UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ATIVIDADES SOBRE FUNÇÕES EM AMBIENTES VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM: UM ESTUDO NA EDUCAÇÃO POPULAR COM OPORTUNIDADES DE RACIOCÍNIO-E-PROVA

THOR FRANZEN

PORTO ALEGRE,

2019

Thor Franzen

ATIVIDADES SOBRE FUNÇÕES EM AMBIENTES VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM: UM ESTUDO NA EDUCAÇÃO POPULAR COM OPORTUNIDADES DE RACIOCÍNIO-E-PROVA

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao departamento de matemática pura e aplicada do instituto de matemática e estatística da universidade federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção de grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva

Porto Alegre

2019

CIP - Catalogação na Publicação

Franzen, Thor
Atividades sobre funções em ambientes virtuais de aprendizagem: Um estudo na educação popular com oportunidades de Raciocínio-e-Prova. / Thor Franzen. -- 2019.
98 f.
Orientador: Rodrigo Sychocki da Silva.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2019.

1. Matemática. 2. Funções. 3. Ambiente Virtual de Aprendizagem. 4. Educação Popular. 5. Raciocínio-e-Prova. I. Sychocki da Silva, Rodrigo, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

ATIVIDADES SOBRE FUNÇÕES EM AMBIENTES VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM: UM ESTUDO NA EDUCAÇÃO POPULAR COM OPORTUNIDADES DE RACIOCÍNIO-E-PROVA

Thor Franzen

Banca examinadora:

Orientador Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Profª Drª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática e Estatística – UFRGS

Profª Drª Fernanda Wanderer
Faculdade de Educação – UFRGS

AGRADECIMENTOS

Queria começar agradecendo os professores que tive até aqui, desde a escola até a faculdade. Eles influenciaram minhas decisões que me trouxeram até aqui e os levo como exemplo para o exercício da profissão. Agradeço em especial ao meu orientador Rodrigo, que me acolheu e aconselhou muito bem.

Agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que me proporcionou uma educação gratuita e de qualidade, que, através da política de cotas, dá sentido e apoio ao meu trabalho no pré-vestibular popular, ofertando a educação sem custo também aos meus alunos.

Agradeço também do fundo do meu coração a minha família, que me dá todo apoio do mundo desde sempre. Minha mãe Arlene, meu pai Ernesto, minhas avós Dolores e Ubiracyra e minhas tias Adriane e Ceci.

Também agradeço a minha namorada, Natália, que fez o TCC junto comigo e foi minha companheira nessa batalha, me aguentou em momentos difíceis e me abraçou em momentos bons.

RESUMO

A presente pesquisa está inserida na tendência do uso de mídias digitais e tecnologias da comunicação no ensino de Matemática. O seu objetivo geral é investigar as potencialidades e os desafios trazidos por uma atividade desenvolvida pelo autor e disponibilizada em um ambiente virtual de aprendizagem no que diz respeito ao processo de Raciocínio-e-Prova e a intradisciplinaridade matemática. Apoiado na educação popular e na teoria dos registros semióticos, o trabalho faz um estudo de caso de uma atividade realizada no laboratório de informática com uma turma do pré-vestibular popular Dandara dos Palmares e tem metodologia exploratória e híbrida entre qualitativa e quantitativa. Utilizando a plataforma *online* GeoGebraGroups, a pesquisa apresenta evidências de que o trabalho com o computador pode facilitar as etapas do raciocínio dedutivo matemático, bem como a conversão entre os registros cognitivos dos alunos sobre o objeto matemático em questão, as funções.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de Matemática. Funções. Raciocínio-e-prova. GeoGebraGroups. Educação Popular.

ABSTRACT

The present research is inserted in the tendency of the use of digital media and comunication technology in Mathematics teaching. It's general objective is to investigate the potencialities and challenges that come from an activity developed by the author and posted in a virtual learning environment refering to the process of Reasoning-and-Proof and the mathematical intradisciplinarity. Based on popular education and the theory of semiotical registers, the work is about a case study of an activity that took place in an informatics lab with a group of students from Dandara dos Palmares, and have na exploratory methodology hibrid between qualitative and quantitative. By utilizing the online platform GeoGebraGroups, this research presents evidence that the work with computer can facilitate the process of mathematical reasoning and the conversion between the student's cognitive registers about the selected mathematical object, the functions.

Key-words: Math teaching and learning. Functions. Reasoning-and-Proof. GeoGebraGroups. Popular Education.

LISTA DE ABREVIATURAS

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso
UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul
ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio
SISU – Sistema de Seleção Unificada
AVA – Ambiente Virtual de Aprendizagem
PVP – Pré-Vestibular Popular
IFRS – Instituto Federal do Rio Grande do Sul
PT – Partido dos Trabalhadores
ONGEP – Organização Não-Governamental para a Educação Popular
PEAC – Projeto Educacional Alternativa Cidadã
CEUE – Centro de Estudantes Universitários de Engenharia
COLEP – Coletivo pela Educação Popular
ONU – Organização das Nações Unidas
RP – Raciocínio-e-Prova
PNLD – Plano Nacional do Livro Didático
PNLEM – Plano Nacional do Livro didático do Ensino Médio
CC – Classificação Conceitual
SI – Substituição de Incógnitas
AM – Algoritmo e Manipulação Algébrica
RPP – Raciocínio-e-Prova: Identificação de Padrão
RPC – Raciocínio-e-Prova: Criação de Conjectura
RPA – Raciocínio-e-Prova: Argumentação
RPD – Raciocínio-e-Prova: Demonstração
Int G – Interpretação Geométrica
Int P – Interpretação de Língua Portuguesa
QR – *Quick Response*

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1 Introdução

O TCC é a produção escrita resultante de toda uma trajetória no curso de graduação, todas as minhas práticas e estudos realizados na UFRGS desde 2015 contribuíram não só para o desenvolvimento deste escrito, como também para a minha formação profissional e pessoal. E venho descrever e dissertar sobre eles, bem como sobre uma turma em um local especial.

O projeto de pesquisa teve seu pontapé inicial em 2018 inspirado no uso das mídias digitais na educação cujo primeiro contato acontecia na disciplina de Educação Matemática e Tecnologia. O plano de estudar um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) e o *software* GeoGebra remontam a essa época, já a descoberta da plataforma online geogebra.org ocorreu enquanto cursava a disciplina de Pesquisa em Educação Matemática, durante a análise de outros TCCs produzidos na universidade. Destaco especialmente o de Louzada (2018), em que a autora, analisando as tarefas propostas por ela, encontrou potencialidades na facilidade de acesso em seu trabalho com geometria espacial.

> A organização do material em um GeoGebraBook permitiu trabalhar com objetos manipulativos, imagens figurativas e problemas que incentivavam a construção e manipulação de representações mentais. Uma vantagem de produzir o GeoGebraBook e trabalhar com o GeoGebraGroupo foi que todas as atividades, com exceção da atividade inicial, foram disponibilizadas e realizadas online. Todas as respostas eram salvas e podiam ser acessadas de qualquer ambiente com internet. (LOUZADA, 2018, p. 74)

Instigado pelos trabalhos correlatos, a minha escolha pelo GeoGebraGroups se deu pelo interesse na funcionalidade do endereço eletrônico e nas potenciais vantagens, inclusive democráticas, que a plataforma pode trazer para o trabalho do professor e o aprendizado dos alunos. Outros autores brasileiros e estrangeiros, cujos trabalhos dialogam com este, também encontraram pontos positivos no uso de mídias digitais em sala de aula. Entre eles, que serão expostos nas próximas páginas, temos Madruga (2017), que concluiu que o uso de um *software* em sala de aula pode causar uma interação futura por parte dos alunos, especialmente pelos mais jovens, que ficam regularmente conectados à internet. Segundo o autor: “Com os tutoriais, o estudante pode aprender sozinho seu funcionamento e a partir daí, manipular o *software*, fazer construções e aprender conteúdos utilizando a manipulação.” (MADRUGA, 2017, p.5)

Com esse embasamento, foi decidido pela investigação das relações de ensino e aprendizagem presentes em uma atividade digital disponível online, e, para a aplicação da prática docente, escolhi a turma de extensivo do pré-vestibular popular (PVP) Dandara dos Palmares, onde trabalho como voluntário desde 2018. Contamos com duas salas no campus Porto Alegre do IFRS e funcionamos lá como projeto de extensão, ligado à responsabilidade social da universidade pública. Todas as sessenta vagas no cursinho haviam sido ocupadas no começo do ano, formando duas turmas, que, devido à evasão observada, acabaram se juntando em uma sala só. Por isso foi aberto um novo chamamento (as inscrições acontecem online pela página do cursinho no *facebook*), e novos alunos foram matriculados, formando a turma da “revisão”, enquanto os que estão desde o início do ano letivo são chamados de “extensivo”. Em função do planejamento anual e do pouco tempo que há disponível para a abordagem dos conteúdos com a turma de revisão, a decisão foi de aplicar a atividade prática desse trabalho apenas com a turma de extensivo.

Essas turmas citadas, assim como as do ano passado são relevantes na minha trajetória na graduação não só pelos créditos complementares que me renderam, mas também pelo aprendizado pessoal e profissional. Lá pude ter contato com professores e alunos cujas histórias de vida são verdadeiras inspirações, enquanto tive uma primeira experiência docente que necessitava de um planejamento global anual, além de agregar outros aprendizados docentes exógenos a sala de aula, que vieram de atividades como realização de matrículas e da livre participação nas decisões pedagógicas do curso.

No começo desse ano, já com o projeto de pesquisa em mãos, ocorreu uma primeira tentativa de realizar a parte prática do trabalho durante a disciplina de Estágio em Educação Matemática II, em uma escola pública de Porto Alegre. A docência, naquela oportunidade, acontecia na Escola Estadual de Ensino Fundamental Visconde de Pelotas, onde a atividade falhou em função das condições do laboratório de informática do colégio. Não foi possível aplicar a sequência didática, pois os computadores de lá funcionavam com o sistema operacional Linux, que não é compatível com o endereço eletrônico do GeoGebra. Foi feito contato com a equipe da aplicação, que reconheceu o problema e recomendou a instalação do programa nos computadores para fazer o trabalho, mas nem isso foi possível naquelas máquinas.

Mesmo com a melhor infraestrutura proporcionada por um Instituto Federal, a pesquisa esbarrou em alguns impedimentos, como a falta de internet em duas tentativas devido à manutenção de rede no prédio. Os dois episódios, tanto na escola quanto no IFRS, foram desafios que atrasaram o trabalho e afetaram bastante a minha motivação, pois causaram frustração e incerteza. Foi justamente na bibliografia, mais precisamente em um artigo sobre o PIBID, que encontrei alguma empatia encorajadora. Segundo Nascimento et. al. (2019):

> Um dos grandes entraves ao desenvolvimento profissional de professores remete-se aos anos iniciais da carreira docente, apontados como os mais difíceis, face as lacunas oriundas da formação inicial, já que os estágios, que possuem finalidade de atrelamento entre o campo teórico e o prático, nem sempre atingem seus objetivos, gerando insegurança em aspectos essenciais da atuação educativa como, por exemplo, a questão disciplinar. (NASCIMENTO et. al., 2019, p. 2, apud SOCZEK, 2011, p. 64)

As funções de primeiro e segundo grau foram escolhidas como escopo específico do trabalho por conta do calendário planejado para a turma no começo do ano e também pela potencialidade observada que o GeoGebra proporciona, uma vez que sua calculadora gráfica consegue gerar gráficos dadas as interpretações algébrica e simbólica, permitindo uma rápida transição para a representação geométrica de retas e parábolas.

Frente tudo isso, nasceu essa pesquisa cuja primeira subdivisão é o capítulo intitulado referencial teórico, feito a partir de uma pesquisa bibliográfica específica sobre os temas centrais do trabalho. Seguida, no terceiro capítulo, pela caracterização metodológica geral e específica para a inspeção dos livros didáticos do assunto e para a análise dos dados gerados na pesquisa de campo. O quarto capítulo descreve a análise dos dados produzidos na pesquisa baseado no referencial teórico, e, nas últimas páginas, as considerações finais concluem o escrito apontando resultados e direções.

2 Referencial Teórico

A parte teórica desse trabalho tem quatro eixos principais, sendo primeiramente a educação popular, contexto no qual está inserida a pesquisa e que traz diretrizes filosóficas e ideológicas. Depois temos o Raciocínio-e-Prova, como processo matemático que oferece uma base didática, junto com o uso de mídias digitais na educação na sequência. Para finalizar o capítulo, será apresentada a teoria dos registros de representação semióticas, que será utilizada durante a análise de dados para uma perspectiva cognitiva.

2.1 Educação Popular

Para compreender o contexto desse trabalho, é necessário primeiramente estudar a educação popular, que é também um dos objetos da pesquisa. O cursinho popular gratuito em que trabalho se chama Dandara dos Palmares, leva o nome da líder quilombola que se revoltou contra a escravidão e o machismo da época colonial. Era esposa de Zumbi e ao lado dele liderava o quilombo dos Palmares, um dos maiores territórios de resistência à escravidão brasileira. Ela cometeu o suicídio no final do século XVII após ser capturada e condenada novamente à escravidão, preferiu a morte. Hoje ela se tornou uma mártir do movimento das mulheres negras no Brasil, ao lado de outros nomes como Chica da Silva e Marielle Franco.

É inspirado nela, na sua luta e nos seus ideais, que surge em 2016, como curso de extensão sediado no Instituto Federal do Rio Grande do Sul, o pré-vestibular que recebe essa pesquisa. Comecei minha trajetória lá no início de 2018, e, com o tempo, fui assumindo mais responsabilidades na organização do coletivo e percebendo que lá é um dos muitos lugares em que a educação popular acontece na prática.

Atualmente existem outros 18 pré-vestibulares populares em Porto Alegre além do Dandara dos Palmares, e tive a oportunidade de conhecê-los quase que na totalidade através de representantes em encontros municipais de iniciativa própria dos cursinhos, ocorridos no DCE da UFRGS no campus centro, e também em um evento promovido pela Faculdade de Educação durante a Campanha Latino-Americana e Caribenha em Defesa do Legado de Paulo Freire. Os outros cursinhos que oferecem esse serviço de maneira gratuita em Porto Alegre são: Cursinho Popular Carolina de Jesus, Cursinho do PT, Afirmação, Esperança Popular, Kilomba, Resgate Popular, Liberato, ONGEP, PEAC, EducaMed, CEUE, Emancipa (com duas sedes), COLEP (também com duas sedes), S.O.S. Zona Sul e TransENEM e Território Popular - esses dois últimos dividem o prédio do IFRS conosco só que no turno da noite, enquanto que as aulas no Dandara são durante a tarde. Todos os pré-vestibulares populares são iniciativas da sociedade civil organizada, que, de acordo com Pini (2012) é a principal desenvolvedora da educação popular.

> A Educação Popular como práxis social é compreendida como aquela que não está institucionalizada, ocorre dentro e com os grupos populares; é determinada pela realidade e sua perspectiva é histórica. Desenvolve-se na sociedade para se contrapor ao projeto educacional dominante. Por isso é adotada em diferentes contextos, principalmente pelos movimentos sociais do campo e da cidade. Há a defesa, por parte do movimento pela escola pública, gratuita, laica e de qualidade, que a Educação Popular se transforme em uma educação também financiada e oferecida pelo poder do Estado, a serviço dos interesses e projetos com as classes populares. (PINI, 2012, p.1)

Conceituada como um movimento civil de educadores identificados com a educação libertadora com uma base simbólico-ideológica de processos políticos de organização e mobilização de setores das classes populares, a educação popular é alicerçada na soberania do povo, na justiça social e no respeito integral aos direitos humanos (BRANDÃO, 2006). Segundo o autor:

> Entre graus variáveis de oposição a tal pressuposto, estão aqueles para quem uma das principais características de uma educação popular é justamente a ampliação da sua possibilidade de ser alternativo. Dirigida a sujeitos, grupos e classes populares em suas comunidades de vida e trabalho e, cada vez mais, um assunto, um trabalho, e um sistema que o povo participe como presença e, no limite, como poder. Que ela seja portanto: escolar e extra-escolar, pública (municipal, estadual, federal) e alternativamente civil. Bem ou mal, o poder do Estado é responsável pela distribuição do saber escolar e esta foi, não esqueçamos, uma conquista democrática. (BRANDÃO, 2006, p. 29)

A partir do estudo sobre a perspectiva filosófica da educação popular, um dos conceitos recorrentes entre os autores do assunto é o de direitos humanos, que são considerados básicos e universais, concedidos a todos independente de gênero, raça, religião, orientação sexual ou política, para garantir a dignidade. Na declaração universal dos direitos humanos, promulgada pela ONU, consta o direito à educação - bandeira levantada pela educação popular, que defende que ela deve ser ofertada com qualidade de maneira universal e gratuita. O seu primeiro artigo já prevê a igualdade entre os seres humanos, visão que permeia toda a declaração e que é fundamental na sociedade democrática. A democracia também é defendida pela educação popular, que tem como um dos seus objetivos a participação do povo na política. Segundo Pini e Adriano (2011), uma sociedade é democrática quando garante direitos, distanciando-se da cultura do privilégio e do favor, as práticas democráticas constroem interesses comuns e processualmente diminuem as desigualdades. Ainda segundo os autores:

> Nesse sentido, a educação em direitos humanos se apresenta como alternativa de sociabilidade ao mundo contemporâneo, pois seus princípios rompem com a lógica de uma educação geral, na medida que forja espaços de diálogo, crítica, conflito e transformação social. Constrói valores republicanos e se apresenta como plataforma de uma nova cultura política, na medida em que reconhece os espaços de participação política como lócus de socialização do poder. Estimula a cidadania ativa desde a infância, em diferentes espaços educativos, porque compreende que é um direito humano. Alimenta-se da realidade, é intencional, dialética e contraditória. (PINI e ADRIANO, 2011, p. 28)

A educação popular é, portanto, uma prática educativa cujo ponto de partida é a realidade social. Analisando-a dentro do contexto histórico brasileiro, temos que suas origens remontam para a década de 1940, quando se pensava em dar educação de base a uma população que era essencialmente rural visando o desenvolvimento econômico e social, bem como a defesa da nação (PEREIRA e PEREIRA, 2010).

Nessa e na década seguinte, ocorreram congressos nacionais de educação de adultos, em que educadores debateram sobre suas concepções e práticas educacionais. É nesse cenário que começa a se destacar o pensamento de Paulo Freire, quando em 1962 ele desenvolveu e aplicou uma experiência em alfabetização de adultos realizada na cidade de Angicos, Rio Grande do Norte. Suas ideias são referência para os estudiosos da educação até hoje, mesmo depois da sua morte, pois seu trabalho é inovador e a produção foi intensa. Nos anos 1970, durante o regime militar, ele propôs, em oposição à educação bancária, uma educação para a liberdade, em que homens e mulheres se descobrem como produtores culturais e compreendem a relação do homem com a natureza e com a sociedade - abraçando seu potencial transformador. O contraponto é a educação bancária, que seria o ensino pela coerência mercadológica, em que o processo educativo é uma mercadoria e um ato permanente de depósito de conteúdo. Não há nela a superação da relação do educador com o educando, que, pelo contrário, é enfatizada. Segundo o autor, o qual faz críticas à educação bancária, ela “não pode servir senão à domesticação do homem” (FREIRE, 1981).

> Essa experiência de alfabetização, a partir dos princípios da educação para a liberdade, procurava superar a educação domesticadora, ou educação bancária como assim denominou. Para Freire, a educação popular seria um espaço em que o homem ultrapassaria sua situação de homem-objeto a homem sujeito-histórico transformador. O que se pretendia era a construção de um projeto político que possibilitasse superar a dominação do capital sobre o trabalho e, assim, reformular a forma de organização da sociedade. (PEREIRA e PEREIRA, 2010, p. 77)

Paulo Freire continuou sua produção científica e seu impacto social, inclusive como secretário de educação do estado de São Paulo, durante a redemocratização e a década de 1990 até o seu falecimento em 1997. Freire sempre propunha a conscientização ao invés da memorização e da mecanização do trabalho e do estudo, de acordo com o autor, “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção” (FREIRE, 2013, p. 24).

> O potencial desse projeto político de educação está na forma como, mesmo diante de muitas dificuldades e precariedades, a educação popular sobreviveu às ações de desmobilização e desmonte dos movimentos populares. Ela não só resistiu e permaneceu atuante, como contribuiu para que educadores e educadoras levassem para as escolas o que aprenderam em sua militância política nos movimentos sociais e sindicais. Os governos democráticos e populares, que foram ganhando espaço na sociedade brasileira a partir dos anos 80, também se apoiaram nas experiências da educação popular para a definição de políticas educacionais. (PEREIRA e PEREIRA, 2010, p. 83)

Mesmo após a sua morte, as ideias de Paulo Freire seguem atuais tanto na academia quanto na educação e na pedagogia. O Dandara dos Palmares é um dos projetos que existem baseados nas suas ideias de educação libertadora, transformadora e acolhedora. Entendo que a partir dessas ideias e reflexões que o ingresso no ensino superior representa para os nossos alunos a esperança de mudança de realidade, tendo em vista que muitos dos que frequentam o cursinho serão os primeiros das suas famílias a estudar em uma faculdade. Todavia a exposição de conteúdos e resolução de questões de vestibular não são os únicos objetivos do pré-vestibular, que tem a responsabilidade também de libertar os alunos de preconceitos (tantos seus quanto de terceiros) quebrando o ciclo da opressão.

No cursinho, adotamos uma postura acolhedora com todos e todas as histórias que existem lá dentro. Por carregar o nome da Dandara conosco, temos uma responsabilidade maior com o público negro e pardo, mas eles não são os únicos acolhidos por nós. Também recebemos alunos de baixa renda envolvidos em todos contextos, como, por exemplo, os casos de alunas que largaram o estudo por causa da maternidade e enxergam no cursinho a possibilidade de buscar uma melhor realidade em que se encontram com seus filhos, ou os casos dos alunos com algum tipo de deficiência motora ou cognitiva, diagnosticados no espectro autista, que frequentam o cursinho e estão correndo atrás do ingresso em uma instituição pública de ensino superior através do vestibular ou do Sistema de Seleção Unificada.

A questão da evasão é um problema que se apresenta como uma boa forma de analisar a situação dos alunos do Dandara, ela se dá majoritariamente por três motivos diferentes: emprego, dinheiro e família. Temos casos de alunos que recorrem ao cursinho popular por encontrarem-se sem ocupação no começo do ano, quando uma oportunidade de emprego aparece, esses alunos não têm mais o tempo necessário para frequentar o cursinho no turno da tarde. Lembro do caso que aconteceu esse ano, de um aluno que começou em um novo emprego e não podia mais ir às aulas no turno da tarde. Foi feita uma articulação com outro cursinho popular no turno da noite e ele foi remanejado para estudar lá. Problemas econômicos, geralmente ligados à falta de dinheiro para a passagem, também podem diminuir a frequência de alguns alunos, que, mesmo com o direito a meia passagem de estudante, não conseguem se deslocar de regiões mais distantes por precisarem de até mesmo mais de uma condução. Problemas familiares também podem causar a desistência de alunos, seja por falta de estrutura ou por uma exigência maior como a de um parente doente por exemplo.

Frente a isso, é papel do professor manter as portas abertas em todos os casos, oferecendo uma mão amiga aos seus alunos que por algum motivo estejam com dificuldades de frequentar as aulas. Segundo Fiss et. al. (2012): “O aluno precisa sentir-se motivado a comparecer às aulas, o professor precisa estimular o pensamento crítico-questionador. A arte e todas as demonstrações de cultura popular podem e devem estar presentes no currículo escola” (FISS et. al., 2012, p. 155). É responsabilidade do professor valorizar a história do sujeito com uma postura acolhedora, e isso é um dos pilares da educação popular, segundo Favarão (2011):

> Quebrar os paradigmas seculares de exclusão na escola é imperativo para uma educação em direitos humanos. Construir uma cultura da paz, de reconhecimento das diferenças sociais, econômicas, religiosas, culturais e de orientação sexual ou ideológica demanda gerenciar uma escola aberta, universal e pluridimensional, onde caibam todos, respeitados os acordos também estabelecidos por todos. (FAVARÃO, 2011, p. 192)

Para o cursinho popular, não basta abordar apenas os conteúdos para as provas de novembro (ENEM e o vestibular da UFRGS), é necessário também educar para o mundo, para a vida e para a cidadania, garantindo acesso à educação de qualidade mesmo depois da idade escolar para aqueles que não tem condições de pagar por ela. Esse público-alvo é composto pelos grandes sujeitos da educação popular, e é importante que os professores tenham uma abordagem plural com eles, não discriminatória e valorizadora das suas histórias egressas, buscando ampla divulgação e enaltecimento dos direitos humanos. Novamente, ancorado nas ideias de Pini (2012):

> Compreender que a educação popular requer uma articulação com a educação em direitos humanos, a qual compreendemos como a educação permanente, crítica, dialógica, participativa e fundamentada em uma teoria que assegure a compreensão da realidade e voltada para a mudança da estrutura da sociedade capitalista; uma educação em que as diretrizes tem clareza dos seus valores e princípios e não se foca na transmissão de conhecimentos; é a educação que envolve os cidadãos para o processo de construção do exercício da cidadania ativa, ocupação do espaço público e permanente luta pelos direitos sociais. (PINI, 2012, p.8)

Em virtude disso, é evidente que a educação popular não pode se resumir à ultrapassada concepção de educação como transferência de conhecimento, é preciso também contextualizar as matérias trabalhadas de acordo com a realidade dos alunos.

Especificamente para o caso da Matemática, abre-se espaço para a abordagem do processo de Raciocínio-e-Prova, que se propõe em ir além das questões de múltipla escolha das provas que permitem o acesso ao ensino superior. Esse processo, que é central para a Matemática e seu caráter dedutivo, será abordado na próxima seção, com explicações, desdobramentos e consequências para o trabalho.

2.2 Raciocínio-e-Prova

A Matemática é uma disciplina milenar que tem um caráter investigativo, que busca encontrar padrões que se repetem e generalizá-los. De acordo com Stylianides (2009), a matemática tem o processo de RP como elemento central na resolução de problemas devido ao seu caráter heurístico e dedutivo. A sua abordagem em sala de aula traz benefícios para o desenvolvimento da cognição dos estudantes, especialmente na compreensão das relações de causa e efeito, representada através de implicações, proporcionando uma educação que não é apenas transferência de conhecimento, mas sim a aprendizagem de um processo de investigação e argumentação que pode ser aplicado em diversas situações do cotidiano.

Ainda segundo o autor, o Raciocínio-e-Prova é dividido em quatro etapas: a primeira consiste na identificação de um padrão, seguido do desenvolvimento de uma conjectura generalizada, a terceira etapa seria defender ou refutar a conjectura criada através da argumentação, caso a hipótese formulada seja falsa, retorna-se à primeira etapa. Por fim, é necessária uma demonstração matemática - que não precisa ser muito formal no contexto escolar, ela pode ser uma argumentação genérica que tenha sentido dado o contexto da sala de aula, é importante que o aluno perceba que está provando algo. Segundo o autor, uma justificativa generalizada em linguagem informal, chamada de *rationale* (STYLIANIDES, 2009) pode ser considerada uma prova pelo professor que avalia a demonstração do aluno:

> Sendo válidos, porém argumentos menos desenvolvidos do que uma prova, os rationales podem ser acessados mais facilmente pelos estudantes do que uma

> prova e, portanto, tem o potencial de servirem como uma estágio de transição entre argumentos empíricos e provas[1]. (STYLIANIDES, 2009, p. 267)

Nesse contexto, o uso das mídias digitais pode ser um facilitador na aplicação desse importante processo em sala de aula. De acordo com Notare e Basso (2018), a utilização de provas na educação matemática tem potencial de fomentar todos as partes anteriores do processo de RP. Segundo os autores:

> A contribuição potencial da prova na Educação Matemática é a comunicação do entendimento matemático, com o objetivo de encorajar os estudantes a fazer conjecturas, explicar seu raciocínio, validar suas afirmações, além de discutir e questionar seu próprio raciocínio e a argumentação dos demais colegas. (NOTARE & BASSO, 2018, p. 2 apud Hanna e Jahnke, 1996)

Utilizando o GeoGebra, que cria e desenha gráficos na tela instantaneamente, é possível analisar conjecturas de forma rápida, podendo confirmá-la ou descartá-la facilmente transitando entre a representação do objeto matemático em questão. As próprias orientações curriculares para o Ensino Médio perceberam essa potencialidade no uso das tecnologias também:

> Já se pensando na tecnologia para a matemá tica, há programas de computador (software) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o "pensar matemático", ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. (BRASIL, 2006, p. 88)

É baseado nas potencialidades trazidas pelo uso de *softwares* educativos para o processo de Raciocínio-e-Prova e suas respectivas etapas, que entra a pesquisa em mídias digitais dentro desse trabalho. A utilização do computador em sala de aula é uma modernização necessária, que permite um diálogo importante sobre o uso da tecnologia, bem como traz vantagens para a aprendizagem dos estudantes ao facilitar cálculos, simulações e trocas de registro cognitivo.

---

[1] Tradução livre. Citação original: "Being valid but less developed arguments than proofs, rationales can be more easily accessible to students than proofs and, thus, have the potencial to serve as transitional stage between empirical arguments and proof."

2.3 Mídias Digitais na Educação

O uso da tecnologia da informação e comunicação no contexto educacional, primeiramente com um olhar específico no da educação popular, se faz necessário quando o assunto é a inclusão digital, tendo em vista o impacto provocado pela tecnologia da informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Hodiernamente, os celulares já são tão populares que quase todos têm acesso a um aparelho, todavia a exclusão digital (que deve ser combatida) não é exatamente um distanciamento da tecnologia, mas sim a incapacidade de criar maneiras mais justas da distribuição de riqueza simbólica e material (SCHWARTZ, 2000). Portanto se faz necessário pensar a inclusão digital de uma forma dialética, “deixando de lado qualquer iluminismo ingênuo ou perspectivas assistencialistas de distribuição de equipamentos” (FANTIN & GIARDELLO, 2009, p. 72).

Com um ponto de vista mais tecnicista (mas não menos válido), temos o argumento de que a inserção das tecnologias no cotidiano exige uma capacitação cada vez maior das pessoas para seu uso (MADRUGA, 2017). Todavia, segundo Fantin e Giardello (2009), a educação abre mão da socialização dos conhecimentos aliados aos valores humanos quando enfatiza o tecnicismo instrucional. Temos então o argumento da cidadania, que afirma: “programas sociais de inclusão digital são praticados como possibilidade de acesso a tecnologias da informação e comunicação, as quais são importantes para que se promovam os direitos políticos, civis e sociais” (MASSENSINI, 2011, p. 1). A inclusão digital tem papel crucial no exercício da cidadania plena, pois garante o acesso à informação (inclusive ao conhecimento dos direitos humanos), bem como o direito à livre manifestação e participação política.

> A inclusão digital pode promover a participação do indivíduo no ciberespaço, que se torna a cada dia a esfera dos debates públicos e que se apresenta como espaço de decisões do Estado. E, ainda, a considerar que antes mesmo da conscientização crítica do ciberespaço, o que levará o indivíduo a buscar informações sociais nesse espaço será a necessidade de pertencimento a algum lugar, espaço de trabalho, profissão - ocupação. (MASSENSINI, 2011, p. 6)

A presença massiva de computadores nos lares e de *smartphones* nos bolsos causou uma mudança nas relações sociais e na forma de pensar, graças à conexão global em rede proposta, que resultou na transição para a cultura digital. Para Santaella (2003), a formação da cultura digital se deve aos novos processos de comunicação que acontecem nesses meios e acabam moldando o pensamento e a sensibilidade dos sujeitos, bem como suas práticas sociais, crenças e valores. Segundo a autora:

> Para compreender essas passagens de uma cultura para outra, que considero sutis, tenho utilizado uma divisão das eras culturais em seis tipos de formações: a cultura oral, a cultura escrita, a cultura impressa, a cultura de massas, a cultura das mídias e a cultura digital. Antes de tudo, deve ser declarado que essas divisões estão pautadas na convicção de que os meios de comunicação, desde o aparelho fonador até as redes digitais atuais, não passam de meros canais para a transmissão de informação. Por isso mesmo, não devemos cair no equívoco de julgar que as transformações culturais são devidas apenas ao advento de novas tecnologias e novos meios de comunicação e cultura. São, isto sim, os tipos de signos que circulam nesses meios, os tipos de mensagens e processos de comunicação que neles se engendram os verdadeiros responsáveis não só por moldar o pensamento, mas também por propiciar o surgimento de novos ambientes socioculturais. (SANTAELLA, 2003, p. 24)

Com a hegemonia da cultura digital, especificamente entre o público da escola, a tecnologia da educação está se alterando. O livro didático e o quadro negro estão sendo gradativamente substituídos ou complementados por instrumentos eletrônicos que desempenham as mesmas funções, como o *ebook* e a lousa digital respectivamente. Os próprios computadores dos laboratórios de informática, que são suporte para a presente pesquisa, já começam a perder espaço para os celulares - que logo serão posse de todos os alunos graças a popularização e a redução de preço proporcionada pelo avanço tecnológico. Esse processo precisa ser acelerado com investimentos em educação, de acordo com Petris (2016):

> A cultura digital está presente no cotidiano da maioria das pessoas. Sendo assim, temos que aceitá-la e inseri-la no contexto escolar, pois os alunos não querem e não podem mais estar num contexto escolar como era há alguns anos. Ensinar com o quadro, livro e caderno não é mais suficiente. E assim, precisamos inserir as novas tecnologias, caso contrário, a escola ficará defasada e ‘antiquada’ diante da cultura digital. (PETRIS, 2016, p. 9)

Segundo a autora, as tecnologias digitais estão transformando as interações, que se tornaram instantâneas. Essas mudanças cobram que a formação de professores seja direcionada nesse sentido, buscando a inserção delas na prática pedagógica, pois muitos alunos em idade escolar e acadêmica hoje já nasceram na cultura digital, chamados de nativos digitais, enquanto os professores são considerados imigrantes digitais (PETRIS, 2016). O uso das mídias digitais no cotidiano escolar como ferramenta didática e da inserção dos *softwares* educativos em sala de aula é mais que uma inovação, é uma necessidade no mundo da informação do século XXI, onde adolescentes e crianças se comunicam quase exclusivamente por celular, tablet e computador.

> É valorizada a utilização da tecnologia nas aulas de matemática, visto que a mesma “deve acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade”. Ainda é mencionado que ao inserir e fazer uso das tecnologias, permite-se afirmar que aprender matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa matéria e que o conhecer matemático deve estar ligado ao saber fazer matemática e de um “saber pensar matemático”. (SILVA e PINTO, 2019, p. 111 apud BRASIL, 2002, p. 118 apud BRASIL, 1999, p. 41)

A educação digital ganha em importância, pois abre o diálogo com os alunos sobre o uso da internet de forma cidadã, o que pode ter efeitos catastróficos se mal feito. Segundo Fantin e Girardello (2009): “A mídia-educação é ao mesmo tempo um campo de reflexão teórica sobre as práticas culturais e o fazer educativo, e assim, pode constituir-se como um espaço de aproximação significativa entre cultura, educação e cidadania.” (FANTIN e GIRARDELLO, 2009, p. 79).

O aprendizado na cultura digital é análogo ao com os livros didáticos de papel, apenas com um suporte diferente, não se limitando à sala de aula. Uma potencialidade percebida no trabalho de Madruga (2017) reconhece que o uso de um *software* educativo em sala de aula pode causar uma interação futura por parte do aluno moderno, já que ele está constantemente conectado à internet pela tela do celular. Segundo o autor, “com os tutoriais, o estudante pode aprender sozinho seu funcionamento e a partir daí, manipular o software, fazer construções e aprender conteúdos utilizando a manipulação” (MADRUGA, 2017, p.3). O conhecimento técnico relativo à operação do aplicativo é importante para o desenvolvimento cognitivo do discente, e traz potencialidades para o estudo de matemática e de seus conteúdos específicos. As próprias Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) já preveem “a matemática como ferramenta para compreender a tecnologia e a tecnologia como ferramenta para compreender a matemática” (BRASIL, 2006, p. 87). Todavia a educação não deve se limitar ao ensino aprendizagem das técnicas relativas ao aplicativo, mas também propor uma discussão sobre o uso das mídias digitais e seu papel na sociedade.

O GeoGebra possui uma aplicação que pode ser instalada em qualquer computador com sistema operacional compatível, ele também conta com um endereço eletrônico (geogebra.org) em que estão disponíveis para uso no navegador as ferramentas oferecidas pelo aplicativo, com a perda de algumas funções. O site foi escolhido para o trabalho da pesquisa não só por não requerer uma instalação prévia do programa, mas também por oferecer o GeoGebraGroups como funcionalidade, fazendo o papel de Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). Os AVAs são *softwares* educacionais via internet, destinados a apoiar as atividades de educação a distância, semipresencial ou presencial. Eles oferecem um conjunto de tecnologias de informação e comunicação, que permitem desenvolver as atividades no tempo, espaço e ritmo de cada participante (RIBEIRO *et. al.*, 2007). Ainda segundo os autores:

> Os AVAs geralmente são desenvolvidos por instituições acadêmicas ou empresas privadas. Eles fornecem aos participantes ferramentas a serem utilizadas durante um curso, para facilitar o compartilhamento de materiais de estudo, manter discussões, coletar e revisar tarefas, registrar notas, promover a interação entre outras funcionalidades. Eles contribuem para o melhor aproveitamento da educação e aprendizagem na EAD, pois oferece diversos recursos para a realização das aulas e interações entre professores e alunos. (RIBEIRO *et. al.*, 2007, p. 4)

Mesmo fora do contexto da EAD, o uso de um AVA, especificamente do GeoGebraGroups, como ferramenta de ensino me chamou a atenção por permitir um fácil acesso dos alunos à sequência didática proposta pelo professor tanto em sala de aula quanto em casa, ou seja, traz vantagens para o trabalho do docente e incentiva o estudo do discente. Os ambientes virtuais de aprendizagem são centrados em conteúdos e atividades de aprendizagem pré-determinada, cujo processo já está previsto de antemão. Eles devem oportunizar ajuda tutorial rapidamente acessível, vários meios de informação integrados, conteúdos enfocados a partir de diferentes pontos de vista, possibilidade de interagir com diferentes conteúdos, contato com o professor e o planejamento detalhado da estrutura de aprendizagem (DOTTA, 2011).

O uso do GeoGebra sob o ambiente virtual de aprendizagem traz também vantagens para a aprendizagem de Matemática em si, quando analisamos a perspectiva intradisciplinar. Não confundir com a interdisciplinaridade, fenômeno que estabelece relações entre as disciplinas escolares, ou com a transdisciplinaridade, que se propõe a ir além das disciplinas e promover um aprendizado que desperte a consciência na aquisição de conhecimento. (FARIA e MALTEMPI, 2019)

A intradisciplinaridade nos faz pensar nas estreitas relações das ramificações de uma mesma disciplina, no caso da Matemática existem três ramificações da disciplina: geometria, álgebra e aritmética - que dão origem a três diferentes formas de representação. A representação aritmética é essencial para a compreensão de um caso particular, mas isolada não é suficiente para a solução de casos gerais. Já a representação geométrica é intuitiva, mas possui algumas imprecisões quando desenhada à mão livre por professores ou alunos devido as escalas e a inexatidão de medições, essas falhas são eliminadas pelo *software* que constrói o gráfico com as proporções perfeitas. Enquanto a representação algébrica é concisa, geral e efetiva na formalização e análise de padrões, todavia dispõe de vários símbolos algébricos que podem dificultar a interpretação de resultados. Todas as representações devem ser exploradas de forma simultânea, pois a conexão entre as ramificações da Matemática é capaz de facilitar a compreensão dos significados dos conceitos, valorizar as semelhanças e eliminar a fragmentação das ideias, contribuindo assim para a ampliação da compreensão que permeia o entendimento dos assuntos matemáticos (FARIA e MALTEMPI, 2019, apud D'AMBROSIO, 2011, p.10). Segundo os autores:

> Por meio das três representações concomitantes, o GeoGebra permite que as desvantagens de cada forma de representação sejam compensadas com as vantagens das outras. É nesse sentido que a abordagem que busca desenvolver e explorar o raciocínio proporcional em uma perspectiva intradisciplinar é favorecida por esse software. Ademais, o uso do GeoGebra permite experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, explorar, argumentar e deduzir propriedades matemáticas. (FARIA & MALTEMPI, 2019, p. 355, apud FRIENDLAND e TABACH, 2001)

As três representações da intradisciplinaridade matemática se relacionam intimamente com a teoria dos registros semióticos de Duval (2009) que será abordada no próximo capítulo. Esses conceitos, assim como o do processo de Raciocínio-e-Prova (STYLIANIDES, 2009), são importantes para a metodologia da pesquisa e a análise de dados desse trabalho que serão apresentados nos capítulos seguintes.

2.4 Registros de Representação Semiótica

Apontado nas orientações curriculares para o ensino médio, são características dos programas de expressão oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático (numérica, algébrica e geométrica), bem como possibilitar a expansão da base de conhecimento dos alunos através de macroconstruções, que seriam as funções de construção geométrica oferecidas pelo *software* (BRASIL, 2006). As representações citadas são as representações semióticas teorizadas por Duval (1993), que formariam o sistema de registros de representação semiótica de um objeto matemático. Conforme explica o autor:

> As representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. (DUVAL, 1993, traduzido por MORETTI, 2012, p. 269)

Por causa dessa importância para a atividade cognitiva dos estudantes, a analítica se dará sob esse referencial teórico, buscando nas respostas se foi possível realizar a compreensão de um ou mais registros, bem como a conversão entre a eles. A união das representações (algébrica, gráfica, simbólica e em língua materna) forma o sistema de registros de representação semiótica, por onde o aluno precisa conseguir transitar, fazendo a conversão mental entre os registros. Ainda segundo o autor:

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e, em poderem ser convertidas em representações 'equivalentes' em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro. (DUVAL, 2009, p. 32)

Segundo Silva (2012), a importância cognitiva das representações semióticas não reside apenas nas suas compreensões individuais, mas também na conversão e conversão de um para outro.

> Pode-se afirmar que ao representar, tratar e converter em representações semióticas, é necessário a mobilização de sistemas cognitivos específicos para cada uma das atividades propostas aos alunos. Com isso, somente pode-se aprender efetivamente as ideias matemáticas através das representações semióticas dos objetos matemáticos. Durante o processo de aprendizagem é importante que o aluno saiba manipular as representações semióticas, com a finalidade de transformá-las em outras, se necessário. (SILVA, 2012, p.47)

De acordo com Notare et. al. (2015), cada objeto é expresso por diferentes registros. Temos o registro gráfico, no sistema cartesiano de coordenadas; o registro aritmético, expressado através dos números envolvidos no problema; o registro algébrico, que se manifesta no campo simbólico dos signos utilizados para escrever a matemática; e o registro em língua materna, dado pela compreensão e expressão do aluno do objeto estudado. O trabalho com as representações individuais e a conversão de registros aborda a intradisciplinaridade matemática ao mostrar diferentes interpretações (aritmética, algébrica e geométrica) de um mesmo conteúdo em questão, especificamente as funções. Segundo os autores:

> Os sistemas de representação semiótica tem importante papel no processo de aprendizagem da matemática. Os objetos matemáticos, em geral, são expressos por meio de diferentes registros, tais como o registro algébrico com suas regras de funcionamento, o registro gráfico, com regras de tratamento que levam à identificação dos elementos pertinentes de uma figura e, dentro deste registro, inclui-se o de natureza gráfica, dado por sistema de coordenadas cartesianas e curvas que nele são traçadas, o registro discursivo em linguagem natural, e também com outros símbolos, com suas regras convencionais de comunicação. (NOTARE *et al.*, 2015, p. 4)

Também baseado nas ideias de Duval, temos o trabalho de Henriques e Almouloud (2016) que tentam explicar melhor a teoria, recorrendo a algumas definições de conceitos chave para a sua compreensão. Além de representação semiótica, temos o signo - que seria “um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico” (HENRIQUES & ALMOULOUD, 2016, p. 468). Os autores citam possíveis ações com as diferentes representações, como a formação, caracterizada pela aplicação de regras de conformidade e seleção de certas características do conteúdo envolvido; e o tratamento, transformação interna de um registro dentro dele mesmo. Eles também definem a conversão de registros como a transformação entre representações diferentes, e a coordenação de registros, que seria o reconhecimento de diferentes representações concomitantes de um objeto.

3 Metodologia

A presente pesquisa está inserida na temática tecnologias da informação e comunicação na educação matemática, e é motivada pela tendência do uso das mídias digitais no cotidiano escolar as próximas seções trazem a caracterização metodológica geral da pesquisa, e a metodologia específica para a análise de livros didáticos e para o estudo de caso empírico.

3.1 Caracterização metodológica

O estudo será feito de acordo com a estrutura de investigação proposta por Fiorentini e Lorenzato (2007), em que o problema e as hipóteses geram uma pergunta de pesquisa, a ser respondida por dois caminhos - pesquisa bibliográfica e investigação empírica. A soma dos dois traz resultados que são filtrados, avaliados e transformados em uma conclusão (exposta no último capítulo), com impactos na área do conhecimento, bem como na prática profissional geral e específica do pesquisador.

O trabalho surge a partir das conjecturas do pesquisador - formuladas através da experiência na graduação e da pesquisa bibliográfica - de que há uma mecanização da matemática escolar, dada pela repetição de processos em métodos tradicionais, e um distanciamento do ensino de matemática para as mídias digitais, cujo estudo é uma das maiores demandas educacionais da sociedade moderna. Na direção das respostas a essas hipóteses, surge uma pergunta norteadora: **De que maneira o material didático com oportunidades de Raciocínio-e-prova disponível em um ambiente de aprendizagem virtual impacta o ensino e a aprendizagem de funções e a intradisciplinariedade matemática?**

Dada a pergunta, temos os objetivos geral e específicos da pesquisa. O primeiro é formular atividades sobre funções de primeiro e segundo grau, que, inseridas no contexto dos alunos e valorizando seus conhecimentos prévios, oportunizem o conhecimento e aplicação do processo de Raciocínio-e-Prova (STYLIANIDES, 2009), e que também possam ser disponibilizadas online de modo aberto e democrático para que qualquer outro professor possa utilizá-las. Enquanto os segundos são observar e avaliar a interação dos alunos com uma atividade disponível na rede através da experiência no laboratório de informática e das respostas dos alunos em questionários; bem como procurar impactos do ambiente virtual no ensino de funções levando em conta as representações semióticas previstas por Duval (2009) - gráfica, aritmética, algébrica e simbólica. Um último objetivo deste trabalho é analisar as vantagens e desvantagens, potencialidades e desafios, que o uso de material didático digital em sala de aula traz para o ensino de matemática.

A análise dos livros didáticos segue uma metodologia predominantemente quantitativa, em que os exercícios serão classificados entre cinco categorias (e outras subcategorias) e as suas frequências e proporções serão analisadas. Também será feito um parecer sobre cada um dos livros analisados, buscando encontrar tendências no currículo. Para a analisar a atividade e a interação dos alunos com ela e com o ambiente virtual de aprendizagem, temos uma metodologia qualitativa em que as respostas dadas serão analisadas valorizando o processo de Raciocínio-e-Prova e a transição entre os diferentes registros de representação semiótica das funções.

3.2 Análise de livros didáticos

Para o desenvolvimento da atividade, partiu-se da análise do conteúdo das funções de primeiro e segundo grau e a sua abordagem nos livros escolares previstos nos últimos planos nacionais de livros didáticos. De acordo com Fan et. al. (2013), a pesquisa em livros didáticos tem quatro caminhos possíveis: (1) o papel do livro didático na educação e no currículo; (2) análise e comparação de texto; (3) o uso do material pelo professor e pelos alunos; e (4) outras áreas - onde os autores incluem o estudo de livros didáticos eletrônicos. Nessa parte, da análise dos livros texto, esse trabalho se encaixa na segunda e na quarta dimensão, pois busca analisar os exercícios presentes nos livros didáticos, em específico no recorte das funções de primeiro e segundo grau, para estudar o currículo atual do ensino médio e observar possíveis melhorias que o uso das mídias digitais em sala de aula podem trazer. A motivação e a justificativa da pesquisa se relacionam com a leitura desse texto, que finaliza com a citação: “Não há dúvida que o rápido crescimento dos livros didáticos eletrônicos pede uma pesquisa nessa direção[2]." (FAN, ZHU, MIAO, 2013, p. 644)

Analisando a literatura nas outras duas dimensões propostas, destacam-se nas últimas décadas os autores que estudaram o papel do livro didático, tanto para o professor quanto para o aluno. Sosniak e Perlman (1990) perceberam que o livro didático possui o papel de guia do estudo, dando a ele uma sequência lógica, atraente e organizada. Ainda segundo os autores, os livros didáticos garantem acesso ao conhecimento, sendo pessoalmente enriquecedor e empoderador. Valverde et. al. (2002) também aparecem na pesquisa bibliográfica como autores que estudaram a relação do livro didático com o ensino e a profissão do professor, concluindo que ele faz o elo entre o currículo e a sala de aula. O estudo da relação dos alunos com o livro didático foi feito, entre outros, por Rezat (2008) que apontou: "Os estudantes não usam o livro didático de matemática apenas quando ordenados pelo professor, eles também o usam de maneira auto-dirigida[3]." (REZAT, 2008, p. 181). Essa é uma das potencialidades esperadas de uma atividade disponibilizada em um AVA, que, ao fazer o papel de um livro didático digital, pode causar uma fácil interação futura no aluno.

A análise dos livros didáticos, que serão utilizados primeiramente como apoio para o trabalho do professor, busca conectar o trabalho e a atividade desenvolvida com o currículo e inspirar ações em sala de aula. A metodologia para o trabalho com o computador também foi construída apoiada em uma seção específica do material de apoio para o professor. Os livros analisados fazem parte das últimas edições do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e a proposta é buscar entre os exercícios sugeridos pelos livros aqueles que proporcionam oportunidades de Raciocínio-e-Prova. A metodologia criada para a análise se apoia no trabalho de Hong e Choi (2018) que analisaram, na Coreia do Sul, as oportunidades de RP proporcionada pelos livros didáticos.

---

[2] Tradução livre. Citação original: "There is no doubt that the rapid growth of electronic textbooks in mathematics calls for research in this direction".

[3] Tradução livre. Citação original: "Students do not only use the mathematics textbook when they are told to by the teacher, but that they use it self-directed."

Para a codificação, as questões, subdivididas em exercícios ordenados por letras ou não, podem receber mais de um código. Inicialmente foram criados quatro códigos, subdividindo os exercícios que possibilitam o RP de acordo com a etapa do processo que faz menção, entretanto o início do trabalho revelou a necessidade de destacar também questões que pedissem algum tipo de interpretação de problemas. Os códigos criados estão apresentados no quadro a seguir.

Quadro 1 – Códigos para a classificação de exercícios de matemática

Código	Descrição
(1) Classificação conceitual (CC)	O aluno precisa apropriar-se de um conceito e classificar um objeto de acordo com ele, como, por exemplo, uma questão que pergunta, entre uma série de alternativas, quais daquelas funções são de segundo grau.
(2) Substituição de Incógnita (SI)	Nesse tipo de exercício o aluno deve substituir uma incógnita por um valor constante ou por uma relação com outra incógnita. São a base da prática algébrica, e são questões que perguntam o valor de uma função em algum ponto.
(3) Algoritmo e manipulação algébrica (AM)	São aquelas em que os alunos precisam aplicar um algoritmo, como a fórmula resolutiva para encontrar as raízes de uma função de segundo grau, ou manipular algebricamente uma expressão utilizando as propriedades das operações.
(4.1) Raciocínio-e-Prova - observação de padrão (RPP)	Consiste em apresentar um padrão e pedir para que o aluno o identifique, geralmente aparece como uma tabela relacionando valores de x e y no contexto das funções.
(4.2) Raciocínio-e-Prova - criação de conjectura (RPC)	Essa categoria de questão pede que o aluno generalize um padrão para criar uma expressão que o represente. Aparecem como um item subsequente a uma questão da categoria RPP ou como resultado da interpretação de uma situação-problema.
(4.3) Raciocínio-e-Prova - argumentação (RPA)	São as questões que pedem uma explicação do aluno, são perguntas mais gerais ou que terminan com a palavra “justifique”, em que o aluno precisa dar uma resposta dissertativa.

(4.4) Raciocínio-e-Prova - demonstração (RPD)	Esses exercícios pedem uma prova formal ou informal de uma relação matemática em questão.
(5.1) Interpretação geométrica (Int G)	Questões que requerem a interpretação de um problema geométrico, frequentemente trazem um desenho para auxiliar a leitura.
(5.2) Interpretação de língua portuguesa (Int P)	Descrição de uma situação-problema em língua portuguesa, que precisa ser modelada pelo aluno através de uma equação ou função a ser resolvida.

Fonte: Do autor

Para tanto, foi construída uma metodologia baseada na codificação de exercícios de acordo com o que é cobrado por ele. Outros autores que utilizaram essa metodologia são Thompson *et al.* (2012), que justificam a ferramenta:

> Nós reconhecemos que não há como saber somente com uma análise do currículo escrito, se os estudantes usam argumentação para resolver os exercícios ou se os professores cobram argumentação dos estudantes enquanto eles completam os exercícios. Consequentemente, a ferramenta de codificar exercícios [mostrada na figura 5] permite uma visão otimista e ampla das potenciais oportunidades que os estudantes precisam apresentar uma argumentação relacionada com prova. [4](THOMPSON *et al.*, 2012, p. 261)

Para completar a metodologia da análise de exercícios, trago o trabalho de Stylianides (2008), que afirma existirem três componentes dentro da análise de exercícios com ênfase em RP. A primeira componente é a matemática, em que os exercícios são analisados por alguém com proficiência na disciplina, onde se inclui a análise feita dos exercícios dos livros didáticos. A segunda é a componente psicológica, que investiga a percepção dos alunos sobre os exercícios, se faz presente nas perguntas respondidas pelos alunos antes e depois das tarefas em questionários aplicados com o google forms. E por último a componente pedagógica, que faz referência aos processos cognitivos e

[4] Tradução livre. Citação original: "We acknowledge that there it no way to know, solely from na analysis of the written curriculum, whether students use reasoning to address the exercises or whether teachers require reasoning from students as they complete the exercises. Hence, the framework for coding exercises [outlined in Figure 5] enables na optimistic or broad view of the potencial opportunities that students have to engage with proof-relatede reasoning."

didáticos encontrados pela análise da interação com os exercícios tanto pelo professor quanto pelos educandos. A cobertura do terceiro componente acontecerá no próximo capítulo durante a análise das respostas dos alunos para a atividade, bem como do diário de observação do professor (STYLIANIDES, 2008).

A análise dos livros didáticos é o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade, que também será analisada no capítulo seguinte. Na próxima seção, apresenta-se mais sobre como ela foi desenvolvida e como serão analisadas as respostas dadas pelos alunos durante a pesquisa de campo.

3.3 Materiais e métodos

A composição da atividade, a análise dos dados e a atuação do professor no lugar de pesquisa foram realizados apoiados na abordagem fenomenológica, que, segundo Bicudo (2013), torna a investigação uma pesquisa da realidade dos sujeitos, que são convidados a pensar no que faz sentido para eles. Segundo a autora, “a fenomenologia coloca em evidência a linguagem, entendida como expressão do sentir, e o discurso, entendido como articulação daquilo que faz sentido. Trabalha desse modo, o sentido e o significado.” (BICUDO, 2013, p. 120)

Para buscar respostas às perguntas de pesquisa, os alunos do pré-vestibular popular Dandara dos Palmares tiveram contato com duas atividades, uma sobre funções de primeiro grau e outra sobre funções de segundo grau, disponibilizadas no ambiente virtual de aprendizagem GeoGebraGroups. As atividades foram aplicadas nos laboratórios de informática do IFRS com dois períodos destinados para a realização de cada uma. As questões do estudo dirigido, a ser apresentado no próximo capítulo, foram criadas sob a luz do conceito de Raciocínio-e-Prova e da teoria dos registros cognitivos semióticos. A finalidade é trabalhar com os alunos questões sobre funções, que abordem as diferentes etapas do processo de RP - identificação de padrão, criação de conjectura, argumentação e demonstração, e permitam compreensão e conversão de um ou mais registros simultaneamente. Por falta de contexto, nenhuma demonstração formal foi empregada, todavia aquilo que Stylianides (2009) chamou de rationale, argumentação através do registro verbal em língua materna de maneira informal, pode ser utilizado para responder alguma questão. As mídias digitais podem ser um diferencial nessa abordagem, e potencialidades já foram observadas por outros autores, segundo Vargas e Notare (2014):

> Com a utilização dos recursos tecnológicos, em especial os programas de geometria dinâmica, a aprendizagem dos alunos quanto aos conceitos matemáticos pode ser muito mais expressiva, visto que partem de um processo estático que os livros e quadro negro trazem, para um processo de construção de conceitos, conjecturas, argumentação e demonstração através dos desenhos em movimento. (VARGAS & NOTARE, 2014, p. 3-4)

Por trabalhar observações de padrões e implicações lógicas, a abordagem do processo de RP em sala de aula pode trazer benefícios para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, ajudando-os a compreenderem melhor as relações de causa e efeito do mundo que os cerca. As atividades estão inseridas no contexto da educação libertadora e para a autonomia, segundo Perius (2012):

> Tornar a aprendizagem um processo dinâmico em que a experimentação, o levantamento de hipóteses, a busca por conjecturas e pela validação do percebido podem levar o aluno a construir um modo de pensar matemática que lhe seja significativo. Para Borba (2002), esse é um dos caminhos possíveis para desenvolver a autonomia, e tornar o aprendiz sujeito ativo e responsável pela construção do seu conhecimento. A participação ativa do aluno pode ser favorecida pelas tecnologias na informática. (PERIUS, 2012, p. 30 apud Borba, 2002)

Os dados foram gerados a partir das respostas dos alunos às questões de duas atividades formuladas, uma sobre funções de primeiro grau e outra sobre funções de segundo grau, e também a partir das respostas dadas a dois questionários, um antes das atividades e outro ao final. Uma das vantagens esperadas na coleta vem do próprio AVA, onde os alunos podem enviar as respostas da sequência didática pelo próprio endereço eletrônico. Com esse apoio, o trabalho do pesquisador fica facilitado e, com o auxílio de um diário de campo para anotar acontecimentos da aula, a coleta de dados ficará completa. Por emular exercícios que poderiam estar presentes em um livro didático, em papel ou digital, será utilizada a metodologia proposta por Rezat (2008) que estabeleceu três critérios de uma metodologia apropriada para a coleta de dados sobre o uso de livro didáticos pelos alunos. O primeiro é o registro da utilização propriamente dita do material pelos estudantes em sala de aula, que será feita através do diário de observação e do envio de respostas na plataforma. O segundo diz respeito a minimizar a interferência externa e do pesquisador no ambiente a ser estudado, mais difícil de garantir, uma vez que o pesquisador é também quem deve auxiliar os alunos e dar explicações durante a execução da atividade. A postura de professor mediador e facilitador, utilizando uma sequência didática produzida para ser inteligível, com textos claros e autoexplicativos, de modo que os alunos possam percorrer e compreendê-la individualmente, garantirão a autenticidade dos dados produzidos. O terceiro e último critério proposto pelo autor diz respeito à coleta quando os alunos não estão em sala de aula, pois o uso do livro didático também se dá de maneira autônoma, ainda que influenciada pelo professor (REZAT, 2008). O AVA também se encarrega de enquadrar a pesquisa nesse último critério também, uma vez que os alunos podem acessar o grupo criado de casa e mandar respostas para as perguntas.

O material digital criado e disponibilizado no GeoGebraGroups tem como objetivo exercitar todas as representações semióticas possíveis no conteúdo de funções (escrita, geométrica, aritmética e algébrica), bem como a conversão entre eles. A sua análise detalhada vem na sequência, sendo precedida pela análise dos exercícios dos livros didáticos e do ambiente virtual de aprendizagem, e sucedida pela análise das respostas recebidas dos alunos sobre a atividade e sobre os questionários.

4 Análise e Interpretação de Dados

Com esses métodos apresentados no capítulo anterior, a pesquisa se propõe a analisar cinco frentes que descrevem o contexto do trabalho – os livros didáticos, o ambiente virtual de aprendizagem, a sequência didática proposta, as respostas dadas pelos alunos e os questionários respondidos por eles.

4.1 Análise dos livros didáticos

Os três livros escolhidos para análise formam uma amostragem bem heterogênea, sendo livros de diferentes autores e anos, cada um presente em um triênio diferente do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). São eles: “Matemática Aula por Aula”, de Claudio Xavier e Benigno Barreto, recortado do Programa Nacional do Livro didático para o Ensino Médio (PNLEM) dos anos de 2009 a 2011; “Matemática ciência e aplicações”, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Dagenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, do PNLD 2012, 2013 e 2014; e “Matemática contexto e aplicações”, de Luiz Roberto Dante, presente no PNLD do triênio de 2016 a 2018. Os livros foram utilizados como apoio para algumas definições da atividade formulada, como por exemplo a definição de função quadrática apresentada como texto de apoio da segunda atividade.

Na análise de exercícios propostos, foram levados em conta todos aqueles sem resolução presentes nos três capítulos dos livros referentes a funções, funções polinomiais de primeiro grau e funções polinomiais de segundo grau. A escolha dos critérios buscava encontrar entre os exercícios propostos aqueles que proporcionam oportunidades de alguma das quatro etapas do processo de RP - identificação de padrão, criação de conjectura, argumentação e demonstração. Algumas palavras-chave no enunciado indicam o código, como por exemplo “mostre que” indica uma questão que pede uma demonstração e foram codificados como RPD, enquanto aquelas que pedem para justificar a resposta ao final são exercícios de argumentação codificados como RPA.

4.1.1 Matemática aula por aula

O livro “matemática aula por aula” começa a tratar o conteúdo de funções no capítulo três, passando pelo plano cartesiano e pela álgebra de conjuntos, traz definições como injetora, sobrejetora e bijetora e também a de raiz. No capítulo seguinte, sobre funções de primeiro grau, temos a maioria das questões cobrando classificação conceitual, em que aluno precisa se apropriar de algum conceito e identificá-lo em alguma situação, são aquelas que questionam se uma função é crescente ou decrescente por exemplo.

Temos também os exercícios que pedem para o aluno calcular uma função em algum ponto dada a sua lei, esses foram codificados como substituição de incógnitas. Chama atenção que esse livro, justamente o mais antigo entre os analisados, é o que mais traz questões abordando algoritmo ou manipulação algébrica, especialmente no capítulo sobre funções de segundo grau, onde os alunos precisam calcular raízes ou relacionar o valor do determinante com a quantidade de raízes de uma função.

A interpretação gráfica das funções é bem trabalhada com cerca de 20% das questões cobrando algum tipo de interpretação geométrica. São abordadas dessa maneira também as desigualdades de primeiro e segundo grau, todavia as questões são exclusivamente de manipulação algébrica, não privilegiando o raciocínio e a argumentação provenientes desse tipo de situação. Esse tratamento é observado em praticamente todos os exercícios do livro, que apresenta apenas uma oportunidade de Raciocínio-e-Prova nos capítulos analisados.

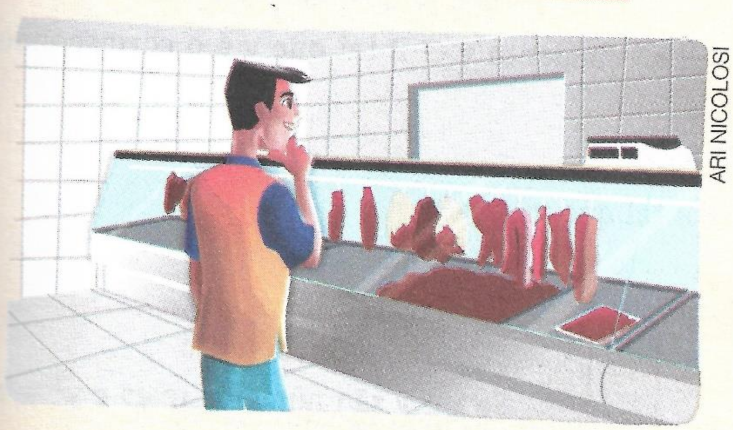
4.1.2 Matemática ciência e aplicações

Já o livro didático intitulado “Matemática ciência e aplicações” apresenta uma estrutura organizacional parecida com o anterior, três capítulos seguidos sobre, respectivamente, funções, funções de primeiro grau e funções de segundo grau. O primeiro exercício abordado (Figura 1) traz oportunidades de Raciocínio-e-Prova ao mostrar uma tabela relacionando o preço da carne em relação com a quantidade em quilogramas e pede para o aluno calcular o preço de algumas quantidades específicas e depois fornecer uma expressão que dá o preço (p) em função de uma quantidade (n) de quilos compradas. Esse tipo de exercício pede a identificação de um padrão e depois a generalização desse padrão, o transformando em uma conjectura. Apenas o primeiro exercício foi construído dessa maneira, os exercícios seguintes que fazem perguntas análogas, podem ser resolvidos simplesmente interpretando a situação exposta, e são codificados como Int P.

Figura 1 – Questão codificada como RPP e RPC

1. Na tabela é dado o preço pago em função da quantidade de carne adquirida em um açougue:

Quantidade (em quilo)	Preço (R$)
0,5	7,00
1,0	14,00
1,5	21,00
2,0	28,00
3,5	49,00



a) Quanto pagará um cliente que comprar 4,5 quilos de carne?

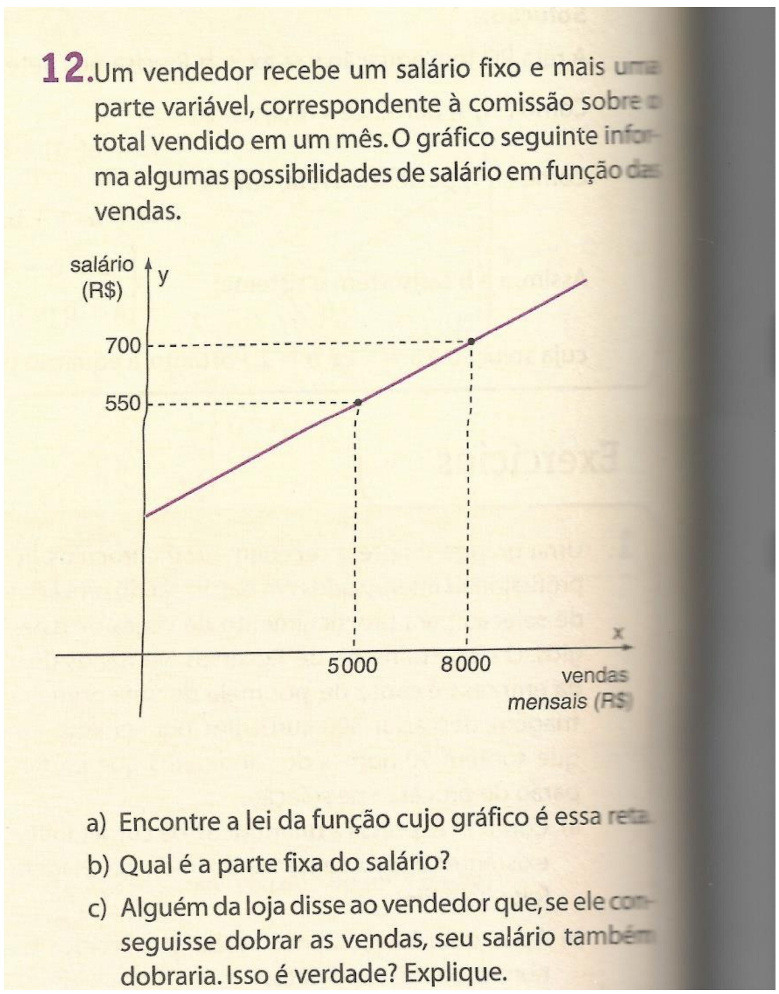
b) Dispondo-se de R$ 350,00, qual é a quantidade máxima de carne que pode ser adquirida?

c) Qual é a lei que relaciona o preço (*p*) em função da quantidade em quilos (*n*) comprada?

Fonte: IEZZI, et. al., 2010, p. 45

Esse livro apresentou três questões que pediam algum tipo de argumentação, trago aqui um exemplo (Figura 2). Essa questão é interessante pois trabalha a mudança de registro, ela apresenta o registro geométrico mostrando o desenho da reta e o algébrico ao destacar dois pontos da função, os primeiros exercícios pedem a conversão para o registro algébrico ao pedir a lei da função e a parte fixa do salário (coeficiente b). Enquanto o exercício com a letra c já pede uma argumentação em que o aluno precisa apropriar-se da situação modelada e explicar com as suas palavras se o salário do vendedor dobra ao dobrar as suas vendas. Esse tipo de questão geralmente vem acompanhada da palavra “explique” ou “justifique” no enunciado.

Figura 2 – Questão codificada como RPA.



12. Um vendedor recebe um salário fixo e mais uma parte variável, correspondente à comissão sobre o total vendido em um mês. O gráfico seguinte informa algumas possibilidades de salário em função das vendas.

a) Encontre a lei da função cujo gráfico é essa reta.

b) Qual é a parte fixa do salário?

c) Alguém da loja disse ao vendedor que, se ele conseguisse dobrar as vendas, seu salário também dobraria. Isso é verdade? Explique.

Fonte: IEZZI et. al., 2010, p. 74

Outra questão que chamou atenção nesse livro foi a única codificada como RPD (Figura 3), ela pede para demonstrar as relações de soma e produto das raízes de uma função de segundo grau com o seu coeficiente.

Figura 3 – Questão codificada como RPD

23. Mostre que uma equação do 2º grau de raízes x_1 e x_2 é a equação $x^2 - Sx + P = 0$, em que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

Fonte: IEZZI et. al., 2010, p. 23

Stylianides (2009) aponta que é importante que o aluno, ao fazer uma demonstração, tenha consciência de que está provando a veracidade de uma afirmação, e isso fica garantido com a palavra “mostre” no enunciado. Ainda assim, foi a única questão encontrada com tal oportunidade, o que ainda é pouco para a matemática do ensino médio.

4.1.3 Matemática contexto e aplicações

O terceiro e último livro didático analisado é referente ao PNLD do triênio 2017, 2018, 2019 e é intitulado “Matemática contexto e aplicações” de Luiz Roberto Dante. Em comparação com os dois livros analisados anteriormente, esse é o que apresenta menos questões de algoritmo e manipulação algébrica, se destacando por cobrar mais questões de classificação conceitual, evidenciando o caráter argumentativo da abordagem do autor. Além disso, foi o livro que mais apresentou oportunidades de Raciocínio-e-Prova, 14 ao total. Entre elas, destaca-se a questão abaixo (Figura 4), codificada como RPP, em que o aluno é convidado a construir e observar gráficos de cinco funções de primeiro grau. Além de trabalhar a conversão do registro algébrico para o geométrico, a questão também pede a observação de algum padrão podendo levar a uma conjectura. O aluno pode deduzir que o sinal do coeficiente angular dita se uma reta é crescente ou decrescente, bem como que o seu módulo impacta na inclinação da reta. Também pode ser conjecturado que toda reta que possui b = 0 na sua lei passa pela origem obrigatoriamente.

Figura 4 – Questão codificada como RPP

14. No caderno, em um mesmo sistema de eixos ortogonais, construa os gráficos das seguintes funções. Depois, observe a influência da taxa de variação na posição de cada reta. Existe algum padrão a ser notado?

a) $f(x) = \frac{1}{2}x$ c) $h(x) = 2x$ e) $t(x) = -2x$

b) $g(x) = x$ d) $s(x) = -x$

Fonte: DANTE, 2016, p. 14

Durante a análise dos livros, chamou atenção que o único livro a trazer uma seção chamada “matemática e tecnologia” abordando o uso justamente do GeoGebra é o mais atual, apresentado no parágrafo anterior. As duas páginas em questão mencionam a plataforma *online* do GeoGebra (geogebra.org) e apresentam capturas de telas de uma visualização que já foi alterada pelo *site*. Mesmo com as imagens desatualizadas, essa parte do livro aborda as construções geométricas feitas pelo aplicativo calculadora gráfica - que traduz as representações algébricas nela digitadas para a representação gráfica. Com um passo-a-passo bem detalhado, são trabalhados conceitos como o de extremo e de intersecção com os eixos utilizando as ferramentas do *software*, e além disso é abordada a manipulação de controles deslizantes - um grande facilitador na criação e na invalidação de conjecturas.

O aparecimento de uma seção inteiramente dedicada ao uso de *softwares* educativos em sala de aula no livro didático mais atual analisado revela a tendência de crescimento desse tipo de abordagem no currículo da matemática para o ensino médio. É de se esperar que cada vez mais livros abordem as tecnologias da comunicação em sala de aula e que as escolas consigam melhorar suas infraestruturas para acompanhar essa tendência.

4.1.4 Análise geral dos livros didáticos

Olhando especificamente para os exercícios cobrados nos três livros, observa-se também que a quantidade de questões apresenta uma diminuição enquanto o número de oportunidades de RP apresenta crescimento. De uma questão permitindo a observação de padrão no livro analisado que foi retirado do PNLEM 2009, 2010, 2011, pulamos para catorze quando analisamos um livro do PNLD atual.

Os resultados estão apresentados na tabela abaixo e as questões estão subdivididas em exercícios que poderiam receber mais de um código, por isso o total de exercícios de cada livro não é igual ao somatório de exercícios dos códigos individualmente.

Quadro 2 – Quantidade de exercícios encontrados por código e por livro

Critérios	Questões/Exercícios			
	Matemática Aula por Aula	Matemática ciência e aplicações	Matemática contexto e aplicações	Total
(1) CC	14/35	24/56	33/71	71/162
(2) SI	90/114	107/160	70/137	267/411
(3) AM	158/287	106/255	90/178	354/720
(4.1) RPP	1/1	1/1	2/2	4/4
(4.2) RPC	0/0	1/1	4/7	5/8
(4.3) RPA	0/0	3/3	3/3	6/6
(4.4) RPD	0/0	1/1	2/2	3/3
(5.1) Int G	50/74	54/111	32/68	136/253
(5.2) Int P	20/20	51/64	29/30	100/114

Total	247/438	236/577	196/365	

Fonte: do autor.

O número total de exercícios também apresentou queda conforme os livros foram ficando mais atuais, todavia isso não pode ser confirmado em função da pequena amostragem analisada, a tendência percebida pode ser uma mera diferença de abordagem dos autores escolhidos. Também observou-se mais questões codificadas como classificação conceitual e menos classificadas como algoritmo e manipulação algébrica, reflexo do impacto das tecnologias na educação. Atualmente, temos computadores e celulares que podem fazer alguns cálculos mais complicados em todas as representações, algébrica, aritmética e geométrica. Dessa maneira, a realização de tarefas como a aplicação repetitiva da fórmula resolvente para encontrar as raízes de uma equação de segundo grau pode ficar em segundo plano e ser coadjuvante de questões que cobrem dos alunos compreensão conceitual e argumentação.

Numa análise dos resultados da análise dos exercícios dos livros didáticos em geral, o maior número de questões apresentou-se codificadas como algoritmo e manipulação algébrica. Isso se deve ao recorte escolhido, das funções, conteúdo abstrato cuja representação algébrica pode ser difícil para muitos alunos. Tem importância também o registro gráfico do objeto matemático, evidenciada pelo alto número de questões codificadas como interpretação geométrica - 253 ao total.

Mesmo assim, o número de exercícios que oportunizam o processo de Raciocínio-e-Prova entre os propostos no livro didático é baixo e, no recorte dos últimos 10 anos do Plano Nacional do Livro Didático, aparece em menos de 3% do total de questões analisadas.

4.2 Análise do Ambiente Virtual de Aprendizagem

A análise dos livros didáticos indica que há uma lacuna no currículo que impacta na abordagem do processo de Raciocínio-e-Prova, esse espaço pode ser preenchido pelo professor no trabalho em sala de aula. Frente a isso, foram pensadas duas atividades sobre funções (de primeiro e segundo grau) envolvendo oportunidades de RP que foram aplicadas com os alunos do cursinho popular Dandara dos Palmares. Motivado pelo contexto inserido de educação popular e democratização do conhecimento, elas foram desenvolvidas na plataforma GeoGebraBooks e depois disponibilizadas no GeoGebraGroups para acesso dos alunos no laboratório de informática.

Acessando o Geogebra.org, tanto aluno quanto professor recebem acesso aos aplicativos do GeoGebra e dos materiais criados pela comunidade. Para ler ou criar materiais, é necessário cadastro, que pode ser feito com a conta do google ou do facebook. Depois de preencher o cadastro, é possível procurar o trabalho de outras pessoas e criar atividades e materiais para o seu perfil. A planilha de criação pede um título e oferece sete elementos didáticos para adicionar: texto, vídeo, GeoGebra, imagem, web, arquivo PDF e questão (Figura 5).

Figura 5 – Função 'criar tarefa' do GeoGebraBooks

Fonte: Captura de tela da plataforma geogebra.org.

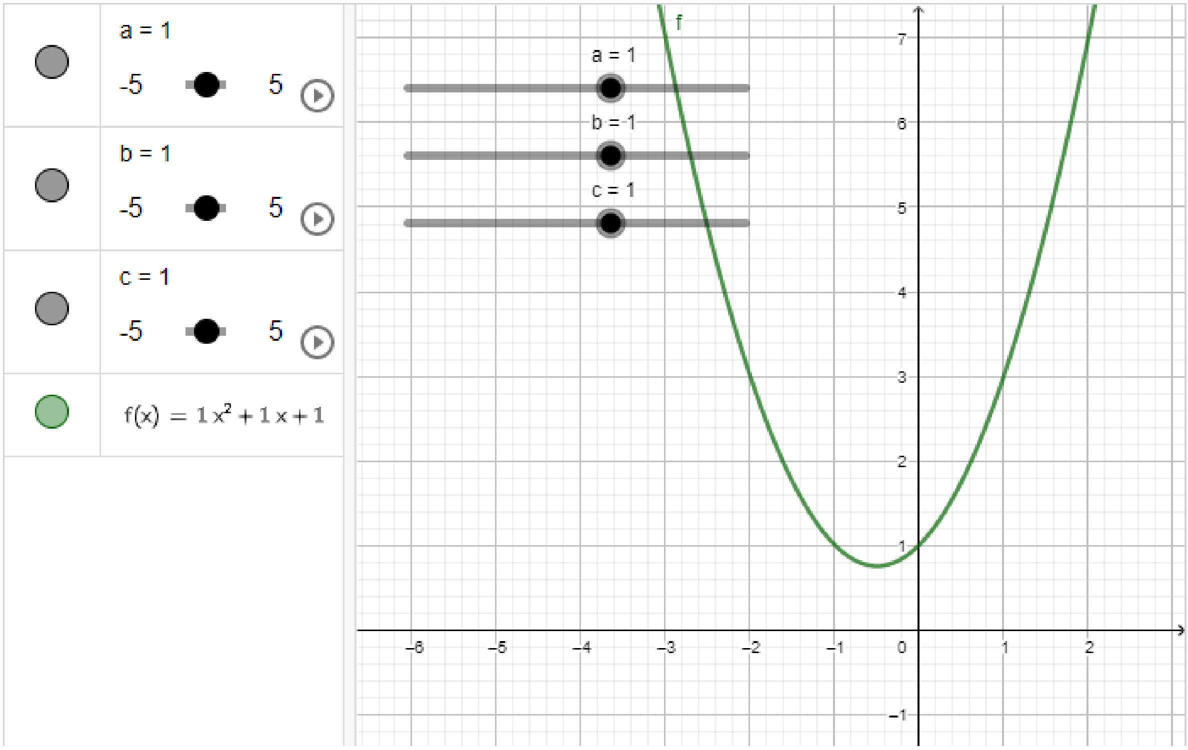
As atividades desse trabalho foram desenvolvidas utilizando o elemento texto para a explicação de alguns conceitos, como o de funções e seus zeros. Assim como as ferramentas de texto, negrito, itálico, fontes diferentes, também é permitida a inserção de fórmulas matemáticas, gerando um texto com igualdades, desigualdades, e outras relações, mais agradável ao olhar. Apesar da variedade de ferramentas, a plataforma mostrou ser um pouco instável ainda, causando perda de progresso duas vezes durante a montagem da sequência didática. As questões foram incluídas no corpo da atividade pedindo respostas dissertativas e de múltipla escolha, e o elemento GeoGebra foi utilizado como aquilo que Naftaliev (2009) definiu como diagrama interativo (Figura 6): "Um diagrama interativo é uma aplicação de software (aplicativo) relativamente pequeno e simples, construído em volta de um exemplo visual pré-concebido[5]." (NAFTALIEV, 2009, p. 1). Os diagramas interativos apresentam uma possível melhoria no processo de aprendizagem da matemática, pois permite com que o aluno interaja de maneira ativa com o gráfico, causando variações em tempo real nos coeficientes e permitindo a observação do seu impacto na interpretação geométrica da função, facilitando a criação e a análise de conjecturas.

Depois de pronta, a sequência didática foi disponibilizada em um GeoGebraGroups chamado Extensivo Dandara, que foi criado na página geogebra.org/groups. O endereço eletrônico oferece as possibilidades de acessar um grupo com um código de cinco letras gerado pelo site, também permite criar um grupo e gerenciar os grupos criados. Para o acesso é necessário um cadastro inicial dos alunos, que é um pouco mais burocrático do que o recomendado, requisitando confirmação de e-mail e outras informações pessoais. Durante os períodos em que a atividade aconteceu, isso causou uma pequena perda de tempo e gerou impaciência por parte dos alunos. Uma vez cadastrados na plataforma, os alunos podem responder as atividades postadas e enviar suas respostas para o professor, os alunos não têm acesso às respostas um dos outros, apenas o professor.

---

[5] Tradução livre. Citação original: "An interactive diagram (ID) is a relatively small and simple software application (an applet) built around a pre-constructed visual example."

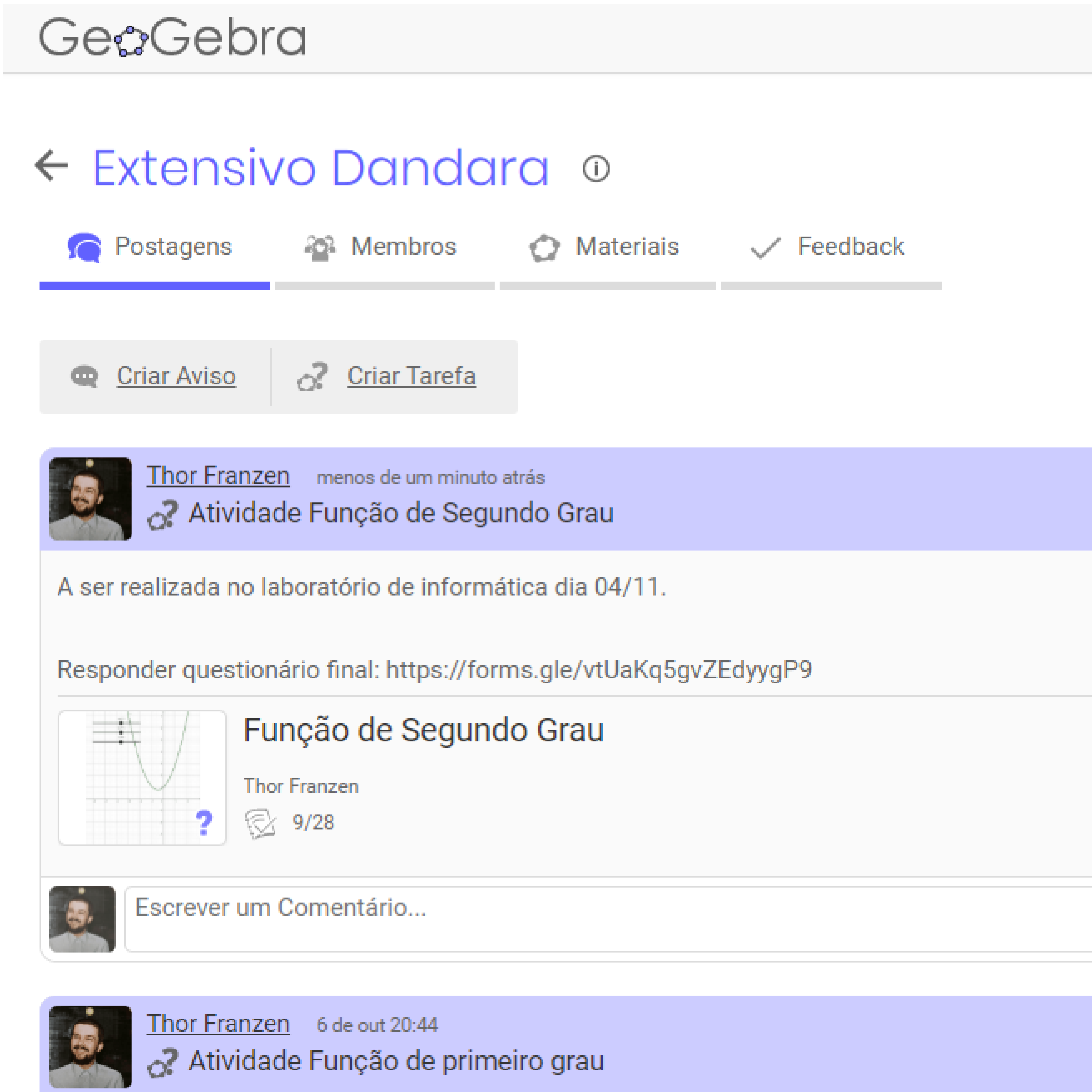
Figura 6 – Captura de tela de um diagrama interativo sobre funções de segundo grau



Fonte: do autor

Enquanto os alunos visualizam apenas as atividades postadas, o professor (na função de criador do grupo) visualiza uma janela diferente, onde pode diretamente criar um aviso ou uma nova tarefa, visualizar quantos alunos completaram a atividade, e também acessar a lista de membros e de materiais, e dar um retorno aos alunos sobre as suas resoluções na aba chamada feedback (Figura 7). O ambiente virtual de aprendizagem deveria facilitar a coleta de dados do pesquisador, uma vez que registra, com um clique, as respostas dos alunos. Todavia a coleta não ficou completa, pois a plataforma apresentou instabilidades com alunos perdendo progresso das tarefas. Além disso, a análise também poderia ser facilitada se, durante o acesso ao que foi mandado pelos alunos, fosse possível organizar as respostas dadas para uma determinada questão, ao invés de mostrar todas as respostas dada por um aluno individualmente.

Figura 7 - Captura de tela da página inicial que aparece para o criador do grupo “extensivo Dandara”.



Fonte: do autor

Com o intuito de mapear as condições de acesso à internet dos alunos e avaliar a percepção deles sobre atividades, dois links para questionários do *google* foram adicionados nas postagens das atividades, um a ser respondido no começo da aplicação (Apêndice 4) no laboratório de informática e outro no final (Apêndice 7). As atividades serão analisadas na próxima seção, enquanto as respostas dos alunos aparecem em 4.4 e as respostas dos questionários em 4.5.

4.3 Sequência didática proposta

Hospedadas no GeoGebraBooks, duas atividades foram desenvolvidas, uma sobre funções de primeiro grau (Apêndice 5) e outra sobre funções de segundo grau (Apêndice 6), os links que levam a elas estão nos apêndices e elas podem ser acessadas através dos códigos QR (Figura 8). Elas foram disponibilizadas *online* na plataforma geogebra.org, e foram postadas no GeoGebraGroups para o acesso dos alunos no laboratório de informática.

Figura 8 – Códigos QR que levam para as atividades desenvolvidas na plataforma geogebra.org

Fonte: https://br.qr-code-generator.com/

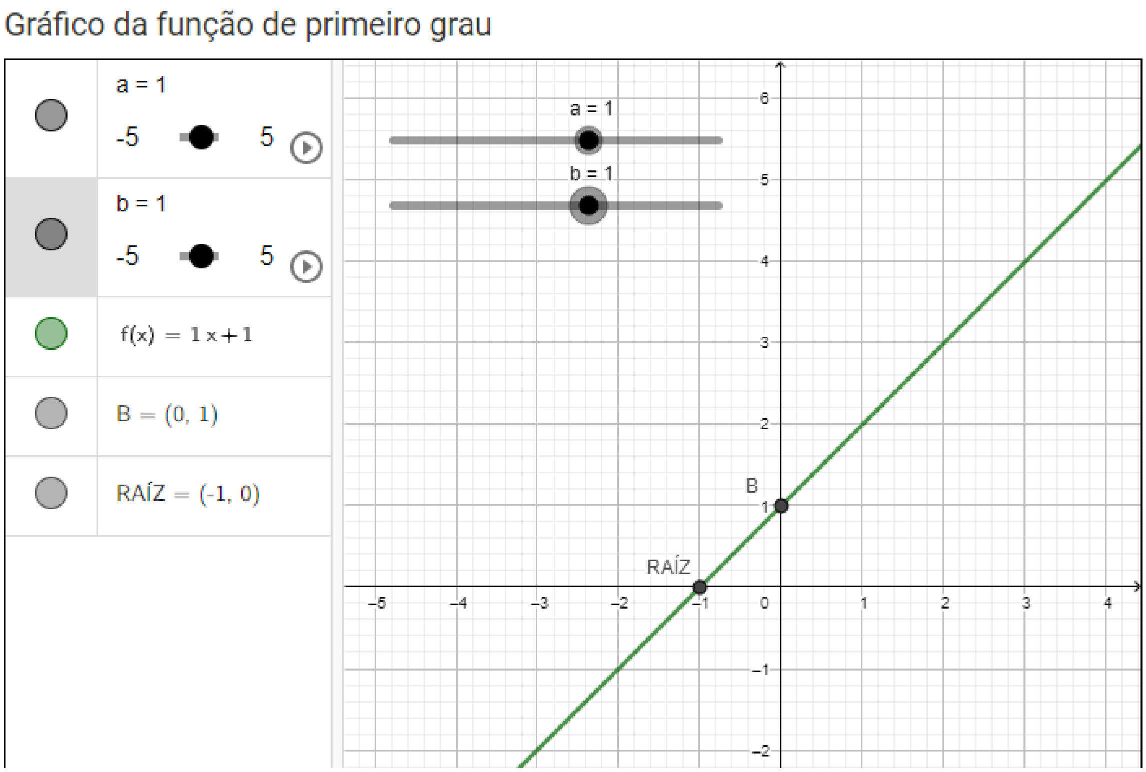
Baseado no referencial apresentado nos capítulos anteriores, a atividade foi pensada para oportunizar as etapas do Raciocínio-e-Prova, identificação de padrão, criação de conjectura, argumentação e demonstração. Observam-se potencialidades na abordagem desse processo trazidas pelo uso das mídias digitais, na literatura fica indicado que a plotagem instantânea de gráficos e os controles deslizantes de parâmetros podem facilitar as conjecturas e as generalizações, levando a uma argumentação mais rápida e uma demonstração mais simples. Segundo Notare e Basso (2018):

> Atualmente, ambientes de geometria dinâmica têm colaborado para o resgate das discussões sobre a importância da prova nas aulas de Matemática. A possibilidade de movimentar figuras construídas com propriedades geométricas que as definem faz realçar regularidades e propriedades importantes no processo de argumentação, que se mantêm estáveis durante o movimento e proporcionam um espaço para a elaboração, teste e validação de conjecturas, etapas importantes do processo dedutivo. Mais do que isso, atividades nesses ambientes provocam nos estudantes a necessidade de provar para comprovar o que está sendo observado e abstraído do processo de experimentação e descoberta. (NOTARE & BASSO, 2018, p. 2)

A primeira atividade, sobre função afim, foi planejada para abordar as diferentes representações das funções de primeiro grau, e o tempo previsto para a sua aplicação era de dois períodos de 45 minutos. A atividade está subdividida de acordo com o conceito trabalhado, primeiro abordando a definição de função afim e os seus coeficientes, angular e linear. Além das definições por escrito, apresenta um diagrama interativo (Figura 9), com controles deslizantes em que o aluno pode variar os valores de “a” e “b” entre -5 e 5, que mostra o gráfico da função y = ax + b. As perguntas referentes aos coeficientes da reta questionam sobre o comportamento da reta quando “a” é positivo, zero ou negativo. Em relação ao coeficiente “b”, o aluno é indagado sobre a posição do gráfico quando ele assume alguns valores específicos, 5, 0 e -1. A intenção era mostrar que o coeficiente angular altera a inclinação da reta, sendo decrescente quando é negativo e crescente quando positivo, e também indicar que o coeficiente linear desloca o gráfico para cima quando é positivo e para baixo quando é negativo.

Em seguida é abordado o conceito de zero da função, seguido de uma questão para cada interpretação do objeto matemático - aritmética, geométrica e algébrica. Primeiro o aluno é convidado a variar os coeficientes de cinco funções específicas e observar no gráfico qual a sua raiz, explicitada no diagrama pelo ponto de intersecção da reta com o eixo das abcissas. Depois é cobrado do aluno uma resposta para qual a interpretação geométrica da raiz de uma função, pedindo uma resposta dissertativa para trabalhar o registro semiótico das funções em língua materna. A terceira questão é a mais próxima de uma demonstração, em que o aluno é convidado a mostrar (mesmo sem a palavra no enunciado) que a raiz da função de primeiro grau é dada pela expressão x = -b/a. Uma pergunta foi adicionada nessa questão, indagando se a função sempre intercepta o eixo x, o que não acontece quando a = 0 e “a” e “b” são diferentes. Por último uma questão retirada do vestibular da UFRGS de 2017 foi abordada, em que os alunos precisavam interpretar uma situação geométrica e analisar as afirmativas sobre os sinais dos coeficientes. A intenção era instigar os alunos a verificar as questões do vestibular utilizando o *software* de maneira análoga à utilização de uma calculadora para verificar o resultado de um cálculo.

Figura 9 - Diagrama interativo sobre funções de primeiro grau.



Fonte: do autor

A atividade sobre funções de segundo grau foi pensada para os mesmos dois períodos de 45 minutos, e inicia de forma semelhante à atividade referente às funções afim - apresentando definições e conceitos agregados ao diagrama interativo da função $y = ax^2 + bx + c$ com controles deslizantes que permitem variar os coeficientes entre -5 e 5. Em seguida são abordados os coeficientes, com perguntas sobre a posição do gráfico conforme os seus sinais variam, o quarto item de cada questão pede uma generalização da influência do coeficiente no registro gráfico da função e requer uma argumentação também de porque isso acontece.

A segunda parte dessa atividade aborda o delta e as raízes de uma função de segundo grau, apresentando inicialmente as suas definições e fórmulas, bem como um diagrama interativo que, além de permitir a variação dos coeficientes, também calcula na janela algébrica à esquerda o valor do determinante e mostra as coordenadas do vértice da função. A primeira questão dessa seção aborda a relação entre o sinal do delta e o número de raízes da função, pedindo uma justificativa final. Na sequência, é apresentado o conceito do vértice de uma parábola como ponto mínimo ou máximo, dependendo da sua concavidade, e aparece uma pergunta sobre os vértices de funções de segundo grau dadas.

O último diagrama interativo apresentado na atividade aborda a forma fatorada de uma função de segundo grau, em que as raízes estão explicitadas. No diagrama, os controles deslizantes variam os zeros da função e o coeficiente líder. Em seguida são perguntadas as leis que definem as seis funções de raízes dadas, que podem ser calculadas apenas variando os valores no diagrama interativo. Outras duas perguntas intercalam alguns exemplos, pedindo para que o aluno observe o padrão que se repete quando zero é uma das raízes da função e quando elas são iguais em módulo, porém opostas em sinal.

A atividade encontrou algumas dificuldades na aplicação, que estava prevista para os dias 7 e 14 de outubro, sendo que acabaram sendo aplicadas nos dias 21 de outubro e 4 de novembro. Em virtude da falta de internet decorrente de uma manutenção de rede no instituto federal, o trabalho no laboratório de informática teve de ser adiado. A troca de data em si não é um problema, mas fica o aprendizado de sempre ter um plano alternativo caso algum problema desses apareça, o planejamento das aulas acabou comprometido em virtude desses problemas. Observando a atividade em si, alguns problemas foram detectados. Não há o uso da palavra “mostre” ou “demonstre” na questão que pede uma prova algébrica dos alunos, o que pode fazer com que aconteça a demonstração sem que o aluno perceba que a está realizando. A análise das respostas e resoluções dos alunos vem na próxima seção.

4.4 Análise das respostas dos alunos

A confecção da atividade tinha a intenção de fazê-la autoexplicativa, os estudantes poderiam ao percorrer a sequência didática, compreender os conceitos e as questões durante a leitura. Isso permite ao professor o papel de facilitador e orientador, apenas tirando dúvidas pontuais e ajudando os alunos com o andamento do questionário. Inserido especificamente na educação popular, em que o conhecimento prévio do aluno deve ser valorizado, esse papel fica ainda mais evidente e ganha ainda mais importância. Segundo Perius (2012):

> O professor deve priorizar a construção do conhecimento pelo fazer e pensar do aluno. Sendo assim o papel do professor é de facilitador, orientador, estimulador e incentivador da aprendizagem, ou seja, ao introduzir um assunto matemático em sala de aula, o dever do professor é partir de onde o aluno já sabe para ajudá-lo a construir novos conhecimentos. (PERIUS, 2012, p. 18)

Entretanto a postura dos alunos durante a atividade dificultou o trabalho do professor, alguns pareceram não ler os enunciados e partiram direto para a questão, causando muitas dúvidas que provocavam frequentes pedidos de ajuda ao professor. Foi observado que, mesmo com uma atividade que, na sua concepção privilegia a autonomia dos discentes, muitos ainda não possuem essa autonomia durante a leitura, o que é um pouco preocupante para o trabalho no pré-vestibular, tendo em vista a prova do ENEM, por exemplo, que requer muita leitura e interpretação.

Ao total, 28 alunos e alunas participaram das duas atividades, porém três delas não assinaram o termo de consentimento para participação da pesquisa (Apêndices 1 e 2) e, portanto, não tiveram suas respostas analisadas. Os 25 restantes serão analisados agora e, com a intenção de preservar as suas identidades, serão chamados pelas letras de A a Y.

4.4.1 Atividade Funções de Primeiro Grau

No vigésimo primeiro dia de outubro foi realizada a primeira atividade com os alunos no laboratório de informática da sala 204 do IFRS campus Porto Alegre. Todos os alunos 20 que se cadastraram na plataforma nesse primeiro momento enviaram resposta, sendo que apenas uma resposta ficou marcada como “em desenvolvimento” por estar faltando a resposta de alguma pergunta. Entretanto isso parece ser um erro da plataforma, pois outras atividades incompletas estavam marcadas como “feitas”.

4.4.1.1 Primeira questão da primeira atividade

Analisando a primeira questão, que abordava o coeficiente angular da função de primeiro grau, temos as respostas dadas pelos alunos A, E, F, K, L, O, P e R que conseguiram perceber a sua relação com a inclinação da reta, compreendendo a definição de crescente e decrescente, bem como os três registros envolvidos, algébrico para a lei da função, aritmético para os valores dos coeficientes e geométrico para o gráfico da reta. A aluna X foi a única que utilizou em sua resposta a palavra ângulo, compreendo o conceito até de ângulo negativo. Ao total, nove alunos conseguiram percorrer todo o caminho dessa questão sem nenhuma afirmação falsa ou fora de contexto.

As alunas G e T responderam de maneira correta a questão, assim como os apresentados anteriormente, entretanto afirmaram que a reta cujo “a” positivo possui ponto de mínimo e aquela cujo “a” negativo tem ponto de máximo, uma troca de conceitos, em que foi envolvida a noção de vértice em uma função que não o possui, revelando a confusão entre a função de primeiro e de segundo grau.

O aluno H também compreendeu a relação com a inclinação da reta, porém afirmou também que a raiz da função de primeiro grau que tem “a” positivo é sempre negativa e quando temos “a” negativo a raiz é positiva. Essa conjectura poderia ser descartada com a variação do coeficiente “b” e a observação de que, quando “a” e “b” são negativos, a raiz é negativa também. (Figura 10). O aluno S cometeu o mesmo erro, sendo que esse analisou apenas as raízes e nada afirmou sobre a inclinação da reta (Figura 11). Essa conjectura não foi desaprovada pelos alunos pois eles moveram apenas o controle deslizante referente ao coeficiente “a” e deixaram “b” fixado. Chama atenção que o conceito de raiz já apareceu aqui, antes mesmo de ser dada a definição pela atividade.

Figura 10 - Resposta do aluno H a primeira questão da primeira atividade.

a=0 : Cria-se uma reta paralela ao eixo X e não tem raiz. "F(x)=
a>0 : A Reta é crescente, e a Raiz é negativa variando no eixo X
a<0: A Reta é decrescente, e a Raiz é positiva variando no eixo X
- Nos indica onde a reta corta o eixo X.

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos

Figura 11 – Resposta aluno S a pergunta sobre o coeficiente angular.

a=0 a raiz é Indefinida
a>0 a raiz é negativa
a<0 a raiz é positiva

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos

Os alunos D, I, U, W e Y perceberam que o gráfico de uma reta que tem a = 0 é sempre paralela ao eixo x, todavia responderam com pontos de retas específicas como se pertencessem a todas retas com “a” positivo e negativo respectivamente, pois analisaram a posição da reta com coeficientes constantes, não observando o que acontece conforme eles variam.

O aluno N respondeu apenas a primeira questão, afirmando que quando o coeficiente angular de uma reta é nulo, ela fica horizontal e passa no ponto (1,0). Além da troca de x por y ao dar as coordenadas do ponto, o aluno não conseguiu generalizar a situação, dando como resposta o caso observado da reta y = 1. Já o aluno V conseguiu fazer a generalização e respondeu que quando a>0 a reta cresce e quando a<0 a reta desce. Entretanto o que chama atenção sobre a participação desses alunos na pesquisa é o fato de responderam apenas a primeira questão da atividade. Isso ocorreu em decorrência da idade deles, que são dois dos nossos alunos mais velhos no Dandara, mostrando dificuldades com o uso do computador como um todo, do uso do mouse e do teclado até a demora para o registro na plataforma, que consumiu quase que inteiramente os dois períodos planejados.

4.4.1.2 Segunda questão da primeira atividade

A segunda questão perguntava sobre a relação do coeficiente linear com a posição da reta e se o gráfico sempre intercepta o eixo vertical.

Os alunos A, F, G, H, L, O, P perceberam que o valor de “b” interfere na altura da reta, que o ponto (0, b) sempre faz parte do gráfico (Figura 12). Mostrando que compreendem e conseguem transitar entre os registros gráfico, algébrico, aritmético e em língua materna das retas. Todavia nenhum aluno conseguiu afirmar corretamente que nem sempre a reta intercepta o eixo vertical, isso se deve a um problema na formulação da atividade, que, ao utilizar a forma reduzida da equação da reta, não permitiu o desenho de um gráfico paralelo ao eixo y, pois a reta vertical não é uma função. Não é possível manipular os coeficientes de modo que a equação da reta seja x = k, sendo k uma constante real, se a equação da reta não está na forma geral Ax + By + C = 0.

Os alunos D, I, K, R, T, U conseguiram identificar a intersecção do eixo y com a reta em questão, todavia não conseguiram generalizar o padrão observado para fazer alguma conjectura. Conseguiram transitar entre os registros aritmético e geométrico, mas não realizando a conversão para o algébrico.

Os alunos E e W afirmaram que com b = 5 a reta é crescente e com b = -1 ela é decrescente, revelando uma troca conceitual no que tange a influência do coeficiente “a” de uma reta pela influência do coeficiente “b”. Mesmo assim, afirmaram que quando b = 0, a reta passa pela origem, o que é verdadeiro.

A aluna X não respondeu aos questionamentos de retas específicas da questão, mas afirmou que quando b = 0 a reta não intersecta o eixo y, o que é falso pois a origem pertence ao eixo.

Figura 12 - Resposta da aluna F para a segunda questão da primeira atividade.

quando b=5 a reta passará pelo eixo y=5;
quando b=0 o eixo y ficará na origem;
quando b=-1 a reta passará pelo eixo y=-1.

Sim, pois o valor de "b" se encontra sempre no eixo vertical.

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

4.4.1.3 Terceira questão da primeira atividade

A terceira questão pedia para que o aluno substituísse os valores de “a” e “b” nos controles deslizantes e observasse o ponto de intersecção com o eixo x, que é a raiz da função. Essa questão poderia ter sido a primeira questão, pois é uma questão mais introdutória, que trabalha apenas os registros aritmético e geométrico, e visa melhorar a compreensão da equação da reta e do funcionamento do *software* e dos controles deslizantes. Os alunos A, D, E, F, K, L, O, U, W e X conseguiram encontrar todas as raízes.

A aluna G conseguiu observar as intersecções, mas mostrou dificuldade na transição para o registro escrito, pois não conseguiu expressar corretamente as coordenadas dos pontos observados.

Os alunos H e S não conseguiram encontrar as raízes, mas os seus erros parecem ser um problema de interpretação, o que é preocupante para alunos que realizaram o ENEM. Eles responderam à questão com as leis das funções cujos coeficientes eram dados pelo enunciado, sem mostrar compreensão do conceito de raiz. Os alunos I, P, O e T também mostraram não ter compreendido o conceito de zero de uma função, colocando que todos os pontos de intersecção do gráfico com os eixos x e y seriam raízes (Figura 13).

Figura 13 - Resposta da aluna I a terceira pergunta da primeira atividade

forma-se uma raiz positiva no eixo y=4 e raiz negativa no eixo x=-1 = -b/a
temos raiz positiva paralelamente. em que b=2y e a=1x
raiz a= 3 raiz b=-3
raiz a=0,5; raiz b=2 (ambas positivas).
reta paralela horizontal .

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

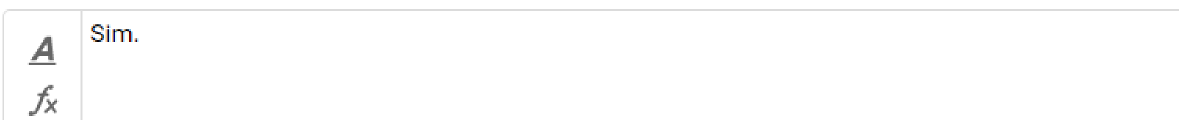
4.4.1.4 Quarta questão da primeira atividade

A quarta questão indagava sobre a interpretação geométrica da raiz, promovendo a transformação do registro aritmético, trabalhado na questão anterior, para o registro geométrico.

Os alunos A, H, Y afirmaram corretamente que são os pontos que o gráfico intercepta o eixo das abcissas, reconhecendo até a possibilidade de mais de um zero da função, ao contrário das alunas E, F, G, I, K, L, P e T que colocaram raiz no singular em sua resposta.

Já a aluna X afirmou que quando não há raiz, não existe ângulo entre a reta e os eixos coordenados, afirmação que, apesar de correta, foi dada fora de contexto. Os alunos D e W responderam apenas “sim” (Figura 14).

Figura 14- Resposta do aluno W para a quarta questão da primeira atividade



Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

4.4.1.5 Quinta questão da primeira atividade

A quinta questão dissertativa da primeira atividade pedia uma fórmula geral para o cálculo do zero de uma função de primeiro grau, e visava a conversão dos dois registros trabalhados anteriormente para o registro algébrico. Também perguntava se o gráfico sempre intercepta o eixo horizontal.

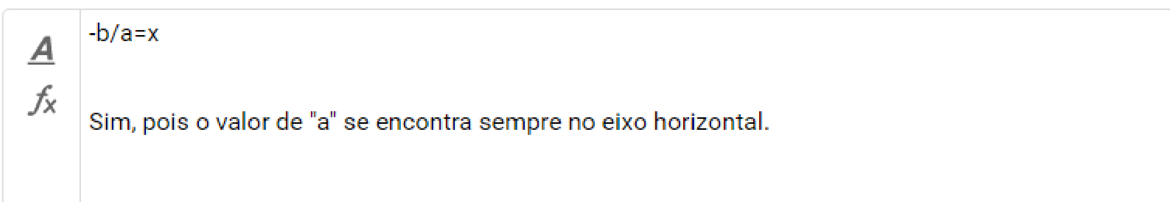
Os alunos G, P, T e X encontraram a relação $x = -b/a$, isolando o “x” na equação $y = ax + b$, e justificaram corretamente que a reta nem sempre intercepta o eixo das abcissas. Já a aluna Y deu a expressão $x = a + b$, que não dá a raiz da função e não afirmou se a reta sempre intercepta o eixo x ou não.

Os alunos F, I e L encontraram a fórmula para o zero de uma reta, mas responderam que o gráfico sempre intercepta o eixo x, não conseguindo observar os casos em que $a = 0$. O tratamento algébrico do problema foi bem sucedido, os alunos conseguiram encontrar a expressão que fornece a raiz da função, entretanto não houve a interpretação correta do registro aritmético ao não percebem que o denominador de uma fração não pode ser zero (Figura 15).

Os alunos A e E responderam corretamente que nem sempre há e apresentaram justificativas válidas, afirmando que a raiz pode ser inexistente quando o gráfico da reta não passa pelo eixo x. Todavia não conseguiram obter a expressão que dá a raiz de uma função de primeiro grau em relação aos seus coeficientes. A interpretação geométrica do problema foi correta, entretanto não houve transformação para o registro algébrico.

Os alunos D e W responderam apenas “não”, enquanto os alunos K, O afirmaram erroneamente apenas “sim”, o que evidencia mais um problema no texto da atividade, que não pediu justificativa nessa questão.

Figura 15 - Resposta da aluna F para questão sobre a interpretação geométrica da raiz

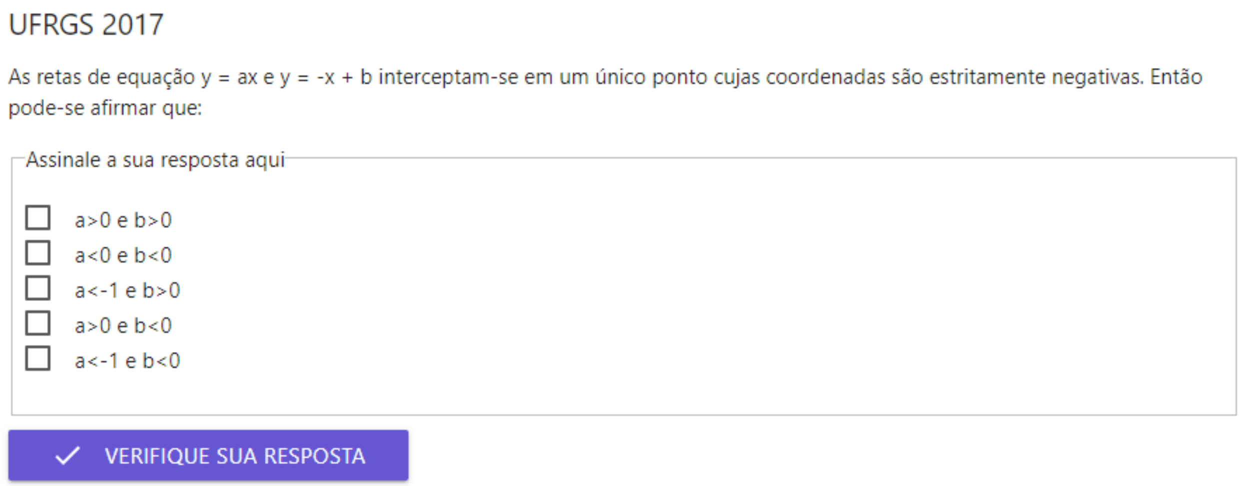


Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

4.4.1.6 Última questão da primeira atividade

A última questão da primeira atividade foi retirada da prova de matemática do vestibular da UFRGS de 2017 (Figura 16) e fazia afirmações sobre os sinais dos coeficientes de uma reta e o aluno precisava analisar qual afirmação era verdadeira. Era uma pergunta de múltipla escolha e obtivemos 5 respostas certas entre as atividades recebidas. Trabalhar apenas uma questão da prova da UFRGS, se mostrou pouco, muitos alunos terminaram a atividade e foram embora antes do horário do fim da aula. É recomendável que a atividade planejada ocupe mais tempo do que o disponível em sala de aula, convidando o aluno a acessá-la de sua própria casa. Também é importante instigá-los a acessar novamente em casa, pois se trata de uma ferramenta de estudo que o aluno pode se apropriar. Nessa experiência, apenas um deles fez contato comigo na semana da realização da atividade perguntando sobre a plataforma.

Figura 16 - Questão de múltipla escolha da primeira atividade.



Fonte: Prova de matemática do vestibular da UFRGS 2017, questão 40.

4.4.2 Atividade Função de Segundo Grau

A continuação da atividade, sobre funções de segundo grau, não pode ocorrer na semana imediatamente após a primeira parte em virtude da modificação do horário causada pela proximidade da prova do ENEM, que aconteceu no dia 03 de novembro. A data da aplicação acabou prejudicando a pesquisa, no dia seguinte à prova de ciências humanas e linguagens, os alunos estavam bem desgastados e muitos foram embora depois da revisão para a prova de matemática, a atividade na informática estava programada para o final da tarde. Foram recebidas 14 respostas, sendo 5 delas marcadas como “em desenvolvimento”, chama a atenção que apenas 5 alunos enviaram respostas tanto para a primeira quanto para a segunda atividade, revelando a variação de público que acontece em um cursinho popular não só num intervalo de duas semanas, mas também durante o ano letivo inteiro.

4.4.2.1 Primeira questão da segunda atividade

A primeira parte da segunda atividade era sobre os coeficientes da função de segundo grau, a primeira questão perguntava sobre a influência do coeficiente “a”. Os alunos B, G, H e M perceberam a influência do coeficiente líder na concavidade da parábola, posicionada virada para cima ou para baixo, e tentaram dar alguma explicação (Figura 17). Já os alunos C, I, J, Q, R e U também perceberam o que acontece quando “a” varia, mas não apontaram nenhuma justificativa, mesmo sendo requisitado pelo enunciado. A aluna X também não forneceu nenhuma justificativa, mas ao invés de responder com a concavidade, afirmou que a função tem um ponto máximo quando a<0 e um ponto mínimo quando a>0 (Figura 18). O conceito de vértice apareceu antes de ser abordado na sequência didática, mostrando o impacto dos conhecimentos anteriores dos alunos - um dos pilares da educação popular como apontado anteriormente.

Figura 17 – Resposta da aluna M para a primeira pergunta da segunda atividade

se a > 0, a parábola tem a concavidade voltada para cima
a<0 a parábola te, a concavidade voltada para baixo
a=0 cria-se uma linha reta que será defina pelo "b" e "c"
o "a" é o marcador do comprimento da concavidade que cresce paralelamente com o valor de c

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

Figura 18 - Resposta da aluna X para a primeira pergunta da segunda atividade.

a- A reta corta a reta e não existe parábola.
b- há parábola com vértice de ponto mínimo.
c- há parábola com vértice de ponto máximo.

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

4.4.2.2 Segunda questão da segunda atividade

A questão seguinte, sobre a influência do coeficiente “b”, era um dos padrões mais difíceis de enxergar, apenas os alunos G e R conseguiram observar que ele aponta se a parábola intercepta o eixo y de maneira crescente ou decrescente. Todavia não perceberam o caso em que “b” é igual a zero, e o vértice está sobre o eixo, nessa parte, o aluno R argumentou que a função com b = 0 não tem raiz, o que é falso. Por conta da dificuldade de conjecturar o impacto no gráfico da variação do coeficiente “b”, essa é uma das únicas questões em que não é requisitada uma justificativa.

As alunas B, C, M e Q afirmaram que o coeficiente faz com que a função vá para a esquerda e para a direita, o que só está correto para “a” positivo. Eles não testaram o caso em que temos “a” negativo, não conseguindo generalizar o padrão observado. O aluno H fez a mesma afirmação, só que utilizando o conceito de vértice, abordado apenas nas próximas questões da atividade, e a aluna X também deu a mesma resposta só que utilizando o conceito de quadrantes, que não é abordado na atividade.

O aluno J não observou padrão, mas afirmou que o valor de “b” interfere na quantidade de raízes de uma função de segundo grau, o que é falso. A aluna U não observou padrão na variação do coeficiente “b”, e afirmaram. A aluna I não conseguiu transitar entre o registo gráfico e o registro verbal para explicar o padrão que observou.

Figura 19 Resposta do aluno R

a) Gráfico sem raiz.
b) Gráfico Crescente /.
c) Gráfico Decrescente \.
d) Ângulo.

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

Figura 20 - Resposta da aluna I

forma-se uma parábola positiva .
parte do eixo Y =parábola positiva /negativa.
parte do eixo Y=parábola positiva/negativa.

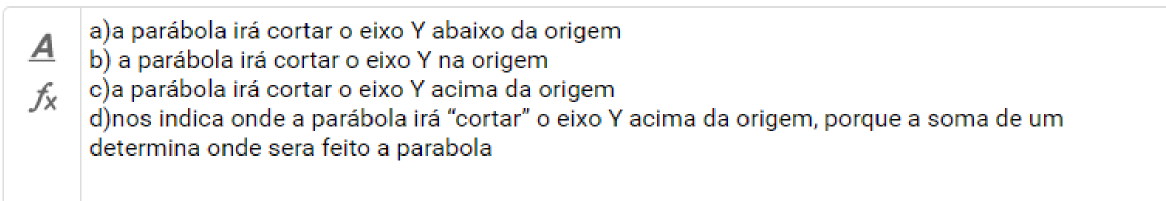
Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

4.4.2.3 Terceira questão da segunda atividade

Os alunos B, C, H e Q conseguiram realizar a transição entre registros, percebendo a relação entre o coeficiente e a intersecção do gráfico da função com o eixo y, porém não apresentaram nenhum argumento que justifique essa relação, mesmo sendo requisitado pela questão.

A aluna G percebeu e justificou a influência do coeficiente “c” na posição da parábola, realizando a conversão entre os registros algébrico, geométrico e verbal. Entretanto não os relacionou com a interpretação aritmética pontual ao afirmar apenas que a parábola fica abaixo do eixo quando assume um valor negativo por exemplo.

Figura 21 - Resposta da aluna G para a terceira questão da segunda atividade.



a)a parábola irá cortar o eixo Y abaixo da origem
b) a parábola irá cortar o eixo Y na origem
c)a parábola irá cortar o eixo Y acima da origem
d)nos indica onde a parábola irá “cortar” o eixo Y acima da origem, porque a soma de um determina onde sera feito a parabola

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

Os alunos I, J, R e X não conseguiram observar o padrão e fizeram afirmativas que dizem respeito à influência de outros coeficientes. Além de cometer o mesmo erro, a aluna M não conseguiu expressar o registro algébrico, apenas comentou o padrão observado sem responder onde a parábola intercepta o eixo vertical para os casos do enunciado.

4.4.2.4 Quarta questão da segunda atividade

A questão seguinte inicia com uma nova caixa de texto, explicando as definições e como calcular o delta e as raízes de uma função de segundo grau, e um diagrama interativo em que os coeficientes são controles deslizantes e que calcula o valor de delta na sua janela algébrica. A primeira pergunta era sobre a influência do sinal do determinante no número de raízes da função.

As alunas B, C, G, I e Q conseguiram notar o número de raízes para os três casos requisitados (positivo, negativo e igual a zero) e também apresentaram alguma justificativa afirmando que se deve ao “número de respostas” da fórmula resolvente.

Outros alunos, o R e o H, perceberam o mesmo padrão, mas não apresentaram nenhuma explicação.

O aluno J conjecturou que, se o delta é positivo, a função possui raízes positivas e, se o delta é negativo, a função possui raízes negativas, o que é falso e poderia ter sido facilmente desmentido com a observação de uma função de delta negativo, pois ela não tem raízes (nem positivas, nem negativas). Além disso afirmou que o valor do determinante varia conforme o coeficiente “b”, o que é verdade, porém insuficiente.

4.4.2.5 Quinta questão da segunda atividade

A seguir, temos uma pergunta sobre o vértice da função, que requisitava do aluno um olhar para o gráfico e a localização do ponto máximo ou mínimo marcado no diagrama interativo. Mesmo sem responder se o ponto é máximo ou mínimo, os alunos B, C, G, H, J e Q identificaram as coordenadas do vértice e as escreveram de maneira correta. Apenas a aluna I apresentou corretamente em suas respostas se o ponto é máximo ou mínimo, o que fica facilitado pelo gráfico e pode levar a conjectura de que, quando $a>0$, temos o vértice como ponto mínimo e, no caso $a<0$, o vértice é o ponto máximo da função.

O aluno R, apesar de ter utilizado os conceitos de ponto máximo e mínimo, não colocou as coordenadas corretas dos vértices das funções em questão e afirmou que a equação $f(x) = x^2$ forma uma reta. Esse erro se deu pela falha na identificação do valor do coeficiente “a”, confundindo 0 e 1, não aconteceu a transição correta entre o registro algébrico e o aritmético.

Figura 22 - Resposta do aluno R

a) Ponto mínimo. (1 , 1)
b) Ponto máximo. (-1 , 2)
c) Ponto máximo. (2 , 4)
d) Ponto máximo. (Vértice Indefinido)
e) Reta. (Vértice Indefinido)

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

4.4.2.6 Sexta questão da segunda atividade

Na penúltima questão, um novo diagrama interativo é apresentado, esse sobre a forma fatorada de uma função de segundo grau, em que os controles deslizantes variam os valores de x1, x2, zeros da função e o coeficiente líder. Os enunciados pedem que o aluno varie os coeficientes e forneça a lei da função calculada pelo *software* na janela algébrica. Há, entre as funções dadas pela questão, perguntas sobre o que acontece com a lei da função quando uma das raízes é zero e quando elas são opostas.

Os alunos C e Q apresentaram as leis correspondentes aos valores requisitados como raízes e conseguiram identificar que o coeficiente “b” é igual a zero quando eles são opostos, porém não fizeram conjecturas válidas para o impacto na lei de uma função que tem zero como uma das raízes.

Os alunos B, G e H responderam corretamente as leis da questão, mas não apresentaram conjecturas válidas nas perguntas dissertativas. E os alunos I e R não conjecturaram nada apesar das respostas corretas.

As sete respostas recebidas para essa questão mostram, além da imprecisão no sistema que marcou 9 tarefas como “feitas” ou outras 5 como “em desenvolvimento”, que poucos alunos chegaram até o final da atividade prevista. O tempo recomendado para a atividade sobre funções de segundo grau deveria ter sido maior.

4.4.2.7 Sétima questão da segunda atividade

A última pergunta foi retirada do ENEM de 2016, e obtivemos cinco respostas corretas entre 10 enviadas (Figura 23).

Figura 23 - Última questão da segunda atividade

ENEM 2016

Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função
$f\,(t) = -2 \cdot t^2 + 120 \cdot t$ (em que t é expresso em dia e t=0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão só é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.
A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no

Assinale a sua resposta aqui

- ☐ dia 19
- ☐ dia 20
- ☐ dia 29
- ☐ dia 30
- ☐ dia 60

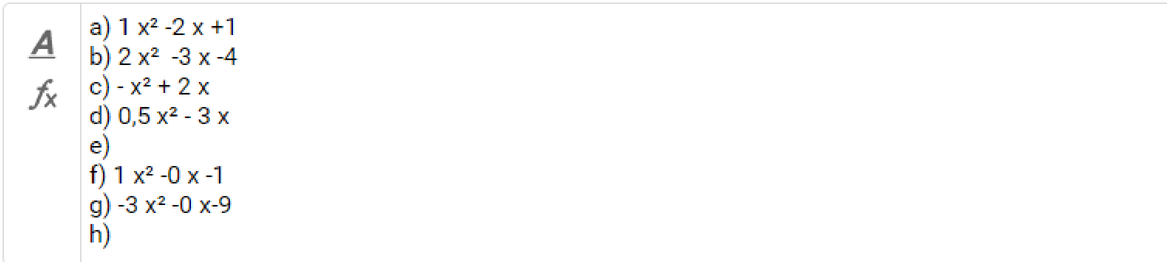
VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Fonte: Prova de matemática do ENEM 2016, segunda aplicação, caderno azul, questão 157.

Para uma atividade futura, devem ser adicionadas mais questões de vestibular, muitos se mostraram confiantes ao marcar a alternativa correta analisando a resposta pelo *software*, existe aqui uma potencialidade no trabalho da autoestima dos alunos que é de suma importância entre os adolescentes vestibulandos.

Mesmo com poucas questões de múltipla escolha, muitos respondiam até mesmo aquelas que requisitavam uma justificativa de maneira direta como quem marca a alternativa correta em uma questão de vestibular. Foram encontradas várias respostas simples como apenas “sim” ou “não” e alguns alunos simplesmente pulavam as questões dissertativas - como o exemplo da Figura 24, em que o aluno R ignora as questões “e” e “h” que pediam conjecturas sobre as leis das funções em que uma das raízes é zero e que possuem raízes opostas.

Figura 24 – Resposta do aluno R



a) 1 x² -2 x +1
b) 2 x² -3 x -4
c) - x² + 2 x
d) 0,5 x² - 3 x
e)
f) 1 x² -0 x -1
g) -3 x² -0 x-9
h)

Fonte: Captura de tela dos envios dos alunos.

Foi percebida uma mudança nesse padrão durante a análise das atividades, alguns alunos, especialmente os que participaram das duas etapas da atividade (alunos G, H, I, R, U e X), uma prolixidade maior para argumentar e descrever os padrões encontrados conforme o avanço das perguntas. Aparentemente eles esperavam que as questões pedissem respostas mais diretas, mas foram se soltando em relação às questões dissertativas, exercitando o seu o registro verbal do objeto matemático. Aparece outra potencialidade do uso das mídias sociais para o ensino de matemática, uma vez que elas podem auxiliar com a quebra do paradigma de ciência exata da disciplina, em que há apenas uma resposta certa numérica.

Refletindo sobre a análise das respostas, percebe-se a falta de uma enumeração nas questões para referenciá-las direto da atividade de forma mais simples. O uso de letras específicas para designar cada um dos alunos se mostrou eficiente e provavelmente será utilizado novamente em algum possível desdobramento da pesquisa - que será apontado nas considerações finais, após a análise dos questionários respondidos pelos alunos no *google forms*.

4.5 Análise dos questionários

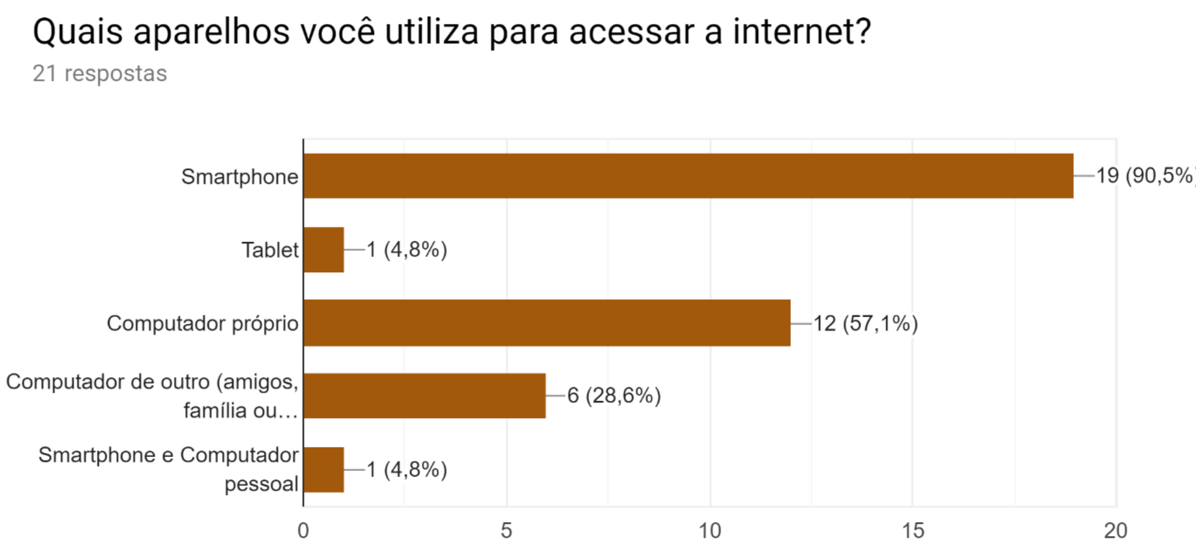
Junto da postagem das atividades, constavam links para dois questionários do google, um antes da primeira parte e outra no final da segunda. A intenção era analisar o que mudou na percepção dos alunos sobre o uso de mídias digitais em sala de aula, porém apenas um aluno respondeu os dois questionários.

4.5.1 Questionário Inicial

O primeiro questionário recebeu 21 respostas, que revelam dados interessantes sobre o perfil dos alunos e como eles acessam a internet.

Na primeira pergunta, sobre os aparelhos utilizados com acesso à rede mundial de computadores, 19 alunos marcaram que utilizam *smartphones*, mais de 90% das respostas recebidas. Doze afirmaram possuírem computadores próprios, enquanto 6 utilizam o computador de terceiros. Apenas um aluno afirmou possuir um tablet em casa.

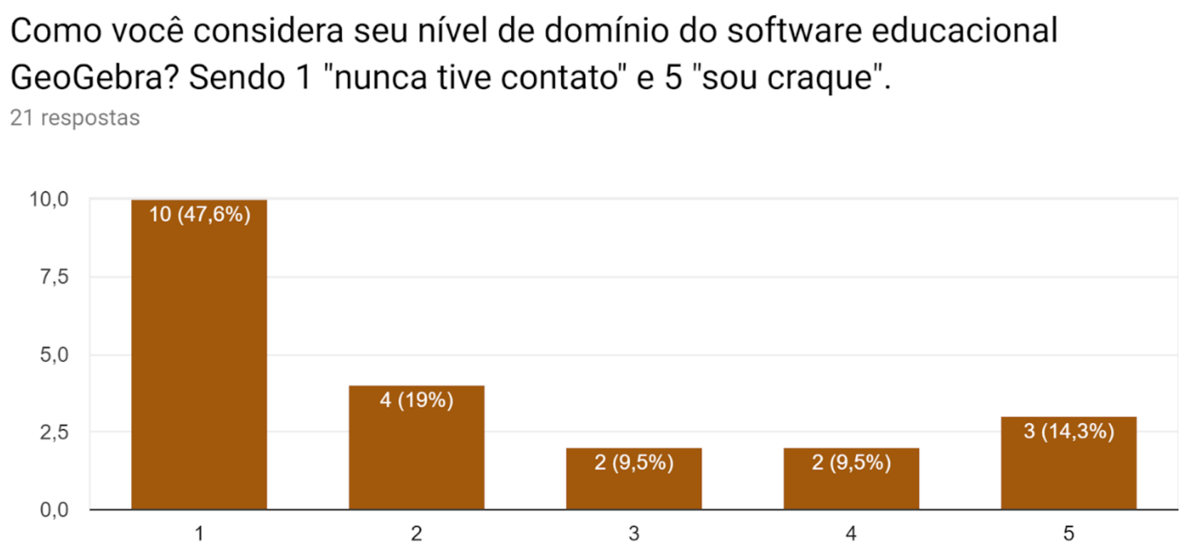
Figura 25 – Gráfico sobre a utilização de aparelhos com acesso à internet fornecido pelos alunos.



Fonte: gráfico gerado pelos formulários do google.

A seguir, foi perguntado aos participantes da pesquisa como eles avaliam de 1 a 5 o conhecimento deles sobre o *software* GeoGebra. Dez alunos marcaram 1 para “nunca tive contato”, e outros onze, configurando maioria, marcaram algo maior ou igual a dois, sendo três respostas número 5 - “sou craque”. Isso já mostra um impacto no ambiente do trabalho do professor, tendo em vista que 5 alunos estão há dois anos na turma e já tiveram contato com o aplicativo pois participaram de uma atividade similar no ano passado.

Figura 26 – Gráfico sobre o domínio dos alunos no GeoGebra



Fonte: gráfico gerado pelos formulários do google.

A última pergunta do primeiro questionário era dissertativa, antecipando a proposta da atividade, e pedia que os alunos apontassem as suas opiniões sobre o uso de mídias digitais em sala de aula e se há potencialidades na melhoria do ensino. Cerca de 9 alunos deram respostas diretas como “sim” ou “não tenho muito contato”, mas chama a atenção a resposta de um aluno que afirmou poder treinar, com o uso das mídias digitais, “todos os tipos de inteligência sobre um determinado assunto”.

Figura 27 – Resposta de 11 alunos para a questão: ‘Qual sua opinião sobre o uso das mídias digitais em sala de aula? Você vê nelas potenciais de melhorias nas relações de aprendizagem’.

sim
Super útil, já que em muitos casos o uso de mídias digitais facilitam.
Sim. É muito importante usar a tecnologia a nosso favor, principalmente nos estudos.
Sim, pois a internet é um meio muito utilizado entre os jovens e isso facilita o aprendizado
SIM
Acho que facilitaria no aprendizado, com formas criativas de ensino.
Sim, pois é uma ferramenta fundametal para auxiliar o docente no processo de aprendizagem do aluno em sala de aula ou em casa.
sim porém não usaremos computador no vestibular então é inútil, só ano que vem já que o enem vai ser online
É útil. Sim.
muito boa.sim
é uma ótima ferramenta, porém , não tenho tanto domínio assim.

Fonte: captura de tela dos envios dos alunos.

Destacam-se potencialidades apontadas pelos alunos como a relação entre a juventude e a internet, facilitando o aprendizado e os estudos, ou como o aluno que configurou a atividade como inútil, mas observando o plano piloto do MEC de aplicação digital do ENEM que tem previsão de início para o ano de 2020.

4.5.2 Questionário final

O segundo questionário recebeu apenas três respostas, o que não permite com que se tirem conclusões sobre a turma como um todo. Como apenas um aluno respondeu os dois questionários, não faz sentido comparar o antes e depois das respostas para a pergunta que pede para os alunos darem uma nota de 1 a 5 para os seus domínios do *software*.

Para a pergunta relativa à contribuição do aplicativo no aprendizado sobre funções, foram recebidas duas respostas afirmando ser mais fácil visualizar os seus gráficos no plano cartesiano. A outra resposta se destaca, pois, revela aprendizado da existência do processo de RP ao afirmar que consegue compreender o “raciocínio lógico-matemático”.

Figura 28 - Respostas dos alunos para a questão ‘Como o software contribuiu para o seu aprendizado de funções? Justifique’.

Com certeza. Como a matemática é uma linguagem e ao aprender uma nova, temos que relacionar a algo que já sabemos, o método de visualizar e e compreender a partir disto, ajuda criar o raciocínio lógico-matemático importante a mim e a população brasileira por meio de uma mídia digital.
Sim. Pois possibilita a melhor visualização das etapas.
demonstrando mais facilmente as funções nos gráficos.

Fonte: captura de tela dos envios dos alunos.

Perguntados sobre como a relação da atividade com as provas da UFRGS e do ENEM, os alunos perceberam pouca contribuição da sequência didática, apenas como uma ferramenta de resolução de problemas.

Figura 29 - Respostas de alguns alunos para a questão ‘De que maneira a atividade contribuiu para a sua compreensão da prova da UFRGS e do ENEM? Justifique.’

Sim, além de me ajudar no raciocínio lógico, também contribui para resolver os problemas propostos para as demais provas.
De maneira muito boa
nenhum.

Fonte: captura de tela dos envios dos alunos.

A última pergunta mencionava o uso de mídias digitais em sala de aula e indagava se o aluno vê potencialidades trazidas por elas nas relações de aprendizagem. Nas respostas, temos apontadas a relação entre a matemática e o “raciocínio lógico-matemático”, bem como a visão de um discente inserido na cultura digital de que “podemos usar a tecnologia à nosso favor”. Em outra resposta, fica evidente o potencial pedagógico dos diagramas interativos com controles deslizantes, que chamaram a atenção dos alunos.

Figura 30 – Respostas dos alunos para a pergunta ‘Qual a sua opinião quanto ao uso de mídias digitais (como o computador) em sala de aula? Você vê nelas potencialidades de melhora nas relações de aprendizagem?’

Já foi respondido, por isso recortei o seguinte parágrafo "Como a matemática é uma linguagem e ao aprender uma nova, temos que relacionar a algo que já sabemos, o método de visualizar e e compreender a partir disto, ajuda criar o raciocínio lógico-matemático importante a mim e a população brasileira por meio de uma mídia digital."
Ótima! Principalmente pela dinâmica de poder mexer no gráfico digitalmente.
sim, mostra como podemos usar a tecnologia à nosso favor e para o futuro profissional e acadêmico também.

Fonte: captura de tela dos envios dos alunos.

Feitas as análises dos dados produzidos pela pesquisa, temos no próximo capítulo a conclusão e as considerações finais do trabalho, que visam retomar a pergunta de pesquisa e os objetivos, realizar um apanhado geral do que se encontrou e se conclui do trabalho, além de apontar direções futuras.

5 Considerações Finais e Conclusão

Com a análise de dados concluída e apoiados no referencial teórica, voltamos à pergunta de pesquisa tentando respondê-la.

O material didático digital, hospedado no GeoGebraGroups, contribuiu para o ensino e para a aprendizagem de funções inserido no contexto da educação popular de maneira significativa. Foi possível, através da análise das respostas dos alunos, observar que vários deles conseguiram transitar entre os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático em questão. A transformação entre os registros e a sua compreensão individual foi facilitava pelo software GeoGebra, que, ao fornecer diagramas interativos, em que o aluno pode variar os coeficientes e acompanhar em tempo real a sua influência no gráfico da função, permitiu a visualização da relação entre os registros algébrico, aritmético e geométrico. Esse trabalho aproxima os três ramos da matemática que podem ser observados em diferentes contextos, apresentando uma melhoria da perspectiva da intradisciplinaridade matemática. Essa potencialidade já foi observada também por Perius (2012), que afirmou:

> Os computadores e a internet oferecem oportunidades que facilitam o desenvolvimento e o entendimento de conceitos e procedimentos matemáticos. Entre outras possibilidades, o uso de figuras elaboradas em aplicativos (*softwares*) de geometria dinâmica, por exemplo, pode auxiliar o aluno a entender as figuras geométricas como classes, diferenciando-as do simples desenho de uma figura. (PERIUS, 2012, p. 27, 28)

O quarto registro, o simbólico em língua materna, também se mostrou exercitado pelos alunos e pelas questões envolvendo os diagramas interativos. As questões dissertativas, que oportunizavam ao aluno a observação de padrões, a criação de conjecturas, a argumentação e a demonstração mostraram que podem impactar uma turma em sala de aula, quebrando o paradigma de que a matemática é uma ciência rígida que só permite uma resposta correta. Ainda que nem todos os alunos tenham conseguido desprovar suas conjecturas falsas, o GeoGebra se mostrou excelente para observar padrões e testá-las. A argumentação também foi exercitada pela atividade, e foi percebido que os alunos vão ficando mais confortáveis em argumentar quanto mais expostos a esse tipo de questão eles forem. A demonstração não foi muito trabalhada por essa atividade, estando presente em apenas uma questão, entretanto outros autores já encontraram potencialidades nessa direção, como Notare e Basso (2018) que afirmam:

> Em todas as categorias, o ambiente de geometria dinâmica constituiu-se em um espaço para ações e coordenações de ações dos sujeitos, dando suporte para as abstrações reflexionantes necessárias para o pensamento dedutivo. (NOTARE e BASSO, 2018, p. 9)

Além de fortalecer o ensino no que tange os registros de representação semiótica e o processo de RP, o próprio uso de mídias digitais é importante em sala de aula. Não é possível afirmar se os alunos que participaram dessa pesquisa mostram um domínio maior do GeoGebra e do computador como um todo depois da atividade. Mesmo assim, é importante que as tecnologias da comunicação sigam sendo usadas como material didático, o que mantém o diálogo aberto entre os professores e os alunos sobre o uso delas e da rede mundial de computadores em sociedade. As mídias digitais na educação são um campo rico de pesquisa e trabalho em educação por conta do seu próprio desenvolvimento e popularização nos últimos anos, conforme Fantin e Rivoltella (2003):

> A cultura digital é também uma cultura em que a portabilidade é às vezes o item mais importante. Os aparelhos estão se tornando cada vez menores e mais leves para que possam ser levados no bolso: a tecnologia vira uma roupa, sem a qual é difícil sair de casa. Os aparelhos também estão cada vez mais potentes. Com eles é possível fazer muitas coisas, conectar-se, comunicar-se, editar texto e imagens. (FANTIN e RIVOLTELLA, 2003, p.44)

Se muitas das potencialidades da geometria dinâmica e dos diagramas interativos residem nas tecnologias da comunicação, os desafios trazidos por elas também têm a mesma origem. Podem ser dificuldades de ordem técnica, como a falta de internet em duas tentativas de aplicação da atividade, ou pela própria ausência de aparelhos adequados disponíveis, como ocorreu no projeto piloto apresentado na introdução.

Outro desafio deixado pelo uso das mídias digitais na educação é a formação de professores, que precisam saber usar *softwares* educacionais para trabalhá-los em sala de aula. É chave aqui a formação continuada, que nós, professores, sigamos buscando qualificação além do curso de graduação, para mantermo-nos atualizados quanto às tecnologias mais atuais. Esse desafio também foi apontado por Perius (2012):

> É evidente a necessidade de uma formação contínua do professor, já que este, diante do novo processo educacional, precisa da organização e realização constante de avaliação de seu trabalho, para dar sentido ao conhecimento tradicional nesta era da informação. Não se trata apenas do uso do computador como uma simples ferramenta, como a antiga máquina de escrever, mas sim do conhecimento de um sistema simbólico, de mais essa linguagem, que se lhe é apresentada, também, como um meio de organização cognitiva da realidade pela constituição de novos significados, expressão, comunicação e informação. (PERIUS, 2012, p. 25)

Os ambientes de educação popular estão ligados à formação de professores, são neles onde professores veteranos podem encontrar um ambiente com liberdade de ensino para manter-se atualizado e dividir vivências com os mais jovens, que estão adquirindo experiência na docência. Paulo Freire (2013) afirmou que é necessário a formação continuada dos professores, mais do que isso, que nós devemos procurar sempre manter a dualidade que é ser, concomitantemente, professor e aluno.

> Não há docência sem discência, as duas se explicam e seus sujeitos, apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto um do outro. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender. (FREIRE, 2013, p. 25)

Por fim, reforço a importância da educação popular que, ao oferecer o ensino de maneira gratuita e a preparação para o ingresso no ensino superior, está inserida na responsabilidade social da universidade pública, como a UFRGS e o IFRS. É através de projetos de extensão como o pré-vestibular popular Dandara dos Palmares, que elas conseguem devolver projetos educacionais para a sociedade que não a frequenta, mas que, mesmo assim, merece participação.

REFERÊNCIAS

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica.** Em: Pesquisa qualitativa em educação matemática, p. 111-124/ organizado por Marcelo de Carvalho Borba e Jussara de Loiola Araújo. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

BORBA, Marcelo de Carvalho. **Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática.** I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 2002.

BRANDÃO, Carlos Rodrigues. **O que é Educação Popular.** São Paulo: Brasiliense, 2006.

BRASIL. Ministério da educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acessado em 30/11/2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).** Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.Acesso em julho de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Bases legais. Brasília. 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em julho de 2017.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **A transdiciplinaridade como uma resposta à sustentabilidade.** Revista Terceiro Incluído: Transdisciplinaridade e Educação Ambiental, Goiânia, v. 1, n. 1, p. 1-13, jun., 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e aplicações, 1: Ensino Médio.** São Paulo: Ática, 3. edição, p. 41-147, 2016.

DOTTA, Silvia. **Uso de uma Mídia Social como Ambiente Virtual de Aprendizagem.** XXII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação - XVII WIE. Aracaju, AL, Brasil, 2011.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Trad. MORETTI, M. T. Revemat: Rev. Eletr. De Edu. Mat e ISSN 1981 - 1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266 - 297, 2012.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fascículo I)**.: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira - São Paulo: Editora livraria da física, 2009.

FAN, Lianghuo, ZHU, Yan, ZHENZHEN Miao. **Textbook research in mathematics education: development status and directions.** ZDM Mathematics Education, n. 45, p. 633-646, 2013.

FANTIN, Mônica & GIRARDELLO, Gilka. **Diante do abismo digital: mídia-educação e mediações culturais.** Perspectiva, Florianópolis, v. 27, n. 1, 69-96, jan./jul., 2009.

FANTIN, Monica, RIVOLTELLA, Pier Cesare. **Cultura digital e formação de professores: usos da mídia, práticas culturais e desafios educativos.** Cultura digital e escola: pesquisa e formação de professores. Campinas (SP): Papirus, 2003.

FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho, e MALTEMPI, Marcus Vinicius. **Intradisciplinaridade Matemática com GeoGebra na Matemática Escolar.** Bolema, Rio Claro (SP), v.33, n.63, p. 348-367, abr. 2019.

FAVARÃO, Maria José. **Educação, participação política e direitos humanos. Capítulo III.III - Gestão escolar e educação em direitos humanos.** São Paulo: Editora e livraria Paulo Freire, p. 189-214, 2011.

FIORENTINI, Dario, LORENZATO, Sergio Apparecido. **Investigação em educação matemática. Percursos teóricos e metodologias.** Coleção formação de professores. 3a edição, 2007.

FISS, Dóris Maria Luzzardi, BOAZ, Eduardo Rachelle, BALZAN, Júlia, PRASDIO, Paula. **A EJA em três temas: evasão, tempos da vida e prática pedagógica.** Em: Entre imagens e palavras: práticas e pesquisas na EJA, p. 151-163/ organizado por Ana Claudia Ferreira Godinho et. al. Porto Alegre: Editora Panorama Crítico, 2012.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários para a prática educativa.** 44ª ed. Rio de Janeiro: Paz & Terra, 2013.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido.** 9. ed. Rio de Janeiro: Paz & Terra, 1981.

FRIEDLAND, Alex, e TABACH, Michal. **Promoting multiple representations in algebra.** CUOCO, A. A. (org.). The roles of representation in school mathematic. Reston, VA: NCTM, p. 173-285, 2001.

HANNA, Gila, JAHNKE, Hans Niels. **International Handbook of Mathematics Education**. Proof and Proving. In: BISHOP, A.J. et al. (eds.), p. 877-908. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1996.

HENRIQUES, Afonso, e ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple. Ciência Educação, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

HONG, D. S., & CHOI, K. M. Reasoning and proving opportunities in textbooks: a comparative analysis. International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 4 (1), p. 82-97, 2018.

IEZZI, Gelson, DOLCE, Osvaldo, DEGENSZAJN, David, PÉRIGO, Roberto, & ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: Ciência e aplicações, 1: Ensino Médio.** São Paulo: Saraiva, 6. edição, p. 44-116, 2010.

LOUZADA, Alana G. T. **Geometria dinâmica 3D: uma experiência com Geogebrabook no ensino da geometria espacial.** Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2018.

MADRUGA, Zulma E. de F. **Recursos tecnológicos como apoio no ensino presencial e a distância da disciplina de matemática.** II Seminário Diálogos em Educação a Distância. Pelotas, RS, Brasil, 2017.

MASSENSINI, Rogério Luís. **Inclusão digital: sob a ótica da cidadania plena.** DataGramaZero - Revista da ciência e informação - v.12 n.2 abr/11, 2011.

NAFTALIEV, Elena, YERUSHALMY, Michal. **Interactive diagrams: alternative practices for the design of algebra inquiry.** Center for Educational Technology and University of Haifa, Israel, 2009.

NASCIMENTO, Francisco Jeovane, LIMA, Ivoneide Pinheiro de, CASTRO, Eliziane Rocha, ARAÚJO, Regiane Rodrigues. **Condições de trabalho de professores iniciantes de matemática: possibilidades e desafios no processo de desenvolvimento profissional.** Periódico Horizontes, USF, Itatiba, SP, Brasil, 2019.

NOTARE, Márcia Rodrigues, BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica.** CINTED - Novas Tecnologias da Educação. V.16 N°1, julho, 2018.

NOTARE, Márcia Rodrigues, FIOREZE, Leandra A., HALBERSTADT, Fabrício F. **O Software Grafeq e os Registros de Representação Semiótica: Uma Análise de Trabalhos com Ilusão de Ótica.** In: XIV Conferencia Interamericana de Educação Matemática - XIV CIAEM, Tuxtla, 2015.

PEREIRA, Dulcinéia de Fátima Ferreira, PEREIRA, Eduardo Tadeu. **Revisitando a história da educação popular no Brasil: em busca um outro mundo possível.** Revista HISTEDBR on-line, Campinas, n.40, p.72-89, dez. 2010.

PERIUS, Ana Amélia Butzen. **A tecnologia aliada ao ensino de matemática.** Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Cerro Largo, RS, Brasil, 2012.

PETRIS, Vânia Fuchter. **O desafio da educação na cultura digital.** Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Taió, SC, Brasil, 2016.

PINI, Francisca Rodrigues de Oliveira, ADRIANO, Ana Lívi. **Educação, participação política e direitos humanos. Capítulo I.I - Educação em direitos humanos: abordagens teórico-metodológicas e ético-políticas.** São Paulo: Editora e livraria Paulo Freire, p. 15-29, 2011.

PINI, Francisca Rodrigues de Oliveira. **Educação popular e seus diferentes espaços: Educação social de rua, prisional e do campo.** IV congresso internacional de pedagogia, São Paulo, SP, Brasil, 2012.

REZAT, Sebastian. **Learning mathematics with textbooks.** PME 32 and PME-NA XXX. Universität Giessen, Deutschland, p. 177-184, 2008.

RIBEIRO, Elvia Nunes, MENDONÇA, Gilda Aquino de Araújo, MENDONÇA, Alzino Furtado de. **A importância dos ambientes virtuais de aprendizagem na busca de novos domínios da EAD.** Centro Federal de Educação Tecnológica de Goiás, Goiânia, GO, Brasil, 2007.

SANTAELLA, Lucia. **Culturas e artes do pós-humano: Da cultura das mídias a cibercultura.** São Paulo: Paulus, 2003.

SCHWARTZ, Gilson. **Exclusão digital entra na agenda econômica mundial.** Folha de São Paulo, São Paulo, 18 de janeiro de 2000.

SILVA, Claudio Xavier da, & BENIGNO, Barreto Filho. **Matemática Aula por Aula.** São Paulo: FTD, 2. edição renovada, p. 81-208, 2005.

SILVA, Rodrigo Sychocki da, PINTO, Shéridan dos Reis. **Funções quadráticas e tecnologias móveis: ações cooperativas em um experimento no Ensino Médio.** Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 14(1), p. 108-125, 2019.

SILVA, Rodrigo Sychocki da. **O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na Escola Básica.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

SOCZEK, D. **PIBID como formação de professores: reflexões e considerações preliminares.** Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores, v.01, n.05, ago./dez., 2011.

SOSNIAK, L. A., & PERLMAN, C. L. **Secondary education by the book.** Journal of Curriculum Studies, 22 (5), p. 427-442, 1990.

STYLIANIDES, Gabriel J. **An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving.** For the learning of Mathematics, Vol. 28, no. 1, p. 9-16, Mar., 2008.

STYLIANIDES, Gabriel J. **Reasoning-and-Prooving in School Mathematics Textbooks.** Mathematical Thinking and Learning, University of Pittsburgh, 11:4, 258-288, 2009.

THOMPSON, Denisse R., SANK, Sharon L., JOHNSON, Gwendolyn J. **Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks.** Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 43, N°. 3, 253-295, 2012.

VALVERDE, G. A., BIANCHI, L. J., WOLFE, R. G., SCHMIDT, W. H., & HOUANG, R. T. **According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.** Dordrecht, Netherlands, Kluwer, 2002.

VARGAS, Eliane Teixeira, NOTARE, Márcia Rodrigues. **Integração de diferentes mídias digitais no ensino de Geometria: Uma experiência com o oitavo ano do ensino fundamental.** CINTED - Novas tecnologias na educação. V.12 N°2, dezembro, 2014.

Apêndice 1

TERMO DE CONSENTIMENTO ALUNO

Eu,____, R.G. _______________________ , declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada **Atividades sobre funções em ambientes virtuais de aprendizagem: um estudo na educação popular com oportunidades de raciocínio-e-prova**, desenvolvida pelo pesquisador Thor Franzen. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelo Professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail: sychocki.rodrigo@gmail.com.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: Observar potencialidades e desafios do uso das mídias digitais em sala de aula no contexto do ensino de funções.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), e que a identidade será preservada nas publicações. A minha colaboração se fará por meio das respostas enviadas pela plataforma online GeoGebraGroups e pelos questionários disponibilizados através do Google Forms, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às respostas dadas. A minha colaboração se dará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo e-mail: thor.franzen1903@gmail.com. Fui ainda informado (a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

________________ (local), ______ de _________________ de 2019 (data).

Assinatura do aluno: ____

Assinatura do(a) pesquisador(a): ____

Assinatura do Orientador da pesquisa: _______________________________________

Apêndice 2

TERMO DE CONSENTIMENTO RESPONSÁVEL

Eu,____, R.G. _______________________ , declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada Atividades sobre funções em ambientes virtuais de aprendizagem: um estudo na educação popular com oportunidades de raciocínio-e-prova, desenvolvida pelo pesquisador Thor Franzen. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelo Professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail: sychocki.rodrigo@gmail.com.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: Observar potencialidades e desafios do uso das mídias digitais em sala de aula no contexto do ensino de funções.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), e que a identidade será preservada nas publicações. A minha colaboração se fará por meio das respostas enviadas pela plataforma online GeoGebraGroups e pelos questionários disponibilizados através do Google Forms, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às respostas dadas. A minha colaboração se dará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado (a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo e-mail: thor.franzen1903@gmail.com. Fui ainda informado (a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

__________________ (local), ______ de __________________ de 2019 (data).

Assinatura do aluno: ____

Assinatura do(a) pesquisador(a): ____

Assinatura do Orientador da pesquisa: ____

Apêndice 3

TERMO DE CONSENTIMENTO DA INSTITUIÇÃO

O Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS), neste ato representada pela direção por intermédio do presente documento, autoriza Thor Franzen, brasileiro, estudante, CPF [redacted], a aplicar a proposta de ensino: “Atividades sobre funções em ambientes digitais de aprendizagem: um estudo na educação popular com oportunidades de Raciocínio-e-Prova” na turma de extensivo do cursinho pré-vestibular popular Dandara dos Palmares. O instituto está ciente de que a referida proposta de ensino é base para o trabalho de conclusão de curso (TCC) de Thor, o qual é uma exigência parcial para a obtenção do título em Matemática - Licenciatura pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul e é orientado pelo Professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva. O autorizado, por sua vez se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes que participarão da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre,___ de _____________ de 2019.

____
Thor Franzen (autor)

____
Professor Dr. Rodrigo Sychocki da Silva

____
Direção do IFRS

Apêndice 4

Questionário Inicial

Atividade no GeoGebra

Responda abaixo as perguntas referentes a você e sobre as tecnologias de aprendizagem no contexto da matemática.

*Obrigatório

Seu Nome *

Sua resposta

De que maneiras você acessa a internet? *

- [ ] Rede wi-fi em casa
- [ ] Rede wi-fi na escola ou no IFRS
- [ ] Rede wi-fi no trabalho
- [ ] Pacote de dados móveis
- [ ] Outro:

Quais aparelhos você utiliza para acessar a internet? *

- [ ] Smartphone
- [ ] Tablet
- [ ] Computador próprio
- [ ] Computador de outro (amigos, família ou em laboratórios de informática)
- [ ] Outro:

Como você considera seu nível de domínio do software educacional GeoGebra? Sendo 1 "nunca tive contato" e 5 "sou craque". *

	1	2	3	4	5	
Nunca tive contato	○	○	○	○	○	Sou craque

Qual a sua opinião quanto ao uso de mídias digitais (como o computador) em sala de aula? Você vê nelas potencialidades de melhora nas relações de aprendizagem? *

Sua resposta

ENVIAR

Apêndice 5

Atividade Função de Primeiro Grau

Função de Primeiro Grau

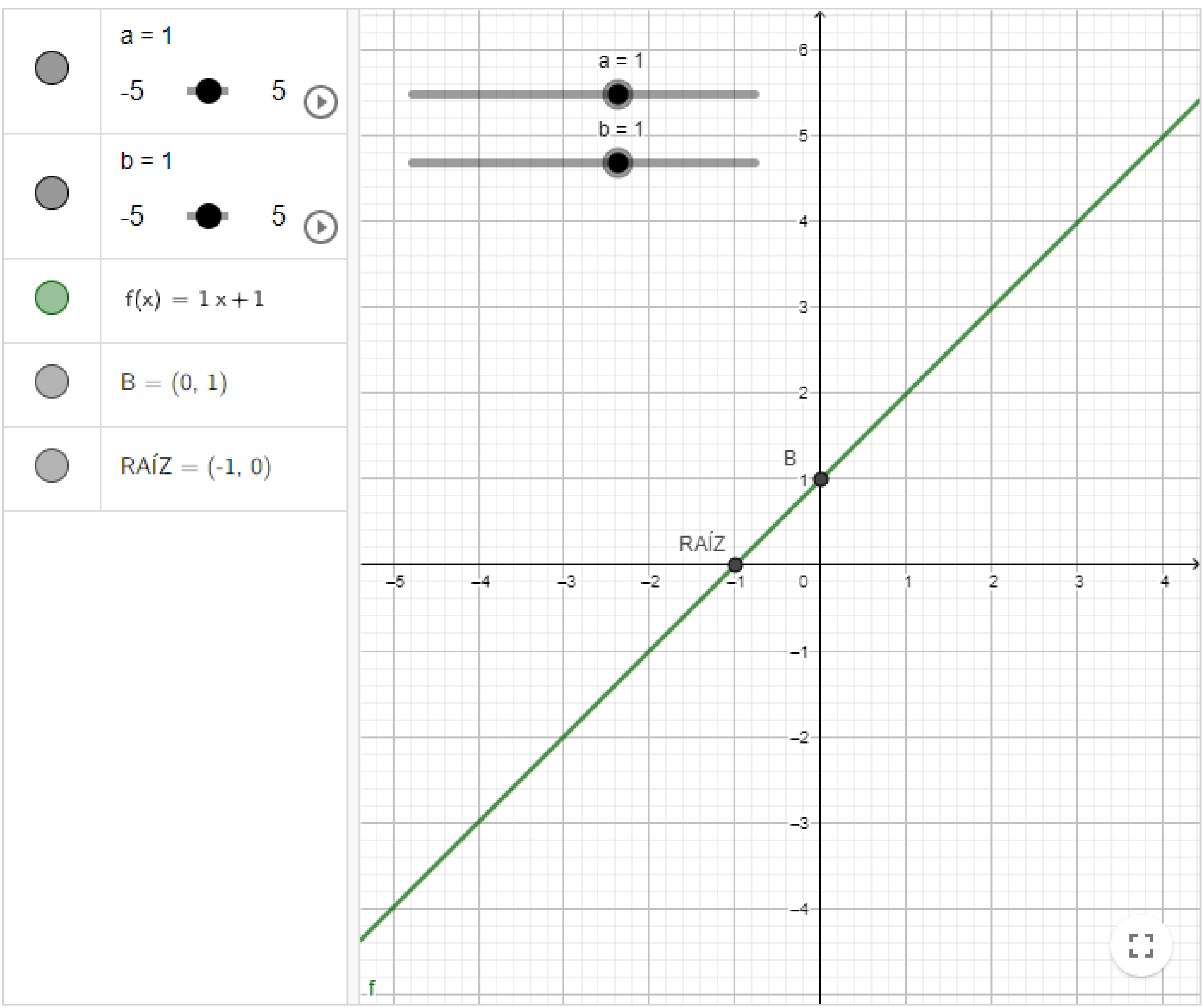
Autor: Thor Franzen

Função de primeiro grau

Uma função é dita de primeiro grau (ou afim) quando f(x) = ax + b, para todo x, temos que os valores de f(x) = y quando x está fixado.

O parâmetro "a" é chamado de "coeficiente angular" e indica a inclinação da reta formada pelo gráfico da função, enquanto "b" ganha o nome de "coeficiente linear" e indica a posição da reta, sendo f(0) = b, ou seja, o ponto (0, b) no sistema cartesiano de coordenadas faz parte da função.

Gráfico da função de primeiro grau



Coeficiente angular

Observe o gráfico acima. Graças a geometria dinâmica do GeoGebra, podemos variar o coeficiente "a" movendo o controle deslizante no diagrama, faça "a" assumir diferentes valores e responda:

O que acontece com o gráfico quando a=0?
O que acontece com o gráfico quando a>0 (positivo)?
O que acontece com o gráfico quando a<0 (negativo)?

O que o coeficiente "a" nos indica sobre o gráfico da reta?

Digite sua resposta aqui...

Coeficiente linear

Agora faça variar o coeficiente "b" movendo para a esquerda e para a direita o controle deslizante no diagrama. Responda:

O que acontece com o gráfico quando b=5?
O que acontece com o gráfico quando b=0?
O que acontece com o gráfico quando b=-1?

O que o coeficiente "b" nos indica sobre o gráfico da reta?

O gráfico sempre intercepta o eixo vertical?

Digite sua resposta aqui...

Zeros da função

Os valores de "x" tais que f(x) = 0 são chamados de zeros (ou raízes) da função. O número máximo de raízes que uma função apresenta é igual ao grau dela, portanto as funções de primeiro grau têm até uma raiz.

Calcule as raízes das seguintes funções:

*Dica: Você pode variar os coeficientes no gráfico e observar onde está o ponto "RAIZ".

a) f(x) = 4x + 4
b) g(x) = -2x + 2
c) a = 1, b = -3
d) a = -5, b = 2
e) a = 0, b = 1

Digite sua resposta aqui...

Qual a interpretação geométrica da raiz?

Podemos afirmar qual(is) a(s) raiz(es) de uma função apenas observando o seu gráfico sem saber a lei da função em questão?

Digite sua resposta aqui...

Uma fórmula para a raiz da função de primeiro grau

Substituindo f(x) = 0 (definição de zero da função) na equação geral f(x) = ax + b, ficamos com:

$0 = ax + b$

Isolando o x na equação, como podemos generalizar o valor da raiz de uma função afim?

O gráfico sempre intercepta o eixo horizontal?

Digite sua resposta aqui...

Resolvendo questões de vestibular com o GeoGebra

Para solucionar a próxima questão, retiradas da prova da UFRGS, você pode utilizar a calculadora gráfica do GeoGebra (https://www.geogebra.org/graphing), que cria os gráficos das funções colocadas na entrada algébrica instantaneamente e permite a interpretação geométrica delas. Crie os gráficos das funções abordadas e procure a alternativa correta.

UFRGS 2017

As retas de equação $y = ax$ e $y = -x + b$ interceptam-se em um único ponto cujas coordenadas são estritamente negativas. Então pode-se afirmar que:

Assinale a sua resposta aqui

- ☐ $a>0$ e $b>0$
- ☐ $a<0$ e $b<0$
- ☐ $a<-1$ e $b>0$
- ☐ $a>0$ e $b<0$
- ☐ $a<-1$ e $b<0$

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Apêndice 6

Atividade Função de Segundo Grau

Função de Segundo Grau

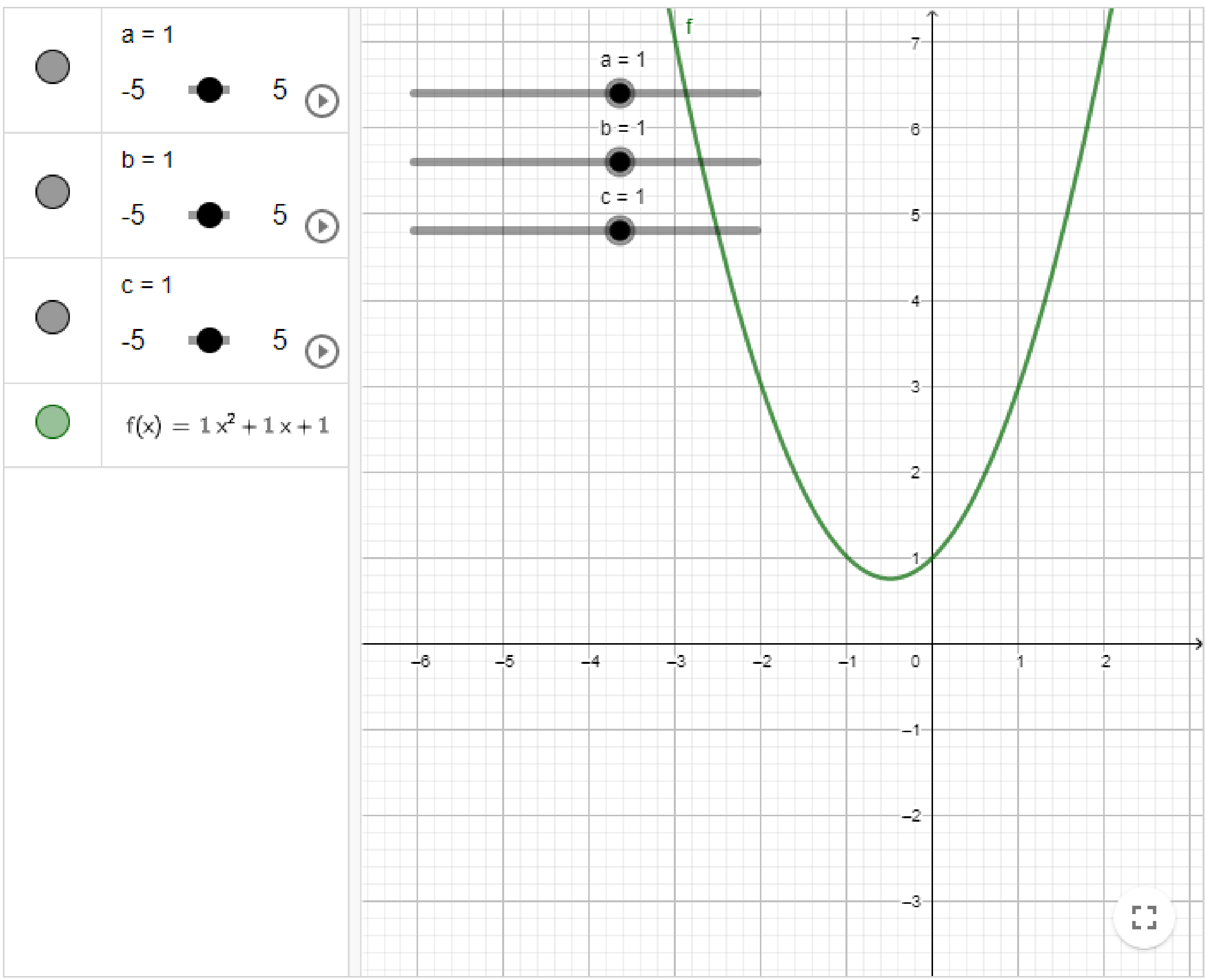
Autor: Thor Franzen

Uma função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ chama-se **quadrática** (ou de **segundo grau**) quando existem números reais a, b, c, com $a\neq 0$, tal que f leva x em ax^2+bx+c, para todo $x\in\mathbb{R}$. Ou seja, $f(x)=ax^2+bx+c$, e colocamos os valores de f(x) no eixo y.

O gráfico da função quadrática se chama **parábola**, e a sua representação geométrica aparece em verde no diagrama abaixo.

O coeficiente "a" indica a concavidade da parábola (virada para cima ou para baixo), o sinal de "b" implica em como a função corta o eixo y (crescente ou decrescente) e o valor de "c" mostra qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo y, ou seja o ponto (0,c) sempre pertence ao gráfico.

Gráfico da função de segundo grau



Coeficiente "a"

Varie o coeficiente "a" movendo o controle deslizante no diagrama acima, fazendo "a" assumir diferentes valores e responda:

(a) O que acontece com o gráfico quando $a = 0$?
(b) O que acontece com o gráfico quando $a > 0$ (positivo)?
(c) O que acontece com o gráfico quando $a < 0$ (negativo)?

(d) O que o coeficiente "a" nos indica sobre o gráfico da parábola? Por que isso acontece?

Digite sua resposta aqui...

Coeficiente "b"

Varie o coeficiente "b" movendo o controle deslizante no diagrama acima e responda:

(a) O que acontece com o gráfico quando $b = 0$?
(b) O que acontece com o gráfico quando $b > 0$ (positivo)?
(c) O que acontece com o gráfico quando $b < 0$ (negativo)?

(d) O que o coeficiente "b" nos indica sobre o gráfico da função de segundo grau?

Digite sua resposta aqui...

Coeficiente "c"

Por último, varie o coeficiente "c" movendo o controle deslizante no gráfico e responda:

(a) O que acontece com o gráfico quando $c = -4$?
(b) O que acontece com o gráfico quando $c = 0$?
(c) O que acontece com o gráfico quando $c = 2$?

(d) O que o coeficiente "c" nos indica sobre o gráfico da parábola? Por que isso acontece?

Digite sua resposta aqui...

Delta e Raízes

Podemos calcular o valor de Δ (**Delta**) conhecendo os coeficientes de uma função de segundo grau.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

A partir dele, podemos calcular as **raízes** (ou **zeros**) da função quadrática, que são os pontos onde $y = 0$, ou seja, os pontos onde o gráfico intercepta o eixo x.

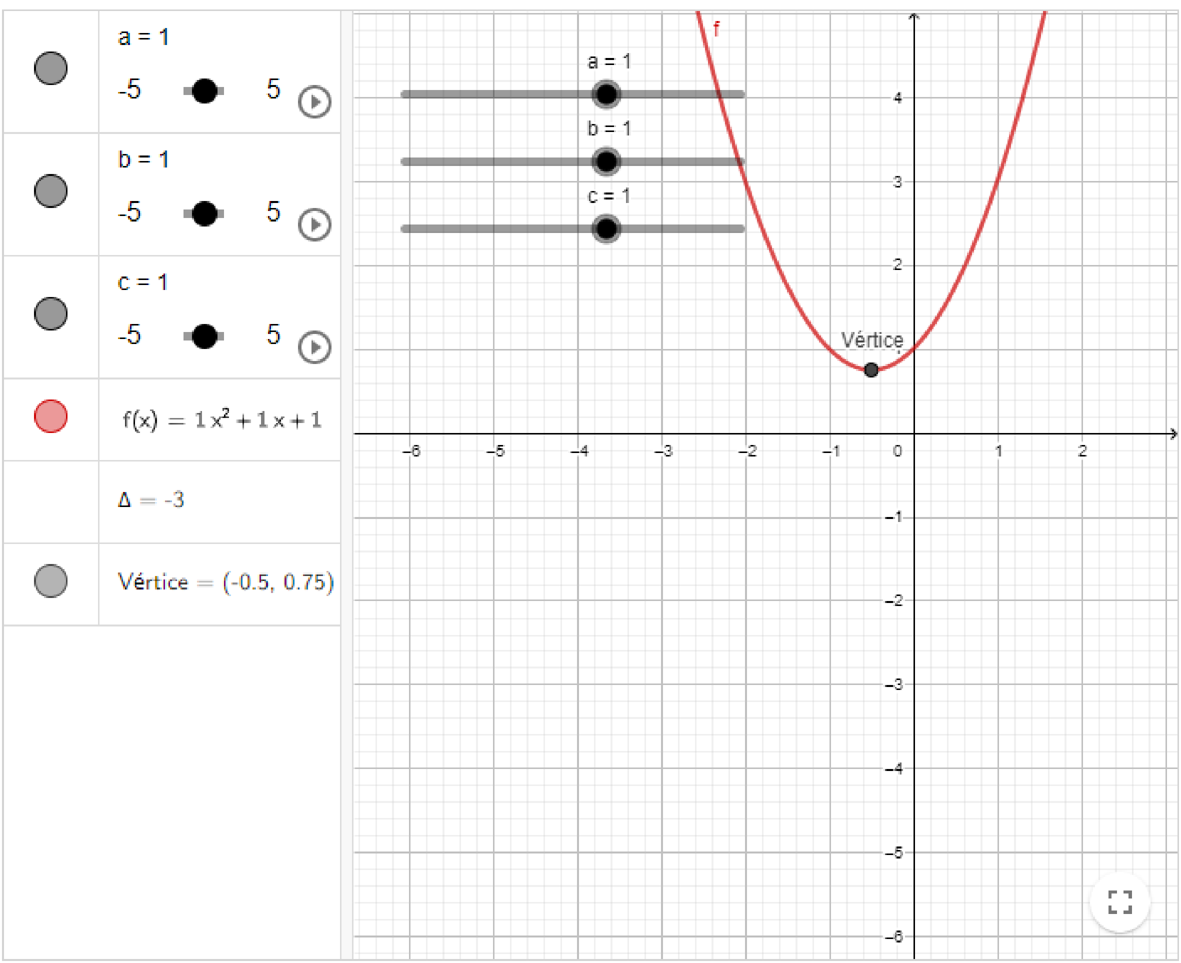
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

Lembrando que sempre temos dois resultados (x_1 e x_2) para uma equação de segundo grau, pois devemos levar em conta os dois casos de $\pm\sqrt{\Delta}$.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

Observe o gráfico abaixo:



Delta e o seu sinal

Varie os coeficientes "a", "b" e "c" no diagrama acima e observe o valor de Δ na janela a esquerda (que o próprio software calcula) e responda:

(a) Quantas vezes o gráfico intercepta o eixo x quando $\Delta > 0$ (positivo)?
(b) Quantas vezes o gráfico intercepta o eixo x quando $\Delta = 0$?
(c) Quantas vezes o gráfico intercepta o eixo x quando $\Delta < 0$ (negativo)?

(d) Por que o número de raízes muda conforme o sinal do Δ ? Justifique.

Digite sua resposta aqui...

Vértice

Volte no diagrama acima e observe o "**vértice**" de diferentes funções de segundo grau.

Ele representa o ponto de **máximo** (no caso em que $a < 0$) ou de **mínimo** (quando $a > 0$) da parábola, para calculá-lo utilizamos:

$xv = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$ para calcular a sua coordenada x,

$yv = -\dfrac{\Delta}{4 \cdot a}$ para calcular a sua coordenada y.

Responda:

Quais as coordenadas do vértice das seguintes funções de segundo grau? Ele é um ponto máximo ou mínimo?

Dica: substitua os valores de "a", "b" e "c" nos controles deslizantes do gráfico acima e observe as coordenadas do ponto "vértice".

(a) $f(x) = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3$
(b) $g(x) = -2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3$
(c) $h(x) = -x^2 + 4$
(d) $i(x) = x^2 + 3x$
(e) $j(x) = x^2$

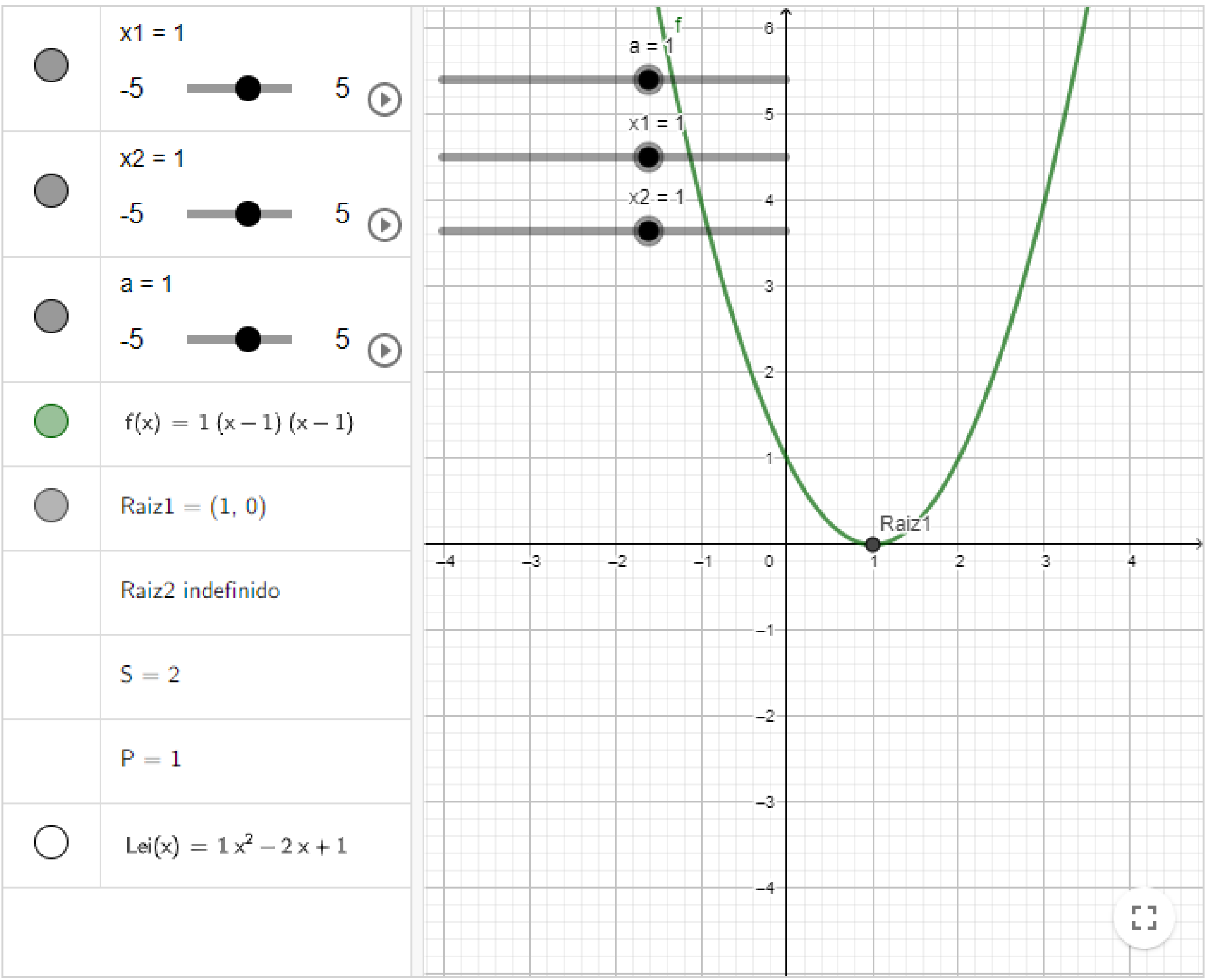
Digite sua resposta aqui...

Forma fatorada

Usamos a **forma fatorada** de uma função quando sabemos as raízes e escrevemos a sua lei:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Observe o gráfico abaixo, nele você pode variar os valores de "a", "x_1" e "x_2".



Lei da função quadrática

Substitua os seguintes valores para "a", "x_1" e "x_2" e responda qual a lei da função - indicada na janela algébrica à esquerda representada por Lei(x).

(a) $a = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

(b) $a = 2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$

(c) $a = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

(d) $a = \frac{1}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

(e) Observe as respostas de (c) e (d), o que podemos afirmar sobre a lei de uma função de segundo grau que tem zero como uma das raízes?

(f) $a = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$

(g) $a = -3$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

(h) Observe as respostas de (f) e (g), o que podemos afirmar sobre a lei de uma função de segundo grau que tem raízes opostas, isto é, de mesmo valor, mas sinais trocados?

Digite sua resposta aqui...

Resolvendo uma questão de vestibular com o GeoGebra

Para solucionar a próxima questão, retirada da prova da ENEM, você pode utilizar a calculadora gráfica do GeoGebra (https://www.geogebra.org/graphing), que cria os gráficos das funções colocadas na entrada algébrica instantaneamente e permite a interpretação geométrica delas. Crie o gráfico da função abordada e procure a alternativa correta.

ENEM 2016

Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2 \cdot t^2 + 120 \cdot t$ (em que t é expresso em dia e t=0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão só é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização começou no

Assinale a sua resposta aqui

- ☐ dia 19
- ☐ dia 20
- ☐ dia 29
- ☐ dia 30
- ☐ dia 60

VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Apêndice 7

Questionário Final

Atividade no GeoGebra

Responda as perguntas referentes as atividades sobre funções de primeiro e segundo grau no laboratório de informática.

*Obrigatório

Seu Nome *

Sua resposta

Como você considera agora o seu nível de domínio do software GeoGebra? Sendo 1 "nunca tive contato" e 5 "sou craque". *

	1	2	3	4	5	
Muito ruim	○	○	○	○	○	Muito bom

Como o software contribuiu para o seu aprendizado de funções? Justifique. *

Sua resposta

De que maneira a atividade contribuiu para a sua compreensão da prova da UFRGS e do ENEM? Justifique. *

Sua resposta

Qual a sua opinião quanto ao uso de mídias digitais (como o computador) em sala de aula? Você vê nelas potencialidades de melhora nas relações de aprendizagem? *

Sua resposta

ENVIAR