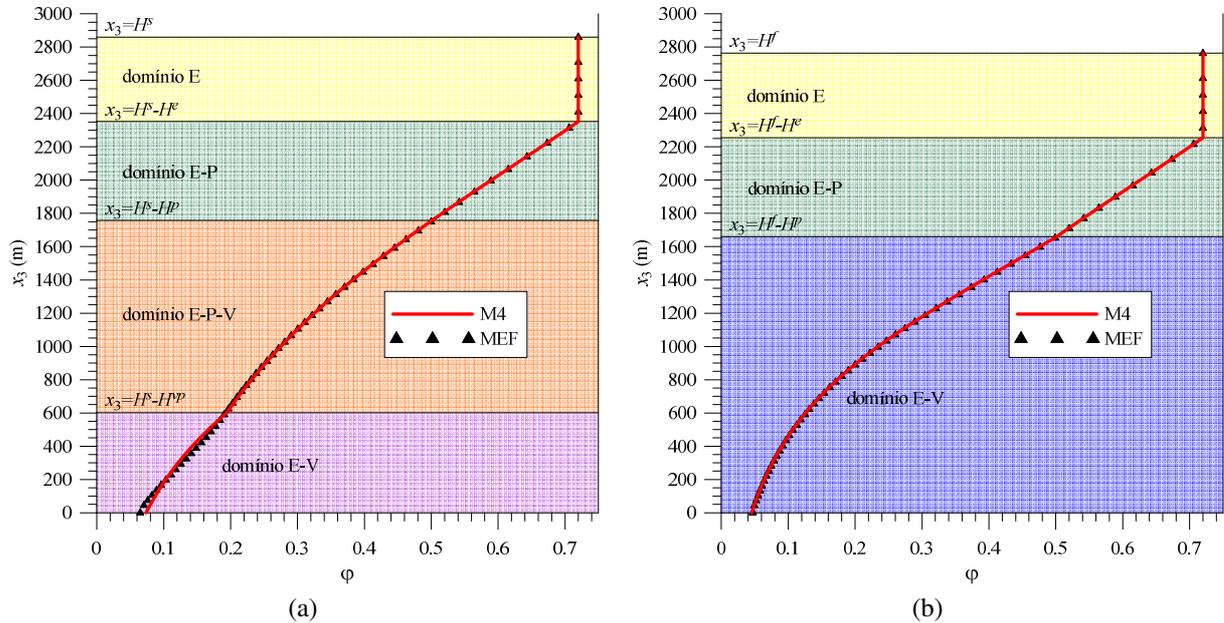


Figura 67: perfis de porosidade euleriana da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

Conforme observado anteriormente, a influência do adensamento sobre os módulos elásticos do material sedimentar atua favoravelmente em relação à hipótese das deformações elásticas infinitesimais. Esse efeito pode ser observado na proximidade das componentes  $J$  e  $J_{ir}$ . Os perfis da massa específica também comprovam esse efeito, apresentando uma boa proximidade entre os modelos M4 e MEF.

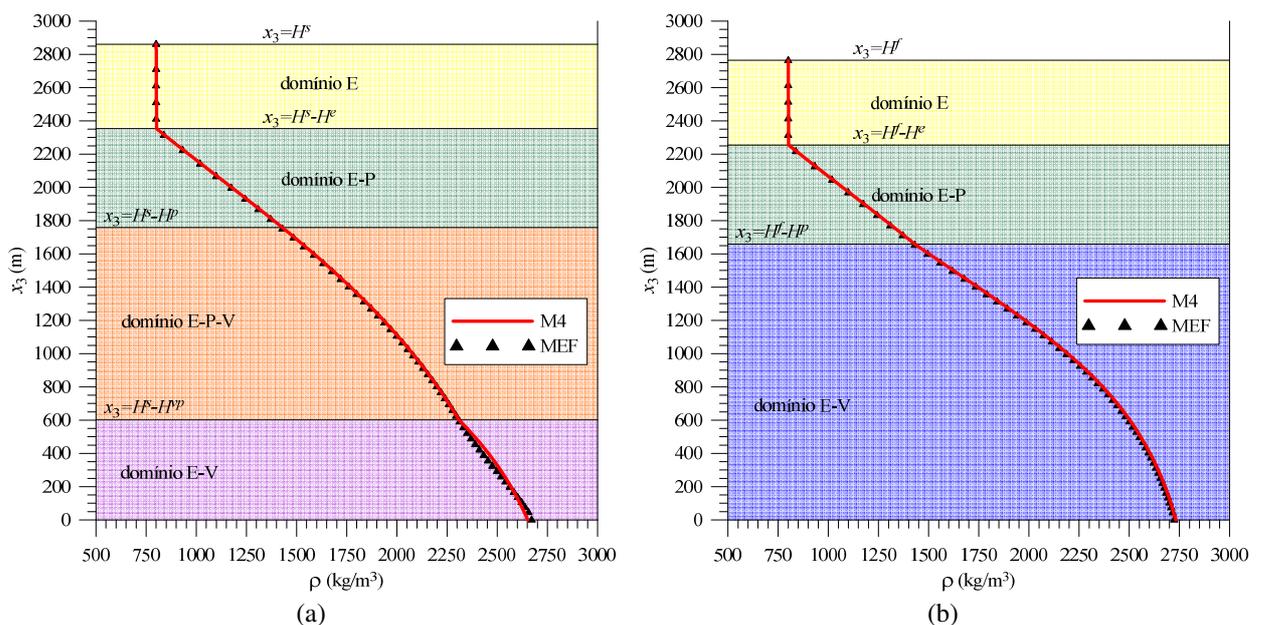


Figura 68: perfis de massa específica da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

Tabela 51: predições dos modelos M4 e MEF no perfil da bacia sedimentar em  $t=60$  Ma.

$x_3$ (m) parâmetro	0		300.48		$H^s - H^{vp} = 600.96$		$H^s - H^p = 1753.44$		$H^s - H^e = 2352.64$		$H^s = 2861.84$	
	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF
$J$	0.30165	0.29828	0.31789	0.31962	0.34612	0.34504	0.55713	0.55897	0.99704	0.96951	1.00000	0.99963
$J_{ir}$	0.30226	0.29943	0.31865	0.32106	0.34713	0.34673	0.55882	0.56064	0.99973	0.97210	1.00000	1.00000
$\varphi$	0.07365	0.06489	0.12130	0.12787	0.19339	0.19244	0.49894	0.50047	0.71993	0.71157	0.72000	0.72000
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2652.04	2671.73	2516.59	2491.77	2311.35	2307.31	1435.93	1427.01	802.38	823.38	800.00	800.00
$\sigma_v$ (MPa)	-47.07671	-46.52253	-39.48266	-39.27102	-32.38381	-32.21582	-10.60160	-10.54409	-4.00187	-4.00635	0.00000	-0.54327
$\sigma_h$ (MPa)	-39.20929	-39.14559	-31.01139	-30.61026	-23.48727	-23.37986	-5.90974	-5.87172	-1.97113	-1.98139	0.00000	-0.26758
$\sigma_h/\sigma_v$	0.83288	0.84143	0.78570	0.77946	0.72528	0.72573	0.55744	0.55687	0.49255	0.49456	*	0.49254
$p_c$ (MPa)	59.13480	62.90624	44.87238	43.43562	32.42680	32.55852	10.60106	10.54358	4.00164	4.19088	4.00000	4.00000
$p_{vp}$ (MPa)	39.70116	41.63428	32.10702	31.31210	25.00811	25.08577	10.58223	10.53740	5.00157	5.18099	5.00000	5.00000
$K$ (MPa)	20797.40	22656.08	14101.28	13472.14	9042.95	9091.49	2466.36	2452.21	980.75	1021.43	980.39	980.39
$\mu$ (MPa)	1772.60	1799.73	1630.31	1611.38	1430.78	1433.31	749.18	746.33	376.05	388.80	375.94	375.94

\*divisão por zero

Tabela 52: predições dos modelos M4 e MEF no perfil da bacia sedimentar em  $t=120$  Ma.

$x_3$ (m) parâmetro	0		$H^f - H^p = 1655.69$		$H^f - H^e = 2254.79$		$H^f = 2763.99$	
	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF
$J$	0.29286	0.29277	0.55672	0.55844	0.99704	0.96987	1.00000	0.99974
$J_{ir}$	0.29331	0.29381	0.55841	0.56011	0.99973	0.97245	1.00000	1.00000
$\varphi$	0.04537	0.04700	0.49857	0.49997	0.71993	0.71168	0.72000	0.72000
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2731.68	2722.86	1436.99	1428.39	802.38	823.09	800.00	800.00
$\sigma_v$ (MPa)	-47.07671	-46.54252	-10.60160	-10.53516	-4.00187	-4.00059	0.00000	-0.39220
$\sigma_h$ (MPa)	-40.38087	-40.04965	-5.91101	-5.86876	-1.97113	-1.97852	0.00000	-0.19317
$\sigma_h/\sigma_v$	0.85777	0.86050	0.55756	0.55706	0.49255	0.49456	*	0.49254
$p_c$ (MPa)	73.79685	72.71053	10.61579	10.56372	4.00164	4.18850	4.00000	4.00000
$p_{vp}$ (MPa)	47.07595	46.54168	10.59354	10.55274	5.00157	5.17874	5.00000	5.00000
$K$ (MPa)	28083.14	27542.57	2469.86	2456.91	980.75	1020.92	980.39	980.39
$\mu$ (MPa)	1861.35	1856.14	749.88	747.26	376.05	388.64	375.94	375.94

Tabela 53: diferenças relativas entre as respostas M4 e MEF em  $t=60$  Ma.

$x_3$ (m)	0	300.48	$H^s - H^{vp}$ =600.96	$H^s - H^p$ =1753.44	$H^s - H^e$ =2352.64	$H^s$ =2861.84
$J$	1.12%	0.54%	0.31%	0.33%	2.76%	0.04%
$J_{ir}$	0.94%	0.76%	0.12%	0.33%	2.76%	0.00%
$\varphi$	11.90%	5.42%	0.49%	0.31%	1.16%	0.00%
$\rho$	0.74%	0.99%	0.17%	0.62%	2.62%	0.00%
$\sigma_v$	1.18%	0.54%	0.52%	0.54%	0.11%	*
$\sigma_h$	0.16%	1.29%	0.46%	0.64%	0.52%	*
$\sigma_h/\sigma_v$	1.03%	0.79%	0.06%	0.10%	0.41%	*
$p_c$	6.38%	3.20%	0.41%	0.54%	4.73%	0.00%
$p_{vp}$	4.87%	2.48%	0.31%	0.42%	3.59%	0.00%
$K$	8.94%	4.46%	0.54%	0.57%	4.15%	0.00%
$\mu$	1.53%	1.16%	0.18%	0.38%	3.39%	0.00%

\*divisão por zero

Tabela 54: diferenças relativas entre as respostas M4 e MEF em  $t=120$  Ma.

$x_3$ (m)	0	$H^f - H^p =$ 1655.69	$H^f - H^e =$ 2254.79	$H^f =$ 2763.99
$J$	0.03%	0.31%	2.73%	0.03%
$J_{ir}$	0.17%	0.30%	2.73%	0.00%
$\varphi$	3.59%	0.28%	1.15%	0.00%
$\rho$	0.32%	0.60%	2.58%	0.00%
$\sigma_v$	1.13%	0.63%	0.03%	*
$\sigma_h$	0.82%	0.71%	0.37%	*
$\sigma_h/\sigma_v$	0.32%	0.09%	0.41%	*
$p_c$	1.47%	0.49%	4.67%	0.00%
$p_{vp}$	1.13%	0.39%	3.54%	0.00%
$K$	1.92%	0.52%	4.10%	0.00%
$\mu$	0.28%	0.35%	3.35%	0.00%

\*divisão por zero

A sequência de análise da resposta global da bacia sedimentar é apresentada da Figura 69 à Figura 71, que ilustram os perfis de tensões, da razão de tensões e pressões de consolidação.

No tempo  $t = T^s$ , os modelos M4 e MEF apresentam boa proximidade entre as predições para os perfis de tensões e razão de tensões. A maior diferença percentual é inferior à 1.30%. Os perfis das pressões de consolidação também apresentam boa proximidade, porém as diferenças relativas apresentam valores maiores, que são inferiores à 7% na base da bacia.

De forma geral, no tempo  $t = T^f$ , os dois modelos apresentam boa proximidade entre as respostas para todas as variáveis. As máximas diferenças relativas são inferiores à 5%, para todas as variáveis.

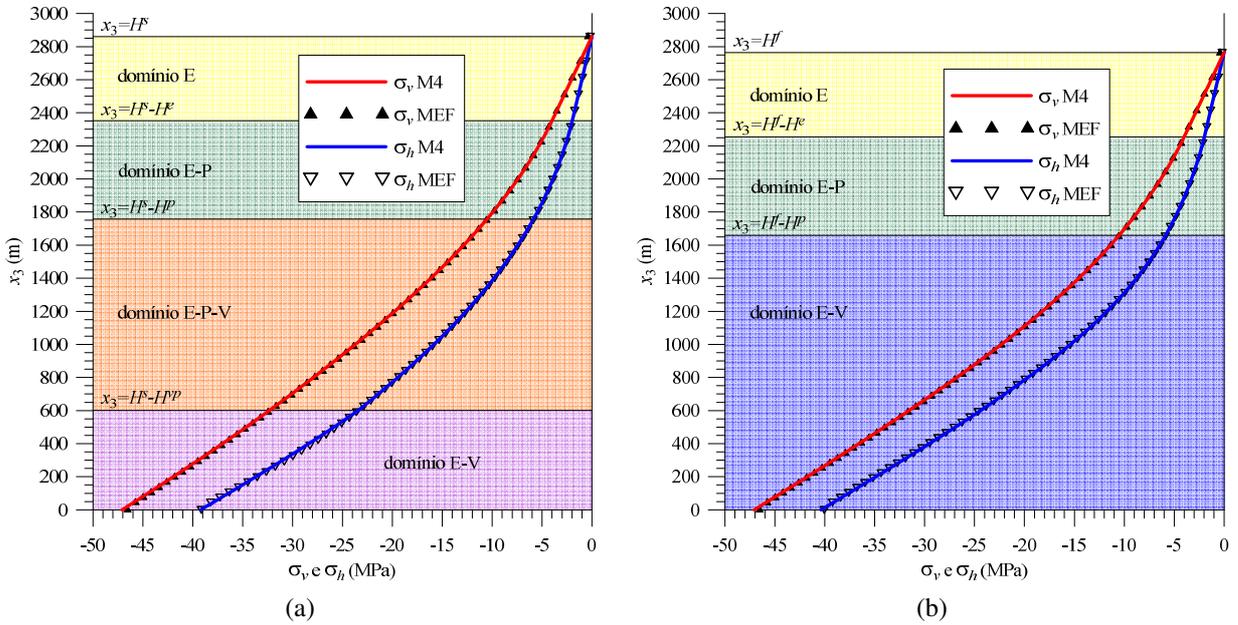


Figura 69: perfis de tensões da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

Para o modelo M4, as condições sobre  $a$  são muito complexas e não podem ser previamente determinadas. Assim, um valor é inicialmente fixado e a condição  $\sigma_h < 0$  é posteriormente determinada. Para a análise em questão, o valor de  $a$  promoveu um aumento na intensidade da componente horizontal de tensão no período de pós-sedimentação.

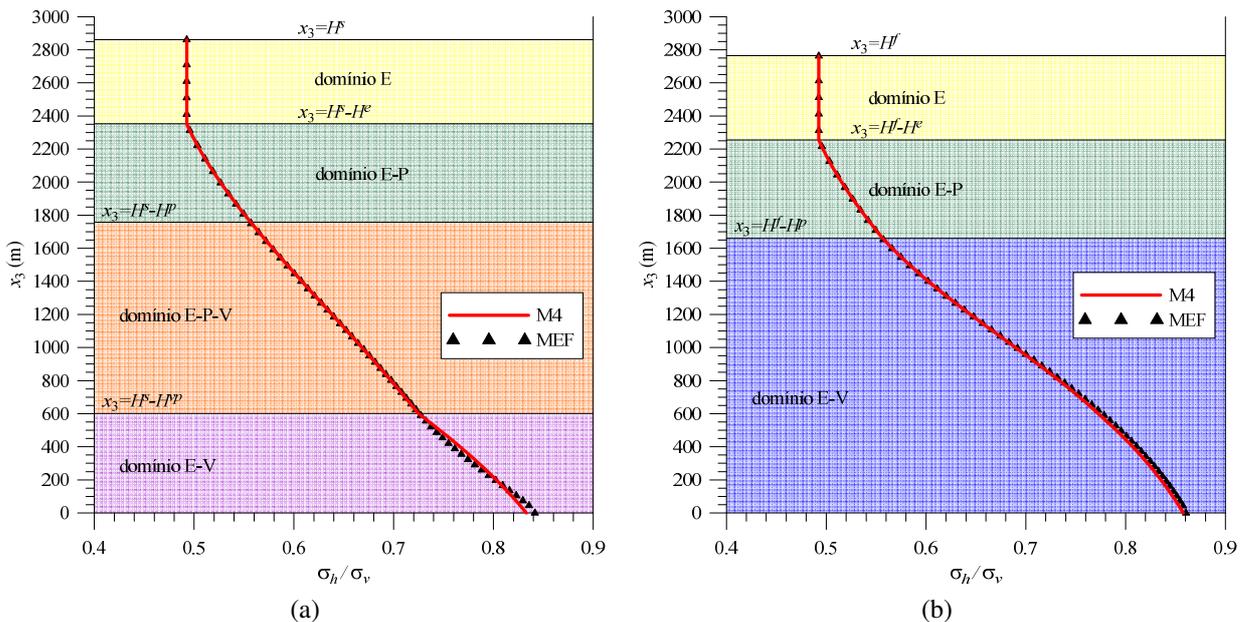


Figura 70: perfis das razões de tensões da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

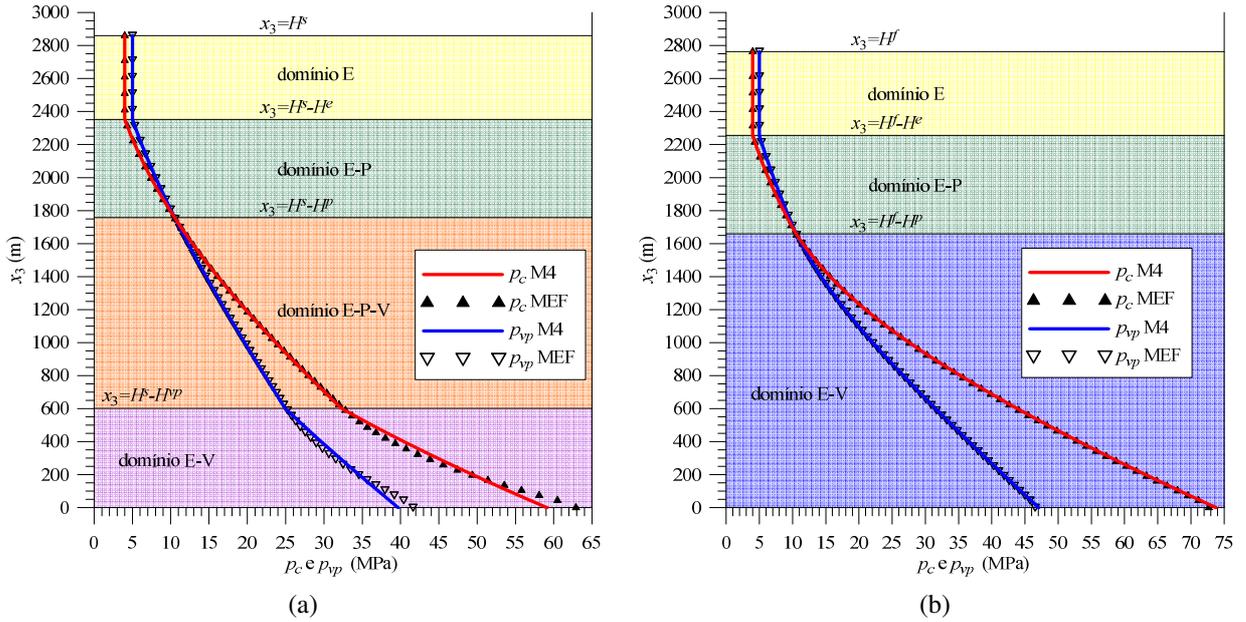


Figura 71: perfis das pressões de consolidação plástica e viscoplástica da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

Na Figura 72, apresenta-se os perfis para os módulos de compressão e cisalhamento da bacia sedimentar. As respostas dos dois modelos apresentam boa proximidade para ambas as variáveis. Os perfis ressaltam o aumento de rigidez do material sedimentar devido ao adensamento e a evolução dessas variáveis no período de pós-sedimentação.

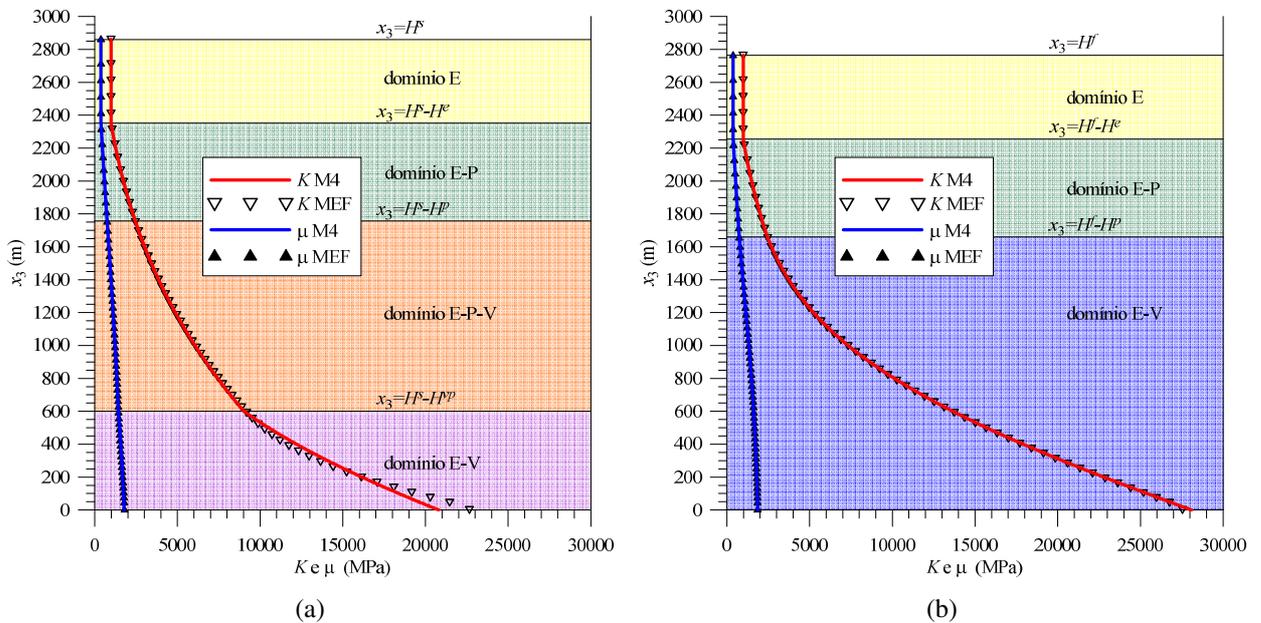


Figura 72: perfis dos módulos de compressão e cisalhamento da bacia sedimentar (a) em  $t=60$  Ma e (b) em  $t=120$  Ma.

## 6.5.2 Análise local

As predições dos modelos M4 e MEF para as partículas localizadas na base da bacia sedimentar são apresentadas na Tabela 55, para todos os tempos que delimitam as fases de comportamento da bacia sedimentar. Na Tabela 56, apresenta-se as diferenças relativas da resposta MEF em relação à M4. Na Tabela 57, apresenta-se uma compilação de respostas e diferenças relativas para o tempo  $t=50.6\text{Ma}$ .

A evolução temporal das componentes da dilatação volumétrica é apresentada na Figura 73. Como resultado da hipótese de simplificação, as respostas dos modelos apresentam sutis diferenças durante a fase elástica-viscoplástica. Na Tabela 57, observa-se diferenças percentuais máximas inferiores a 1.2%, na metade dessa fase.

Devido ao aumento de rigidez dos módulos elástico em função do adensamento do material, as respostas para  $J$  e  $J_{ir}$  são praticamente iguais. Essa característica reforça a validade da hipótese de elasticidade infinitesimal ( $J \approx J_{ir}$ ), sob a qual o modelo MEF está baseado.

Após o período de acreção de sedimentos, as componentes  $J$ ,  $J_{ir}$  e  $J_{vp}$  rapidamente se estabilizam. A componente irreversível da dilatação volumétrica apresenta o comportamento assintótico em relação ao seu valor crítico  $J_{ir} \rightarrow J_{ir}^{cr} = 0.28$ .

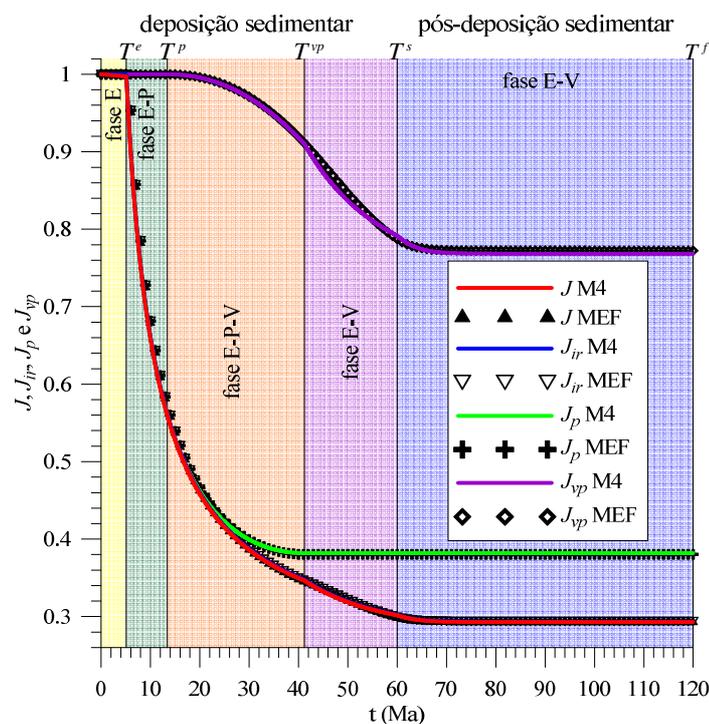


Figura 73: evoluções dos jacobianos na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.

Tabela 55: respostas dos modelos M4 e MEF na base da bacia sedimentar.

$t$ (Ma)	$t = 0$		$t = T^e = 5.10$		$t = T^p = 13.47$		$t = T^{vp} = 41.19$		$t = T^s = 60$		$t = T^f = 120$	
	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF	M4	MEF
$J$	1.00000	1.00000	0.99730	0.99758	0.55796	0.57013	0.34647	0.34498	0.30166	0.29829	0.29286	0.29277
$J_{ir}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.55965	0.57219	0.34748	0.34666	0.30226	0.29945	0.29331	0.29381
$J_p$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.55965	0.57219	0.38178	0.38034	0.38178	0.38034	0.38178	0.38034
$J_{vp}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.91018	0.91144	0.79173	0.78731	0.76827	0.77248
$\varphi$	0.72000	0.72000	0.72000	0.72000	0.49969	0.51057	0.19421	0.19229	0.07365	0.06494	0.04537	0.04700
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	800.00	800.00	802.16	800.00	1433.80	1398.14	2309.02	2307.73	2652.04	2671.60	2731.68	2722.86
$\sigma_v$ (MPa)	0.00000	0.00000	-4.00024	-3.59663	-10.57205	-10.15076	-32.31955	-31.81881	-47.07671	-46.50831	-47.07671	-46.54252
$\sigma_h$ (MPa)	0.00000	0.00000	-1.97027	-1.77148	-5.89027	-5.61282	-23.42074	-23.08703	-39.20928	-39.13123	-40.38087	-40.04965
$p_c$ (MPa)	4.00000	4.00000	4.00000	4.00000	10.57150	10.14921	32.31852	32.57487	59.13474	62.88484	73.79685	72.71053
$p_{vp}$ (MPa)	5.00000	5.00000	5.00000	5.00000	10.55953	10.23299	24.94385	25.09574	39.70113	41.62339	47.07595	46.54168
$p$ (MPa)	0.00000	0.00000	2.64692	2.37986	7.45086	7.12547	26.38701	25.99763	41.83175	41.59026	42.61281	42.21394
$q$ (MPa)	0.00000	0.00000	1.17200	1.05376	2.70302	2.61998	5.13773	5.04129	4.54227	4.25916	3.86585	3.74866
$K$ (MPa)	980.39	980.39	980.39	980.39	2459.33	2359.51	9002.98	9097.56	20797.38	22662.69	28083.14	27561.88
$\mu$ (MPa)	375.94	375.94	375.94	375.94	747.78	727.50	1428.61	1433.67	1772.59	1799.74	1861.35	1856.30

Tabela 56: diferenças relativas entre as respostas M4 e MEF.

$t$ (Ma)	$t = 0$	$T^e = 5.10$	$T^p = 13.47$	$T^{vp} = 41.19$	$T^s = 60$	$T^f = 120$
$J$	0.00%	0.03%	2.18%	0.43%	1.12%	0.03%
$J_{ir}$	0.00%	0.00%	2.24%	0.24%	0.93%	0.17%
$J_p$	0.00%	0.00%	2.24%	0.38%	0.38%	0.38%
$J_{vp}$	0.00%	0.00%	0.00%	0.14%	0.56%	0.55%
$\varphi$	0.00%	0.00%	2.18%	0.99%	11.83%	3.60%
$\rho$	0.00%	0.27%	2.49%	0.06%	0.74%	0.32%
$\sigma_v$	*	10.09%	3.98%	1.55%	1.21%	1.13%
$\sigma_h$	*	10.09%	4.71%	1.42%	0.20%	0.82%
$p_c$	0.00%	0.00%	3.99%	0.79%	6.34%	1.47%
$p_{vp}$	0.00%	0.00%	3.09%	0.61%	4.84%	1.13%
$p$	*	10.09%	4.37%	1.48%	0.58%	0.94%
$q$	*	10.09%	3.07%	1.88%	6.23%	3.03%
$K$	0.00%	0.00%	4.06%	1.05%	8.97%	1.86%
$\mu$	0.00%	0.00%	2.71%	0.35%	1.53%	0.27%

\*divisão por zero

Tabela 57: respostas e diferenças relativas entre os modelos M4 e MEF na base da bacia sedimentar, em  $t=50.6$  Ma.

parâmetro	M4	MEF	dif. rel. %
$J$	0.31729	0.31907	0.56%
$J_{ir}$	0.31805	0.32051	0.77%
$J_p$	0.38178	0.38034	0.38%
$J_{vp}$	0.83308	0.84267	1.15%
$\varphi$	0.11963	0.12636	5.63%
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2521.36	2496.08	1.00%
$\sigma_v$ (MPa)	-39.69429	-39.15910	1.35%
$\sigma_h$ (MPa)	-31.23918	-30.56944	2.14%
$p_c$ (MPa)	45.25722	43.75131	3.33%
$p_{vp}$ (MPa)	32.31864	31.48775	2.57%
$p$ (MPa)	34.05755	33.43266	1.83%
$q$ (MPa)	4.88156	4.95925	1.59%
$K$ (MPa)	14271.20	13610.98	4.63%
$\mu$ (MPa)	1635.16	1615.70	1.19%

As evoluções da porosidade euleriana  $\varphi(x_3 = 0, t)$  e da massa específica  $\rho(x_3 = 0, t)$  são apresentadas na Figura 74 e na Figura 75, respectivamente. A redução da porosidade euleriana e o aumento da massa específica, novamente, são consequências diretas do adensamento do material sedimentar.

Ao término do período de acreção, a porosidade euleriana apresenta a maior diferença percentual da análise, que é inferior à 12% (equivalente à  $\Delta\phi = 0.00871$ ). Devido à proximidade entre a dilatação volumétrica e a sua componente irreversível ( $J \approx J_{ir}$ ), a diferença relativa entre os modelos para a massa específica é inferior à 2.5% durante toda a análise.

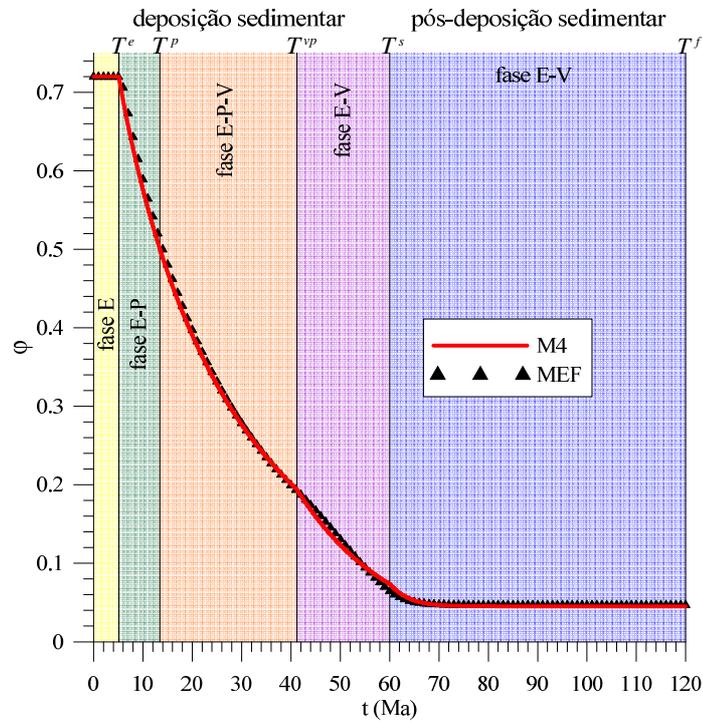


Figura 74: evolução da porosidade euleriana na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.

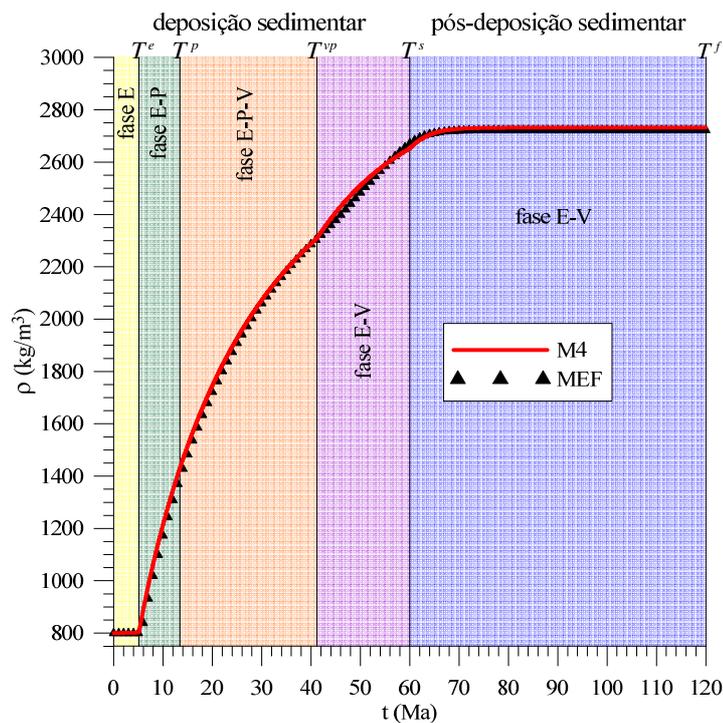


Figura 75: evolução da massa específica na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.

As evoluções do estado de tensões  $\underline{\sigma}(x_3 = 0, t)$  e das pressões de consolidação  $p_c(x_3 = 0, t)$  e  $p_{vp}(x_3 = 0, t)$  na base da bacia sedimentar são apresentadas na Figura 76 e na Figura 77, respectivamente.

De forma geral, os modelos M4 e MEF apresentam uma boa proximidade entre as previsões para as componentes de tensão. As maiores discrepâncias observadas dizem respeito aos tempos  $T^e$  e  $T^p$ . A diferença existente entre os modelos para o tempo  $T^e$ , aliada à atualização da massa por  $J_{ir}$  no modelo MEF, produzem pequenas diferenças que afetam o equilíbrio do modelo MEF. Em consequência, as respostas das componentes de tensão apresentam pequenas diferenças. Com o rápido decaimento na fase elástica-plástica, a componente irreversível da dilatação volumétrica  $J_{ir}$  apresenta uma pequena diferença relativa no tempo  $T^p$ , que novamente afetam a evolução da massa específica e do equilíbrio do modelo MEF.

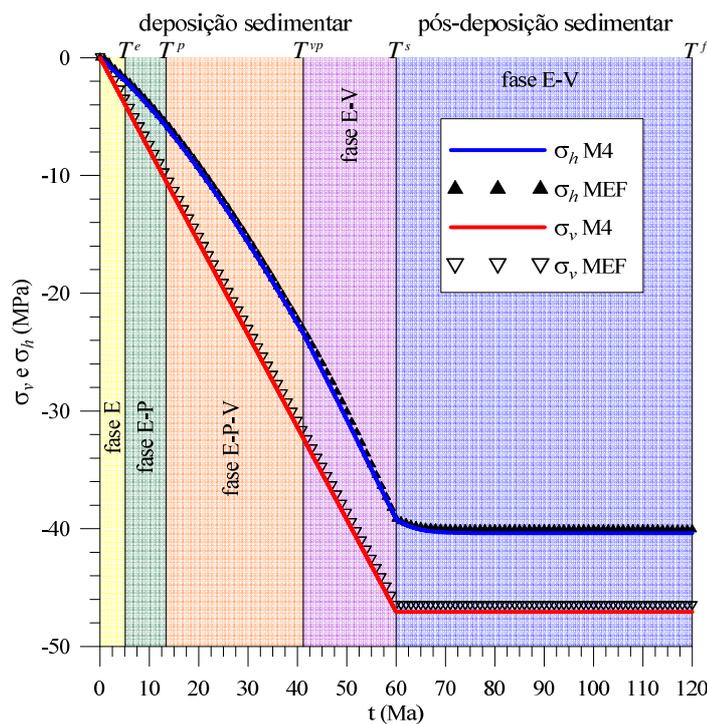


Figura 76: evoluções das tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.

As previsões dos modelos para as pressões de consolidação apresentam boa proximidade ao longo da análise. A maior diferença relativa observada (inferior à 7%) diz respeito à componente plástica, no final do período de deposição sedimentar.

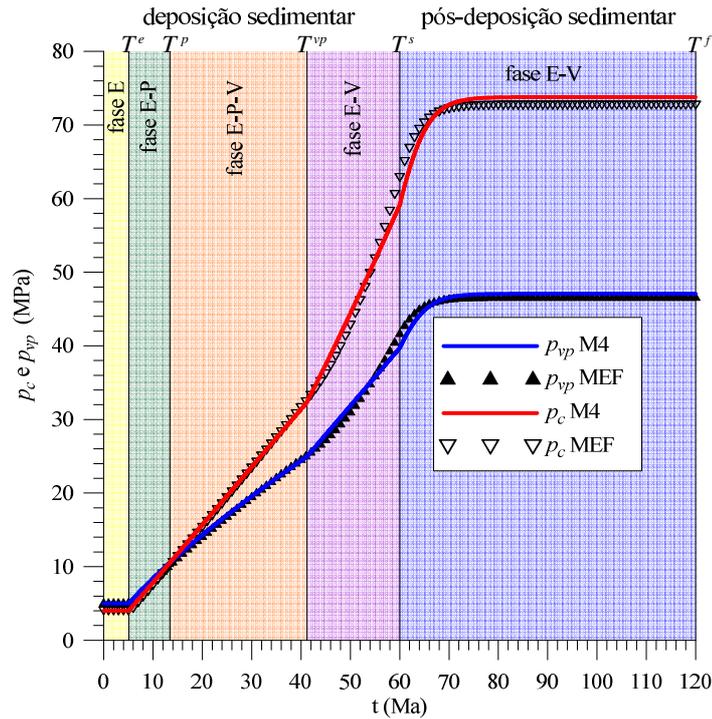


Figura 77: evoluções das pressões de consolidação plástica e viscoplástica na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.

A trajetória de tensões e a evolução dos módulos de compressão e cisalhamento são apresentados na Figura 78 e na Figura 79, respectivamente.

Assim como na análise anterior, as trajetórias de tensões apresentam pequenas diferenças relativas, inferiores à 5% (à exceção do tempo  $T^e$ , onde a diferença é de aproximadamente 10%). A causa dessas observações diz respeito às diferenças na evolução das componentes vertical e horizontal de tensão do modelo MEF.

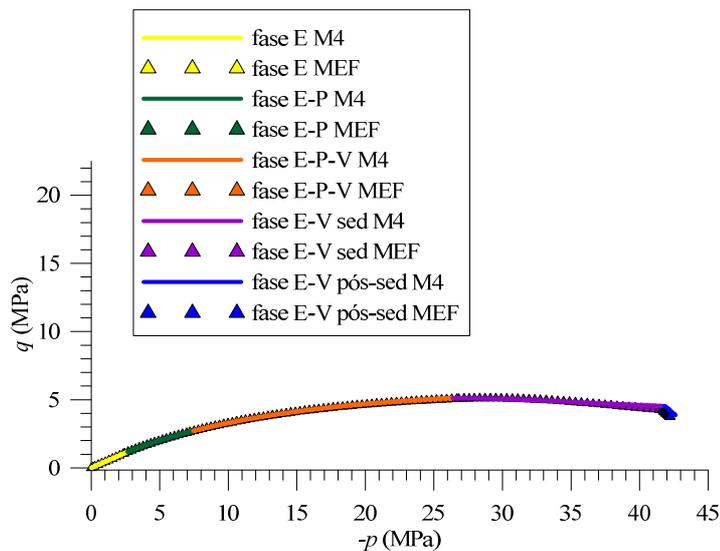


Figura 78: evolução da trajetória de tensões na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.

A evolução dos módulos de compressão e cisalhamento apresentam boa proximidade. Em específico, o módulo de compressão apresenta as maiores discordâncias. Ao longo da análise, as diferenças relativas são inferiores à 5%, à exceção do tempo final do período de acreção de sedimentos, onde a diferença relativa é de 9%. Já o módulo de cisalhamento apresenta diferenças inferiores à 3% ao longo da análise.

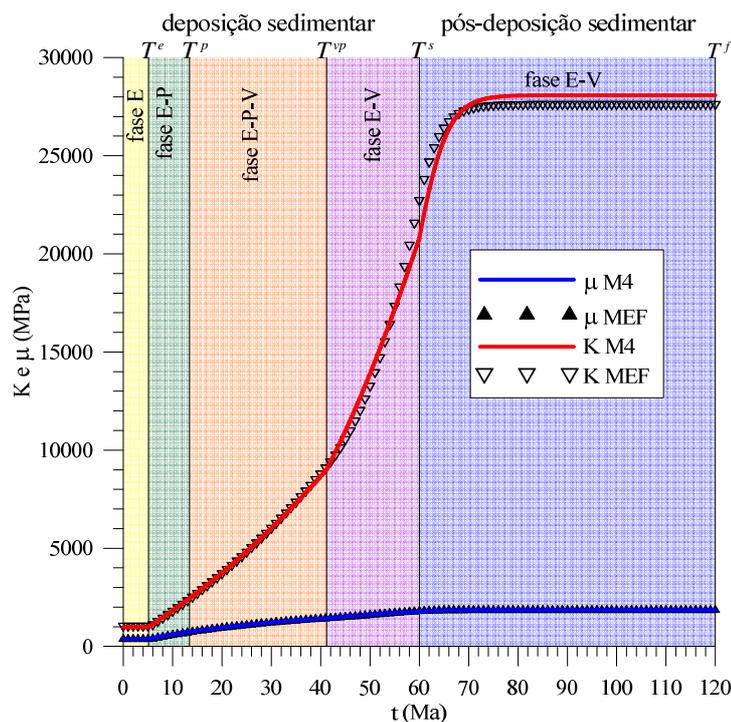


Figura 79: evoluções dos módulos de compressão e cisalhamento na base da bacia sedimentar, para os modelos M4 e MEF.

A primeira avaliação do processo de simplificação do modelo M4, proposto na seção 4.2.4, é apresentada na Figura 80, e trata sobre a evolução do desvio para as partículas situadas na base da bacia sedimentar, conforme a definição apresentada na equação (171).

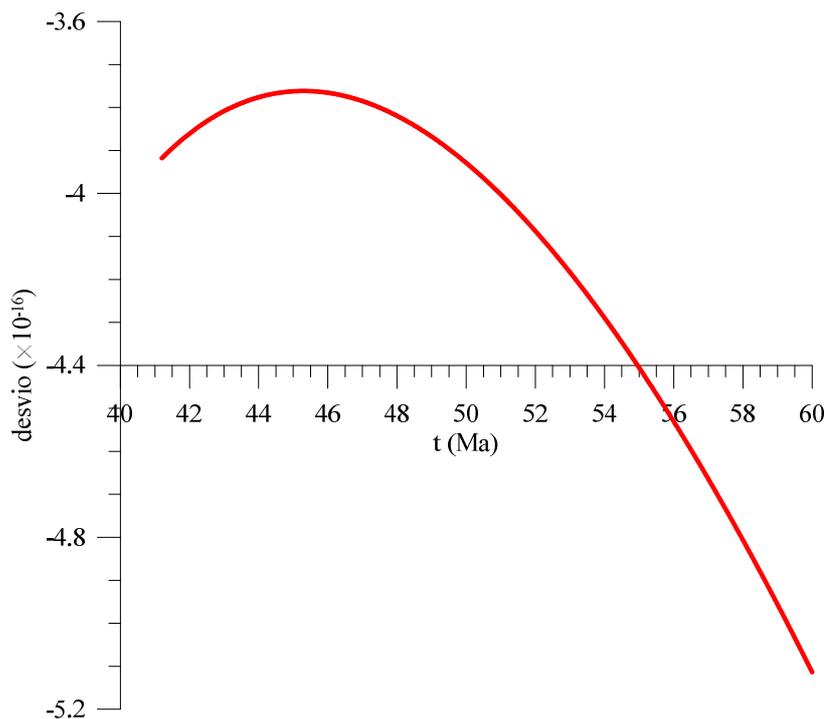


Figura 80: evolução do desvio na base da bacia sedimentar, para o modelo M4.

O desvio apresenta comportamento e valores próximos à análise do modelo M2, na seção 6.4. Da avaliação conjunta da evolução do desvio na base da bacia sedimentar e das previsões dos modelos, verifica-se que a hipótese de simplificação proposta na seção 4.2.4 produz resultados satisfatórios, que são melhores que os observados na seção 6.4.

Essa avaliação é estendida aos estudos do modelo M4, expostos no capítulo 5, que apresentam evoluções dos desvios de mesma ordem ( $10^{-16}$ ). Assim, conclui-se que a simplificação proposta produz respostas satisfatórias à fase elástica-viscoplástica do modelo M4.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente capítulo apresenta as conclusões acerca dos modelos desenvolvidos, bem como as sugestões para os trabalhos futuros a respeito da modelagem de soluções de referência para os processos de compactação em bacias sedimentares.

### 7.1 CONCLUSÕES

O trabalho abordou a formulação de soluções semi-analíticas para a simulação dos processos de sedimentação e compactação em bacias sedimentares em grandes deformações, que servem como referência e benchmarks de modelos e simuladores. O cenário teórico foi baseado em uma descrição simplificada dos processos geológicos, da geometria do problema e do comportamento constitutivo do material sedimentar. As equações de campo que descrevem a evolução do estado mecânico da bacia sedimentar foram descritas cuidadosamente e as soluções para os sistemas de equações diferenciais parciais foram obtidos utilizando os recursos do *software* MAPLE.

De fato, há uma lacuna de soluções de referência relevantes para o campo da simulação de bacias sedimentares que incorporem características essenciais da deformação dos sedimentos induzidas por processos de compactação. A esse respeito, ênfase especial foi dedicada à modelagem constitutiva, formulada ao nível do meio poroso, com o objetivo de considerar o aumento de rigidez e o endurecimento associados ao adensamento do material sedimentar.

Do ponto de vista do modelo constitutivo, a equação de estado do material sedimentar foi formulada no contexto do acoplamento plástico-viscoplástico em grandes deformações. Em escala macroscópica, a compactação puramente mecânica, que predomina nas camadas superiores de uma bacia sedimentar, foi modelada por meio de deformações plásticas independentes do tempo. Já a componente viscoplástica do comportamento se destinou a lidar com a deformação diferida, resultado da compactação químico-mecânica que prevalece em camadas mais profundas. A modelagem acoplada proposta é capaz de contabilizar automaticamente, através da componente irreversível do jacobiano da transformação, a deformação ao longo das camadas intermediárias, onde os dois processos de compactação ocorrem simultaneamente. Uma das principais vantagens da adoção do cenário oedométrico simplificado foi permitir a

investigação e a interpretação clara do papel de cada propriedade relevante do modelo na evolução mecânica da bacia sedimentar.

Embora as análises se refiram principalmente a problemas acadêmicos e não a bacias reais, as simulações mostraram-se capaz de capturar com precisão características fundamentais da deformação da bacia nos períodos acreção e pós-deposição sedimentar da bacia. As simulações abordaram a resposta geral da bacia, como a previsão da lei de compactação gravitacional, perfis de tensões e de porosidade, bem como a evolução no tempo dos parâmetros mecânicos relevantes na base da bacia.

O primeiro modelo desenvolvido, denominado M1, teve como propósito a obtenção de soluções analíticas que ilustrassem as variações espaciais e temporais dos parâmetros que caracterizam o comportamento mecânico da bacia sedimentar. A utilização de leis de endurecimento simplificadas, com módulos de endurecimento constantes, viabilizou o desenvolvimento analítico em detrimento de um comportamento físico mais próximo à realidade, como observado no valor assintótico da lei de compactação gravitacional na fase elástica-viscoplástica do período de acreção de sedimentos, na variação negativa da porosidade euleriana e no ilimitado aumento da massa específica. O modelo também ignorou qualquer efeito do adensamento sobre os módulos elásticos do material sedimentar.

O modelo M2 foi o primeiro a utilizar as leis de endurecimento plástico e viscoplástico baseadas na análise micromecânica, no contexto das grandes deformações irreversíveis, que previnem o desenvolvimento de porosidades negativas ao material sedimentar. A utilização dessas leis proporcionou ao modelo um comportamento físico mais próximo à realidade em detrimento à sua formulação, que passa a ter solução numérica. No período de deposição sedimentar, a solução numérica foi obtida a cada passo de tempo em um esquema incremental. Já no período de pós-sedimentação, a solução numérica foi obtida de forma contínua. A comparação entre as respostas M1 e M2 demonstrou a grande diferença de comportamento dos modelos. Tanto na análise local quanto na análise global as respostas M2 para a variação da porosidade euleriana e da massa específica apresentam tendências finitas aos seus valores, que correspondem às observações físicas. O modelo M2 apresentou uma sensível separação entre a dilatação volumétrica e a sua componente irreversível, evidenciando o início da perda de validade da hipótese de deformações elásticas infinitesimais. Essa ocorrência foi relacionada à ausência enrijecimento dos módulos elásticos em função do adensamento do material sedimentar.

Em adição às características do modelo M2, os modelos M3 e M4 incorporaram às suas formulações os efeitos do adensamento sobre os módulos elásticos do material sedimentar, decorrentes das grandes deformações. O modelo M3, que considerou apenas o efeito sobre os módulos de compressão e cisalhamento do material sedimentar, não possui justificativa teórica e foi apresentado apenas para demonstrar a evolução do comportamento entre as respostas M2 e M4. O modelo M4 considerou o efeito do adensamento do material sedimentar sobre os módulos de compressão e cisalhamento, bem como no termo adicional da equação de estado. A comparação entre as respostas M2, M3 e M4 demonstrou que o principal efeito produzido pelo adensamento se dá sobre o comportamento da componente horizontal de tensão, que apresenta intensidades maiores para o modelo M4. Para o modelo M2, observou-se que, em função do distanciamento entre a dilatação volumétrica e sua componente irreversível, a massa específica apresenta sensível diferença em relação aos modelos M3 e M4.

Com o objetivo de confirmar a correção e precisão dos modelos M2 e M4, suas as previsões foram comparadas às do simulador numérico de bacias sedimentares desenvolvido por Brüch (2016). O simulador (que incorpora em seu algoritmo os mesmos modelos utilizados para o desenvolvimento das soluções) atuou como uma ferramenta auxiliar, possibilitando a análise da qualidade da hipótese simplificadora da fase elástica-viscoplástica do período de acreção. Parte das diferenças observadas entre as respostas dos modelos M2, M4 e MEF foram associadas à discretização espacial do modelo numérico, à avaliação de respostas nos pontos de Gauss do modelo numérico e à hipótese simplificadora para ambos os modelos semi-analíticos.

A comparação entre as previsões dos modelos M2 e MEF revelou pequenas diferenças, que são associadas a um motivo adicional. Conforme observado, a ausência de enrijecimento dos módulos elásticos do material sedimentar no modelo M2 provoca um distanciamento entre a dilatação volumétrica e sua componente irreversível. Essa característica entra em conflito com a hipótese de deformações elásticas infinitesimais, utilizada pelo simulador numérico de elementos finitos para a atualização da massa específica em função da componente irreversível da dilatação volumétrica. Consequentemente, o equilíbrio de forças do modelo MEF é afetado, ocasionando pequenas diferenças em praticamente todas as respostas. Já a comparação entre as previsões dos modelos M4 (que incorpora os efeitos do adensamento sobre os módulos elásticos) e MEF apresentou boa proximidade, com diferenças relativas inferiores aos observados na comparação anterior. A dilatação volumétrica e sua componente irreversível

apresentam grande proximidade e, assim, os problemas relatados na comparação anterior não foram observados.

Todos os modelos desenvolvidos utilizaram a hipótese simplificadora para a obtenção da equação diferencial que descreve a variação da componente irreversível da dilatação volumétrica. A qualidade das respostas resultantes dessa hipótese foi avaliada pela união de duas metodologias. Inicialmente, foi calculado o desvio da expressão resultante da simplificação na equação diferencial original. Em todos os casos, os desvios calculados foram pequenos, da ordem de  $10^{-16}$ . No capítulo 5.3.2, os desvios dos modelos M2 e M4 foram confrontados com a qualidade das respostas obtidas, quando comparadas ao modelo MEF. Da análise das magnitudes dos desvios juntamente com boa proximidade entre as respostas semi-analíticas e numéricas, conclui-se que para todos os modelos desenvolvidos a hipótese de simplificação proposta na seção 4.2.4 produz resultados satisfatórios, que afetam muito pouco a precisão das previsões obtidas.

## 7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como extensões previstas para o futuro, destaca-se a importância de aproximar o modelo a situações mais realistas incorporando:

- O efeito do carregamento de tectônica aplicando, por exemplo, deslocamentos laterais prescritos, conforme Maghous *et al.* (2014);
- O efeito do campo geotérmico sobre a evolução das tensões e deformações, bem como sobre a sua influência sobre os parâmetros mecânicos, conforme a abordagem desenvolvida por Brüch *et al.* (2018);
- O desenvolvimento de leis micromecânicas que possibilitem descrever o comportamento do material devido a anisotropia induzida pelo processo de compactação;
- O acoplamento hidromecânico, considerando a influência do fluido sobre o comportamento do meio poroso;
- A simulação dos processos erosivos.

## REFERÊNCIAS

- AKAKI, T.; KIMOTO, S.; OKA, F. Chemo-thermo-mechanically coupled seismic analysis of methane hydrate-bearing sediments during a predicted Nankai Trough Earthquake. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2016.
- ALLEN, P. A.; ALLEN, J. R. **Basin analysis: principles and application**. 2. ed. [S.l.]: Blackwell Science Ltd, 2005.
- ALLEN, P. A.; ALLEN, J. R. **Basin analysis: principles and application to petroleum play assessment**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd., 2013.
- ANGEVINE, C. L.; TURCOTTE, D. L. Porosity reduction by pressure solution: a theoretical model for quartz arenites. **Geological Society of America Bulletin**, v. 94, p. 1129-1134, 1983.
- ATHY, L. F. Density, porosity and compaction of sedimentary rocks. **Bulletin of the American Association of Petroleum Geologists**, 14, n. 1, 1930.
- BARTHÉLÉMY, J.-F.; DORMIEUX, L.; MAGHOUS, S. Micromechanical approach to the modelling of compaction at large strains. **Computers and Geotechnics**, v. 30, p. 321-338, 2003.
- BERNAUD, D. et al. Evolution of elastic properties in finite poroplasticity and finite element analysis. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 26, p. 845-871, 2002.
- BERNAUD, D.; BUHAN, P. D.; MAGHOUS, S. Numerical simulation of the convergence of a bolt-supported tunnel through a homogenization method. **Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 19, p. 267-288, 1995.
- BERNAUD, D.; DORMIEUX, L.; MAGHOUS, S. A constitutive and numerical model for mechanical compaction in sedimentary basins. **Computers and Geotechnics**, 2006.
- BJORLYKKE, K. **Petroleum geoscience: from sedimentary environments to rock physics**. [S.l.]: Springer, 2010.
- BJORLYKKE, K. Relationships between depositional environments, burial history and rock properties. Some principal aspects of diagenetic process in sedimentary basins. **Sedimentary Geology**, v. 301, p. 1-14, 2014.
- BOER, R. B. On the thermodynamics of pressure solution – interaction between chemical and mechanical forces. **Geochimica et Cosmochimica Acta**, v. 41, p. 249-256, 1977.
- BOURGEOIS, E.; BUHAN, P. D.; DORMIEUX, L. Formulation d'une loi élastoplastique pour un milieu poreux saturé en transformation finie. **Comptes rendus de l'Académie des sci-ences. Série II: Mécanique, physique, chimie, astronomie**, 1995.
- BOURGEOIS, E.; DORMIEUX, L. Prise en compte des non-linéarités géométriques dans la modélisation de la compaction des sédiments. **Oil & Gas Science and Technology - Revue de l'Institut Français du Pétrole**, 1997.

- BRÜCH, A. et al. A constitutive model for mechanical and chemo-mechanical compaction in sedimentary basins and finite element analysis. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech**, 40, 2016. 2238–2270.
- BRÜCH, A. et al. A thermo-poro-mechanical constitutive and numerical model for deformation in sedimentary basins. **J. Pet. Sci.**, 2018. 313–326.
- BRÜCH, A. R. Simulação numérica tridimensional de processos de deformação em bacias sedimentares. **Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre**, Porto Alegre, p. 269, 2016.
- BRÜCH, A.; GUY, N.; MAGHOUS, S. Overpressure development in sedimentary basins induced by chemomechanical compaction of sandstones. **Marine and Petroleum Geology**, 23 March 2019. 14.
- BUIITER, S. J. H.; PFIFFNER, O. A.; BEAUMONT, C. Inversion of extensional sedimentary basins: a numerical evaluation of the localisation of shortening. **Earth and Planetary Science Letters**, 2009.
- CHAPMAN, B.; JOST, G.; PAS, R. V. D. **Using openmp: portable shared memory parallel programming**. Cambridge: The MIT Press, 2008.
- CHARLEZ, P. A.; FAIRHURST, C. **Rock mechanics**. [S.l.]: Paris : Editions Technip, v. 2, 1997.
- COUSSY, O. **Poromechanics**. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd., 2004.
- DEUDÉ, V. et al. Compaction process in sedimentary basins: the role of stiffness increase and hardening induced by large plastic strains. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, March 2004. 1279–1303.
- DHATT, G.; TOUZOT, G. **Une présentation de la méthode des éléments finis**. 2ème edition. ed. Paris: Maloine S.A. Éditeur, 1984.
- DIVINS, D. L. **Total sediment thickness of the world's oceans & marginal seas**. [S.l.]: NOAA National Geophysical Data Center, 2003.
- DORMIEUX, L.; KONDO, D.; ULM, F. -J. **Microporomechanics**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2006.
- DORMIEUX, L.; MAGHOUS, S. Poroelasticity and poroplasticity at large strains. **Oil & Gas Science and Technology**, v. 54, p. 773-784, 1999.
- DORMIEUX, L.; MAGHOUS, S. Evolution of elastic properties in finite poroplasticity. **Comptes Rendues de l'Académie des Sciences**, Paris, v. 328(IIb), p. 593-600, 2000.
- DURETZ, T. et al. Thermo-mechanical modeling of the obduction process based on the Oman Ophiolite case. **Gondwana Research**, 2016.
- GIBSON, R. E. The progress of consolidation in a clay layer increasing with time. **Géotechnique**, 1958.
- GILES, M. R. **Diagenesis: a quantitative perspective**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- GUNDERSEN, E. et al. Coupling between pressure solution creep and diffusive mass transport in porous rocks. **Journal of Geophysical Research**, v. 107, p. 1-19, 2002.

- GUNZBURGER, Y. Stress state interpretation in light of pressure-solution creep: numerical modelling of limestone in the Eastern Paris Basin, France. **Tectonophysics**, 2010.
- GUTIERREZ, M.; WANGEN, M. Modeling of compaction and overpressuring in sedimentary basins. **Marine and Petroleum Geology**, v. 22, p. 351-363, 2005.
- HAMILTON, E. L. Thickness and consolidation of deep-sea sediments. **Bulletin of the Geological Society of America**, November 1959. 1399-1424.
- HANAFY, E. A.; EMERY, J. J. Advancing face simulation of tunnel excavations and lining placement. **13th Canadian Rock Mechanics Symposium: Underground Rock Engineering**, p. 119-125, 1980.
- HANTSCHHEL, T.; KAUERAUF, A. **Fundamentals of basin and petroleum systems modeling**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2009.
- HASHIN, Z. Analysis of composite materials – a survey. **Journal of Applied Mechanics**, 1983.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, 1963.
- HEDBERG, H. D. Gravitational compaction of clays and shales. **American Journal of Science**, v. 31, p. 241-287, 1936.
- HERMANRUD, C. Basin modeling techniques – an overview. **Basin Modelling: Advances and Applications - Norwegian Petroleum Society**, 1993.
- HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. [S.l.]: Clarendon Press: Oxford, 1950.
- HU, D. W. et al. Evolution of poroelastic properties and permeability in damaged sandstone. **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, v. 47, p. 962-973, 2010.
- HUBBERT, M. K.; RUBEY, W. W. Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting, I. Mechanics of fluid-filled porous solids and its application to overthrust faulting. **Bulletin of the Geological Society of America**, 1959.
- HUECKEL, T.; HU, L. B.; HU, M. M. Coupled chemo-mechanics: a comprehensive process modeling for energy geotechnics. **Energy Geotechnics**, p. 25-34, 2016.
- JAROSINSKI, M. et al. Mechanics of basin inversion: finite element modeling of the Pannonian Basin system. **Tectonophysics**, 2011.
- LEHNER, F. K. A model for intergranular pressure solution in open systems. **Tectonophysics**, v. 245, p. 153-170, 1995.
- LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. **Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow**. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- MAGHOUS, S. A theoretical poro-elasto-visco-plastic model for mechanical and chemo-mechanical deformation in sedimentary basins. **Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, p. 331-349, 2009.

- MAGHOUS, S. et al. Two-dimensional finite element analysis of gravitational and lateral-driven deformation in sedimentary basins. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 38, p. 725-746, 2014.
- MAGHOUS, S.; DORMIEUX, L.; BARTHÉLÉMY, J. -F. Micromechanical approach to the strength properties of frictional geomaterials. **European Journal of Mechanics A/Solids**, 2009.
- MEER, S. D.; SPIERS, C. J. Uniaxial compaction creep of wet gypsum aggregates. **Journal of Geophysical Research**, v. 102, p. 875-891, 1997.
- MEER, S. D.; SPIERS, C. J.; PEACH, C. J. Kinetics of precipitation of gypsum and implications for pressure-solution creep. **Journal of the Geological Society**, v. 157, p. 269-281, 2000.
- MELLO, U. T.; RODRIGUES, J. R.; ROSSA, A. L. A control-volume finite-element method for three-dimensional multiphase basin modeling. **Marine and Petroleum Geology**, 2009.
- MEROI, E. A.; SCHREFLER, B.; ZIENKIEWICS, O. Large strain static and dynamic semisaturated soil behaviour. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 19, p. 81-106, 1995.
- NGUYEN, Q. S. On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration. **International Journal of Numerical Methods and Engineering**, 1977. 11:817-832.
- OBERKAMPF, W. L.; ROY, C. J. **Verification and validation in scientific computing**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- PERZYNA, P. Fundamental problems in viscoplasticity. **Advances in Applied Mechanics**, v. 9, p. 243-277, 1966.
- RENARD, F. et al. An integrated model for transitional pressure solution in sandstones. **Tectonophysics**, v. 312, p. 97-115, 1999.
- RUTTER, E. H. Pressure solution in nature, theory and experiment. **Journal of the Geological Society**, v. 140, p. 725-740, 1983.
- SCHMIDT, V.; MCDONALD, D. A. The role of secondary porosity in the course of sandstone diagenesis. **Aspects of Diagenesis**, v. 26, p. 175-207, 1979.
- SCHNEIDER, F. et al. Mechanical and chemical compaction model for sedimentary basin simulators. **Tectonophysics**, v. 263, p. 307-317, 1996.
- SCHNEIDER, F.; HAY, S. Compaction model for quartzose sandstones application to the Garn Formation, Haltenbanken, Mid-Norwegian Continental Shelf. **Marine and Petroleum Geology**, 2001.
- SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. New York: Springer, 1998.
- SMITH, J. E. The dynamics of shale compaction and evolution of fluid pressures. **Mathematical Geology**, 3, n. 3, 1971.
- STEPHENSON, R. Assumptions and observations in tectonic modelling of rift basins: some implications of thermo-isostasy, stress and rheology for intrabasinal structure. **Marine and Petroleum Geology**, v. 13, p. 437-445, 1996.

- TADA, R.; SIEVER, R. Pressure solution during diagenesis. **Annual Review of Earth and Planetary Sciences**, v. 17, p. 89-118, 1989.
- UNGERER, P. et al. Basin evaluation by integrated two-dimensional modeling of heat transfer, fluid flow, hydrocarbon generation and migration. **AAPG Bulletin**, 1990.
- WHITTAKER, J. M. et al. Global sediment thickness dataset updated for the Australian-Antarctic Southern Ocean. **Geochemistry, Geophysics, Geosystems**, v. 14(8), p. 3297-3305, 2013.
- YANG, X. S. Pressure solution in sedimentary basins: effect of temperature gradient. **Earth and Planetary Science Letters**, v. 176, p. 233-243, 2000.
- YÜKLER, M. A.; CORNFORD, C.; WELTE, D. Simulation of geologic, hydrodynamic, and thermodynamic development of a sediment basin – a quantitative approach. **Initial Reports of the Deep Sea Drilling Project**, 1979.
- ZAOUI, A. Continuum micromechanics: survey. **Journal of Engineering Mechanics**, 2002.
- ZHANG, X.; SPIERS, C. J. Compaction of granular calcite by pressure solution at room temperature and effects of pore fluid chemistry. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 42, p. 950-960, 2005.
- ZHAO, C. et al. Finite element modeling of fluid-rock interaction problems in pore-fluid saturated hydrothermal/sedimentary basins. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method v.1: the basis**. 5th ed. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- ZUO, Z. et al. Accumulation rates and sediment deposition in the northwestern Mediterranean. **Deep Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography**, v. 44, p. 597-609, 1997.

## APÊNDICE A

O simulador numérico utilizado corresponde ao desenvolvido por Brüch (2016).

### Discretização temporal

Dado o carácter transiente da condução de massa fluida através do material poroso, torna-se necessário a determinação da evolução temporal dos campos incógnitos. Supõe-se que os campos são conhecidos em um tempo  $t$ , e que se deseja calculá-los em um tempo  $t'$ , dado por:

$$t' = t + \delta t \quad (238)$$

O vetor deslocamento  $\underline{U}$ , determinado sobre o volume  $\Omega_t$ , é definido entre os tempos  $t$  e  $t'$  como:

$$\underline{U} = {}^{t'}\underline{x} - {}^t\underline{x} \quad (239)$$

onde  ${}^t\underline{x}$  e  ${}^{t'}\underline{x}$  são as coordenadas para uma determinada partícula do esqueleto nos respectivos tempos.

O gradiente de transformação  $\underline{\underline{G}}$  do esqueleto entre os tempos  $t$  e  $t'$  é definido como:

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{1}} + {}^t\nabla\underline{U} \quad (240)$$

Essa formulação corresponde ao método Lagrangeano atualizado. A Figura 81 ilustra o método, onde  $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{x}} \rightarrow \underline{\underline{x}'}}$ .

$$\Omega_{t'} = \det \underline{\underline{G}} \Omega_t = J_{t'} \Omega_t = J_{t'} J_{0t} \Omega_0 = J_{0t'} \Omega_0 \quad (241)$$

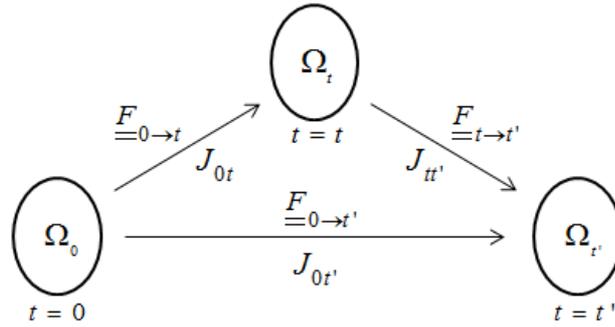


Figura 81: método Lagrangeano atualizado (BRÜCH, 2016).

Os gradientes em relação às configurações  $\Omega_t$  e  $\Omega_{t'}$  de uma grandeza escalar ou vetorial  ${}^t A$ , definida sobre a configuração  $t'$ , se relacionam por:

$${}^t \underline{\underline{\nabla}} {}^t A \stackrel{t'}{=} {}^t \underline{\underline{\nabla}} {}^t A \stackrel{t'}{\cdot} \underline{\underline{G}}^{-1} \quad (242)$$

Com o intuito de linearizar o tensor de transformação geométrica  $\underline{\underline{G}}$ , consideram-se incrementos de tempo  $\delta t$  para os quais o gradiente de deslocamento de uma partícula do esqueleto entre os tempos  $t$  e  $t'$  é muito pequeno, ou seja,  $|\underline{\underline{\nabla}} U| \ll 1$ . As seguintes aproximações de primeira ordem resultam dessa consideração:

$$\begin{cases} \underline{\underline{G}}^{-1} \approx \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\nabla}} U \\ \det \underline{\underline{G}}^{-1} \approx \underline{\underline{1}} - \text{tr} \underline{\underline{\nabla}} U \end{cases} \quad (243)$$

As variações do tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$ , da pressão  $p$  e da temperatura  $T$  entre  $t$  e  $t'$  são calculada de forma implícita, utilizando o método Euler backward:

$$\begin{cases} {}^t \underline{\underline{\sigma}} - {}^t \underline{\underline{\sigma}} = \delta t {}^t \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \\ {}^t p - {}^t p = \delta t {}^t \dot{p} = P \\ {}^t T - {}^t T = \delta t {}^t \dot{T} = \Theta \end{cases} \quad (244)$$

Os tensores taxa de deformação Euleriana  ${}^t \underline{\underline{d}}$  e taxa de rotação  ${}^t \underline{\underline{\Omega}}$  são aproximados como:

$$\begin{cases} {}^{t'}\underline{\underline{d}} = \frac{1}{\delta t} \{ {}^t \underline{\underline{\nabla U}} \}_s = \frac{1}{\delta t} \underline{\underline{\mathcal{E}}} \\ {}^{t'}\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{\delta t} \{ {}^t \underline{\underline{\nabla U}} \}_a \end{cases} \quad (245)$$

A lei de comportamento (57) pode ser reescrita como:

$$\frac{D_J \underline{\underline{\sigma}}^{ne}}{Dt} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{ne} + \underline{\underline{\sigma}}^{ne} \cdot \underline{\underline{\Omega}} - \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{ne} = \underline{\underline{\mathcal{C}}} : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^{ir}) + \underline{\underline{\dot{\mathcal{C}}}} : \underline{\underline{\mathcal{C}}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}^{ne} \quad (246)$$

onde  $\underline{\underline{\sigma}}^{ne} = \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{B}}p + \underline{\underline{K}}^m \Delta T$  representa uma generalização termoporoelástica da tensão efetiva de Biot.

Para um material isotrópico na configuração relaxada  $d\Omega_u$ , o tensor de segunda ordem de Biot tem a seguinte forma  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}}^{ir}) = b \underline{\underline{1}}$ , enquanto o tensor dos coeficientes térmicos do esqueleto é dado por  $\underline{\underline{K}}^m = \underline{\underline{K}}^m(\underline{\underline{F}}^{ir}) = 3K\alpha^s \underline{\underline{1}}$ . Os termos  $\underline{\underline{F}}^{ir}$ ,  $b$  e  $\alpha^s$  correspondem ao gradiente de transformação irreversível, ao coeficiente de Biot e ao coeficiente de dilatação térmica relacionado à porosidade, respectivamente.

A derivada temporal da tensão efetiva de Biot  $\underline{\underline{\sigma}}^{ne}$  é definida como:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{ne} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \dot{b}p \underline{\underline{1}} + b\dot{p} \underline{\underline{1}} + 3\dot{K}\alpha^s \Delta T \underline{\underline{1}} + 3K\dot{\alpha}^s \Delta T \underline{\underline{1}} + 3K\alpha^s \dot{T} \underline{\underline{1}} \quad (247)$$

Da análise dos termos dos produtos entre a tensão efetiva de Biot e o tensor taxa de rotação e da substituição da expressão anterior em (246), resulta:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} &= \underline{\underline{\dot{\mathcal{C}}}} : \underline{\underline{\mathcal{C}}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}^{ne} + \underline{\underline{\mathcal{C}}} : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^{ir}) - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \\ &- \dot{b}p \underline{\underline{1}} - b\dot{p} \underline{\underline{1}} - 3\dot{K}\alpha^s \Delta T \underline{\underline{1}} - 3K\dot{\alpha}^s \Delta T \underline{\underline{1}} - 3K\alpha^s \dot{T} \underline{\underline{1}} \end{aligned} \quad (248)$$

Essa expressão é reescrita para o tempo  $t'$ , onde  ${}^{0t'}\Delta T = {}^{t'}T - T_0$ :

$$\begin{aligned}
{}^t\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = & {}^t\dot{\underline{\underline{C}}}: {}^t\underline{\underline{C}}^{-1}: {}^t\underline{\underline{\sigma}}^{ne} + {}^t\underline{\underline{C}}:({}^t\underline{\underline{d}} - {}^t\underline{\underline{d}}^{ir}) - {}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{\Omega}} + {}^t\underline{\underline{\Omega}} \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}} - {}^t\dot{b}^t p \underline{\underline{1}} \\
& - {}^t\dot{b}^t \dot{p} \underline{\underline{1}} - 3 {}^t\dot{K}^t \alpha^s \text{}^{0t} \Delta T \underline{\underline{1}} - 3 {}^t K^t \dot{\alpha}^s \text{}^{0t} \Delta T \underline{\underline{1}} - 3 {}^t K^t \alpha^s \text{}^t \dot{T} \underline{\underline{1}}
\end{aligned} \tag{249}$$

Substituindo a variação do tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  entre  $t$  e  $t'$  definido em (244):

$$\begin{aligned}
{}^t\underline{\underline{\sigma}} = & {}^t\underline{\underline{\sigma}} + \delta t \left[ {}^t\dot{\underline{\underline{C}}}: {}^t\underline{\underline{C}}^{-1}: {}^t\underline{\underline{\sigma}}^{ne} + {}^t\underline{\underline{C}}:({}^t\underline{\underline{d}} - {}^t\underline{\underline{d}}^{ir}) \right. \\
& \left. - {}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{\Omega}} + {}^t\underline{\underline{\Omega}} \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}} - {}^t\dot{b}^t p \underline{\underline{1}} - {}^t b^t \dot{p} \underline{\underline{1}} \right. \\
& \left. - 3 {}^t\dot{K}^t \alpha^s \text{}^{0t} \Delta T \underline{\underline{1}} - 3 {}^t K^t \dot{\alpha}^s \text{}^{0t} \Delta T \underline{\underline{1}} - 3 {}^t K^t \alpha^s \text{}^t \dot{T} \underline{\underline{1}} \right]
\end{aligned} \tag{250}$$

São definidos os seguintes termos:

$$\left\{ \begin{aligned}
\delta t {}^t\dot{\underline{\underline{C}}} = & {}^t \Delta \underline{\underline{C}} = {}^t \underline{\underline{C}} - {}^t \underline{\underline{C}} \\
\delta t {}^t \underline{\underline{d}}^p = & \underline{\underline{\mathcal{E}}}^p = \delta t \left[ \dot{\chi} \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^p} \right] \\
\delta t {}^t \underline{\underline{d}}^{vp} = & \underline{\underline{\mathcal{E}}}^{vp} = \delta t \left[ \frac{1}{\eta_{vp}} \left\langle \frac{p_{vp}^d}{p_{vp}^s} - 1 \right\rangle^n \frac{\partial f_{vp}^d}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^p} \right] \\
\delta t {}^t \dot{b} = & {}^t \Delta b = {}^t b - {}^t b \\
\delta t {}^t \dot{K} = & {}^t \Delta K = {}^t K - {}^t K \\
\delta t {}^t \dot{\alpha}^s = & {}^t \Delta \alpha^s = {}^t \alpha^s - {}^t \alpha^s
\end{aligned} \right. \tag{251}$$

Substituindo (244), (245) e (251) em (250), tem-se:

$$\begin{aligned}
{}^t\underline{\underline{\sigma}} = & {}^t\underline{\underline{\sigma}} + {}^t \Delta \underline{\underline{C}}: {}^t\underline{\underline{C}}^{-1}: {}^t\underline{\underline{\sigma}}^{ne} + {}^t\underline{\underline{C}}:\left\{ {}^t \nabla(\underline{\underline{U}}) \right\}_s - {}^t\underline{\underline{C}}:\underline{\underline{\mathcal{E}}}^p - {}^t\underline{\underline{C}}:\underline{\underline{\mathcal{E}}}^{vp} \\
& - {}^t\underline{\underline{\sigma}} \cdot \left\{ {}^t \nabla(\underline{\underline{U}}) \right\}_a + \left\{ {}^t \nabla(\underline{\underline{U}}) \right\}_a \cdot {}^t\underline{\underline{\sigma}} - {}^t \Delta b p \underline{\underline{1}} - {}^t \Delta b^t p \underline{\underline{1}} - {}^t b p \underline{\underline{1}} \\
& - 3 {}^t \Delta K^t \alpha^s \text{}^{0t} \Delta T \underline{\underline{1}} - 3 {}^t K^t \Delta \alpha^s \text{}^{0t} \Delta T \underline{\underline{1}} - 3 {}^t K^t \alpha^s \text{}^t \Theta \underline{\underline{1}}
\end{aligned} \tag{252}$$

Os termos  ${}^t\underline{\underline{\sigma}}$  do lado direito da expressão anterior são aproximados por  ${}^t\underline{\underline{\sigma}}$ , resultando na expressão final:

$$\begin{aligned}
{}^t \underline{\underline{\sigma}} \approx {}^t \underline{\underline{\sigma}} + {}^t \Delta \underline{\underline{C}} : {}^t \underline{\underline{C}}^{-1} : {}^t \underline{\underline{\sigma}}^{ne} + {}^t \underline{\underline{C}} : \left\{ {}^t \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{U}}) \right\}_s - {}^t \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\mathcal{E}}}^p - {}^t \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\mathcal{E}}}^{vp} \\
- {}^t \underline{\underline{\sigma}} \cdot \left\{ {}^t \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{U}}) \right\}_a + \left\{ {}^t \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{U}}) \right\}_a \cdot {}^t \underline{\underline{\sigma}} - {}^t \Delta b P \underline{\underline{1}} - {}^t \Delta b^t p \underline{\underline{1}} - {}^t b P \underline{\underline{1}} \\
- 3 {}^t \Delta K {}^t \alpha^s \text{0r}' \Delta T \underline{\underline{1}} - 3 {}^t K {}^t \Delta \alpha^s \text{0r}' \Delta T \underline{\underline{1}} - 3 {}^t K {}^t \alpha^s \Theta \underline{\underline{1}}
\end{aligned} \tag{253}$$

A segunda lei constitutiva, que relaciona a taxa de variação de porosidade à taxa de variação de pressão e à taxa de deformação, é dada por (BRÜCH, 2016):

$$\dot{p} = M \left[ \frac{\dot{\phi} - \dot{\phi}^{ir}}{J^{ir}} - \dot{b} \text{tr}(\underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}^{ne}) - b \text{tr}(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^{ir}) + 3 \dot{\alpha}^\phi \Delta T + 3 \alpha^\phi \dot{T} \right] + \frac{\dot{M}}{M} p \tag{254}$$

onde  $M$  é o módulo de Biot e  $\phi = d\Omega_t^f / d\Omega_0$  é a porosidade lagrangiana.

Substituindo  $\dot{\phi}^{ir} = J^{ir} \text{tr} \underline{\underline{d}}^{ir}$  na expressão anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{p} = M \left[ \frac{\dot{\phi}}{J^{ir}} - \text{tr}(\underline{\underline{d}}^p + \underline{\underline{d}}^{vp}) - b \text{tr}(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^p - \underline{\underline{d}}^{vp}) \right. \\
\left. - \dot{b} \text{tr}(\underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}^{ne}) + 3 \dot{\alpha}^\phi \Delta T + 3 \alpha^\phi \dot{T} \right] + \frac{\dot{M}}{M} p
\end{aligned} \tag{255}$$

Baseado na hipótese de elasticidade infinitesimal, a parcela elástica da transformação é considerada infinitesimal, ou seja,  $\underline{\underline{F}}^{el} \approx \underline{\underline{1}}$ . Substituindo  $J = \det \underline{\underline{F}}^{el} \det \underline{\underline{F}}^{ir} \approx J^{ir}$  e agrupando os termos semelhante na expressão anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{p} = M \left[ \frac{\dot{\phi}}{J} + (b-1) \text{tr}(\underline{\underline{d}}^p + \underline{\underline{d}}^{vp}) - b \text{tr} \underline{\underline{d}} \right. \\
\left. - \dot{b} \text{tr}(\underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}^{ne}) + 3 \dot{\alpha}^\phi \Delta T + 3 \alpha^\phi \dot{T} \right] + \frac{\dot{M}}{M} p
\end{aligned} \tag{256}$$

Essa expressão é reescrita para o tempo  $t'$ :

$$\begin{aligned}
{}^t \dot{p} = {}^t M \left[ \frac{{}^t \dot{\phi}}{J_{0t'}} + ({}^t b - 1) \text{tr}({}^t \underline{\underline{d}}^p + {}^t \underline{\underline{d}}^{vp}) - {}^t b \text{tr} {}^t \underline{\underline{d}} \right. \\
\left. - {}^t \dot{b} \text{tr}({}^t \underline{\underline{C}}^{-1} : {}^t \underline{\underline{\sigma}}^{ne}) + 3 {}^t \dot{\alpha}^\phi \text{0r}' \Delta T + 3 {}^t \alpha^\phi \text{0r}' \dot{T} \right] + \frac{{}^t \dot{M}}{{}^t M} {}^t p
\end{aligned} \tag{257}$$

A partir da variação de pressão apresentada em (244), a expressão anterior é reescrita como:

$$\begin{aligned}
 P = \delta t {}^t M \left[ \frac{{}^t \dot{\phi}}{J_{0r}} + ({}^t b - 1) \text{tr} \left( {}^t \underline{\underline{d}}^p + {}^t \underline{\underline{d}}^{vp} \right) - {}^t b \text{tr} {}^t \underline{\underline{d}} \right. \\
 \left. - {}^t \dot{b} \text{tr} \left( {}^t \underline{\underline{C}}^{-1} : {}^t \underline{\underline{\sigma}}^{ne} \right) + 3 {}^t \dot{\alpha}^\phi {}^{0t} \Delta T + 3 {}^t \alpha^\phi {}^t \dot{T} \right] + \delta t \frac{{}^t \dot{M}}{{}^t M} {}^t p
 \end{aligned} \tag{258}$$

São definidas as seguintes variações:

$$\begin{cases} \delta t {}^t \dot{M} = {}^t \Delta M = {}^t M - {}^t M \\ \delta t {}^t \dot{\alpha}^\phi = {}^t \Delta \alpha^\phi = {}^t \alpha^\phi - {}^t \alpha^\phi \end{cases} \tag{259}$$

A expressão (258) é reescrita como:

$$\begin{aligned}
 P = {}^t M \left[ \frac{\delta t {}^t \dot{\phi}}{J_{0r}} + ({}^t b - 1) \text{tr} \left( \underline{\underline{\mathcal{E}}}^p + \underline{\underline{\mathcal{E}}}^{vp} \right) - {}^t b \text{tr} \left\{ {}^t \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{U}}) \right\}_s \right. \\
 \left. - {}^t \Delta b \text{tr} \left( {}^t \underline{\underline{C}}^{-1} : {}^t \underline{\underline{\sigma}}^{ne} \right) + 3 {}^t \Delta \alpha^\phi {}^{0t} \Delta T + 3 {}^t \alpha^\phi \Theta \right] + \frac{{}^t \Delta M}{{}^t M} P + \frac{{}^t \Delta M}{{}^t M} {}^t p
 \end{aligned} \tag{260}$$

Segundo Simo e Hughes (1998), a objetividade incremental do algoritmo é garantida através de valores pequenos de  $\delta t$  que permitem desprezar os termos de segunda ordem referentes ao gradiente de deslocamento, como assumido anteriormente.

## Discretização espacial

A forma fraca das equações diferenciais é obtida pelo método de resíduos ponderados, utilizando o método de Galerkin. A equação de equilíbrio (1) é reescrita para o tempo  $t'$ :

$${}^t \text{div} {}^t \underline{\underline{\sigma}} + {}^t \rho \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{0}} \tag{261}$$

Multiplicando a equação por um deslocamento virtual  $\hat{u}$  definido em  $\Omega_r$ , cujo  $i$ -ésimo componente é zero em  $S_r^{\xi i}$ , isto é, cinematicamente admissível com valor nulo em  $S_r^{\xi i}$ :

$$\int_{\Omega_{t'}} {}^{t'} \text{div} {}^{t'} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} d\Omega_{t'} + \int_{\Omega_{t'}} {}^{t'} \rho \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} d\Omega_{t'} = 0 \quad (262)$$

Valendo-se da simetria do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  e aplicando o teorema da divergência, tem-se:

$$\int_{\Omega_{t'}} {}^{t'} \underline{\underline{\sigma}} : {}^{t'} \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\hat{u}}} d\Omega_{t'} = \int_{S_{t'}^T} {}^{t'} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} dS_{t'}^T + \int_{\Omega_{t'}} {}^{t'} \rho \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} d\Omega_{t'} \quad (263)$$

Com o intuito de escrever o gradiente de  $\underline{\underline{\hat{u}}}$  no tempo  $t$ , define-se o produto:

$$\underline{\underline{G}}^{-1} \det \underline{\underline{G}} \approx \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}} \quad (264)$$

onde se desprezou os termos de segunda ordem em  $\underline{\underline{\Gamma}} = -{}^t \underline{\underline{\nabla}} U + \text{tr} {}^t \underline{\underline{\nabla}} U \underline{\underline{1}}$ .

Assim, o termo à esquerda da igualdade (263) pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega_{t'}} {}^{t'} \underline{\underline{\sigma}} : {}^{t'} \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\hat{u}}} d\Omega_{t'} = \int_{\Omega_{t'}} \left[ (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}) \cdot {}^{t'} \underline{\underline{\sigma}} \right] : {}^{t'} \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\hat{u}}} d\Omega_{t'} \quad (265)$$

Como a transformação é lenta, o primeiro termo à direita da igualdade (263) pode ser aproximada através da simples defasagem dos coeficientes de  $t'$  para  $t$ :

$$\int_{S_{t'}^T} {}^{t'} \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} dS_{t'}^T \approx \int_{S_t^T} {}^t \underline{\underline{T}}^d \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} dS_t^T \quad (266)$$

Com a equação de balanço de massa para o tempo  $t'$  e com (241), o segundo termo à direita da igualdade (263) pode ser reescrito para o tempo  $t$ :

$$\int_{\Omega_{t'}} {}^t \rho \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} d\Omega_{t'} = \int_{\Omega_t} {}^t \rho \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \rho^f \frac{\delta t'^{\dot{\phi}}}{J_{0t'}} \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{\hat{u}}} \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t \quad (267)$$

Com as expressões (265), (266) e (267) é possível reescrever (263) como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} \left[ (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}) \cdot {}^t \underline{\underline{\sigma}} \right] : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} \, d\Omega_t = \int_{S_t^d} {}^t \underline{\underline{T}}^d \cdot \hat{u} \, dS_t^T \\
& + \int_{\Omega_t} {}^t \rho \underline{\underline{g}} \cdot \hat{u} \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \rho^f \frac{\delta t^t \dot{\phi}}{J_{0t^t}} \underline{\underline{g}} \cdot \hat{u} \, \det \underline{\underline{G}} \, d\Omega_t
\end{aligned} \tag{268}$$

O formato desejado para a forma fraca da equação de equilíbrio, onde os coeficientes das expressões (253) e (260) foram defasados do tempo  $t'$  para o tempo  $t$ , é obtido da seguinte maneira: o termo  ${}^t \underline{\underline{\sigma}}$  fornecido pela expressão (253) é substituído na parcela à esquerda da igualdade (268); a definição (243) juntamente com o termo  $\frac{\delta t^t \dot{\phi}}{J_{0t^t}}$  fornecido pela expressão (260) são substituídos na segunda parcela à direita da igualdade (268). Como resultado final, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} : \left[ (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}) \cdot {}^t \underline{\underline{\sigma}} \right] d\Omega_t + \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} : \left[ (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}) \cdot ({}^t \Delta \underline{\underline{C}} : {}^t \underline{\underline{C}}^{-1} : {}^t \underline{\underline{\sigma}}^{ne}) \right] d\Omega_t \\
& + \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} : \left[ (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}) \cdot \left( {}^t \underline{\underline{C}} : \left\{ {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}} \right\}_s - {}^t \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\mathcal{E}}}^p - {}^t \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\mathcal{E}}}^{vp} \right) \right] d\Omega_t \\
& + \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} : \left[ (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}) \cdot \left( \left\{ {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}} \right\}_a \cdot {}^t \underline{\underline{\sigma}} - {}^t \underline{\underline{\sigma}} \cdot \left\{ {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}} \right\}_a \right) \right] d\Omega_t \\
& - \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} : \left[ (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}) \cdot ({}^t \Delta b (P + {}^t p) + {}^t b P) \underline{\underline{1}} \right] d\Omega_t \\
& - 3 \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{u} : \left[ (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Gamma}}) \cdot ({}^t \Delta K {}^t \alpha^s \text{}^{0t'} \Delta T + {}^t K {}^t \Delta \alpha^s \text{}^{0t'} \Delta T + {}^t K {}^t \alpha^s \Theta) \underline{\underline{1}} \right] d\Omega_t \\
& = \int_{S_t^d} \hat{u} \cdot {}^t \underline{\underline{T}}^d \, dS_t^T + \int_{\Omega_t} \hat{u} \cdot ({}^t \rho \underline{\underline{g}}) \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \hat{u} \cdot \left( \rho^f \frac{P}{M} \underline{\underline{g}} \right) (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) \, d\Omega_t \\
& - \int_{\Omega_t} \hat{u} \cdot \left( \rho^f \frac{\Delta M}{M^2} (P + {}^t p) \underline{\underline{g}} \right) (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) \, d\Omega_t \\
& - \int_{\Omega_t} \hat{u} \cdot \left[ \rho^f ({}^t b - 1) \text{tr} \left( \underline{\underline{\mathcal{E}}}^p + \underline{\underline{\mathcal{E}}}^{vp} \right) \underline{\underline{g}} \right] (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) \, d\Omega_t \\
& + \int_{\Omega_t} \hat{u} \cdot \left[ \rho^f {}^t b \text{tr} \left\{ {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}} \right\}_s \underline{\underline{g}} \right] (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) \, d\Omega_t \\
& + \int_{\Omega_t} \hat{u} \cdot \left[ \rho^f {}^t \Delta b \text{tr} \left( {}^t \underline{\underline{C}}^{-1} : {}^t \underline{\underline{\sigma}}^{ne} \right) \underline{\underline{g}} \right] (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) \, d\Omega_t \\
& - 3 \int_{\Omega_t} \hat{u} \cdot \left[ \rho^f ({}^t \Delta \alpha^{\phi \text{}^{0t'}} \Delta T + {}^t \alpha^{\phi} \Theta) \underline{\underline{g}} \right] (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) \, d\Omega_t
\end{aligned} \tag{269}$$

Para a obtenção da forma fraca da equação do balanço de massa fluida, define-se o balanço de massa de fluido que passa através de um meio poroso:

$$\frac{d}{dt}(\rho^f \phi) + J \operatorname{div}(\rho^f \underline{q}^f) = 0 \quad (270)$$

onde  $\underline{q}^f = \phi \underline{V}^r$  é o vetor filtração definido pela porosidade euleriana e pela velocidade relativa  $\underline{V}^r$  da partícula de fluido em relação ao esqueleto sólido.

Adicionalmente, a lei de Darcy define o vetor filtração, onde  $\underline{\underline{K}}^f$  é o tensor permeabilidade:

$$\underline{q}^f = \underline{\underline{K}}^f \cdot (-\underline{\nabla} p + \rho^f \underline{g}) \quad (271)$$

Para um fluido incompressível, a equação (270) é reescrita para o tempo  $t'$ :

$$\frac{{}^{t'}\dot{\phi}}{J_{0t'}} + {}^{t'}\operatorname{div} {}^{t'}\underline{q}^f = 0 \quad (272)$$

A equação anterior é multiplicada por uma pressão virtual  $\hat{p}$ , definida em  $\Omega_{t'}$ , com valor nulo em  $S_{t'}^p$ :

$$\int_{\Omega_{t'}} \frac{{}^{t'}\dot{\phi}}{J_{0t'}} \hat{p} d\Omega_{t'} + \int_{\Omega_{t'}} {}^{t'}\operatorname{div} {}^{t'}\underline{q}^f \hat{p} d\Omega_{t'} = 0 \quad (273)$$

Aplicando uma relação tensorial, juntamente com o teorema da divergência, tem-se:

$$\int_{\Omega_{t'}} \frac{{}^{t'}\dot{\phi}}{J_{0t'}} \hat{p} d\Omega_{t'} - \int_{\Omega_{t'}} {}^{t'}\underline{q}^f \cdot {}^{t'}\underline{\nabla} \hat{p} d\Omega_{t'} = - \int_{S_{t'}^{qf}} {}^{t'}q^{f,d} \hat{p} dS_{t'}^{qf} \quad (274)$$

Substituindo a lei de Darcy, definida em (271) para o tempo  $t'$ , e multiplicando por  $\delta t$ :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\delta t \dot{\phi}}{J_{0t'}} \hat{p} d\Omega_{t'} + \delta t \int_{\Omega_t} \left( {}^t \underline{\underline{K}}^f \cdot {}^t \underline{\nabla} {}^t p \right) \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} d\Omega_{t'} - \delta t \int_{\Omega_t} \left( {}^t \underline{\underline{K}}^f \cdot \rho^f \underline{g} \right) \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} d\Omega_{t'} = -\delta t \int_{S_t^{qf}} {}^t q^{f,d} \hat{p} dS_{t'}^{qf} \quad (275)$$

Com o propósito de reescrever no tempo  $t$ , realiza-se uma análise termo a termo da expressão anterior. Ao primeiro termo à esquerda da igualdade, aplica-se (241):

$$\int_{\Omega_t} \frac{\delta t \dot{\phi}}{J_{0t'}} \hat{p} d\Omega_{t'} = \int_{\Omega_t} \frac{\delta t \dot{\phi}}{J_{0t'}} \hat{p} \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t \quad (276)$$

Define-se o produto:

$$\begin{cases} {}^t \underline{\nabla} {}^t p \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} = {}^t \underline{\nabla} {}^t p \cdot \left( \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot {}^T \underline{\underline{G}}^{-1} \right) \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} \\ {}^t \underline{\nabla} {}^t p \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} \approx {}^t \underline{\nabla} {}^t p \cdot \left( \underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{\mathcal{E}}} \right) \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} \end{cases} \quad (277)$$

onde  $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$  é o tensor deformação definido pela parte simétrica do gradiente de deslocamento, conforme equação (245).

Substituindo o tensor de permeabilidade isotrópica  $\underline{\underline{K}}^f = k^f \underline{\underline{1}}$  e então aplicando as relações (277), pode-se transportar o volume  $\Omega_{t'}$  do segundo termo à esquerda da igualdade (275):

$$\delta t \int_{\Omega_t} \left( {}^t \underline{\underline{K}}^f \cdot {}^t \underline{\nabla} {}^t p \right) \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} d\Omega_{t'} = \delta t \int_{\Omega_t} {}^t k^f {}^t \underline{\nabla} {}^t p \cdot \left( \underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{\mathcal{E}}} \right) \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t \quad (278)$$

Ao terceiro termo à esquerda da igualdade (275), aplica-se o tensor de permeabilidade isotrópica  $\underline{\underline{K}}^f = k^f \underline{\underline{1}}$ , as equações (241) e (242), resultando em:

$$-\delta t \int_{\Omega_t} \left( {}^t \underline{\underline{K}}^f \cdot \rho^f \underline{g} \right) \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} d\Omega_{t'} = -\delta t \int_{\Omega_t} {}^t k^f \rho^f \left( \underline{\underline{G}}^{-1} \cdot \underline{g} \right) \cdot {}^t \underline{\nabla} \hat{p} \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t \quad (279)$$

Para o termo à direita da igualdade (275), realiza-se a simples defasagem dos coeficientes de  $t'$  para  $t$ , resultando em:

$$-\delta t \int_{S_t^{q^f}} {}^t q^{f,d} \hat{p} dS_t^{q^f} \approx -\delta t \int_{S_t^{q^f}} {}^t q^{f,d} \hat{p} dS_t^{q^f} \quad (280)$$

Com as expressões (276), (278), (279) e (280) pode-se reescrever (275):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \frac{\delta t {}^t \dot{\phi}}{J_{0t'}} \hat{p} \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t + \delta t \int_{\Omega_t} {}^t k^f {}^t \underline{\underline{\nabla}} {}^t p \cdot (\underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{\mathcal{E}}}) \cdot {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{p} \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t \\ & - \delta t \int_{\Omega_t} {}^t k^f \rho^f (\underline{\underline{G}}^{-1} \cdot \underline{\underline{g}}) \cdot {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{p} \det \underline{\underline{G}} d\Omega_t = -\delta t \int_{S_t^{q^f}} {}^t q^{f,d} \hat{p} dS_t^{q^f} \end{aligned} \quad (281)$$

Substituindo o termo  $\frac{\delta t {}^t \dot{\phi}}{J_{0t'}}$  fornecido em (260), com as relações (243) e com a variação de temperatura em (244), tem-se o formato desejado da forma fraca da equação de balanço de massa fluida. Os coeficientes da expressão (260) foram defasados do tempo  $t'$  para o tempo  $t$  resultando em:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \hat{p} \frac{P}{M} (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) d\Omega_t - \int_{\Omega_t} \hat{p} \frac{\Delta M}{M^2} (P + {}^t p) (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) d\Omega_t \\ & - \int_{\Omega_t} \hat{p} ({}^t b - 1) \text{tr} (\underline{\underline{\mathcal{E}}}^p + \underline{\underline{\mathcal{E}}}^{vp}) (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) d\Omega_t \\ & + \int_{\Omega_t} \hat{p} {}^t b \text{tr} \{ {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}} \}_s (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) d\Omega_t \\ & + \int_{\Omega_t} \hat{p} {}^t \Delta b \text{tr} ({}^t \underline{\underline{\zeta}}^{-1} : {}^t \underline{\underline{\sigma}}^{ue}) (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) d\Omega_t \\ & - 3 \int_{\Omega_t} \hat{p} ({}^t \Delta \alpha^{\phi 0t'} \Delta T + {}^t \alpha^{\phi} \Theta) (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) d\Omega_t \\ & + \delta t \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{p} \cdot [{}^t k^f {}^t \underline{\underline{\nabla}} (P + {}^t p) \cdot (\underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{\mathcal{E}}})] (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) d\Omega_t \\ & - \delta t \int_{\Omega_t} {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{p} \cdot [{}^t k^f \rho^f (\underline{\underline{1}} - {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) \cdot \underline{\underline{g}}] (1 + \underline{\underline{1}} : {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{U}}) d\Omega_t = -\delta t \int_{S_t^{q^f}} \hat{p} {}^t q^{f,d} dS_t^{q^f} \end{aligned} \quad (282)$$

Para a obtenção da forma fraca, a equação de condução do calor é escrita na forma euleriana (conforme as hipóteses introduzidas), onde o vetor  $\underline{\underline{q}}^t$  é o fluxo de calor por condução euleriano e  $r^t$  é o calor interno euleriano:

$$\rho c \frac{dT}{dt} + \text{div } \underline{q} = r \quad (283)$$

No contexto das bacias sedimentares, o calor interno  $r$  está associado à produção de calor por meio de processos radiogênicos. A lei de Fourier define o vetor fluxo de calor por condução  $\underline{q}$ , onde  $\underline{K}$  é o tensor de condutividade térmica do material:

$$\underline{q} = -\underline{K} \cdot \text{grad } T \quad (284)$$

A equação (283) é reescrita para o tempo  $t'$ :

$${}^t \rho {}^t c {}^t \dot{T} + {}^t \text{div } {}^t \underline{q} = {}^t r \quad (285)$$

A equação precedente supõe que a variação da geometria pode ser desconsiderada para determinar a evolução da temperatura entre os tempos  $t$  e  $t'$ . Multiplicando por uma temperatura virtual  $\hat{T}$  definido em  $d\Omega_{t'}$ , com valor nulo em  $S_{t'}^T$ :

$$\int_{\Omega_{t'}} {}^t \rho {}^t c {}^t \dot{T} \hat{T} d\Omega_{t'} + \int_{\Omega_{t'}} {}^t \text{div } {}^t \underline{q} \hat{T} d\Omega_{t'} = \int_{\Omega_{t'}} {}^t r \hat{T} d\Omega_{t'} \quad (286)$$

Com a aplicação de uma relação tensorial e do teorema da divergência, a expressão anterior é reescrita como:

$$\int_{\Omega_{t'}} {}^t \rho {}^t c {}^t \dot{T} \hat{T} d\Omega_{t'} + \int_{S_{t'}^{q'}} {}^t q^{t,d} \hat{T} dS_{t'}^{q'} - \int_{\Omega_{t'}} {}^t \underline{q} \cdot {}^t \nabla \hat{T} d\Omega_{t'} = \int_{\Omega_{t'}} {}^t r \hat{T} d\Omega_{t'} \quad (287)$$

Substituindo na expressão anterior a lei de Fourier para o tempo  $t'$ , definida na equação (284), e multiplicando por  $\delta t$ :

$$\begin{aligned} & \delta t \int_{\Omega_{t'}} {}^t \rho {}^t c {}^t \dot{T} \hat{T} d\Omega_{t'} + \delta t \int_{S_{t'}^{q'}} {}^t q^{t,d} \hat{T} dS_{t'}^{q'} \\ & + \delta t \int_{\Omega_{t'}} \left( {}^t \underline{K} \cdot {}^t \nabla {}^t T \right) \cdot {}^t \nabla \hat{T} d\Omega_{t'} = \delta t \int_{\Omega_{t'}} {}^t r \hat{T} d\Omega_{t'} \end{aligned} \quad (288)$$

Com o tensor de condutividade térmica isotrópica  $\underline{\underline{K}}^t = k^t \underline{\underline{1}}$  e com a variação de temperatura em (244), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{t'}} {}^t \rho^t c \Theta \hat{T} d\Omega_{t'} + \delta t \int_{S_{t'}^q} {}^t q^{t,d} \hat{T} dS_{t'}^q \\ & + \delta t \int_{\Omega_{t'}} {}^t k^t \underline{\underline{\nabla}} (\Theta + {}^t T) \cdot {}^t \underline{\underline{\nabla}} \hat{T} d\Omega_{t'} = \delta t \int_{\Omega_{t'}} {}^t r \hat{T} d\Omega_{t'} \end{aligned} \quad (289)$$

A forma final da equação é obtida considerando a geometria fixa ( $\Omega_t \approx \Omega_{t'}$ ) e defasando os demais coeficientes das propriedades térmicas do tempo  $t'$  para o tempo  $t$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \hat{T}^t \rho^t c \Theta d\Omega_t + \delta t \int_{S_t^q} \hat{T}^t q^{t,d} dS_t^q \\ & + \delta t \int_{\Omega_t} \underline{\underline{\nabla}} \hat{T}^t \cdot [{}^t k^t \underline{\underline{\nabla}} (\Theta + {}^t T)] d\Omega_t = \delta t \int_{\Omega_t} \hat{T}^t r d\Omega_t \end{aligned} \quad (290)$$

Após a definição da forma integral das equações que regem o problema, apresentam-se os elementos finitos utilizados. Para a solução do problema, é utilizado o método da superposição de elementos (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Utilizam-se elemento com a mesma forma geométrica, porém com funções de interpolação de diferentes graus para a representação das incógnitas do problema. Os elementos são justapostos, definidos pelos mesmos nós globais. Com a deformação da malha, os elementos utilizados no cálculo das poropressões e temperaturas apresentam a mesma geometria dos elementos usados para o cálculo dos deslocamentos.

Para a aproximação dos deslocamentos, utiliza-se o elemento hexaédrico isoparamétrico quadrático de 20 nós, com 3 graus de liberdade nodais relativos aos deslocamentos, conforme exposto por Dhatt e Touzot (1984). Já para a aproximação das poropressões e temperaturas, utiliza-se o elemento hexaédrico isoparamétrico linear de 8 nós, com 1 grau de liberdade nodal. Na Figura 82, apresentam-se os dois elementos finitos, com os eixos locais  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , e a identificação de cada um de seus nós.

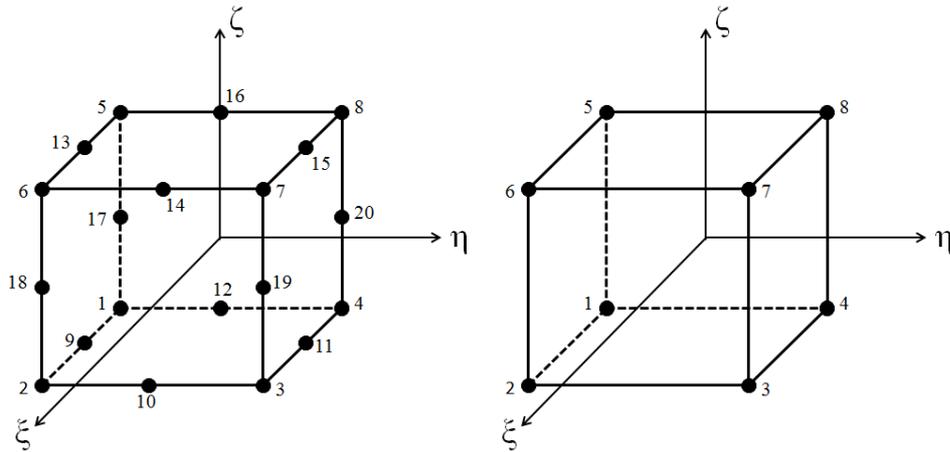


Figura 82: elementos finitos hexaédricos de 20 e 8 nós (BRÜCH, 2016).

Uma vez definido o elemento e suas funções de forma, pode-se finalmente montar o problema a partir das expressões (269), (282) e (290). Para cada incremento de tempo, a solução do problema termoporomecânico é realizada em duas etapas distintas. Na primeira, calcula-se a variação do campo de temperaturas a partir da solução do problema de condução de calor (290). Na segunda etapa, calcula-se o campo de deslocamentos e pressões a partir da solução do problema poromecânico definido pelas equações de equilíbrio (269) e de balanço de massa fluida (282) (BRÜCH, 2016).

Os sistemas de equações resultantes são:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}}_{TT} \cdot \underline{\mathcal{T}} &= \underline{F}_T \\ \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{UU} & \underline{\underline{K}}_{UP} \\ \underline{\underline{K}}_{PU} & \underline{\underline{K}}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{U}} \\ \underline{\mathcal{P}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{F}_U - \underline{\underline{K}}_{UT} \cdot \underline{\mathcal{T}} \\ \underline{F}_P - \underline{\underline{K}}_{PT} \cdot \underline{\mathcal{T}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (291)$$

onde  $\underline{\underline{K}}_{IJ}$  são as sub-matrizes de rigidez globais,  $\underline{F}_I$  os sub-vetores de força globais, e os vetores  $\underline{\mathcal{U}}$ ,  $\underline{\mathcal{P}}$  e  $\underline{\mathcal{T}}$  são os vetores deslocamentos, variações de pressão e variações de temperatura nodais, respectivamente.

Para uma dada configuração no tempo  $t$ , o sistema poromecânico de equações é altamente não-linear devido as não-linearidades físicas (plasticidade e viscoplasticidade) e geométricas (grandes deformações). Particularmente, os vetores  $\underline{F}_U$  e  $\underline{F}_P$  são funções das incógnitas do problema poromecânico, isto é,  $\underline{F}_U = \underline{F}_U(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{P}})$  e  $\underline{F}_P = \underline{F}_P(\underline{\mathcal{U}}, \underline{\mathcal{P}})$ .

Para um único elemento, a matriz  $\underline{\underline{K}}_{UU}$  tem dimensões  $60 \times 60$ ,  $\underline{\underline{K}}_{UP}$  e  $\underline{\underline{K}}_{UT}$   $60 \times 8$ ,  $\underline{\underline{K}}_{PU}$   $8 \times 60$ ,  $\underline{\underline{K}}_{PP}$ ,  $\underline{\underline{K}}_{PT}$  e  $\underline{\underline{K}}_{TT}$   $8 \times 8$ . Assim,  $\underline{F}_U$  tem dimensões  $60 \times 1$ ,  $\underline{F}_P$  e  $\underline{F}_T$   $8 \times 1$ . O sistema de equações (291) tem como incógnitas 8 variações de temperaturas nodais, 60 deslocamentos e 8 variações de pressão nodais.

A matriz  $\underline{\underline{K}}_{UU}$  é simétrica positiva definida,  $\underline{\underline{K}}_{PP}$  simétrica negativa definida e as matrizes  $\underline{\underline{K}}_{UP} = {}^T \underline{\underline{K}}_{PU}$ , o que faz com que o sistema poromecânico de equações (291) seja simétrico indefinido. A matriz  $\underline{\underline{K}}_{TT}$  é simétrica positiva definida. Todos os termos que compõe os sistemas de equações (291), assim como todas as matrizes e vetores elementares utilizados na formulação do problema termoporomecânico são apresentados em Brüch (2016).

## Fluxograma do programa termoporomecânico

O fluxograma do programa termoporomecânico é apresentado na Figura 83. Como a simulação de bacias sedimentares consiste em um problema de evolução no tempo, o programa apresenta um laço temporal, onde três módulos principais são executados.

A bacia sedimentar consiste em um sistema aberto, com entrada e saída de massa ao longo da escala de tempo geológico. O simulador numérico necessita de ferramentas específicas para essa característica do sistema. Em especial, o simulador desenvolvido por Brüch (2016) utiliza uma técnica de ativação/desativação de elementos. Ela consiste em um método inicialmente desenvolvido para simular os processos de escavação e colocação de revestimento em túneis (Hanafy e Emery (1980); Bernaud *et al.* (1995)). Nele, o sistema aberto é simulado como um sistema fechado fictício, onde a malha inicial permanece inalterada, e a entrada e saída de materiais do sistema são simuladas através de mudanças nas propriedades dos elementos. O algoritmo foi baseado em no exposto por Bernaud *et al.* (2006) e expandido para o domínio tridimensional no contexto da termoporomecânica. Na Figura 83, o módulo identificado por “*Algoritmo de ativação dos elementos*” é responsável pela incorporação desse algoritmo.

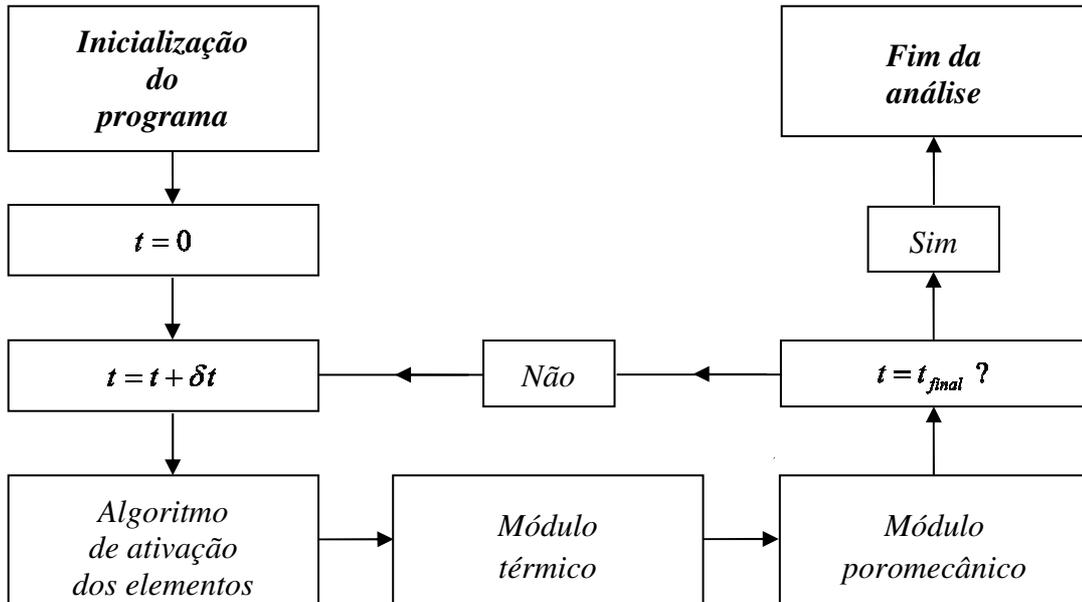


Figura 83: fluxograma do programa termoporomecânico (BRÜCH, 2016).

Em virtude de possíveis diferenças significativas entre o tempo característico de difusão térmica e o tempo característico de difusão da massa fluida, isto é, possíveis diferenças significativas entre os passos de tempo  $\delta t$  necessários à simulação dos problemas térmicos e poromecânicos, o programa termoporomecânico possibilita o funcionamento de cada módulo com diferentes passos de tempo (um passo de tempo para o problema térmico,  $\delta t_T$ , e um passo de tempo para o problema poromecânico,  $\delta t_{UP}$ ).

Na Figura 84, apresenta-se o esquema de discretização temporal do simulador. Conhecidos todos os campos termoporomecânicos no tempo  $t$ , o programa repete sucessivamente as etapas 1 a 4 até o fim da análise: 1) o módulo térmico resolve o problema térmico  $N$  vezes com passo de tempo  $\delta t_T$  até o tempo  $t' = t + \delta t_{UP}$ ; 2) o módulo térmico passa informações para o módulo poromecânico; 3) o módulo poromecânico resolve o problema poromecânico entre  $t$  e  $t'$  com passo de tempo  $\delta t_{UP}$ ; 4) o módulo poromecânico passa informações para o módulo térmico. Nas etapas 2 e 4, as propriedades termoporomecânicas são atualizadas em função da temperatura e porosidade do material.

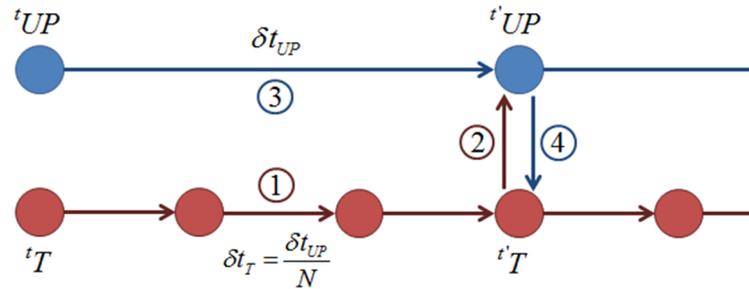


Figura 84: discretização temporal e interação entre os módulos térmico e poromecânico do simulador (BRÜCH, 2016).

Em termos computacionais, para um aumento na velocidade de processamento dos dados é utilizada o *OpenMP* (*Open Multi-Processing*). Isso consiste em uma interface de programação de aplicativos em ambientes de memória compartilhada que permite a utilização de um determinado número de processadores locais de forma coordenada para se obter uma maior capacidade global de processamento através da execução simultânea de tarefas, que se comunicam compartilhando os dados da memória (CHAPMAN; JOST; PAS, 2008). Utiliza-se o sistema *CSR* (*Compressed Sparse Row*) para o armazenamento de dados.

A solução do sistema de equações pode ser feita tanto por um método direto quanto por um iterativo. O método direto de solução é utilizado diretamente das rotinas *MKL PARDISO* (*Parallel Direct Sparse Solver Interface*) do pacote *Intel MKL* (*Intel Math Kernel Library*). A solução do sistema térmico de equações é realizada a partir da decomposição  $\underline{\underline{L}} \cdot {}^T \underline{\underline{L}}$  de Cholesky e a solução do sistema poromecânico de equações é realizada utilizando a decomposição  $\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot {}^T \underline{\underline{L}}$ . O método iterativo de solução do sistema de equações adotado é o método dos Gradientes Conjugados Pré-condicionado (*PCG - Preconditioned Conjugate Gradient*) com matriz pré-condicionadora  $\underline{\underline{M}}$  diagonal.

## Módulo térmico

Na Figura 85, apresenta-se o fluxograma do módulo térmico.

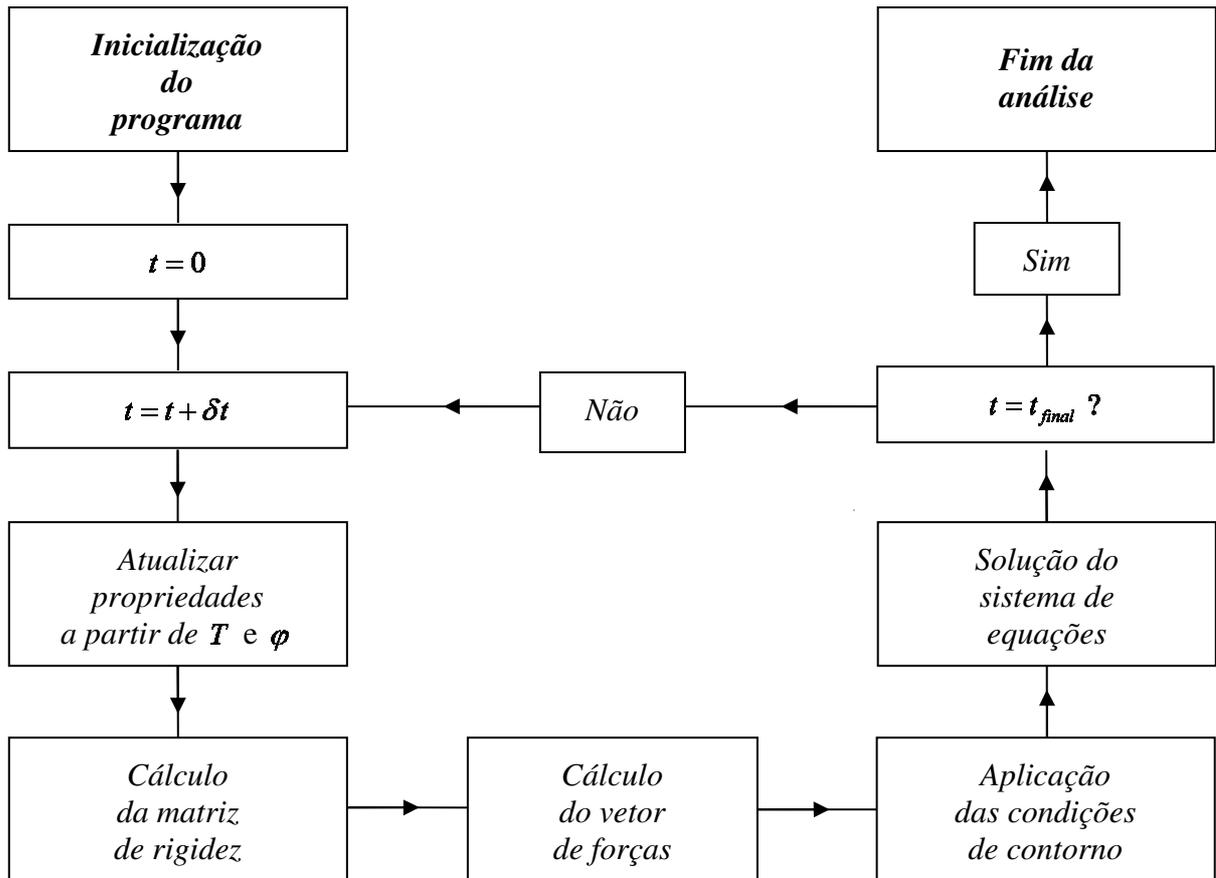


Figura 85: fluxograma do módulo térmico (BRÜCH, 2016).

O passo de tempo para o problema térmico,  $\delta t_r$ , é baseado no tempo característico de difusão térmica (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2004):

$$\Delta t_{ref}^t = \frac{h^2}{\alpha} \quad (292)$$

onde  $\alpha = k^t / \rho c$  é a difusividade térmica do material e  $h$  o tamanho do elemento na direção do fluxo de calor.

Em função da variação das propriedades do material em função de temperatura e porosidade, o passo de tempo de referência inicia pode ser drasticamente alterado ao longo do tempo. Assim, o algoritmo conta com uma rotina de passo de tempo automático, avaliando a expressão (292) para cada elemento a cada novo passo de tempo.

## Módulo poromecânico

Na Figura 86, apresenta-se o fluxograma do módulo poromecânico.

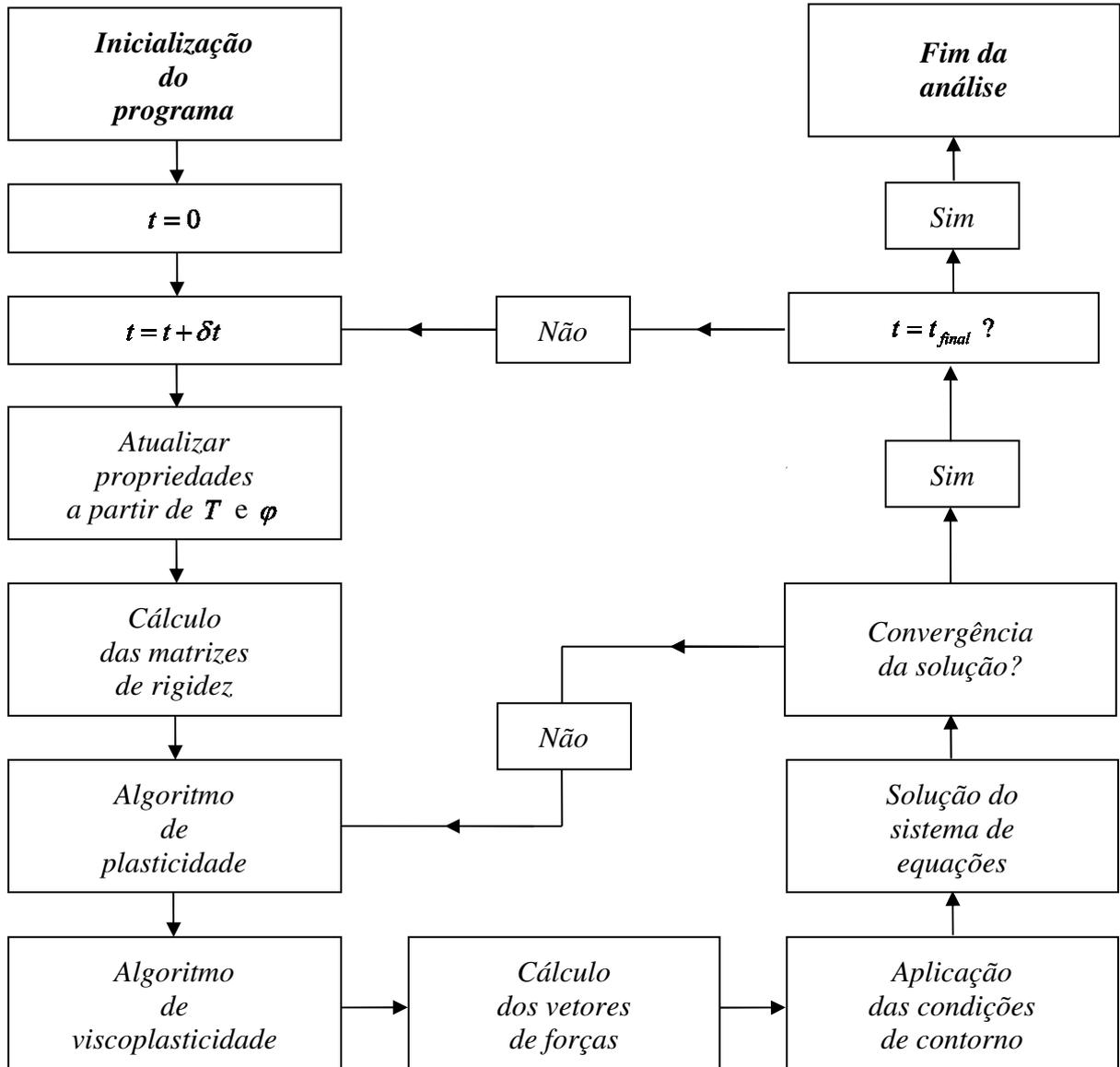


Figura 86: fluxograma do módulo poromecânico (BRÜCH, 2016).

O passo de tempo para o problema poromecânico,  $\delta t_{vp}$ , é baseado no tempo característico de difusão da massa fluida  $\Delta t_{ref}^f$  (BERNAUD *et al.*, 2002) e, em função do algoritmo para a integração das deformações viscoplásticas ser condicionalmente estável, no tempo característico de relaxação do material  $\Delta t_{ref}^{vp}$  (SIMO; HUGHES, 1998)

$$\Delta t_{ref}^f = \frac{h^2}{c_m} \text{ com } c_m = \frac{k^f M E_{oed}}{E_{oed} + M b^2}$$

$$\Delta t_{ref}^{vp} = \frac{\eta_{vp}}{E_{oed}}$$
(293)

onde  $c_m$  é o coeficiente de difusividade líquida do material poroso e  $E_{oed} = K + \frac{4}{3}\mu$  é o módulo de elasticidade oedométrico.

Assim como no caso térmico, as propriedades do material variam em função de temperatura e porosidade, logo o passo de tempo inicial pode ser drasticamente alterado ao longo da análise. Assim, o módulo poromecânico também conta com uma rotina de passo de tempo automático, que avalia a expressão (293) para cada elemento a cada novo passo de tempo.

A convergência do algoritmo não-linear é função dos vetores deslocamento  $\underline{\mathcal{U}}$  e variação de pressão  $\underline{\mathcal{P}}$ , separadamente. Para um passo de tempo  $t$ , a convergência dos deslocamentos é verificada através da razão entre a norma do vetor  $\Delta\underline{\mathcal{U}} = \underline{\mathcal{U}}_i - \underline{\mathcal{U}}_{i-1}$  e a norma do vetor  $\underline{\mathcal{U}}_0$ , onde  $\underline{\mathcal{U}}_i$  é o vetor deslocamento obtido na  $i$ -ésima iteração do processo não linear,  $\underline{\mathcal{U}}_{i-1}$  é a solução da iteração anterior, e  $\underline{\mathcal{U}}_0$  é a primeira solução obtida para o passo de tempo  $t$ .

$$\frac{|\Delta\underline{\mathcal{U}}|}{|\underline{\mathcal{U}}_0|} \leq TOL$$
(294)

De forma equivalente, tem-se para o vetor variação de pressão:

$$\frac{|\Delta\underline{\mathcal{P}}|}{|\underline{\mathcal{P}}_0|} \leq TOL$$
(295)

A convergência do algoritmo para o tempo  $t$  é obtida quando as duas expressões anteriores são satisfeitas.

### **Integração das deformações plásticas**

O algoritmo iterativo implementado no simulador para a integração das deformações plásticas corresponde a uma generalização do algoritmo descrito por Nguyen (1977).

Seja um corpo em equilíbrio com a força generalizada  $\underline{F}_n$  onde todas as grandezas do problema são conhecidas no passo  $n$  : os deslocamentos  $\underline{u}_n$ , as deformações  $\underline{\underline{\varepsilon}}_n$ , as deformações plásticas  $\underline{\underline{\varepsilon}}_n^p$ , o estado de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}_n$ , e o parâmetro de endurecimento  $p_{c(n)}$ . Aplica-se um incremento de carga  $\delta \underline{F}$ . O estado de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}$  e o parâmetro de endurecimento  $p_{c(n+1)}$  estão definidos em (296), onde  $H$  é a função de encruamento que descreve a lei de evolução de  $p_c$  :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} &= \underline{\underline{\sigma}}_n + \underline{\underline{C}} : (\delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \\ p_{c(n+1)} &= H(\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p)\end{aligned}\quad (296)$$

Para a determinação do incremento de deformação plástica, resolve-se a equação de equilíbrio correspondente ao incremento de carga  $\delta \underline{F}$  :

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{U} = \delta \underline{F} \quad (297)$$

O incremento de deformação  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  é então calculado, a partir de  $\underline{U}$  :

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \{\nabla \underline{U}\}_s \quad (298)$$

Define-se:

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}_n + \underline{\underline{C}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (299)$$

O critério de plasticidade  $F$  é então verificado. Se  $F(\underline{\underline{\sigma}}^*, p_{c(n)}) \leq 0$ , então  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p = 0$  e o incremento de deformação correspondente ao incremento de carga aplicado é puramente elástico. Assim, tem-se a solução do problema para o passo  $n+1$  :

$$\begin{cases} \underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + \underline{U} \\ \underline{\varepsilon}_{n+1} = \underline{\varepsilon}_n + \delta \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon}_{n+1}^p = \underline{\varepsilon}_n^p \\ \underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}^* \\ p_{c(n+1)} = p_{c(n)} \end{cases} \quad (300)$$

Se o critério de plasticidade for positivo  $F(\underline{\sigma}^*, p_{c(n)}) > 0$ , então  $\delta \underline{\varepsilon}^p \neq 0$ , e o incremento de deformação tem componentes elástica e plástica. A regra de fluxo é associada e  $\delta \underline{\varepsilon}^p$  é calculado como:

$$\delta \underline{\varepsilon}^p = \delta \chi \frac{\partial F(\underline{\sigma}_{n+1}, p_{c(n+1)})}{\partial \underline{\sigma}} \quad (301)$$

Com o incremento de deformações plásticas, calcula-se  $\delta \underline{\varepsilon}^p$  as tensões plasticamente admissíveis  $\underline{\sigma}^{PA}$ , e o parâmetro de endurecimento  $p_c$ :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^{PA} &= \underline{\sigma}^* - \underline{C} : \delta \underline{\varepsilon}^p \\ p_c &= H(\delta \underline{\varepsilon}^p) \end{aligned} \quad (302)$$

Com a finalidade de garantir que

$$F(\underline{\sigma}^{PA}, p_c) = 0 \quad (303)$$

O problema de evolução elastoplástico consiste em resolver as quatro equações (301)-(303), onde o incremento de deformação plástica  $\delta \underline{\varepsilon}^p$  deve ser determinado. O simulador adota um esquema explícito de integração, onde os últimos valores conhecidos de  $\underline{\sigma}^*$  e  $p_c$  (neste caso  $p_{c(n)}$ ) são utilizados para determinar a derivada de  $F$ . Assim:

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \delta \chi \frac{\partial F(\underline{\underline{\sigma}}^*, p_{c(n)})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (304)$$

A função  $F(\underline{\underline{\sigma}}^{PA}, p_c)$  é linearizada a partir de uma aproximação de Taylor de primeira ordem em torno dos últimos valores  $\underline{\underline{\sigma}}^*$  e  $p_c$  calculados. O valor de  $\delta \chi$  é determinado, possibilitando o cálculo de  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ , utilizando a regra de fluxo explícita. Com  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$  determina-se  $p_c$ , e também o incremento de força plástica  $\delta \underline{\underline{F}}^p = \delta \underline{\underline{F}}^p(\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p)$ . Resolve-se novamente o sistema de equações com o vetor de forças atualizado:

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{U}} = \delta \underline{\underline{F}} + \delta \underline{\underline{F}}^p \quad (305)$$

A partir de  $\underline{\underline{U}}$  calcula-se novamente  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ , e as tensões estaticamente admissíveis  $\underline{\underline{\sigma}}^{EA}$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{EA} = \underline{\underline{\sigma}}_n + \underline{\underline{C}} : (\delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \quad (306)$$

Verifica-se então se  $F(\underline{\underline{\sigma}}^{EA}, p_c) \leq 0$ . Caso isso seja verdadeiro, o incremento de deslocamento  $\underline{\underline{U}}$ , assim como  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ ,  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}^{EA}$  e  $p_c$  correspondem a solução do passo  $n+1$ .

$$\begin{cases} \underline{\underline{u}}_{n+1} = \underline{\underline{u}}_n + \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1} = \underline{\underline{\varepsilon}}_n + \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^p = \underline{\underline{\varepsilon}}_n^p + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p \\ \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}^{EA} \\ p_{c(n+1)} = p_c \end{cases} \quad (307)$$

Se  $F(\underline{\underline{\sigma}}^{EA}, p_c) > 0$ , calcula-se novamente  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ ,  $\delta \chi$ ,  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p$ ,  $p_c$ ,  $\delta \underline{\underline{F}}^p$ ,  $\underline{\underline{U}}$ ,  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ , e  $\underline{\underline{\sigma}}^{EA}$ . O processo se repete até que o critério seja satisfeito. Na Figura 87, apresenta-se o algoritmo:

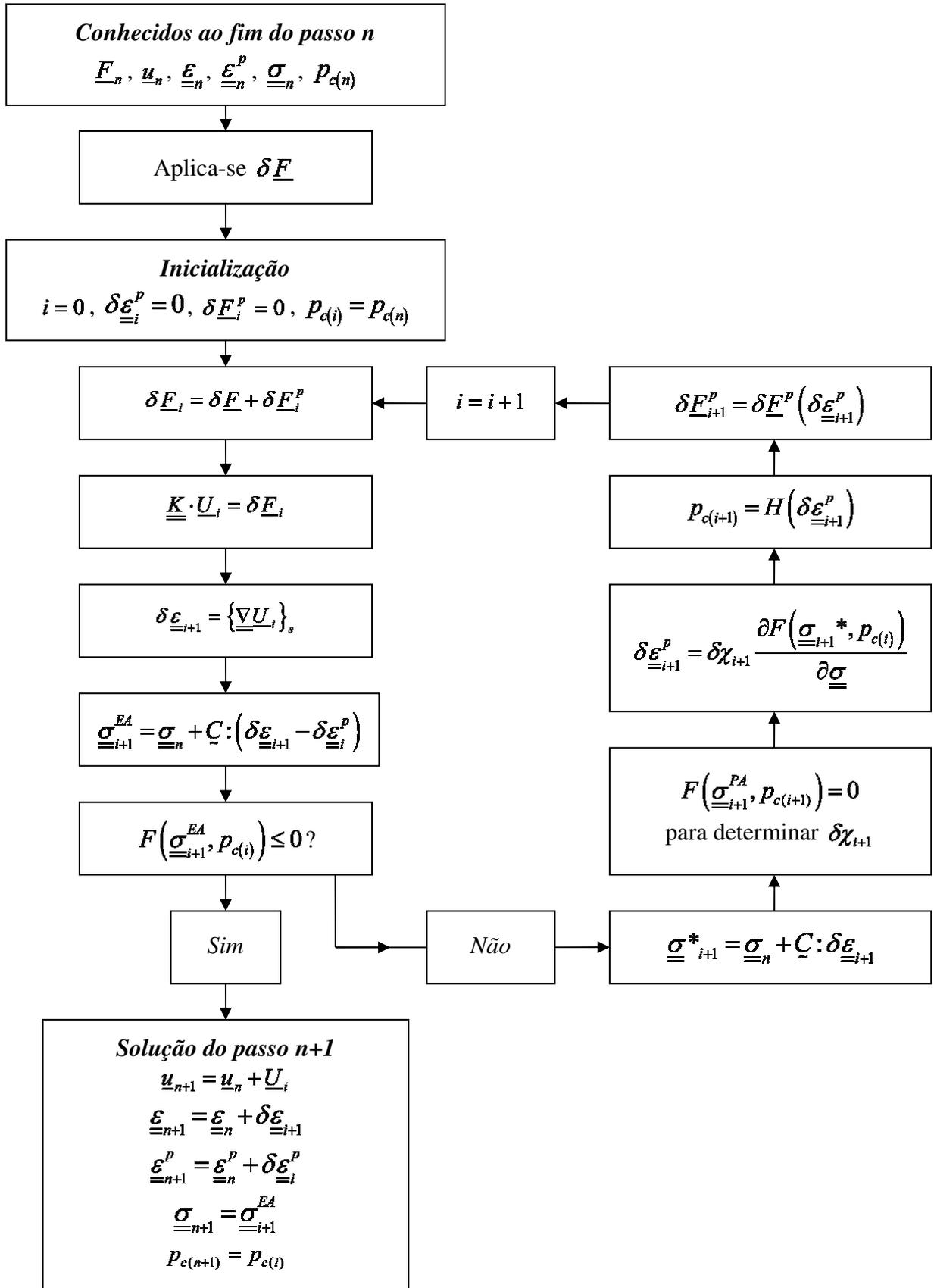


Figura 87: algoritmo de integração das deformações plásticas (BRÛCH, 2016).

### Integração das deformações viscoplásticas

O algoritmo iterativo de integração das deformações viscoplásticas é apresentado no contexto de um material monofásico submetido a deformações infinitesimais.

Seja um corpo em equilíbrio no tempo  $t$  com a força generalizada  ${}^t \underline{F}$  onde todas as grandezas do problema são conhecidas: os deslocamentos  ${}^t \underline{u}$ , as deformações  ${}^t \underline{\underline{\varepsilon}}$ , as deformações viscoplásticas  ${}^t \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ , o estado de tensões  ${}^t \underline{\underline{\sigma}}$ , e o critério estático associado ao limite elástico do material  ${}^t p_{vp}^s$ , tal que  $\Phi(F) \leq 0$ . Aplica-se um incremento de carga  $\delta \underline{F}$ . Para um determinado tempo  $t' = t + \delta t$ , o estado de tensões  ${}^{t'} \underline{\underline{\sigma}}$  e o parâmetro  ${}^{t'} p_{vp}^s$  são determinados de acordo com as expressões (308), onde  $H$  é a função que descreve a lei de evolução de  $p_{vp}^s$ :

$$\begin{cases} {}^{t'} \underline{\underline{\sigma}} = {}^t \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{C}} : (\delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) \\ {}^{t'} p_{vp}^s = H(\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) \end{cases} \quad (308)$$

Para a determinação do incremento de deformação viscoplástica, resolve-se a equação de equilíbrio para o incremento de carga

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{U} = \delta \underline{F} \quad (309)$$

O incremento de deformação  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  é calculado a partir dos deslocamentos obtidos:

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \{ \underline{\underline{\nabla U}} \}_s \quad (310)$$

O estado de tensão associado a esse incremento de deformação é dado por:

$$\underline{\underline{\sigma}} = {}^t \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{C}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (311)$$

A função de escala  $\Phi(F) = F - 1 = p_{vp}^d / p_{vp}^s - 1$  é avaliada para o estado de tensões calculado.

Se  $\Phi(F) \leq 0$ , o incremento de deformação correspondente ao incremento de carga  $\delta \underline{F}$  é puramente elástico e tem-se a solução do problema para  $t'$ :

$$\begin{cases} {}^{t'}\underline{u} = {}^t\underline{u} + \underline{U} \\ {}^{t'}\underline{\underline{\varepsilon}} = {}^t\underline{\underline{\varepsilon}} + \delta\underline{\underline{\varepsilon}} \\ {}^{t'}\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} = {}^t\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} \\ {}^{t'}\underline{\underline{\sigma}} = {}^t\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{C}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} \\ {}^{t'}\underline{p}_{vp}^s = {}^t\underline{p}_{vp}^s \end{cases} \quad (312)$$

Se  $\Phi(F) > 0$ , o incremento de deformação tem componentes elástica e viscoplástica. O incremento de deformação viscoplástica entre  $t$  e  $t' = t + \delta t$  é obtido por meio de um processo iterativo a partir do esquema de integração explícito de Euler:

$$\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{=i+1}^{vp} = \delta t \underline{\underline{d}}_{=i}^{vp} \quad (313)$$

onde o índice  $i$  representa a  $i$ -ésima iteração do algoritmo.

Assim, a expressão anterior é definida em função dos últimos valores conhecidos para  $\underline{\underline{\sigma}}$  e

$\underline{p}_{vp}^s$ :

$$\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} = \delta t \left[ \frac{1}{\eta_{vp}} \langle \Phi(F) \rangle^n \frac{\partial f_d^{vp}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] \quad (314)$$

Com o incremento de deformação viscoplástica  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ , determina-se  $\underline{p}_{vp}^s$  e o incremento de força viscoplástica  $\delta\underline{F}^{vp} = \delta\underline{F}^{vp}(\delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp})$ . O sistema de equações com o vetor de forças é novamente calculado:

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{U} = \delta\underline{F} + \delta\underline{F}^{vp} \quad (315)$$

Em caso de carga viscoplástica, o estado de tensão está localizado fora do domínio de elasticidade definido por  $f_s^{vp}$ . O simulador adota um critério de convergência baseado nos deslocamentos.

Uma vez resolvido o sistema de equações (314), deve-se recalculer o incremento de deformação  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  segundo (310) e verificar a convergência do algoritmo. Se o resultado for positivo, tem-se a solução do problema para:

$$\begin{cases} {}^{t'} \underline{\underline{u}} = {}^t \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{U}} \\ {}^{t'} \underline{\underline{\varepsilon}} = {}^t \underline{\underline{\varepsilon}} + \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \\ {}^{t'} \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} = {}^t \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} \\ {}^{t'} \underline{\underline{\sigma}} = {}^t \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{C}} : (\delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) \\ {}^{t'} p_{vp}^s = H(\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) \end{cases} \quad (316)$$

Em caso de não atendimento do critério de convergência do algoritmo, deve-se calcular novamente  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ ,  $p_{vp}^s$  e  $\delta \underline{\underline{F}}^{vp}$ , e resolver novamente o sistema de equações (315). O processo é repetido até que se obtenha a convergência do algoritmo. Na Figura 88, apresenta-se o algoritmo de integração.

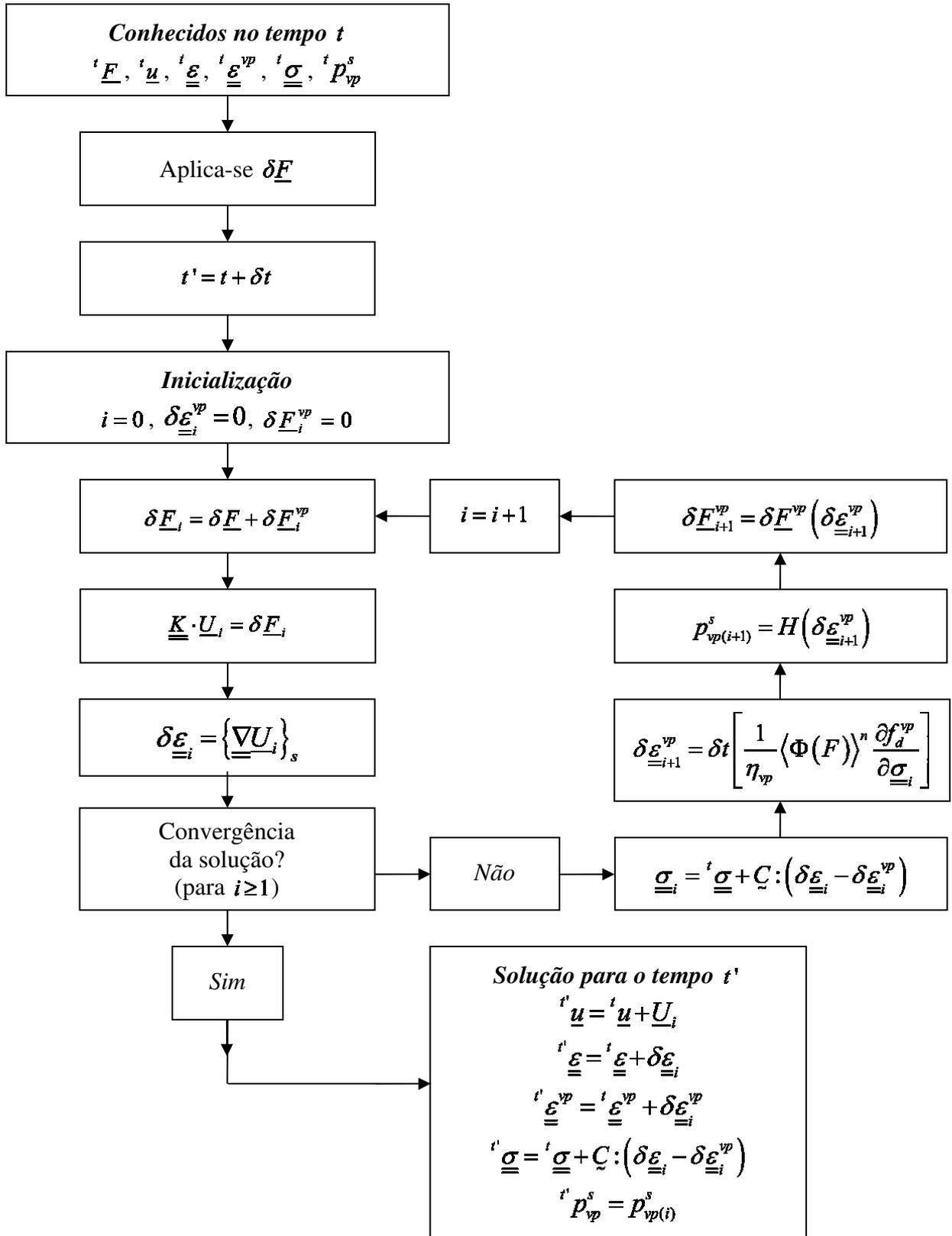


Figura 88: algoritmo de integração das deformações viscoplásticas (BRÜCH, 2016).

### Integração simultânea das deformações irreversíveis

Na Figura 89, apresentam-se os algoritmos de integração das deformações irreversíveis para o caso onde as deformações plásticas e viscoplásticas ocorram simultaneamente:

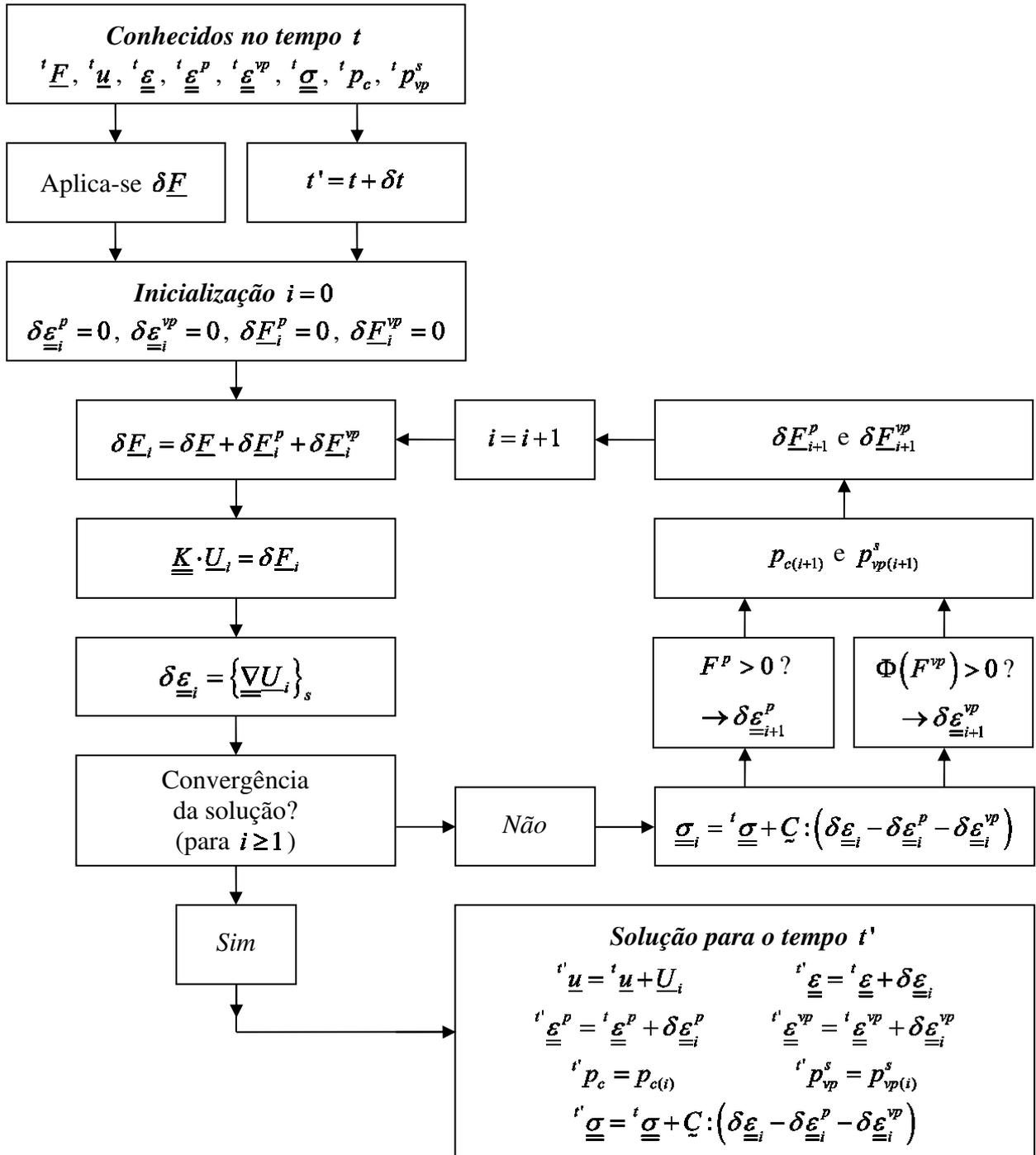


Figura 89: algoritmo de integração simultânea das deformações plásticas e viscoplásticas (BRÜCH, 2016).