UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

APRENDIZAGEM DE INEQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO COM O SOFTWARE GRAFEQ E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

JULIANA PAIM ROCHA

Porto Alegre
2019

JULIANA PAIM ROCHA

APRENDIZAGEM DE INEQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO COM O SOFTWARE GRAFEQ E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientadora:
Professora Doutora Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre
2019

JULIANA PAIM ROCHA

APRENDIZAGEM DE INEQUAÇÕES NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO COM O SOFTWARE GRAFEQ E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof. Dr. Rodrigo Dalla Vecchia

Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof[a]. Dr[a]. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti – Orientadora

Instituto de Matemática e Estatística- UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Bom Deus pelo dom da vida e pelos meios que Ele concedeu para eu chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais, Silvio e Márcia, por serem a minha base e por sempre me incentivarem a estudar. Eu os amo.

Agradeço aos meus amigos que sempre fizeram esse caminho ser mais leve e feliz. Victória, João, Rosana, Matheus Agliardi e Matheus Costa, muito obrigada! Em especial, agradeço à Paloma, que sempre se fez disponível e presente e que me auxiliou nesse trabalho.

Agradeço à professora Márcia Notare por ter me acolhido e aceitado me orientar nessa pesquisa. Obrigada por sua paciência e por sua alegria sempre contagiante. Obrigada aos professores Marcus Basso e Rodrigo Dalla Vecchia por aceitarem contribuir com esse trabalho. Obrigada a todos os professores que encontrei nessa caminhada.

Agradeço ao Lucas, meu porto seguro, que sempre esteve ao meu lado, mostrando que tudo isso seria possível. Obrigada pela paciência e companheirismo.

Agradeço, enfim, a todos que, de alguma forma, contribuíram na minha jornada acadêmica.

RESUMO

Esse trabalho busca analisar como o *software* GrafEq contribui na aprendizagem de inequações. A pesquisa teve sustentação teórica na teoria de Raymond Duval sobre os Registos de Representação Semiótica e em outros autores que discursam sobre o potencial tecnológico na aprendizagem de Matemática. Para analisar as contribuições do GrafEq na aprendizagem de inequações, foi elaborada uma sequência de atividades, que foi aplicada a uma turma de estudantes do 3º ano do Ensino Médio em uma escola estadual de Porto Alegre. O objetivo da investigação, que tem uma metodologia qualitativa, foi analisar como os estudantes transitam entre os registros algébrico e gráfico no processo de compreensão de inequações. Os resultados das análises apontam que o *software* GrafEq é um bom potencial para os alunos entenderem diferentes objetos matemáticos, visualizarem o que uma inequação representa no plano cartesiano e construírem a aprendizagem matemática por meio do dinamismo do *software*.
Palavras chave: Inequações. GrafEq. Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This work seeks to analyze how GrafEq software contributes to the learning of inequalities. This research was based on Raymond Dval's theory of semiotic representation roports and other authores who discuss the technological potential of mathematics learning. In order to analyze how GrafEq's contributions to the learning of inequalities, a sequence of activities was elaborated, which was applied to a class of third year high school students in Porto Alegre state school. The objective of the research, which has a qualitative methodology, was to analyze how studens mobilize transitions between algebraic records and graphs in the process of understanding inequalities. The results of the analysis pointed to the GrafEq software is a good potential for students to understand different mathematical objects, visualize what an inequality represents in the Cartesian plane r and build a mathematical learning through the dynamism of the software.

Keywords: Inequalities. GrafEq. Semiotic Representation Records.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo da balança em desequilíbrio do livro L1 18
Figura 2 – Exemplo de resolução de inequação do livro L2 19
Figura 3 – Estudo do sinal da função afim 20
Figura 4 – Situação-problema envolvendo inequação 21
Figura 5 – Região associada às inequações no plano cartesiano 22
Figura 6 – Interface GrafEq 25
Figura 7 - Construção do GrafEq 26
Figura 8 – Modelo escolhido para a releitura no GrafEq 26
Figura 9 – Recorte da atividade prévia de Gauto (2012) 28
Figura 10 – Face inicial do site 34
Figura 11 – Construção 7 35
Figura 12 – Construção 8 35
Figura 13 – Construção 9 35
Figura 14- Desafio das bandeiras 36
Figura 15 – Construção 1 do aluno A 38
Figura 16 – Construção 1 da Aluna B 39
Figura 17 – Construção 2 do Aluno D 40
Figura 18 – Construção 3 do aluno A 41
Figura 19 – Construção 3 da aluna C 41
Figura 20 – Processo da Construção 3 da aluna E 42
Figura 21 – Construção 3 da aluna E 42
Figura 22 – Processo da Construção 4 do Aluno D 43
Figura 23 – Construção 4 do aluno D 44
Figura 24 – Resposta à pergunta A da aluna H 45
Figura 25 – Resposta à pergunta A do aluno I 45
Figura 26 – Resposta à pergunta A do aluno F 45
Figura 27 – Resposta à pergunta B da aluna J 46
Figura 28 – Janelas algébrica e gráfica no GrafEq 47
Figura 29 – Processo de construção do quadrado pelo Aluno D 48
Figura 30 - Quadrado construído e relações utilizadas pelo Aluno D 49
Figura 31 – Processo da Construção 6 pelo aluno K 49
Figura 32 – Construção 6 do aluno K 50

Figura 33 – Construção 7 da aluna B 51
Figura 34 – Processo da Construção 7 pela aluna M... 53
Figura 35 – Processo da Construção 8 do aluno D.. 54
Figura 36 – Construção 8 do aluno D... 55
Figura 37 – Construção 8 do aluno L 55
Figura 38 – Construção 9 da aluna H 56
Figura 39 – Construção 9 da aluna B 57
Figura 40 – Construção da paisagem pela aluna E.. 58
Figura 41 – Processo de construção da bandeira da Jamaica pelo aluno D.................. 59
Figura 42 – Construção da bandeira pelo aluno D 60
Figura 43 – Processo de construção da bandeira pelo aluno N 61
Figura 44 – Construção da bandeira pelo aluno N 61

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Exemplo de tratamento 14
Quadro 2 – Exemplo de conversão 14
Quadro 3 - Recorte da tabela em Duval (2012) 15
Quadro 4 – Livros didáticos analisados e siglas adotadas 18
Quadro 5 – Relação entre os trabalhos escolhidos e as temáticas abordadas 27
Quadro 6 – Diálogo sobre a construção 1, alunas B e C 38
Quadro 7 – Diálogo sobre a Construção 3, aluna C 41
Quadro 8 – Diálogo sobre a Construção 3, alunos E e F 42
Quadro 9 – Diálogo sobre a Construção 4, alunos D e G 43
Quadro 10 – Diálogo sobre a Pergunta A com o aluno F 46
Quadro 11 - Diálogo sobre a Construção 6, aluno D 48
Quadro 12 - Diálogo sobre a Construção 6, aluno D 48
Quadro 13 – Diálogo sobre a Construção 6, alunos J, K e N. 49
Quadro 14 - Diálogo sobre a Construção 7, aluna B 52
Quadro 15 – Diálogo sobre a Construção 7, aluna B 52
Quadro 16 - Diálogo sobre a Construção 9, aluna H 56

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 11
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 13
2.1 Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval 13
2.2 O ensino e aprendizagem de inequações 17
2.3 O potencial tecnológico na aprendizagem matemática 23
2.4 Trabalhos Correlatos 27
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS 31
3.1 Metodologia 31
3.2 Participantes e cenário da pesquisa 32
3.3 Materiais e métodos 32
3.4 Atividades na sala de aula 33
3.5 Atividades no Laboratório de Informática 33
4. DESCRIÇÃO DE ANÁLISE 37
4.1 Construção 1 37
4.2 Construção 2 39
4.3 Construção 3 40
4.4 Construção 4 43
4.5 Construção 5 44
4.6 Perguntas A e B 44
4.7 Construção 6 47
4.8 Perguntas C e D 51
4.9 Construção 7 51
4.10 Construção 8 53
4.11 Construção 9 56
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS 63
REFERÊNCIAS 65
APÊNDICE 68

1. INTRODUÇÃO

Minha[1] trajetória como estudante iniciou em uma escola particular na cidade de Gravataí onde, na mesma escola, me formei. Desde o primeiro ano das séries iniciais eu tinha contato com tecnologias, por meio de atividades e jogos envolvendo o computador. Com o tempo, fui me afeiçoando com a Matemática e esse gosto pela disciplina era complementado ao hábito de explicar os conteúdos aos colegas, prática comum no ambiente escolar, mas que foi determinante para mim. Após o Ensino Médio, decidi por continuar os estudos nessa área, iniciando o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Durante o Ensino Médio, apesar de me identificar com a Matemática, de alguns conteúdos, sempre que fosse possível, eu procurava manter a distância. Um desses conteúdos era inequações. Com os macetes e as regras sabia resolvê-las, porém, não compreendia nem o significado nem o sentido da representação matemática por trás daquelas inequações.

O curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS oferece aos alunos, desde seu início, a proximidade com a tecnologia para pensar Matemática. Ao cursar a disciplina Educação Matemática e Tecnologia[2] no segundo semestre de 2018, entrei em contato com o *software* GrafEq[3] e identifiquei nele um bom meio para, como docente, trabalhar diferentes conteúdos em sala de aula. Em particular, um bom recurso para trabalhar com tal conteúdo que antes me inquietava. Um ponto significante desse *software* consiste na manipulação simultânea de representações algébricas e gráficas, o que, de acordo com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2012) (2013), sinaliza um bom potencial semiótico para compreender conceitos matemáticos.

Dados o meu incômodo pela dificuldade que carreguei por muito tempo em relação às inequações, o conhecimento de que incompreensões acerca do assunto são recorrentes e o ímpeto pelas possibilidades do *software*, esse trabalho visa responder à questão: **Como estudantes do Ensino Médio mobilizam diferentes registros de representação semiótica no estudo de inequações em atividades com o *software* GrafEq?** A pesquisa tem por objetivo, a partir de uma sequência de atividades, verificar como estudantes transitam entre os

[1] Inicialmente usaremos a primeira pessoal do singular, por referência a experiências pessoais.
2 Disciplina ofertada para o Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS.
[3] *Software* que gera gráficos de funções e relações matemáticas. Disponível para download em http://www.peda.com/download/.

registros algébrico e gráfico no processo de compreensão de inequações, em concordância com a Teoria de Raymond Duval[4].

Esse trabalho foi estruturado em quatro capítulos. O segundo capítulo traz os referenciais teóricos que sustentam essa pesquisa. Fazemos uma síntese da Teoria de Duval sobre os Registros de Representação Semiótica e tratamos como o conteúdo de inequações é trabalhado nos livros didáticos. Em seguida, discorremos acerca do potencial tecnológico na aprendizagem matemática, em especial, do potencial do *software* GrafEq. Apresentamos também uma investigação de trabalhos correlatos a essa pesquisa: em que aspectos esses se assemelham ou se distanciam do presente trabalho.

No terceiro capítulo, apresentamos a metodologia adotada com base em Bogdan e Biklen (1994) e as atividades que foram elaboradas e aplicadas para esse estudo. Encontra-se também nesse capítulo a organização em duas etapas das atividades. No quarto capítulo, analisamos os dados produzidos, à luz da teoria. Por fim, apresentamos algumas reflexões finais dessa pesquisa.

[4] Professor emérito da Université du Littoral Côte d'Opale, na França.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresentamos o referencial teórico dessa pesquisa, abordando inicialmente a teoria de Duval sobre os Registros de Representações Semióticas. Também tratamos sobre o ensino de inequações na Escola Básica, analisando como os livros didáticos desenvolvem esse assunto. Discorremos acerca do uso de tecnologias digitais na aprendizagem matemática e das características do *software* GrafEq. Por fim, apresentamos uma revisão de literatura em pesquisas que versam sobre a temática desse trabalho.

2.1 Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval

A respeito das dificuldades dos alunos em compreender a matemática, entre elas a aprendizagem de inequações, Duval (2013) escreve sobre os registros de representações semióticas. Para entender esses bloqueios de compreensão é necessária uma abordagem cognitiva capaz de descrever o funcionamento mental que auxilie a um aluno entender e comandar os recursos matemáticos exigidos no processo de aprendizagem.

Duval (2012) considera dois grupos de representação: mentais e semióticas. As representações mentais "recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado" (p. 270). Essas representações estão relacionadas àquilo que pensamos e imaginamos sobre um objeto. Já as representações semióticas são criações constituídas de signos com características de significação e funcionamento próprios.

As representações semióticas são fundamentais, pois a atividade matemática depende do sistema de representação escolhido e porque muitos objetos não são facilmente observáveis ou não estão ao alcance intuitivo. Ou seja, "o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas" (DUVAL, 2013, p. 21). Em contrapartida, os objetos matemáticos jamais podem ser confundidos com sua representação. Por exemplo, um traçado representa um segmento, mas não é o objeto matemático. Há, assim, um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: "Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?" (DUVAL, 2012, p. 268).

Conforme Duval (2013), a matemática serve-se de várias representações semióticas (sistema numeral, gráficos, figuras geométricas, forma algébrica, língua natural, tabelas, etc.), que o autor chama de *registros de representação*. Esses registros podem ser de diferentes tipos: os registros multifuncionais, nos quais os tratamentos não são algoritmizáveis, como a língua natural, e os registros monofuncionais, nos quais os tratamentos são algoritmizáveis, como o cálculo e o sistema de escrita algébrica. Esse segundo tipo de registro é o mais utilizado em Matemática e, em particular, nessa pesquisa, os alunos puderam transitar entre dois registros monofuncionais (algébrico e gráfico).

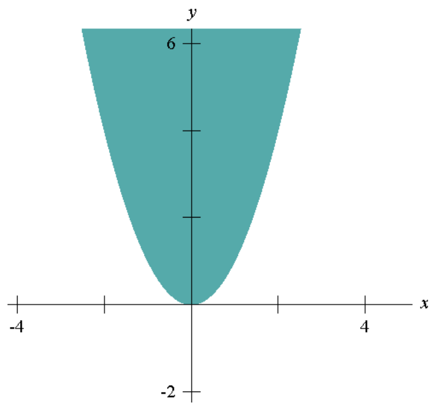
O autor também discorre sobre tipos de transformações de uma representação semiótica à outra: *tratamentos*, que sucedem dentro de um mesmo registro, e *conversões*, onde há mudança de registros, considerando totalmente ou uma parte da representação inicial. No Quadro 1 apresentamos um exemplo de tratamento, em que se opera uma inequação dentro do registro algébrico a fim de encontrar seu conjunto-solução. No Quadro 2, exibimos um exemplo onde ocorre a mudança do registro dado inicialmente, tanto pelo sentido A (registro algébrico que pode ser convertido para registro gráfico) quanto pelo sentido B (registro gráfico que pode ser convertido para registro algébrico). Se o sujeito é capaz de percorrer esses sentidos, ocorre o processo chamado de conversão.

Quadro 1 – Exemplo de tratamento

$$x + 5 > 8$$
$$x + 5 - 5 > 8 - 5$$
$$x > 3$$

Fonte: acervo pessoal

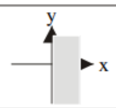
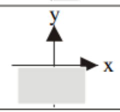
Quadro 2 – Exemplo de conversão

Representação Algébrica	Sentido	Representação Gráfica
$f(x) > x^2$	A $\longrightarrow$	
	B $\longleftarrow$	

Fonte: acervo pessoal

A dificuldade da maior parte dos estudantes encontra-se nas conversões que, justamente, “[...] aparecem como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (DUVAL, 2013, p.16). A conversão não consiste num processo de codificação, ou seja, não consiste em associar as informações e reduzi-las a um código. Por isso, Duval (2013) afirma que a conversão é irredutível a um tratamento; caso contrário, a conversão seria uma forma simples de tratamento. Conforme o autor, a conversão trata de uma apreensão global e qualitativa e não constitui, para boa parte dos alunos, uma transformação trivial. Algumas situações foram estudadas por Duval (2012), que levantou os resultados observados entre 105 alunos do *premier*[5], mostrados no Quadro 3.

Quadro 3 - Recorte da tabela em Duval (2012)

I	II	III	I → III Hachurar	III → II escolher a expressão
1......o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva	x >0		67%	51%
2......que tem uma ordenada negativa	y < 0		67%	61%

Fonte: Duval (2012)

No processo I→III é possível pensar em uma regra de codificação, a saber, um ponto codifica uma dupla de números e vice-versa. Mas essa regra, embora ajude, não é o bastante na mudança de registros. Ou seja, o processo de codificação não garante a conversão. Além disso, os dados do Quadro 3 mostram que o processo III→II não é tão recorrente quanto o processo I→III, pois:

> [...] é preciso identificar bem as variáveis visuais pertinentes com seus diferentes valores no registro gráfico, e na expressão algébrica da relação as diferentes oposições paradigmáticas que dão uma significação, e não somente um objeto aos símbolos utilizados. (DUVAL, 2012, p. 275)

Segundo Duval (2011), para estudar representações gráficas é fundamental destacar as variáveis visuais nas expressões algébricas. Essas variáveis visuais constituem símbolos (>, <, =, +, -, etc.) significativos. Assim:

> [...] a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, interseção com os eixos etc.) e, de outro, os valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior, menor ou igual a 1 etc.). (DUVAL, 2013, p. 17)

[5] No sistema educacional francês, *seconde*, *premier* e *terminale* correspondem à, aproximadamente, o Ensino Médio brasileiro.

Portanto, um maior conhecimento e identificação dessas variáveis visuais favorece a conversão de registros. Nesse trabalho, fizemos um estudo sobre funções e inequações, ressaltando, com os participantes da pesquisa, o maior número de variáveis visuais que os auxiliassem nas transformações de registros.

Os processos I→III e III→I do Quadro 3 expressam sentidos diferentes. Duval (2013) classifica essa questão como um fenômeno, chamado *heterogeneidade dos dois sentidos de conversão*. O sentido da conversão é importante e nem sempre, quando invertida, a conversão é efetuada. Isso acontece, segundo o autor, porque normalmente beneficia-se, no ensino, um sentido de conversão, por se pensar que a compreensão da conversão em ambos os sentidos ocorre de maneira automática. Duval (2013) assegura que, do ponto de vista cognitivo, é na atividade de conversão que se verifica se houve ou não a compreensão de um objeto. Sendo assim, se o sujeito é capaz de transitar nos sentidos A e B no exemplo do Quadro 2, podemos supor que houve a aprendizagem do objeto em estudo. Nas atividades realizadas com o *software* GrafEq, os participantes dessa pesquisa puderam transitar em dois sentidos diferentes de conversão, a saber, gráfico ⟶ algébrico e algébrico ⟶ gráfico, de acordo com seus objetivos e estratégias.

Ainda, "A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento" (DUVAL, 2012, p. 272). Para exemplificar essa afirmação, o autor observa as expressões $0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$ e $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Ambas têm o mesmo resultado, representados de formas diferentes. Nota-se que não foram os mesmos tratamentos utilizados: um diz respeito à escrita decimal e outro, à fracionária. Entendemos que um aluno pode, muito bem, realizar tratamentos em diferentes registros, mesmo sem compreender que se tratam de representações de um mesmo número e sem compreender ou realizar a conversão entre eles.

Finalmente, a respeito do paradoxo mencionado, entendemos que Duval (2013) conclui que a compreensão matemática está associada à disposição de, pelo menos, dois registros de representação semióticas diferentes. Quando o sujeito consegue transitar entre tais registros sem confundir objeto representado com o conteúdo da representação que o faz acessível, houve a compreensão matemática.

2.2 O ensino e aprendizagem de inequações

O conteúdo de inequações é um tema importante para diferentes tópicos da matemática. Conforme os PCNs, esse assunto surge no quarto ciclo[6] do Ensino Fundamental, momento em que a aprendizagem deve levar o aluno a “produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades -, identificando as equações, inequações e sistemas” (BRASIL, 1998, p. 81). Em relação ao Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), divide a aprendizagem matemática em cinco temáticas. Nesse documento, na unidade temática de Álgebra, consta que é necessário que o estudante seja capaz de “criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados” (BRASIL, 2018, p. 270). Porém, nas habilidades previstas para o Ensino Fundamental, o conteúdo de inequações sequer é mencionado. Quanto ao Ensino Médio, na BNCC, vemos o mesmo cenário no que diz respeito às inequações.

De acordo com Beltrão (2010), esse tema gera dificuldades de compreensão entre os alunos, que muitas vezes não entendem o significado por trás das relações que envolvem inequações. Quando se trata de uma inequação, os símbolos são usados para representar relações. Essa ideia relacional nem sempre é bem compreendida entre os alunos por conta da “falta de referenciais que deem significado aos símbolos” (BELTRÃO, 2010, p. 87). Ainda em seu trabalho, Beltrão (2010) afirma que os estudantes ao estudarem álgebra, e consequentemente inequações, procuram por respostas numéricas, tal como faziam ao estudar aritmética. O entendimento de que a resposta final pode ser um conjunto e não um valor numérico não é imediato aos alunos. Melo (2007) verifica como o conteúdo de inequações é abordado na Educação Básica. Em sua pesquisa, Melo (2007) obteve informações sobre o ensino de inequações de professores de escolas públicas e particulares. Alguns deles relataram não trabalhar com inequações por falta de tempo ou por não constar em seu planejamento. Além disso, dos professores que participaram da pesquisa, a maioria utiliza o livro didático como material de apoio. Assim, para compreender melhor o ensino de inequações nas escolas, torna-se importante verificar como os livros didáticos abordam essa temática. Por isso, escolhemos examinar os livros didáticos apresentados no Quadro 4.

[6] O quarto ciclo do Ensino Fundamental corresponde às antigas 7ª e 8ª série.

Quadro 4 – Livros didáticos analisados e siglas adotadas

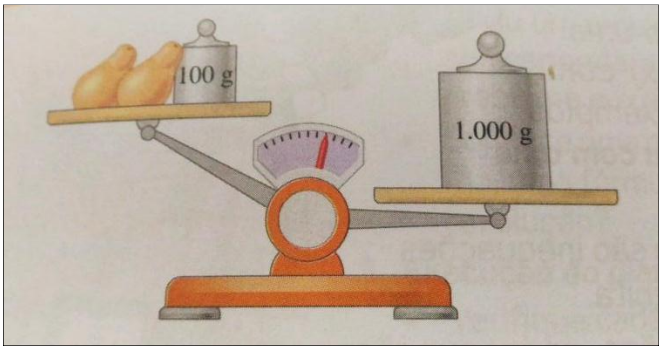
Títulos dos livros	Autores	Edição	Volume	Sigla
Matemática Bianchini 7º ano	Edwaldo Bianchini	8ª		L1
Projeto Araribá Matemática 7º ano	Fábio Martins de Leonardo	3ª		L2
Matemática Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante	1ª	1	L3a
			2	L3b
			3	L3c
Quadrante Matemática 1º ano	Eduardo Chavante e Diego Prestes	1ª		L4a
Quadrante Matemática 2º ano				L4b
Quadrante Matemática 3º ano				L4c

Fonte: acervo pessoal

Optamos por livros adotados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNDL). O PNDL[7] é um programa do governo federal que distribui livros para todas as escolas da rede pública de ensino. A cada três anos os livros didáticos são renovados nas escolas. O livro L1 corresponde ao período de 2017 a 2019; o L2, ao período de 2014 a 2016; o L3, ao período de 2012 a 2014 e o L4; 2018 a 2020. A ideia inicial consistia em analisar somente livros do período de 2019, a fim de obtermos informações atualizadas. Porém, não foi possível obter tais livros, por difícil acesso.

Nos livros didáticos indicados para o 7º ano, L1 e L2, o estudo de inequações apresenta um capítulo próprio. Primeiramente encontramos, em ambos os livros, o que significa uma desigualdade, quais suas propriedades e a definição de inequação. O livro L1 utiliza a ilustração de uma balança em desequilíbrio para desenvolver a ideia de inequação (Figura 1). A partir da situação da balança, o livro expressa a inequação correspondente à desigualdade das massas, a saber, $2x + 100 < 1000$. Nesse caso, notamos a presença das representações figural e algébrica.

Figura 1 – Exemplo da balança em desequilíbrio do livro L1

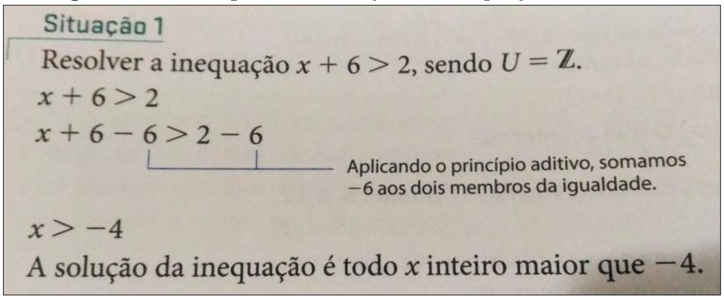


Fonte: Bianchini (2015)

7 Apresentação do programa disponível em: http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao.

Esses livros também mostram como encontrar a solução de uma inequação do 1º grau com apenas uma incógnita. Para isso, o livro L2 apresenta um passo a passo da resolução com a aplicação de diferentes propriedades matemáticas (Figura 2). Nessa condição, verificamos uma transformação do tipo tratamento, que ocorre dentro de um mesmo registro.

Figura 2 – Exemplo de resolução de inequação do livro L2



Situação 1

Resolver a inequação $x + 6 > 2$, sendo $U = \mathbb{Z}$.

$x + 6 > 2$

$x + 6 - 6 > 2 - 6$

Aplicando o princípio aditivo, somamos -6 aos dois membros da igualdade.

$x > -4$

A solução da inequação é todo x inteiro maior que -4.

Fonte: Leonardo (2010)

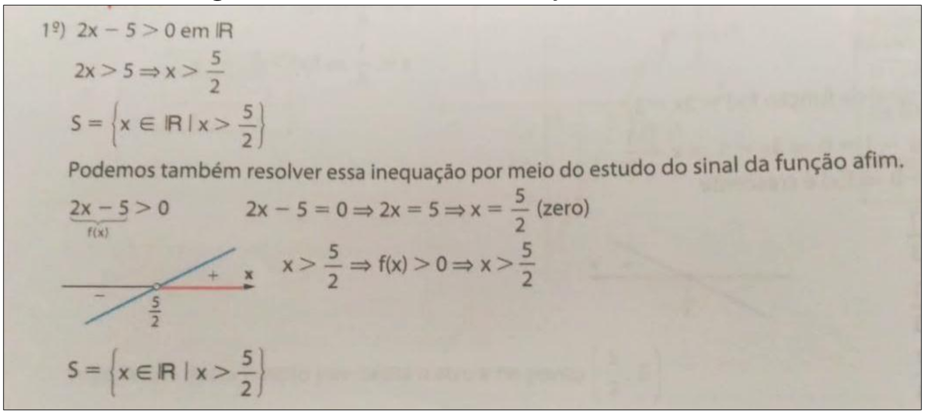
Alguns dos exercícios propostos no livro L1 constituem encontrar uma sentença matemática para situações-problema envolvendo desigualdades. Esse livro priorizou a transformação da língua natural para a escrita algébrica. Referindo-se à teoria de Duval, Rezende e Travassos (2017) afirmam que:

> [...] tarefas propostas em língua natural proporcionam, ao menos duas conversões, da língua natural para um outro registro, que pode ser simbólico (numérico ou algébrico), gráfico, figural, e a volta deste registro para a língua natural, que se trata da resposta para o problema solicitado. (REZENDE, TRAVASSOS; 2017, p. 105)

Já o livro L2 apresenta apenas atividades de resolver inequações, encontrando valores para *x*. De maneira geral, o livro foca nas manipulações algébricas, ou seja, sugerindo o trabalho em um único registro de representação semiótica.

Procuramos analisar os três volumes do livro *Matemática, Contexto e Aplicações* para verificar se há continuidade e progressão no estudo de inequações. No livro L3a, o conteúdo em questão aparece primeiramente no capítulo *Função Afim*, onde são abordadas inequações do 1º grau. De início são apresentadas algumas propriedades das desigualdades entre números reais e das desigualdades que contêm adição e multiplicação. O livro traz exemplos de como resolver inequações do 1º grau por meio do estudo do sinal da função afim. Na Figura 3, identificamos a apresentação da situação nas representações gráfica e algébrica e vice-versa. A partir desse exemplo, é possível trabalhar com a conversão de registros para uma apreensão mais global do conceito matemático.

Figura 3 – Estudo do sinal da função afim



1º) $2x - 5 > 0$ em $\mathbb{R}$

$2x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$

Podemos também resolver essa inequação por meio do estudo do sinal da função afim.

$\underbrace{2x - 5}_{f(x)} > 0 \qquad 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ (zero)

$x > \frac{5}{2} \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$

Fonte: Dante (2012)

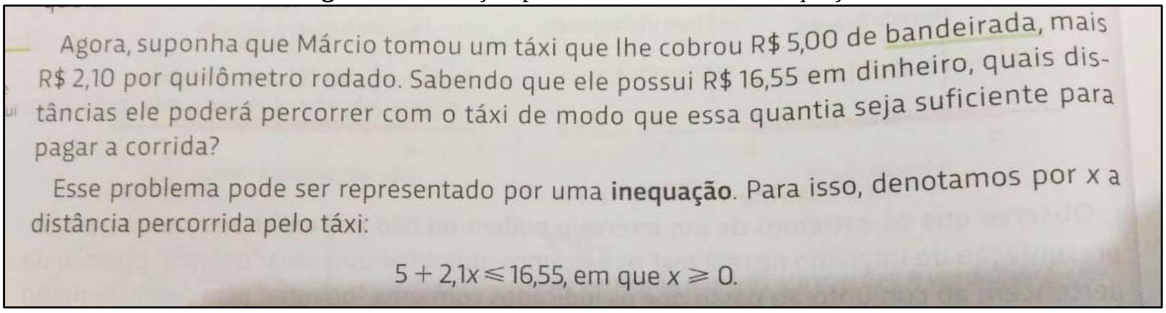
Esse livro também trabalha com inequações quadráticas, modulares, exponenciais e logarítmicas. Em todas essas temáticas, o foco das atividades consiste em encontrar as soluções das inequações.

No sumário do livro L3b não encontramos o conteúdo de inequações. No capítulo *Relações Trigonométricas* identificamos apenas um exercício de desafio para resolver a inequação trigonométrica $sen\, x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. No estudo de funções trigonométricas não é abordado o que representa, por exemplo, $y < sen\, x$, relação matemática utilizada pelos participantes dessa pesquisa ao trabalhar com o *software* GrafEq.

No sumário do livro L3c também não encontramos mais o conteúdo de inequações. No estudo de circunferências não encontramos o que representa graficamente, por exemplo, $x^2 + y^2 < 1$, desigualdade matemática que graficamente gera um círculo “pintado” e que, quando usada no GrafEq, permite diferentes configurações de desenhos.

Já no primeiro capítulo do livro do L4a, onde verificamos o conteúdo de conjuntos, encontramos uma situação-problema, seguida da definição de inequação. Houve uma preocupação em dar um contexto prático à ideia de inequação, antes de partir para propriedades, definições e macetes de resolução, como verificamos na Figura 4. Esse cenário enquadra-se na fala de Beltrão (2010), quando diz que “A introdução da notação formal não pode ser desconectada da aquisição do significado” (p.93). Concordamos que a falta de conexão do conteúdo estudado com seu significado é prejudicial para o aprendizado do aluno.

Figura 4 – Situação-problema envolvendo inequação



Agora, suponha que Márcio tomou um táxi que lhe cobrou R$ 5,00 de bandeirada, mais R$ 2,10 por quilômetro rodado. Sabendo que ele possui R$ 16,55 em dinheiro, quais distâncias ele poderá percorrer com o táxi de modo que essa quantia seja suficiente para pagar a corrida?

Esse problema pode ser representado por uma **inequação**. Para isso, denotamos por x a distância percorrida pelo táxi:

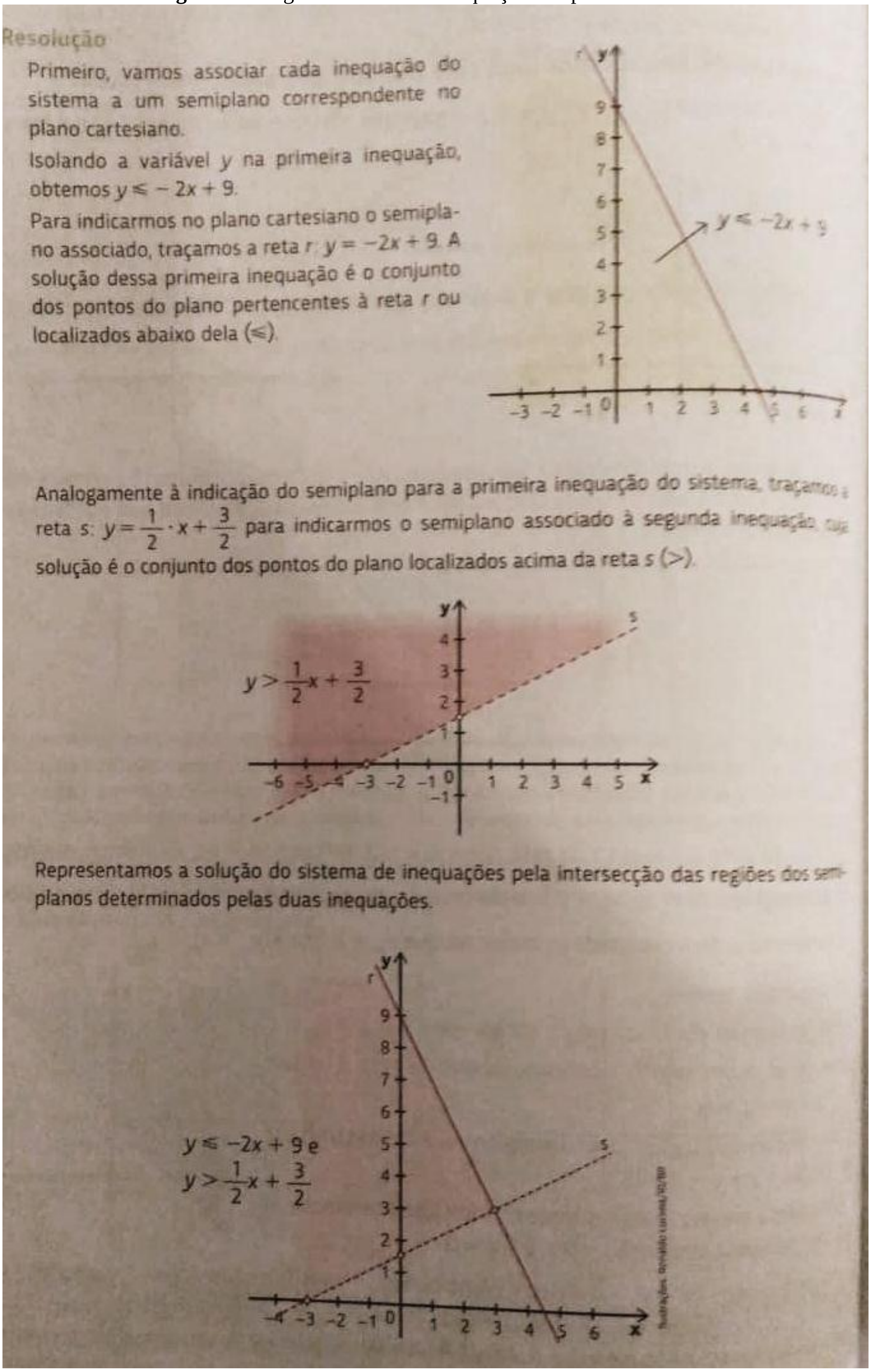
$$5 + 2{,}1x \leqslant 16{,}55, \text{ em que } x \geqslant 0.$$

Fonte: (CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.32)

Em seguida, os autores expõem o conjunto-solução das inequações. Então, exploram alguns exemplos de sistema de inequações do 1º grau e alguns exercícios de função quadrática, determinando o conjunto-solução ou representando a solução por meio de um intervalo na reta real. No capítulo de função exponencial encontramos a definição: “Inequação exponencial é toda inequação que apresenta a incógnita no expoente de uma ou mais potências” (CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.143).

Assim como no livro anterior, analisamos os três volumes do livro *Matemática – Quadrante*. O conteúdo de inequações não aparece no sumário do livro L4b. Já no livro L4c, destinado ao terceiro ano do Ensino Médio, encontramos uma seção intitulada *Representação gráfica de uma inequação do 1º grau*, onde é explanada a região delimitada por inequações do 1º grau. Após explicações mais precisas sobre como identificar essa região, constatamos alguns exercícios resolvidos passo a passo, entre eles, o da Figura 5. A atividade considerada consiste em representar graficamente a solução do sistema de inequações $\begin{cases} 2x + y - 9 \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} > 0 \end{cases}$. Os autores mostram como identificar o semiplano associado à cada reta, separadamente. Para a primeira reta, os mesmos usam a expressão: “A solução dessa primeira inequação é o conjunto dos pontos do plano pertencentes à reta *r* ou localizados abaixo dela (≤)” (CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.130). Essa atividade é finalizada com a interseção das regiões dos semiplanos. Esse tipo de abordagem foi o que escolhemos para analisar nesse trabalho.

Figura 5 – Região associada às inequações no plano cartesiano



Resolução

Primeiro, vamos associar cada inequação do sistema a um semiplano correspondente no plano cartesiano.

Isolando a variável y na primeira inequação, obtemos $y \leq -2x + 9$.

Para indicarmos no plano cartesiano o semiplano associado, traçamos a reta r: $y = -2x + 9$. A solução dessa primeira inequação é o conjunto dos pontos do plano pertencentes à reta r ou localizados abaixo dela ($\leq$).

Analogamente à indicação do semiplano para a primeira inequação do sistema, traçamos a reta s: $y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$ para indicarmos o semiplano associado à segunda inequação, cuja solução é o conjunto dos pontos do plano localizados acima da reta s ($>$).

Representamos a solução do sistema de inequações pela intersecção das regiões dos semiplanos determinados pelas duas inequações.

Fonte: (CHAVANTE e PRESTES, 2016, p.130)

A seção a seguir aborda as vantagens e possibilidades das tecnologias digitais em sala de aula. Discutimos também sobre o *software* escolhido nessa pesquisa.

2.3 O potencial tecnológico na aprendizagem matemática

Os recursos tecnológicos e o advento da internet têm cooperado no desenvolvimento e aperfeiçoamento de diversas áreas, bem como têm sido o foco de diversas pesquisas no campo da Educação. Nesse sentido, em sala de aula a tecnologia pode ser um suporte para a construção do conhecimento e um ganho na compreensão dos conteúdos. Assim, na área da Matemática, a tecnologia pode servir "[...] como uma ferramenta que leve o aluno a compreender que pode se tornar um sujeito capaz de criar e pensar em Matemática" (BASSO e NOTARE, 2015, p.4). Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), que norteiam o trabalho dos professores em sala de aula, sugerem a utilização adequada dos recursos tecnológicos como uma habilidade a ser desenvolvida na Matemática (BRASIL, 2002).

Considerando que crianças e adolescentes têm contato com as tecnologias digitais cada vez mais cedo, tais recursos proporcionam um ambiente familiar à realidade dos estudantes em sala de aula, em especial na disciplina de Matemática. Utilizar, hoje, dessa aproximação com a tecnologia que os estudantes têm é um desafio interessante ao professor de Matemática. Nesse sentido, Basso e Notare (2015) defendem que a tecnologia também pode, quando bem utilizada, desencadear o pensamento matemático, trazendo aos alunos um cenário de manipulação e representação de objetos matemáticos antes imprecisos.

A finalidade do uso da tecnologia na Educação Matemática não é substituir a caneta e o papel ou trazer praticidade na resolução de uma atividade, mas proporcionar ao aluno novas visões sobre um problema e ultrapassar seus limites de visualização. Goldenberg (2000) discorre que não é surpreendente pensar em computadores como pensamos em lápis e afirma que muitos problemas a serem resolvidos por meio de um recurso tecnológico são perda de tempo. Por isso é preciso dar atenção ao conjunto de problemas escolhidos e a maneira que podem ser trabalhados, ou seja, é necessário o professor avaliar o propósito de suas atividades. Nesse sentido,

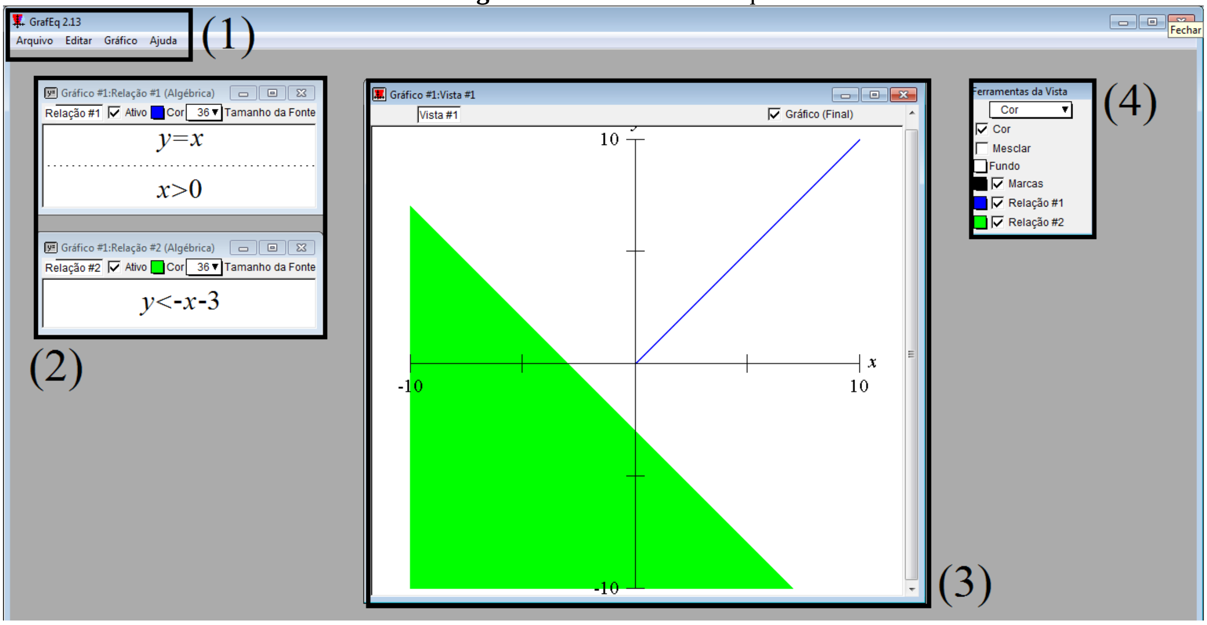
> É importante, no momento de pensar em atividades com o uso de tecnologias para a sala de aula, ter claro os objetivos que queremos alcançar e escolher a tecnologia de modo a atendê-los, ao invés de simplesmente utilizar a tecnologia para tornar a aula mais atraente, mas de forma tangente e superficial, ou até mesmo prejudicial. (BASSO e NOTARE, 2015, p.4)

Sendo importante, portanto, a escolha criteriosa e estratégica da atividade, Pea (1987) discorre sobre a necessidade de levantar aspectos da tecnologia que promovam aos alunos o desenvolvimento de suas habilidades matemáticas. Quando não há esse desenvolvimento, o autor julga os computadores como uma tecnologia não cognitiva.

Goldenberg (2000) ainda expõe que aos alunos das séries inicias são proporcionados manipuladores físicos que auxiliam na compreensão visual de diversas ideias. Porém, para séries mais avançadas deixa de existir tais modelos visuais para muitas ideias matemáticas. O computador surge, então, como um recurso manipulativo, capaz de aumentar a variedade de problemas para os alunos pensarem e resolverem. Segundo Gravina e Basso (2012, p.14), a tecnologia digital proporciona, ao ambiente escolar, recursos interativos que englobam sistemas dinâmicos de representação na figura de objetos concreto-abstratos. “São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais” (p.14).

Conforme o documento do MEC (2006), *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, há uma grande variedade de programas de expressão para o estudo de funções, equações e desigualdades, de maneira que “Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação – inequação” (p. 89). Tais particularidades são identificadas no *software* GrafEq. Esse *software*, produzido pela *Pedagoguery Software Inc,* é gratuito e caracteriza-se por uma linguagem acessível. Além disso, o mesmo permite a construção de equações e inequações matemáticas de forma versátil, intuitiva e flexível. A interface, ilustrada na Figura 6, é composta pela Barra de Ferramentas (1), Janela Algébrica (2), onde explicitamos as relações matemáticas; Janela Gráfica (3), onde a relação matemática é convertida para o registro gráfico e Ferramentas da Vista (4), onde é possível configurar a cor de uma relação, o zoom, os eixos, etc.

Figura 6 – Interface GrafEq

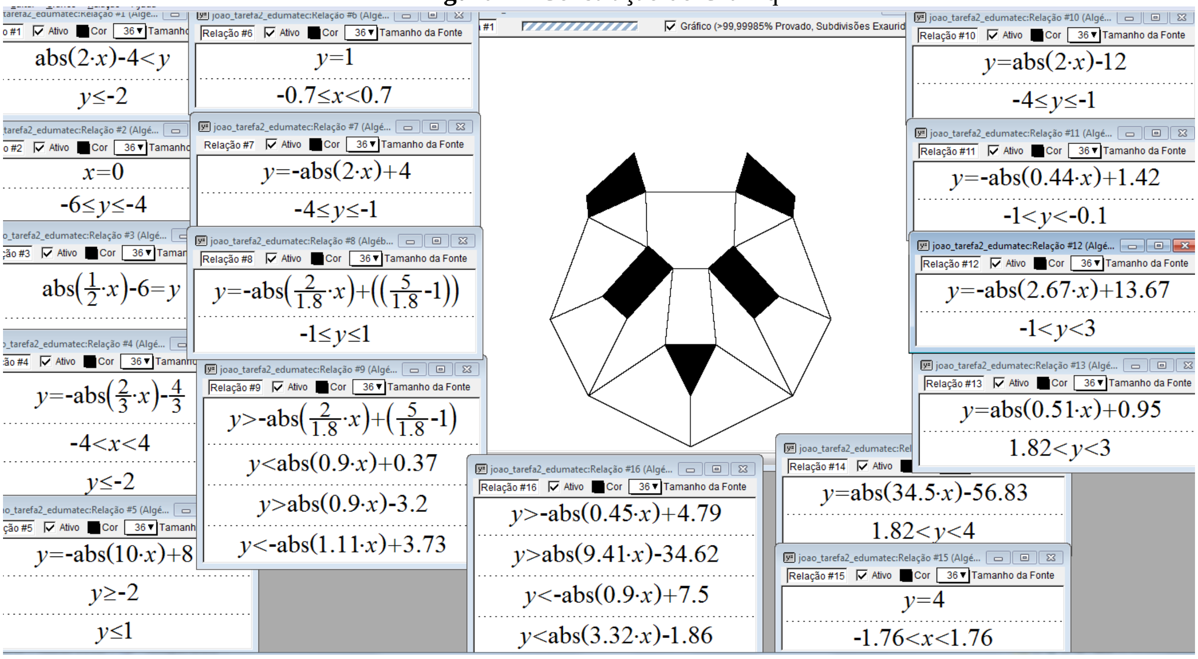


Fonte: acervo pessoal

A relação em azul representa a intersecção das relações matemáticas $y = x$ e $x > 0$. Para criar intersecção de regiões em uma relação, utiliza-se a tecla *tab*. O GrafEq, além de possibilitar a construção de inúmeras relações, permite operar simultaneamente a expressão algébrica e a representação gráfica. Assim o software possibilita a visualização do mesmo objeto em duas de suas representações, o que pode desprender o sujeito do "enclausuramento" de registro, que Duval (2013) aponta ser um grande obstáculo dos alunos em diferentes níveis de ensino.

Para exemplificar as potencialidades do GrafEq, apresentamos na Figura 7 a criação de um colega durante a disciplina de Educação Matemática e Tecnologia. Para a construção, foi utilizada a relação matemática módulo de *x* (que no *software* é representado por *abs (x)*), a fim de garantir a simetria da construção em relação ao eixo *y*. A criação foi produzida apenas por relações algébricas que representam retas, cujos domínios, na maioria, foram restringidos.

Figura 7 - Construção do GrafEq



Fonte: acervo pessoal

A inspiração para essa construção ocorreu por meio da imagem apresentada na Figura 8. O aluno partiu do registro figural e, identificando relações algébricas, chegou ao registro gráfico desejado. O sujeito visualizou na imagem de partida as diferentes inclinações das retas (variáveis visuais pertinentes) e, por isso, estipulou valores de coeficiente angular das retas maiores e menores que 1, positivos e negativos. Nesse processo de identificação das variáveis visuais pertinentes houve a atividade cognitiva.

Figura 8 – Modelo escolhido para a releitura no GrafEq

Fonte: Tumblr[8]

[8] Disponível em: https://drewniany-poligon.tumblr.com/post/154845569464

Acreditamos que o GrafEq é bom meio para proporcionar as conversões de registros, tendo potencial semiótico para ajudar na aprendizagem de equações e inequações. A seguir, apresentamos uma revisão de literatura, por meio de pesquisas que versam o assunto abordado nesse trabalho.

2.4 Trabalhos Correlatos

O assunto em questão já foi abordado em diversos trabalhos e pesquisas no campo de Educação Matemática. Primeiramente realizamos uma pesquisa no Repositório Digital da UFRGS[9], com as seguintes palavras chaves: GrafEq, inequações e Duval. Encontramos então os trabalhos de Köfender (2014), Gauto (2012), Carlos (2017) e Berlanda e Soares (2015). Também realizamos uma pesquisa no Google Acadêmico[10], utilizando as mesmas palavras chaves, e encontramos o trabalho de Melo (2007). De acordo com as palavras chaves, que correspondem às três principais temáticas de nossa pesquisa, no Quadro 5 assinalamos quais temáticas foram encontradas nesses trabalhos, justificando, assim, a escolha dos mesmos.

Quadro 5 – Relação entre os trabalhos escolhidos e as temáticas abordadas

Autores	Teoria de Duval	Inequações	Software GrafEq	Tipo de Pesquisa
Köfender (2014)		X	X	Conclusão de Curso
Gauto (2012)			X	Conclusão de Curso
Carlos (2017)	X			Dissertação
Berlanda e Soares (2015)	X	X	X	Artigo de Periódico
Melo (2007)	X	X		Dissertação

Fonte: acervo pessoal

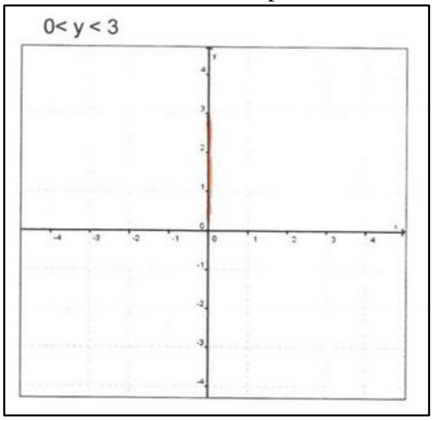
Exploramos primeiro o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado *GrafEq no ensino e aprendizagem de inequações: uma pesquisa baseada na negociação de significados* (KÖFENDER, 2014). Como resultado de sua proposta de ensino aplicada a estudantes do Ensino Médio, Köfender (2014) destaca que o *software* GrafEq teve papel fundamental no entendimento da relação entre as representações algébrica e geométrica das inequações, assim como proporcionou aos participantes a observação, formulação e testes de hipóteses.

[9] Link para o site: https://www.lume.ufrgs.br/
[10] Link para o site: https://scholar.google.com.br/schhp?hl=pt-PT&as_sdt=0,5

Mediante a nossa análise de livros didáticos, concordamos com Köfender (2014) que "o livro didático traz poucos exemplos sobre a representação geométrica das inequações e em poucos casos incentiva o uso de outros recursos para esse estudo" (p. 22). O autor também trata sobre a importância de proporcionar que o aluno observe o gráfico de funções, para compreender onde seu domínio e imagem estão representados. Além disso, Köfender (2014) discorre sobre a Teoria da Negociação de Significados[11], evidenciando as interações entre os alunos em sala de aula. Nosso trabalho, entretanto, foca na conversão de registros, conforme a teoria de Duval (2012) (2013).

Também analisamos a pesquisa de Gauto (2012), que recebe o título *Grafeq no processo de ensino e aprendizagem de funções afins*. Por resultado de sua pesquisa, a autora afirma que, para os estudantes, o GrafEq foi fundamental para as associações gráfica e algébrica das funções, sem haver a necessidade de efetuar cálculos. A atividade prévia aplicada a uma turma de 1º ano do Ensino Médio consistia em verificar se os estudantes sabiam identificar e destacar regiões no plano cartesiano. O exercício ilustrado na Figura 9 constituía pintar a região $0 < y < 3$. Embora já tivesse trabalhado com inequações, esse exercício foi novidade para a turma, que afirmou ter dificuldade. Analisando a resposta de um estudante (Figura 9), Gauto (2012) destaca que o aluno compreende a ideia de intervalo, embora não perceba que os pontos fora do eixo *y* também satisfazem a desigualdade.

Figura 9 – Recorte da atividade prévia de Gauto (2012)



Fonte: Gauto (2012)

Gauto (2012) também aponta que o Ensino habitua os alunos a "encontrar valores pra *x*" e que isso pode ter motivado certo constrangimento na realização de sua prática de ensino, que trouxe novas formas de enxergar e trabalhar conceitos matemáticos. Nesse sentido,

[11] Teoria que estuda as trocas e os diálogos que ocorrem em sala de aula, analisando como sucede a negociação de significados em uma discussão.

refletimos que também poderíamos encontrar obstáculos em nossa prática. Na sequência didática de Gauto (2012) foi proposta uma atividade de livre criação, o que se assemelha a uma das construções propostas em nosso trabalho. Porém, esse trabalho distancia-se do nosso quanto à sustentação teórica escolhida, por tratar da Teoria das Situações Didáticas[12].

A Dissertação de Mestrado de Carlos (2017), intitulada *Parâmetros no Geogebra na construção de circunferências: Um estudo sobre raciocínio generalizador com alunos do 3º ano do Ensino Médio*, foi escolhida por articular a teoria de Duval e o uso de tecnologias digitais em Educação Matemática. Divergindo de nossa pesquisa, Carlos (2017) utiliza o GeoGebra, *software* dinâmico empregado em diversos níveis de ensino e que também proporciona o trabalho com as representações algébrica e gráfica, e conclui que a tecnologia tem potencial para tornar a aula mais dinâmica e para instigar o aluno a reflexões. Embora não trate do GrafEq, consideramos que as conclusões tiradas por Carlos (2017), a partir das atividades que foram aplicadas pela autora, se aproximaram daquelas que esperávamos com esse trabalho. A saber, os alunos conseguiram transitar de forma espontânea entre os dois registros de representação, o que assegura a conversão.

Berlanda e Soares (2015), no artigo intitulado *Possibilidades de utilização do software GrafEq na relação da Matemática e Arte no Ensino Médio*, relatam a experiência na rede pública estadual com alunos do Ensino Médio ao trabalhar com equações, inequações e intervalos numéricos no GrafEq. Para a proposta de atividade, as autoras propuseram aos alunos replicar as obras de arte de Geraldo de Barros[13] no *software*, que foi escolhido por seu dinamismo para reproduzir mosaicos, paisagens, etc.

Berlanda e Soares (2015) destacam que estamos inseridos numa cultura tecnológica e que não há como separar esse cenário da sala de aula. De acordo com as autoras:

> [...] a utilização de Materiais Virtuais Interativos pode contribuir para a compreensão de conteúdos matemáticos e para a interação entre estudantes e professor e, como consequência no processo de ensino aprendizagem, pode despertar maior interesse dos estudantes por esta disciplina tão fascinante. (BERLANDA e SOARES, 2015, p. 4)

Por isso, consideram a necessidade de atualização dos professores nessa área. Paralelo a isso, as autoras discorrem sobre a aproximação entre a matemática e as artes ao longo da História. Para buscar a compreensão da atividade proposta, Berlanda e Soares (2015) também se apoiam, embora de forma mais reduzida, da teoria de Duval.

---

[12] Teoria que estuda as interações entre professor, alunos e o ambiente didático.
[13] Foi um pintor e fotógrafo brasileiro.

Na dissertação de Melo (2007), intitulada *Docência de inequações no Ensino Fundamental da Cidade de Indaiatuba*, o autor investiga como o conteúdo de inequações é abordado nesse nível de ensino em uma escola do interior de São Paulo. Para isso, o público dessa pesquisa, diferente dos outros trabalhos aqui apresentados, foram vinte e sete professores de Matemática de algumas escolas públicas e privadas.

Essa pesquisa não se refere ao uso tecnologias digitais na Educação Matemática, porém, Melo (2007) analisou como os livros didáticos tratam o conteúdo de inequações e sua conclusão foi que na aprendizagem desse conteúdo predomina o tratamento dentro do registro algébrico. O autor também conclui que a maior parte dos professores trabalha inequações por meio de situações-problema e que menos da metade desses professores utilizam representação gráfica nas resoluções de inequações.

A seguir, apresentamos a metodologia escolhida para essa pesquisa. Então, expomos as atividades elaboradas para a experiência em sala de aula.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esse trabalho visa responder à pergunta diretriz: **Como estudantes do Ensino Médio mobilizam diferentes registros de representação semiótica no estudo de inequações em atividades com o *software* GrafEq?** A natureza da pergunta dessa pesquisa está em consonância com uma visão metodológica qualitativa. Nesse capítulo apontaremos as características da metodologia empregada, indicando os participantes e cenário da pesquisa e os objetivos das atividades elaboradas.

3.1 Metodologia

De acordo com Goldenberg (1997), pesquisar consiste em contribuir com área de conhecimento estudada, observando certas exigências científicas. Essa pesquisa caracteriza-se em qualitativa, na qual Bogdan e Biklen (1994) afirmam que os dados recolhidos pelo investigador são ricos de detalhes relativos às pessoas, ao local e às conversas. Os autores ainda definem cinco características a respeito desse tipo de investigação. São elas: a fonte de dados é o ambiente natural, por haver a necessidade de observação e contato com o local de estudo e com as pessoas envolvidas; a investigação é descritiva e não quantitativa, para que haja maior esclarecimento e precisão sobre o objeto de estudo; há uma preocupação com o processo da pesquisa e não somente com os dados; os dados, por sua vez, são analisados de forma indutiva, ou seja, "está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes" (p.50) e, por último, o significado é relevante, pois "os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas" (p.50).

Segundo Goldenberg (1997), a pesquisa qualitativa é útil para explorar dados que se tornam obscuros e passam despercebidos em uma coleta somente estatística. Visamos acompanhar de perto o processo de pensamento e construção de conceitos dos estudantes no entendimento de inequações, sem preocupar-nos com generalizações. Nesse sentido, consideramos que a pesquisa qualitativa adequa-se para verificar as considerações que buscamos.

3.2 Participantes e cenário da pesquisa

Esta pesquisa foi realizada na Escola Técnica Estadual Parobé, localizada no bairro Cidade Baixa[14], em Porto Alegre. A escola é uma das instituições técnicas brasileiras mais antigas, que atende em três turnos mais de dois mil alunos da comunidade, oferecendo diferentes Cursos Técnicos e Ensino Médio.

Dado que a proposta de atividades dessa pesquisa exigiu o conhecimento de um leque maior de conteúdos matemáticos, a atividade foi aplicada com os alunos do terceiro ano do Ensino Médio da turma em que a pesquisadora realizou a disciplina de Estágio em Educação Matemática III[15]. No contexto, a pesquisadora já conhecia os 26 estudantes, que tinham entre 17 e 18 anos de idade. Os estudantes foram nomeados pelas letras A, B, C,... até a letra P. Além da sala de aula, a atividade foi realizada no Laboratório de Informática da escola, já que esse trabalho trata do uso tecnologias digitais.

3.3 Materiais e métodos

Para responder à pergunta diretriz dessa pesquisa, foi elaborada e aplicada uma sequência de atividades, que aborda a região no plano cartesiano representada por inequações, com o uso do GrafEq. A sequência de atividades foi dividida em duas partes. A primeira, realizada em sala de aula, constituiu uma folha de atividades[16] na qual foram trabalhadas diferentes variáveis visuais de funções e foi proposta a construção de algumas inequações. Na segunda parte, realizada no Laboratório de Informática, os participantes utilizaram o GrafEq.

Os materiais coletados foram produzidos por meio da lista de atividades entregue aos alunos, dos áudios produzidos nas conversas entre os estudantes e a professora investigadora e dos arquivos produzidos pelos participantes no s*oftware*. A coleta de dados no Laboratório de Informática contou com a colaboração de uma colega[17], que gravou áudios e registrou algumas construções dos alunos, para que atendêssemos os participantes com qualidade.

---

[14] A Carta de Ciência da Escola encontra-se no Apêndice 2.
[15] O Termo de Consentimento encontra-se no Apêndice 1
[16] A folha de atividades encontra-se no Apêndice 3.
[17] Paloma Both da Silva, também estudante de Licenciatura em Matemática da UFRGS.

3.4 Atividades na sala de aula

O objetivo da primeira atividade foi observar quais seriam as construções dos alunos ao se deparar com as inequações. Também optamos por examinar, já nessa atividade, as conversões de registros. Para isso, a professora teria um papel de provocar e estimular o pensamento dos envolvidos sem, entretanto, interferir demasiadamente em suas construções. As representações gráficas que constam na folha de atividade foram nomeadas a seguir:

Construção 1: $f(x) \geq -3x + 6$

Construção 2: $f(x) \leq x^2 + x - 6$

Construção 3: $y \leq 4$ e $x \leq 2$

Construção 4: $y^2 + x^2 \leq 4$

Construção 5: $f(x) < sen\ (x) + 2$

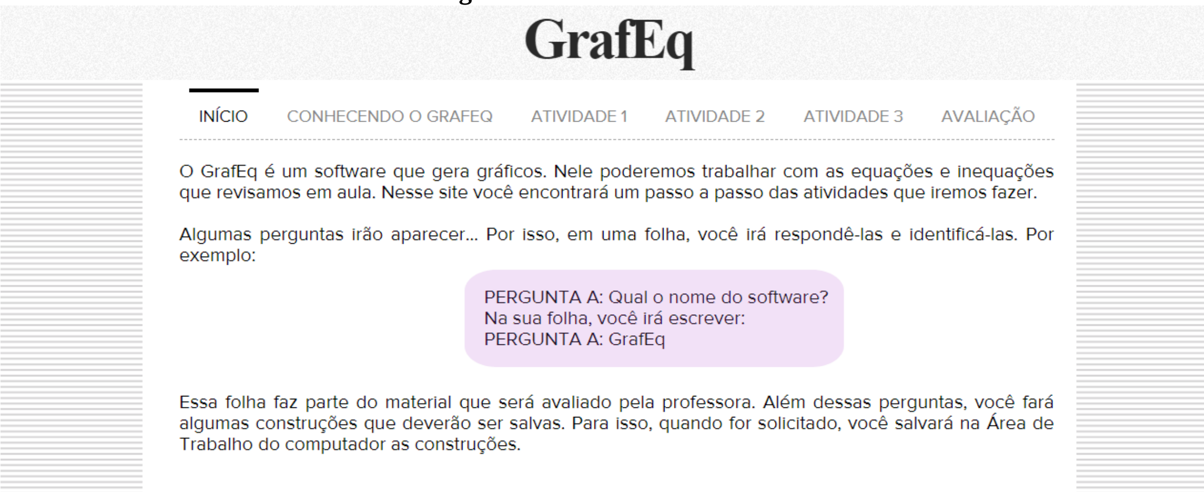
As inequações tratam, respectivamente, de função afim, função quadrática, função constante, equação da circunferência e função seno. Esses tipos de funções foram escolhidos porque podem gerar diferentes figuras no *software* GrafEq. A seguir apresentamos as construções da segunda parte da sequência de atividades.

3.5 Atividades no Laboratório de Informática

O objetivo da atividade no Laboratório foi a construção de diferentes objetos matemáticos. Para promover a autonomia dos alunos, esses puderam consultar os passos da atividade no site[18] criado para essa pesquisa. Na Figura 10 visualizamos a página inicial do site, onde se encontram algumas informações iniciais. Logo após, na opção "Conhecendo o GrafEq" apresentamos as ferramentas do GrafEq, como a criação de relações, as janelas algébrica e gráfica, o zoom, a cor de uma relação, as marcas do plano cartesiano, etc.

[18] Disponível em: https://julianapaimr.wixsite.com/grafeq

Figura 10 – Face inicial do site



Fonte: acervo pessoal

Algumas perguntas e construções foram disponibilizadas no site. As perguntas foram respondidas em uma folha e entregues à professora. Nas construções, os participantes foram orientados a salvá-las e enviá-las para o e-mail da investigadora. A primeira atividade do site referiu-se à função afim e à função constante. A segunda atividade do site tratou da equação da circunferência. Na terceira atividade, abordamos as funções quadrática, seno e cosseno. As perguntas e construções que se encontram no site são:

Pergunta A: Você construiu $y = x + 3$. Como você acha que ficará o gráfico se trocarmos $=$ por $<$? Como você acha que ficará o gráfico se trocarmos $=$ por $>$?

Pergunta B: Como é o gráfico de $y > 7$? Como é o gráfico de $x < 2$?

Construção 6: Agora, em uma mesma Janela Algébrica e utilizando a tecla *tab*, construa um quadrado. Você que irá escolher o tamanho do lado desse quadrado e as inequações que irá usar. Salve essa construção: "Arquivo" > "Salvar como".

Pergunta C: Agora vamos construir uma circunferência com centro em $(2, -1)$ e raio $r = 3$. Para isso, usamos a equação reduzida da circunferência, que vimos em aula, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Substituindo os valores de a,b e r, obtemos: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$. Crie essa relação no GrafEq para obter a circunferência. O que acontece se trocarmos o sinal $=$ por $<$?

Pergunta D: Para que toda a região externa à circunferência "fique colorida", como deve ficar a relação matemática da circunferência?

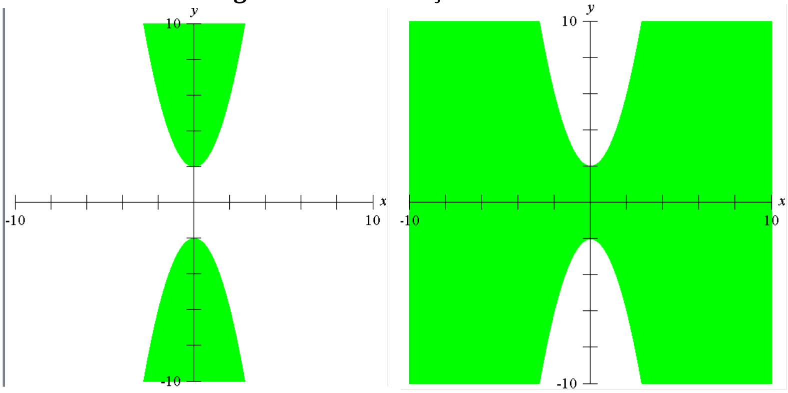
Construção 7: Reproduza a figura abaixo no GrafEq. Você pode escolher os raios e centros dos círculos, desde que a configuração da construção seja a mesma da figura abaixo:

Figura 11 – Construção 7

Fonte: acervo pessoal

Construção 8: Pegue a folha de revisão que estudamos em aula para realizar essa construção. Reproduza pelo menos uma das imagens abaixo. Salve na Área de Trabalho do Computador.

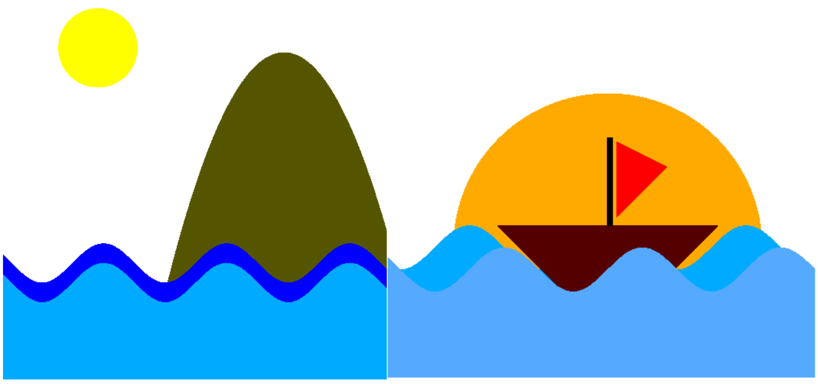
Figura 12 – Construção 8



Fonte: acervo pessoal

Construção 9: Crie um novo gráfico: "Arquivo" > "Novo Gráfico". Agora use a criatividade. Construa a sua própria paisagem ou reproduza alguma das figuras abaixo. Salve na Área de Trabalho do Computador.

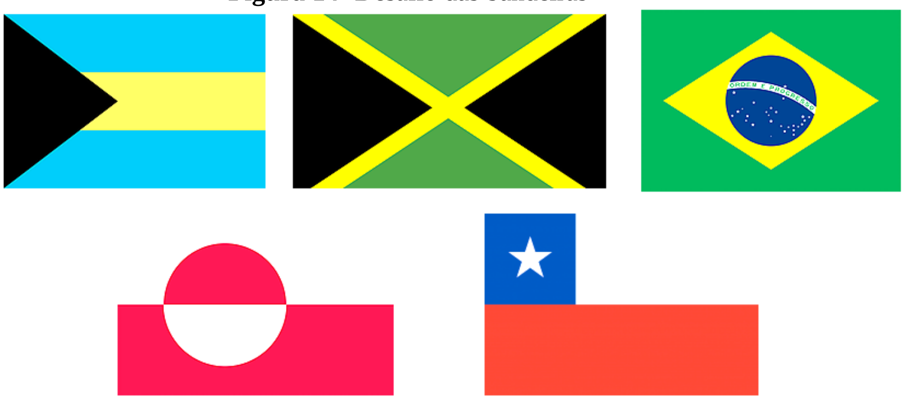
Figura 13 – Construção 9



Fonte: acervo pessoal

Então, há a pergunta “O GrafEq foi importante para a aprendizagem de inequações? Por quê?”, que teve por objetivo analisar como os participantes avaliaram o *software* em função do conteúdo estudado. As respostas foram enviadas para o e-mail da professora. Por fim, como verificamos que os alunos concluiriam rapidamente as atividades propostas, sentimos a necessidade de inserir, entre um encontro e outro, mais uma atividade no site, que consiste na reprodução de uma das bandeiras da Figura 14.

Figura 14- Desafio das bandeiras



Fonte: acervo pessoal

No capítulo a seguir, descrevemos os resultados das atividades aplicadas, por meio dos áudios e documentos obtidos. Além disso, relacionamos o experimento com os estudos do capítulo anterior.

4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE

A análise das atividades está organizada na sequência em que foram aplicadas. Cabe ressaltar que havia, em média, 23 alunos por encontro e, portanto, não foi possível registrar em áudio todas as conversas e discutir com os participantes o seu raciocínio para todas as construções. O Quadro 6 mostra a distribuição dos encontros e os recursos utilizados.

Quadro 6- Organização dos encontros

ENCONTRO	DATA	DURAÇÃO	RECURSOS UTILIZADOS
1	07/10	1h30min	Folha de atividades
2	11/10	1h30min	Folha de atividades
3	18/10	1h30min	GrafEq
4	21/10	1h30min	GrafEq

Fonte: acervo pessoal

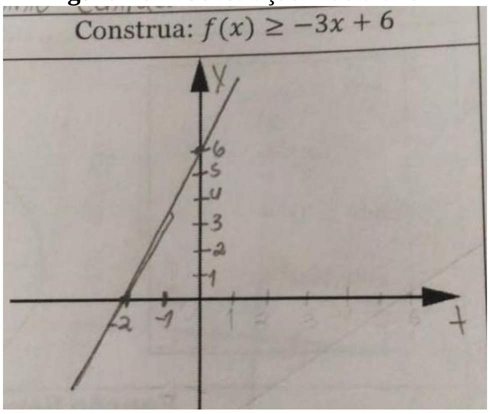
Os participantes trabalharam em duplas na maior parte do tempo, porém, cada um foi responsável por seu próprio material. Em cada seção a seguir, descrevemos e analisamos uma atividade aplicada.

4.1 Construção 1

No primeiro encontro, que ocorreu na sala de aula e 22 alunos compareceram, os estudantes foram convidados a realizar as construções 1 e 2. Para que os alunos construíssem as inequações no GrafEq foi necessária uma revisão de conteúdos que abordasse as variáveis visuais de funções. Os estudantes afirmaram ter estudado funções no primeiro ano do Ensino Médio e, por isso, haviam esquecido esse conteúdo.

A Construção 1 consiste na criação da representação gráfica de $f(x) \geq -3x + 6$. Logo que a professora expôs a forma algébrica da relação matemática, os estudantes recordaram que o coeficiente linear, que chamamos de *b*, determina a ordenada do ponto no qual a reta intercepta o eixo *y*. Entretanto, reconhecer a influência do coeficiente angular na representação gráfica, chamado de *a,* e o ponto no qual a reta intercepta o eixo *x* não foi tão trivial, o que dificultou a Construção 1. Na Figura 15 vemos a solução equivocada de um dos alunos (aluno A) ao traçar a reta. A professora explicou como achar o ponto da reta que intercepta o eixo *x*. Entretanto, o aluno A encontrou o ponto (-2,0) no lugar de (2,0) e, por isso, a reta ficou com comportamento crescente. Se o aluno A tivesse compreensão do significado do coeficiente angular, nesse caso uma variável visual da relação algébrica, poderia identificar que a representação gráfica deveria ser decrescente.

Figura 15 – Construção 1 do aluno A



Fonte: acervo pessoal

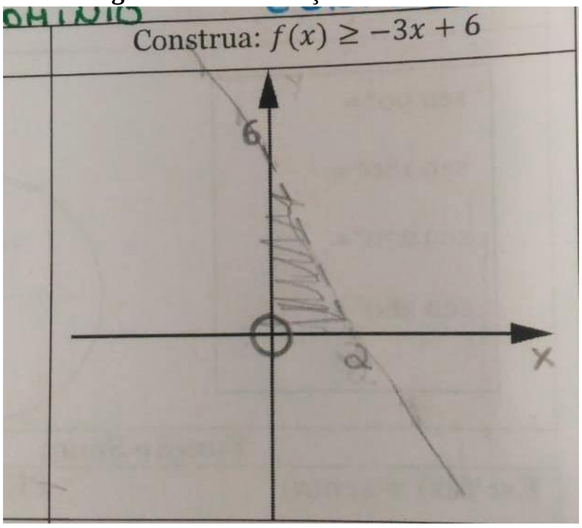
Além da dificuldade em traçar a reta, o Aluno A não compreendeu o que fazer com o sinal ≥ pois, para ele, esse símbolo ainda não significava algo no plano cartesiano e essa foi a situação mais frequente que ocorreu nessa primeira construção. Destacamos no Quadro 6 um trecho que revela a dificuldade enfrentada pelos estudantes.

Quadro 6 – Diálogo sobre a construção 1, alunas B e C

Professora: ***O f(x) aqui é uma região no plano que vai estar acima dessa reta que vocês traçaram. E aí? O que vocês acham que vocês têm que pintar?*** **Aluna B:** ***Aqui dentro óh, nesse coisa.*** **A aluna então pintou o gráfico conforme a Figura 16.** **Professora:** ***Dentro? Ta! Mas olha o que está dizendo... Que é maior do que isso*** **(apontando para a reta).** ***Maior do que isso é toda essa região aqui...*** **Aluna C:** ***Ah, sério que tem que pintar?*** **Aluna B:** ***Ta! Mas não entendi.*** **Professora:** ***Tu traçou a reta perfeitamente. A nossa região f(x) é maior que a reta, ou seja, ela é toda essa região aqui acima da reta.*** **Aluna B:** ***Ah, e não pode pintar aqui*** **(abaixo da reta)** ***porque está traçada aqui.***

Fonte: acervo pessoal

Figura 16 – Construção 1 da Aluna B



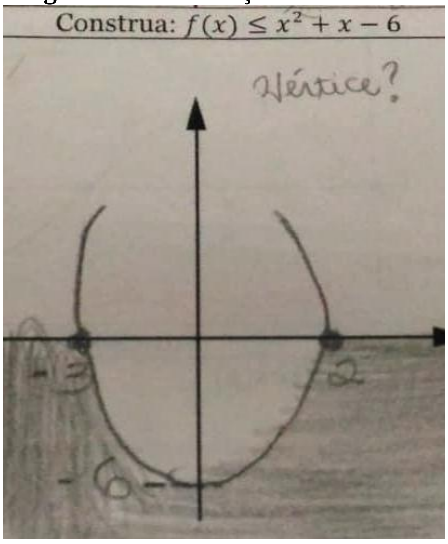
Fonte: acervo pessoal

A professora não deu uma explicação prévia sobre essas construções, pois o objetivo era verificar o que os alunos sabiam sobre inequações. Nenhum aluno, nesse primeiro momento, conseguiu representar graficamente as inequações propostas sem as interferências e os questionamentos da professora. Paralelo a isso, identificamos que somente a explicação da investigadora sem a exposição das regiões solicitadas no plano cartesiano atrasou o processo de compreensão dos alunos. Assim, já surgia a necessidade dos recursos disponíveis no GrafEq que produzem, de maneira versátil, a conversão de registros (GRAVINA e NOTARE, 2013).

4.2 Construção 2

A Construção 2 consistia na criação da representação gráfica de $f(x) \leq x^2 + x - 6$. Apenas um aluno traçou corretamente a parábola, da qual ele identificou o vértice (x_p, y_P), possivelmente usando as fórmulas $x_P = -\frac{b}{2a}$ $y_P = -\frac{\Delta}{4a}$, que se encontravam na folha de atividades. Os valores a, b e Δ poderiam ser obtidos do registro algébrico da parábola e substituí-los nas fórmulas consiste uma transformação de tratamento dentro desse registro. Além disso, era necessário encontrar as raízes dessa função, que determinam os dois pontos nos quais a parábola intercepta o eixo x. Tanto o vértice quanto as raízes são variáveis visuais pertinentes necessárias para a conversão ao registro gráfico da região $f(x)$. A maioria dos estudantes, embora tenha encontrado as raízes, não representou corretamente o vértice da parábola, nem pintou essa região. Três alunos representaram a região de acordo com a Figura 17.

Figura 17 – Construção 2 do Aluno D



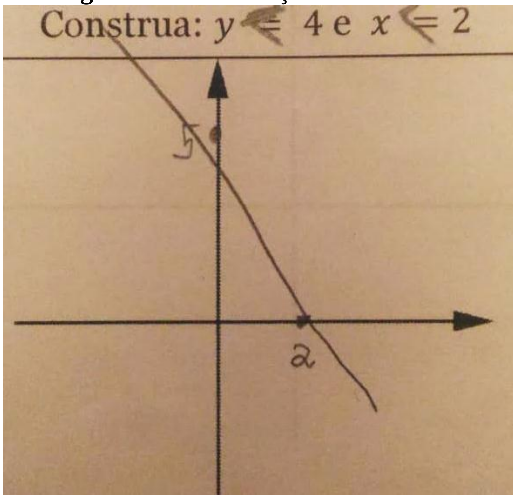
Fonte: acervo pessoal

Observamos mais uma vez que os alunos realizaram o registro gráfico da região $f(x)$ considerando que o eixo x é o limite superior dessa região, e não a curva de $f(x) \leq x^2 + x - 6$. Essa percepção ainda não é clara aos alunos, porque ainda não compreendem ou não consideram que a região determinada por uma inequação no plano cartesiano pode ser infinita. Salientamos também a desatenção do Aluno D no traçado do gráfico da parábola. Na maneira em que foi traçada, a parábola não está indicando uma função, pois para algum x há duas imagens em y.

4.3 Construção 3

No segundo encontro, 24 alunos compareceram e, como dia estava muito quente, os estudantes tiveram mais dificuldade em concentrar-se. Inicialmente, a professora recordou que o estudo em questão tratava de inequações, e que essas representam uma região no plano cartesiano. A investigadora solicitou, então, as Construções 3 e 4. A Construção 3 consistia na intersecção das inequações $y \leq 4$ e $x \leq 2$ e, por ser uma novidade para os participantes, alguns traçaram uma reta, como ilustrado na Figura 18. Os estudantes, em sua maioria, demonstraram não saber identificar no plano cartesiano os pontos $(2,0)$ e $(0,4)$, necessários para essa construção. Acreditamos que o aluno A tenha confundido o número 4 com o número 5 e que sua ideia foi traçar uma reta entre os pontos (0,4) e $(2,0)$. Além disso, o aluno A não compreendeu que $y = 4$ é o conjunto de todos os pontos cuja ordenada é 4 e, mais do que isso, que $y \leq 4$ é o conjunto de todos os pontos cuja ordenada é menor ou igual a 4.

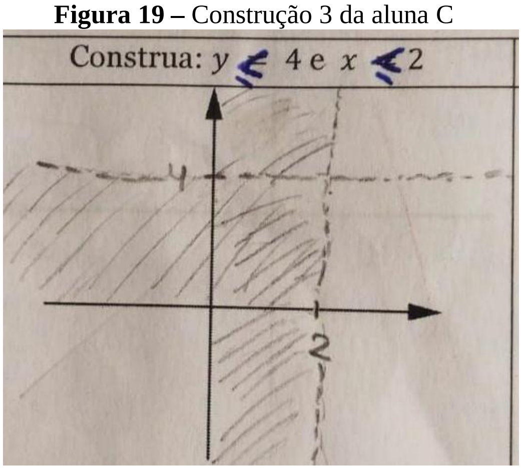
Figura 18 – Construção 3 do aluno A



Fonte: acervo pessoal

Na Figura 19 verificamos que a aluna C compreendeu parcialmente o papel do símbolo $\leq$, identificando que essa variável visual provocaria restrições nos eixos x e y. Entretanto, não houve, num primeiro momento, a devida conversão de registros, pois a região representada pela aluna C não foi totalmente correta.

Figura 19 – Construção 3 da aluna C



Fonte: acervo pessoal

No trecho a seguir concluímos que não houve o entendimento da desigualdade $y \leq 4$ por parte da aluna C, pois essa destacou no gráfico uma região acima de $y = 4$. Assim, a ideia de inequação ainda não era clara.

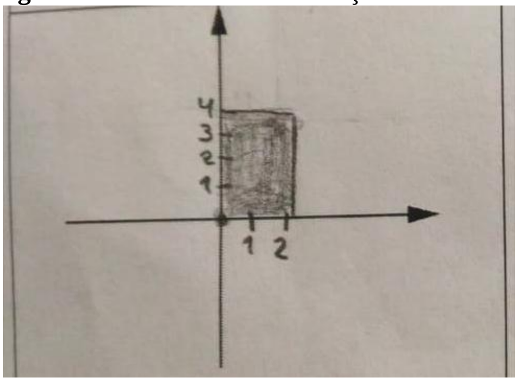
Quadro 7 – Diálogo sobre a Construção 3, aluna C

Professora: ***Por que tu pintou aqui em cima?*** **(Referindo-se a parte acima de y=4 no gráfico)** **Aluna C:** ***[...] é porque a linha segue reta para cima, eu achei que seria tudo depois daqui, tipo, porque isso aqui é infinito, não é? Para cima porque aqui é infinito...***

Fonte: acervo pessoal

Outra solução que se repetiu está ilustrada na Figura 20. Os alunos E e F representaram as regiões somente no primeiro quadrante do plano cartesiano. Então a professora interferiu, como vemos no Quadro 8.

Figura 20 – Processo da Construção 3 da aluna E



Fonte: acervo pessoal

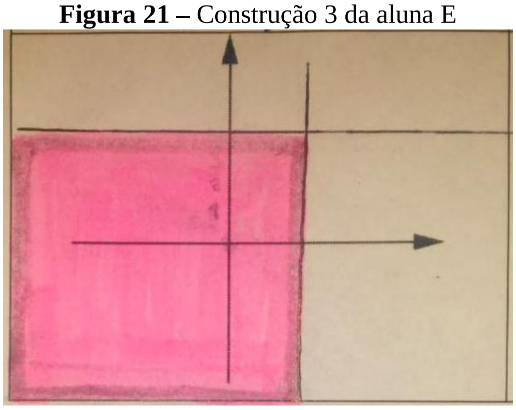
Quadro 8 – Diálogo sobre a Construção 3, alunos E e F

Aluno F: ***Mas então tá errado eu pintar só isso aqui?***
Professora: ***Isso. O que vocês vão ter que mudar aí? O que faltou pintar?***
Aluna E: ***O resto?***
Professora: ***Aham. Onde fica o resto? Vocês querem a região que é menor que 4 e menor que 2?***
Aluno F: ***Tudo para baixo para cá, e tudo para o lado de cá.***

Fonte: acervo pessoal

Em seguida, a aluna E apresentou a construção conforme a Figura 21. Ela apagou os pontos do plano cartesiano, mas nota-se pelo diálogo entre ela e o aluno F que esses alunos estão avançando em seu raciocínio.

Figura 21 – Construção 3 da aluna E



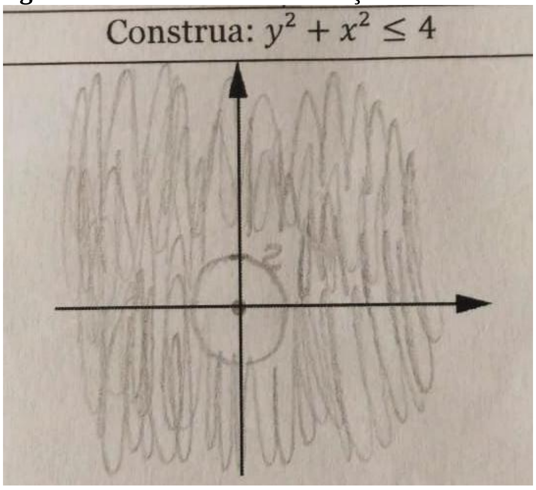
Fonte: acervo pessoal

Logo, percebemos que esses alunos estão em processo de compreensão do significado das desigualdades. Eles ainda se apoiam em tentativas e erros, ou em processos de codificação, não havendo compreensão global sobre a conversão de registros.

4.4 Construção 4

A Construção 4 consistia na representação gráfica da inequação $x^2 + y^2 \leq 4$. Nessa construção os alunos deveriam identificar o centro $C = (0,0)$ e o raio $r = 2$ da circunferência. Na Figura 22 exemplificamos o que um grupo com cinco alunos havia construído. Observando a construção, a pesquisadora iniciou o diálogo com o grupo. No Quadro 9 destacamos uma parte desse diálogo.

Figura 22 – Processo da Construção 4 do Aluno D



Fonte: acervo pessoal

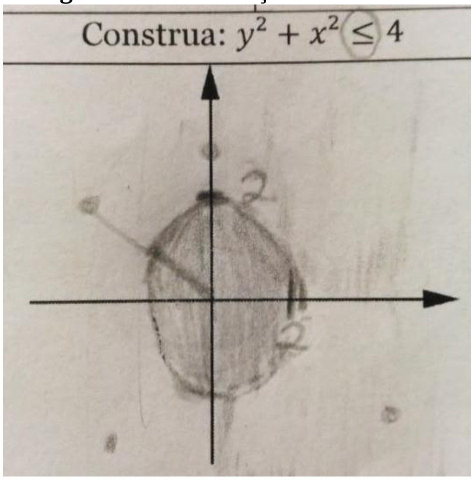
Quadro 9 – Diálogo sobre a Construção 4, alunos D e G

Aluno D*: Como o raio é maior que a circunferência então tem que ser acima... Acima dos dois, desse lado e desse lado (*Referindo-se à circunferência construída). *É isso?*
Professora: ***Não. Essa região x^2+y^2 é menor que o raio [...] Se fosse maior que 4 seria o que vocês pintaram aí...***
Aluno G: ***Então é dentro...***
Aluno D: ***Então é só pintar por dentro, porque o raio... Ah ta... É menor que 4.***

Fonte: acervo pessoal

Acreditamos que a leitura do aluno nessa relação matemática foi que 4 é maior ou igual a $x^2 + y^2$ e, portanto, a região maior que $r = 2$ que ele pintou no gráfico estaria certa. Porém, o aluno não considerou que o que deve ser pintado é o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem a equação $4 \geq x^2 + y^2$. Identificar esse conjunto de pontos é uma transformação do tipo tratamento, que poderia auxiliar na conversão da escrita algébrica para a representação gráfica. Após o diálogo, o aluno D obteve a região da Figura 23 e, portanto, consideramos que houve a compreensão, mesmo que em uma situação específica, do objeto matemático. Se o aluno foi capaz de transitar entre um registro e outro, houve aprendizagem em relação ao objeto (DUVAL, 2013).

Figura 23 – Construção 4 do aluno D



Fonte: acervo pessoal

De maneira geral, o obstáculo na compreensão dessa construção foi identificar qual região (interna ou externa à circunferência) deveria ser pintada. Mesmo sem usar os termos certos, os alunos, com suas formas de se expressar e até mesmo com gestos, estavam se entendendo e entendendo o conceito de inequação.

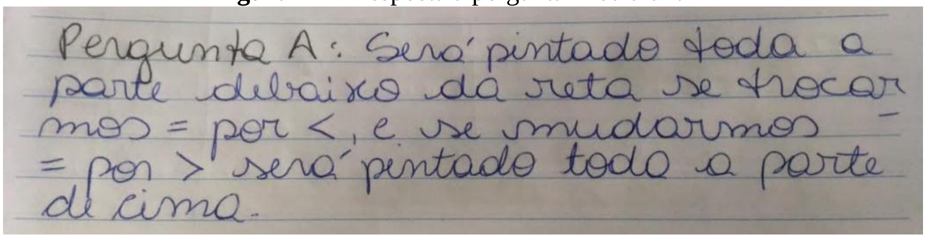
4.5 Construção 5

A Construção 5 consistia na criação da representação gráfica $f(x) < sen\,(x) + 2$. Essa construção foi realizada antes de iniciarem as atividades no computador no terceiro encontro, no qual compareceram 21 alunos. Por uma questão de tempo, a professora realizou essa construção em conjunto com a turma, no quadro e, por isso, não analisaremos essa construção aqui. Cabe destacar que, quanto às variáveis visuais, a professora explicou à turma que o termo independente $+2$ da função desloca o gráfico em duas unidades para cima no eixo y e, então, generalizou essa ideia da translação vertical.

4.6 Perguntas A e B

A pergunta A era: *Você construiu y = x+3. Como você acha que ficará o gráfico se trocarmos = por <? Como você acha que ficará o gráfico se trocarmos = por >?* Os participantes deveriam primeiro responder à pergunta e, somente depois, verificar no *software* se a resposta estava certa. Aqui notamos que os alunos sabiam explicar verbalmente o que aconteceria em cada situação, mas tinham dificuldades de escrever o que haviam compreendido. Por isso, alguns pediram para desenhar essas respostas. A resposta que mais apareceu está ilustrada na Figura 24.

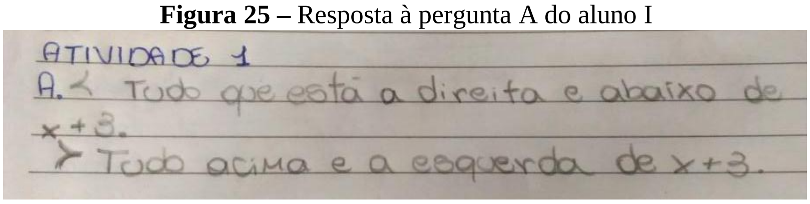
Figura 24 – Resposta à pergunta A da aluna H


Pergunta A: Será pintado toda a parte debaixo da reta se trocarmos = por <, e se mudarmos = por > será pintado todo a parte de cima.

Fonte: acervo pessoal

Destacamos também a resposta da Figura 25, que se diferenciou das demais, pela forma que o aluno I se refere à região representada pelas inequações. Primeiro, o aluno se refere à $y < x + 3$ e depois à $y > x + 3$.

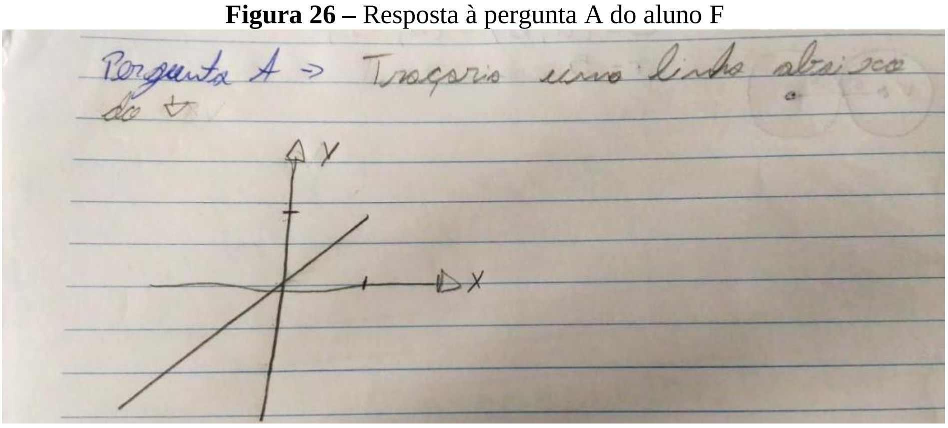
Figura 25 – Resposta à pergunta A do aluno I


ATIVIDADE 1
A. < Todo que está a direita e abaixo de x+3.
> Todo acima e a esquerda de x+3.

Fonte: acervo pessoal

Com as Figuras 24 e 25 percebemos que ambos os alunos compreenderam a ideia de inequação, e a maneira que a expressaram mostra que o registro escrito é diversificado. Por fim, vamos analisar a solução do aluno F, ilustrada na Figura 26.

Figura 26 – Resposta à pergunta A do aluno F



Fonte: acervo pessoal

Depois de conferir no *software* as regiões $y > x + 3$ e $y < x + 3$, o Aluno F conversou com a professora. Nesse trecho vemos que houve a conversão da escrita algébrica e do registro gráfico para a língua natural com o apoio do *software*.

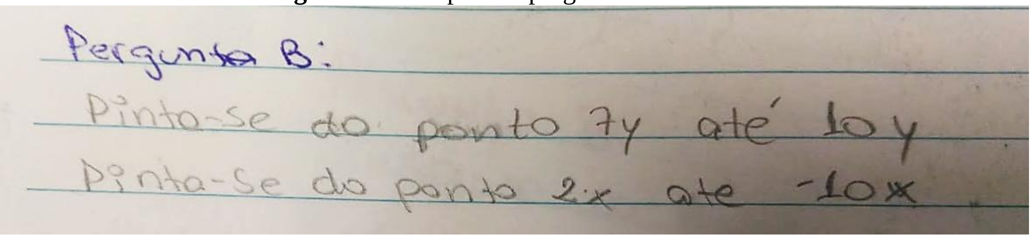
Quadro 10 – Diálogo sobre a Pergunta A com o aluno F

Professora: $y = x + 3$ ***que que é?***
Patrick: ***É a diagonal traçada.***
Professora: ***É a reta... Quando a gente colocou o menor o que aconteceu?***
Patrick: ***Ela foi pintada em todos os números abaixo.... da reta. Isso vai se aplicar para tudo, então? Agora eu entendi, eu tava meio perdido nisso. Não tava entendendo.***

Fonte: acervo pessoal

A Pergunta B era: *Como é o gráfico de y>7? Como é o gráfico de x<2?* Para essa pergunta, os alunos poderiam consultar o GrafEq. Apenas duas respostas (Figura 27) divergiram das restantes e mostram uma incompreensão referente à noção de infinito.

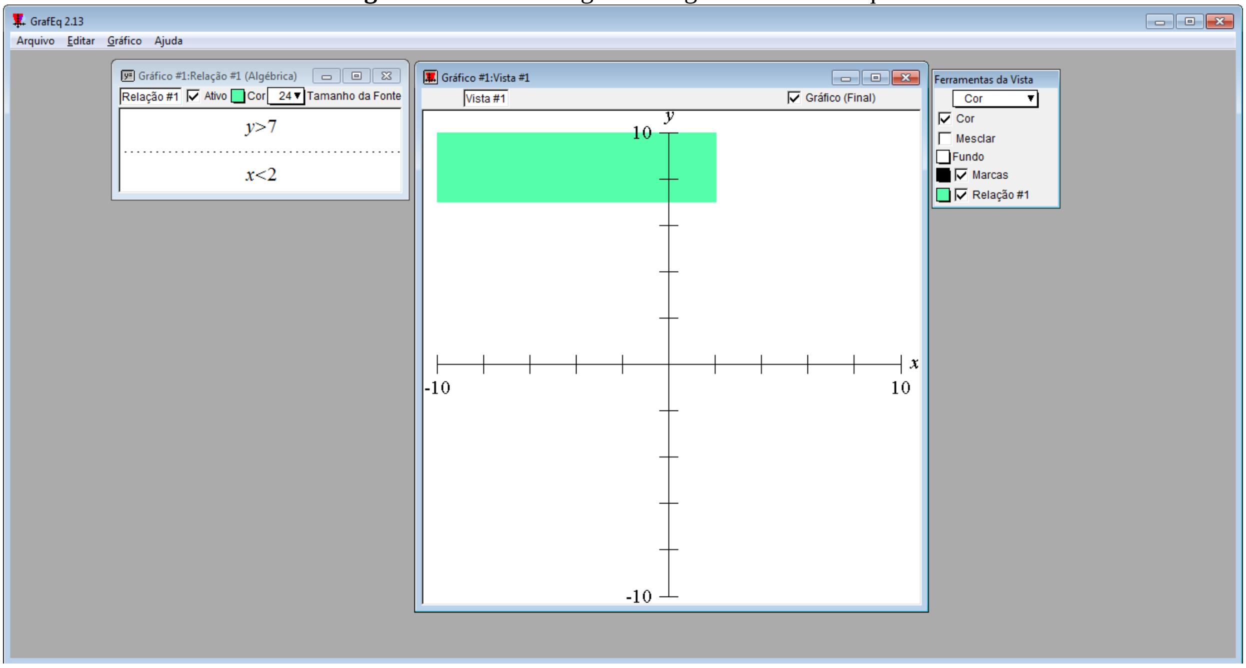
Figura 27 – Resposta à pergunta B da aluna J



Fonte: acervo pessoal

A aluna J atribuiu à região $y > 7$ pintar do ponto (0,7) até (0,10); à região $x < 2$, pintar do ponto (2,0) até (-10,0). Acreditamos que a aluna considerou as restrições em $y = 10$ e em $x = -10$ às regiões por conta das limitações dos eixos coordenados da janela gráfica no momento, que limitava o plano cartesiano nesses pontos, como vemos na Figura 28.

Figura 28 – Janelas algébrica e gráfica no GrafEq



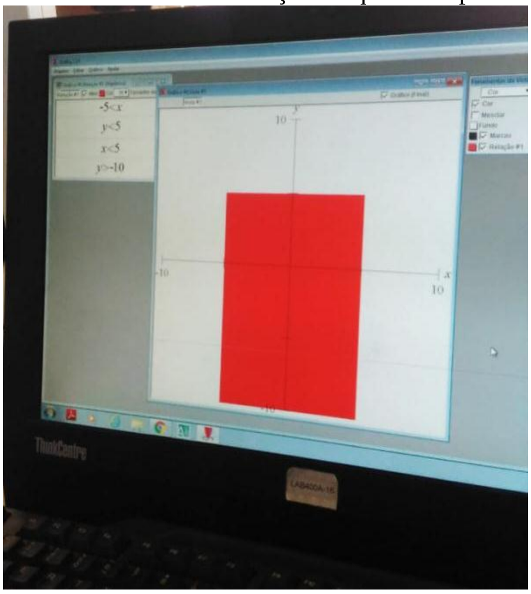
Fonte: acervo pessoal

Essa resposta à pergunta poderia ser diferente se os alunos, nesse momento, mudassem o zoom da janela gráfica. Assim, poderiam observar que a região é infinita.

4.7 Construção 6

A Construção 6 foi a primeira construção realizada no software e, por isso, os participantes fizeram muitas perguntas. Essa primeira atividade consistia na construção de um quadrado pintado de lado qualquer. Na Figura 29 observamos uma dificuldade recorrente entre os estudantes, que foi a de visualizar em quais intervalos dos eixos x e y deveria haver uma restrição para obter as características de um quadrado. O Aluno D precisava de apenas uma inequação ($y > -5$) para finalizar a construção do quadrado, como vemos na Figura 29. Então, a pesquisadora interferiu, de acordo com o Quadro 11.

Figura 29 – Processo de construção do quadrado pelo Aluno D



Fonte: acervo pessoal

Quadro 11 - Diálogo sobre a Construção 6, aluno D

Professora: ***Agora tu tem um retângulo. O que tu vai usar?*** **Aluno D:** ***Y maior que -10.*** **O aluno digita $y > -10$.** **Professora: [...]** ***Ficou um quadrado?*** **Aluno D:** ***Não.***

Fonte: acervo pessoal

As construções do aluno D na Figura 29 foram: $-5 < x$, $y < 5$, $x < 5$ e $y > -10$ e, assim, o aluno permanecia com um retângulo. A professora insistiu no diálogo. Esse aluno identificou, a partir do resultado obtido no registro gráfico, que algo estava errado no registro algébrico. Essa observação imediata que o software permitiu, levou o aluno à correção.

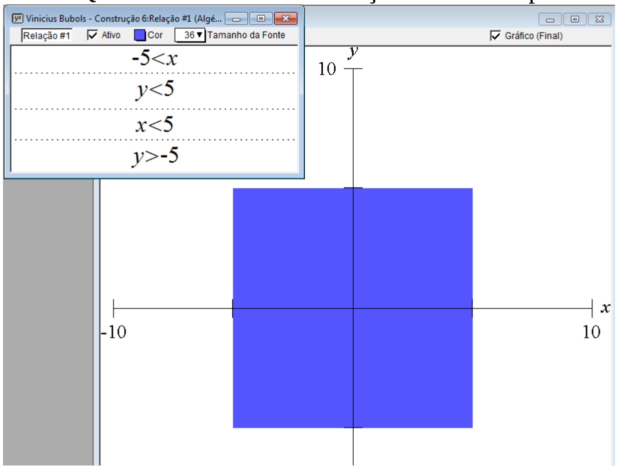
Quadro 12 - Diálogo sobre a Construção 6, aluno D

Professora: ***Por que número tu tem que trocar?*** **Aluno D:** ***-5.***

Fonte: acervo pessoal

Após trocar a cor das relações, o Aluno D obteve o quadrado da Figura 30. Como o estudante alcançou a figura desejada, houve a mobilização entre o registro de representação inicial (algébrico) e o final (gráfico) e, portanto, de acordo com a teoria de Duval, supomos que houve a compreensão dos objetos em questão. A versatilidade proporcionada pelo GrafEq favoreceu esse processo de mobilização dos dois registros de representação e a apreensão dos conceitos.

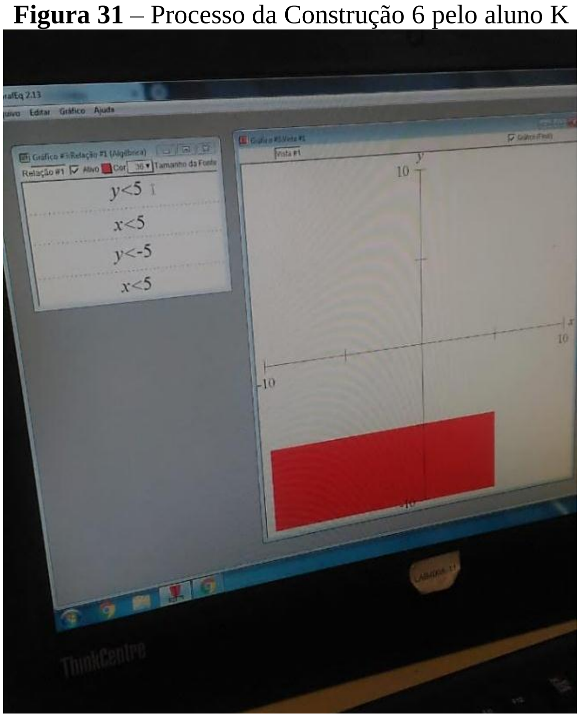
Figura 30 - Quadrado construído e relações utilizadas pelo Aluno D



Fonte: acervo pessoal

Já a construção do Aluno K estava conforme a Figura 311. Ele havia digitado na Janela Algébrica $y < 5$, $x < 5$, $y < -5$ e $x < 5$. Então os colegas ajudaram-no, como mostra o Quadro 13.

Figura 31 – Processo da Construção 6 pelo aluno K



Fonte: acervo pessoal

Quadro 13 – Diálogo sobre a Construção 6, alunos J, K e N.

Aluno A: *Falta só uma coisa para ti acertar aí*
Aluna J: *K, vou te dar só uma dica. Por que aqui ta menos e aqui não?*
Aluno A: *É porque tu falou que o* $x < 5$ *e* $x < 5$.
Aluna J: *Tu colocou dois coisa igual. [...] Olha só, vou te explicar uma coisa. Se aqui o y tá em 5, tava aqui né, e o x em 5 tava aqui, o que tu precisa fazer para o teu y, menos no caso, ficar aqui e o x ficar aqui. Eu falei o contrário, mas tu entendeu...*
Aluno K: *[...] Trocar o sinal aqui?*

O aluno trocou $x < 5$ para $x < -5$, mas não obteve o quadrado.

Professora: ***O que é x menor que -5? Não é para cá?*** **(Apontando para a região fora do quadrado).** ***E tu quer essa região ou essa região?*** **(Referindo-se as regiões dentro e fora do quadrado).**

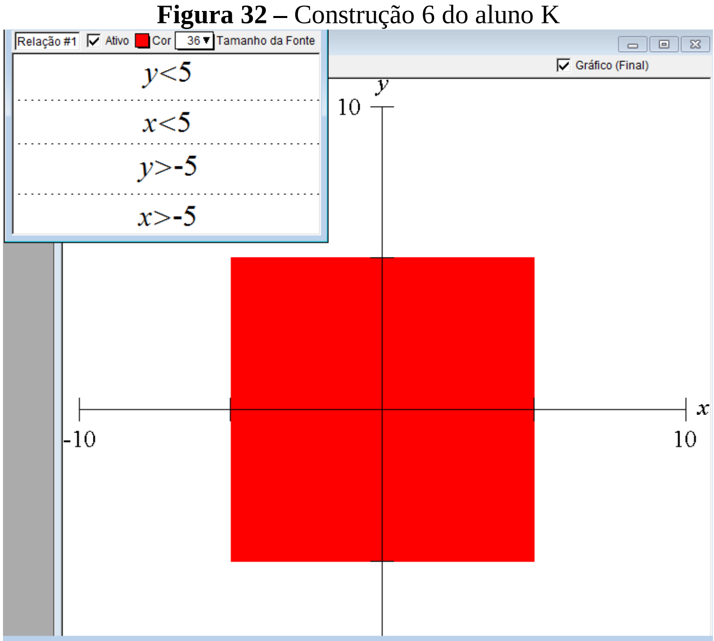
O aluno troca $x < -5$ por $x > -5$.

Aluno K: ***Peguei, peguei, peguei.***

Fonte: acervo pessoal

Nesse trecho os colegas ajudaram o Aluno K a encontrar os equívocos e a finalizar a conversão de registros. Notamos que, com os diferentes comentários dos colegas e da professora, também houve a conversão do registro da língua natural para a escrita algébrica. Além disso, a atividade favoreceu a comunicação entre os participantes. Então o aluno finalizou a construção, conforme a Figura 32.

Figura 32 – Construção 6 do aluno K



Fonte: acervo pessoal

Nessa primeira construção foi possível ouvir os alunos vibrarem quando chegavam à forma do quadrado. Acontece que as produções no GrafEq estavam provocando nos alunos a saída do "enclausuramento" de registro, obstáculo que Duval (2013) aponta ser recorrente no ambiente escolar, e esses alunos estavam reconhecendo o mesmo objeto em duas representações diferentes.

4.8 Perguntas C e D

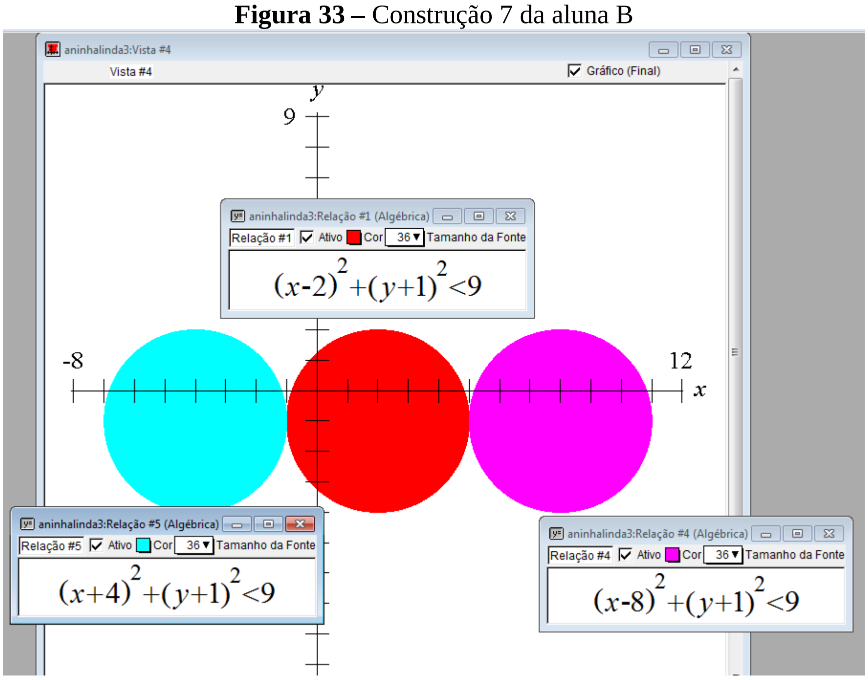
As pergunta C e D referiam-se à circunferência $(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Eram elas: *O que acontece se trocarmos o sinal* $=$ *por* $<$? e *Para que toda a região externa à circunferência "fique colorida", como deve ficar a relação matemática da circunferência?*

Essa atividade os alunos resolveram com facilidade pois, por meio do GrafEq e por já terem realizado a Construção 4, já haviam entendido o que acontece com a circunferência ao se trabalhar com desigualdade. Assim, não daremos ênfase para essas respostas aqui.

4.9 Construção 7

A Construção 7 consistia na criação de círculos de mesmo raio a partir da imagem dada. Para auxiliar os participantes nessa construção havia, no site, a equação reduzida da circunferência $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, onde (a,b) representa o par ordenado do centro da circunferência de raio r. Os alunos souberam construir uma circunferência "de partida". As dificuldades foram em compreender qual coordenada, a ou b, do ponto deveria variar para construir as próximas circunferências e saber quantas unidades deveria haver entre os centros das circunferências. O trecho que mostra o diálogo entre a professora e a aluna B explicita essa dificuldade. A aluna havia construído a circunferência vermelha, $(x-2)^2+(y+1)^2<9$, de centro $(2,-1)$, conforme a Figura 33.

Figura 33 – Construção 7 da aluna B



Fonte: acervo pessoal

Quadro 14 - Diálogo sobre a Construção 7, aluna B

Professora: ***Agora eu quero fazer uma "bolinha" aqui do lado. O que que eu vou mudar? Vai mudar o meu y do centro?*** **Aluna B:** ***Não. Ele vai continuar -1.*** **Professora:** ***E o meu x vai mudar?*** **Aluna B:** ***Vai um pouco mais para lá.*** **Professora:** ***Quanto mais para lá?*** **Aluna B:** ***O dobro. Porque vai ficar metade da bolinha aqui ainda.*** **Professora:** ***[...] Do centro até essa "pontinha"*** **(em x= 5)*, qual é o meu raio?***** **Aluna B:** ***9.*** **Professora:** ***3, porque é raio ao quadrado [...]. Daqui do centro*** **(x=2)** ***até essa "pontinha"*** **(em x= 5)*, tem tamanho 3, que é meu raio. Então se eu deslocar três unidades para cá, meu centro vai ficar aqui*** **(x= 5)** ***né? Só que eu não quero aqui... Eu quero ainda mais para cá*** **(para a direita).** ***Quanto mais eu tenho que deslocar para cá? Mais três, não é?*** **Aluna B:** ***Sim.*** **Professora:** ***Isso aí. Tu vai deslocar 3 daqui e 3 daqui. Então vai deslocar 6.*** **Aluna B:** ***Tem que mudar o raio também?*** **Professora:** ***Não, o raio fica igual. [...] Eu vou ter que deslocar o x em 6 unidades. Tava no x=2, agora vai pro...?*** **Aluna B:** ***8.***

Fonte: acervo pessoal

Com a fala da aluna B, destacada em amarelo no Quadro 14, vemos que houve a compreensão que a variável visual que deveria mudar no registro algébrico seria o valor a da equação da circunferência. Esse entendimento pode ter sido favorecido pela visualização gráfica da circunferência vermelha. Também analisamos nesse trecho uma dificuldade do tipo tratamento, pois a aluna não compreende, a partir da escrita algébrica $(x-2)^2+(y+1)^2<9$, que o raio da circunferência é 3. Salientamos que essa dúvida foi frequente nessa atividade.

Após esse diálogo com a professora, a aluna B construiu o círculo rosa. A construção do círculo azul, entretanto, não foi trivial para a aluna, como vemos no Quadro 15.

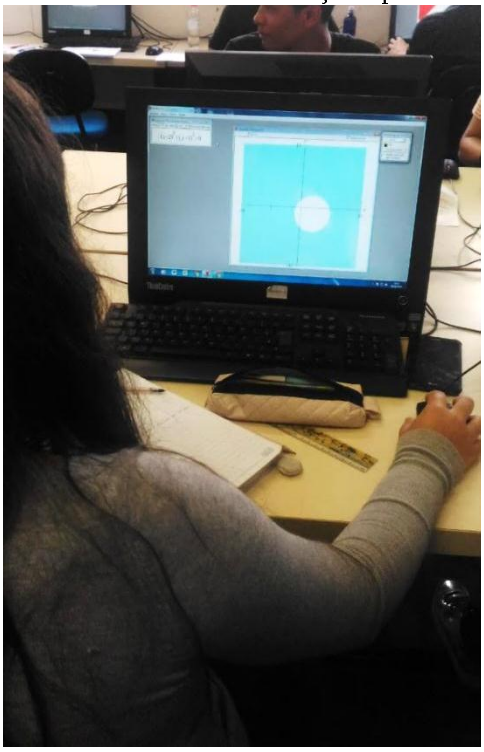
Quadro 15 – Diálogo sobre a Construção 7, aluna B

Professora: ***Pro lado de lá*** **(esquerda)** ***vai ser o mesmo pensamento. Tava no x=2 aqui né...*** ***Lembra quando a gente tinha que andar para esse lado? 6 né? 3 aqui e 3 aqui? Então do 2, vamos andar 3 para lá*** **(esquerda)...** ***Entendeu? Não?*** **Aluna B:** ***Não!*** **A professora digita a relação algébrica da circunferência azul $(x+4)^2+(y+1)<9$ no GrafEq e retorna às explicações:** **Professora:** ***Lembra que meu x é 2, ok? A gente quer andar 3 para cá, para chegar até essa bordinha que é o valor do meu raio, meu raio é 3. E depois mais 3 para chegar no centro. A gente quer andar 6 unidades para a esquerda.*** **Aluna B:** ***2-6.*** **Professora:** ***Quanto é 2 -6?*** **Aluna B:** ***É -4. Mas daí menos com menos dá mais.*** **Professora:** ***Foi o mais que colocamos ali*** **(janela algébrica).** **Aluna B:** ***Ah ta, ta certo. Entendi.***

Fonte: acervo pessoal

Embora a aluna tenha entendido qual das variáveis visuais deveria ser modificada, vemos que ela não teve uma compreensão global de “deslocamento” da circunferência no plano cartesiano. Percebemos também, outra dificuldade recorrente nessa construção (Figura 34).

Figura 34 – Processo da Construção 7 pela aluna M



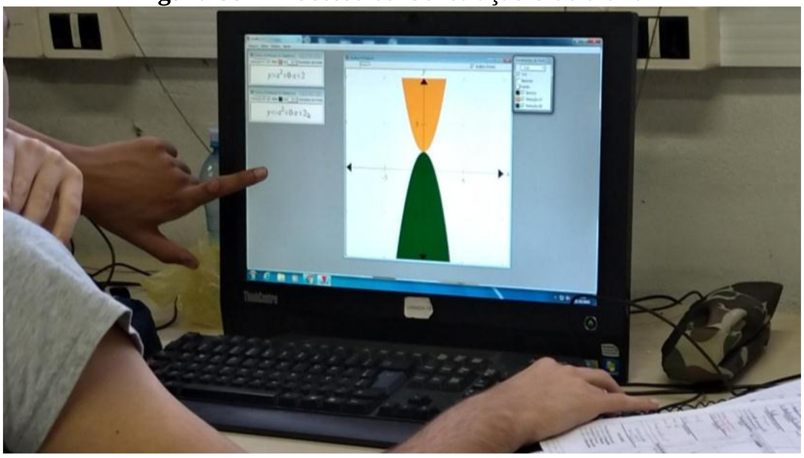
Fonte: acervo pessoal

A aluna M questionou a professora sobre seu erro, pois ela visualizou no registro gráfico que a região que ficou colorida foi a região externa ao círculo. Ela havia construído na janela algébrica $(x-2)^2+(y+1)^2>9$. A professora não apontou o que deveria ser modificado na relação algébrica, mas deixou a aluna pensar. Então, a aluna tentou modificar o sinal $>$ por $<$, obtendo o círculo com a região interna colorida. Esse obstáculo de compreensão enfrentado pela aluna foi o mesmo identificado com o grupo de alunos na Construção 4. A diferença é que, aqui, a aluna pôde manipular a relação algébrica e obter, de maneira instantânea, o resultado desejado. Assim, apontamos o potencial do GrafEq de se confrontar o erro com expectativa de resposta, o que também contribui para a aprendizagem matemática.

4.10 Construção 8

A Construção 8 consistia na criação de parábolas. A situação mais recorrente nessa atividade foi a construção de parábolas que se interceptavam em seus vértices. O aluno D construiu as regiões $\mathrm{y} > \mathrm{x}^2 + 0\mathrm{x} + 2$ e $\mathrm{y} < -\mathrm{x}^2 + 0\mathrm{x} + 2$, que ocasionaram a representação gráfica da Figura 35.

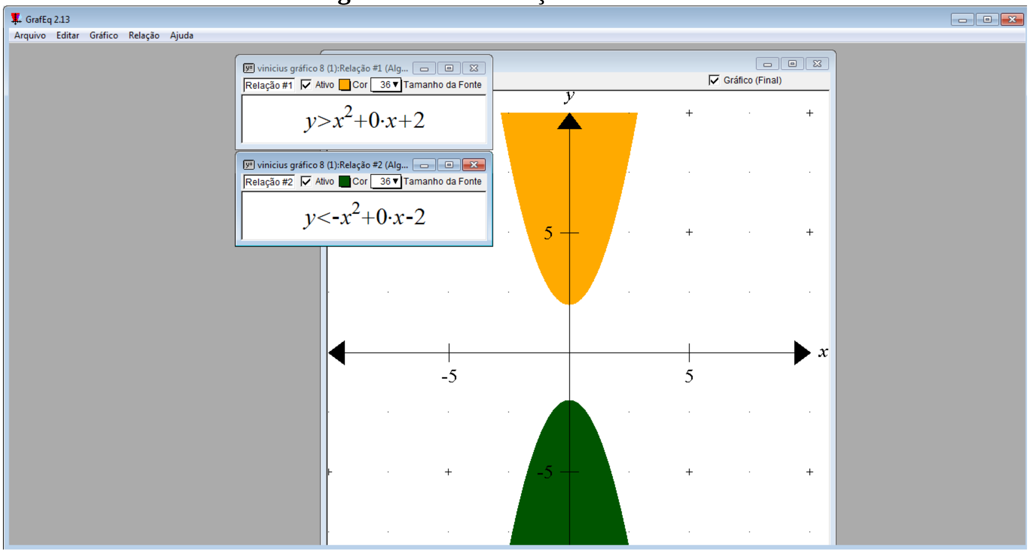
Figura 35 – Processo da Construção 8 do aluno D



Fonte: acervo pessoal

Em decorrência da Figura 35, verificamos que, a partir da imagem disponibilizada no site, o aluno entendeu e identificou qual relação matemática deveria ser usada e quais variáveis pertinentes ($>$ e $<$) estavam por trás de cada parábola. Entretanto, em relação à figura disponível no site, os vértices das parábolas não poderiam estar se interceptando. Com as discussões com outro colega, o aluno D percebeu que o valor a ser mudado era o termo independente de uma das parábolas, no caso, o número 2. O estudante construiu, então, a parábola $y < -x^2 + 0x - 2$, conforme a Figura 36. Esse aluno observou o registro gráfico e retornou ao registro algébrico para alterar a variável pertinente necessária. Logo, houve a conversão de registros a partir do trabalho simultâneo entre os registros algébrico e gráfico.

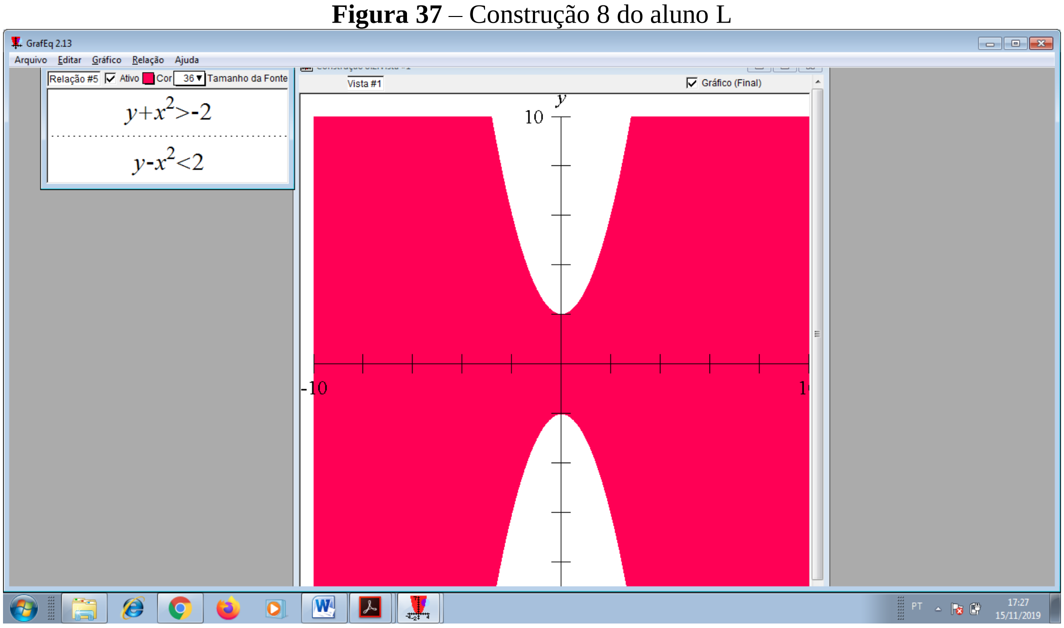
Figura 36 – Construção 8 do aluno D



Fonte: acervo pessoal

Na construção da Figura 36, o aluno D utilizou duas janelas algébricas, uma para a região em laranja e outra para a verde, pois a construção desejada não tratava da intersecção dessas duas regiões. Porém, havia também outro tipo de construção esperada nessa atividade, como ilustra a Figura 37.

Figura 37 – Construção 8 do aluno L



Fonte: acervo pessoal

O aluno L utilizou apenas uma janela algébrica para a construção, usando a tecla *tab*, pois a região colorida consiste na intersecção das relações $y < x^2 + 2$ e $y > -x^2 - 2$. O entendimento desse recurso não foi instantâneo para os estudantes, que se frustravam quando o software não respondia de acordo com suas expectativas. Se, na Figura 36, o aluno tivesse inserido as duas relações em uma mesma janela algébrica, o *software* responderia, na janela gráfica, um conjunto vazio. Acreditamos, portanto, que "O potencial semiótico deste recurso está na provocação do entendimento de uma forma geométrica como sendo a intersecção de conjuntos-soluções de diferentes desigualdades" (GRAVINA e NOTARE, 2013, p. 07).

4.11 Construção 9

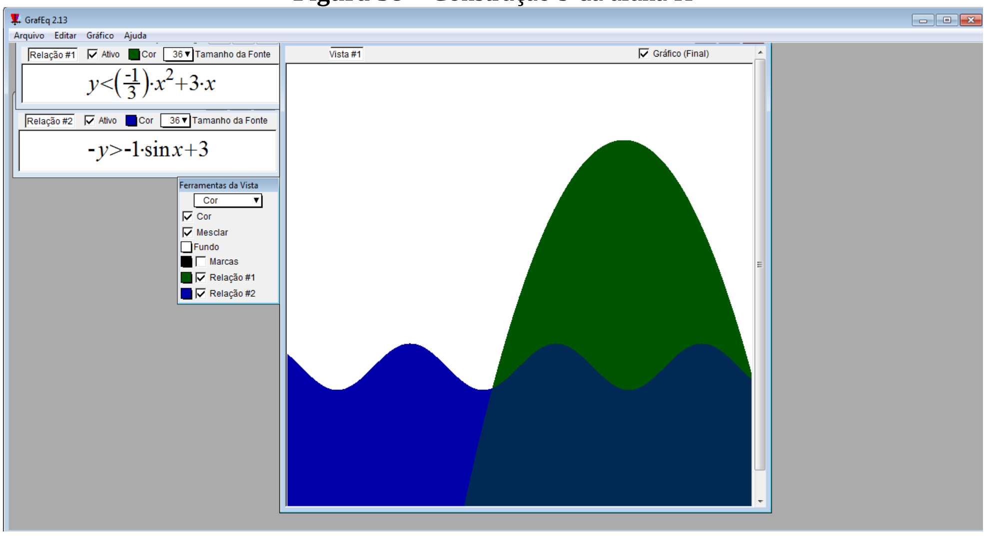
A Construção 9 consistia na reprodução ou criação de uma paisagem a partir de relações matemáticas. Essa construção contemplava as demais, pois os alunos poderiam usar todas as relações já estudadas. Nesse momento, os participantes já estavam habituados com o *software*. O Quadro 16 mostra um dos diálogos realizados sobre a construção da aluna H, ilustrada na Figura 38.

Quadro 16 - Diálogo sobre a Construção 9, aluna H

Aluna H: ***Eu fiz a montanha só que eu não tô conseguindo pintar embaixo dela.***
Professora: ***Tu tá botando igual, né?***
Aluna H: ***Ah...***
Professora*:* ***Quando a gente quer pintar a gente usa o menor ou maior. Vai ser menor ou vai ser maior?***
Aluna H: ***Vai ser menor. [...] Deu... minha montanha. Quer que eu faça mais para baixo?***
Professora: ***Não, não precisa.***
Aluna H: ***Ah, eu vou botar porque eu não gostei.***

Fonte: acervo pessoal

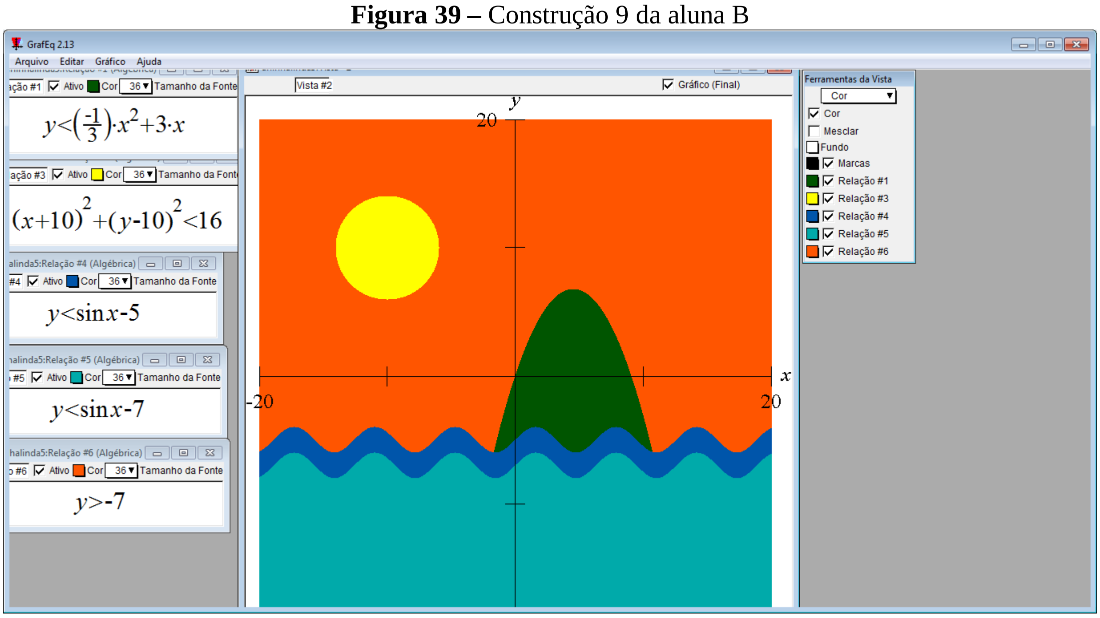
Figura 38 – Construção 9 da aluna H



Fonte: acervo pessoal

Na fala destacada no Quadro 16, vemos que a aluna H ainda não havia compreendido a diferença entre uma equação e uma inequação. Porém, notamos a sua autonomia na atividade, pois quis deixar a paisagem de acordo com seu gosto, manipulando as relações algébricas para obter o resultado gráfico desejado. Além disso, a aluna H diferenciou-se dos demais colegas pela forma que construiu as ondas, para as quais usou a relação $-y > -1\sin(x) + 3$. A aluna trabalhou com $-y$ e chegou ao objeto desejado, mostrando uma estratégia diferente daquela que foi a mais comum, como fez a aluna B (Figura 39). Para construir as ondas, ela utilizou $y < sin(x) - 5$ e $y < sin(x) - 7$. Ela realizou a translação vertical em duas unidades na função seno, ação que, no GrafEq, torna mais evidente a relação entre os registros algébrico e gráfico. Portanto, aqui destacamos mais um potencial desse *software*.

Figura 39 – Construção 9 da aluna B

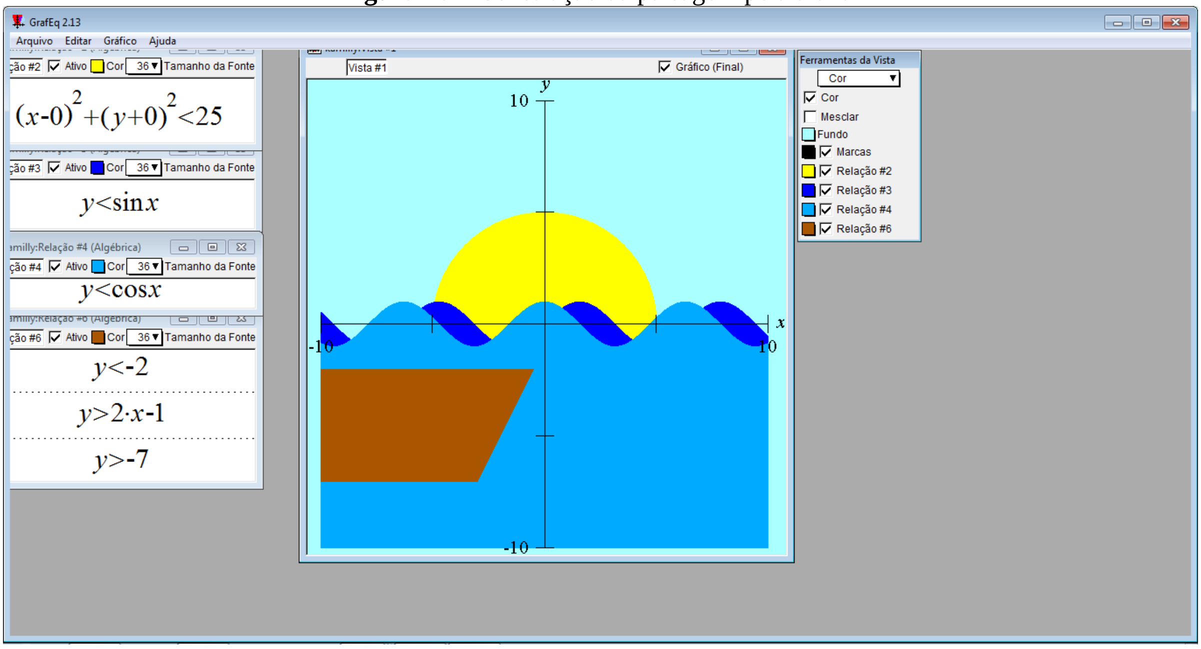


Fonte: acervo pessoal

Após construir o sol, as ondas e a montanha, a aluna B quis deixar o “céu” laranja, pois, segundo ela, queria representar o pôr-do-sol. Para isso, criou a relação $y > -7$. A aluna B verificou que a onda mais clara em azul, $y < sin(x) - 7$, estava limitada abaixo de $y = -7$ e, por isso, a região laranja deveria estar acima dessa reta constante. Assim, entendemos que os registros algébrico e gráfico do GrafEq são sistemas semióticos que acompanham a construção do conhecimento matemático que, por sua vez, é um ponto relevante da teoria de Duval (2013).

A paisagem da aluna E (Figura 40) destacou-se entre as demais porque a aluna, assim que criou o sol e as ondas, chamou a professora e disse que queria construir um barco. Ela não finalizou a sua construção, em função do tempo.

Figura 40 – Construção da paisagem pela aluna E



Fonte: acervo pessoal

Chegando a essa construção, vemos que a aluna E não apenas aprendeu matemática como fez matemática, caso que, segundo Basso e Notare (2015), deve ser o objetivo das atividades matemáticas que envolvem recursos tecnológicos. Assim, realçamos os benefícios da tecnologia digital em sala de aula.

4.12 Avaliação das atividades pelos alunos

Para que os alunos avaliassem as atividades no Laboratório de Informática, eles responderam à pergunta: *O GrafEq foi importante para a aprendizagem de inequações? Por quê?*. A seguir vemos alguns dos comentários dos participantes, tal como enviados no site.

Aluno D: *Foi divertido o manuseio com a plataforma, permitiu aprender através da tentativa e erro a construir formas diversas*.

Aluno O: *Sim, pois sendo ele uma alternativa ao ensino tradicional facilita o aprendizado e gera memória visual da matéria.*

Aluno K: *Foi, pois ele fornece uma maneira interativa/alternativa de compreender o conteúdo. Facilitando sua absorção.*
Aluna J: *O GrafEq foi muito útil na ajuda do meu aprendizado, pois foi muito prático e dinâmico. Nos da mais noção de conteúdo na pratica.*
Aluna P: *Sim, pois ele me ajudou a entender de forma lúdica e visual as funções.*
Aluna M: *Aprendi a fazer um gráfico, uma circunferência e a usar o GrafEq.*

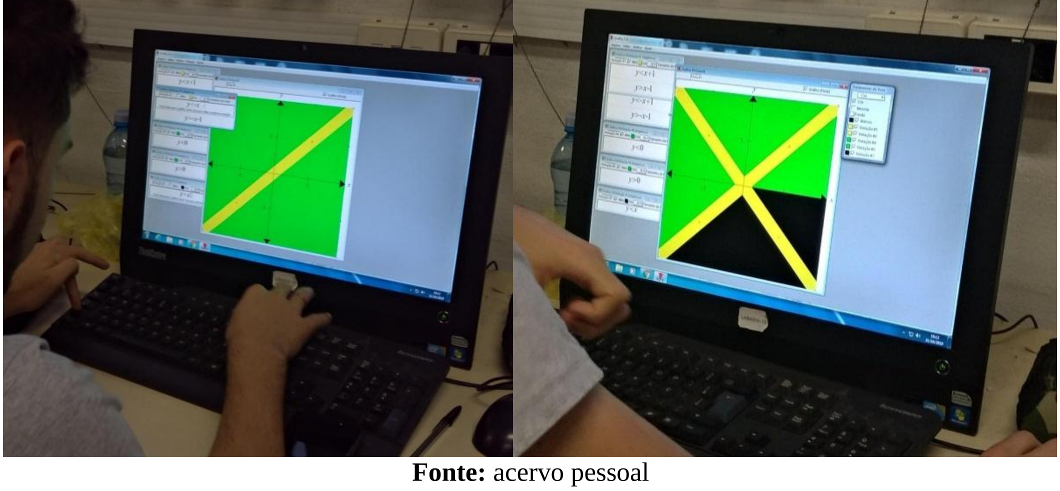
Esses comentários certificam que as atividades com a tecnologia propostas possibilitaram o entendimento do conteúdo de inequações, de algumas funções e de circunferências. Também identificamos, nessas falas, o interesse dos participantes em atividades que fogem do ambiente de sala de aula com quadro e classes e da metodologia habitual das aulas de matemática, caracterizadas por exercícios de manipulação algébrica no caderno.

Embora aqui não tenhamos analisado especificamente os alunos, de maneira geral, notamos uma evolução da turma que, no segundo encontro no Laboratório de Informática, realizou as atividades com um bom domínio das ferramentas e possibilidades no *software*, mostrando a familiaridade que os estudantes têm com a tecnologia.

4.13 Desafio das bandeiras

Inicialmente não estava prevista a análise dessa atividade. Porém, os resultados obtidos mostram as estratégias adotadas pelos participantes, seus equívocos e acertos. O aluno D construiu a bandeira da Jamaica, como vemos na Figura 41.

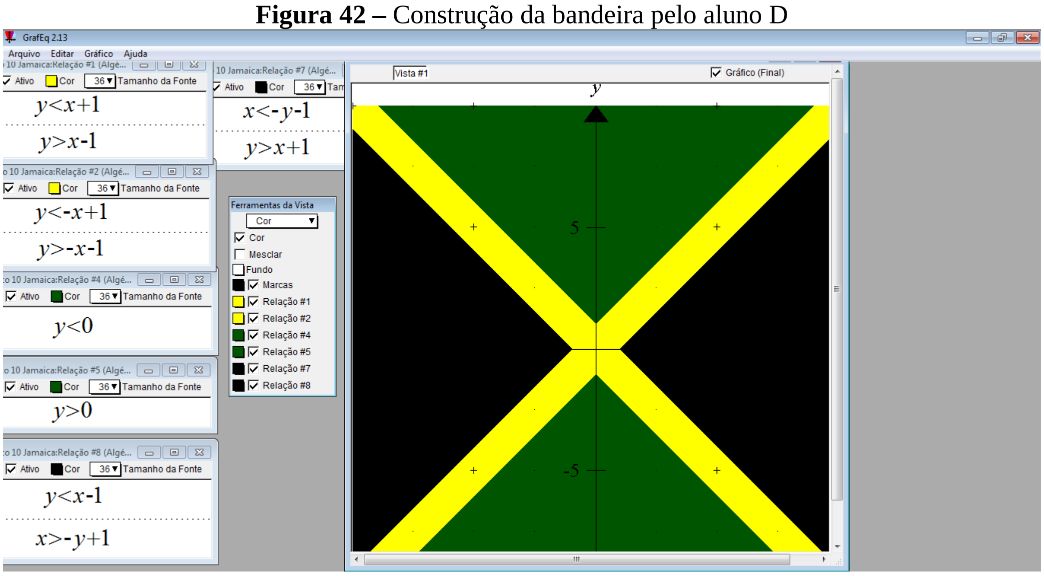
Figura 41 – Processo de construção da bandeira da Jamaica pelo aluno D



Fonte: acervo pessoal

Para as regiões em amarelo, o aluno utilizou funções afim, definindo os coeficientes angular e linear. Notamos na Figura 42 que o alunou compreendeu, sem qualquer intervenção da professora, que as relações $y < x + 1$ e $y > x + 1$ deveriam estar em uma mesma janela algébrica, visto que a região desejada tratava da intersecção dessas relações. Assim, percebemos o domínio do *software* e dos conceitos matemáticos por parte do participante, bem como a autonomia do aluno e sua evolução no decorrer das construções. Comparada à figura anterior, a Figura 42 apresenta as cores da bandeira de acordo com a bandeira da Jamaica.

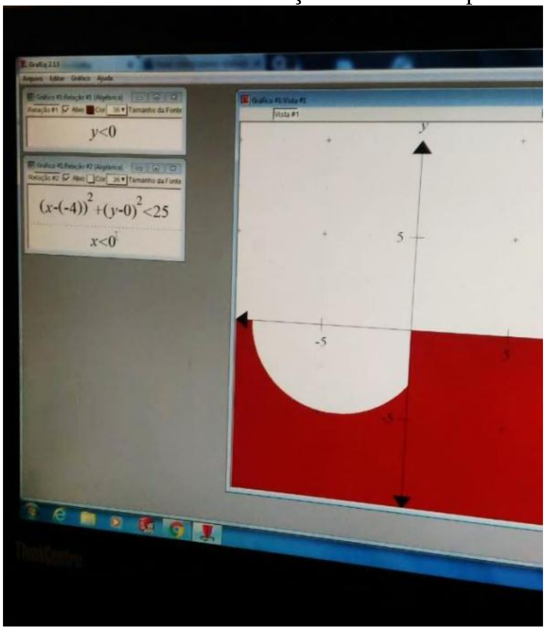
Figura 42 – Construção da bandeira pelo aluno D



Fonte: acervo pessoal

O aluno N, por sua vez, construiu a bandeira da Groelândia. Na Figura 43, vemos esse processo de construção, que também não teve interferências da professora. Percebemos que nas atividades finais os alunos já haviam se habituado ao *software* e já estavam mais independentes.

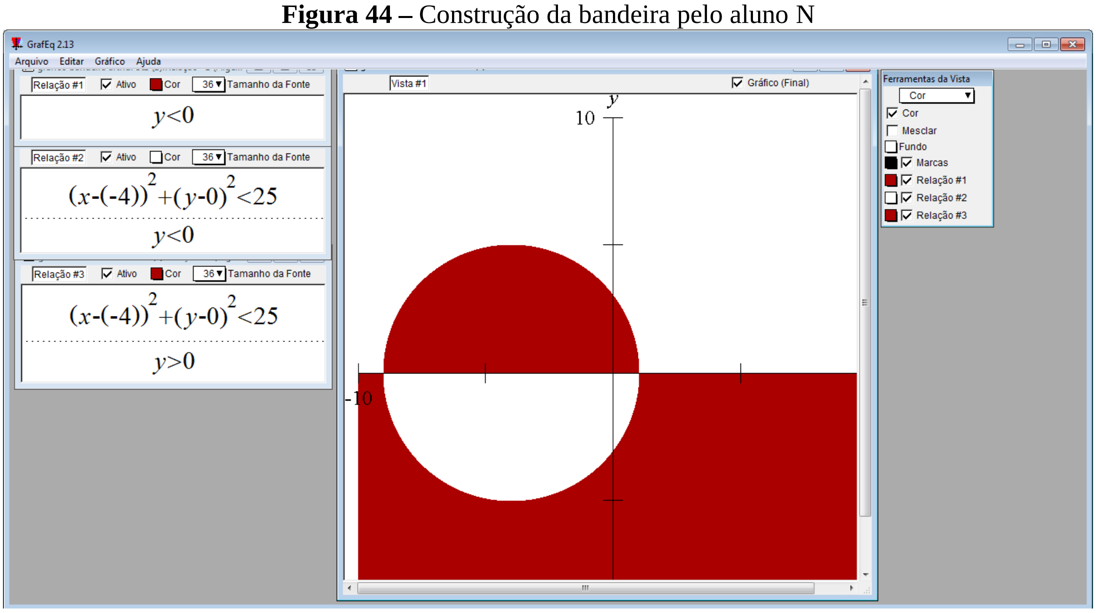
Figura 43 – Processo de construção da bandeira pelo aluno N



Fonte: acervo pessoal

Na Figura 43 observamos o que as relações $y < 0$ e $(x-(-4))^2 + (y-0)^2 < 25 \cap x < 0$ geraram no registro gráfico. Então, o aluno identificou que deveria trocar $x < 0$ por $y < 0$ (Figura 44). O aluno N organizou-se de maneira a obter corretamente a bandeira, transitando de forma espontânea entre os registros, indicando o que Duval (2013) chama de conversão. Vemos que para construir os dois semicírculos, o aluno construiu duas circunferências de mesmo centro e raio e restringiu os valores de y.

Figura 44 – Construção da bandeira pelo aluno N



Fonte: acervo pessoal

Aqui, analisamos que essa atividade no computador permitiu aos alunos desenvolverem suas habilidades matemáticas, exercício que, para Pea (1987), certifica que o computador se enquadrou como uma atividade cognitiva. De maneira geral, em comparação à primeira parte da sequência de atividades, realizada no papel, notamos que as atividades no computador aceleraram a aprendizagem de inequações, pois com as respostas instantâneas que o *software* dava para cada relação algébrica, os alunos puderam observar e explorar os objetos em estudo, em um movimento de ação e reação contínuo.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme a teoria de Duval, a atividade matemática está diretamente ligada à mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação diferentes. Portanto, elaboramos uma sequência de atividades, aplicada a uma turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Porto Alegre, que utilizou um *software* onde é possível transitar entre os registros algébrico e gráfico de uma relação. O conteúdo abordado no *software* foi inequação, assunto que normalmente é trabalhado somente na forma algébrica, tanto em sala de aula quanto nos livros didáticos, e que normalmente gera incompreensão entre os alunos.

Em relação à pergunta norteadora dessa pesquisa: **Como estudantes do Ensino Médio mobilizam diferentes registros de representação semiótica no estudo de inequações em atividades com o *software* GrafEq?,** constatamos que nas construções propostas, em geral, os alunos identificavam no site o tipo de função de cada construção, consideravam as variáveis visuais ali associadas e, então, transitavam do registro figural para o registro algébrico, obtendo de forma simultânea o registro gráfico das inequações. Então, a partir do registro gráfico, alteravam no registro algébrico aquilo que fosse necessário, modificando suas estratégias.

Optamos por iniciar a sequência de atividades no papel, com construções de diferentes regiões no plano cartesiano, para verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre inequações e para analisar, depois, a diferença de se trabalhar esse conteúdo com a tecnologia digital. Depois, os participantes continuaram as construções no Laboratório de Informática com o software GrafEq. Concluímos que a versatilidade do GrafEq favoreceu a aprendizagem de inequações, pois os participantes puderam verificar no mesmo instante o significado matemático por trás de suas construções. Ainda, esse *software* permitiu a realização de testes onde os alunos poderiam verificar suas estratégias, algo que, somente com o lápis e o papel, talvez não fosse possível. Também acreditamos que as atividades de construção como as que foram propostas puderam levar ao domínio de conceitos dos objetos em estudo, por meio da mobilização dos diferentes registros de representação semiótica. Assim, alcançamos o objetivo de nossa pesquisa.

De maneira gradativa, o grupo de participantes foi se familiarizando, criando autonomia e dominando o *software*. Nas avaliações por parte dos alunos quanto ao uso do *software*, verificamos que utilizar o GrafEq é uma boa alternativa ao ensino tradicional de Matemática. Assim, o que foi proposto está de acordo com as recomendações nos PCNEM, que orientam o uso adequado de tecnologias digitais em sala de aula.

Consideramos que essa sequência de atividades pode ser adaptada a diferentes níveis e etapas de ensino. Como docente, pretendo[19] utilizar essa sequência de atividades, que englobou diversos conteúdos do Ensino Médio, pois percebi que o elemento gráfico do GrafEq favorece a aprendizagem de diferentes ideias matemáticas.

[19] Encerramos também na primeira pessoa do singular em referência às expectativas pessoais da investigadora.

REFERÊNCIAS

BASSO, M.V.A., NOTARE, M.R. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação:** Porto Alegre. Vol. 13, n.2, 2015. Disponível em: http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61432/36324. Acesso em: 07 abr. 2019.

BELTRÃO, R. C. H. **Dificuldades dos alunos para resolver problemas com inequações**. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 5, p. 84-95, 2010.

BERLANDA, J. C., SOARES, D. da S. Possibilidades de utilização do software GrafEq na relação da matemática e arte no Ensino Médio. **Revista Novas Tecnologias na Educação:** Porto Alegre. Vol. 13, n. 2, 2015. Acesso em: 20 set. 2019.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini 7º ano.** 8ª edição. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática (Ensino Fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base**: Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em: 26 ago. 2019.

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação - uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1994. Disponível em: https://docente.ifrn.edu.br/albinonunes/disciplinas/pesquisa-em-ensino/investigacao-qualitativa. Acesso em: 25 abr. 2019.

CHAVANTE, E. PRESTRES, D. **Quadrante Matemática 1º ano.** 1ª Edição. São Paulo: Edições SM, 2016.

CHAVANTE, E. PRESTRES, D. **Quadrante Matemática 2º ano.** 1ª Edição. São Paulo: Edições SM, 2016.

CHAVANTE, E. PRESTRES, D. **Quadrante Matemática 3º ano.** 1ª Edição. São Paulo: Edições SM, 2016.

CARLOS, M. L. **Parâmetros no Geogebra na construção de circunferências: Um estudo sobre Raciocínio Generalizador com Alunos do 3° Ano do Ensino Médio**. Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/158609

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. 1ª Edição. São Paulo: Ática, 2012. Volume I

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. 1ª Edição. São Paulo: Ática, 2012. Volume II

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. 1ª Edição. São Paulo: Ática, 2012. Volume III

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem**

em Matemática: registros de representação semiótica - 8a ed. Campinas, São Paulo. Papirus, p. 11- 33. 2013.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**. Florianópolis: v.07, n.2, p.266-297, 2012.

GAUTO, N. K. **GrafEq no processo de ensino e aprendizagem de funções afins**, 2012. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/66865> Acesso em: 07 jun. 2019.

GOLDENBERG, P. Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms. In: **Education Development Center**, 2000. Disponível em: <http://mcc.edc.org/pdf/iss_tech.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2019.

GOLDENBERG, M. **A Arte de Pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRAVINA, M. A., BASSO, M. V. A. Mídias Digitais na Educação Matemática. In: BÚRIGO, E.Z., GARCIA, V.C.V. **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática**. 1. ed. Evangraf: Porto Alegre, 2012. p.14.

KÖFENDER, M. **GrafEq no ensino e aprendizagem de inequações: uma pesquisa baseada na negociação de significados**, 2014. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/101409>. Acesso em: 26 abr. 2019

LEONARDO, F. M. de, **Projeto Araribá Matemática 7º ano**. 3ª edição. São Paulo: Moderna, 2010.

MELO, J. J de. **Docência de inequações no ensino fundamental da Cidade de Indaiatuba**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:pSzh7OgcXFQJ:https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11250+&cd=1&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br>. Acesso em: 18 ago. 2019.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Orientações curriculares para o ensino médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**, volume 2. – Brasília: 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 16 ago. 2019.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2019.

NOTARE, M.R., GRAVINA, M. A. (2013). A Formação Continuada de Professores de Matemática e a Inserção de Mídias Digitais na Escola. **Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM)**, São Carlos, SP, Brasil. Disponível em: <http://htem2013.dm.ufscar.br/anais/artigoscompletos/artigocompleto_OC_T1_13_MarciaNotare_MariaAliceGravina_versao_final.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2019.

PEA, R. Cognitive technologies for mathematics education. In A. Schoenfeld (Ed.), **Cognitive Science and Mathematics Education**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, p.89-122, 1987. Disponível em: <http://web.stanford.edu/~roypea/RoyPDF%20folder/A41_Pea_87b.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2019.

REZENDE, V.; TRAVASSOS, W. B. **Diferentes representações para o conceito de inequações: uma análise de livros didáticos de matemática do ensino médio**. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 12, n. 1, p. 96-113, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n1p96>. Acesso em: 30 ago. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 - Termo de Consentimento Informado

Eu, ____, R.G. _________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____, da turma ____________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada: **Aprendizagem de inequações no Ensino Médio: uma proposta de atividade com o uso do Software GrafEq**, desenvolvida pela pesquisadora **Juliana Paim Rocha**. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por **Marcia Notare Meneghetti**, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, pelo e-mail **marcia.notare@gmail.com**.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Aprimorar a aprendizagem dos alunos a partir do software GrafEq, apresentando uma nova forma de se pensar Matemática.
- Fixar conceitos de Matemática vistos ao longo do Ensino Médio.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável pelo telefone: **(51) XXXXXXXX** ou e-mail: **ju.paim@hotmail.com**.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE 2 – Carta de Apresentação na Escola

UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Porto Alegre, 13 de agosto de 2019.

Prezado Renato Musella

Diretor da Escola Técnica Estadual Parobé

A aluna **Juliana Paim Rocha** atualmente é graduanda regularmente matriculada no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Como parte das exigências do curso, a graduanda está desenvolvendo a pesquisa intitulada: **Aprendizagem de inequações no Ensino Médio: uma proposta de atividade com o uso do *software* GrafEq** para o desenvolvimento de seu trabalho de conclusão, no qual é exigido para que possa adquirir o título de licenciada em Educação Matemática.

O trabalho de conclusão de curso produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto orientadora responsável, reiteramos nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte telefone de contato: (51) 3308.6212 (Secretaria do PPGEMat), e o seguinte e-mail: **marcia.notare@ufrgs.br.**

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

Márcia Notare

Professora do PPGEMat

APÊNDICE 3 – Material do 1º e 2º encontros

RESUMÃO DAS FUNÇÕES **NOME:**

Função Afim: $f(x) = ax + b$ com a e $b \in$ R (reais)

Construa: $f(x) \geq -3x + 6$

COEFICIENTES:

$\boldsymbol{a}$:

$\boldsymbol{b}$:

GRÁFICO:

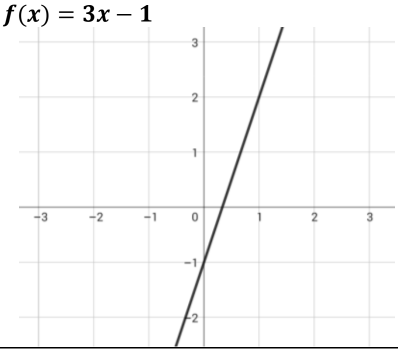
COEFICIENTE ANGULAR:

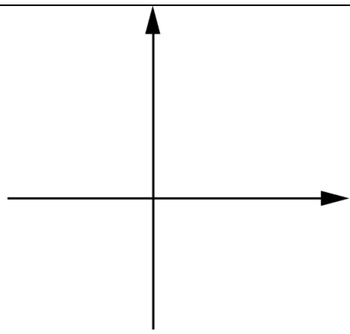
$\boldsymbol{a} =$ ________

$\boldsymbol{a > 0}$:

$\boldsymbol{a < 0}$:

Ex: $\boldsymbol{f(x) = 3x - 1}$





Função Quadrática: $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in$ R e $a \neq 0$.

Construa: $f(x) \leq x^2 + x - 6$

DELTA:

$\boldsymbol{\Delta > 0}$:

$\boldsymbol{\Delta = 0}$:

$\boldsymbol{\Delta < 0}$:

VÉRTICES:

$\boldsymbol{x_v = \frac{-b}{2a}}$

$\boldsymbol{y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$

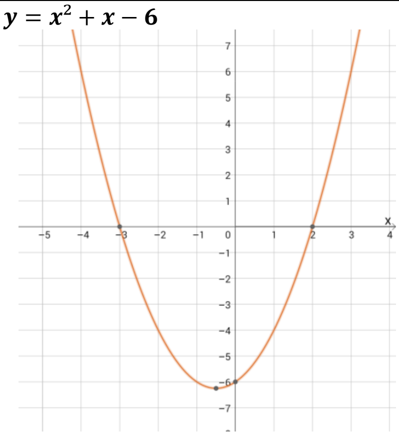
PARÂMETROS:

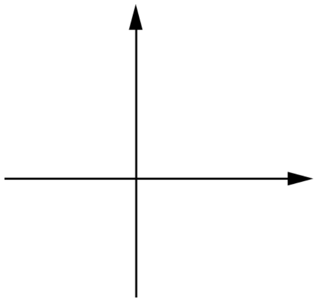
a>0:

a<0:

c:

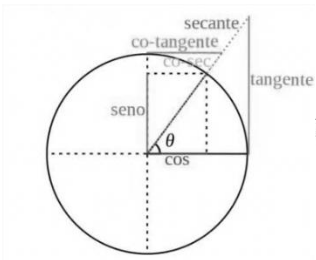
Ex: $\boldsymbol{y = x^2 + x - 6}$

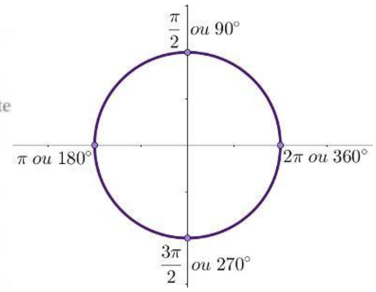




CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

sen 90°=
sen 180°=
sen 270°=
sen 360°=



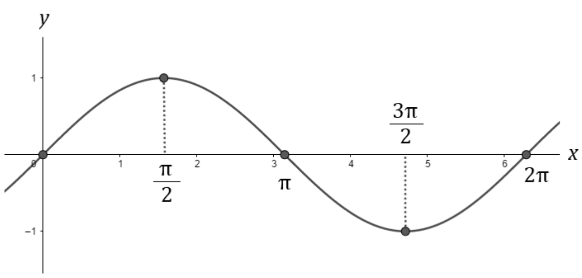


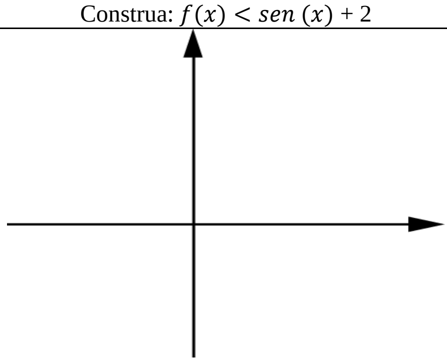
cos 90°=
cos 180°=
cos 270°=
cos 360°=

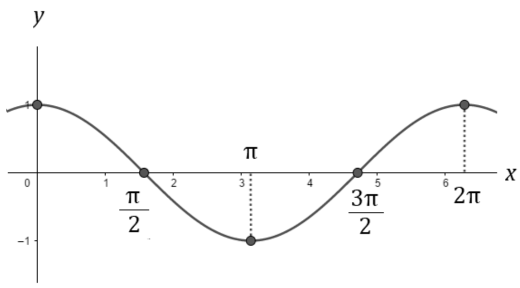
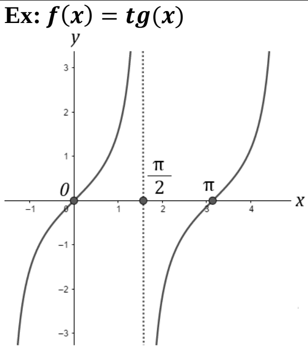
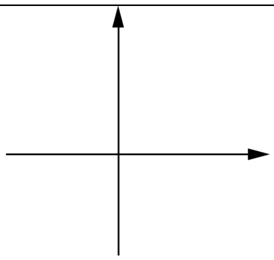
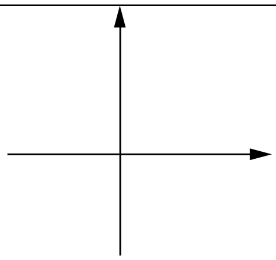
Função Seno:

Construa: $f(x) < sen\,(x) + 2$

Ex: $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$ **PERÍODO:**





<table>
<tr><th colspan="2">Função Cosseno:</th><th colspan="2">Função Tangente:</th></tr>
<tr><td colspan="2">Ex: $\boldsymbol{f(x) = cos(x)}$ PERÍODO:
</td><td colspan="2">Ex: $\boldsymbol{f(x) = tg(x)}$ PERÍODO:

tg 90°=
tg 180°=
tg 270°=
tg 360°=</td></tr>
<tr><td>Construa: $y \leq 4$ e $x \leq 2$</td><td colspan="2">Construa: $y^2 + x^2 \leq 4$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>