

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

**Formalismo para determinação da precisão de  
parâmetros cosmológicos a partir da análise  
da função de correlação angular**

Diogo Henrique Francis de Souza

Dissertação de mestrado realizada sob a supervisão do Dr. Basílio Xavier Santiago, submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física com ênfase em Astrofísica.

Porto Alegre, RS, Brasil

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

**Formalismo para determinação da precisão de  
parâmetros cosmológicos a partir da análise  
da função de correlação angular\***

Diogo Henrique Francis de Souza

Porto Alegre, RS, Brasil  
2020

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico  
(CNPq)



Dedico esse trabalho em memória de minha mãe, Maria, e de meu avô, José.



# Agradecimentos

Agradeço ao Basílio X. Santiago, primeiramente por ter aceito me supervisionar nessa área interessante e desafiadora que é a cosmologia, e também pela ajuda e confiança a mim concedidos. Ao Hugo Camacho, por sempre ter sido bastante solícito em responder as minhas dezenas de e-mails com os mais variados tipos de dúvidas. Ao Felipe Oliveira, por me apresentar o CCL. Estas duas pessoas eu pude conhecer no III Joint ICTP-Trieste/ICTP-SAIFR School on Observational Cosmology que ocorreu em SP no IFT/Unesp, e posteriormente nos reencontramos no LIneA Bootcamp do Observatório Nacional/RJ. Portanto, estendo a minha gratidão para todas as pessoas envolvidas na organização de ambos os eventos, e saliento a importância dos mesmos para continuar unindo pessoas com os mesmos interesses.

Sou eternamente grato à minha avó Adelina, por todo carinho e tempo de cuidados à mim investidos na adolescência.

Sou imensamente grato por ter uma das pessoas mais incríveis e importantes da minha vida, para minha amada Letícia, por seu amor, carinho, amizade, e todo o suporte dado ao longo dessa jornada.

Agradeço as minhas tias e tio que estiveram presentes, e se fizeram presentes, quando eu mais precisei: Elizângela, Felipe e Cirlene. Agradeço a família Braga: Mônica, Euvério e Fabíola, por todo o carinho de todos os nossos encontros em Brumadinho/MG, que sem dúvidas, as minhas energias se renovam com vocês.

Mesmo durante meu ensino médio na EEPAPG, passava minhas noites na vazia biblioteca da EMST, onde fiz o ensino fundamental, e a Riva Mendes eu agradeço pelas companhias durante os dias em que lá passei, e por ser a primeira pessoa da qual eu ouvi as palavras “Universidade Federal”, quando nem eu mesmo sabia da existência de tal universo.

Agradeço os(as) colegas da sala M207 pela boa convivência, em particular aos colegas da astronomia, Augusto e Marina.

Agradeço à UFMG/ICEEx e aos professores(as) pela graduação, e à UFRGS/IF e aos professores(as) pelo mestrado. Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos(as) os(as) funcionários(as) que contribuem para o funcionamento e o bem estar desses ambientes.

Esse trabalho não teria sido possível sem o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq.

# Resumo

Nesta dissertação analisamos o formalismo para se obter estimativas da precisão (ou barras de erro) de parâmetros cosmológicos que um dado survey fotométrico futuro tem potencial de restringir. Isso é feito por meio da função de correlação angular, a qual nos permite obter a matriz de covariância e por conseguinte a matriz de Informação de Fisher, cuja inversa possui a previsão destes erros. Utilizamos o Legacy Survey of Space and Time (LSST) como background para ilustrar algumas partes desse formalismo. Para o LSST, estudamos a função de distribuição de galáxias e a função de seleção fotométrica. Com isso, analisamos a função de correlação angular e o espectro de potência angular em termos dos parâmetros dessas funções, seus comportamentos em faixas de redshift, bem como em função de alguns parâmetros cosmológicos.

Para atingir os objetivos supracitados, inicialmente introduzimos o modelo cosmológico padrão, baseado na métrica e equações de Friedmann-Robertson-Walker, e posteriormente estudamos a formação de estruturas no Universo no regime linear das perturbações. Dessa análise decorrem naturalmente a função de crescimento, a função de transferência e o espectro de potência. Isso nos levou a aprofundar o estudo do espectro de potência bem como da função de correlação espacial de dois pontos. Posteriormente consideramos as velocidades peculiares, o que nos levou ao efeito de distorção no espaço de redshift (RSD). Abordamos esse assunto em mais detalhes do que outros trabalhos. Posteriormente realizamos algumas das mesmas análises para a contraparte angular, isto é, a função de correlação angular e o espectro de potência angular. A partir dos coeficientes do contraste de densidade no espaço de Fourier com o efeito de RSD, obtivemos ambas as grandezas, função de correlação angular e espectro de potência angular, com o RSD embutido.

Apresentamos o arcabouço estatístico no que concerne os surveys de galáxias. Para isso, começamos apresentando uma estimativa do espectro de potência e sua variância. Argumentamos que isso é um caso particular do estimador de Feldman, Kaiser & Peacock (FKP), generalizado no Apêndice desta dissertação. Apresentamos o método da Likelihood da qual decorrem naturalmente as matrizes de covariância, e portanto a matriz de Fisher, previamente citadas.

# Abstract

In this dissertation, we analyzed the formalism to obtain estimates of the precision (or error bars) of cosmological parameters that a given future photometric survey has the potential to constrain. This is done through the angular correlation function, which allows us to obtain the covariance matrix and therefore the Fisher Information matrix, whose inverse bears the predictive power of these errors. We used the Legacy Survey of Space and Time (LSST) as a background to illustrate some parts of this formalism. For LSST, we studied the galaxy distribution function and the photometric selection function. With those, we analyzed the angular correlation function and the angular power spectrum in terms of the parameters of these functions, their behavior in redshift bins as well as a function of some cosmological parameters set.

To achieve the aforementioned goals, we initially introduced the standard cosmological model, based on the metrics and equations by Friedmann-Robertson-Walker (FRW). We then studied the formation of structures in the Universe in the linear regime of perturbations. From this analysis, the growth function, the transfer function, and the power spectrum naturally follow. This lead us to a more in-depth study of the power spectrum as well as the spatial two point correlation function. Later we considered the peculiar velocities, which lead us to the effect of distortion in the redshift space (RSD). We approached this subject in unprecedented detail. Subsequently, we performed some of the same analyzes for the angular counterpart, that is, the angular correlation function and the angular power spectrum. From the density contrast coefficients in the Fourier space with the effect of RSD, we obtained both quantities, angular correlation function and angular power spectrum, with the RSD built into them.

We present the statistical framework regarding galaxies surveys. For this, we start by presenting an estimate of the power spectrum and its variance. We argue that this is a particular case of the Feldman, Kaiser & Peacock estimator (FKP) method, generalized in the Appendix of this dissertation. We present the Likelihood method from which the covariance matrices, and therefore Fisher's matrix, both previously mentioned, naturally originated.

# Conteúdo

<b>Conteúdo</b>	<b>VI</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>2</b>
1.1 Breve história da cosmologia . . . . .	2
1.2 Galaxy Surveys . . . . .	10
1.3 Dissertação: visão geral . . . . .	12
<b>2 A estrutura em larga escala do Universo</b>	<b>14</b>
2.1 Modelo de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	15
2.2 Redshift e distâncias cosmológicas . . . . .	19
2.2.1 Redshift . . . . .	19
2.2.2 Distâncias cosmológicas . . . . .	21
2.3 Formação de estruturas . . . . .	25
<b>3 Função de correlação e espectro de potência</b>	<b>36</b>
3.1 Correlação espacial de galáxias . . . . .	36
3.1.1 Hipóteses: ergodic & fair sample . . . . .	37
3.1.2 Função de correlação espacial de dois pontos . . . . .	38
3.1.3 Homogeneidade e isotropia estatística . . . . .	40
3.1.4 Espectro de potência . . . . .	41
3.2 Distorção no espaço de redshift . . . . .	45
3.3 Coordenadas no espaço de redshift . . . . .	46
3.4 Distribuição de galáxias no espaço de redshift . . . . .	48
3.5 Jacobiano do efeito Kaiser . . . . .	50
3.6 Contraste de densidade no espaço de redshift . . . . .	52
3.6.1 Bias entre galáxias e matéria escura . . . . .	56
3.7 Aproximação de observador distante . . . . .	56
3.8 Espectro de potência no espaço de redshift . . . . .	57
3.9 Função de correlação no espaço de redshift . . . . .	60

<b>4</b>	<b>Função de correlação angular e espectro de potência angular</b>	<b>64</b>
4.1	Função de correlação angular . . . . .	64
4.2	Espectro de potência angular . . . . .	67
4.3	Correlação angular no espaço de redshift . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Métodos estatísticos em cosmologia para surveys de galáxias</b>	<b>76</b>
5.1	Sinal vs Ruído . . . . .	77
5.2	Função <i>Likelihood</i> . . . . .	81
5.3	Matriz de Fisher . . . . .	85
5.3.1	Propriedades da Matriz de Fisher . . . . .	87
5.4	Matriz de Fisher & surveys de galáxias . . . . .	94
5.5	Matrizes de covariância . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Análise para o LSST</b>	<b>100</b>
6.1	Legacy Survey of Space and Time: Visão Geral . . . . .	100
6.2	Caracterização geral do método . . . . .	103
6.3	Função de Seleção fotométrica . . . . .	105
6.4	Complexidade de tempo na cosmologia . . . . .	112
6.5	Espectro de potência angular & CCL . . . . .	117
6.6	Função de correlação angular & CCL . . . . .	122
6.7	Representação da matriz de covariância . . . . .	126
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas futuras</b>	<b>130</b>
	<b>Referências</b>	<b>133</b>
	<b>Apêndice A: Estimador de Feldman, Kaiser &amp; Peacock</b>	<b>140</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Breve história da cosmologia

#### Cosmologia Antiga

O desejo por conhecer o Universo como um todo, sua origem, forma, constituintes e evolução, sempre motivou o ser humano, ao longo dos séculos, a formular modelos teóricos para o Universo, e pelo método científico buscar por evidências para as predições feitas pelos mesmos. Isso pode ser visto através de uma breve retrospectiva ao longo da história da ciência. O *geocentrismo* e o *heliocentrismo* (e.g., [42]) são uma das concepções mais antigas de modelos cosmológicos.

O geocentrismo, que tinha como principal apoiador o filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), surgiu por volta do século II, e se baseia na hipótese de que o planeta Terra é o centro do Universo, sendo que todos os demais planetas, inclusive o Sol, giram em torno dela. A descrição matemática desse modelo foi apresentada por Cláudio Ptolemeu (100-178 d.C.) em um tratado astronômico denominado por *De Almagesto*. Utilizando os conceitos de *epiciclos* e *deferentes*, Ptolomeu conseguiu descrever, com grau moderado de precisão, o movimento dos astros pela forma como inferido por um observador na Terra. Esse modelo perdurou por muito tempo (aproximadamente treze séculos), pois além de descrever, dentro de suas limitações, o Universo observável da época, também satisfazia convenientemente a ideia e as crenças teológicas associadas com a uniformidade do movimento circular (conceito associado à “perfeição”), também atribuía ao planeta Terra, e portanto ao ser humano, um lugar privilegiado, a saber, o centro de todo o Universo.

Com o passar do tempo, aumentava-se o conhecimento sobre as equações que regem os movimentos (cinemática) dos corpos. Também havia o questionamento

sobre o agente responsável por causar esses movimentos (dinâmica). Paralelamente, ocorria o aprimoramento dos instrumentos de observações, e por consequência, o melhoramento em quantidade e precisão dos dados observacionais. Com isso, tornava-se mais difícil explicar, através do modelo Ptolomaico, as novas questões que surgiram.

Dessa forma, o geocentrismo passou a ser cada vez mais contestado, e em oposição a esse modelo, por volta do século XVI, surgiu o heliocentrismo. Esse modelo tem como hipótese o Sol, ao invés da Terra, como ocupando o centro do Universo, ou mais estritamente, o centro do Sistema Solar. O precursor desse modelo foi o astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), sendo suas ideias apresentada no livro *De Revolutionibus* (As revoluções). O modelo de Copérnico, por tratar o Sol como sendo o centro do sistema, conseguia descrever o movimento dos astros de maneira muito mais simples do que o geocêntrico. Entretanto, Copérnico também utilizou os epiciclos e deferentes, e portanto o seu sistema era tão preciso quanto o de Ptolomeu.

Um dos principais críticos contra o geocentrismo foi o astrônomo e físico Galileo Galilei (1564-1642). Seus estudos sobre as manchas solares, as fases de Vênus, dos satélites de Júpiter e dentre vários outras contribuições importantes, constituíam à época fortes evidências em prol do modelo heliocêntrico copernicano. Outro astrônomo bastante importante foi o dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601). Tycho construiu vários equipamentos que o permitiram revisar vários dados astronômicos antigos obtidos por Ptolomeu, bem como obter novos dados e observar novos fenômenos, e assim aumentar a quantidade e melhorar a qualidade da precisão dos dados astronômicos que constituíam as *Tabelas Alfonsinas*.

As tabelas precisas de Tycho Brahe, em particular para o planeta Marte, permitiram verificar que havia muitas discrepâncias entre o modelo de Ptolomeu e os dados observacionais. Então, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), ao longo da sua vida, chegou nas hoje conhecidas Três Leis de Kepler, sendo, à título de exemplo, *Mysterium Cosmographicum* (Mistérios do Universo), *Epitome Astronomiae Copernicanae* (Compêndio da Astronomia copernicana) e *Harmonices Mundi* (Harmonia do Mundo) algumas de suas obras mais conhecidos, onde ele apresenta o heliocentrismo bem como as suas próprias descobertas.

Embora alguns modelos cosmológicos supracitados possam estar em mais concordância com os dados observacionais em detrimento dos demais modelos, algo que todos eles tem em comum, é o fato de buscarem descrever da melhor forma possível, e dentro das suas respectivas limitações, o movimento dos astros no céu. Porém, uma vez estabelecida a cinemática básica dos corpos celestes através das três Leis

de Kepler, o próximo passo foi tentar encontrar um agente responsável por causar esses movimentos.

A formulação matemática da dinâmica básica como a conhecemos hoje, surgiu com Isaac Newton (1643-1727). Algumas de suas obras extremamente importantes são *De Methodis Serierum et Fluxionum* (Método dos *fluxions*, a base do cálculo diferencial e integral), *Opticks* (Ótica) e *Philosophiae naturalis principia mathematica* ou simplesmente *Principia*, que é reconhecidamente um dos trabalhos científicos mais importantes já escritos. A ideia genial de Newton foi atribuir como causa dos movimentos celestes, um agente denominado por *força gravitacional*, o que culminou na origem da Teoria da Gravitação Universal, e que matematicamente escrita como

$$\mathbf{F} := G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.1)$$

onde  $G$  é denominada de constante gravitacional,  $M$  e  $m$  são as massas dos corpos celestes,  $r$  a distância entre os corpos e  $\hat{\mathbf{r}}$  o vetor unitário na direção de  $r$ . Ao combinar todas essas quantidades de acordo com o lado direito da Eq. (1.1), defini-se a quantidade  $\mathbf{F}$  denominada por força gravitacional.

Assim, as Leis de Kepler e as Leis de Newton, eram as formulações matemáticas mais precisas que se tinha na época para descrever o Universo. Portanto, restava testar esses modelos com os mais diversos tipos de observações, até que surgissem novos problemas que essas Leis não conseguissem explicar satisfatoriamente, gerando assim a necessidade de outra teoria. Uma questão em particular, e muito importante para se começar a pensar em uma alternativa à teoria da gravitação universal de Newton, foi o problema da *Precessão do periélio de Mercúrio*, e só veio a ser resolvido com a formulação da teoria da Relatividade Geral (RG) desenvolvida por Albert Einstein.

## Cosmologia Moderna

Albert Einstein (1879-1955) em seu *annus mirabilis* apresentou várias contribuições de extrema importância e que tiveram grandes impactos na visão e no desenvolvimento futuro da Física. Em particular, entre os anos de 1914-1916, Einstein apresentou a teoria da Relatividade Geral e as equações de campo<sup>1</sup> [Albert Einstein, *Sitzungsberichte der Preußische Akademie der Wissenschaften*<sup>2</sup> (Berlin), 844 (1915)]. Essa teoria é baseada no *Princípio da Equivalência* de Einstein. Esse

<sup>1</sup>Veja Eqs. (2.1) e (2.2).

<sup>2</sup>[https://einstein-annalen.mpiwg-berlin.mpg.de/related\\_texts/sitzungsberichte](https://einstein-annalen.mpiwg-berlin.mpg.de/related_texts/sitzungsberichte)



segundo<sup>3</sup> postulado da teoria da relatividade estabelece que o resultado de experimentos físicos e de qualquer natureza, independem destes serem realizados em um referencial inercial,  $K$ , imerso em um campo gravitacional uniforme, ou de serem realizados em outro referencial não inercial,  $K'$ , com aceleração igual ao campo em  $K$  e relativo a ele.

Nos anos que se sucederam à publicação do seu trabalho sobre a Relatividade Geral, Einstein publicou um trabalho sobre *Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity*, onde ele apresenta um modelo cosmológico do Universo partindo das suas próprias equações de campo da RG. Então, a partir desse período se deu início a *cosmologia moderna*, ou cosmologia relativística, (doravante simplesmente cosmologia) tal como a conhecemos hoje.

Como na época ainda não havia evidências suficientes para prová-lo do contrário, Einstein então propôs um modelo cosmológico que consiste em um Universo estático e fechado (curvatura positiva como em uma esfera). Entretanto, para que isso fosse possível a partir da RG, foi necessário a inclusão de um termo extra nas suas equações de campo, que ficou conhecido por *constante cosmológica* e denotada por  $\Lambda$ . Esse termo foi incluído para que pudesse contrabalancear o efeito de atração da gravidade, caso contrário o Universo entraria em colapso, e portanto não seria estático.

No decorrer dos anos subsequentes, juntamente com outros cientistas de extrema importância, tais como, a título de exemplo, o holandês Willem de Sitter (1872-1934), o russo Alexander Alexandrovitch Friedmann (1888-1925), o belga Georges-Henri Édouard Lemaître (1894-1966), o americano Howard Percy Robertson (1894-1979), o inglês Arthur Geoffrey Walker (1909-2001) e dentre vários(as) outros(as) contribuíram para o começo da cosmologia moderna. Assim iniciava-se o período da cosmologia moderna teórica, que sobre o alicerce da RG, pôde se desenvolver-se a níveis bastantes sofisticados de física e matemática. Veja §2.1 para uma breve introdução sobre o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker.

Dentre vários modelos cosmológicos, surgiu aquele que permitisse que o Universo pudesse se expandir ou se contrair. Se esse fosse o caso, era inevitável concluir que o Universo, por exemplo estando em expansão, e portanto com seus objetos se afastando uns dos outros bem como o próprio espaço-tempo, no passado estivessem mais próximos. A extrapolação dessa ideia para o instante em que ocorreu uma singularidade do espaço-tempo e de tudo o que nele há, deu origem ao modelo do *Big Bang*. Essa ideia de que tudo começou com um “*átomo primordial*” foi proposta primeiro por Lemaître em 1927, mas foi desenvolvida principalmente por volta de

---

<sup>3</sup>O primeiro se refere a constância da velocidade da luz no vácuo em qualquer referencial.

1940 pelo físico russo George Antonovich Gamow (1904-1968) e colaboradores.

Para estudar o Universo em seus momentos iniciais a partir dessa ideia do big bang, pode-se intuir que necessariamente precisaremos utilizar a relatividade geral juntamente com a física de partículas. Com efeito, durante os instantes iniciais, o Universo era extremamente quente e denso e seus constituintes eram partículas elementares. A partir desse estado inicial, o Universo passou a evoluir e a sua temperatura tornava-se cada vez menor à medida que esse se expandia. Isso implica em uma história térmica para o nosso cosmo, de modo que ele passou por várias fases até atingir o seu estágio atual, como mostrado na Figura 1.1.

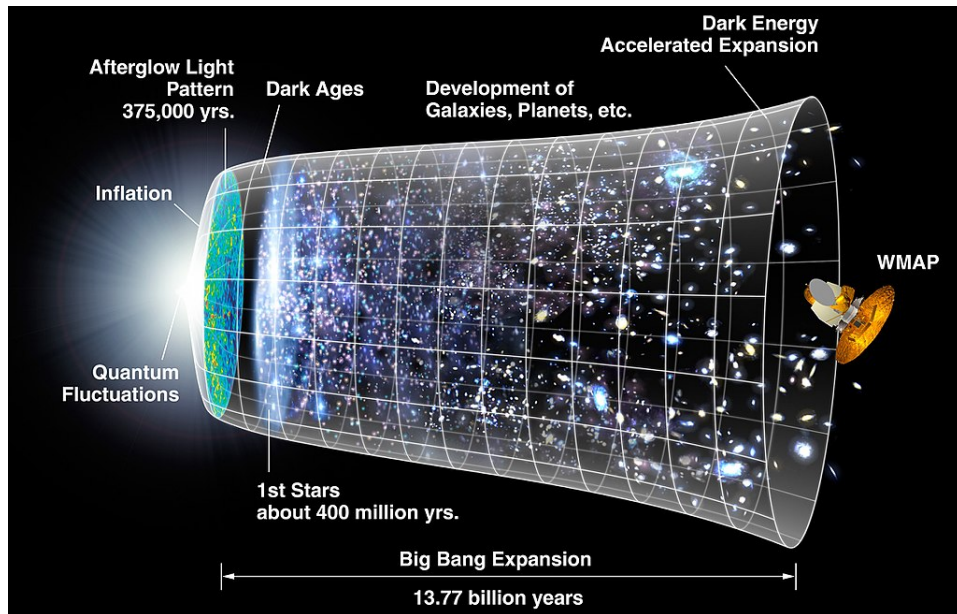


Figura 1.1: Concepção artística sobre a evolução do Universo. A passagem do *tempo* é indicado da esquerda para a direita, e a modificação do *espaço* é indicado pelas porções circulares. Após o Big Bang o Universo passou por um período de rápida expansão conhecido por período Inflacionário (isso é indicado na figura por uma curva quase vertical). Posteriormente, com a formação de estrelas e galáxias, a taxa de expansão passou a diminuir gradativamente devido à ação atrativa da gravidade (curva quase horizontal). Apenas recentemente o Universo entrou na era da expansão *acelerada* devido à energia escura, como mostrado na figura por uma curva crescente. Crédito: [NASA / WMAP Science Team](#).

Apenas como caráter informativo, citaremos mais alguns eventos marcantes da cosmologia moderna. A primeira é sobre a expansão do Universo. Evidências para isso começaram a surgir a partir de 1929 com as observações conduzidas pelo astrônomo americano Edwin Powell Hubble (1889-1953) com um telescópio localizado no Monte Wilson, Califórnia. Como descrito em seu artigo [34], Hubble efetuou a estimativa do redshift,  $z$ , para 24 galáxias, e após estimar as distâncias ele demonstrou que existe uma relação linear entre a velocidade do objeto com sua distância até

nós. Isso indica, portanto, que ao menos os objetos do Universo local ( $z \ll 1$ ) estão se afastando de nós (confira a Eq. (2.34)) com velocidade de recessão proporcional à distância. A comprovação da expansão acelerada do Universo veio posteriormente através de vários projetos envolvendo grandes colaborações, tal como o estudo de Supernovas do Tipo Ia por Riess et al. (1998) [50], Perlmutter et. al (1999) [48] e mais recentemente por Abbott et al. (2019) [1] da colaboração DES (Dark Energy Survey).

Em 1948, Gamow, Ralph Asher Alpher (1921-2007) e Robert Herman (1922-1997) fizeram uma previsão, a partir do modelo do Big Bang, de que o Universo deveria ser preenchido por uma radiação eletromagnética (denominada por *Cosmic Microwave Background*, CMB) praticamente uniforme, fitando o espectro de um corpo negro com uma temperatura de aproximadamente 3K (mais precisamente 2.725K). A explicação simplificada é que, quando o Universo era muito jovem e sua temperatura altíssima,  $T \gg 10^4\text{K}$ , a matéria bariônica era ionizada e portanto formava essencialmente um plasma de núcleos atômicos de elementos leves (principalmente H e He) com elétrons fortemente acoplados aos fótons, tornando o Universo opaco, característica de um *corpo negro*. Com o passar do tempo, a temperatura do Universo diminuía gradativamente, e quando atingiu  $T \sim 3000\text{K}$ , os fótons já não tinham energia suficiente para manter, em média, a matéria ionizada. Portanto, os elementos se juntaram para formar átomos neutros. Esse período em que o Universo deixou de ser opaco para se tornar transparente é conhecido por *Recombinação*. Dessa forma, a CMB nada mais é do que o resquício dessa radiação eletromagnética desde o começo dos tempos, mas agora, com uma temperatura muitíssimo menor estimada em  $\sim 3\text{K}$ .

A primeira confirmação (acidental) da existência da CMB ocorreu em 1964 pelos radioastrônomos Arno Allan Penzias (1933-) e Robert Woodrow Wilson (1936-) do Bells Labs. Por isso, essa descoberta constituiu uma forte evidência pro o modelo do Big Bang. Após essas descobertas preliminares, houve investimentos tecnológicos para investigar em mais detalhes a CMB. Em 1989 a NASA<sup>4</sup> lançou o satélite denominado Cosmic Background Explorer<sup>5</sup> (COBE) (-1992). Posteriormente um mapeamento mais preciso da distribuição de temperatura da CMB foi obtida pelo satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe<sup>6</sup> (WMAP) (2001-2008). Na Figura 1.2 é mostrado um gráfico da distribuição de temperatura obtido pelo WMAP.

O COBE e o WMAP foram apenas dois exemplos de muitas outras investidas

---

<sup>4</sup><https://www.nasa.gov>

<sup>5</sup><https://science.nasa.gov/missions/cobe>

<sup>6</sup><https://map.gsfc.nasa.gov>

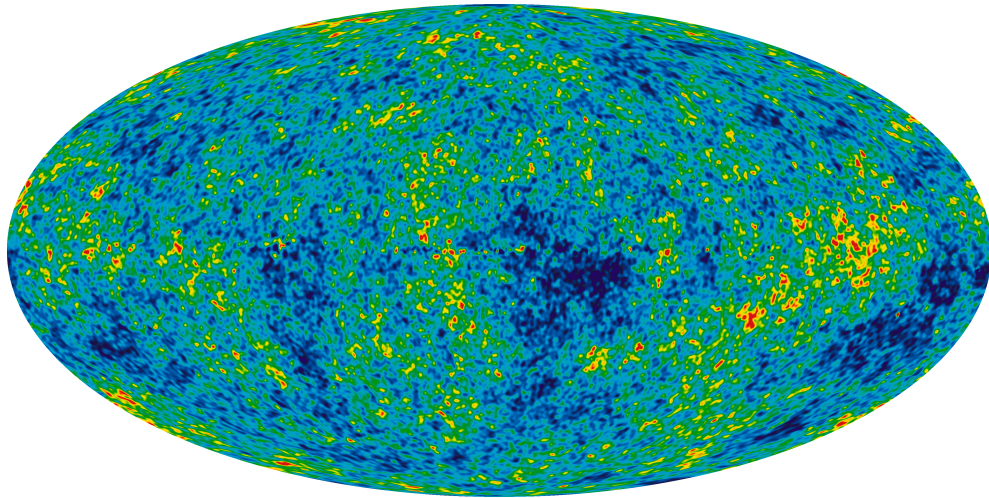


Figura 1.2: Mapa de temperatura da CMB obtido pelo satélite WMAP. As regiões mais azuis e mais vermelhas representam, respectivamente, regiões mais frias e mais quentes do que a média. Tais flutuações de temperaturas em relação à média são da ordem de  $\pm 200 \mu\text{K}$ . Crédito: [NASA / WMAP Science Team](#).

tecnológicas. A partir daí muitos outros vieram, tal como o satélite Planck<sup>7</sup> (2009-2014) da European Space Agency<sup>8</sup> (ESA). O Planck obteve medidas ainda mais precisas do que o seus predecessores COBE e WMAP. Veja, *e.g.*, [4] e [5].

### O modelo $\Lambda\text{CDM}$

Para finalizar essa breve visão geral sobre a cosmologia moderna, é imprescindível mencionar sobre as duas componentes mais misteriosas do Universo, a saber: *matéria escura* e *energia escura*. A ideia da matéria escura, assim denominada por não interagir com a radiação eletromagnética, foi concebida pela primeira vez pelo astrônomo suíço Fritz Zwicky (1898-1974) em 1937 [68]. Uma forte evidência para a matéria escura veio a partir de 1980 através dos estudos das curvas de rotação (veja Figura 1.3) das galáxias realizado por Vera Cooper Rubin<sup>9</sup> (1928-2016) e colaboradores (Veja, *e.g.*, Rubin; 1979 [51], Rubin and Ford; 1969 [52] e Rubin, Forde and Thonnard; 1979 [53]).

Todas as descobertas observacionais supracitadas (e dentre várias outras), fornecem hoje a base para o sustento de um dos modelos cosmológico que melhor descreve o nosso Universo. Tal modelo denomina-se por  $\Lambda\text{CDM}$  (*Lambda-Cold Dark Matter*). Vale ressaltar que energia escura e matéria escura são nomes genéricos dados a uma

<sup>7</sup><https://sci.esa.int/web/planck>

<sup>8</sup><https://www.esa.int>

<sup>9</sup>Vale ressaltar que “Vera C. Rubin” é o nome dado ao observatório (*Rubin Observatory*) onde se hospeda o Legacy Survey of Space and Time. Confira em <https://www.lsst.org/science>.

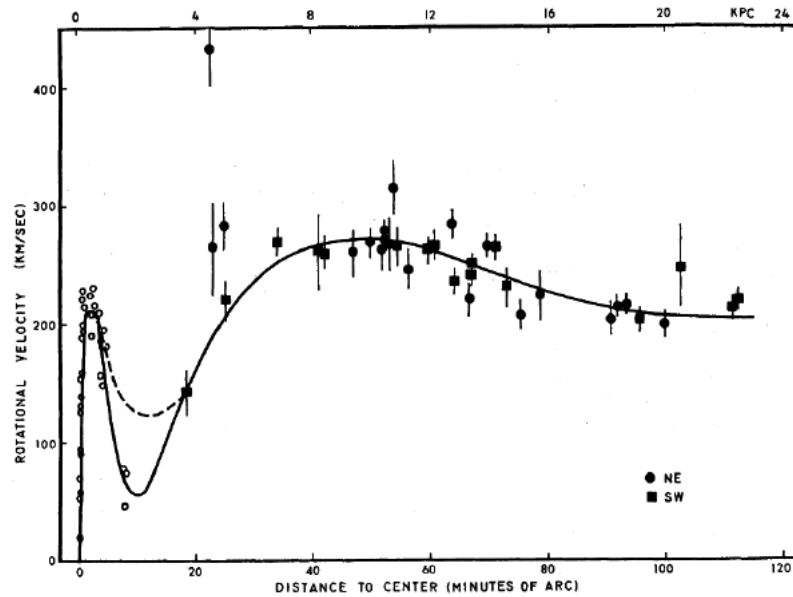


Figura 1.3: Curva (velocidade orbital  $v$ ) de rotação para estrelas OB em função do raio na galáxia M31. A força centrípeta, de acordo com a teoria da gravitação newtoniana, implica que a velocidade  $v$  em função da distância  $r$  de um corpo de massa  $m$ , ao gravitar em torno de outro corpo com massa  $M \gg m$ , seja dada por  $v = \sqrt{GM/r}$ . Como a massa da galáxia cresce proporcional ao seu volume (assumindo densidade constante por simplicidade), temos,  $M(r) \propto r^3 \Rightarrow v(r) \propto r$ , como pode ser visto pela reta quase vertical próximo à origem. Porém, para  $r > R$ , sendo  $R$  o raio da galáxia, é de se esperar  $v \propto r^{-1/2}$ . Contudo, a curva mostrada, nas regiões mais externas, não só de M31, mas de outras galáxias espirais, decai mais lentamente do que esse comportamento Kepleriano previsto. Dessa forma, somos impelidos a postular a existência de uma *matéria escura* que explique essa (e várias outras) curva(s) de rotação. Fonte da imagem: Rubin and Ford; 1969 [52].

família de modelos que pretendem explicar a aceleração do Universo e a massa não bariônica presente nas galáxias, respectivamente. Assim, o  $\Lambda$  que aparece nesses modelos se refere à mesma constante cosmológica proposta por Einstein, mas essa é meramente uma dentre várias possibilidades para explicar a energia escura. Temos, *e.g.*, gravidade modificada -teorias  $f(\mathcal{R})$ -, quintessência e etc são outros candidatos à energia escura. Da mesma forma, a matéria escura fria (cold dark matter) é um dentre vários outros candidatos *e.g.*, hot dark matter (HDM), warm dark matter (WDM), Massive Compact Halo Objects (MACHOS), Weakly interacting massive particles (WIMPs).

Como explicado em Aghanim et al. [5] da colaboração Planck, o modelo  $\Lambda$ CDM é determinado por no mínimo 6 parâmetros, sendo portanto os outros parâmetros derivados a partir destes. A fenomenologia do modelo  $\Lambda$ CDM têm permitido explicar com sucesso grande parte da história do nosso Universo, em escala de tempo cósmico



(10 Gyr) e de espaço (de  $\sim$ Mpc a escalas de Hubble). De acordo com a §3 de [5], esse modelo repousa sobre 8 principais premissas, a partir das quais se deriva a predição para grande quantidades de resultados que são observados pelo satélite e demais levantamentos astronômicos.

## 1.2 Galaxy Surveys

Na seção anterior mencionamos alguns satélites que, a partir da análise estatística das flutuações de temperatura da radiação cósmica de fundo, puderam estimar os parâmetros cosmológicos para selecionar o melhor modelo que descreve o nosso Universo. Entretanto, a CMB não é a única fonte da qual podemos extrair informações cosmológicas. Muito da tecnologia investida é também direcionada ao estudo da distribuição de galáxias.

Para acessar a informação disponível nas galáxias, imediatamente intuimos que o meio para isso é captar a luz que delas foi emitida. Existem basicamente dois métodos para se analisar a luz de uma galáxias: espectroscopia e fotometria (veja §6.3). Em essência, a espectroscopia é o método que consiste de estudar o espectro eletromagnético da luz da fonte (passando-a, *e.g.*, por um prisma). Com esse método, embora se possa obter medidas precisas de redshift, o número de objetos que compõem a amostra, dependendo dos propósitos, é pequeno. Se desejamos analisar estatisticamente a distribuição de galáxias e suas propriedades em grandes escalas, devemos amostrar o maior número possível de objetos. Isso pode ser alcançado lançando mão da fotometria. Em essência, a fotometria consiste em estudar de forma aproximada a distribuição espectral de energia (SED: *spectral energy distribution*) da luz recebida (*e.g.*, passando a luz por filtros em diferentes bandas). Dessa forma é possível estimar o redshift para uma grande quantidade de galáxias em um tempo razoável de exposição do telescópio, mas o preço que se paga é que o erro (erro de foto-z) associado ao redshift será maior. Existem maneiras refinadas (que fogem do escopo da dissertação) de modelar esse erro, *e.g.*, através de uma gaussiana truncada para *blueshift* (veja §6.3).

Para citar alguns galaxy surveys, temos o Two-degree-Field Galaxy redshift Survey<sup>10</sup> (2dFGRS) operado de 1997 à 2002 e conduzido pela Anglo-Australian Observatory (AAO). Durante seus 5 anos de operação, esse survey espectroscópico obteve medidas de redshift ( $z \lesssim 0.2$ ) para aproximadamente 250000 galáxias (*e.g.*, [17]). Alguns dos objetivos desse survey foram: (i) obter o espectro de potência  $P(k)$  (veja

---

<sup>10</sup><http://www.2dfgrs.net>

§3.1.4) das galáxias para escalas  $\sim 100$  Mpc. (ii) Medidas do parâmetro  $\beta = \beta(\Omega, b)$  onde  $\Omega$  e  $b$  são os parâmetros de densidade da matéria e de viés (bias), respectivamente. Esse parâmetro,  $\beta$ , quantifica a intensidade do efeito de redshift-space distortion provocado pelas velocidades peculiares (veja §3.2). Para mais detalhes dos objetivos e resultados do 2dFGRS confira, *e.g.*, [17].

Um outro galaxy survey espectroscópico muito importante é o Sloan Digital Sky Survey<sup>11</sup> (SDSS). Esse survey iniciou suas operações com a sua primeira geração, o SDSS-I (2000-2005), mas a partir daí outras gerações vieram: SDSS-II, SDSS-III, e SDSS-IV com um data release final para 2021. Porém, a nova geração SDSS-V, com um cronograma de 2020 a 2025, já está se desenvolvendo e tem a pretensão, por exemplo, de ampliar e aprofundar os nossos conhecimentos sobre a Via Láctea por meio de refinadas análises dos elementos químicos, da estrutura interna das estrelas, da origem dos planetas bem como manter o acompanhamento das atividades do buraco negro no centro da galáxia. Veja, *e.g.*, [39]. Cada geração do SDSS deu origem a projetos muito importantes, alguns dos quais: Supernova do SDSS-I/II, Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) do SDSS-III, Mapping Nearby Galaxies at APO (MaNGA) e o extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS) sendo ambos do SDS-IV.

Em contrapartida a estes dois surveys espectroscópicos supracitados, 2dFGRS e SDSS, temos o Dark Energy Survey<sup>12</sup> (DES; [27]), que se trata de um levantamento fotométrico. O telescópio Blanco do projeto DES, localizado no Cerro Tololo International Observatory no Chile, operou de 2013 a 2019 cobrindo um intervalo em redshift  $0.4 < z < 1.4$ . Um dos principais objetivos do projeto era estudar a energia escura, mas a grande quantidade de dados permitiu realizar outros tipos de ciências. Perceba que o limite superior em redshift do DES é cerca de 7 vezes o limite superior do 2dFGRS.

Por fim, citamos o Vera C. Rubin Observatory Legacy Survey of Space and Time<sup>13</sup> (LSST), localizado no Pico El Peñón do Cerro Pachón ao norte dos Andes do Chile. O LSST está previsto para entrar em operação em 2022, e a partir daí conduzirá observações por um período de dez anos. O LSST pretende observar fontes de até redshift 6 [2], aproximadamente 4.286 vezes maior que o limite superior do redshift do DES. Mais detalhes sobre o LSST são discutidos no capítulo 6.

---

<sup>11</sup><https://www.sdss.org>

<sup>12</sup><https://www.darkenergysurvey.org>

<sup>13</sup><https://www.lsst.org/about>

### 1.3 Dissertação: visão geral

No capítulo 2 apresentamos brevemente o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que descreve Universos que satisfazem o princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia. Apresentamos também algumas definições de distâncias cosmológicas, com o intuito de introduzir algumas terminologias recorrentes em cosmologia. Em seguida, sob certas premissas simplificadoras, apresentamos a teoria linear da perturbação. Essa abordagem permite que possamos descrever a formação de estruturas em larga escala do Universo tomando pequenas perturbações a partir do modelo de FRW.

A partir do capítulo 3 iniciamos uma descrição mais robusta de quantidades importantes em cosmologia, tais como a função de correlação de dois pontos e o espectro de potência. Algumas considerações advindas de efeitos observacionais também devem ser incluídas nessas quantidades, tal como a distorção no espaço de redshift.

No capítulo 4 apresentamos a contraparte angular do capítulo 3, isto é, a função de correlação angular e o espectro de potência angular. Um conceito importante que aparece é o da função de seleção. Os parâmetros envolvidos nessa função determinam a forma como o *survey* seleciona seus traçadores, isto é, os objetos no céu que servem como meio de traçarmos a distribuição de matéria no Universo.

O capítulo 5 apresenta alguns métodos estatísticos que são empregados para efetivamente extrairmos informações cosmológicas das grandezas definidas nos capítulos anteriores. Esse é um tema que por si só depende da finalidade da pesquisa que se esteja conduzindo. Portanto, embora alguns conceitos sejam gerais, não pretendemos esgotar o assunto. Ademais, expomos os conceitos que nos servirão para o capítulo final.

No capítulo 6 apresentamos os nossos resultados obtidos. Começamos dando uma visão geral sobre o LSST. Em seguida, apresentamos o método geral para se obter estimativas dos erros de um conjunto de parâmetros cosmológicos a partir da função de correlação angular. Esse método é aplicável não só ao LSST, e sim, de modo geral, para qualquer levantamento fotométrico. A implementação numérica da parte teórica introduz complicações que devem ser solucionadas com técnicas especiais. Por isso, discutimos alguns dos principais problemas que aparecem naturalmente e o que fizemos para tentar contornar.

Por fim, no capítulo 7, fazemos a conclusão. Com o conhecimento aprendido ao longo do projeto de mestrado, projetamos algumas perspectivas futuras. Pretende-se dar prosseguimento à pesquisa, com aprofundamento teórico e uma familiarização



mais robusta dos métodos e técnicas numéricas.

## Capítulo 2

# A estrutura em larga escala do Universo

Um dos fundamentos teóricos da cosmologia moderna é a teoria da Relatividade Geral (RG) formulada por Albert Einstein em 1915. Essa teoria estabelece uma íntima ligação entre matéria e as propriedades do espaço-tempo, e atribui a existência da gravidade como sendo uma consequência da curvatura desse espaço-tempo. A partir das equações de campo de Einstein é possível deduzir modelos que descrevem a cinemática do Universo bem como os constituintes responsáveis pela dinâmica.

Neste capítulo fazemos uma breve revisão dos conceitos básicos da cosmologia, as equações e as principais componentes da matéria. O ponto de partida é a hipótese de homogeneidade e isotropia do Universo em grandes escalas. A partir daí, para analisar a formação de estrutura no Universo, será necessário tomar pequenas perturbações em torno das grandezas inicialmente assumidas uniformes. Isso faz com que surja a necessidade de quantificar a intensidade dessas perturbações (a partir do capítulo 3), de modo que possamos analisar o impacto delas na formação da estrutura em larga escala do Universo. E então, por meio de análises estatísticas, comparar as previsões para o nosso Universo observado através de grandes levantamentos astronômicos.

## 2.1 Modelo de Friedmann-Robertson-Walker

As equações de campo de Einstein descrevem a relação entre a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria e são dadas por [40]

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde as quantidades  $G_{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $R$  e  $g_{\mu\nu}$  são o *tensor de Einstein*, *tensor de Ricci*, *escalar de Ricci* e o *tensor métrico*, respectivamente. O lado esquerdo da Eq. (2.1), portanto, representa a descrição da curvatura do espaço-tempo.

No lado direito da Eq. (2.1) temos a constante de proporcionalidade  $\kappa$  que é determinada para recuperar o limite Newtoniano<sup>1</sup>, e portanto é dada por

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (2.3)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal de Newton e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Por fim, temos o *tensor de energia-momento*,  $T_{\mu\nu}$ , que descreve a distribuição da matéria pelo Universo.

Um ponto no sistema de coordenadas do espaço-tempo é definido pelo 4-vetor posição dado por  $X^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (t, x, \theta, \phi)$ . Dessa forma, a maneira como se medem distâncias no espaço-tempo entre dois pontos  $X^\mu$  e  $X^\nu$  é determinada pelo *intervalo invariante*,  $ds^2$ , e esse depende das componentes do tensor métrico da seguinte maneira

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu, \quad (2.4)$$

onde o lado direito acima, por envolver índices repetidos (ditos também mudos), envolve a soma sobre as 16 possíveis combinações de  $\mu$  e  $\nu$ . Um dos modelos cosmológicos mais básicos parte da premissa de que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas (maiores do que 100 Mpc). Tal modelo denomina-se modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e é dado pelo seguinte tensor

---

<sup>1</sup>A forma local da equação de Newton é dado pela equação de Poisson:  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ .

métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)S_k^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2S_k^2(x)\sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Usando a Eq. (2.5) na Eq. (2.4), temos que o intervalo invariante (ou métrica) de FRW é dada por

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t) [dx^2 + S_k^2(x) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.6)$$

onde  $a(t)$  é denominado *fator de escala* e descreve a cinemática do Universo, permitindo que ele se contraia ou se expanda.  $S_k(x)$  é uma função da coordenada  $x$  e da geometria espacial  $k$  e é dada por

$$S_k(x) = \begin{cases} \sinh x & \text{se } k = -1, \\ x & \text{se } k = 0, \\ \sin x & \text{se } k = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

A constante de curvatura  $k$  pode assumir um dos três valores  $-1$ ,  $0$  ou  $+1$ , e nos referimos a esses casos dizendo que o Universo é *aberto*, *plano* ou *fechado*, respectivamente.

O modelo de FRW tem como premissa fundamental o *princípio cosmológico*, segundo o qual o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Por Universo homogêneo e isotrópico entende-se não só a distribuição de matéria, mas também a própria estrutura do espaço-tempo, pois essas duas grandezas, matéria e espaço-tempo, estão interligadas pelas equações de Einstein.

É possível mostrar que as componentes do tensor de Einstein são dadas por

$$G_{00} = 3 \frac{\dot{a}^2 + c^2k}{a^2}, \quad (2.8)$$

$$G_{ii} = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + c^2k}{a^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Por outro lado, partindo da premissa de homogeneidade e isotropia é possível mostrar que o tensor energia-momento de um Universo compatível com essas carac-

terísticas deve ser descrito por um fluido perfeito, logo

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade de matéria e  $p$  (positiva ou negativa) é a pressão. A homogeneidade implica que  $\rho$  e  $p$  devem ser funções *independentes* da posição espacial, e portanto dependem somente do *tempo cósmico*  $t$ . Por outro lado, a isotropia implica que o 4-vetor velocidade  $u_\mu$  deva ter a componente temporal não nula ( $u_0 = 1$ ) e todas as componentes espaciais devem ser nulas ( $u_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), caso contrário esse fluido teria uma direção preferencial, contrariando o princípio cosmológico. Portanto, no sistema de coordenadas comóveis, o tensor energia-momento é diagonal e dado por

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho c^2, p, p, p). \quad (2.11)$$

Dessa forma, combinando as componentes do tensor de Einstein dadas pelas Eqs. (2.8) e (2.9) com as componentes do tensor energia-momento dada pela Eq. (2.11) temos a *equação de Friedmann* e a *equação da aceleração*, respectivamente

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p/c^2), \quad (2.13)$$

onde  $H := \dot{a}/a$  é o *parâmetro de Hubble*.

Vale salientar que a densidade de matéria total  $\rho = \sum_i \rho_i$  é a contribuição de todas as componentes existentes no Universo.

Por meio da *conservação da energia* aplicada ao tensor energia-momento, podemos obter uma relação entre as propriedades do fluido,  $\rho$  e  $p$ , com o fator de escala  $a$ , dado por

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p/c^2). \quad (2.14)$$

A relação entre a densidade e a pressão do fluido é conhecida como *equação de estado* dada por

$$p_i = w\rho_i c^2 \quad \Rightarrow \quad \rho_i = \rho_{i,0} a^{-3(1+w)}, \quad (2.15)$$

onde  $w$  é uma constante e possui valores diferentes caracterizando cada componente

do fluido. O cenário mais simples é aquele que considera que as componentes do fluido podem ser subdivididas, de modo geral, em três categorias

Matéria	$w = 0$	$\Rightarrow$	$\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}$
Radiação	$w = 1/3$	$\Rightarrow$	$\rho_r = \rho_{r,0}a^{-4}$
Energia de Vácuo	$w = -1$	$\Rightarrow$	$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}$

Avaliando a equação de Friedmann (2.12) para o tempo presente,  $t = t_0$ , temos que  $k = 8\pi G/3 [\rho_0 - 3H_0^2/(8\pi G)]$  onde  $H_0 := H(t_0)$ ,  $\rho_0 := \rho(t_0)$  e  $a(t_0) = 1$ . Como podemos observar, o que determina se o Universo é plano, fechado ou aberto é o valor de  $\rho_0$ . Dessa forma, é natural definir uma *densidade crítica*,  $\rho_{cr}$ , que delimita esses três casos

$$\rho_{cr} := \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.16)$$

Portanto, tomando a razão entre  $\rho_0$  e  $\rho_{cr}$  teremos uma forma bastante útil, e livre de unidades, de quantificar a contribuição de cada componente do fluido do Universo. Esse é o denominado *parâmetro de densidade* e é definido por  $\Omega_0 := \frac{\rho_0}{\rho_{cr}}$ . Porém, é claro que podemos estender esse conceito para cada uma das componentes do fluido, e portanto, teremos o seguinte:

$$\Omega_m := \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{cr}}, \quad \Omega_r := \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{cr}}, \quad \Omega_\Lambda := \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{cr}}. \quad (2.17)$$

Portanto, a equação de Friedmann pode ser reescrita na sua forma mais comum, dada por

$$H^2(a) = H_0^2 [\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda], \quad (2.18)$$

onde definimos o parâmetro  $\Omega_k$  que satisfaz a seguinte equação de restrição

$$\Omega_k = 1 - (\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda). \quad (2.19)$$

A partir da equação de Friedmann e da equação de aceleração é possível estudar vários cenários possíveis para a evolução do Universo, bastando para isso atribuir diversos valores, restritos à Eq. (2.19), para os parâmetros de densidade (2.17). Tais cenários podem variar de modelos que consideram Universos com apenas uma única componente a modelos com múltiplas componentes. Isso resulta, por exemplo, em

Universos fechados, abertos, planos, com ou sem Big Bang, que se expandam para sempre ou os que atingem um fator de escala máximo e depois entram em colapso. Existem várias possibilidades teóricas interessantes. Em contrapartida, na prática, por meio de grandes levantamentos astronômicos, o que interessa é obter estimativas sobre essas grandezas para determinar as propriedades do nosso Universo, e assim restringir o modelo que melhor o descreve.

## 2.2 Redshift e distâncias cosmológicas

O fator de escala presente na métrica de FRW é uma forma de quantificar a cinemática do espaço-tempo, em particular, a expansão acelerada do Universo. A primeira evidência observacional dessa expansão do Universo foi apresentada por Edwin Hubble em 1929 [34] e posteriormente largamente evidenciada por outras observações, por exemplo, através do estudo de Supernovas do Tipo Ia (SNe Ia) por A. G. Riess et al. em 1998 [50], S. Perlmutter et al. em 1999 [48] e por T. M. C. Abbott et al. em 2019 [1] pela colaboração DES (Dark Energy Survey).

### 2.2.1 Redshift

A grande maioria das informações em que estamos interessados está contida na luz que recebemos hoje e foi emitida por fontes distantes em um tempo passado. Em particular, se o Universo está em expansão, tal como se depreende da Lei de Hubble, então isso deve se manifestar de alguma forma na radiação eletromagnética. Com efeito, o que se observa é que o comprimento de luz da onda emitida ( $\lambda_e$ ) pela fonte é diferente do comprimento de onda da luz observado ( $\lambda_o$ ) por nós. Devido a expansão do Universo, temos que  $\lambda_o > \lambda_e$ . O *redshift* é uma forma de quantificar o deslocamento  $\lambda_e \rightarrow \lambda_o$ . Ele é definido como

$$z := \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}. \quad (2.20)$$

Para relacionar o redshift com o fator de escala começamos considerando a trajetória de um feixe de luz, que no espaço-tempo é uma linha geodésica nula. Portanto, a Eq. (2.6) se reduz a

$$c dt = a(t) dx \quad \Rightarrow \quad \frac{c dt}{a(t)} = dx. \quad (2.21)$$

O lado esquerdo da Eq. (2.21) é uma função do tempo e em contrapartida, o lado

direito é independente do tempo, pois em um Universo homogêneo e isotrópico a velocidade dos objetos relativa a um observador comóvel à expansão (denominada de *velocidade peculiar* veja, §2.3) é nula.

Vamos considerar que uma fonte distante (*e.g.*, uma galáxia) está emitindo radiação eletromagnética com comprimento de onda  $\lambda_e$  como medido por um observador localizado nessa fonte. Fixemos nossa atenção em uma crista dessa radiação emitida em um instante  $t_e$ , e posteriormente observada por nós em um instante  $t_o$ . Portanto, integrando a Eq. (2.21) temos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{x_e}^{x_o} dx. \quad (2.22)$$

Em seguida, consideremos a próxima crista imediatamente após a primeira. Dessa forma, em relação ao observador na fonte, a crista é emitida em  $t_e + \delta t_e$  onde  $\delta t_e = \lambda_e/c$  e posteriormente observada por nós em  $t_o + \delta t_o$  onde  $\delta t_o = \lambda_o/c$ , sendo que no geral temos  $\delta t_e \neq \delta t_o$ . Portanto, integrando novamente a Eq. (2.21) para esses novos limites, temos

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{c dt}{a(t)} = \int_{x_e}^{x_o} dx. \quad (2.23)$$

Como a distância comóvel entre a fonte e o observador é constante, podemos igualar as Eqs. (2.22) e (2.23), de modo que temos o seguinte resultado

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_o}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e + \delta t_e}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}, \\ & \Downarrow \\ \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} &= \int_{t_o}^{t_o + \delta t_o} \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

O fator de escala é uma função suave do tempo, isto é, não sofre variações abruptas. E além disso estamos considerando cristas consecutivas, de modo que ambas as



quantidades  $\delta t_e$  e  $\delta t_o$  são  $\ll 1$ . Então a integral (2.25) se torna

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o + \lambda_o/c} dt, \quad (2.26)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_o}{a(t_o)}. \quad (2.27)$$

Usando a definição de redshift dada pela Eq. (2.20), podemos reescrever a Eq. (2.27) na relação desejada,

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} = \frac{1}{a}, \quad (2.28)$$

onde  $a(t_o) = a(t_0) = 1$  e  $a(t_e) =: a$ .

Dessa forma, quando observamos uma fonte com redshift  $z$ , inferimos o valor do fator de escala à época em que a fonte emitiu a radiação que nos alcança no presente.

## 2.2.2 Distâncias cosmológicas

### Distância comóvel

Existem várias formas de definir distâncias em cosmologia. Na seção anterior surgiu a distância comóvel  $dx$  ao considerarmos a linha geodésica nula para a trajetória de partículas relativísticas. Na ausência de velocidades peculiares essa quantidade é constante. Podemos facilmente generalizar a Eq. (2.22) para qualquer distância comóvel

$$x(t) = \int_0^x dx' = \int_t^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')}, \quad (2.29)$$

sendo comumente denominada por *line-of-sight* ou *radial comoving distance*.

Alternativamente, podemos escrever a relação entre distância comóvel em termos do redshift, bastando para isso, lembrar que  $da/dt = aH(a)$ ,  $a = (1 + z)^{-1}$  e  $dt/dz = -[H(z)(1 + z)]^{-1}$ . Portanto, a Eq. (2.29) pode ser reescrita na conhecida relação *distance-redshift*

$$x(z) = \int_0^z \frac{c dz'}{H(z')}. \quad (2.30)$$

### Distância física

Como mencionado anteriormente, a distância comóvel (na ausência de velocidades peculiares) é constante e portanto é a mesma em qualquer estágio da expansão do Universo. Entretanto, a distância entre os objetos aumenta constantemente devido a essa expansão. Para levar isso em consideração defini-se a *distância física* ou *distância própria* que é obtida a partir da métrica de FRW tomando-se  $dt = 0$ ,  $d\theta^2 = 0$  e  $d\phi^2 = 0$  em (2.6), logo, temos

$$dr := ds = a(t)dx. \quad (2.31)$$

Portanto, a distância física  $dr$ , nada mais é do que o comprimento de uma geodésica espacial entre dois pontos na hiper-superfície tipo-espaço,  $\Sigma_t$ , isto é, de  $t$  constante.

Podemos integrar a relação (2.31) para obter

$$r(t) = a(t) \int_0^x dx' = a(t)x, \quad (2.32)$$

e portanto, se hoje a distância física entre nós e uma determinada fonte é de  $r(t_0) = a(t_0)x = x$ , então no passado essa distância era menor por um fator  $a(t_e)$ , isto é,  $r(t_e)/r(t_0) = a(t_e) < 1$ .

Embora tenhamos fixado a hiper-superfície, podemos, é claro, determinar o quanto a distância física entre dois pontos muda de um instante para outro. Essa taxa de variação fornece a *velocidade de recessão* entre os objetos. Tomando a derivada da Eq. (2.32) em relação ao tempo, temos

$$v(t) := \dot{r}(t) := \frac{dr(t)}{dt} = \dot{a}(t)x = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}r(t) = H(t)r(t), \quad (2.33)$$

e avaliando para  $t = t_0$  temos a *Lei de Hubble*

$$v_0 = H_0 D = H_0 \int_0^{z \ll 1} \frac{c dz'}{H(z')} \approx cz \quad (2.34)$$

onde  $v_0 := v(t_0)$  é a velocidade de recessão e  $D := r(t_0)$  é a distância do observador até a fonte, sendo que a segunda igualdade em (2.34) é válida somente para fontes próximas a nossa vizinhança, para as quais vale  $z \ll 1$ .

## Distância de luminosidade

Embora a distância física seja um conceito útil para a intuição, na prática essa quantidade não é mensurável, pois precisaríamos, *e.g.*, efetuar leituras simultâneas (relativa ao instante em que se define a hiper-superfície de  $t$  constante) para ambas as extremidades de uma régua ligando os dois pontos distantes do Universo. Como o que de fato medimos é a luz de fontes distantes, precisamos de um conceito que relacione a ideia de distância com as propriedades/características intrínsecas desses objetos que observamos.

Se um objeto no céu possui uma luminosidade bem definida  $L_e$  (uma *standard candle*), como medido por um observador localizado nessa fonte, então o fluxo observado  $F_0$  é dado por

$$F_0 = \frac{L_e}{4\pi d_L^2}, \quad (2.35)$$

onde a defini-se a distância  $d_L$  e denominada por *distância de luminosidade*. Em contrapartida, o fluxo observado  $F_0$  se relaciona com a luminosidade observada  $L_0$  (em geral diferente de  $L_e$ ) por

$$F_0 = \frac{L_0}{A} = \frac{L_0}{4\pi S_k^2(x)} \quad (2.36)$$

onde  $A$  é a área de uma esfera centrada no observador em um Universo descrito pela métrica de FRW, portanto,  $A = 4\pi S_k^2(x)$ . Logo, igualando (2.35) com (2.36), temos

$$d_L = S_k(x) \sqrt{\frac{L_e}{L_0}}. \quad (2.37)$$

Por outro lado, a luminosidade é a *energia* por unidade de *tempo*, mas essas duas quantidades, energia e tempo, sofrem impacto da expansão do Universo. Para ver isso, seja  $E_e = hc/\lambda_e$  a energia emitida pela fonte durante um intervalo de tempo  $\delta t_e = \lambda_e/c$  entre duas cristas consecutivas da radiação. Analogamente, seja  $E_0 = hc/\lambda_0$  a energia observada por nós em um intervalo de tempo  $\delta t_0 = \lambda_0/c$  entre as mesmas duas cristas consecutivas. Usando a definição de redshift dada pela Eq. (2.20), temos

$$\frac{E_e}{E_0} = 1 + z, \quad (2.38)$$

$$\frac{\delta t_e}{\delta t_0} = (1 + z)^{-1}. \quad (2.39)$$

A luminosidade emitida é dada por  $L_e = E_e/\delta t_e$  e a luminosidade observada é dada por  $L_0 = E_0/\delta t_0$ , logo, combinando a Eqs. (2.38) e (2.39), temos

$$\frac{L_e}{L_0} = (1 + z)^2, \quad (2.40)$$

donde, a partir de (2.37), tiramos a relação entre distância de luminosidade e redshift, dada por

$$d_L = S_k(x)(1 + z). \quad (2.41)$$

### Distância de diâmetro angular

A distância de luminosidade faz uso de uma característica intrínseca da fonte que é a sua luminosidade. A *distância de diâmetro angular*,  $d_A$ , pode ser obtida caso conhecemos o seu comprimento próprio (uma *standard yardstick*) transversal,  $l$ , em relação à linha de observação. Essa é definida de maneira usual por

$$d_A := \frac{l}{\delta\theta}, \quad (2.42)$$

onde  $\delta\theta$  é o ângulo subtendido pelo objeto de comprimento próprio  $l$ .

Para obter a relação entre  $d_A$  e o redshift  $z$ , começamos considerando que ambas as extremidades do objeto de comprimento próprio  $l$  estão situadas nas coordenadas comóveis  $(x, \theta, \phi)$  e  $(x, \theta + \delta\theta, \phi)$ . O comprimento próprio desse objeto pode ser obtido a partir da métrica de FRW. Para isso basta considerar dois eventos simultâneos (por exemplo, a emissão de fótons no tempo  $t_e$ ), no referencial de repouso do objeto, ocorrendo em ambas as extremidades do mesmo. Portanto, a métrica de FRW dada pela Eq. (2.6), resulta em

$$l = ds = a(t_e)S_k(x)\delta\theta. \quad (2.43)$$

Por fim, usando que  $a(t_e) = (1 + z)^{-1}$ , a Eq. (2.42) se torna

$$d_A = \frac{S_k(x)}{1 + z}. \quad (2.44)$$

Comparando as Eqs. (2.41) e (2.44), temos a relação entre distância luminosidade

e distância angular, dada por

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (2.45)$$

Portanto, de modo geral as distâncias envolvidas são todas distintas entre si, por exemplo, para o Universo plano ( $k = 0$ ) temos que  $d_A \neq D \neq d_L$ . Com efeito

$$d_A(1+z) = D = d_L/(1+z) \quad (k = 0), \quad (2.46)$$

onde, como já definido antes,  $D = r(t_0)$  é a distância física avaliada em  $t = t_0$ .

## 2.3 Formação de estruturas

O modelo de FRW se baseia no princípio de que a distribuição de matéria no Universo é, em média, homogêneo e isotrópico em escalas maiores que  $R \approx 100h^{-1}\text{Mpc}$ , onde  $h$  é um parâmetro adimensional definida via a seguinte relação

$$H_0 = 100h \frac{\text{Km/s}}{\text{Mpc}}. \quad (2.47)$$

Por outro lado, em escalas menores, a densidade média das estruturas pode ser ordens de grandeza maiores que a densidade média do Universo. Objetos que se enquadram nessa categoria são galáxias, grupos, aglomerados e super aglomerados de galáxias. No sentido oposto, existem os *voids* (*vazios* ou *voids* são regiões do Universo com baixa quantidade de matéria luminosa em relação a densidade média do Universo).

De modo geral, costuma-se usar o termo *estrutura em grande escala do Universo* para se referir a essas aglomerações de matéria. Até mesmo a *cosmic microwave background* apresenta flutuações relativas de temperatura da ordem de  $\Delta T/T \approx 10^{-5}$  para  $z \approx 1000$ . Essas perturbações, ao longo da história do Universo, evoluíram por instabilidade gravitacional até atingir as atuais estruturas que vemos hoje.

Nessa seção fazemos uma breve apresentação da teoria da formação de estrutura no Universo. Primeiramente, começamos salientando que a análise feita aqui considera as seguintes simplificações: (i) de regime linear das perturbações, (ii) a época posterior ao equilíbrio entre bárions e fótons, *i.e.*, quando a densidade do Universo passou a ser dominada por matéria não relativística, e (iii) perturbações com escalas características menores do que o raio de Hubble à época correspondente (conhecidas como *subhorizon scales*). Descrições mais aprofundadas podem ser encontradas,

*e.g.*, em [6], ou §2.2 e Apêndice B de [14].

As premissas supracitadas nos permitem fazer uma análise da teoria da evolução das perturbações cosmológicas considerando a matéria como sendo descrita por um fluido perfeito. Sendo assim, a demonstração apresentada aqui segue os passos de [56] e [54].

As principais grandezas que caracterizam esse fluido são: a densidade de matéria  $\rho_f(t) := \rho_m(t)$ , o campo de velocidade não-relativístico ditado pela expansão de Hubble  $\mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) := H(t)\mathbf{r}$ , o potencial gravitacional na aproximação newtoniana associado com a distribuição de matéria,  $\Phi_f(t)$ , e uma pressão,  $p_f(t) \equiv 0$ , que é identicamente nula, uma vez que estamos na aproximação de fluido perfeito. O subíndice “*f*” significa que essas são as grandezas de “*fundo*”, isto é, satisfazem o princípio cosmológico de homogeneidade e isotropia em larga escala.

O método da teoria linear de perturbação consiste em tomar pequenos desvios em relação a essas grandezas de fundo, e por fim realizar a *linearização* das equações resultantes desse processo. Portanto, podemos escrever

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_f(t) + \delta\rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.48)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) + \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (2.49)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_f(t) + \delta\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.50)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_f(t) + \delta p(\mathbf{r}, t) \quad (2.51)$$

As equações básicas que governam a dinâmica do fluido (para as quantidades de fundo e para as quantidades perturbadas) são:

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (2.52)$$

- Equação de Euler

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\Phi = 0, \quad (2.53)$$

- Equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi - 4\pi G\rho = 0. \quad (2.54)$$

A pressão  $p = p(\rho, s)$  é, em geral, uma função da densidade  $\rho$  e da entropia  $s$ ,

então temos o seguinte:

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial p}{\partial s} \delta s = \delta p_A + \delta p_{NA}, \quad (2.55)$$

onde  $\delta p_A := (\partial p / \partial \rho) \delta \rho$  e  $\delta p_{NA} := (\partial p / \partial s) \delta s$  são, respectivamente, as contribuições *adiabáticas* e *não-adiabáticas* para a pressão. Entretanto, estamos considerando que o fluido é barotrópico (*barotropic fluid*, veja [6]). Logo temos que  $\delta s \equiv 0$ . Portanto, as perturbações se propagam pelo fluido com velocidade do som dada por  $v_s^2 := \partial p / \partial \rho$ . Sendo assim, a partir dessas considerações, podemos reescrever a Eq. (2.55) como simplesmente

$$\delta p = \delta p_A = v_s^2 \delta \rho. \quad (2.56)$$

Substituindo as Eqs. de (2.48) à (2.51) nas Eqs. de (2.52) à (2.54), aplicando novamente estas mesmas equações para as quantidades de fundo, linearizando as equações resultantes, e usando a condição de processo adiabático dado pela Eq. (2.56), teremos o seguinte

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_f \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\delta \rho \mathbf{v}_f) = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \delta \mathbf{v} + (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{v}_f + \nabla_{\mathbf{r}} \delta \Phi + v_s^2 \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \delta \rho}{\rho_f} = 0, \quad (2.58)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \delta \Phi - 4\pi G \delta \rho = 0. \quad (2.59)$$

Nas equações (2.57), (2.58) e (2.59), mudamos a notação  $\nabla \rightarrow \nabla_{\mathbf{r}}$  para deixar explícito que as derivadas espaciais envolvidas são tomadas em relação à coordenada física  $\mathbf{r}$ . Por outro lado, a derivada parcial em relação ao tempo cósmico,  $\partial / \partial t := (\partial / \partial t)_{\mathbf{r}}$ , é para  $\mathbf{r}$  fixo.

Do ponto de vista da hidrodinâmica, pode-se dizer que as Eqs. (2.57)-(2.59) estão escritas em termos das *coordenadas Eulerianas* (físicas  $\mathbf{r}$ ) [56]. Dessa forma, podemos expressar essas mesmas equações em termos de *coordenadas Lagrangianas* (comóveis  $\mathbf{x}$ ). Para isso, basta lembrar que ambos os sistemas de coordenadas se comunicam através da seguinte relação

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} := \frac{D}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}, \quad (2.60)$$

onde  $D/Dt$  é a notação usual para representar a *derivada material* no contexto da hidrodinâmica, mas que no contexto da cosmologia tratado aqui, definimos como

sendo simplesmente  $(\partial/\partial t)_{\mathbf{x}}$ . E por fim,  $\mathbf{v}_f(\mathbf{r}, t) = H(t)\mathbf{r}$ , é o fluxo de Hubble.

Por outro lado, aplicando a divergência e usando a regra da cadeia na relação  $\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}$ , é possível mostrar que

$$\nabla := \nabla_{\mathbf{x}} = a(t)\nabla_{\mathbf{r}}. \quad (2.61)$$

Aplicando as equações (2.60) e (2.61) nas equações (2.57)-(2.59), temos que

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + 3H\delta \rho + \frac{\rho_f}{a}\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + H\delta \mathbf{v} + v_s^2 \frac{\nabla \delta \rho}{a\rho_f} + \frac{1}{a}\nabla \delta \Phi = 0, \quad (2.63)$$

$$\frac{1}{a^2}\nabla^2 \delta \Phi - 4\pi G\delta \rho = 0. \quad (2.64)$$

É útil reescrever as Eqs. (2.62)-(2.64) em termos de uma quantidade adimensional denominado por *contraste de densidade*, e definida por

$$\delta(\mathbf{x}, t) := \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_f(t)}{\rho_f(t)} = \frac{\delta \rho(\mathbf{x}, t)}{\rho_f}, \quad (2.65)$$

que nada mais é do que uma maneira de medir o quanto a quantidade perturbada  $\rho$  se desvia da quantidade de fundo  $\rho_f$ .

Como dito anteriormente, estamos considerando um fluido ideal, pós era do equilíbrio entre bárions e fótons, e portanto correspondente à época do Universo dominado por matéria. De acordo com a Eq. (2.15), a densidade de fundo para a matéria evolui de acordo com a seguinte equação

$$\rho_f(t) = \rho_m(t) \propto a^{-3}. \quad (2.66)$$

Dessa forma, utilizando as Eqs. (2.65) e (2.66) nas Eqs. (2.62)-(2.64), temos

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + H\delta \mathbf{v} + \frac{v_s^2}{a}\nabla \delta + \frac{1}{a}\nabla \delta \Phi = 0, \quad (2.68)$$

$$\nabla^2 \delta \Phi - 4\pi a^2 G \rho_m \delta = 0. \quad (2.69)$$

Essas são as equações diferenciais, escritas em termos das coordenadas comóveis, que regem a dinâmica das propriedades,  $\{\delta, \delta \mathbf{v}, \delta \Phi\}$ , das perturbações cosmológicas. Porém, estamos interessados em analisar a evolução do contraste de densidade,  $\delta =$



$\delta(\mathbf{x}, t)$ , pois a partir dela podemos estudar, ao menos no regime linear, a evolução e a formação das estruturas no Universo.

Portanto, é de grande interesse obter uma equação diferencial que envolva somente essa quantidade física. Isso pode ser alcançado substituindo a Eq. (2.67) e a sua derivada em relação ao tempo, bem como a (2.69), na equação resultante ao tomar a divergência da Eq. (2.68), o que nos leva ao seguinte resultado

$$\ddot{\delta}(\mathbf{x}, t) + 2H(t)\dot{\delta}(\mathbf{x}, t) - 4\pi G\rho_m(t)\delta(\mathbf{x}, t) - \frac{v_s^2}{a^2}\nabla^2\delta(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.70)$$

A Eq. (2.70) assume uma forma mais compacta ao tomar a sua transformada de Fourier (veja Eq. (3.11)). Nessa representação, temos  $\nabla \rightarrow ik$ . Logo

$$\ddot{\tilde{\delta}}(\mathbf{k}, t) + 2H(t)\dot{\tilde{\delta}}(\mathbf{k}, t) + \omega^2\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (2.71)$$

$$\omega^2 := \frac{v_s^2}{a^2}k^2 - 4\pi G\rho_m(t). \quad (2.72)$$

Aqui vale um paralelo interessante com a astrofísica, em particular, sobre o estudo do equilíbrio hidrostático no interior de uma estrela. Em primeira aproximação, costuma-se tratar o interior estelar como um gás ideal, assumindo-se a simetria esférica e ignorando uma possível rotação, campos magnéticos, força de maré e etc. Exigindo que as propriedades da estrela tal como massa, luminosidade, raio e composição química não mudem de forma abrupta com tempo, pode-se aplicar as mesmas equações (2.48)-(2.54). Em essência, a ideia é a mesma: toma-se pequenas perturbações do gás que compõem o interior estelar. A sua auto-gravidade gera uma tendência de ocorrer o colapso em direção ao centro, mas que é compensada pela pressão do gás. A partir daí, ao exigir o equilíbrio mecânico, é possível extrair vários critérios interessantes (*e.g.*, critério de Jeans) para que a condição de equilíbrio ocorra.

No contexto da cosmologia, na Eq. (2.72) ocorre novamente a competição entre a tendência do colapso gravitacional, regido pelo termo  $4\pi G\rho_m$ , com a pressão do fluido, regido pelo termo  $v_s^2 k^2/a^2$ . Porém, a expansão do Universo também influencia, uma vez que aparece o fator de escala  $a(t)$ .

O limiar entre a colapso gravitacional e a restauração do equilíbrio pela pressão do fluido, pode ser determinado tomando-se  $\omega = 0$  na Eq. (2.72). Isso nos fornece uma escala característica denominado por *comprimento de onda físico de Jeans*,

dado por

$$\lambda_{J,r} := a \frac{2\pi}{k_J} = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_m}}, \quad (2.73)$$

onde o subíndice  $r$  se refere ao comprimento físico. Portanto, é natural definir o *comprimento de onda comóvel de Jeans* por  $\lambda_{J,x} := 2\pi/k_J$ , logo,  $\lambda_{J,r} = a\lambda_{J,x}$ .

Para analisar a condição de equilíbrio, consideremos por simplicidade uma esfera de raio  $\lambda$  e densidade  $\rho_m$ . Denomina-se por *tempo dinâmico*,  $t_{\text{dyn}}$ , o tempo que uma perturbação levaria para colapsar, por efeito da gravidade, até atingir o centro. Esse tempo dinâmico escala com a densidade de matéria da seguinte maneira:

$$t_{\text{dyn}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_m}}. \quad (2.74)$$

Por outro lado, a pressão no fluido tende a restaurar o equilíbrio. A informação se propaga pelo fluido com a velocidade do som dada por  $v_s$ . Logo, o tempo para que o gradiente de pressão percorra uma escala correspondente à  $\lambda$ , é dado por

$$t_{\text{pre}} \sim \frac{\lambda}{v_s}. \quad (2.75)$$

Portanto, podemos concluir que se a escala  $\lambda$  da perturbação for maior do que a escala de Jeans  $\lambda_{J,r}$ , então o tempo dinâmico,  $t_{\text{dyn}}$ , será menor do que o tempo de pressão,  $t_{\text{pre}}$ , acarretando no colapso gravitacional da perturbação, e por consequência, formando as estruturas em larga escalas do Universo. Por fim, em contrapartida, se  $\lambda$  é menor do que o comprimento de Jeans, então a pressão consegue impedir o colapso gravitacional, gerando apenas ondas sonoras no fluido.

Estamos interessados em analisar a evolução do contraste de densidade para o caso em que ocorre o colapso gravitacional. Dessa forma, tomando o limite  $\lambda \gg \lambda_{J,r}$ , podemos aproximar  $\omega^2 \approx -4\pi G\rho_m(t)$ . A partir daí, por meio do método de separação de variáveis, podemos encontrar uma solução para a equação diferencial (2.71). A ideia é começar com uma solução da forma

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\delta}_0(\mathbf{k})T(k)D(t), \quad (2.76)$$

onde  $D(t)$  e  $T(k)$  são denominadas por *função de crescimento* e *função de transferência*, respectivamente. As perturbações iniciais são caracterizadas por  $\tilde{\delta}_0(\mathbf{k})$ .

## Função de crescimento

Para analisar a função de crescimento, começamos substituindo a Eq. (2.76) na Eq. (2.71), temos

$$\ddot{D}(t) + 2H(t)\dot{D}(t) - 4\pi G\rho_m(t)D(t) = 0, \quad [\text{crescimento de estruturas}]. \quad (2.77)$$

Como o redshift é um parâmetro que pode ser estimado de levantamentos astronômicos, pode ser útil reescrever a Eq. (2.77) em termos de  $z$ . Para isso, a partir da Eqs. (2.28), (2.15) (para a matéria), (2.16) e (2.17) (para a matéria), é imediato ver que

$$\frac{dz}{dt} = -H(1+z), \quad (2.78)$$

$$\rho_m(z) = \rho_{m,0}a^{-3}(z) = \frac{3\Omega_m H_0^2}{8\pi G}(1+z)^3. \quad (2.79)$$

Utilizando as Eqs. (2.78) e (2.79) é possível mostrar que a Eq. (2.77), em termos do redshift, é dada por

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} + \left( \frac{d \ln E(z)}{dz} - \frac{1}{1+z} \right) \frac{dD(z)}{dz} - \frac{3\Omega_m}{2} \frac{(1+z)D(z)}{E^2(z)} = 0, \quad (2.80)$$

onde definimos  $E(z) := H(z)/H_0$ , que é o parâmetro de Hubble normalizado.

Podemos expressar a Eq. (2.77) em termos do fator de escala. Utilizando  $da/dt = Ha$  é imediato verificar que

$$\frac{d^2 D(a)}{da^2} + \left( \frac{d \ln E(a)}{da} + \frac{3}{a} \right) \frac{dD(a)}{da} - \frac{3\Omega_m}{2} \frac{D(a)}{a^5 E^2(a)} = 0, \quad (2.81)$$

onde reescrevemos o parâmetro de Hubble normalizado,  $E(a) := H(a)/H_0$ , em termos do fator de escala. Por substituição direta é possível verificar que a seguinte expressão analítica (veja, *e.g.*, [21]) para a função de crescimento

$$D(a) = \frac{5\Omega_m}{2} E(a) \int_0^a \frac{da'}{[a' E(a')]^3}, \quad (2.82)$$

é solução da Eq. (2.81), desde que o Universo, além de matéria, possua curvatura e/ou constante cosmológica.

Na Figura 2.1 obtemos a função de crescimento utilizando o Core Cosmology Library, e o comparamos com a solução analítica dada pela Eq. (2.82). Ademais, utilizamos a cosmologia fiducial dada pela Tabela 6.1.

Os códigos existentes hoje em cosmologia para computar as grandezas de interesse são bastante refinados, e podem levar em considerações outros tipos de componentes do Universo (*e.g.*, neutrinos) bem como correções não lineares importantes. Tais componentes e correções não são levadas em consideração pela solução analítica dada por (2.82), pois a obtivemos partindo da teoria linear de perturbações. Porém, como a função de crescimento é relativamente simples, nesse caso a concordância entre a solução analítica e a numérica possuem nítida concordância.

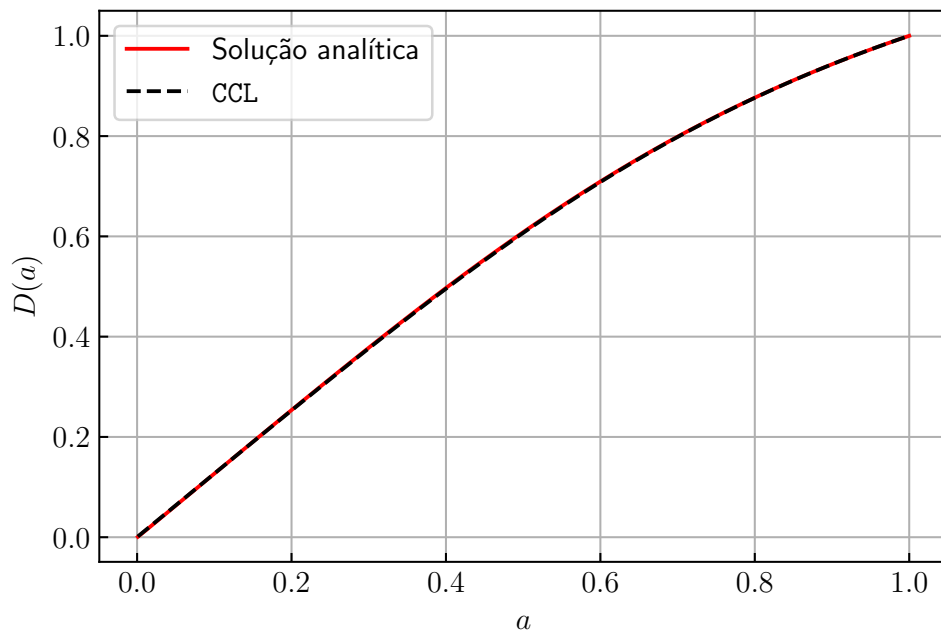


Figura 2.1: Comparação entre as funções de crescimento obtido com o código Core Cosmology Library, CCL, e com a solução analítica dada pela Eq. (2.82).

Na Figura 2.2 obtemos a função de crescimento a partir da Eq. (2.82) considerando três cosmologias diferentes. Para o modelo de Einstein-de Sitter (linha verde) a função de crescimento é simplesmente dada por  $D(a) = a$ . Para obter a representação da função de crescimento em termos do redshift, basta usar a mudança de variáveis dada pela equação (2.28).

### Função de transferência

Embora se possa fornecer uma solução analítica relativamente simples para a função de crescimento, tal como descrito pela Eq. (2.82), o mesmo não será verdade para a função de transferência  $T(k)$ . No início desta seção, para que as aproximações

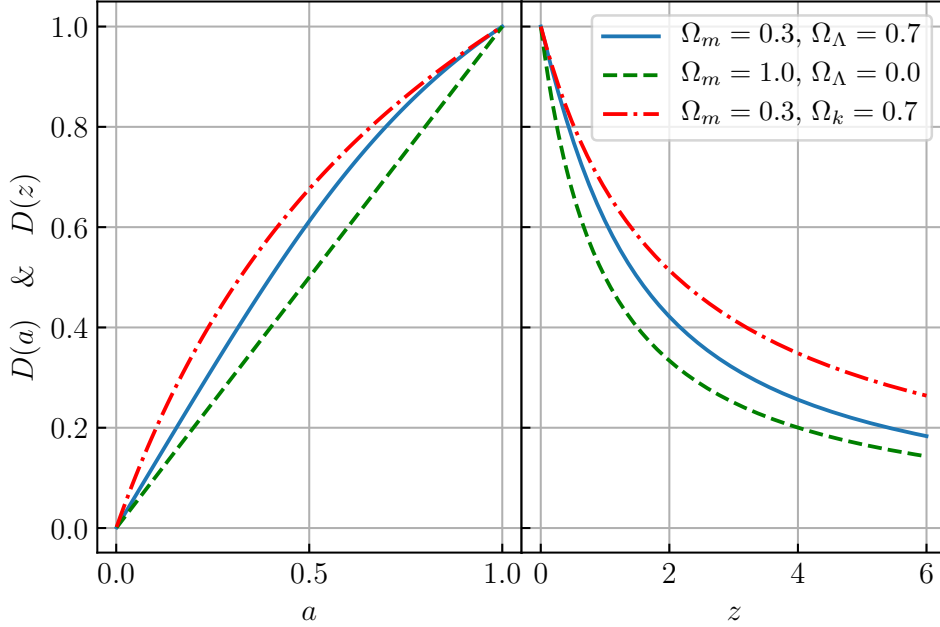


Figura 2.2: Função de crescimento em função do fator de escala,  $a$ , e do redshift,  $z$ , para três modelos cosmológicos. A linha verde (tracejado) corresponde ao modelo de Einstein-de Sitter. A linha azul (contínua) é uma representação aproximada do Universo real. A linha vermelha (ponto-traço) simula um Universo sem energia escura. Para todos os três modelos assumimos que a densidade de radiação é zero. Esse resultado também é obtido por [54].

utilizadas fossem satisfeitas, mencionamos que as perturbações deveriam ter escalas características menor do que o raio de Hubble. Entretanto, uma análise mais completa deve levar em consideração essa transição de escalas maiores do que o raio de Hubble para escalas iguais e menores do que esse raio (*horizon crossing*). Além disso, a função de transferência deve descrever a evolução das perturbações na transição de radiação para a matéria e épocas posteriores (*transfer epoch*).

Em geral, estas e outras considerações podem tornar a função de transferência suficientemente complicada, de modo que o uso de métodos numéricos se faz necessário. Um ajuste bastante conhecido para a função de transferência é denominado por BBKS, devido à Bardeen, Bond, Kaiser, and Szalay [7], e é dada por

$$T\left(x := \frac{k}{k_{\text{eq}}}\right) = \frac{\ln(1 + 0.171x)}{0.171x} \left[1 + 0.284x + (1.18x)^2 + (0.399x)^3 + (0.490)^4\right]^{-\frac{1}{4}}, \quad (2.83)$$

onde  $k_{\text{eq}} = a_{\text{eq}}H(a_{\text{eq}})$  é o número de onda correspondente à escala na época do

equilíbrio entre radiação e matéria. Tomando a razão entre a densidade de radiação e densidade de matéria, temos:  $\rho_r(a)/\rho_m(a) = [(\rho_{r,0}a^{-4})/\rho_{cr}]/[(\rho_{m,0}a^{-3})/\rho_{cr}] = \Omega_r/(\Omega_m a) \equiv 1 \Rightarrow a_{\text{eq}} := \Omega_r/\Omega_m$ . Por fim, próximo à época do equilíbrio, podemos desprezar o termo de curvatura e de constante cosmológica. Logo, a partir da Eq. (2.18) e usando as definições de  $a_{\text{eq}}$  e  $k_{\text{eq}}$  é imediato ver que  $k_{\text{eq}} = [2\Omega_m H_0^2/a_{\text{eq}}]^{1/2}$ .

Na Figura 2.3 mostramos a função de transferência BBKS e seu comportamento assintótico. Para  $x \ll 1$  temos  $T(x) \sim 1$  e para  $x \gg 1$  temos  $T(x) \sim \ln(x)x^{-2}$  [6]<sup>2</sup>.

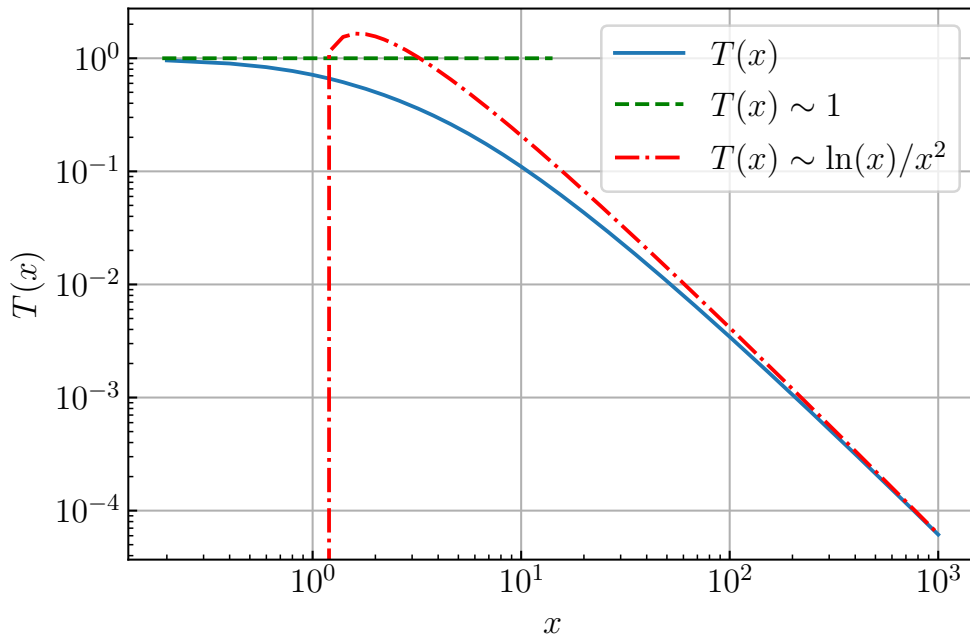


Figura 2.3: Função de transferência BBKS, Eq. (2.83), e seu comportamento assintótico.

Dessa forma, uma vez que se tem a função de crescimento, a função de transferência e as perturbações iniciais, o contraste de densidade dado pela Eq. (2.76) pode ser caracterizado. Entretanto, na prática, precisamos fazer um tratamento estatístico do contraste de densidade para comparar com as observações.

Uma maneira de se fazer isso é pela função de correlação,  $\xi(x, z)$ , e/ou espectro de potência,  $P(k, z)$ , introduzidos a partir do próximo capítulo. O espectro de potência, por exemplo, é uma maneira de medir a variância do contraste de densidade. Portanto, a menos de normalizações, a partir da Eq. (2.76) temos

$$P(k, z) \sim \langle |\tilde{\delta}(\mathbf{k}, z)|^2 \rangle \sim P_0(k)T^2(k)D^2(z), \quad (2.84)$$

<sup>2</sup>Algumas referências utilizam apenas a aproximação  $T(x) \sim x^{-2}$  para  $x \gg 1$ . Veja, *e.g.*, [54].

onde a dependência com a direção do vetor  $\mathbf{k}$  foi eliminada por considerações de isotropia.  $P_0(k) \sim k^{n_s}$  denomina-se *espectro de potência primordial* (previsto pela teoria inflacionária) e  $n_s$  denomina-se *índice de espectral*. Quando  $n_s = 1$  temos o caso particular do índice de Harrison–Zel’dovich que dá origem ao *espectro de potência invariante por escala*  $P_0(k) \sim k$ . Entretanto, vale salientar que o termo “invariante por escala” se refere ao potencial gravitacional, isto é, quando  $n_s = 1$  a amplitude das flutuações do potencial gravitacional são constantes (veja, *e.g.*, [54].)

## Capítulo 3

# Função de correlação e espectro de potência

Na §2.3 obtivemos equações interessantes que descrevem a formação estruturas no Universo no regime linear. O contraste de densidade dado pela equação (2.65) foi ponto de partida que tornou essa análise possível. Entretanto, na prática (a partir de observações astronômicas) o que se obtém são as propriedades estatísticas do contraste de densidade, e não o seu valor exato ponto a ponto do espaço. Neste capítulo vamos apresentar a função de correlação espacial de dois pontos e o espectro de potência (introduzido brevemente no final do capítulo anterior). Tais quantidades são extremamente úteis para conectar a teoria com as observações. Ademais, iremos discutir o efeito de distorção no espaço de redshift que ocorre devido ao campo de velocidades peculiares.

### 3.1 Correlação espacial de galáxias

No capítulo anterior, nós desenvolvemos a teoria geral para descrever a evolução no tempo e no espaço das flutuações de perturbação no contexto da métrica de FRW, e descritas pelas equação diferencial (2.71). Para resolver essa equação diferencial e determinar uma solução para a função que descreve a flutuação de perturbação é necessário fornecer as *condições iniciais*. Essas condições iniciais, por vezes chamadas de *primordial seed fluctuations*, teriam surgido na época da Inflação e evoluído por instabilidade gravitacional ao longo de toda a história cósmica do Universo até chegar nas estruturas como as conhecemos hoje. O problema que enfrentamos na cosmologia é exatamente o fato de não termos acesso a estas condições iniciais, o que torna difícil a missão de determinar univocamente as funções para as flutuações



de densidade.

Além de não conhecermos as condições iniciais, acrescenta-se o fato de que escalas de tempo cosmológicas são extremamente grandes, o que torna inviável analisarmos a evolução temporal do crescimento das estruturas no Universo. Estas características são suficientes para fazer com que as flutuações de perturbação sejam tratadas como variáveis aleatórias ao invés de variáveis determinísticas (veja, *e.g.*, [14, p. 38]).

Não é preciso ir tão longe para nos depararmos com situações semelhantes a essa. Por exemplo, nenhum modelo descreve em detalhes a distribuição de matéria na vizinhança da Via Láctea [54, p. 347], mas sim as suas propriedades estatísticas. No estudo da estrutura em grande escala do universo ocorrerá exatamente isso, de modo que estaremos interessados nas descrições estatísticas das propriedades do Universo, e não na expressão analítica das flutuações de perturbação.

### 3.1.1 Hipóteses: ergodic & fair sample

De modo mais consistente e/ou em prol de estabelecer ideias mais organizadas, costuma-se classificar o que foi dito acima em duas hipóteses, conhecidas como *ergodic hypothesis* e *fair sample hypothesis* que discutiremos apenas brevemente.

Como já dissemos, a teoria inflacionária pressupõe que as perturbações de densidade  $\delta(\mathbf{x})$  tenham surgido de um processo aleatório. Entretanto, independentemente do mecanismo que tenha fornecido ao nosso Universo uma determinada forma analítica para  $\delta(\mathbf{x})$ , o fato é que, *esse*  $\delta(\mathbf{x})$  é uma única *realização* estocástica desse mecanismo. Em outras palavras, para que tenhamos condições de extrair propriedades estatísticas, tal como os momentos, do *conjunto* (*ensemble*) de  $\delta(\mathbf{x})$  é necessário que tenhamos mais realizações desse mesmo mecanismo, ou seja, precisaríamos de mais Universos. Obviamente temos apenas um único Universo, logo a média sobre o *ensemble* de alguma forma deve ser convertida em outro tipo de média, a saber, a média sobre o *sample* (amostra). Decorre daí que assumir que a média sobre várias regiões distintas do Universo com um certo volume típico  $V$  é igual à média sobre o conjunto é o mesmo que assumir a hipótese ergódica (veja, *e.g.*, [6, p. 29], [24, p. 307]), esquematicamente:

$$\langle \delta \rangle_{\text{ensemble average}}^{\text{many Universes}} \longrightarrow \langle \delta \rangle_{\text{sample average}}^{\text{only Universe}} .$$

Por outro lado, ao mapear várias regiões finitas do Universo com volume típico  $V$ , extraímos as propriedades estatísticas para um determinado observável cosmológico no qual estamos interessados. E a partir daí assumimos que essa propriedade vale

para todo o Universo. Entretanto, fazer isso é o mesmo que assumir a *hipótese* que essas regiões de volume  $V$  são uma *amostra justa* do Universo como um todo, daí a denominação *fair sample hypothesis*. Analogamente, seguindo o argumento de Peebles [47], dizemos que se as regiões do espaço a partir do qual um *survey* constrói um catálogo é um *fair sample* do Universo como um todo, e se a forma/técnica como esse *survey* constrói esses catálogos é a mesma, então as propriedades estatísticas seriam as mesmas, esquematicamente:

$$\langle \delta \rangle_{\text{sample average}}^{\text{whole Universe}} \longrightarrow \langle \delta \rangle_{\text{sample average}}^{\text{parts of Universe}} .$$

Independentemente das possíveis críticas pro ou contra essa hipótese, Peebles [47] chama a atenção para o fato de que a *fair sample hypothesis* é passível de testes empíricos, e que as evidências têm mostrado que essa é na verdade uma afirmação bastante razoável e de boa aproximação. Está fora do escopo dessa dissertação fornecer uma descrição detalhada e rigorosa acerca dessas hipóteses, mas uma vez que temos pelo menos ciência da existência das premissas por de trás das análises, podemos iniciar o formalismo.

### 3.1.2 Função de correlação espacial de dois pontos

Continuando a linha de raciocínio da subseção anterior, mas agora do ponto de vista matemático, estamos interessados em construir uma maneira de extrair informação (estatística) do campo de densidade sem conhecer o valor de  $\delta$  para todo ponto  $(\mathbf{x}, t)$ . Como estamos interessados em estudar como a matéria se distribui no Universo, nada mais justo do que começar com a pergunta sobre quantas galáxias, em média, estão a uma distância *comóvel*  $x$  e a uma dada direção  $\hat{\mathbf{x}}$  de uma outra galáxia. Denominamos esse processo de *contagem de pares* (*counting pairs*).

Seja  $n(\mathbf{x})$  o número de galáxias por unidade de volume (densidade numérica) em uma dada posição  $\mathbf{x}$  do espaço. *A priori*  $n(\mathbf{x})$  é diferente para diferentes  $\mathbf{x}$  e portanto dizemos que a densidade numérica de galáxias pode flutuar em torno do seu valor médio  $\bar{n}$ . Essa flutuação é quantificada pelo contraste de densidade  $\delta(\mathbf{x})$  de modo que podemos escrever:

$$n(\mathbf{x}) = \bar{n} (1 + \delta(\mathbf{x})) . \quad (3.1)$$

- Se  $\delta(\mathbf{x}) > 0$  então  $n(\mathbf{x}) > \bar{n}$  e dizemos que trata-se de uma região de *sobre-densidade*.

- Se  $\delta(\mathbf{x}) < 0$  então  $n(\mathbf{x}) < \bar{n}$  e dizemos que trata-se de uma região de *subdensidade*.
- Se  $\delta(\mathbf{x}) = 0$  então  $n(\mathbf{x}) = \bar{n}$  e dizemos que trata-se de uma região *neutra*.

Agora, consideremos uma região de volume  $dV_1$  em torno do ponto  $\mathbf{x}_1$  e outra região  $dV_2$  em torno do ponto  $\mathbf{x}_2$ . O número de galáxias em  $dV_1$  é  $n(\mathbf{x}_1)dV_1$ . Analogamente, o número de galáxias em  $dV_2$  é  $n(\mathbf{x}_2)dV_2$ . Então o número de *pares* de galáxias que podemos formar a partir desses dois volumes é dado por

$$dN_{pair}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = n(\mathbf{x}_1)dV_1n(\mathbf{x}_2)dV_2. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.2) temos

$$dN_{pair}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \bar{n}^2 [1 + \delta(\mathbf{x}_1) + \delta(\mathbf{x}_2) + \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2)] dV_1dV_2. \quad (3.3)$$

Agora aplicamos a *fair sample hypothesis* na equação (3.3) para determinar a média, tomada em relação a todos os elementos de volume possíveis, do número de pares de galáxias separadas por uma distância  $x = |\mathbf{x}| = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$  na direção  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x$ . Decorre daí que

$$\langle dN_{pair}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rangle = \bar{n}^2 [1 + \langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2) \rangle] dV_1dV_2 \quad (3.4)$$

onde  $\langle \delta(\mathbf{x}_1) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x}_2) \rangle = 0$  por definição.

Primeiramente observe que se a distribuição de galáxias não apresenta flutuação,  $\delta(\mathbf{x}) = 0$ , então  $\langle dN_{pair}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rangle = \langle dN_{pair} \rangle = \bar{n}^2 dV_1dV_2 = \text{const.}$ . Ou seja, é independente da posição das galáxias, e dizemos que nesse cenário as galáxias são não correlacionadas.

Entretanto, quando levamos em consideração que a distribuição de galáxias no Universo apresenta flutuações, então vemos que dependendo da região do espaço que estamos analisando, existirá, de modo geral, uma *probabilidade* de haver um *excesso* (ou uma *escassez*) de pares de galáxias. Em outras palavras, dizemos que a distribuição de galáxias é *correlacionada* e denominamos de *função de correlação espacial de dois pontos*  $\xi$ , ou simplesmente, *função de correlação*, a grandeza que serve para quantificar a intensidade dessa correlação. Ela é definida a partir da equação (3.4) como sendo o segundo momento (a variância) do contraste de densidade, ou seja

$$\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (3.5)$$

### 3.1.3 Homogeneidade e isotropia estatística

O ponto de partida básico para tratar da teoria perturbativa cosmológica é por óbvio supor que o Universo é não homogêneo e não isotrópico, ou seja, o princípio cosmológico não é mais válido em geral. Entretanto, ainda assim podemos perguntar se em *média* o Universo é homogêneo e isotrópico. Isto seria algo como uma hipótese mais fraca<sup>1</sup> do que o princípio cosmológico. Com efeito, costuma-se assumir que *estatisticamente* o Universo é homogêneo e isotrópico. Para definir essa afirmação em termos matemáticos, primeiramente vamos reescrever a função de correlação de modo conveniente.

Dado  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  podemos escrever  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + x\hat{\mathbf{x}}$ . Então a equação (3.5) pode ser reescrita como

$$\xi(\mathbf{x}_1, x\hat{\mathbf{x}}) = \langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_1 + x\hat{\mathbf{x}}) \rangle. \quad (3.6)$$

Dizemos que o Universo é *estatisticamente homogêneo* se a função de correlação (3.6) é invariante por translação em relação ao seu primeiro argumento

$$\xi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, x\hat{\mathbf{x}}) = \xi(\mathbf{x}_1, x\hat{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.7)$$

Dizemos que o Universo é *estatisticamente isotrópico* se a função de correlação (3.6) é invariante por rotação em relação ao seu segundo argumento

$$\xi(\mathbf{x}_1, xR(\hat{\mathbf{x}})) = \xi(\mathbf{x}_1, x\hat{\mathbf{x}}), \quad (3.8)$$

onde  $R$  é um operador de rotação.

Dizemos que o Universo é *estatisticamente homogêneo e isotrópico* se (3.6) satisfaz simultaneamente (3.7) e (3.8). Se isso ocorre, então a função de correlação não depende da posição  $\mathbf{x}_1$  e nem da direção unitária  $\hat{\mathbf{x}}$ . Logo ela é função somente da separação entre os pontos, isto é

$$\xi(x) = \langle \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_1 + x\hat{\mathbf{x}}) \rangle. \quad (3.9)$$

---

<sup>1</sup>Pois se o Universo é homogêneo e isotrópico, então ele é *estatisticamente* homogêneo e isotrópico, porém, a recíproca não é necessariamente verdadeira. Para fins de ilustração, seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Digamos que  $f(x) = 0 \quad \forall x$ , então  $\langle f(x) \rangle = 0$ . Por outro lado, se  $f(x) \neq 0$ , por exemplo, se  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , então  $\langle f(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \sin(x) = 0$ , ou seja,  $f(x) = \sin(x)$  é não nula em  $[0, 2\pi]$  e mesmo assim sua média nesse intervalo é zero.

Veja discussão em [14, p. 42] e [24, p. 307].

### 3.1.4 Espectro de potência

Como veremos no decorrer deste trabalho, é muito comum e conveniente trabalharmos no espaço de Fourier. Essa será uma maneira alternativa, mas completamente equivalente, de olharmos para as grandezas físicas que antes foram expressadas no espaço real, o que facilita algumas manipulações matemáticas e também permite novos *insights* e interpretações.

Para estabelecer a desejada conexão entre o espaço real e o espaço de Fourier, começamos escrevendo o contraste de densidade  $\delta(\mathbf{x}, z)$  como uma superposição de ondas planas  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ . Se denominarmos por  $\tilde{\delta}(\mathbf{k}, z)$  os coeficientes (ou modos de Fourier) dessa superposição, então no sistema de coordenadas cartesianas e para o caso particular de uma hiper-superfície plana [14, p. 43], podemos simplesmente escrever

$$\delta(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.10)$$

sendo os coeficientes dados por

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) = \int d^3\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}, z) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.11)$$

Primeiramente, vamos observar que o contraste de densidade dado pela Eq. (3.10) é uma função real. Isto é, se  $*$  denota o conjugado complexo, então

$$\delta(\mathbf{x}, z) = \delta^*(\mathbf{x}, z). \quad (3.12)$$

Isso faz sentido, uma vez que  $\delta$  é uma quantidade física que descreve a distribuição de matéria no Universo. Por consequência, isso faz com que a sua contraparte na representação de Fourier seja uma função complexa de simetria par<sup>2</sup>. Com efeito, tomando o conjugado complexo da Eq. (3.11), usando (3.12) e trocando  $\mathbf{k}$  por  $-\mathbf{k}$ ,

---

<sup>2</sup>Observe que se escrevemos  $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_{\text{Re}} + i\tilde{\delta}_{\text{Im}}$  como uma parte real e imaginária, então a parte real é uma função par e a parte imaginária é uma função ímpar. Com efeito,  $\tilde{\delta}(\mathbf{k}) = \tilde{\delta}^*(-\mathbf{k}) \Rightarrow \tilde{\delta}_{\text{Re}}(\mathbf{k}) + i\tilde{\delta}_{\text{Im}}(\mathbf{k}) = \tilde{\delta}_{\text{Re}}(-\mathbf{k}) - i\tilde{\delta}_{\text{Im}}(-\mathbf{k})$ . Para que a igualdade seja verdadeira  $\forall \mathbf{k}$  temos que impor as seguintes condições: i)  $\tilde{\delta}_{\text{Re}}(\mathbf{k}) = \tilde{\delta}_{\text{Re}}(-\mathbf{k})$ , logo  $\tilde{\delta}_{\text{Re}}$  é par; ii)  $\tilde{\delta}_{\text{Im}}(\mathbf{k}) = -\tilde{\delta}_{\text{Im}}(-\mathbf{k})$ , logo  $\tilde{\delta}_{\text{Im}}$  é ímpar. Omitimos a dependência em  $z$  sem perda de generalidade.

temos

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) = \tilde{\delta}^*(-\mathbf{k}, z). \quad (3.13)$$

Assim como fizemos para o contraste de densidade, gostaríamos de expressar a função de correlação  $\xi(x, z)$  como uma superposição de ondas planas  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ . Denominamos de *espectro de potência*  $P(k, z)$  os coeficientes dessa superposição. Dessa forma, o análogo da equação (3.10) para a função de correlação é naturalmente dado por

$$\xi(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} P(k, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.14)$$

Por outro lado, podemos perguntar se existe um análogo da equação (3.9) para o espectro de potência. Para determinar essa relação, substituímos (3.10) em (3.9) e usamos (3.12), logo

$$\begin{aligned} \xi(x, z) &= \langle \delta(\mathbf{x}_1, z) \delta(\mathbf{x}_1 + x\hat{\mathbf{x}}, z) \rangle = \langle \delta^*(\mathbf{x}_1, z) \delta(\mathbf{x}_1 + x\hat{\mathbf{x}}, z) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}, z) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_1} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}' \tilde{\delta}(\mathbf{k}', z) e^{i\mathbf{k}'\cdot(\mathbf{x}_1 + x\hat{\mathbf{x}})} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k}' \langle \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}, z) \tilde{\delta}(\mathbf{k}', z) \rangle e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}_1} e^{-i\mathbf{k}'\cdot x\hat{\mathbf{x}}} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para recuperarmos (3.14), precisamos impor que o integrando entre parênteses da equação (3.15) seja igual ao integrando da equação (3.14), isso é equivalente a definir o espectro de potência como

$$(2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k, z) = \langle \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}, z) \tilde{\delta}(\mathbf{k}', z) \rangle, \quad (3.16)$$

e por substituição direta de (3.16) em (3.15) vemos que recaímos em (3.14), como tinha que ser. Dessa forma, (3.16) é o análogo da equação (3.9) no espaço de Fourier. Ademais, usando a equação (3.13) podemos reescrever (3.16) como

$$(2\pi)^3 \delta_D^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k, z) = \langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) \tilde{\delta}(\mathbf{k}', z) \rangle. \quad (3.17)$$

### Espectro de potência: fenomenologia básica

A física envolvida no espectro de potência é rica em conceitos, e podemos analisar seu comportamento para os mais diversos tipos de cenários cosmológicos. Aqui queremos analisar apenas o comportamento básico dessa grandeza em termos de

suas variáveis (espaço  $k$  e tempo  $z$ ) bem como em relação a alguns dos principais parâmetros cosmológicos.

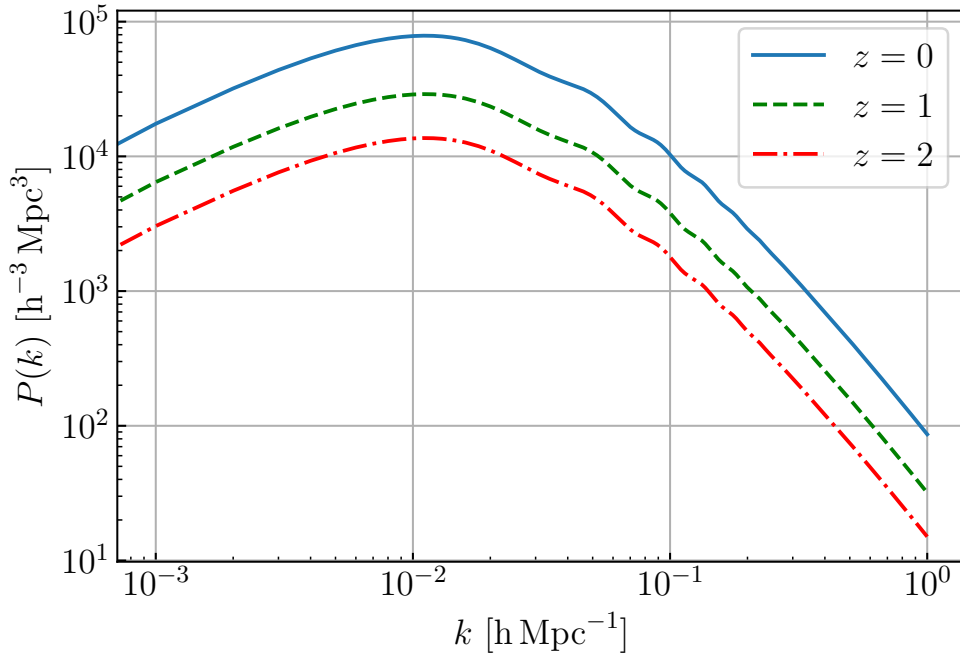


Figura 3.1: Comportamento do espectro de potência linear para três diferentes épocas da história do Universo, isto é, diferentes redshifts.

Na Figura 3.1 analisamos o comportamento do espectro de potência  $P(k, z)$  para três valores de redshift. O espectro de potência, de acordo com a Eq. (2.84) é dado por  $P(k, z) \sim kT^2(k)D^2(z)$  onde, por simplicidade, assumimos  $n_s = 1$ . Para grandes escalas ( $k$  pequeno) podemos utilizar a aproximação para a função de transferência como mostrado na Figura 2.3, isto é  $T(k) \sim 1$ . Portanto, temos  $P(k, z) \sim kD^2(z)$  para  $k \ll 1$ . De acordo com a teoria linear de perturbação, a função de crescimento pode ser aproximada<sup>3</sup> por  $D(z) \simeq (1+z)^{-1} = a$ . Assim, o espectro de potência para  $k \ll 1$  pode ser reduzido à  $P(k, z) \sim k(1+z)^{-2}$  ou simplesmente  $P(k, a) \sim ka^2$ . A medida que  $z$  aumenta, o fator de escala  $a$  diminui, logo o espectro de potência é linear com  $k$  com amplitude suprimida por  $a^2$ . Portanto, a função de crescimento apenas descola verticalmente o espectro de potência. Essa análise pode ser igualmente estendida para pequenas escalas ( $k$  grande).

Na Figura 3.2 temos o comportamento do espectro de potência em função dos

<sup>3</sup>Se tratando do modelo de Einstein-de Sitter, o valor é exato, e não uma aproximação. Mas para o período do Universo no início da era dominada pela matéria, podemos tomar essa aproximação, pois na era  $a \gtrsim a_{\text{eq}}$  a densidade de matéria é dominante sobre as demais componentes.

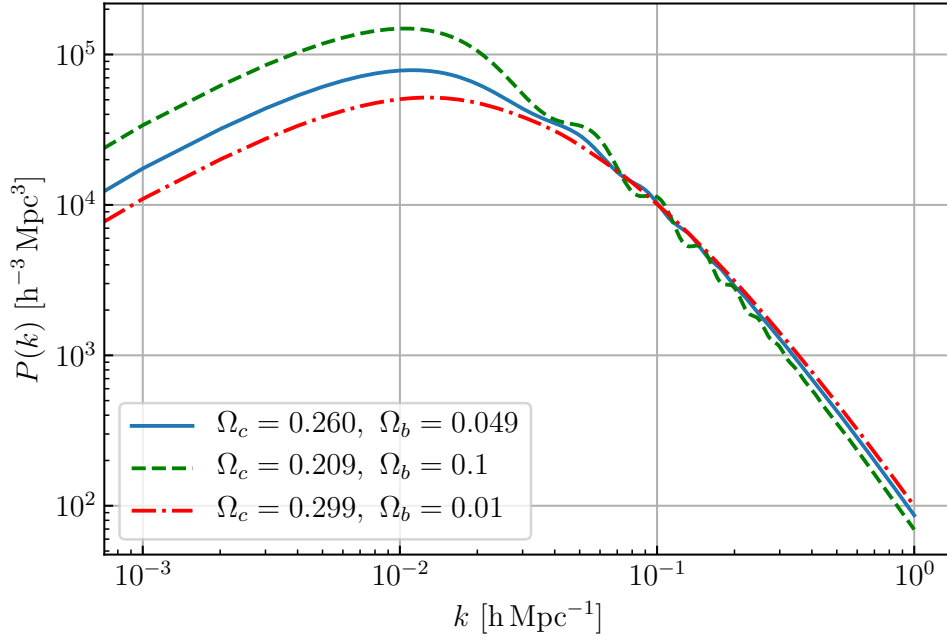


Figura 3.2: Espectro de potência em função da densidade de matéria escura  $\Omega_c$  e matéria bariônica  $\Omega_b$  mantendo a densidade total de matéria constante  $\Omega_m = \Omega_c + \Omega_b = 0.039$  e redshift  $z = 0$ .

parâmetros de densidade de matéria escura,  $\Omega_c$ , e matéria bariônica  $\Omega_b$ . A curva azul mostra o espectro de potência que mais se aproxima do nosso Universo observável, dado que a densidade de matéria escura é  $\Omega_c = 0.260$ , e de matéria bariônica é apenas  $\Omega_b = 0.049$ , como determinado pelo satélite Planck [4]<sup>4</sup>. A medida que  $\Omega_b$  aumenta, vemos que as oscilações acústicas de bárions se tornam mais pronunciadas. Isso acontece pois antes da recombinação, fótons e bárions estavam acoplados por interações eletromagnéticas formando o *baryon-photon fluid*. A competição entre gravidade (tentando colapsar as perturbações) e gradiente de pressão (contrabalançar, impedindo o colapso) gravavam ondas nesse meio denominadas por *baryonic acoustic oscillations*.

Após a recombinação, o Universo tornou-se transparente, na média os fótons e bárions já não interagem de forma tão intensa. Assim, as oscilações foram congeladas em torno de um raio (comóvel) característico,  $r_s$ , denominado por horizonte de som (*sound horizon*). É possível mostrar [54] que a distância comóvel máxima que uma perturbação no fluido bárions-fótons pôde percorrer até a época da recombinação

<sup>4</sup>Consulte a Tabela 6.1 para os valores fiduciais dos parâmetros cosmológicos.



é dada por

$$r_s = \int_0^{a_{\text{rec}}} \frac{c da}{\sqrt{3(1 + \mathcal{R}(a))a^2 H(a)}} \simeq \frac{120h^{-1}\text{Mpc}}{\sqrt{\Omega_m} \sqrt{1 + \langle \mathcal{R} \rangle}}, \quad (3.18)$$

$$\mathcal{R}(a) = \frac{3\Omega_b}{4\Omega_r} a, \quad (3.19)$$

sendo  $\langle \mathcal{R} \rangle$  a média de  $\mathcal{R}$  no intervalo de integração [54]. A função de transferência depende de  $r_s$ , mas como  $\Omega_m$  é constante  $\Rightarrow r_s = \text{constante}$  como podemos ver pela Eq. (3.18). Por outro lado, como explicado por D. J. Eisenstein e W. Hu em [22], o acoplamento entre bárions e fótons não é perfeita, o que gera um amortecimento nas oscilações acústicas de bárions. Esse efeito é denominado por *Silk damping*. Dessa forma, existe uma escala  $k_{\text{Silk}} = k_{\text{Silk}}(\Omega_m h^2, \Omega_b h^2)$  que depende explicitamente da densidade de bárions. A função de transferência (que pode ser decomposta na soma da contribuição entre bárions,  $T_b(k)$ , e matéria escura fria,  $T_c(k)$ ) também depende dessa escala, o que explica, ao menos fenomenologicamente, o comportamento amortecido das oscilações mostrado na Figura 3.2 quando se varia  $\Omega_b$ .

As Figuras 3.1 e 3.2 foram feitas considerando o espectro de potência *linear* (quando a amplitude das perturbações são  $\ll 1$ ). Entretanto, correções *não lineares* (quando a amplitude das perturbações são  $\simeq 1$ ) são importantes de serem analisadas. Existem métodos analíticos (*e.g.* teoria de perturbação renormalizada apresentada por M. Crocce e R. Scoccimarro (2006) em [19]) e numéricos (através de simulações de N-corpos) para o tratamento dessas perturbações no regime não linear. Vários códigos de cosmologia, em particular o CCL, computam o espectro de potência com a opção de introduzir a não linearidade. Podemos observar o efeito da não linearidade na Figura 3.3 que é relevante apenas para  $k > 0.1h\text{Mpc}^{-1}$ .

## 3.2 Distorção no espaço de redshift

As distorções no espaço de redshift (*redshift space distortions* RSD) surgem como consequência direta das velocidades peculiares  $\mathbf{v}_p$  das galáxias. Desse modo, a velocidade relativa das galáxias no Universo se deve à superposição da expansão acelerada (fluxo de Hubble) com o movimento próprio desses objetos que surge devido à interação gravitacional com outros objetos próximos a este, por exemplo, em grupos e aglomerados de galáxias.

Uma possível definição para o espaço de redshift é a seguinte: considerando que a posição de um objeto no espaço é dada em coordenadas esféricas  $\mathbf{x} = (x, \theta, \phi)$ , e

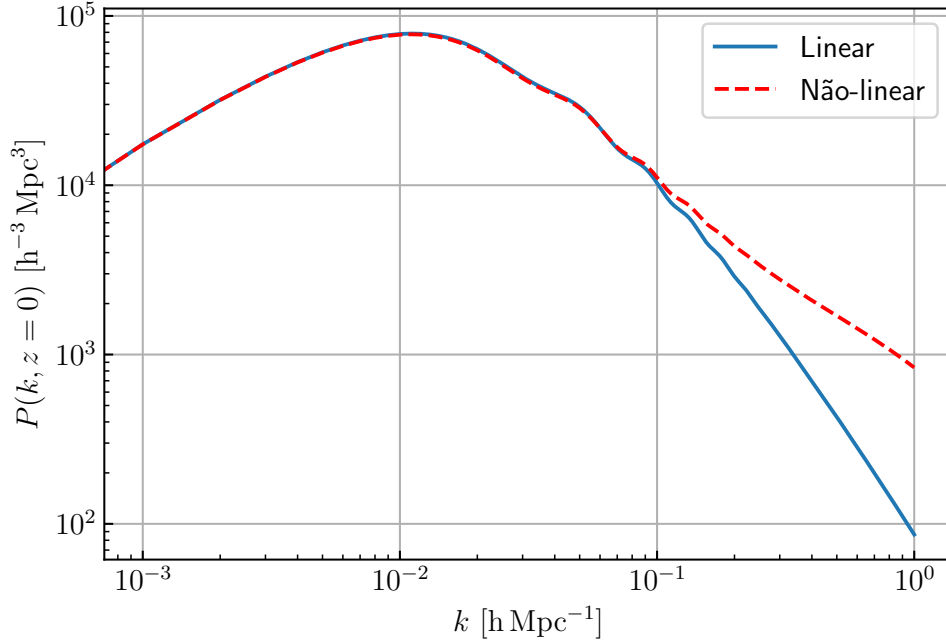


Figura 3.3: Comparação entre os espectros de potência linear e não linear.

que o efeito de RSD não afeta as coordenadas angulares, então denomina-se *espaço de redshift* o espaço real tal que a coordenada radial é perturbada (distorcida) proporcionalmente à velocidade peculiar desse objeto. Dessa forma podemos escrever  $(x, \theta, \phi) \xrightarrow{\text{RSD}} (x + \delta x, \theta, \phi)$ , e definindo  $\mathbf{x}_s := (x_s, \theta, \phi)$  onde  $x_s := x + \delta x$ , dizemos que  $\mathbf{x}_s$  representa o conjunto de vetores que gera [54, p. 399] o espaço de redshift. Assim, estamos interessados em encontrar a função que estabelece a relação entre  $x_s$  e  $x$ , *i.e*

$$x_s = x_s(x, z, \mathbf{v}_p). \quad (3.20)$$

### 3.3 Coordenadas no espaço de redshift

O redshift observado  $z_{obs}$  possui uma contribuição do redshift cosmológico  $z$ , devido à expansão acelerada do Universo, e uma contribuição do redshift peculiar  $z_p$ , devido às velocidades peculiares, dessa forma, podemos escrever [6, p. 46]:

$$z_{obs} = z_{obs}(z, z_p) = z + z_p. \quad (3.21)$$

Para encontrar a forma que a função (3.21) assume em termos da velocidade peculiar, comecemos com a relação entre a coordenada física  $\mathbf{r}$  e a coordenada comóvel  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}(t) \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} = H\mathbf{r} + a\dot{\mathbf{x}}. \quad (3.22)$$

O segundo termo de (3.22) possui informação sobre a velocidade peculiar então podemos definir

$$\mathbf{v}_p = a\dot{\mathbf{x}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{1+z}. \quad (3.23)$$

O vetor  $\mathbf{v}_p$  pode ter uma orientação arbitrária em relação a um observador qualquer, mas somente a parcela de  $\mathbf{v}_p$  que está orientada paralelamente à linha de visada do observador é a que contribui para o redshift. Assim, é natural definir o redshift peculiar como

$$z_p = \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c} = \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c}(1+z). \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.21) temos que [14, p. 51]:

$$z_{obs} = z + \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{\mathbf{x}}}{c}(1+z). \quad (3.25)$$

A equação (3.25) nos diz que qualquer medida do redshift de um objeto no céu, carrega informação sobre o fluxo de Hubble, mas também informação sobre a velocidade peculiar. Isso implica que estamos necessariamente confinados ao espaço de redshift e que portanto, medidas de distâncias são feitas nesse espaço. Em particular, para descobrir a forma da função (3.20) utilizamos a definição de distância comóvel:

$$\begin{aligned} x_s(z) &= \int_0^{z_{obs}} \frac{c \, dz'}{H(z')} = \int_0^{z+z_p} \frac{c \, dz'}{H(z')} \\ &= \int_0^z \frac{c \, dz'}{H(z')} + \int_z^{z+z_p} \frac{c \, dz'}{H(z')} \\ &\approx x(z) + \frac{c}{H(z)} \Big|_z ((z+z_p) - z) \\ &= x(z) + \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{\mathbf{x}}}{H(z)}(1+z) \end{aligned} \quad (3.26)$$

sendo a aproximação em (3.26) permitida devido a que  $z_p \ll z$ , e na última linha foi usado (3.24).

### 3.4 Distribuição de galáxias no espaço de redshift

A equação (3.26) nos diz que as medidas de distâncias estimadas por meio do redshift observado sofrem um desvio, para mais ou para menos, em torno do seu valor real devido à velocidade peculiar. Isso significa que uma distribuição de matéria, *e.g.* grupo ou aglomerado de galáxias, pode ter a sua forma observada alterada em relação à sua forma real. Em particular, uma distribuição esférica de matéria pode ter sua morfologia alterada, dilatada ou comprimida, ao longo da direção radial de observação, e tudo isso ainda depende do observador. Em outras palavras, as velocidades peculiares são fontes de não-homogeneidades.

Para estudar como a forma de uma distribuição de galáxias é alterada do espaço real para o espaço de redshift, começamos distinguindo, de modo geral, entre duas situações: pequenas e grandes escalas. Em pequenas escalas ocorre o efeito conhecido como “Dedos de Deus” (“*Fingers of God*”) como mostrado na figura 3.4. Nesse cenário, um aglomerado de galáxias ocupa uma pequena região do espaço de modo que podemos considerar que todas as galáxias estão aproximadamente a uma mesma distância do observador. Como o campo gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da separação, é natural esperar que as galáxias desse aglomerado possuam alta dispersão de velocidades, como está representado na parte inferior da figura 3.4 pelo comprimento da seta. Isso faz com que o observador, situado na parte inferior da figura, perceba a forma da distribuição como sendo esticada ao longo da direção da linha de visada, como representado na parte inferior direita de 3.4, resultado na forma do *finger of God*.

Por outro lado, em grandes escalas, ocorre o efeito oposto. As galáxias que estão mais distantes do observador, em relação ao centro do aglomerado, parecem mais próximas no espaço de redshift em comparação com sua posição no espaço real. O oposto acontece para as galáxias que estão mais próximas. Como podemos ver pela parte superior da figura 3.4, isso faz com que a matéria distribuída de forma esférica no espaço real, pareça achatada ao longo da linha de visada no espaço de redshift, dando origem ao chamado “*squashing effect*”, também conhecido como efeito Kaiser.

Por fim, temos o efeito intermediário denominado “*turnaround*”, que ocorre porque as velocidades peculiares são tais que a posição de galáxias diametralmente opostas em relação a uma linha paralela à linha de visada aparenta serem iguais no espaço de redshift, fazendo com que a distribuição dessas galáxias no espaço de redshift aparente estar colapsada ao longo de uma linha perpendicular à linha de visada do observador.

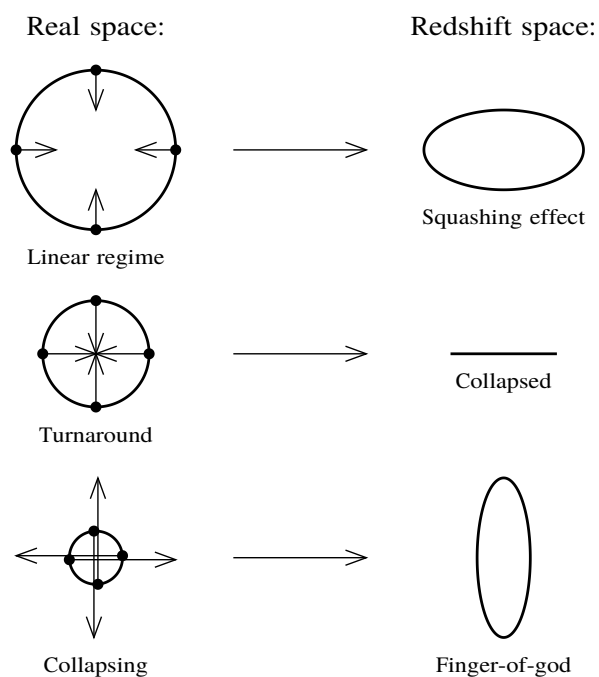


Figura 3.4: Representação de como as velocidades peculiares influenciam na distribuição de galáxias do espaço real (à esquerda) para espaço de redshift (à direita). As galáxias são representadas por pontos pretos e as setas indicam as velocidades peculiares. As setas apontam para o centro indicando que as galáxias estão sendo atraídas por efeito da gravidade. O tamanho da seta representa a magnitude da velocidade. Em grandes escalas (parte superior) a velocidade peculiar das galáxias é suficientemente pequena para que a galáxia mais próxima à nós, pareça estar um pouco mais distante do que de fato está e o efeito oposto ocorre com a galáxia mais distante. Dessa forma, no espaço de redshift, a distribuição parece estar “amassada/achatada” (Squashin effect) em ao longo da linha de visada. Em pequenas escalas (parte inferior), ocorre o efeito oposto. Já o meio da figura representa o caso intermediário. Fonte [31].

### 3.5 Jacobiano do efeito Kaiser

Estamos interessados em analisar o efeito das velocidades peculiares no espectro de potência sob a lente da teoria de perturbação no regime linear. Portanto, a partir desse ponto, vamos nos limitar ao efeito Kaiser. Sabemos que o espectro de potência  $P$  é definido em termos do contraste de densidade  $\delta$ . Dessa forma, conhecendo o impacto do efeito Kaiser em  $\delta$  automaticamente determinaremos o impacto desse efeito em  $P$ , isto é:

$$\delta \rightarrow \delta_s \Rightarrow P \rightarrow P_s.$$

A comunicação, no regime linear, entre o espaço real e o espaço de redshift é feita por intermédio do *operador de distorção linear de redshift*  $\mathbf{S}$  [31], ou por simplicidade, operador distorção. Dessa forma, dado o contraste de densidade  $\delta$  no espaço real, podemos determinar como é essa distribuição no espaço de redshift aplicando o operador distorção  $\mathbf{S}$ , isto é:

$$\delta_s = \mathbf{S} \delta. \quad (3.27)$$

Para determinar a forma de  $\mathbf{S}$  começamos com uma suposição fundamental proposta por Kaiser em 1987 [36], de que a quantidade de galáxias, ou de modo mais geral, o número de traçadores de matéria, deve ser uma quantidade que se conserva localmente entre o espaço real e o espaço de redshift, isto é:

$$n_s(\mathbf{x}_s) d^3 \mathbf{x}_s = n(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}, \quad (3.28)$$

onde  $n_s$  e  $\mathbf{x}_s$  são a densidade numérica e o vetor posição no espaço de redshift, respectivamente, e o mesmo para  $n$  e  $\mathbf{x}$  no espaço real. Dessa forma, a equação (3.28) pode ser escrita como

$$n_s(\mathbf{x}_s) = J n(\mathbf{x}), \quad (3.29)$$

sendo  $J$  o Jacobiano da transformação definido por

$$J = \left| \frac{d^3 \mathbf{x}}{d^3 \mathbf{x}_s} \right|. \quad (3.30)$$

Os elementos infinitesimais de volume são dados por

$$d^3\mathbf{x}_s = x_s^2 dx_s d\Omega, \quad d^3\mathbf{x} = x^2 dx d\Omega, \quad (3.31)$$

onde o elemento de ângulo sólido,  $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$ , é o mesmo para ambos os espaços [14, p. 52]. Dessa forma, substituindo (3.31) em (3.30) temos

$$J = \frac{dx}{dx_s} \frac{x^2}{x_s^2}. \quad (3.32)$$

Utilizando a equação (3.26) o Jacobiano (3.32) pode ser reescrito como:

$$J = \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+z}{H(z)} \mathbf{v}_p \cdot \hat{x} \right) \right]^{-1} \left[ 1 + \frac{1+z}{H(z)} \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{x} \right]^{-2}. \quad (3.33)$$

Seguindo o argumento de Kaiser [36] vamos mostrar que na equação (3.33) podemos tomar a seguinte aproximação

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+z}{H(z)} \mathbf{v}_p \cdot \hat{x} \right) \gg \frac{1+z}{H(z)} \frac{\mathbf{v}_p \cdot \hat{x}}{x}. \quad (3.34)$$

Se expressarmos as perturbações como ondas planas, então no espaço de Fourier o operador  $\frac{\partial}{\partial x}$  é associado com o número de onda  $k$ , isto é,  $\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow k$ . Dessa forma o primeiro termo de (3.34) será da ordem de  $kv_p(1+z)/H$  e o segundo termo será da ordem de  $v_p(1+z)/(Hx)$ , portanto o primeiro é  $kx$  vezes o segundo termo. Assim, para que (3.34) seja válida, precisamos argumentar que  $kx \gg 1$ . A profundidade do *survey* é da ordem de  $x$ , e  $k$  está associado ao comprimento de onda  $\lambda \sim 1/k$  das perturbações que conseguimos medir a partir dos dados. Para o efeito Kaiser, portanto no regime linear, temos duas situações para considerar: o número de modos de Fourier com  $\lambda \sim x$  e o número de modos de Fourier com  $\lambda \ll x$ . Estamos interessados no regime que possui o maior número de modos, pois este será o que mais contribui para a perturbação, e portanto será o que mais contribui para a formação de estruturas. O que ocorre é que modos com  $\lambda \sim x$  estão em menor número do que modos com  $\lambda \ll x$ , e como a onda plana é a superposição dos modos de Fourier, então os modos com  $\lambda \ll x$  contribuem muito mais para a formação de estrutura do que os modos com  $\lambda \sim x$ . Na prática é feita uma média sobre todos os modos de Fourier para estimar o espectro de potência. Então os modos que estão em menor número,  $\lambda \sim x$ , são pobremente determinados pelo *survey*, e a contribuição maior vem dos modos com  $\lambda \ll x$  que são, por consequência, os que

mais contribuem para a formação de estruturas no Universo.

Além da aproximação (3.34) devemos lembrar que o módulo da velocidade peculiar de uma galáxia é muito menor do que a taxa de expansão do Universo, pois é considerada apenas uma perturbação perante ao fluxo de Hubble, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+z}{H(z)} \mathbf{v}_p \cdot \hat{x} \right) \ll 1. \quad (3.35)$$

Por fim, as aproximações (3.34) e (3.35) nos permitem escrever o Jacobiano (3.33) como

$$J \approx 1 - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+z}{H(z)} \mathbf{v}_p \cdot \hat{x} \right). \quad (3.36)$$

### 3.6 Contraste de densidade no espaço de redshift

O Jacobiano dado pela equação (3.36), juntamente com a expressão (3.29), nos permite determinar como a densidade de galáxias no espaço de redshift é determinada por meio da densidade de galáxias no espaço real. Essa relação também pode ser estabelecida para os contraste de densidade no espaço de redshift e no espaço real, que são definidos, respectivamente, por

$$\delta_s(\mathbf{x}_s) = \frac{n_s(\mathbf{x}_s)}{\bar{n}} - 1, \quad \delta(\mathbf{x}) = \frac{n(\mathbf{x})}{\bar{n}} - 1, \quad (3.37)$$

sendo  $\bar{n}$ , a densidade média de galáxias, a mesma em ambos os espaços [14, p. 53]. Substituindo (3.37) e (3.36) em (3.29) temos

$$1 + \delta_s(\mathbf{x}_s) = \left[ 1 - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+z}{H(z)} \mathbf{v}_p \cdot \hat{x} \right) \right] (1 + \delta(\mathbf{x})), \quad (3.38)$$

e expandindo o lado direito vemos que o termo  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+z}{H(z)} \mathbf{v}_p \cdot \hat{x} \right) \times \delta$  é de ordem  $\mathcal{O}^2(\delta, \mathbf{v}_p)$ . Como estamos considerando a teoria de perturbação linear, a equação (3.38) até primeira ordem em  $\delta$  e  $\mathbf{v}_p$  é simplificada para

$$\delta_s(\mathbf{x}_s) = \delta(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+z}{H(z)} \mathbf{v}_p \cdot \hat{x} \right). \quad (3.39)$$

Para escrever a equação (3.39) na forma (3.27) vemos que precisamos encontrar uma relação entre  $\mathbf{v}_p$  e  $\delta(\mathbf{x})$ . Isso é alcançado recorrendo à equação da continuidade, que é dada por

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.40)$$



Por outro lado, no âmbito da teoria de perturbação linear, a expressão analítica para o contraste de densidade é dada por separação de variáveis, isto é, o produto entre uma parte temporal, descrita pela função de crescimento,  $D(t)$ , e uma parte espacial estacionária descrita pelo contraste de densidade avaliado em  $t = 0$ ,  $\delta(\mathbf{x}, 0)$ . Ou seja

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D(t)\delta(\mathbf{x}, 0). \quad (3.41)$$

Substituindo (3.41) no primeiro termo de (3.40) e reorganizando os termos de forma conveniente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{dD(t)}{dt} \delta(\mathbf{x}, 0) = \frac{da}{dt} \frac{dD(a)}{da} \delta(\mathbf{x}, 0) = \dot{a} \frac{D}{a} \frac{dD(a)}{da} \delta(\mathbf{x}, 0) \\ \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) \left( \frac{a}{D(a)} \frac{dD(a)}{da} \right) (\delta(\mathbf{x}, 0) D(t)) = H(a) f(a) \delta(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde definimos a função adimensional

$$f(a) := \frac{d \ln D(a)}{d \ln a}, \quad (3.43)$$

que é denominada por *taxa de crescimento* dos modos de Fourier, como descrito por Hamilton (1992) em [30]. Dessa forma, substituindo (3.42) em (3.40) temos a relação

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) = -a H(a) f(a) \delta(\mathbf{x}, t), \quad (3.44)$$

veja, por exemplo, [14, p. 24].

A equação (3.44) diz que a divergência do campo  $\mathbf{v}_p$  é proporcional ao contraste de densidade. Poderíamos nos perguntar se existe uma relação semelhante para o rotacional de  $\mathbf{v}_p$ . De modo geral, sob certas circunstâncias, um vetor pode ser decomposto em uma parte escalar e em uma parte vetorial. Entretanto, no contexto da teoria relativística das perturbações lineares, estamos assumindo implicitamente perturbações escalares [14, p. 25] ou [6, p. 57]. Logo  $\mathbf{v}_p$  é *curl-free*, isto é, seu rotacional é nulo. Analogamente, como estamos supondo um fluido ideal, sem pressão, para descrever o campo de velocidade peculiar, qualquer vorticidade linear inicial nesse campo, decaíra inversamente proporcional ao fator de escala à medida que o Universo se expande, como mostrado em [9, p. 17]. Assim, podemos escrever

$$\nabla \times \mathbf{v}_p \propto \frac{1}{a} \rightarrow 0. \quad (3.45)$$

A equação (3.45) nos permite escrever a velocidade peculiar somente em termos de

um campo escalar [56, p. 45], isto é

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) = \nabla \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.46)$$

dessa forma, substituindo (3.46) em (3.44) temos

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{x}, t) = -aH(a)f(a)\delta(\mathbf{x}, t), \quad (3.47)$$

e aplicando a inversa do operador Laplaciano,  $\nabla^{-2}$ , em (3.47), seguido pelo gradiente de (3.46), chegamos que

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) = -aH(a)f(a)\nabla (\nabla^{-2}\delta(\mathbf{x}, t)). \quad (3.48)$$

Finalmente, substituindo (3.48) em (3.39) temos que

$$\begin{aligned} \delta_s(\mathbf{x}_s, t) &= \delta(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1+z}{H(z)} [-aH(a)f(a)\nabla (\nabla^{-2}\delta(\mathbf{x}, t))] \cdot \hat{x} \right\} \\ &= \delta(\mathbf{x}, t) + f(a) \frac{\partial}{\partial x} [\hat{x} \cdot \nabla (\nabla^{-2}\delta(\mathbf{x}, t))] \\ &= \left[ 1 + f(a) \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \cdot \nabla \nabla^{-2} \right] \delta(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.49)$$

e comparando a última linha de (3.49) com a equação (3.27) concluímos que o operador distorção é dado pela equação integro-diferencial

$$\mathbf{S} = \mathbf{1} + f(a) \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \cdot \nabla \nabla^{-2}, \quad (3.50)$$

onde  $\mathbf{1}$  é o operador identidade, e o último termo de (3.50) é o responsável pela distorção do espaço real para o espaço de redshift.

### Taxa de crescimento

De acordo com a Eq. (3.43) a função taxa de crescimento é função somente de  $a$ . Entretanto, podemos deixar a densidade de matéria,  $\Omega_m$ , e de energia escura,  $\Omega_\Lambda$ , como parâmetros livres. Nesse caso, temos a seguinte generalização  $f(a) \rightarrow f(a; \Omega_m, \Omega_\Lambda)$ . Isso nos permite investigar a intensidade da distorção no espaço de redshift também em função da densidade de matéria no Universo.

Considere que a densidade de radiação é zero,  $\Omega_r = 0$ , e que o Universo é plano,  $\Omega_k = 0$ . Então, a partir da Eq. (3.43) para a taxa de crescimento, e da Eq. (2.82) para a função de crescimento, é possível mostrar com alguns passos simples o seguinte

resultado

$$f(a; \Omega_m, \Omega_\Lambda) = \frac{\Omega_m}{2a^2 E^2(a; \Omega_m, \Omega_\Lambda)} \left[ \frac{5}{D(a; \Omega_m, \Omega_\Lambda)} - \frac{3}{a} \right]. \quad (3.51)$$

Estamos interessados em computar a Eq. (3.51) para o tempo presente,  $a(t_0) = 1$ , e considerando que  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ . Dessa forma, podemos simplificar a notação para  $f(\Omega_m) := f(1; \Omega_m, 1 - \Omega_m)$ .

Na literatura podemos encontrar as seguintes aproximações

$$f(\Omega_m) = \Omega_m^{0.6} + \frac{1 - \Omega_m}{70} \left( 1 + \frac{\Omega_m}{2} \right), \quad (3.52)$$

$$f(\Omega_m) = \Omega_m^{0.6}. \quad (3.53)$$

Na Figura 3.5 mostramos três curvas para a taxa de crescimento. A curva em azul foi obtida pela Eq. (3.51). A curva em verde foi obtida pela Eq. (3.52) [21]<sup>5</sup>, e a curva em vermelho foi obtida pela Eq. (3.53) [30].

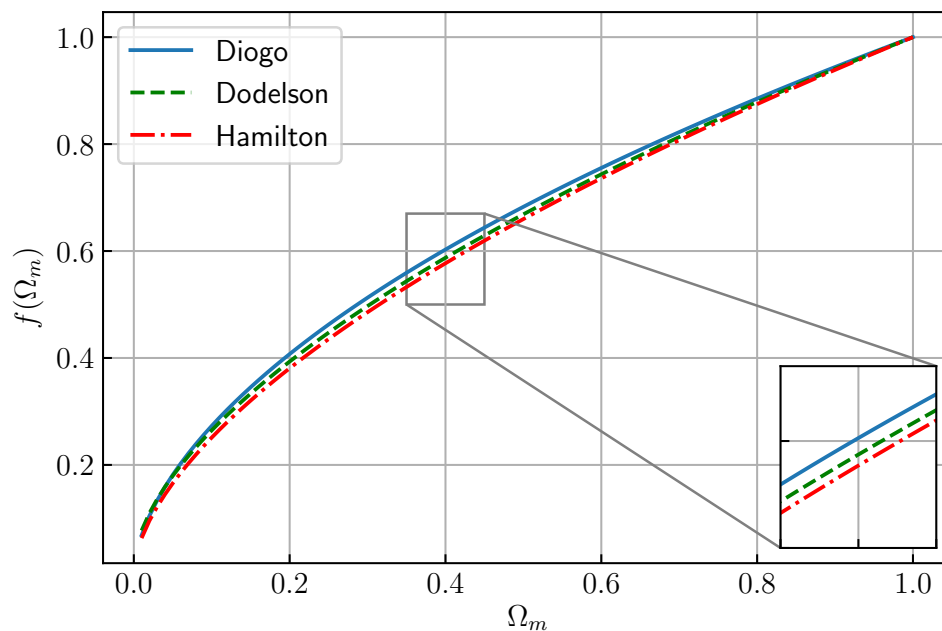


Figura 3.5: Comparação de três curvas para a taxa de crescimento  $f$ .

<sup>5</sup>A equação (3.52) é apresentada no exercício 7 do capítulo 9: *Probes of Inhomogeneities*.

### 3.6.1 Bias entre galáxias e matéria escura

O contraste de densidade com o qual lidamos nas demonstrações anteriores é o campo de contraste de densidade da matéria total. Portanto, o contraste de densidade para a matéria luminosa (galáxias),  $\delta_g$ , pode ser modelada como sendo uma certa porção  $b$  do contraste de densidade total  $\delta$ , isto é

$$\delta_g = b\delta, \quad (3.54)$$

onde  $b = b(\mathbf{x}, z)$  denomina-se por parâmetro de viés (*bias*), e no caso geral pode depender da posição bem como do redshift.

Como o que observamos é a luz das galáxias, queremos reescrever as equações em termos do contraste de densidade de galáxias. Portanto, devemos tomar a mudança  $\delta = \delta_g/b$ . Porém, para a notação não ficar carregada com o subíndice  $g$ , vamos simplesmente reescrever  $\delta \rightarrow \delta/b$ . Portanto, como podemos ver a partir da Eq. (3.47), o fator  $f$  fica dividido por  $b$ , portanto, definimos:

$$\beta := \frac{f}{b}. \quad (3.55)$$

Dessa forma, doravante as equações serão expressadas em termos de  $\beta$ .

## 3.7 Aproximação de observador distante

Como dito no começo da subseção 3.4, os efeitos observados no espaço de redshift de uma distribuição de galáxias dependem da escala e do observador. Naquela subseção, discutimos apenas o efeito da escala da distribuição. Agora estamos interessados em analisar como esses efeitos dependem da posição relativa do observador em relação à distribuição de galáxias. Se na subseção 3.4 dividimos a distribuição entre pequenas e grandes escalas, aqui faremos algo análogo para a posição relativa do observador à fonte. Consideraremos, de modo geral, que o observador possa estar perto ou distante da distribuição de galáxias.

O impacto da posição relativa do observador à fonte na distorção da distribuição no espaço de redshift pode ser visto pela figura 3.6. Os pontos pretos representam as galáxias e ambas as figuras são distorções, de uma distribuição esférica no espaço real, representadas no espaço de redshift. A diferença entre as figuras é a posição relativa do observador à fonte. O painel da esquerda de 3.6 representa um *observador distante* da fonte e localizado na parte de baixo da figura. Por outro lado, o painel

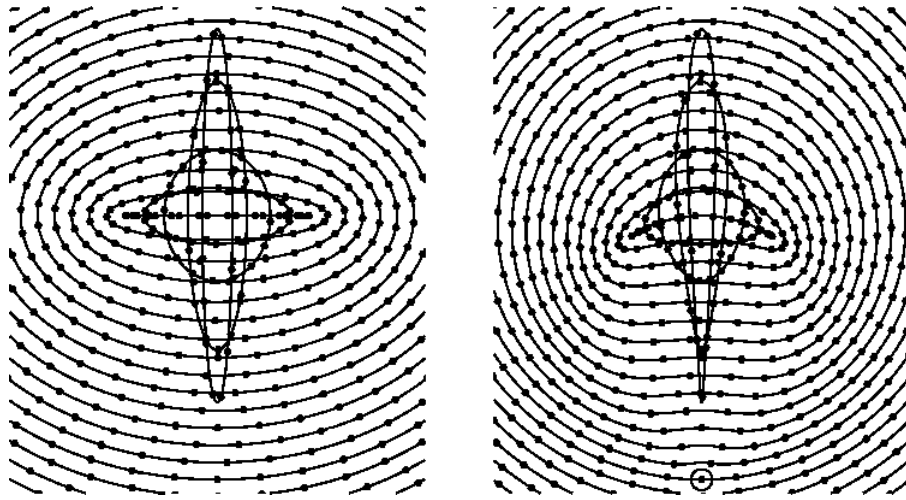


Figura 3.6: Ambas as figuras, direita e esquerda, estão representando uma distribuição de galáxias no espaço de redshift. No espaço real, essa distribuição é esférica, e não está sendo representada aqui. A figura da esquerda representa o regime linear, e ocorre quando o observador está longe da distribuição. A figura da direita representa o regime não linear, e ocorre quando o observador (indicado pelo pequeno círculo na parte inferior) está próximo da distribuição. Nesse caso, o observador percebe o efeito denominado por “finger of God”. Fonte [31].

da direita de 3.6 representa um *observador próximo* da fonte, também localizado na parte de baixo da figura e representado pelo ponto preto envolto pelo círculo. Em ambas as figuras podemos ver as pequenas e as grandes escalas, com a diferença que quando o observador está próximo à fonte, em pequenas escalas, a parte do “*finger of God*” próxima ao observador é mais aguda. Por outro lado, em grandes escalas, a “*squashed-shaped*” do efeito Kaiser agora aparece como “*kidney-shaped*” [31, p. 4], isto é, na forma de “rim”.

Na subseção 3.5 tomamos o efeito Kaiser com a finalidade de tratar o RSD no regime linear. Complementarmente, para simplificar, assumiremos que o observador está distante da fonte. Isso é equivalente a dizer que estamos sob a hipótese da *aproximação de observador distante*, o que será muito útil para deduzir a equação do espectro de potência no espaço de redshift.

### 3.8 Espectro de potência no espaço de redshift

O espectro de potência no espaço de redshift é dado por

$$P_s(\mathbf{k}) = |\tilde{\delta}_s(\mathbf{k})|^2, \quad (3.56)$$

Portanto, precisamos obter a relação entre a transformada de Fourier do contraste de densidade no espaço real e sua equivalente aplicada no espaço de redshift. Esta última pode ser obtida de (3.39), mas como podemos ver a partir dessa equação, primeiramente precisaremos da transformada de Fourier da velocidade peculiar, que por sua vez pode ser obtida de (3.44).

A transformada de Fourier de uma função  $f(\mathbf{x}, t)$  é dada por

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{F}\{f(\mathbf{x}, t)\} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x f(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.57)$$

Aplicando (3.57) ao lado direito da equação (3.44) é imediato ver que

$$\mathcal{F}\{-aH(a)\beta(a)\delta(\mathbf{x}, t)\} = -aH(a)\beta(a)\mathcal{F}\{\delta(\mathbf{x}, t)\} = -aH(a)\beta(a)\tilde{\delta}(\mathbf{k}, t). \quad (3.58)$$

Analogamente, a transformada de Fourier do lado esquerdo da equação (3.44) é dado por

$$\mathcal{F}\{\nabla \cdot \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t)\} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x [\nabla \cdot \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t)] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.59)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \nabla \cdot [\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] + i\mathbf{k} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.60)$$

$$= \lim_{S \rightarrow \infty} \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + i\mathbf{k} \cdot \mathcal{F}\{\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, t)\} \quad (3.61)$$

$$= i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_p(\mathbf{k}, t), \quad (3.62)$$

onde de (3.59) para (3.60) usamos integração por partes, de (3.60) para (3.61) usamos o teorema do Divergente, e de (3.61) para (3.62) utilizamos o fato que o campo de velocidade peculiar de uma certa distribuição de matéria (*e.g.*, aglomerado de galáxias), que ocupa uma região *finita* do espaço, vai a zero à medida que nos afastamos da distribuição. Por isso a integral de superfície, no limite, é nula.

Combinando as equações (3.58) e (3.62), temos que a representação no espaço de Fourier de (3.44) é dado por

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_p(\mathbf{k}, t) = i a H(a) \beta(a) \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t). \quad (3.63)$$

O lado esquerdo da equação (3.63) é a projeção de  $\tilde{\mathbf{v}}_p$  em  $\mathbf{k}$ , o que nos diz que, *a priori*,  $\tilde{\mathbf{v}}_p$  teria uma componente não colinear ao vetor  $\mathbf{k}$ . Entretanto, essa componente seria a responsável por gerar vorticidade no campo de velocidade peculiar, só que dessa vez, na representação de Fourier. Porém, o mesmo argumento da seção 3.6

vale aqui: como  $\mathbf{v}_p$  é *curl-free*, o mesmo valerá para a sua transformada de Fourier. Logo,  $\tilde{\mathbf{v}}_p$  deve ser necessariamente colinear ao número de onda  $\mathbf{k}$ . Assim, a equação (3.63) se reduz a (confira [14, pgs. 25 e 54], [6, p. 57] e [56, p. 45])

$$\tilde{\mathbf{v}}_p(\mathbf{k}, t) = i a H(a) \beta(a) \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t) \frac{\mathbf{k}}{k^2}. \quad (3.64)$$

Agora, como temos  $\tilde{\mathbf{v}}_p$ , podemos aplicar a transformada de Fourier em (3.39) (veja [56, p. 46]).

$$\tilde{\delta}_s(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{\delta_s(\mathbf{k})\} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[ \delta(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1+z}{H(z)} \mathbf{v}_p \cdot \hat{z} \right) \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.65)$$

$$= \tilde{\delta}(\mathbf{k}) - i \beta(a) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\mathbf{k}') \frac{\mathbf{k}'}{k'^2} \cdot \hat{z} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.66)$$

$$= \tilde{\delta}(\mathbf{k}) - i \beta(a) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\mathbf{k}') \left( \frac{\mathbf{k}'}{k'^2} \cdot \hat{z} \right) (i\mathbf{k}' \cdot \hat{z}) \int_{\mathbb{R}^3} d^3x e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \quad (3.67)$$

$$= \tilde{\delta}(\mathbf{k}) + \beta(a) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\mathbf{k}') (\hat{k}' \cdot \hat{z})^2 \delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (3.68)$$

$$= (1 + \beta \mu_{kz}^2) \tilde{\delta}(\mathbf{k}). \quad (3.69)$$

Detalhando os passos acima: i) da equação (3.65) para (3.66), usamos (3.64), pois pela transformada de Fourier inversa, temos que  $\mathbf{v}_p(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\mathbf{v}}_p(\mathbf{k})\}$ . ii) De (3.66) para (3.67) comutamos a derivada parcial em  $x$  com a integral em  $k'$ , o que nos dá o termo  $i\mathbf{k}' \cdot \hat{x}$ , a qual, usando a aproximação de observador distante, se transforma em  $i\mathbf{k}' \cdot \hat{z}$ . iii) Comutamos as integrais entre  $x$  e  $k'$ , fazendo com que, de (3.67) para (3.68), apareça o delta de Dirac tridimensional. iv) Por fim, de (3.68) para (3.69), definimos o cosseno do ângulo entre  $\hat{k}$  e  $\hat{z}$ , isto é,  $\mu_{kz} := \hat{k} \cdot \hat{z}$ .

Uma demonstração alternativa da equação (3.69) pode ser obtida diretamente do operador distorção [31, p. 32]. Na aproximação de observador distante, a equação (3.50) se reduz à

$$\mathbf{S} = \mathbf{1} + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^{-2}, \quad (3.70)$$

e a representação de Fourier do segundo termo de (3.70) é  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \leftrightarrow k_z^2$  e  $\nabla^{-2} \leftrightarrow 1/k^2$ , logo,  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^{-2} \leftrightarrow k_z^2/k^2 = (\hat{k} \cdot \hat{z})^2 = \mu_{kz}^2$ . Assim, a transformada de Fourier do operador distorção (3.70) é

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{1} + \beta \mu_{kz}^2. \quad (3.71)$$

Logo, usando (3.27) e (3.71), temos  $\mathcal{F}\{\delta_s\} = \mathcal{F}\{\mathbf{S}\delta\} \Rightarrow \tilde{\delta}_s = \tilde{\mathbf{S}}\tilde{\delta} = (1 + \beta \mu_{kz}^2)\tilde{\delta}$ .

Finalmente, substituindo a equação (3.69) em (3.56), encontramos a relação entre

entre o espectro de potência no espaço real e no espaço de redshift,

$$P_s(\mathbf{k}) = |\tilde{\delta}_s(\mathbf{k})|^2 = (1 + \beta\mu_{kz}^2)^2 |\tilde{\delta}(\mathbf{k})|^2 = (1 + \beta\mu_{kz}^2)^2 P(k), \quad (3.72)$$

onde  $P(k)$  é o espectro de potência da matéria no espaço real.

A equação (3.72) nos diz que se o número de onda  $\mathbf{k}$  da perturbação estiver direcionada ao longo da linha de visada, então a amplificação da distorção, dada por  $(1 + \beta)^2$ , será máxima. Reciprocamente, se  $\mathbf{k}$  for perpendicular à linha de visada do observador, então nenhuma distorção é percebida, isto é,  $P(\mathbf{k}_s) = P(k)$ . De modo geral, se  $\cos^{-1}(\mu_{kz})$  é o ângulo entre  $\mathbf{k}$  e  $\hat{z}$ , então a amplificação da distorção é proporcional à  $(1 + \beta\mu_{kz}^2)^2$ .

### 3.9 Função de correlação no espaço de redshift

Agora que temos o espectro de potência no espaço de redshift, podemos encontrar a sua transformada de Fourier, que nada mais é do que a função de correlação espacial de dois pontos no espaço de redshift, isto é

$$\xi_s(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_s(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.73)$$

Primeiramente, introduzimos a *expansão de Rayleigh da onda plana* que é a exponencial escrita em termos dos harmônicos esféricos denominada por

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}). \quad (3.74)$$

Substituindo (3.72) e (3.74) em (3.73) temos

$$\begin{aligned} \xi_s(\mathbf{x}) &= \int \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} k^2 d^2\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} (1 + \beta\mu_{kz}^2)^2 P(k) \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} i^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} i^\ell \xi_\ell(x) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} (1 + \beta\mu_{kz}^2)^2 Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde definimos os chamados *multipolos da função de correlação* dados por

$$\xi_\ell(x) := \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) j_\ell(kx). \quad (3.76)$$



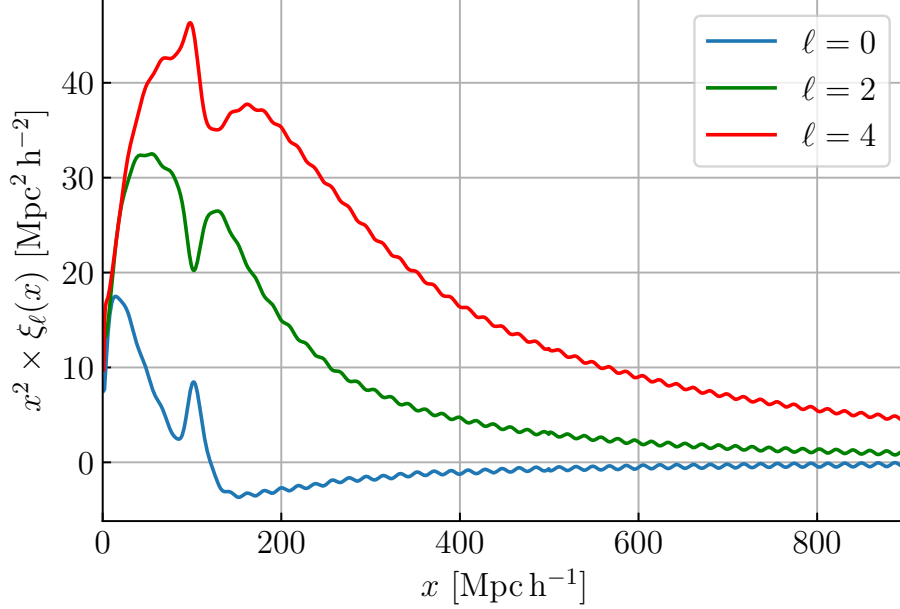


Figura 3.7: Os três primeiros multípolos pares referente à equação (3.76). As pequenas oscilações para  $x$  grande ( $\gtrsim 200$ ) são provocadas pelas funções esféricas de Bessel. Veja a §6.4 para uma discussão mais detalhada sobre as dificuldades impostas pelas funções de Bessel à programação.

Por outro lado, os harmônicos esféricos em termos dos polinômios associados de Legendre, são dados por

$$Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) = Y_\ell^m(\theta_{\hat{\mathbf{x}}}, \phi_{\hat{\mathbf{x}}}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \mathcal{P}_\ell^m(\cos \theta_{\hat{\mathbf{x}}}) e^{im\phi_{\hat{\mathbf{x}}}} \quad (3.77)$$

$$Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) = Y_\ell^m(\theta_{\hat{\mathbf{k}}}, \phi_{\hat{\mathbf{k}}}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \mathcal{P}_\ell^m(\cos \theta_{\hat{\mathbf{k}}}) e^{im\phi_{\hat{\mathbf{k}}}}, \quad (3.78)$$

sendo  $\theta_{\hat{\mathbf{x}}}$  e  $\theta_{\hat{\mathbf{k}}}$  os ângulos polares e  $\phi_{\hat{\mathbf{x}}}$  e  $\phi_{\hat{\mathbf{k}}}$  os ângulos azimutais. Substituindo (3.77) e (3.78) em (3.75), temos

$$\begin{aligned} \xi_s(\mathbf{x}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} i^\ell \xi(x) \left( \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right) \mathcal{P}_\ell^m(\cos \theta_{\hat{\mathbf{x}}}) \\ &\quad \times \int_0^\pi d\theta_{\hat{\mathbf{k}}} \sin \theta_{\hat{\mathbf{k}}} (1 + \beta \mu_{kz}^2)^2 \mathcal{P}_\ell^m(\cos \theta_{\hat{\mathbf{k}}}) \int_0^{2\pi} d\phi_{\hat{\mathbf{k}}} e^{im(\phi_{\hat{\mathbf{k}}} - \phi_{\hat{\mathbf{x}}})}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Agora fazemos uma mudança de variável tomando a seguinte identificação

$$\mu_{kz} = \cos \theta_{\hat{\mathbf{k}}} \quad (3.80)$$

$$\mu_{xz} = \cos \theta_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (3.81)$$

$$2\pi\delta_0^m = \int_0^{2\pi} d\phi_{\hat{\mathbf{k}}} e^{im(\phi_{\hat{\mathbf{k}}} - \phi_{\hat{\mathbf{x}}})} \quad (3.82)$$

$$\mathcal{P}_\ell = \mathcal{P}_\ell^0. \quad (3.83)$$

Substituindo as equações (3.80) - (3.83) em (3.79) temos

$$\xi_s(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) \xi_\ell(x) \mathcal{P}_\ell(\mu_{xz}) \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu_{kz}}{2} (1 + \beta\mu_{kz}^2)^2 \mathcal{P}_\ell(\mu_{kz}). \quad (3.84)$$

A expansão do termo quadrático da equação acima, em termos dos polinômios de Legendre  $\mathcal{P}_\ell$ , é dada por

$$(1 + \beta\mu_{kz}^2)^2 = \left(1 + \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta^2}{5}\right) \mathcal{P}_0(\mu_{kz}) + \left(\frac{4\beta}{3} + \frac{4\beta^2}{7}\right) \mathcal{P}_2(\mu_{kz}) + \frac{8\beta^2}{35} \mathcal{P}_4(\mu_{kz}). \quad (3.85)$$

Os polinômios de Legendre satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{+1} d\mu_{kz} \mathcal{P}_{\ell'}(\mu_{kz}) \mathcal{P}_\ell(\mu_{kz}) = \frac{2}{2\ell' + 1} \delta_{\ell'\ell}. \quad (3.86)$$

Dessa forma, utilizando a equação (3.85) em conjunto com (3.86), podemos mostrar que a soma infinita em  $\ell$  na equação (3.84) se reduz a somente três fatores, a saber

$$\begin{aligned} \xi_s(\mathbf{x}) &= \left[1 + \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta^2}{5}\right] \xi_0(x) \mathcal{P}_0(\mu_{xz}) \\ &\quad - \left[\frac{4\beta}{3} + \frac{4\beta^2}{7}\right] \xi_2(x) \mathcal{P}_2(\mu_{xz}) \\ &\quad + \left[\frac{8\beta^2}{35}\right] \xi_4(x) \mathcal{P}_4(\mu_{xz}). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Ademais, substituindo (3.85) em (3.72) podemos reescrever o espectro de potência como

$$P_s(\mathbf{k}) = \left[ \left(1 + \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta^2}{5}\right) \mathcal{P}_0(\mu_{kz}) + \left(\frac{4\beta}{3} + \frac{4\beta^2}{7}\right) \mathcal{P}_2(\mu_{kz}) + \frac{8\beta^2}{35} \mathcal{P}_4(\mu_{kz}) \right] P(k), \quad (3.88)$$

onde podemos definir os termos harmônicos dos espectro de potência no espaço de redshift,  $P_{\ell,s}(k)$ , que se relaciona com a sua contraparte não distorcida,  $P(k)$ , por

$$P_{0,s}(k) := \left(1 + \frac{2\beta}{3} + \frac{\beta^2}{5}\right) P(k), \quad (3.89)$$

$$P_{2,s}(k) := \left(\frac{4\beta}{3} + \frac{4\beta^2}{7}\right) P(k), \quad (3.90)$$

$$P_{4,s}(k) := \frac{8\beta^2}{35} P(k). \quad (3.91)$$

A Figura 3.8 é uma representação geométrica de cada um dos três primeiro multipolos pares,  $P_{\ell,s} \rightarrow P_{0,s}, P_{2,s}, P_{4,s}$ , em relação à parte não perturbada  $P(k)$ .

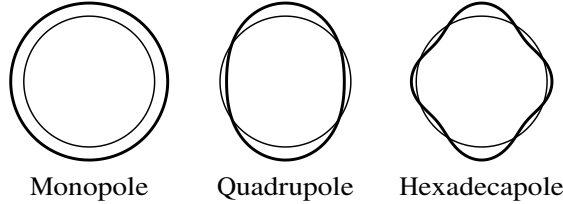


Figura 3.8: Representação do termo de monopolo ( $\ell = 0$ ), quadrupolo ( $\ell = 2$ ) e hexadecapolo ( $\ell = 4$ ) para a perturbação (linha grossa) em relação à sua respectiva contraparte não perturbada (linha fina). Fonte [31].

Ambas as equações, (3.87) e (3.88), nos dizem que o efeito de RSD faz com que o observador, ao analisar a distribuição de matéria no Universo, detecte não-homogeneidades, já que  $\xi_s$  depende de  $x$  e  $P_s$  depende de  $k$ , mas também anisotropias, já que  $\xi_s$  depende da direção de  $\mathbf{x}$ , quantificada por  $\mu_{xz}$ , e  $P_s$  depende da direção de  $\mathbf{k}$  quantificada por  $\mu_{kz}$ .

A interpretação de  $\mu_{xz}$  e  $\mu_{kz}$  é a que se segue:  $\mu_{xz}$  é o cosseno do ângulo entre o vetor separação  $\mathbf{x}$  de duas fontes (*e.g.*, galáxias) e a linha de visada  $\hat{z}$  do observador. Reciprocamente, quando se toma a transformada de Fourier da função de correlação para obter o espectro de potência, então  $\mu_{kz}$  é entendido como o cosseno do ângulo entre o vetor número de onda  $\mathbf{k}$  da perturbação e a linha de visada  $\hat{z}$ .

## Capítulo 4

# Função de correlação angular e espectro de potência angular

No capítulo anterior analisamos o impacto de alguns efeitos observacionais na função de correlação espacial de dois pontos e na sua respectiva representação de Fourier, isto é, o espectro de potência. Essas duas grandezas, de modo geral, descrevem a distribuição *tridimensional* de matéria. Entretanto, o estudo da estrutura em grande escala do Universo também é possível de ser feito quando dispomos somente da informação da posição angular das galáxias. Portanto, somos levados à necessidade de criar ferramentas que possam ser capazes de fornecer uma descrição bidimensional da distribuição de matéria no Universo e que forneçam tantas informações quanto o seu análogo tridimensional. Desse modo, nesse capítulo vamos analisar a função de correlação angular e sua transformada de Fourier, isto é, o espectro de potência angular.

### 4.1 Função de correlação angular

Para introduzir de maneira natural e intuitiva as funções que queremos descrever aqui, começemos analisando uma situação real. A figura 4.1 mostra um mapa de distribuição da posição angular de galáxias feito pelo *Automated Plate Measuring* (APM) *survey* em uma área de aproximadamente  $100 \times 50$  graus<sup>2</sup> no Polo Galáctico Sul. A cor e intensidade de cada pixel depende diretamente do número de galáxias por pixel, e este por sua vez é o número de galáxias, ao longo de uma dada direção, projetado na esfera. As áreas escuras são regiões não observadas pelo *survey*.

A medida do número de galáxias ao longo de uma dada direção fixa, i.e, a linha de visada, nada mais é do que a contagem (soma) do número de galáxias ao longo dessa

direção. Entretanto, essa contagem não é feita de maneira uniforme pelo *survey*, pois quanto mais longe uma galáxia estiver do observador, menor será a probabilidade dela ser observada, pois seu brilho será muito fraco. Já no extremo oposto, isto é, galáxias muito próximas do observador, também são menos observadas, mas agora pelo motivo de estarem em menor número, simplesmente porque o volume amostrado é menor.

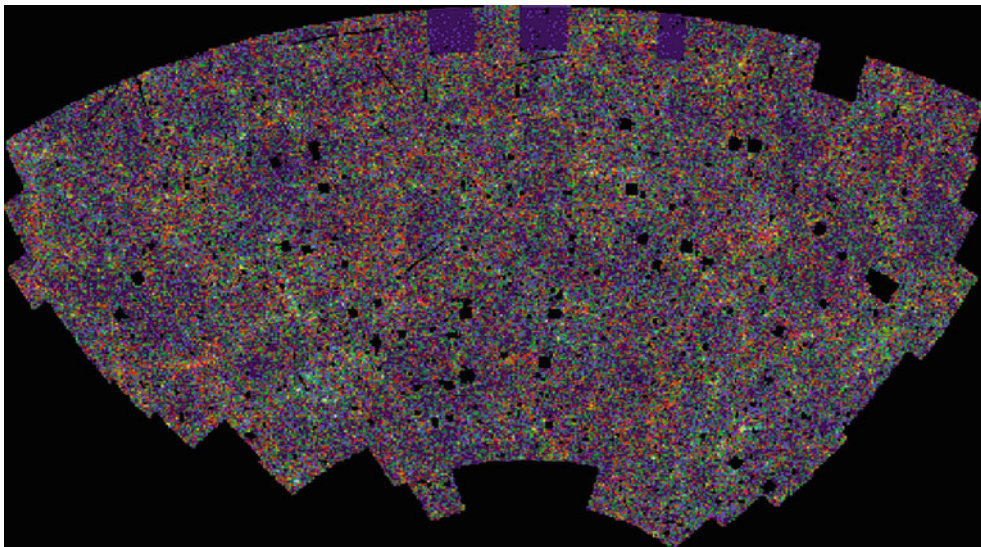


Figura 4.1: Mapa da distribuição de galáxias feita pelo APM-survey. A cor/intensidade de cada pixel escala com o número de galáxias no respectivo pixel. As pequenas regiões pretas são lugares não observado pelo survey. Fonte [54].

Em outras palavras, dizemos que existe um *efeito de seleção* de observação que é intrínseco do *survey* em questão.

Em termos do contraste de densidade tridimensional  $\delta$ , essa contagem/soma de galáxias se transforma em uma integral ao longo da linha de visada (que geralmente é descrita pela distância comóvel ou pelo redshift). O efeito de seleção é descrito pela chamada *função de seleção* (*selection function*) e denotada por  $\phi$ . Em outras palavras, a função de seleção é a probabilidade do *survey* detectar uma sobredensidade (ou a falta dela) a um dado redshift  $z$  (ou a uma dada distância comóvel).

Desse modo, somos conduzidos naturalmente a definir o *contraste de densidade angular* (ou o contraste de densidade projetado na esfera) como a média ponderada do contraste de densidade tridimensional ao longo de uma dada direção fixa no céu

$$\delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}) := \int_0^\infty dz \phi(z) \delta(\mathbf{x}, z). \quad (4.1)$$

Veja, por exemplo, [14, p. 47], [20], [21, p. 263], [45], [55] e [56, p. 34].

Em completa analogia com o que foi desenvolvido em 3.1.2, podemos definir, a partir do contraste de densidade angular, a *função de correlação angular* (ACF: *angular correlation function*).

Para isso, consideremos uma região de ângulo sólido  $d\Omega_1$  em torno do ponto no céu (ou seja, direção no espaço dada pelo vetor unitário)  $\hat{\mathbf{x}}_1$  e outra região  $d\Omega_2$  em torno do ponto  $\hat{\mathbf{x}}_2$ . Digamos que  $\bar{n}_\Omega$  seja a densidade média de galáxias por unidade de ângulo sólido. Assim, o número médio de pares de galáxias, projetado na esfera, separadas por um ângulo  $\theta = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2)$ , e delimitadas por ângulos sólidos  $d\Omega_1$  e  $d\Omega_2$  fornece o análogo angular da equação (3.4), que é dado por

$$\langle dN_{pair}(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2) \rangle = \bar{n}_\Omega^2 [1 + \langle \delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}_1) \delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}_2) \rangle] d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (4.2)$$

Dessa forma, a função de correlação angular, com os princípios de homogeneidade e isotropia estatística incorporados, é definida de modo geral por

$$w(\theta) = \langle \delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}_1) \delta^{2D*}(\hat{\mathbf{x}}_2) \rangle. \quad (4.3)$$

A relação entre a função de correlação angular e a função de correlação espacial é conhecida por *equação de Limber* [54, p. 405] e pode ser obtida substituindo (4.1) em (4.3)

$$\begin{aligned} w(\theta) &= \langle \delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}_1) \delta^{2D*}(\hat{\mathbf{x}}_2) \rangle \\ &= \int_0^\infty dz_1 \phi(z_1) \int_0^\infty dz_2 \phi(z_2) \langle \delta(\mathbf{x}_1, z_1) \delta^*(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle \\ &= \int_0^\infty dz_1 \phi(z_1) \int_0^\infty dz_2 \phi(z_2) \xi(x(z_1, z_2, \theta)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $x = x(z_1, z_2, \theta)$  é o módulo do vetor separação comóvel entre fontes a redshifts  $z_1$  e  $z_2$ , e separadas por um ângulo  $\theta$  em relação a um dado observador. No Universo com curvatura nula, essa distância é dada pela lei dos cossenos

$$x = x(z_1, z_2, \theta) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\theta}, \quad (4.5)$$

$$x_i = \int_0^{z_i} \frac{c dz}{H(z)}, \quad i = 1, 2, \quad (4.6)$$

$$\cos\theta = \hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2. \quad (4.7)$$

## 4.2 Espectro de potência angular

Em analogia com a subseção 3.1.4 podemos definir o *espectro de potência angular* (APS: *angular power spectrum*). Para isso, lembremos que  $\delta^{2D}$  é um campo escalar definido na esfera. Portanto, podemos decompor o contraste de densidade angular como uma superposição de harmônicos esféricos (que seria o análogo da decomposição em modos de Fourier, veja, *e.g.*, equação (3.10))

$$\delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \delta_{\ell m}^{2D} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.8)$$

sendo  $\delta_{\ell m}^{2D}$  os coeficientes (os “pesos”) dessa combinação linear, podendo ser entendidos como os análogos de  $\tilde{\delta}$  em (3.10).

Substituindo (4.8) em (4.3) temos

$$w(\theta) = \langle \delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}_1) \delta^{2D*}(\hat{\mathbf{x}}_2) \rangle = \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{x}}_1) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{x}}_2) \langle \delta_{\ell m}^{2D} \delta_{\ell' m'}^{2D*} \rangle, \quad (4.9)$$

decorre daí que podemos definir o espectro de potência angular, denotado por  $C_{\ell}$ , como o segundo momento (a variância) dos coeficientes  $\delta_{\ell m}$ , isto é

$$\langle \delta_{\ell m}^{2D} \delta_{\ell' m'}^{2D*} \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_{\ell}, \quad (4.10)$$

sendo  $\delta_{\ell \ell'}$  e  $\delta_{m m'}$  os deltas de Kronecker. Portanto, não confundir com os coeficientes do contraste de densidade angular. Desse modo, a equação (4.10) é o análogo de (3.16). A isotropia estatística implica que o espectro de potência tridimensional independe da direção do vetor número de onda, isto é,  $P(\mathbf{k}) = P(k)$ . De maneira análoga, a isotropia estatística implica que o espectro de potência angular independe do índice  $m$ , isto é,  $C_{\ell m} = C_{\ell}$ , (veja, *e.g.*, [47], [63]).

Para determinar a relação entre a ACF e a APS, começamos substituindo (4.10) em (4.9) o que nos deixa com

$$\begin{aligned} w(\theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{x}}_1) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{x}}_2) \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell}^m(\hat{\mathbf{x}}_1) Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{x}}_2) \right] C_{\ell}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

e utilizando o *teorema da adição dos harmônicos esféricos* dado por

$$\mathcal{P}_\ell(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}_1) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}_2), \quad (4.12)$$

temos que (4.11) se reduz à

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \mathcal{P}_\ell(\cos \theta) C_\ell, \quad (4.13)$$

onde  $\mathcal{P}_\ell$  são os polinômios de Legendre. Podemos ainda, determinar a relação entre a APS e o espectro de potência. Para isso, tomamos o produto da equação (4.8) pelo harmônico esférico  $Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{x}})$ , e em seguida integramos no ângulo sólido correspondente, o que resulta em

$$\int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} \delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=\ell}^{\ell} \delta_{\ell m}^{2D} \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.14)$$

Os harmônicos esféricos satisfazem a seguinte condição de ortogonalidade

$$\int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{u}}} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{u}}) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{u}}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (4.15)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}$  denota um vetor unitário, que em nosso caso pode ser tanto  $\hat{\mathbf{x}}$  ou  $\hat{\mathbf{k}}$ . Portanto, (4.14) se reduz à

$$\delta_{\ell m}^{2D} = \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} \delta^{2D}(\hat{\mathbf{x}}) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.16)$$

Substituindo (4.1) em (4.16) temos

$$\delta_{\ell m}^{2D} = \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}) \int dz \phi(z) \delta(\mathbf{x}, z). \quad (4.17)$$

Usando a transformada de Fourier de  $\delta(\mathbf{x}, z)$  dado pela equação (3.10), e lembrando que  $\delta(\mathbf{x}, z) = \delta(\mathbf{x})D(z)$ , então (4.17) pode ser escrita como

$$\delta_{\ell m}^{2D} = \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}) \int dz \phi(z) D(z) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \tilde{\delta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (4.18)$$

e utilizando a expansão de Rayleigh da onda plana (3.74), podemos escrever (4.18)



como

$$\delta_{\ell m}^{2D} = 4\pi i^\ell \int dz \phi(z) D(z) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\mathbf{k}) j_\ell(kx) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (4.19)$$

Agora substituimos (4.19) no lado esquerdo de (4.10) e reorganizando os termos, temos

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\ell m}^{2D} \delta_{\ell' m'}^{2D*} \rangle &= (4\pi)^2 i^\ell (-i)^{\ell'} \int dz \phi(z) D(z) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} j_\ell(kx(z)) \\ &\quad \times \int dz' \phi(z') D(z') \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} j_{\ell'}(k'x(z')) \\ &\quad \times Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell'}^{m'*}(\hat{\mathbf{k}}') \langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O espectro de potência é dado por

$$\langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k). \quad (4.21)$$

A função delta de Dirac, na equação acima, elimina a integral em  $\mathbf{k}'$  na Eq. (4.20). Portanto, utilizando (4.10) em conjunto com (4.20), temos

$$\begin{aligned} \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} C_\ell &= (4\pi)^2 i^{\ell-\ell'} \int dz \phi(z) D(z) \int dz' \phi(z') D(z') \\ &\quad \times \int \frac{dk}{(2\pi)^3} k^2 j_\ell(kx(z)) j_{\ell'}(k'x(z')) P(k) \int d^2 \Omega_{\hat{\mathbf{k}}} Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned}$$

e usando (4.15) com  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{k}}$ , a expressão acima se reduz à

$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int dz \phi(z) D(z) \int dz' \phi(z') D(z') \int dk k^2 j_\ell(kx(z)) j_\ell(kx(z')) P(k). \quad (4.22)$$

É conveniente comutar as integrais em (4.22) e escrever a APS da seguinte forma:

$$C_\ell = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P(k) [\Psi_\ell(k)]^2, \quad (4.23)$$

onde definimos

$$\Psi_\ell(k) := \int dz \phi(z) D(z) j_\ell(kx(z)). \quad (4.24)$$

Para sintetizar o que já foi discutido até aqui, podemos construir um diagrama ilustrativo que mostra as principais grandezas e como elas se relacionam

$$\begin{array}{ccc}
\xi(x) & \xrightarrow{\text{proj.}} & w(\theta) \\
F.T. \downarrow & & \downarrow S.H. \\
P(k) & \xrightarrow{\text{proj.}} & C_\ell
\end{array}$$

onde “*proj.*” significa a projeção na esfera de  $\xi(x)$  e de  $P(k)$  para obtermos  $w(\theta)$  e  $C_\ell$ , respectivamente. Por outro lado, para obter  $P(k)$  de  $\xi(x)$  expandimos em modos de Fourier (*F.T.*), e para obter  $C_\ell$  de  $w(\theta)$  expandimos em harmônicos esféricos (*S.H.*).

### 4.3 Correlação angular no espaço de redshift

A partir da seção 3.2 discutimos sobre o fenômeno de distorção no espaço de redshift (RSD) devido à velocidade peculiar, o que nos permitiu estudar o impacto do RSD no contraste de densidade tridimensional (3.6), no espectro de potência (3.8) e na função de correlação espacial (3.9).

Agora estamos interessados em analisar o efeito do RSD na ACF e na APS. Para fazer isso é natural que utilizemos de algumas equações que já foram desenvolvidas a partir da seção 3.2. Mas primeiramente precisamos estabelecer uma conexão entre o “mundo” tridimensional com a sua contraparte bidimensional e também com a transformada de Fourier. Isso é alcançado fazendo uma descrição em *coordenadas esféricas* do contraste de densidade  $\delta(\mathbf{x}, z)$  (veja, *e.g.*, [14, p. 44-46]).

Portanto, começamos substituindo a expansão de Rayleigh da onda plana, (3.74), na expansão em modos de Fourier do contraste de densidade dado por (3.10)

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbf{x}, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} \int_0^{\infty} dk k^2 \tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) i^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{2\pi^2} \left( i^\ell \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \right) j_\ell(kx) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{2\pi^2} \tilde{\delta}_{\ell m}(k, z) (-1)^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}). \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Onde definimos a quantidade

$$\tilde{\delta}_{\ell m}(k, z) := (-i)^\ell \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} \tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}), \tag{4.26}$$

Logo, invertendo (4.26), temos

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) = i^\ell \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \tilde{\delta}_{\ell m}(k, z) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}). \quad (4.27)$$

Observe que devemos ter o cuidado de não confundir  $\delta_{\ell m}^{2D}$  dado por (4.16) com  $\tilde{\delta}_{\ell m}$  descrito por (4.26). Assim, os  $\delta_{\ell m}^{2D}$  são os coeficientes da expansão em harmônicos esféricos do campo de densidades projetado no céu. Já os  $\tilde{\delta}_{\ell m}$  são essencialmente o resultado da mesma expansão aplicada aos componentes de Fourier do espectro de potências em 3D. De modo completamente análogo ao que foi feito para o contraste de densidade  $\delta(\mathbf{x}, z)$  em (4.25), também podemos fazer para a sua contraparte de Fourier, só que nesse caso, substituímos o complexo conjugado de (3.74) em (3.11), o que nos leva ao seguinte resultado

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}, z) = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^{\infty} dx x^2 \delta_{\ell m}(x, z) (-1)^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}), \quad (4.28)$$

$$\delta_{\ell m}(x, z) := i^\ell \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} \delta(\mathbf{x}, z) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.29)$$

onde definimos  $\delta_{\ell m}(x, z)$  de modo análogo à (4.26).

Como ficará evidente mais adiante, é de interesse inverter a equação (4.25). Para isso, multiplicamos (4.28) por  $Y_\ell^{m'*}(\hat{\mathbf{k}})$ , integramos no ângulo sólido correspondente, depois usamos a ortogonalidade dos harmônicos esféricos (4.15) e identificamos um dos lados da equação como sendo a quantidade dado por (4.26). Essas operações nos levam ao seguinte resultado

$$\tilde{\delta}_{\ell m}(k, z) = 4\pi i^\ell \int_0^{\infty} dx x^2 \delta_{\ell m}(x, z) j_\ell(kx). \quad (4.30)$$

Por fim, usando (4.29) em (4.30), chegamos na inversa de (4.25)

$$\tilde{\delta}_{\ell m}(k, z) = 4\pi \int_0^{\infty} dx x^2 \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} \delta(\mathbf{x}, z) (-1)^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.31)$$

É interessante observar que o fator  $(\pm i)^\ell$  carrega uma informação dupla, a saber,  $i^\ell$  vem da expansão de Rayleigh da onda plana, e por outro lado, a alternância  $\pm 1$  vem da transformada de Fourier. Desse modo, temos uma descrição do contraste de densidade em coordenadas esféricas tanto em  $\mathbf{x}$  como em  $\mathbf{k}$ .

A equação (4.31) relaciona o contraste de densidade angular com o contraste de

densidade espacial. Ademais, na seção 3.6 vimos que o campo de velocidade peculiar origina o efeito de distorção no espaço de redshift o que faz com que a amplitude do contraste de densidade seja modificado. O operador distorção dado pela equação (3.50) é o responsável por ditar a intensidade dessa distorção.

Denotando  $\delta_s$  e  $\tilde{\delta}_{\ell m}^s$  pelo contraste de densidade espacial e os modos de Fourier com RSD, respectivamente, então a equação (4.31), levando em consideração o RSD, pode ser reescrita como

$$\tilde{\delta}_{\ell m}^s(k, z) = 4\pi \int_0^\infty dx x^2 \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} \delta_s(\mathbf{x}, z) (-1)^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.32)$$

Usando a Eq. (3.49), podemos reescrever (4.32) como

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{\ell m}^s(k, z) &= 4\pi \int_0^\infty dx x^2 \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} [(1 + \beta \partial_x^2 \nabla^{-2}) \delta(\mathbf{x}, z)] (-1)^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \tilde{\delta}_{\ell m}(k, z) + 4\pi\beta \int_0^\infty dx x^2 \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} \frac{\partial_x^2 \delta(\mathbf{x}, z)}{k^2} (-1)^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$= \tilde{\delta}_{\ell m}(k, z) + 4\pi\beta \int_0^\infty dx x^2 \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{x}}} \delta(\mathbf{x}, z) (-1)^\ell \frac{\partial_x^2 j_\ell(kx)}{k^2} Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.34)$$

onde de (4.33) para (4.34) aplicamos a integração por partes duas vezes. Observe que  $j_\ell''(kx) := \frac{d^2 j_\ell(kx)}{d(kx)^2} = \frac{\partial_x^2 j_\ell(kx)}{k^2}$ . Por outro lado, as funções Esféricas de Bessel satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$(2\ell + 1)j_\ell' = \ell j_{\ell-1} - (\ell + 1)j_{\ell+1}, \quad (4.35)$$

o que nos permite escrever a derivada de segunda ordem como

$$j_\ell'' = -\frac{(2\ell^2 + 2\ell - 1)}{(2\ell + 3)(2\ell - 1)} j_\ell + \frac{\ell(\ell - 1)}{(2\ell + 1)(2\ell - 1)} j_{\ell-2} + \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)} j_{\ell+2}. \quad (4.36)$$

As funções esféricas de Bessel  $j_{\ell\pm 2}$  são uma consequência do acoplamento [45] entre  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{x}$  por meio da dependência angular  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  para os polinômios de Legendre  $\mathcal{P}_\ell(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^\ell Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{x}})$ .

Isso faz com que tenhamos três termos adicionais à quantidade não perturbada  $\tilde{\delta}_{\ell m}$ , um proporcional ao próprio  $\tilde{\delta}_{\ell m}$  e outras duas definidas por  $\tilde{\delta}_{(\ell\pm 2)m}$ . Dessa

forma, substituindo a Eq. (4.36) na Eq. (4.34), podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{\ell m}^s(k) = \tilde{\delta}_{\ell m}(k) + \beta(z) & \left[ \frac{2\ell^2 + 2\ell - 1}{(2\ell + 3)(2\ell - 1)} \tilde{\delta}_{\ell m}(k) \right. \\ & - \frac{\ell(\ell - 1)}{(2\ell + 1)(2\ell - 1)} \tilde{\delta}_{(\ell-2)m}(k) \\ & \left. - \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)} \tilde{\delta}_{(\ell+2)m}(k) \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Esse resultado é útil, pois nos permite determinar a ACF e a APS considerando o efeito de RSD. Para isso, começamos substituindo a Eq. (4.25) na Eq. (4.1). Dessa forma, temos

$$\delta_s^{2D}(\hat{\mathbf{x}}) = \int dz \phi(z) \sum_{\ell m} \int dk \frac{k^2}{2\pi^2} \tilde{\delta}_{\ell m}^s(k, z) (-1)^\ell j_\ell(kx) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.38)$$

onde  $\tilde{\delta}_{\ell m}^s(k, z)$ , implica em defirmos o contraste de densidade angular com RSD, denotado por  $\delta_s^{2D}(\hat{\mathbf{x}})$ .

Antes de prosseguir, também será necessário obter o espectro de potência,  $P(k, z)$ , a partir dos coeficientes  $\tilde{\delta}_{\ell m}(k, z)$ . Para isso, basta tomar a média do quadrado da Eq. (4.26), e em seguida utilizar a Eq. (4.21) para simplificar. Desse modo, temos

$$\langle \tilde{\delta}_{\ell m}(k, z) \tilde{\delta}_{\ell' m'}^*(k, z) \rangle = \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} \int d^2\Omega_{\hat{\mathbf{k}}'} Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}}') \langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle \quad (4.39)$$

$$= (2\pi)^3 \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta_D(k - k') k^{-2} P(k, z), \quad (4.40)$$

onde de (4.39) para (4.40) utilizamos a representação em coordenadas esféricas da função delta de Dirac,  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , e em seguida utilizamos a ortogonalidade dos harmônicos esféricos dado pela Eq. (4.15).

Para obter a ACF com o efeito de RSD, primeiramente é preciso substituir a Eq. (4.37) na Eq. (4.38). Em seguida, utilizando a definição (4.3), podemos escrever a ACF com RSD como

$$w_s(\theta) = \langle \delta_s^{2D}(\hat{\mathbf{x}}_1) \delta_s^{2D*}(\hat{\mathbf{x}}_2) \rangle. \quad (4.41)$$

Depois, basta utilizar a Eq. (4.40) para cada combinação da média do produto entre os coeficientes  $\tilde{\delta}_{\ell m}$  e  $\tilde{\delta}_{(\ell\pm 2)m}$ . Por fim, utilizando o teorema da adição dos harmônicos

esféricos dado por (4.12), temos

$$w_s(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \mathcal{P}_{\ell}(\cos \theta) \left\{ \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P(k) [\Psi_{\ell}(k) + \Psi_{\ell}^s(k)]^2 \right\}, \quad (4.42)$$

onde  $\Psi_{\ell}(k)$  é dado pela Eq. (4.24) e  $\Psi_{\ell}^s(k)$  é definido da seguinte maneira

$$\Psi_{\ell}^s(k) := \int dz \beta(z) \phi(z) D(z) \left\{ \frac{2\ell^2 + 2\ell - 1}{(2\ell + 3)(2\ell - 1)} j_{\ell}(kx) - \frac{\ell(\ell - 1)}{(2\ell + 1)(2\ell - 1)} j_{\ell-2}(kx) - \frac{(\ell + 1)(\ell + 2)}{(2\ell + 1)(2\ell + 3)} j_{\ell+2}(kx) \right\}. \quad (4.43)$$

Por fim, para obter a APS com o efeito de RSD, basta comparar a Eq. (4.42) com a Eq. (4.13). É imediato ver que

$$C_{\ell}^s = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P(k) [\Psi_{\ell}(k) + \Psi_{\ell}^s(k)]^2. \quad (4.44)$$

Na Figura 4.2 mostramos a APS com e sem o efeito de RSD. Essa efeito é relevante apenas para multipolos pequenos,  $\ell \lesssim 20 - 30$ , pronunciando a amplitude da APS. A informação sobre o intervalo de redshift está contida nas funções  $\Psi_{\ell}(k)$  e  $\Psi_{\ell}^s(k)$ , pois estas dependem da função de seleção  $\phi(z)$ . A dependência das funções com o intervalo de redshift é abordado em mais detalhes no capítulo 6.

Na Figura 4.3 representamos a ACF com e sem o efeito de RSD. Como podemos observar, no espaço de redshift o pico do BAO é pronunciado pelo efeito de RSD. Em princípio, esse efeito pode ser mais ou menos intenso dependendo dos parâmetros de modelagem envolvidos, bem como do próprio intervalo de redshift em que estamos computando a função de seleção. Veja, *e.g.*, a figura 4.2 da referência [56].

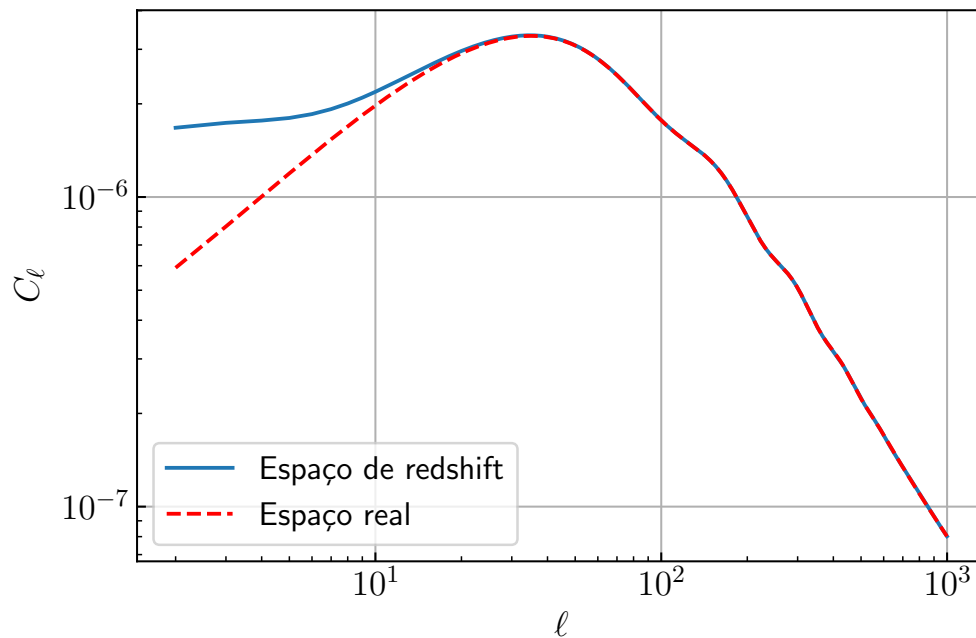


Figura 4.2: Espectro de potência angular obtido com o Core Cosmology Library com e sem o efeito de RSD. A função de seleção foi calculada considerando o seguinte intervalo de redshift:  $z \in [0.9, 0.95]$ .

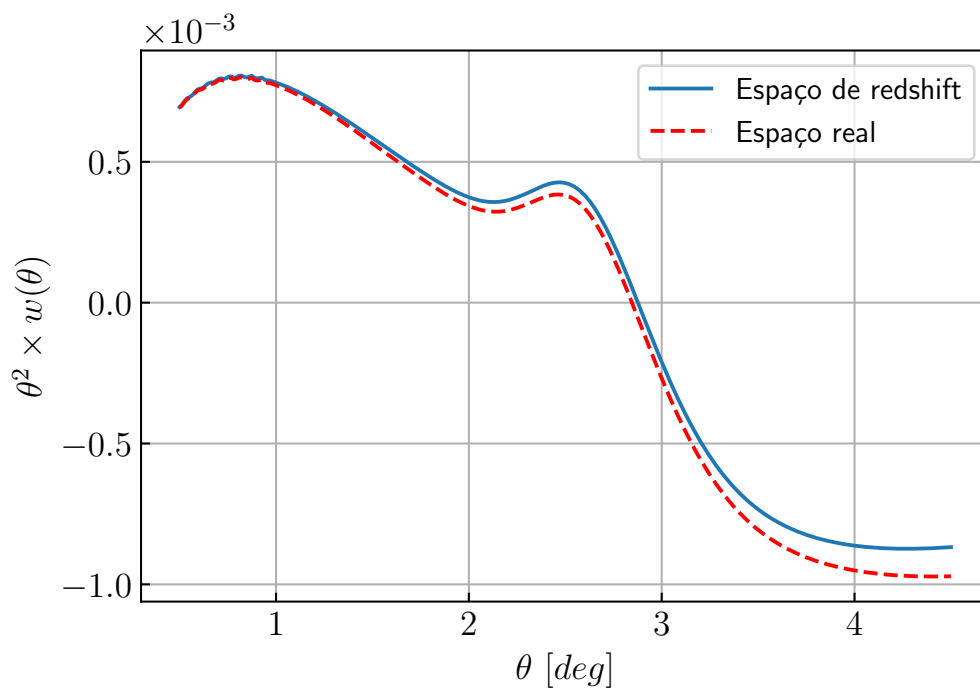


Figura 4.3: Função de correlação angular feita com o Core Cosmology Library com e sem o efeito de RSD. A função de seleção foi calculada considerando o seguinte intervalo de redshift:  $z \in [0.9, 0.95]$ .

## Capítulo 5

# Métodos estatísticos em cosmologia para surveys de galáxias

Nos dois capítulos anteriores fizemos um tratamento (incorporando correções como o RSD e o *bias*) das funções de correlação e dos espectros de potência, tanto no domínio espacial como no domínio angular. Além disso, usamos extensivamente a transformada de Fourier para comunicar as funções de correlação com os seus respectivos espectros de potência, e como não há perda de informação em tomar a T.F. de uma função em outra, poderíamos nos perguntar se todo o formalismo desenvolvido anteriormente não seria redundante, ou seja, será que não bastaria descrever as flutuações de densidade apenas em termos da função de correlação ou do espectro de potência? De fato, no âmbito teórico, se conhecemos uma das duas funções, então a outra é completamente determinada, mas observacionalmente isso não ocorre.

No mundo real, ao lidar com surveys, temos que fazer estimativas dessas grandezas, e embora  $P$  e  $\xi$  possuam as mesmas informações, na medida que são T.F. uma da outra, o mesmo não é verdade para seus *estimadores*<sup>1</sup>  $\hat{P}$  e  $\hat{\xi}$ . Estes são obtidos através da análise estatística de uma amostra de galáxias e, portanto, naturalmente possuem *ruído* (*noise*), que se sobrepõe ao *sinal* (*signal*) que traz a informação desejada do estimador que se deseja analisar.

---

<sup>1</sup>Por isso é comum falar em *estimador* do espectro de potência, ao invés de simplesmente espectro de potência, ou *estimador* da função de correlação, ao invés de simplesmente função de correlação. Para diferenciar um caso do outro, costuma-se usar o símbolo  $\hat{\cdot}$  acima da letra que representa a função para diferenciá-la da sua contraparte teórica. Assim, *e.g.*,  $\hat{P}$  é o estimador do espectro de potência  $P$ .



Esse ruído pode ser devido ao próprio instrumento, mas como veremos, também pode ser um ruído que é totalmente *inerente* à natureza discreta pela forma como se dá a distribuição de galáxias pelo espaço. Isso significa que, por mais que possamos melhorar a performance do instrumento e reduzir as interferências devidas à aparelhagem, o mesmo não pode ser feito com o ruído intrínseco à distribuição. Em outras palavras, mesmo que as galáxias fossem distribuídas de forma perfeitamente homogênea e isotrópica, de modo que a auto-correlação fosse identicamente nula em todos os pontos do espaço, o espectro de potência medido ainda assim seria diferente de zero. Portanto, daqui para frente, ruído se refere a esse ruído de fundo e inerente da distribuição.

Por isso é importante saber quantificar a contribuição desse ruído, para que possamos assim subtraí-lo das medidas e obter uma estimativa do espectro de potência verdadeiro. Além disso, como toda estimativa, estaremos interessados em analisar a variância do estimador do espectro de potência. No final, como sempre foi feito nos capítulos anteriores, estenderemos essa análise para a contraparte angular (ACF e APS). Sobretudo, nesse capítulo, vamos apresentar de modo geral algumas ferramentas estatísticas para análise cosmológica de surveys de galáxias, tais como funções de distribuição de probabilidade, matrizes de covariância e o formalismo para a estimativa das incertezas dos parâmetros cosmológicos.

Diga-se de passagem que, embora estejamos sempre focados na análise de dados da distribuição de galáxias, a maior parte do formalismo apresentado aqui, com uma ou outra diferença, também é aplicado para o caso da análise da anisotropia de temperatura do CMB. Com efeito, o conceito de *pixel* ([21] e [57]) que aparece de forma natural no estudo da CMB, essencialmente bi-dimensional, foi generalizado para três dimensões, de forma a poder incluir a análise de galáxias, veja *e.g.*, Tegmark et al. (1998)[60], Tegmark et al. (2004)[62] e para o conceito de pixel aplicado para a contraparte angular do espectro de potência veja *e.g.* Tegmark et al. (2002)[61].

## 5.1 Sinal vs Ruído

O ponto de partida é considerar que a posição das galáxias pelo espaço segue de forma *aleatória um processo pontual<sup>2</sup> de Poisson* [46]. Dessa forma, começamos considerando uma coleção de  $N$  partículas dentro de um volume  $V$ , sendo que a  $i$ -ésima partícula ocupa a posição  $\mathbf{x}_i$ . Vamos recordar a definição do contraste de

---

<sup>2</sup>Processo pontual (*point process*) é um processo que coloca pontos de forma aleatória no espaço e segue uma distribuição de probabilidade particular, em nosso caso, uma distribuição de Poisson.

densidade dado pela Eq. (3.1)

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{n(\mathbf{x})}{\bar{n}} - 1. \quad (5.1)$$

Em geral, o número médio de galáxias  $\bar{n}$  é uma função  $\bar{n}(\mathbf{x})$  que leva em consideração vários efeitos, tais como efeitos de seleção e classificação de galáxias (já que detectamos vários objetos ao mesmo tempo, e geralmente estaremos interessados em analisar as propriedades de somente um tipo de objeto por vez). Também se evitam regiões do céu com alta concentração de poeira ou estrelas (então, dependendo da direção de observação  $\hat{\mathbf{x}}$ , precisaremos fazer cortes no céu, de modo que passaremos a ter uma dependência angular). Além disso, questões geométricas relacionadas ao survey também são levadas em consideração. Isso tudo pode tornar a função  $\bar{n}(\mathbf{x})$  bastante complicada, mas para os nossos propósitos, será suficiente tratá-la como constante.

No apêndice A [7] fizemos o caso geral do estimador do espectro de potência  $\hat{P}$ , conhecido como estimador de Feldman, Kaiser e Peacock [25] (ou, estimador FKP). Nesse caso, considera-se que  $\bar{n}$  é uma função da posição. Além disso é introduzido um peso arbitrário  $w$  para minimizar a variância  $\sigma_P^2$  do estimador.

Voltando ao nosso caso, inicialmente dissemos que as partículas estavam confinadas ao volume  $V$ , para garantir essa condição, podemos reescrever a Eq. (5.1) como

$$\delta(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) \left[ \frac{n(\mathbf{x})}{\bar{n}} - 1 \right]. \quad (5.2)$$

Uma possível definição para para  $W$ , e suficiente para nossos propósitos, é conhecida como função *top-hat*

$$W(\mathbf{x}) \propto \begin{cases} 1, & \text{dentro do volume do survey } V, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.3)$$

sendo a normalização dada por

$$\int d^3\mathbf{x} W(\mathbf{x}) = 1. \quad (5.4)$$

Por outro lado, o campo de densidade não é mais contínuo, e sim discreto, e para levar isso em consideração podemos escrevê-lo como uma superposição de funções

Delta de Dirac

$$n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (5.5)$$

Portanto, a Eq. (5.2) se torna

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\bar{n}} \sum_i W(\mathbf{x}) \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) - W(\mathbf{x}). \quad (5.6)$$

Tomando a T.F. da equação acima, seguindo a definição (3.11), temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\bar{n}} \int d^3\mathbf{x} \sum_i W(\mathbf{x}) \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \int d^3\mathbf{x} W(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{\bar{n}} \sum_i n_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} - \widetilde{W}_k, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde definimos  $n_i := W(\mathbf{x}_i)$  logo  $n_i = 0$  ou  $1$ , e a T.F. da Eq. (5.3) como

$$\widetilde{W}_k := \int_V d^3\mathbf{x} W(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{3}{R^3} \int_0^R dx \frac{x \sin(kx)}{k}. \quad (5.8)$$

Essa integral foi calculada considerando um volume esférico  $V$  de raio  $R$ , e utilizando integração por partes, chegamos em

$$\widetilde{W}_k = \frac{3[\sin(kR) - kR \cos(kR)]}{(kR)^3}. \quad (5.9)$$

Observe que essa função decresce rapidamente à medida que  $k \rightarrow 1/R$ . Com efeito, no caso geral, se uma função é limitada em volume, ( $W(\mathbf{x})$ ,  $|\mathbf{x}| < R$ ), então sua transformada de Fourier, ( $\widetilde{W}_k$ ), será limitada em  $k < 1/R$ , no sentido de que a função tem um pico na região central e tende a zero rapidamente para  $k > 1/R$ . Um tratamento semelhante ao que fizemos aqui pode ser encontrada em [6], porém, um formalismo utilizando pixelização de Fourier<sup>3</sup> pode ser encontrado em [21].

O espectro de potência pode ser calculado tomando-se a média do quadrado do

---

<sup>3</sup>Resumidamente, a Eq. *top-hat* (5.3) é generalizada para a *Fourier pixelization* dada por  $\psi_i^{\text{Fourier}}(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}}$ , e mantendo o mesmo domínio de  $W(\mathbf{x})$ . Ao tomar a T.F. dessa nova função teremos  $\tilde{\psi}_i(\mathbf{k}) = \widetilde{W}_{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_i|}$ , ou seja, o efeito da T.F. na Eq. (5.9) é causar um deslocamento  $k = |\mathbf{k}| \rightarrow |\mathbf{k} - \mathbf{k}_i|$ , o que desloca o pico de máximo valor da função, e  $\tilde{\psi}_i(\mathbf{k})$  possui amplitude significativa somente quando  $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_i| < R$ .

contraste de densidade dado pela Eq. (5.7)

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta}(\mathbf{k})\tilde{\delta}^*(\mathbf{k}) \rangle &= \left\langle \frac{1}{\bar{n}^2} \sum_{ij} n_i n_j e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} - \frac{\widetilde{W}_k}{\bar{n}} \sum_i n_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} - \frac{\widetilde{W}_k}{\bar{n}} \sum_j n_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_j} + W_k^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\bar{n}^2} \sum_{i \neq j} \langle n_i n_j \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} - \widetilde{W}_k^2 + \frac{1}{\bar{n}^2} \sum_i \langle n_i^2 \rangle, \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde separamos o primeiro somatório para os casos  $i \neq j$  e  $i = j$ , e além disso usamos que  $\widetilde{W}_k = \langle \frac{1}{\bar{n}} \sum_i n_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} \rangle$ . A Eq. (5.10) nos diz que o espectro de potência de um conjunto de partículas limitada em um volume, nada mais é do que a contribuição de dois termos, sendo um deles *independente* da escala  $k$ . Dessa forma, é natural definir

$$\Delta^2(\mathbf{k}) := \tilde{\delta}(\mathbf{k})\tilde{\delta}^*(\mathbf{k}) \quad (5.11)$$

$$P_d(\mathbf{k}) := \langle \Delta^2(\mathbf{k}) \rangle, \quad (5.12)$$

$$P(\mathbf{k}) := \frac{1}{\bar{n}^2} \sum_{i \neq j} \langle n_i n_j \rangle e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} - W_k^2, \quad (5.13)$$

$$P_n := \frac{1}{\bar{n}^2} \sum_i \langle n_i^2 \rangle = \frac{1}{\bar{n}}, \quad (5.14)$$

onde os sub-escritos  $d$  e  $n$  significam *discreto* e *shot-noise*, respectivamente, e  $P(\mathbf{k})$  geralmente é denominado de espectro de potência *verdadeiro*. Logo, podemos simplificar a Eq. (5.10) para

$$P_d(\mathbf{k}) = P(\mathbf{k}) + P_n. \quad (5.15)$$

A quantidade  $P_d$  também é dito um espectro de potência (ou um dado) *bruto* (*raw power spectrum* ou *raw data*) no sentido de que ele é a superposição de um *sinal*  $P$  com um *ruído*  $P_n$ . Vale observar dois extremos da Eq. (5.15): primeiramente, e como já dito antes, mesmo que o sinal fosse nulo,  $P(\mathbf{k}) \equiv 0$ , ainda assim mediríamos um espectro de potência não nulo  $P_d = P_n$ . Por outro lado, o ruído é desprezível somente no limite de grande densidade  $\bar{n} \gg 1/V$ .

O *estimador* do espectro de potência é obtido descontando o termo de *shot-noise*

$$\hat{P}(\mathbf{k}) = \Delta^2(\mathbf{k}) - P_n. \quad (5.16)$$

Dessa forma, o espectro de potência verdadeiro pode ser estimado tomando-se a

média do seu estimador, isto é,

$$P(\mathbf{k}) = \langle \hat{P}(\mathbf{k}) \rangle = \langle \Delta^2(\mathbf{k}) \rangle - P_n \quad (5.17)$$

A dispersão em torno do seu valor médio pode ser analisada tomando-se a variância

$$\sigma_P^2(\mathbf{k}) := \left\langle \left[ \hat{P}(\mathbf{k}) - P(\mathbf{k}) \right]^2 \right\rangle = \langle [\Delta^2(\mathbf{k})]^2 \rangle - \langle \Delta^2(\mathbf{k}) \rangle^2, \quad (5.18)$$

onde na última igualdade usamos a Eq. (5.16). Usando a hipótese de flutuações Gaussinas (veja, *e.g.*, [6], apêndice B de [25], ou o apêndice A [7]<sup>4</sup>), é possível mostrar que

$$\sigma_P^2(\mathbf{k}) = \left[ P(\mathbf{k}) + \frac{1}{\bar{n}} \right]^2, \quad (5.19)$$

ou seja, à menos do *shot-noise*, o desvio padrão ( $\sigma_P = \sqrt{\sigma_P^2}$ ) é da ordem do espectro de potência.

## 5.2 Função *Likelihood*

Na seção anterior lidamos com o estimador do espectro de potência e com a sua variância, que nos permite determinar o erro associado, e com isso podemos caracterizar a estrutura do Universo em larga escala. De modo geral, em cosmologia, sempre estaremos interessados em estimar uma *função* ( $\xi(x)$ ,  $P(k)$ ,  $w(\theta)$ ,  $C_\ell$ , etc.) ou, no nosso caso a partir de agora, os *parâmetros* ( $h$ ,  $w$ ,  $\Omega_{cdm}$ ,  $\Omega_b$ ,  $\sigma_8$ ,  $n_s$ , etc.).

Estes parâmetros pertencem ao que se chama *espaço de parâmetros*, e para manter a notação usual das principais referências da literatura utilizadas ([6], [33], [38], [43], [64]), denotaremos um *vetor* desse espaço por  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ . Mas atenção para não confundir, por exemplo, com o ângulo da função de correlação angular  $w(\theta)$ , que irá aparecer em breve. Estes parâmetros que descrevem uma certa *teoria* podem ser estimados através de dados. Mais especificamente, denota-se por  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$  um *vetor de dados* com média dada por  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots)$  onde  $\mu_i = \langle x_i \rangle$ .

A conexão entre os parâmetros da teoria com o conjunto de dados é estabelecida pela função distribuição de *probabilidade condicional* que descreve um conjunto de dados *condicionado* a um conjunto de parâmetros. Essa função é denotada por  $f(\mathbf{x}; \Theta)$ . Em uma sucessão de eventos (repetição de medidas), a probabilidade

---

<sup>4</sup>Tomando-se  $\bar{n}(\mathbf{r})$  e  $w(\mathbf{r})$  como constantes.

conjunta,  $P$ , de obtermos  $x_1$  em um intervalo  $dx_1$ ,  $x_2$  em um intervalo  $dx_2$ , e etc. é dada por

$$P = f(\mathbf{x}; \Theta) d^n \mathbf{x} = \prod_i f_i(x_i; \Theta) dx_i = f_1(x_1; \Theta) f_2(x_2; \Theta) \dots dx_1 dx_2 \dots, \quad (5.20)$$

$$f_i(x_i; \Theta) := f(x_i; \Theta), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.21)$$

Naturalmente a probabilidade  $P$  varia ao variar o ponto multidimensional no espaço de parâmetros, *i.e.*, o vetor  $\Theta$ . Por outro lado, sabemos que distribuições de probabilidade são, em geral, funções muito bem comportadas e suaves, *i.e.*, diferenciáveis, e além disso probabilidades são não negativas e convergentes no limite dos extremos do domínio. De modo que, se a função tem um máximo em algum lugar, então ela deve, em algum momento, decrescer. Portanto, é intuitivo pensar que existe um valor no espaço de parâmetros, denotado por  $\Theta_{\text{ML}}$ , tal que maximiza a probabilidade (máxima likelihood (ML)), e determinar esse ponto é o que se denomina por método de máxima verossimelhança para estimativa de parâmetros (*maximum likelihood method of parameter estimation*). Esse então seria vetor dos parâmetros que melhor descreve a teoria com a qual se está trabalhando. A partir daí, pode-se ir além e determinar os *momentos*, como por exemplo, a variância, sendo que esta última fornece as *barras de erro*. Quantitativamente, encontrar o ponto de ML equivale a resolver o sistema

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}; \Theta)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.22)$$

Se denotarmos a solução desse sistema por  $\Theta_{\text{ML}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots)$  então naturalmente a  $j$ -ésima componente,  $\hat{\theta}_j$ , será função do conjunto  $\{\mathbf{x}\}$ . Porém, funções de variáveis aleatórias também são variáveis aleatórias, o que nos leva ao próximo nível, mais especificamente ao problema inverso, *i.e.*, qual a distribuição de probabilidade dos parâmetros *condicionado* aos dados? Esse problema pode ser resolvida pelo teorema fundamental das probabilidades condicionais, a saber, o teorema de Bayes<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Reverend Thomas Bayes (1702 - 1761).

### Teorema de Bayes

O teorema de Bayes é uma consequência da definição de probabilidade condicional. Sejam  $T$  e  $D$  dois eventos. Então a probabilidade de  $T$  dada a ocorrência de  $D$  é

$$P(T; D) = \frac{P(T \wedge D)}{P(D)}, \quad (5.23)$$

onde  $P(T \wedge D)$  é a probabilidade adjunta de ocorrerem ambos  $T$  e  $D$  e  $P(D)$  é a probabilidade de  $D$  ocorrer. Por simetria, temos que a probabilidade de  $D$  dada a ocorrência de  $T$  é

$$P(D|T) = \frac{P(D \wedge T)}{P(T)}. \quad (5.24)$$

Combinando as Eqs. (5.23) e (5.24), temos

$$P(T|D)P(D) = P(T \wedge D) = P(D \wedge T) = P(D|T)P(T),$$

logo, o teorema de Bayes é dado por

$$P(T|D) = \frac{P(D|T)P(T)}{P(D)}. \quad (5.25)$$

Traduzindo para o contexto da cosmologia, cada uma das probabilidades na Eq. (5.25) passa a ter um nome, um significado e uma notação própria

- $T$  é a teoria descrita pelo conjunto de parâmetros  $\{\Theta\}$ ,
- $D$  é o dado descrito pelo conjunto de dados do experimento  $\{\mathbf{x}\}$ ,
- $P(T) \rightarrow p(\Theta)$  é denominado *prior*, e quantifica o que já sabemos a respeito dos parâmetros por meio de experimentos realizados no passado. Dessa forma, podemos dar um peso (em maior ou menor grau) para uma certa região do espaço de parâmetros baseados no conhecimento acumulado previamente. O *prior* também pode levar em consideração aquilo que consideramos ser soluções não físicas, *e.g.*, sabemos que existe matéria no Universo, logo  $p(\Omega_m^{(0)} \leq 0) = 0$ . O prior é de extrema importância em cosmologia, pois nos permite utilizar conhecimentos passados para restringir melhor o valor de um parâmetro. Quando não se conhece nada *a priori*, então podemos assumir um prior *flat*, *i.e.*,  $P(T) \equiv 1$ .

- $P(D) \rightarrow g(\mathbf{x})$  é denominado *evidence*. Essa distribuição de probabilidade não depende dos parâmetros, e portanto não influencia nas estimativas dos mesmos. Para nós, esse termo será entendido meramente como uma normalização. A *evidence* pode entrar em cena quando se tem mais de um modelo e deseja-se fazer uma seleção de modelos (*model selection*).
- $P(D|T) \rightarrow f(\mathbf{x}; \Theta)$  é distribuição de probabilidade já discutida anteriormente.
- $P(T|D) \rightarrow L(\Theta; \mathbf{x})$  é denominado *posterior*, e por simplicidade, às vezes é escrito simplesmente como  $L(\Theta)$ . É a distribuição de probabilidades dos parâmetros condicionada a um conjunto de dados observados e que contém (ou não) algum conhecimento a priori de experimentos passados.

Dessas definições é intuitivo concluir que, de modo geral, todo *prior* utilizado hoje, no passado foi um *posterior*, e todo *posterior* determinado hoje, poderá vir a se tornar um *prior* no futuro.

O teorema de Bayes (5.25) pode ser reescrito como

$$L(\Theta; \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}; \Theta)p(\Theta)}{g(\mathbf{x})}. \quad (5.26)$$

A normalização da *posterior*

$$\int L(\Theta; \mathbf{x}) d^m \Theta = 1, \quad (5.27)$$

exige que

$$g(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}; \Theta)p(\Theta) d^m \Theta. \quad (5.28)$$

Observe que se tivermos um *prior* unitário, então, dado que a *evidence* é um fator de normalização, é comum reescrever a Eq. (5.26) como simplesmente

$$L(\Theta) := L(\Theta; \mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}; \Theta), \quad (5.29)$$

e por isso a *posterior*  $L$  eventualmente também é chamada de *likelihood*.

De modo geral, o que nos interessa é determinar algumas propriedades da *likelihood*  $L$ , em particular, o *ponto de máximo*, a *largura da distribuição* e *regiões de confiança*. Entretanto, na prática, devido à grande quantidade de dados, e à própria evolução dos surveys com capacidade de amostrar cada vez mais regiões do céu em



área e profundidade, acaba sendo necessário e indispensável desenvolver métodos numéricos que facilitem esses cálculos.

Uma dessas técnicas se denomina *Karhunen-Loève Techniques* (KL) (veja, *e.g.*, [12], [21], [65]) que em essência consiste em simplificar a likelihood ao não utilizar *modos* contaminados por ruído. Isso facilita, pois diminuir o número de modos implica em diminuir a dimensão da matriz de covariância, e a sua inversa pode ser calculada mais rapidamente. A técnica de KL ajuda justamente a identificar esses modos.

Por outro lado, resolver o sistema de equações dado por (5.22) significa encontrar o pico da distribuição, ou equivalentemente, encontrar as raízes da derivada primeira da likelihood. Nesse sentido, existe um método chamado *optimal quadratic estimator* que, de modo geral, é um algoritmo para encontrar raízes (*root-finding*). Um bastante conhecido é a técnica de *Newton-Raphson*, que basicamente consiste em expandir o logaritmo da likelihood<sup>6</sup> por uma série de Taylor em torno de um *ansatz* inicial, i.e., um palpite de qual é a raiz. O método consiste em fazer várias iterações até que  $\theta_j$  convirja para  $\hat{\theta}_j$ . O número de iterações é finito e além disso não se usam todos os termos infinitos da série de Taylor. Então o algoritmo é truncado depois de um número suficientemente grande de iterações e, portanto,  $\hat{\theta}_j$  é uma estimativa do valor real do parâmetro que maximiza a likelihood.

O método descrito brevemente acima serve para determinar o parâmetro cosmológico que maximiza a likelihood. Porém, em simulação de experimentos futuros (que é o nosso caso para o LSST) não precisamos estimar o ponto de ML pois ele já é conhecido, *e.g.*, de experimentos passados<sup>7</sup>. Então nos resta analisar a capacidade do survey em restringir esses parâmetros. Isso pode ser feito deslocando a nossa atenção da derivada primeira da likelihood, que consiste em estudar o seu ponto de máximo, para a derivada segunda, que consiste em estudar a largura da distribuição, que nos fornecerá estimativas (*forecasts*) das incertezas esperadas para os parâmetros. Esse tipo de análise é feita pela matriz de Fisher.

### 5.3 Matriz de Fisher

Para poder estudar regiões de confiança e fazer *forecasts* das incertezas esperadas nos parâmetros, é necessário saber a forma analítica da *likelihood* (5.29). Entre-

<sup>6</sup>Assumindo que a likelihood é uma função Gaussiana dos parâmetros, então o logaritmo da likelihood será quadrática, i.e., um polinômio de grau dois nos parâmetros, que é o que se usa para aplicar o método.

<sup>7</sup>Por exemplo, em Sobreira et. al. [55] se assume três cosmologias: *fiducial*, *pessimista* e *otimista*.

tanto, em relação ao espaço de parâmetros, nos interessa somente a região em torno do valor de ML. Isso nos permite aproximar o logaritmo da *likelihood* por uma função quadrática, ou equivalentemente, aproximar a *likelihood* por uma Gaussiana (mais especificamente, função verossimilhança dada por uma distribuição Gaussiana multivariada), de modo que podemos escrever

$$L(\Theta) \approx N \exp \left[ -\frac{1}{2} (\Theta - \Theta_{\text{ML}})^t \mathbf{H} (\Theta - \Theta_{\text{ML}}) \right], \quad (5.30)$$

onde  $t$  significa a transposta do vetor  $(\Theta - \Theta_{\text{ML}})$ , e  $\mathbf{H}$  é a chamada *matriz Hessiana* (para a matriz Hessiana no contexto da cosmologia da forma como é introduzida aqui, veja, *e.g.*, [33]. Para uma abordagem mais geral e com manipulações numéricas com a matriz de Hessiana, veja *e.g.*, [49]). Podemos também reescrever a Eq. (5.30) em termos das componentes dos vetores e das entradas da matriz Hessiana

$$L(\Theta) \approx N \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij} (\theta_i - \hat{\theta}_i) H_{ij} (\theta_j - \hat{\theta}_j) \right]. \quad (5.31)$$

Expandindo em série de Taylor o argumento da exponencial (equivalente a expandir o logaritmo de  $L$ ), na equação acima, em torno do seu ponto de máximo, temos

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(\Theta) := \ln L(\Theta) &= \ln L(\Theta_{\text{ML}}) + \sum_i \left. \frac{\partial \ln L(\Theta)}{\partial \theta_i} \right|_{\Theta_{\text{ML}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^2 \ln L(\Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\Theta_{\text{ML}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i) (\theta_j - \hat{\theta}_j) + \mathcal{O}^3, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde definimos a *log-likelihood* por  $\mathcal{L} := -\ln L$ .

Como estamos no pico da distribuição, a derivada de primeira ordem é zero. Além disso, como se trata de uma aproximação quadrática, podemos desprezar os termos de ordem igual ou maior que  $\mathcal{O}^3$ . Dessa forma, comparando a Eq. (5.32) com a Eq. (5.31), temos que o  $ij$ -ésimo elemento da matriz Hessiana é dado por

$$H_{ij} := \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\Theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\Theta_{\text{ML}}}. \quad (5.33)$$

Introduzida por Fisher<sup>8</sup> (1935)[26], a *matriz de informação de Fisher* (ou sim-

---

<sup>8</sup>Ronald Aylmer Fisher (1890 - 1962).

plesmente, *matriz de Fisher*), é definida (veja, *e.g.*, [33], [29] ou TTH [59]) como a *média* da matriz Hessiana sobre o conjunto de dados, isto é

$$F_{ij} := \langle H_{ij} \rangle. \quad (5.34)$$

Como a matriz de Fisher é construída a partir das derivadas segundas da função  $\mathcal{L}$  avaliada no ponto de ML, então  $F_{ij}$  é uma medida do quão rápido, *em média*, a *likelihood* decai a partir do seu ponto de máximo, o que é equivalente a uma medida da largura da *likelihood*. Se o decaimento é rápido o suficiente, então a largura da *likelihood* é curta, de forma que a região delimitada no espaço de parâmetros é pequena e dizemos que a *likelihood* impõe uma forte restrição (*constraint*) no parâmetro cosmológico em questão. Ou, analogamente, dizemos que a *likelihood* possui alto conteúdo de *informação* a respeito desse parâmetro.

### 5.3.1 Propriedades da Matriz de Fisher

A matriz de Fisher aparece com frequência nas análises estatísticas em vários contextos da cosmologia, desde experimentos envolvendo o CMB [10] até distribuição de galáxias [29], [58], bem como *surveys* de múltiplos traçadores da estrutura em larga-escala [3]. Para fazer essas análises são utilizadas várias propriedades interessantes e importantes da matriz de Fisher. Coe (2009)[16] fornece um guia rápido e conciso sobre essas principais propriedades.

#### Elipses de Confiança

Para fins de elucidação, vamos nos restringir a uma espaço de parâmetros bidimensional, e como ficará mais claro adiante, vamos começar *definindo* a matriz de Fisher da seguinte maneira

$$\mathbf{F} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & -\rho/(\sigma_1\sigma_2) \\ -\rho/(\sigma_1\sigma_2) & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

É possível mostrar que sua inversa é dada por

$$\mathbf{C}_p := \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

A inversa da matriz de Fisher é denominada de *matriz de covariância*,  $\mathbf{C}_p$ , onde

o subíndice  $p$  serve para deixar claro que se refere aos parâmetros<sup>9</sup>. Assim,  $\sigma_1$  é a incerteza de  $1-\sigma$  no parâmetro  $\theta_1$  quando marginalizado sobre  $\theta_2$ , e analogamente  $\sigma_2$  é a incerteza de  $1-\sigma$  no parâmetro  $\theta_2$  quando marginalizado sobre  $\theta_1$ . Por outro lado, na diagonal secundária da Eq. (5.36), a quantidade  $\rho\sigma_1\sigma_2 =: \sigma_{12}$  mede a intensidade de correlação entre os parâmetros. Essa intensidade é quantificada pelo *coeficiente de correlação*  $\rho$ , que varia no intervalo  $[0, 1]$ . Em particular, se  $\rho = 0$ , os parâmetros são ditos totalmente independentes (ou descorrelacionados), e se  $\rho = 1$ , os parâmetros são ditos totalmente dependentes (ou correlacionados).

Dessa forma, a distribuição de probabilidade Gaussiana bi-variada, denotada por  $G$ , pode ser escrita em termos da inversa da matriz de covariância

$$\begin{aligned} G(\theta_1, \theta_2) &= N \exp \left[ -\frac{1}{2} (\theta_1, \theta_2)^t \mathbf{C}_p^{-1} (\theta_1, \theta_2) \right] \\ &= N \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{\theta_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\theta_2^2}{\sigma_2^2} - 2\frac{\rho\theta_1\theta_2}{\sigma_1\sigma_2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde, por simplicidade, consideramos  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = 0$ . Portanto, podemos identificar facilmente que o argumento da exponencial na Eq. (5.37) é a equação de uma elipse, tal que seus semi-eixos, maior  $a$  e menor  $b$ , são orientados ao longo dos autovetores de  $\mathbf{C}_p$ , e o quadrado de seus comprimentos são iguais aos seus respectivos autovalores correspondentes a  $\mathbf{C}_p$ . Sendo assim, resolvendo a equação de autovalor para a Eq. (5.36) é possível mostrar que

$$a^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2}{4} + \sigma_{12}^2}, \quad (5.38)$$

$$b^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2}{4} + \sigma_{12}^2}. \quad (5.39)$$

O ângulo que os semi-eixos da elipse formam com os eixos coordenados (a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ ) é dado por

$$\tan(2\phi) = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}. \quad (5.40)$$

Além disso, generalizando para o caso em que a elipse esteja centrada no valor *fiducial*  $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ , temos que o contorno da região de confiança é descrita pela equação

---

<sup>9</sup>Como veremos mais adiante, existe também a matriz de covariância das medidas, que é *diferente* da matriz de covariância dos parâmetros  $\mathbf{C}_p$  e é muito importante manter em mente que existe essa diferença.

paramétrica da elipse [56]

$$\theta_1(t) = \hat{\theta}_1 + \alpha [a \cos(t)\cos(\phi) - b \sin(t)\cos(\phi)], \quad (5.41)$$

$$\theta_2(t) = \hat{\theta}_2 + \alpha [a \cos(t)\cos(\phi) + b \sin(t)\cos(\phi)], \quad (5.42)$$

onde  $0 \leq t \leq 2\pi$  e  $\alpha$  é uma constante que determina o nível de confiança (CL: *confidence level*) que estamos interessados como mostrado na tabela abaixo

$\alpha$	CL	$n-\sigma$
1.52	68.3%	1
2.48	95.4%	2
3.44	99.7%	3

### Marginalização

Às vezes ocorre de a *likelihood* incorporar constantes e/ou fatores multiplicativos que não nos interessam em um primeiro momento (veja, *e.g.*, [6]). Ou então, desejamos analisar a *likelihood* para um número menor de parâmetros, por exemplo, 1 ou 2 deles, o que nos permite visualizar os gráficos das elipses para as regiões de confiança. Em qualquer que seja o caso, denominamos de *marginalização* o procedimento de reduzir o número de parâmetros dos quais a *likelihood* depende.

Dessa forma, se a *likelihood* dada pela Eq. (5.29) depende de  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  então, por exemplo, a marginalização sobre  $m - 2$  componentes quaisquer é

$$L(\theta_i, \theta_j) = \int L(\Theta) d^{k \neq i, j} \Theta, \quad (5.43)$$

e embora estejamos utilizando a mesma letra  $L$  para a *likelihood* antes e depois da marginalização, deve-se manter em mente que são duas funções diferentes.

Considerando a marginalização sobre o parâmetro  $\theta_2$  da Gaussiana dada pela Eq. (5.37) temos o seguinte

$$\begin{aligned} G(\theta_1) &= N \int G(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 = N \int \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{\theta_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\theta_2^2}{\sigma_2^2} - 2\frac{\rho\theta_1\theta_2}{\sigma_1\sigma_2} \right) \right] d\theta_2 \\ &= N \exp \left[ -\frac{\theta_1^2}{2\sigma_1^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} \left( \theta_2 - \frac{\rho\sigma_2\theta_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] d\theta_2 \\ &= N' \exp \left[ -\frac{\theta_1^2}{2\sigma_1^2} \right], \end{aligned} \quad (5.44)$$

onde  $N' = N \sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma_2^2}$  é uma constante, portanto, independente de  $\theta_2$ . Se

reescrevermos a equação acima da seguinte maneira

$$G(\theta_1) = N' \exp \left[ -\frac{1}{2} \theta_1 (\sigma_1^2)^{-1} \theta_1 \right], \quad (5.45)$$

e compararmos com as Eqs. (5.36)-(5.37), concluímos que a marginalização é equivalente a remover a linha e a coluna da matriz  $\mathbf{F}^{-1}$  correspondente à variável marginalizada, nesse caso,  $\theta_2$ . Esse processo pode ser generalizado para um número de parâmetros e de marginalização arbitrárias.

Isso nos mostra que a diagonal principal da inversa da matriz de Fisher contém os erros de  $1-\sigma$  do  $i$ -ésimo parâmetro quando marginalizado sobre todos os outros, de modo que podemos definir o *erro marginal* (*marginal error* [43]) como

$$\sigma_i^2 = (\mathbf{F}^{-1})_{ii}. \quad (5.46)$$

E embora seja aparentemente um resultado simples, isso é uma propriedade muito importante e útil. Na verdade, a Eq. (5.46) é um caso particular de um teorema estatístico mais geral conhecido como *inequação de Cramér-Rao* [32].

O teorema de Cramér-Rao afirma que nenhum método pode medir o erro de um estimador *unbiased* menor do que o limite inferior imposto pela Eq. (5.46), portanto, no caso geral, temos

$$\sigma_i^2 \geq (\mathbf{F}^{-1})_{ii}. \quad (5.47)$$

Em relação ao exemplo inicial, se  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  formam nossa cosmologia fiducial para os parâmetros  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente, então poderemos escrever

$$\theta_1 = \hat{\theta}_1 \pm \sigma_1 = \hat{\theta}_1 \pm \sqrt{(\mathbf{F}^{-1})_{11}}, \quad (5.48)$$

$$\theta_2 = \hat{\theta}_2 \pm \sigma_2 = \hat{\theta}_2 \pm \sqrt{(\mathbf{F}^{-1})_{22}}. \quad (5.49)$$

Isso significa que, se  $\sigma_1$  for  $\eta_1\%$  (e.g., 10%) de  $\hat{\theta}_1$  e se  $\sigma_2$  for  $\eta_2\%$  (e.g., 30%) de  $\hat{\theta}_2$ , então, depois que as observações forem realizadas, é impossível que o melhor ajuste das análises estatísticas, a partir desses dados observacionais, retornem barras de erro menor do que  $\eta_1\%$  e  $\eta_2\%$  para os parâmetros  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente.

### Figura de Mérito

Seria interessante se tivéssemos uma forma quantitativa de medir a intensidade do vínculo que o experimento impõem sobre os parâmetros. Intuitivamente, uma maneira de fazer isso é determinar a área da região de confiança delimitada pela elipse. Essa área é dada por

$$\begin{aligned} A &= \pi (\alpha a) (\alpha b) \\ &= \pi \alpha^2 ab. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Usando as Eqs. (5.38)-(5.39) é possível mostrar que

$$a \cdot b = \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{(1 - \rho^2)}, \tag{5.51}$$

por outro lado, o determinante da matriz de Fisher dada pela Eq. (5.35) é

$$\det \mathbf{F} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}, \tag{5.52}$$

portanto, a área da elipse pode ser reescrita da seguinte maneira

$$A = \pi \alpha^2 \text{FOM}, \tag{5.53}$$

onde defini-se a *figura de mérito* (*figure of merit*) por

$$\text{FOM} := (\det \mathbf{F})^{-1/2}. \tag{5.54}$$

Dessa forma, se o determinante da matriz de Fisher é grande (pequeno) a FOM é pequena (grande), logo a área da elipse é pequena (grande) e o vínculo sobre os parâmetros é maior (menor). Se tivermos mais parâmetros, então para obter as elipses será necessário marginalizar sobre os demais. Dessa forma, podemos obter combinações 2 a 2 e determinar as FOM dos pares, e assim saberemos quais estão mais bem vinculados. Pode-se até comparar FOM dos mesmos pares de parâmetros cosmológicos, porém de experimentos diferentes, para saber qual impôs maior vínculo sobre os mesmos.

## Transformação de Variáveis

Vamos começar considerando a *likelihood* dada pela Eq. (5.31)

$$L(\Theta) = N \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{\theta}_i H_{ij}^{(\theta)} \tilde{\theta}_j \right], \quad (5.55)$$

onde definimos  $\tilde{\theta}_i := \theta_i - \hat{\theta}_i$  e  $H_{ij}^{(\theta)}$  serve para indicar a matriz Hessiana em relação aos parâmetros do conjunto  $\{\Theta\}$ .

Suponha que queremos fazer uma mudança de parâmetros cosmológicos, indo do sistema  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$  para um novo sistema  $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots)$ , de modo que cada componente do conjunto  $\{\Psi\}$  se relaciona com as componentes do conjunto  $\{\Theta\}$  por meio de funções  $\psi_j = \psi_j(\Theta)$ . Lembrando que  $\Theta_{\text{ML}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots)$  é o ponto de máxima *likelihood*. Então, expandindo  $\psi_j$  em série de Taylor em torno do ponto  $\hat{\theta}_i$ , temos

$$\psi_j(\Theta) \approx \psi_j(\Theta_{\text{ML}}) + \sum_i \left. \frac{\partial \psi_j(\Theta)}{\partial \theta_i} \right|_{\Theta_{\text{ML}}} (\theta_i - \hat{\theta}_i), \quad (5.56)$$

definindo

$$\hat{\psi}_j := \psi_j(\Theta_{\text{ML}}), \quad (5.57)$$

$$\tilde{\psi}_j := \psi_j - \hat{\psi}_j, \quad (5.58)$$

portanto, a Eq. (5.56) pode ser reescrita como

$$\tilde{\psi}_j = \sum_i \left. \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta_i} \right|_{\Theta_{\text{ML}}} \tilde{\theta}_i. \quad (5.59)$$

Observe que  $\partial \psi_j / \partial \theta_i$  nada mais são do que as componentes da inversa da matriz Jacobiana da transformação entre os sistemas de parâmetros computada no ponto de ML.

Se as equações de transformação podem ser invertidas, então a inversa da Eq. (5.59) é simplesmente dada por

$$\tilde{\theta}_i = \sum_j \left. \frac{\partial \theta_i}{\partial \psi_j} \right|_{\Psi_{\text{ML}}} \tilde{\psi}_j. \quad (5.60)$$

Substituindo a equação acima na Eq. (5.55), temos que a *likelihood* em termos do



novo sistema é dada por

$$\begin{aligned}
L &= N \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{\theta}_i H_{ij}^{(\theta)} \tilde{\theta}_j \right] \\
&= N \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k\ell} \tilde{\psi}_k \left( \sum_{ij} \frac{\partial \theta_i}{\partial \psi_k} \Big|_{\Psi_{\text{ML}}} H_{ij}^{(\theta)} \frac{\partial \theta_j}{\partial \psi_\ell} \Big|_{\Psi_{\text{ML}}} \right) \tilde{\psi}_\ell \right] \\
&= N \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k\ell} \tilde{\psi}_k H_{k\ell}^{(\psi)} \tilde{\psi}_\ell \right], \tag{5.61}
\end{aligned}$$

onde definimos a matriz Hessiana do novo sistema

$$H_{k\ell}^{(\psi)} := \sum_{ij} \frac{\partial \theta_i}{\partial \psi_k} \Big|_{\Psi_{\text{ML}}} H_{ij}^{(\theta)} \frac{\partial \theta_j}{\partial \psi_\ell} \Big|_{\Psi_{\text{ML}}}. \tag{5.62}$$

Por fim, como a matriz de Fisher se relaciona com a matriz Hessiana de acordo com a Eq. (5.34), então uma transformação equivalente para a matriz de Fisher é dada por

$$F_{k\ell}^{(\psi)} = \sum_{ij} \frac{\partial \theta_i}{\partial \psi_k} \Big|_{\Psi_{\text{ML}}} F_{ij}^{(\theta)} \frac{\partial \theta_j}{\partial \psi_\ell} \Big|_{\Psi_{\text{ML}}}. \tag{5.63}$$

Em termos de multiplicação de matrizes (veja, *e.g.*, [16]), temos

$$\mathbf{F}^{(\psi)} = \mathbf{J}^t \mathbf{F}^{(\theta)} \mathbf{J}, \tag{5.64}$$

onde  $t$  indica transposta e  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana da transformação.

### Adição de Priors

A relação de proporcionalidade na Eq. (5.29) ocorre quando assumimos um *flat* prior, mas no caso geral teríamos que utilizar a Eq. (5.26). Se o prior também for descrito por uma Gaussiana, então a *posterior*, *i.e.*, a *likelihood*, seria um produto de Gaussianas. Porém, realizando os mesmos procedimentos do início da seção, concluiríamos que em termos da matriz de Fisher, levar os priors de múltiplos experimentos em consideração, supondo-se que os experimentos possuem os mesmos valores fiduciais, equivale a realizar uma adição de matrizes, (veja, *e.g.*, [6], [56])

$$\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_p, \tag{5.65}$$

onde  $\mathbf{F}_p$  é a matriz de Fisher de outras observações.

Embora a Eq. (5.65) nos forneça um método simples para levar em consideração resultados de experimentos passados, vale salientar que existem algumas sutilezas às quais que devemos nos atentar. Por exemplo, a soma de matrizes só é definida se as matrizes tiverem as mesmas dimensões. Isso significa que se um dos experimentos impõem vínculo somente em um subconjunto do número total de parâmetros do outro experimento, então, para deixar as matrizes com as mesmas dimensões, será necessário preencher com zeros (o que se traduz na ausência de informação sobre esses parâmetros) as linhas e colunas correspondentes ao conjunto complementar dos parâmetros ausentes. Além disso, também é importante garantir que as matrizes sejam construídas associando as linhas e as colunas aos mesmos parâmetros.

## 5.4 Matriz de Fisher & surveys de galáxias

Na seção anterior introduzimos a matriz de Fisher e mostramos algumas de suas várias propriedades. Nessa seção estamos interessados em ir um pouco além na teoria de *forecasts*. Para isso, iremos assumir a premissa de que as observações futuras de um *survey* particular fornecerão os *dados* de suas observações para a distribuição de galáxias descritos por uma Gaussiana multivariada (veja, *e.g.*, [6], [32], [43]). Começemos então escrevendo

$$L = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \mathbf{C})^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right], \quad (5.66)$$

onde  $n$  é o número total de medidas,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um vetor de dados e  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  é a média tal que  $\mu_i = \langle x_i \rangle$ . Se definirmos a *matriz de dados*  $\mathbf{D} := (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t$  então a matriz de *covariância das medidas* é o valor esperado da matriz de dados, isto é,

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{D} \rangle = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad (5.67)$$

de modo que  $\sigma_{ij} = \langle (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \rangle$  e  $\sigma_i^2 := \sigma_{ii}$ .

Aplicando a definição da *log-likelihood* na Eq. (5.66) temos

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L} &= -2 \ln L = \ln \det \mathbf{C} + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) + n \ln 2 \\ &= \text{Tr} [\ln \mathbf{C} + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}] + n \ln 2, \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde, na equação acima, utilizamos a identidade matricial em que  $\ln \det \mathbf{C} = \text{Tr} \ln \mathbf{C}$ , e a propriedade de associatividade do traço.

O ponto importante, e de certa forma sutil, é que a média  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Theta})$  e a matriz de covariância  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\Theta})$  são dependentes dos parâmetros cosmológicos (veja, *e.g.*, [6], [43]). Sendo assim, podemos calcular a matriz de Fisher dada por

$$F_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle =: \langle \mathcal{L}_{,ij} \rangle, \quad (5.69)$$

onde, por simplicidade, definimos a notação  $\mathcal{L}_{,i} := \partial \mathcal{L} / \partial \theta_i$  para indicar a derivada de  $\mathcal{L}$  em relação ao  $i$ -ésimo parâmetro do conjunto  $\{\boldsymbol{\Theta}\}$ .

Considerando que a matriz de covariância é invertível, e utilizando a regra da cadeia, é possível mostrar duas propriedades úteis

$$(\mathbf{C}^{-1})_{,i} = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,i} \mathbf{C}^{-1}, \quad (5.70)$$

$$(\ln \mathbf{C})_{,i} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,i}. \quad (5.71)$$

Tomando a primeira derivada da Eq. (5.68) e utilizando as duas propriedades acima, temos

$$2\mathcal{L}_{,i} = \text{Tr} \left[ \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,i} (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}_{,i} \right], \quad (5.72)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Utilizando sucessivas vezes a Eq. (5.70), é possível mostrar que a derivada segunda da Eq. (5.72) é dada por

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}_{,ij} &= \text{Tr} \left[ -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,j} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,i} (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,ij} (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}) \right. \\ &\quad + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,i} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,j} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,i} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}_{,j} \\ &\quad \left. - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,j} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}_{,i} + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}_{,ij} \right]. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Para obter a matriz de Fisher dada pela Eq. (5.69), tomamos a média da Eq. (5.73) e vemos que alguns termos se anulam, pois a média  $\langle \rangle$  atua somente na matriz de dados, enquanto as derivadas parciais  $\partial \theta_i$  e  $\partial \theta_i \partial \theta_j$  atuam somente na

média e na matriz de covariância. Portanto, podemos escrever

$$\langle \mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \rangle = \mathbf{0} \quad (5.74)$$

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{C} \quad (5.75)$$

$$\langle \mathbf{D}_{,i} \rangle = \mathbf{0} \quad (5.76)$$

$$\langle \mathbf{D}_{,ij} \rangle = \boldsymbol{\mu}_{,i} \boldsymbol{\mu}_{,j}^t + \boldsymbol{\mu}_{,j}^t \boldsymbol{\mu}_{,i} \quad (5.77)$$

e como consequência, temos  $\langle \mathcal{L}_{,i} \rangle = 0$ .

Tomando a média da Eq. (5.73) e utilizando as Eqs. (5.74)-(5.77) obtemos a matriz de Fisher

$$F_{ij} = \langle \mathcal{L}_{,ij} \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,i} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}_{,j} + \mathbf{C}^{-1} \langle \mathbf{D}_{,ij} \rangle \right]. \quad (5.78)$$

Para o bem da clareza, reservamos os índices gregos  $\alpha$  e  $\beta$  para representar a matriz de Fisher, e os índices latinos para as demais grandezas. Usando a notação usual de derivada e expandindo o traço, podemos escrever a Eq. (5.78) da seguinte maneira

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} C_{lm}^{-1} \frac{\partial C_{mn}}{\partial \theta_\alpha} C_{np}^{-1} \frac{\partial C_{pl}}{\partial \theta_\beta} + \frac{\partial \mu_l}{\partial \theta_\alpha} C_{lm}^{-1} \frac{\partial \mu_m}{\partial \theta_\beta} \quad (5.79)$$

onde trocamos os vários somatórios  $\sum_{lmnp}$  em favor da convenção da soma de Einstein (veja, *e.g.*, [6], [23], [59]).

Na §§5.3.1 lidamos com a matriz de covariância dos parâmetros  $\mathbf{C}_p$  e nessa seção introduzimos a matriz de covariância das medidas  $\mathbf{C}$ . É muito importante ressaltar que essas matrizes de covariância são distintas. Com efeito, a dimensão de  $\mathbf{C}_p$  é igual à dimensão da matriz de Fisher e essa por sua vez, tem dimensão igual ao número total de parâmetros que se deseja analisar. Por outro lado, como veremos na próxima §5.5, a matriz  $\mathbf{C}$  tem dimensão igual ao número total de subdivisões de cada bin do domínio da grandeza que se deseja medir através do experimento. Essa grandeza, na Eq. (5.79), é representada pela quantidade  $\mu$  e pode ser qualquer uma das funções estudadas nos capítulos anteriores, a saber, a função de correlação  $\xi(x)$ <sup>10</sup>, o espectro de potência  $P(k)$ , a função de correlação angular  $w(\theta)$ <sup>11</sup> ou o espectro de potência angular  $C_\ell$ <sup>12</sup> (veja, *e.g.*, [56]).

<sup>10</sup>Para evitar confusão entre as notações desse capítulo com as dos capítulos anteriores, vale ressaltar que,  $x$  na função de correlação  $\xi(x)$  é distância comóvel, e não uma medida, ...

<sup>11</sup>...  $\theta$  na ACF  $w(\theta)$ , é um ângulo, e não um parâmetro cosmológico, ...

<sup>12</sup>... e  $\ell$  na APS  $C_\ell$  é o multipolo, e não uma das componentes da matriz de covariância na Eq. (5.79).

## 5.5 Matrizes de covariância

Nos capítulos anteriores, todas as grandezas  $P$ ,  $\xi$ ,  $C_\ell$  e  $w$  foram consideradas funções que dependem de variáveis contínuas  $k$ ,  $x$ ,  $\ell$  e  $\theta$ , respectivamente. Entretanto, na prática, em um *survey* de galáxias, temos que discretizar o domínio dessas funções. Isso é feito dividindo o levantamento de galáxias em *bins* (ou *faixas*) de redshift [55]. Um bin de redshift (por vezes também chamado de *shell*) nada mais é do que um sub-intervalo do intervalo total de redshift considerado pelo *survey*. Dessa forma, por exemplo, se  $z \in [z_{inf}, z_{sup}]$  é o intervalo de redshift, então podemos discretizar esse intervalo da seguinte maneira  $z = [z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n]$  onde  $z_1 := z_{inf}$  e  $z_n := z_{sup}$ . Portanto, um bin de redshift pode ser definido como  $\Delta z_i := z_i - z_{i-1}$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ . Na verdade, a ideia de bin não se limita somente ao redshift. Como veremos, para a ACF, aparecerá naturalmente o bin angular.

Dessa forma, o número de bins de redshift e o número de bins do domínio da grandeza (em nosso caso, bin angular) determinam o número de sub-matrizes e a dimensão da matriz de covariância, respectivamente. Isso ficará mais claro no decorrer dessa seção.

Neste trabalho iremos nos aprofundar na matriz de covariância para o caso em que  $\mu = w(\theta)^{13}$ , mas veremos brevemente a matriz de covariância para todas as quatro grandezas citadas anteriormente.

### Matriz de covariância para $P(k)$

A matriz de covariância para o espectro de potência  $P(k)$ , denotada por  $\text{Cov}[\text{PS}]_{kk'}^{ij}$  ( $i$  e  $j$  determinam os bins de redshift) já foi obtida (mas não explicitada) na §5.1, em particular, pela Eq. (5.19). Seguindo algumas referências como guia, *e.g.*, [14], [21], [25] e [56], podemos generalizar a Eq. (5.19) para construir a matriz de covariância (por simplicidade, CM, *covariance matrix*) do espectro de potência, dada por

$$\text{Cov}[\text{PS}]_{kk'}^{ij} = \langle P^i(k)P^j(k') \rangle - \langle P^i(k) \rangle \langle P^j(k') \rangle = \frac{4\pi^2}{Vk^2} \left[ P(k) + \frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i} \right]^2 \delta_D(k - k'), \quad (5.80)$$

<sup>13</sup>Lembre-se que  $\mu$  depende dos parâmetros cosmológicos  $\Theta$ , portanto  $w(\theta)$  também dependerá, mas aqui temos um quase conflito de notação, pois  $\theta$  representa ângulo na ACF, e por outro lado, cada componente  $\theta_i$  do vetor  $\Theta$  é um parâmetro cosmológico. Para ficar mais evidente, deveríamos escrever  $\mu = w(\theta|\Theta)$ , mas como nessa seção trabalharemos apenas com os bins angulares da ACF, podemos por hora omitir a dependência com o conjunto de parâmetros  $\{\Theta\}$ , de modo que podemos escrever  $\mu = w(\theta)$ .

onde o Delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  garante que a matriz de covariância do *shot-noise*, quantificada pelo termo  $1/\bar{n}_i$ , seja diagonal. O termo  $1/V$ , onde  $V$  é o volume, é uma correção devido ao fato do *survey* cobrir apenas uma parte limitada do céu (veja, *e.g.*, [67]).

### Matriz de covariância para $\xi(x)$

Vamos utilizar a função de correlação angular de dois pontos dada pela Eq. (3.76) para  $\ell = 0$ , isto é

$$\xi(x) = \int_0^\infty dk \frac{k^2}{2\pi^2} P(k) j_0(kx), \quad (5.81)$$

onde  $\xi := \xi_0$ . Utilizando a Eq. (5.81) juntamente com a Eq. (5.80) podemos obter a CM para a função de correlação

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\text{CF}]_{xx'}^{ij} &= \langle \xi^i(x) \xi^j(x') \rangle - \langle \xi^i(x) \rangle \langle \xi^j(x') \rangle \\ &= \int_0^\infty dk \int_0^\infty dk' \frac{k^2 k'^2}{(2\pi^2)^2} j_0(kx) j_0(k'x') \text{Cov}[\text{PS}]_{kk'}^{ij} \\ &= \frac{2}{V} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{2\pi^2} j_0(kx) j_0(kx') \left[ P(k) + \frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.82)$$

### Matriz de covariância para $C_\ell$

O análogo angular da Eq. (5.80) é dada por (veja, *e.g.*, [14], [56])

$$\text{Cov}[\text{APS}]_{\ell\ell'}^{ij} = \langle C_\ell^i C_{\ell'}^j \rangle - \langle C_\ell^i \rangle \langle C_{\ell'}^j \rangle = \frac{2}{(2\ell+1)f_{\text{sky}}} \left[ C_\ell^{i,j} + \frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i} \right]^2 \delta_{\ell\ell'}, \quad (5.83)$$

onde  $1/f_{\text{sky}}$  é uma correção (análoga à correção  $1/V$ ) devido ao fato do *survey* cobrir apenas uma região limitada do céu (veja discussão em [13]) e  $\delta_{\ell\ell'}$  é o Delta de Kronecker. O termo  $C_\ell^{i,j}$  na Eq. (5.83) é a generalização da Eq. (4.23) para permitir o cruzamento entre bins de redshift distintos, ou seja

$$C_\ell^{i,j} = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P(k) \Psi_\ell^i(k) \Psi_\ell^j(k). \quad (5.84)$$

A informação sobre em qual bin de redshift nós estamos está contida em  $\Psi_\ell^i$ . Para o caso particular sem a correção de RSD, temos

$$\Psi_\ell^i(k) := \int dz \phi_i(z) D(z) j_\ell(kx(z)). \quad (5.85)$$

### Matriz de covariância para $w(\theta)$

De modo equivalente ao que foi feito para determinar a CM para a função de correlação, podemos obter a CM para a sua contraparte angular utilizando a Eq. (4.13)

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \mathcal{P}_{\ell}(\cos \theta) C_{\ell}, \quad (5.86)$$

dessa forma, em conjunto com a Eq. (5.83), podemos escrever

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta\theta'}^{ij} &= \langle w^i(\theta) w^j(\theta') \rangle - \langle w^i(\theta) \rangle \langle w^j(\theta') \rangle \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \frac{(2\ell + 1)(2\ell' + 1)}{(4\pi)^2} \mathcal{P}_{\ell}(\cos \theta) \mathcal{P}_{\ell'}(\cos \theta') \text{Cov}[\text{APS}]_{\ell\ell'}^{ij} \\ &= \frac{2}{f_{\text{sky}}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell + 1}{(4\pi)^2} \mathcal{P}_{\ell}(\cos \theta) \mathcal{P}_{\ell}(\cos \theta') \left[ C_{\ell}^{i,j} + \frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Apenas para fins de ilustração, podemos sintetizar tudo o que foi dito acima por meio de um diagrama esquemático

$$\begin{array}{ccc} \xi(x) & \xrightarrow{\text{proj.}} & w(\theta) \\ \text{F.T.} \downarrow & & \downarrow \text{S.H.} \\ P(k) & \xrightarrow{\text{proj.}} & C_{\ell} \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Cov}_{\mu}^{ij} = \langle \mu^i \mu^j \rangle - \langle \mu^i \rangle \langle \mu^j \rangle} \quad \begin{array}{ccc} \text{Cov}_{\xi} & \xrightarrow{\text{proj.}} & \text{Cov}_w \\ \text{F.T.} \downarrow & & \downarrow \text{S.H.} \\ \text{Cov}_P & \xrightarrow{\text{proj.}} & \text{Cov}_{C_{\ell}} \end{array} .$$

# Capítulo 6

## Análise para o LSST

Nesta parte do trabalho estamos interessados em aplicar o formalismo matemático e os conceitos físicos desenvolvidos nos capítulos anteriores para o Legacy Survey of Space and Time (LSST).

Este capítulo tem um propósito duplo; (i) descrever e manter a generalidade do método de se fazer estimativas (*forecasts*) dos erros dos parâmetros cosmológicos para grandes levantamentos fotométricos por meio da análise da função de correlação angular, (ii) e simultaneamente, no decorrer do texto, apresentar os nossos resultados obtidos decorrentes do mestrado. A justificativa para isso é que queremos ir do mais geral, para que se possa ter uma ideia de como esse método pode ser aplicado para outros surveys fotométricos futuros, e recair sobre o caso particular do LSST, de modo que se possa ver na prática como os métodos são empregados, bem como, por óbvio, a apresentação dos nossos resultados.

### 6.1 Legacy Survey of Space and Time: Visão Geral

O LSST<sup>1</sup> (Figura 6.1) está sendo construído no Pico El Peñón do Cerro Pachón ao norte dos Andes do Chile. Para se ter um ideia da dimensão temporal do planejamento da construção do LSST, a sua concepção surgiu no final do ano de 1990 (veja §1.3 de [2]). Em 2002, a LSST Corporation foi criada para gerenciar o projeto. No início de 2007, a proposta de construção foi submetida para a divisão de astronomia da National Science Foundation (NSF) e, de acordo com o LSST Project Schedule, a construção privada iniciou-se em 2011. O LSST está previsto para iniciar as suas

---

<sup>1</sup><https://www.lsst.org/>



operações no ano de 2022, e a partir daí conduzirá observações por um período de dez anos.

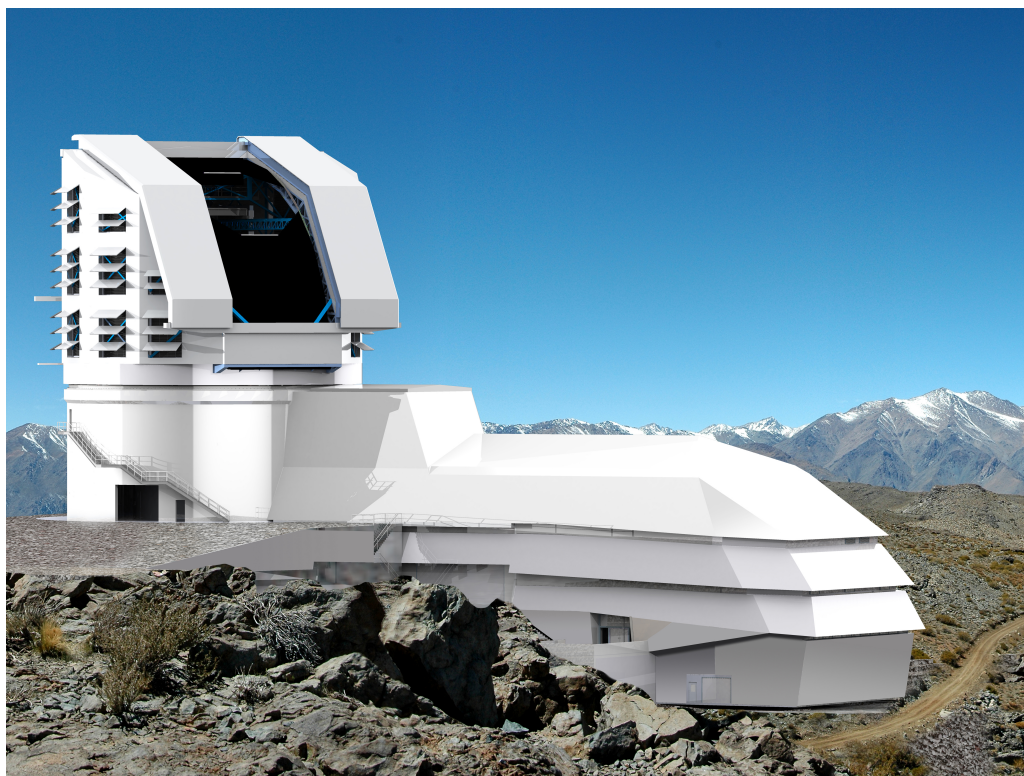


Figura 6.1: Concepção artística do exterior do LSST. No canto superior esquerdo vê-se o domo, que é o local onde efetivamente ficará o telescópio. Fonte: galeria de fotos do [lsst.org](http://lsst.org).

Com essas observações e o grande volume de dados previsto para serem gerados, o LSST terá o objetivo de contemplar uma enorme categoria de pesquisadores, mas que de modo geral, podem ser divididos em quatro grandes áreas das ciências astronômicas (veja §1.4 de [2]): (i) Estudo profundo do Sistema Solar (Capítulo 5 de [2]). (ii) Análise da estrutura e do conteúdo estelar da Via Láctea (Capítulos 6 e 7 de [2]). (iii) A caracterização de fenômenos variáveis e transientes do Universo, que por serem de difícil observação, hoje é um dos campos que reside na fronteira da astrofísica observacional (Capítulos 8 de [2]). (iv) E uma compreensão mais profunda sobre os atuais modelos cosmológicos, as propriedades da Energia Escura e da Matéria Escura, componentes estas que são os constituintes de maior porcentagem do conteúdo do nosso Universo, mas em torno das quais, também residem grandes questionamentos (Capítulos 11-15 de [2]).

Para alcançar esses e outros objetivos o LSST conta com um espelho primário 8.4 metros de diâmetro, uma câmera digital de 3.2 Gigapixel e um notável mecanismo

que realiza a troca dos filtros. A área coberta será de  $20.000 \text{ deg}^2$  e o imageamento será feito em seis bandas distintas:  $u$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $i$ ,  $z$  e  $y$  (ou simplesmente  $ugrizy$ , veja Figura 6.2), o que corresponde a uma cobertura de comprimento de onda que varia aproximadamente de 320 a 1050nm [35]. Esse sistema de filtros do LSST é baseado no sistema dos filtros de outro levantamento fotométrico, o Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [28], devido às experiências de sucesso do passado em uma grande variedade de aplicações [35].

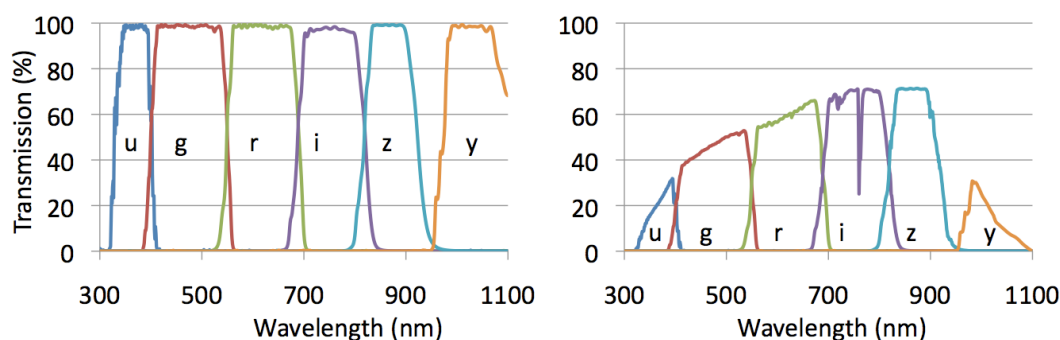


Figura 6.2: No painel da esquerda temos a eficiência de transmissão para os filtros do LSST como obtida por meio de modelos de desempenho do sistema de filtros. O painel da direita mostra que ocorre um decréscimo na transmissão devido a vários efeitos provocados, *e.g.*, pela atmosfera, reflexão e transmissividade da óptica do telescópio e a própria eficiência quântica dos sensores. Fonte: [2].

Durante seus dez anos de observações, cada caminho do céu será visitada 1000 vezes, sendo que cada *visita* é definido como consistindo de duas exposições (*back to back*) de 15 segundos em um único filtro [2]. Com isso, o LSST será capaz de gerar da ordem de dezenas de terabytes de dados a cada noite de observação. Ao término dos seus dez anos de operação, estima-se que o LSST irá observar da ordem de dezenas de bilhões de galáxias. Esse telescópio será o mais potente coletor de radiação eletromagnética na região do óptico. Acrescentando-se a velocidade com que ele vai realizar as observações, fenômenos que antes eram raros de ser observados passarão a ser comuns, e mesmo fenômenos novos e não previstos serão descobertos. Serão fornecidos da ordem de uma dezena de milhões de alertas por noite, de modo que fenômenos mais interessantes serão delegados para outros telescópios para continuação e complementação das investigações.

## 6.2 Caracterização geral do método

Como dito no início deste capítulo, estamos interessados, na medida do possível, em manter a generalidade do método de se fazer estimativas do erro dos parâmetros cosmológicos para um determinado survey fotométrico. Isso permite que o método, no futuro, possa ser aprimorado e aplicado para outros grandes levantamentos fotométricos. Acreditamos que isso pode ser melhor alcançado quando se mantém um panorama mais amplo, conciso e organizado sobre o método em si. Além do mais, existem muitos detalhes e sutilezas que em um primeiro contato com o formalismo, podem ser entendidos tão bem quanto melhor for a organização das ideias.

Para manter a clareza do método, antes de começarmos a apresentar os nossos resultados, primeiramente apresentamos de maneira sintetizada, na Figura 6.3, *todo* o processo e os principais passos que percorremos ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Dessa forma, uma análise que siga as ideias apresentada aqui, para fazer a estimativa do erro dos parâmetros cosmológicos por meio da ACF, terá que percorrer, de modo geral, três grandes passos (subdivididos por seus sub-passos):

- Definir o bin de redshift e o bin angular;
  - Definir o número de bins de redshift,
  - Definir o número de bins angulares para cada bin de redshift,
  - Definir o intervalo angular correspondente a cada bin de redshift.
- Calcular a matriz de covariância (CM);
  - Cálculo da função de seleção entre dois bins de redshift,
  - Cálculo das funções  $\Psi_\ell(k)$  entre dois bins de redshift,
  - Cálculo do *shot-noise* para um dos bins de redshift,
  - Cálculo da APS para esses dois bins de redshift,
  - Cálculo da CM,
  - Cálculo da inversa da matriz da CM.
- Calcular as derivadas da ACF;
  - Determinar a ACF para dois bins angulares,
  - Determinar a derivada da ACF em relação aos parâmetros cosmológicos.

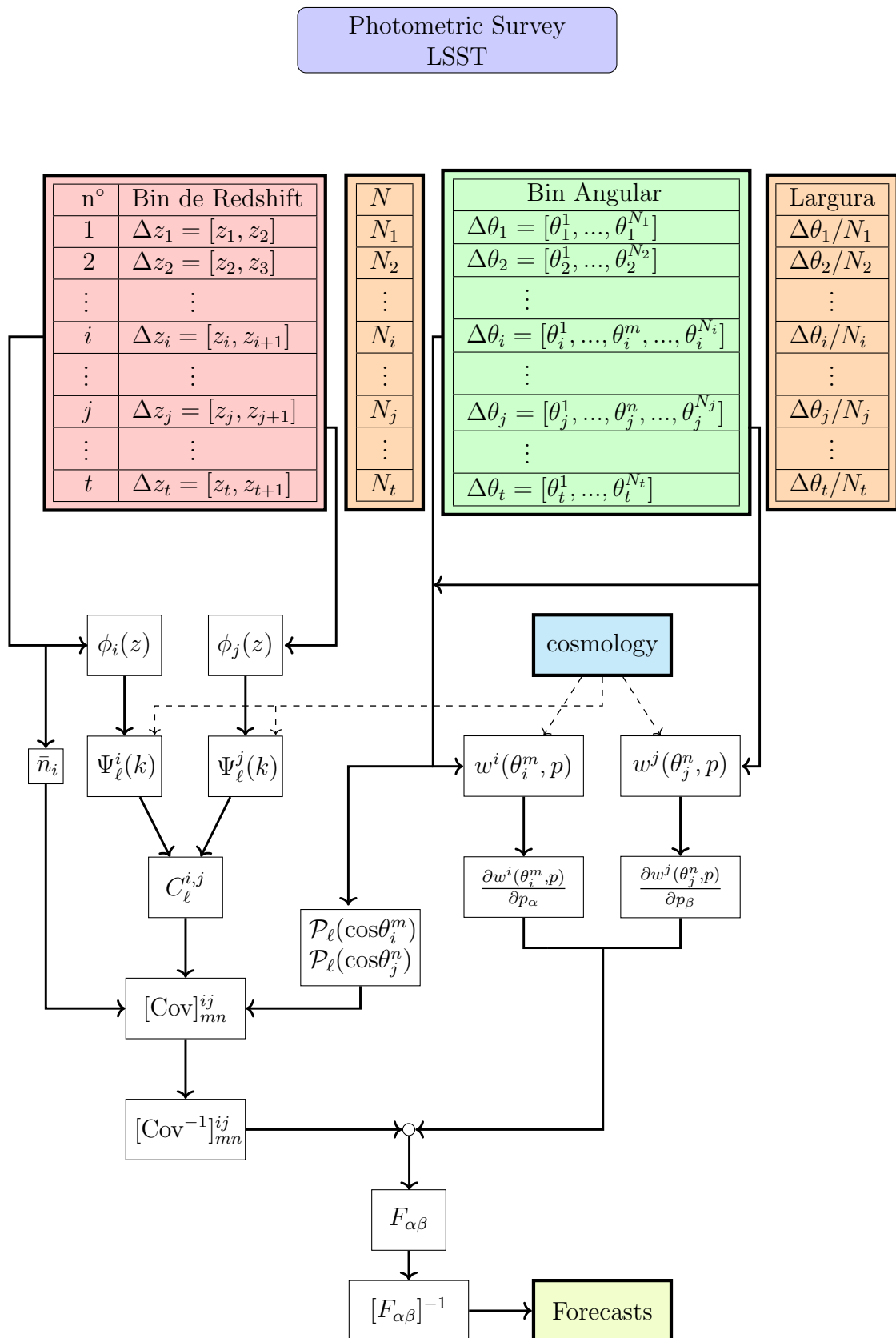


Figura 6.3: Diagrama sintetizando os principais passos do método de estimativa do erro dos parâmetros cosmológicos para um survey fotométrico, nesse caso, o LSST.

Ao fim desses três processos, combinam-se os resultados obtidos para obter a matriz de Fisher de acordo com a Eq. (5.79), e assim, por meio da inversa da matriz de Fisher, determinar a estimativa do erro dos parâmetros cosmológicos.

### 6.3 Função de Seleção fotométrica

Devido à expansão acelerada do Universo, o comprimento de onda da radiação eletromagnética emitida por um objeto astronômico, ao percorrer o espaço e chegar até nós, os observadores, sofre um deslocamento para o vermelho (redshift). Com isso, um dos principais objetivos de um *survey* ao captar a luz dessas fontes é determinar o seu redshift. Existem, de modo geral, duas técnicas que permitem fazer a estimativa do redshift: *espectroscopia* e *fotometria*.

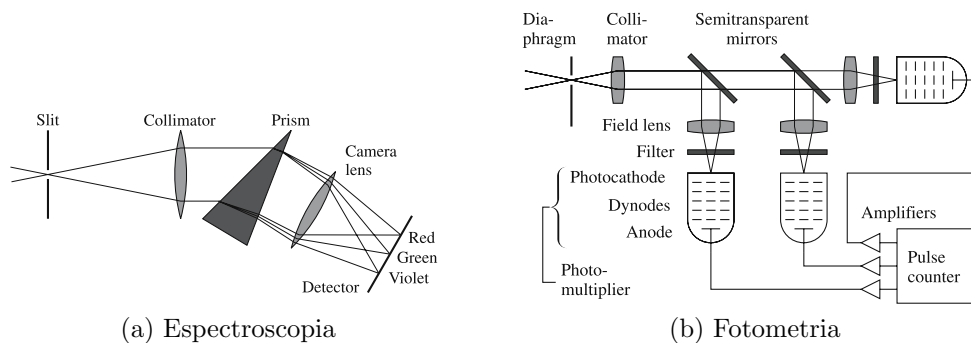


Figura 6.4: Comparação do princípio fundamental do funcionamento entre as técnicas de espectroscopia e fotometria para realizar estimativas de redshift. Fonte: [37].

A Figura 6.4 mostra o princípio fundamental do funcionamento dessas duas técnicas. Na espectroscopia, o método se baseia em analisar o espectro de um objeto. Isso pode ser feito fazendo com que a luz recebida passe por um *prisma* ou por uma rede de difração. Essa técnica fornece uma medida muito precisa do redshift, mas em contrapartida é necessário dedicar muito tempo de observação, de modo que ao final possuiremos comparativamente poucas medidas. O redshift estimado através desse processo geralmente é denominado de *spec-z* (ou *spec-z*: spectroscopic redshift).

Alternativamente à espectroscopia, como mostrado no painel (b) da Figura 6.4, temos a fotometria. Essa técnica, introduzida por Baum (1962) [8], consiste basicamente em fazer com que a luz recebida de uma fonte astronômica passe por vários *filtros* em diferentes bandas (como o sistema de filtros do LSST mostrado na Figura 6.2). Dessa maneira é possível obter de forma aproximada a distribuição espectral

de energia (comumente chamado de SED: *spectral energy distribution*) desses objetos (*e.g.*, galáxias), a partir da qual se estima o redshift. O redshift estimado através desse processo geralmente é denominado de *foto-z* (ou *photo-z*: photometric redshift).

A fotometria permite obter uma amostra em número de objetos observados muito maior em relação à espectroscopia. Em contrapartida, esse ganho no aumento do número de objetos observados e incorporado ao catálogo, também vem acompanhado por um *erro* maior na estimativa do redshift. Dessa forma, podemos dizer que o espec-z (mais preciso) se aproxima muito do redshift verdadeiro de uma dada fonte no céu, e por outro lado, o foto-z (menos preciso) flutua em torno do seu valor verdadeiro. Essa flutuação é modelada por uma distribuição de *probabilidade Gaussiana* truncada para *blueshift*, ou seja, valores de foto-z negativos são descartados da amostra (discussões mais profundas podem ser encontradas em [11], [18] e [41]).

Para o LSST (veja §13.3.3 de [2]) temos

$$P_G(z_p; z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{(z_p - z - \delta z)^2}{2\sigma_z^2}\right] & z_p \geq 0 \\ 0 & z_p < 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

sendo o parâmetro  $\delta z$  representando o bias (viés) entre  $z$  e  $z_p$ . Por outro lado, a dispersão do redshift fotométrico  $z_p$  em torno do seu valor verdadeiro  $z$  é quantificada pelo desvio padrão que depende do próprio valor do redshift. Este é modelado de acordo com a seguinte equação

$$\sigma_z = \sigma_{z0}(1 + z). \quad (6.2)$$

Por outro lado, a *distribuição do número de galáxias* em função do seu redshift é modelada de acordo com (veja, *e.g.*, [2], [55] e [66])

$$n(z) := \frac{dN_g(z)}{dz} \propto \left(\frac{z}{z^*}\right)^\alpha \exp\left[-(z/z^*)^\beta\right], \quad (6.3)$$

sendo os parâmetros para o LSST dados por  $z^* = 0.5$ ,  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ . Para o Dark Energy Survey temos  $\beta = 1.5$ , e os demais parâmetros,  $z^*$  (denominado de  $\bar{z}$ ) e  $\alpha$ , iguais aos do LSST, veja, *e.g.*, [55].

A Figura 6.5 mostra  $n(z)$  para o LSST e o DES, ambos normalizados em relação às suas respectivas áreas totais. Podemos ver que a curva correspondente ao DES decai rapidamente para  $z > 1$  e é praticamente nula para  $z \approx 2$ . Isso faz sentido, uma vez que as observações do DES foram realizadas limitadas ao intervalo de redshift

de 0.4 a 1.4. Em contrapartida, as observações do LSST serão feitas para valores de redshift que variam de  $z = 0$  e se estendem até  $z = 6$  [2].

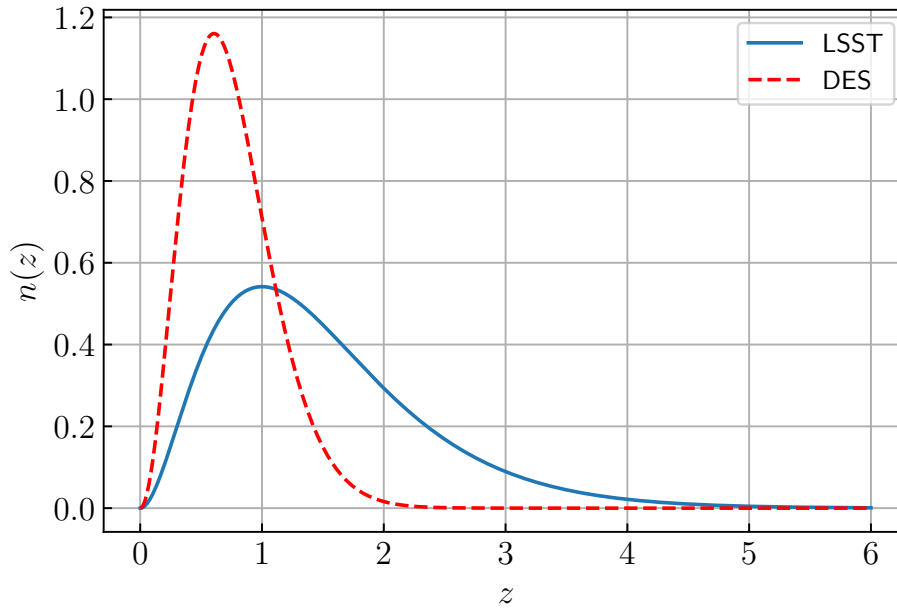


Figura 6.5: Comparação entre a função que modela a densidade de galáxias para dois surveys: Legacy Survey of Space and Time (LSST) e Dark Energy Survey (DES). A normalização é tomada em relação à área abaixo do gráfico de suas respectivas curvas.

A partir da Eq. (6.3) é fácil mostrar que o máximo da distribuição de galáxias ocorre em

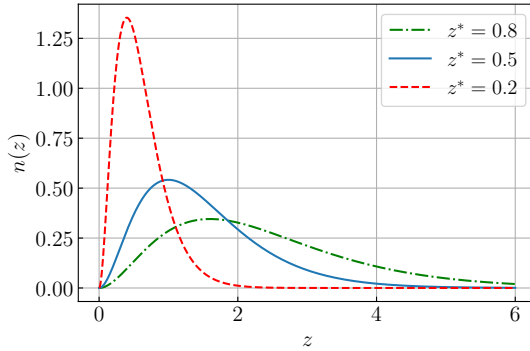
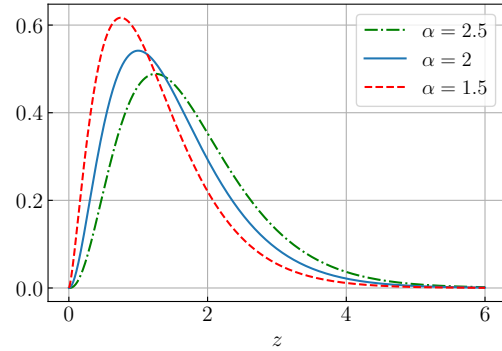
$$z_{\max} = z^* (\beta/\alpha)^{1/(\alpha-\beta)} \text{ com } \alpha \neq \beta, \quad (6.4)$$

$$n(z_{\max}) \propto (\beta/\alpha)^{\alpha/(\alpha-\beta)} \exp \left[ -(\beta/\alpha)^{\beta/(\alpha-\beta)} \right]. \quad (6.5)$$

Nas Figuras 6.6 e 6.7 mostramos o comportamento de  $n(z)$  em relação aos parâmetros  $z^*$  e  $\alpha$ , respectivamente. Em consistência com as Eqs. (6.4) e (6.5) podemos ver que para ambos os parâmetros, na medida que aumentam, o máximo de  $n(z)$ ,  $z_{\max}$ , ocorre para valores de  $z$  cada vez maiores. Além disso, ambos os parâmetros tendem a atenuar o pico de  $n(z)$ ,  $n(z_{\max})$ , sendo este pico mais sensível ao parâmetro  $z^*$ .

Em relação à Eq. (6.3), vale observar que  $z^*$  é o valor do redshift para o qual  $n(z^*) \propto 1/e$  e  $N_g(z^*) = \int_0^{z^*} n(z) dz$  será uma certa porcentagem do número total de



Figura 6.6:  $n(z)$  para  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ .Figura 6.7:  $n(z)$  para  $z^* = 0.5$  e  $\beta = 1$ .

galáxias. Mais precisamente, é possível mostrar o seguinte resultado

$$\begin{aligned} N_g(z^*) &\propto \int_0^{z^*} \left(\frac{z}{z^*}\right)^\alpha \exp\left[-\left(\frac{z}{z^*}\right)^\beta\right] dz = \frac{z^*}{\beta} \int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \exp[-t] dt \\ &= \frac{z^*}{\beta} \left[ \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}, 1\right) \right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde  $\Gamma(u)$  e  $\Gamma(u, v)$  são as funções Gama e Gama Incompleta, respectivamente.

Uma vez modelado o erro de foto- $z$  dado pela densidade de probabilidade descrita pela Eq. (6.1), e a distribuição do número de galáxias dada pela Eq. (6.3), podemos obter a *função de seleção fotométrica* no  $i$ -ésimo bin de redshift, denotada por  $\phi_i(z)$ . Essa função é a probabilidade de que, em um levantamento fotométrico, se atribua a uma galáxia com redshift verdadeiro  $z$ , o redshift fotométrico  $z_p$ , sendo esse limitado entre uma cota inferior  $z_{p,i}$  e uma cota superior  $z_{p,i+1}$ , isto é, confinado em um bin de redshift  $\Delta z_{p,i}$ . Dito isso, é natural definir a função de seleção fotométrica da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \phi_i(z) &= n(z) P_G(\Delta z_{p,i}; z) \\ &= n(z) \int_{z_{p,i}}^{z_{p,i+1}} P_G(z_p; z) dz_p, \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde  $P_G(\Delta z_{p,i}; z) := \int_{z_{p,i}}^{z_{p,i+1}} P_G(z_p; z) dz_p$  (veja, *e.g.*, §13.3.3 de [2]). De maneira análoga, se diz que  $\phi_i(z)$  é a probabilidade de que uma galáxia seja incluída em dado bin na amostra do levantamento realizado pelo survey.

Agora podemos efetuar algumas análises básicas da função de seleção em relação aos parâmetros envolvidos. Na Figura 6.8 mostramos como a função de seleção se comporta em relação ao erro de foto- $z$ ,  $\sigma_z$ , parametrizado pelo parâmetro  $\sigma_{z0}$  dado



pela Eq. (6.2). Para isso utilizamos a Eq. (6.7) calculada para  $\Delta z_{p,i} = [0.5, 0.7]$ . Podemos observar algo interessante: à medida que  $\sigma_{z0} \rightarrow 0$  a função de seleção decai cada vez mais rápido próximo dos extremos do intervalo delimitado por  $\Delta z_{p,i}$ . Para ser mais exato, temos o seguinte

$$\lim_{\sigma_{z0} \rightarrow 0} \phi_i(z) \rightarrow W_i(z), \quad (6.8)$$

onde  $W_i(z)$  é a função de seleção *top-hat*.

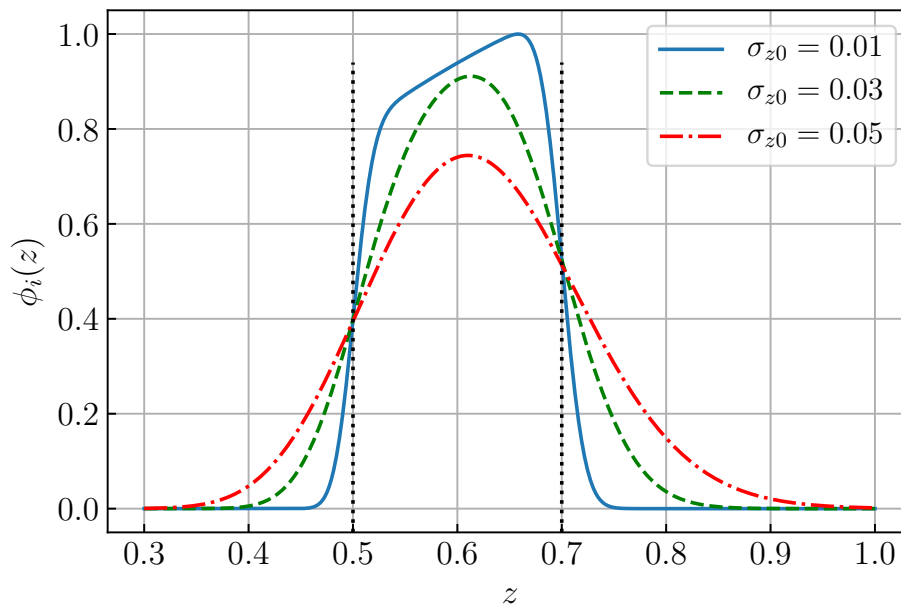


Figura 6.8: Função de seleção fotométrica do LSST para diferentes valores do erro de foto-z calculada para  $0.5 \leq z_p \leq 0.7$ . À medida que  $\sigma_{z0} \rightarrow 0$  todas as curvas tendem a ficar confinadas ao intervalo delimitado pelo pontilhado preto. Da curva vermelha, passando para a verde e finalmente a azul, estamos mostrando o processo limite da Eq. (6.8).

À medida que o erro de foto-z diminui, a função de seleção fotométrica tende à função de seleção espectroscópica.

Para fins de comparação, na Figura 6.9 fazemos as funções *top-hat* para ambos os surveys, LSST e o DES. Podemos observar que a função *top-hat* para o LSST começa a crescer enquanto a função *top-hat* do DES começa a decrescer. Isso ocorre pois o parâmetro  $\beta$  do LSST é menor do que o parâmetro  $\beta$  para o DES, o que permite que o LSST cubra um intervalo em redshift ( $0 \leq z \leq 6$ ) maior que o intervalo correspondente para o DES ( $0.4 \leq z \leq 1.4$ ), veja também a Figura 6.5.

Já na Figura 6.10 investigamos como a função de seleção para o LSST se com-

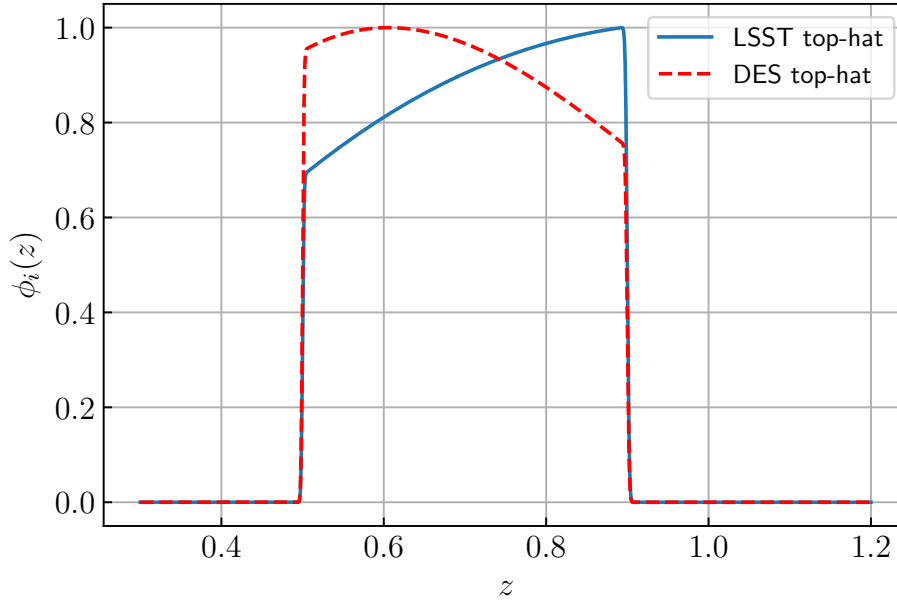


Figura 6.9: Comparação entre as funções de seleção espectroscópicas (*top-hat*) para o LSST e o DES no intervalo de redshift  $0.5 \leq z_p \leq 0.9$ . O LSST observará objetos até redshift 6, enquanto o DES alcançou até redshift de 1.4, por isso a *top-hat* do DES decai mais rápido que a *top-hat* do LSST.

porta em termos da espessura do bin de redshift  $\Delta z_{p,i}$ . Nesse gráfico mostramos  $\phi_i(z)$  para três diferentes espessuras do bin de redshift, sendo todos estes centrados em  $z_p = 0.7$  e com erro de foto-z padrão  $\sigma_{z0} = 0.05$ .

Podemos observar que à medida em que a espessura do bin de redshift diminui, a largura da função de seleção torna-se cada vez mais estreita. Isso significa que, dada uma galáxia com redshift verdadeiro  $z$ , a probabilidade desse objeto ser incluído no levantamento atribuindo-lhe um redshift fotométrico  $z_p$ , depende da própria espessura do bin de redshift adotado pelo survey, sendo tal probabilidade cada vez menor à medida que se faz o bin de redshift cada vez mais estreito.

A análise sobre a escolha da espessura do bin de redshift é de extrema importância, pois ela se refletirá no cálculo de todas as outras grandezas que dependem da função de seleção. Por exemplo, fazemos esse estudo para determinar a espessura mínima do bin de redshift para o qual a ACF deixa de ser suficientemente sensível. Analogamente, a escolha do bin de redshift se reflete diretamente na quantidade de bins do intervalo total de redshift assumido pelo survey. Quanto maior o número de bins de redshift, maior se torna o custo computacional, pois maior será o número de sub-matrizes da matriz de covariância total. Veremos essas e outras implicações

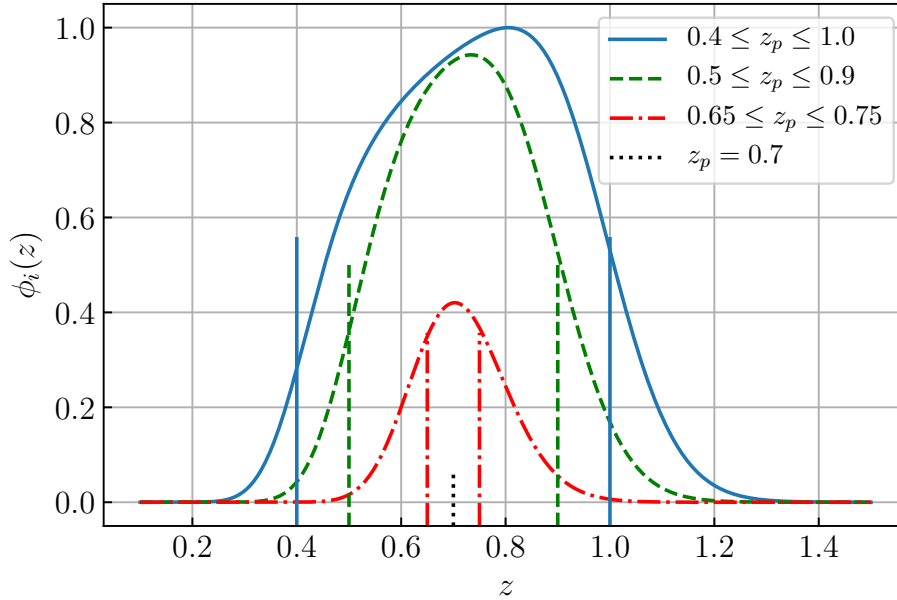


Figura 6.10: Análise do comportamento da função de seleção fotométrica para o LSST em termos da espessura do bin de redshift, todos centrados em  $z_p = 0.7$  e com  $\sigma_{z0} = 0.05$ .

quando lidarmos com essas grandezas posteriormente.

Por fim, podemos também explorar como a função de seleção se comporta em termos de vários bins de redshift, sendo todos esses com a mesma espessura, porém espalhados dentro do intervalo de redshift de 0 a 6 assumido pelo LSST. Essa análise é mostrada na Figura 6.11, por onde podemos observar quatro bins de redshift disjuntos e todos com uma espessura fixa de 0.05. Como podemos observar, ao transladar o bin de redshift dentro do intervalo de 0 a 6, o pico da função de seleção também translada de modo a acompanhar o centro do seu respectivo bin  $\Delta z_{p,i}$ . Comparando com o passo a passo da Figura 6.3, variar o bin de redshift, equivale a efetuar uma varredura ao longo do intervalo total de redshift que será coberto pelo survey. Dessa forma o survey vai bin a bin incluindo objetos em seu catálogo de acordo com a probabilidade associada ao seu redshift.

Pela Figura 6.11 podemos notar que nos extremos do intervalo de 0 a 2.5 (que se estende até 6) a função de seleção tem amplitude menor do que na região central. Isso ocorre pois de acordo com a Eq. (6.7) temos  $\phi_i(z) = n(z)P_G(\Delta z_{p,i}; z)$ , e com o auxílio da Figura 6.5 podemos observar que a função  $n(z)$  e  $P_G(\Delta z_{p,i}; z)$  modelam a amplitude e a posição do pico de  $\phi_i(z)$ , respectivamente. Para ser mais exato, temos que, se  $z \rightarrow 0$  ou  $z \rightarrow \infty \Rightarrow n(z) \rightarrow 0$  então  $\phi_i(z) \rightarrow 0$ . Equivalentemente podemos dizer que a função  $n(z)$  encapsula a função  $\phi_i(z)$  para todo  $i$ .

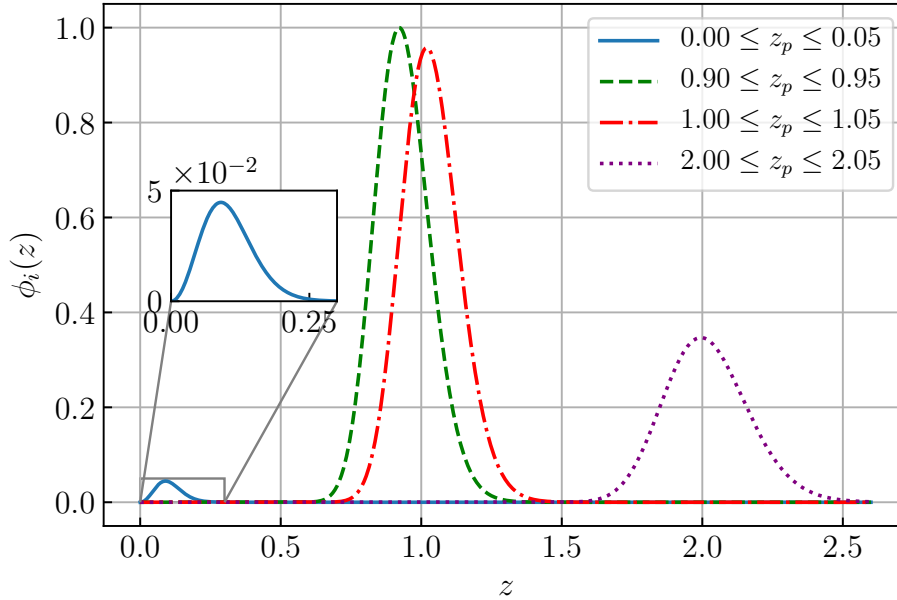


Figura 6.11: Análise do comportamento da função de seleção fotométrica para o LSST em termos da posição do bin de redshift ao longo do intervalo de redshift de 0 a 6. A espessura de todos os quatro bins é  $|\Delta z_{p,i}| = 0.05$  e além disso assumimos  $\sigma_{z_0} = 0.05$ .

## 6.4 Complexidade de tempo na cosmologia

Consultando novamente a Figura 6.3, podemos observar que, após obter a função de seleção, o próximo passo seria obter as funções  $\Psi_i(k)$  para em seguida obtermos o espectro de potência angular  $C_\ell^{i,j}$ . A partir daqui entremos na questão da implementação computacional das funções apresentadas nos capítulos anteriores. Na verdade, na seção anterior nós também implementamos, com a linguagem de programação Python<sup>2</sup>, a função de seleção fotométrica. Mas essa função dada pela Eq. (6.7), além de ser simples, ainda não exige que efetuemos manipulações mais complexas. Portanto, a parte referente à função de seleção não tem grandes impactos sobre os *recursos computacionais*.

Entretanto, para calcularmos as principais funções apresentadas nos capítulos anteriores, tais como a função de correlação espacial e angular, o espectro de potência angular ou até mesmo a função de crescimento, precisaremos envolver várias operações, tais como múltiplas integrações ou resolver sistemas de equações diferenciais (para a função de crescimento, por exemplo). Além disso, como essas funções estão todas interligadas entre si por meio da transformada de Fourier e/ou dos harmônicos

<sup>2</sup><https://www.python.org/>

esféricos, entramos em uma espécie de “cascata” ou de “hierarquia”, no sentido de que precisaremos computar várias grandezas predecessoras da grandeza principal em que estamos interessados.

Dessa forma, claramente dependemos de estabelecer uma cota inferior para uma ou mais funções a partir da qual derivaremos todas as outras. Caso contrário precisaríamos solucionar as equações de Boltzmann com as equações da teoria da Relatividade Geral para obtermos a função de transferência [56] e a partir daí obter o espectro de potência. Só então, em princípio, estaríamos aptos a obter todas as demais grandezas das quais do espectro de potência dependem. Isso por si só demanda tempo, recursos, e mais importante, conhecimento prévio. Precisamos, portanto, estabelecer a partir de que ponto queremos começar.

Nesse sentido, ao longo do desenvolvimento desse trabalho, exploramos apenas de modo geral as funcionalidades de alguns principais programas extremamente refinados e já existentes na cosmologia, por exemplo, Code for Anisotropies in the Microwave Background **CAMB**<sup>3</sup>, o Cosmic Linear Anisotropy Solving System **CLASS**<sup>4</sup> e cosmological parameter estimation code **CosmoSIS**<sup>5</sup>.

Entretanto, utilizamos efetivamente somente o **CAMB**. Com esse programa nós geramos o espectro de potência  $P(k)$ , a distância comóvel  $x(z)$ , o parâmetro de Hubble  $H(z)$ , e a função de crescimento  $D(z)$ . A partir dessas grandezas, todo o restante das operações nós implementamos com o **Python**. Dessa forma, por exemplo, se desejássemos computar o espectro de potência angular dado pela Eq. (5.84), precisaríamos exatamente das grandezas citadas anteriormente e também da função  $\Psi_\ell^i(k)$  dada pela Eq. (5.85). Com efeito,  $D(z)$  faz parte do integrando de  $\Psi_\ell^i(k)$  e  $x(z)$  aparece como argumento das funções esféricas de Bessel  $j_\ell(kx(z))$ . Podemos observar também que aparece a função de seleção fotométrica  $\phi_i(z)$ , mas essa foi facilmente implementada na seção anterior. Por fim, combinamos todas estas grandezas e, por meio da biblioteca **SciPy**<sup>6</sup>, utilizamos a ferramenta **quad** (uma técnica de integração oriunda da biblioteca **QUADPACK** advindo da linguagem **Fortran**) para finalmente obter a função completa  $\Psi_\ell^i(k)$  para cada valor de  $\ell$ .

Agora, para demonstrar exatamente o ponto que queremos chegar logo adiante, vamos analisar o panorama geral da estrutura do código para computar a APS:

```
for ell in ell_range :
    for k in k_range :
```

---

<sup>3</sup><https://camb.info/>

<sup>4</sup>[https://lesgourg.github.io/class\\_public/class.html](https://lesgourg.github.io/class_public/class.html)

<sup>5</sup><https://bitbucket.org/joezuntz/cosmosis/wiki/Home>

<sup>6</sup><https://www.scipy.org/>

```

Psi_ell_k = [code1]
APS_ell = [code2]

```

É claro que existem muito mais linhas, comandos e cálculos implícitos do que o simplesmente apresentado nessa estrutura. Vamos assumir que esses e outros detalhes estão subtendidos em [code1] e [code2]. O ponto realmente importante é que, ao seguir essa linha de raciocínio, somos naturalmente conduzidos e forçados a computar duas integrais (diz-se que estas são as *operações dominantes* do código); uma integral nos fornece  $\Psi_\ell^i(k)$  e outra integral nos fornece a APS,  $C_\ell$ .

Essas duas integrais se traduzem no aparecimento de dois comandos `for`. Aqui, como estamos em variáveis distintas ( $\ell$  e  $k$ ), iremos efetuar um número também distinto de integração para o caso geral, mas por simplicidade vamos assumir que temos que computar  $N$  integrais. Como temos dois loops, a *complexidade do algoritmo*, mais especificamente<sup>7</sup>, a *complexidade de tempo* do código no *limite assintótico* é de  $O(N^2)$ . Quando isso ocorre dizemos que estamos efetuando uma operação de complexidade quadrática, ou mais comumente, de *força-bruta*.

Se por um lado códigos dessa classe podem ser relativamente de fácil compreensão, por outro lado, a consequência do fato da sua complexidade de tempo ser de no mínimo  $O(N^2)$  implica que ele demanda uma grande quantidade de tempo à medida que a sua entrada  $N$  aumenta. De modo geral, temos as seguintes classes de complexidade

$$O(1), O(\log \log N), O(\log N), O(N), O(N \log N), O(N^2), O(N^p), O(N!),$$

sendo que da esquerda para a direita varia-se da melhor à pior complexidade. Manipulações corriqueiras com matrizes podem, dependendo do algoritmo, cair facilmente em casos de alta complexidade. Por exemplo, o produto de matrizes escalona com  $O(N^3)$ , enquanto que o cálculo do determinante pelo método dos cofatores escalona com  $O(N!)$ . E como vimos no capítulo 5, cálculos com matrizes de covariância são bastante comuns ao lidarmos com *forecasts* de parâmetros cosmológicos.

Ao longo desse trabalho enfrentamos exatamente esse tipo de problema. Algumas grandezas foram computadas pelo método da força-bruta e foi possível experimentar na prática a imensa quantidade de tempo consumida por esse processo. Na Figura 6.12 mostramos um espectro de potência angular que foi obtido por esse método. O tempo demandando para obter essa APS foi da ordem de horas, e mesmo assim

---

<sup>7</sup>Existem também a *complexidade de espaço* que se refere a quantidade de memória demandada pelo computador para salvar as saídas do código.

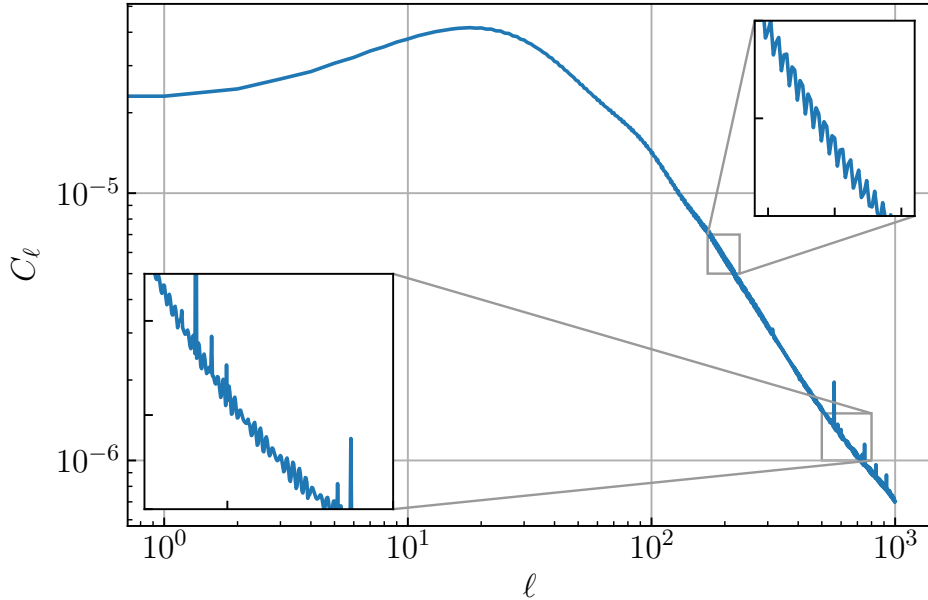


Figura 6.12: blablaba

podemos observar pelas regiões de zoom que a APS para  $\ell$  cada vez maior fica cada vez mais ruidosa. Isso ocorre devido as *funções esféricas de Bessel de primeiro tipo*  $j_\ell(kx(z))$ .

Essas funções esféricas de Bessel contribuem para o aumento do consumo de tempo e também da imprecisão de modo que o método de força-bruta não consegue lidar muito bem, principalmente no limite de  $kx(z)$  e/ou  $\ell$  grande.

Na Figura 6.13 mostramos algumas funções  $j_\ell(u)$  para três valores de  $\ell = 0, 50, 500$ . Como se pode observar, a amplitude dessas funções tornam-se máxima quando a magnitude de  $u$  tende a  $\ell$ , e depois, para o mesmo valor de  $\ell$ , a função oscila com amplitude decrescente para  $u$  maior que  $\ell$ . Com isso queremos mostrar que ao lidar com operações envolvendo integrações das funções esféricas de Bessel, naturalmente estaremos confinados a lidar com as complexidades intrínsecas dessas funções.

Como alternativa para melhorar a rapidez das operações envolvendo integração, exploramos o fato das funções esféricas de Bessel oscilarem. A ideia geral foi aproximar a integral em um dado intervalo  $\Delta u$  por uma soma de integrais, onde a  $i$ -ésima integral é computada entre os limites inferiores e superiores dados pela  $i$ -ésima e  $i + 1$ -ésima raiz de  $j_\ell(u)$ , respectivamente. Isto é,  $I_\ell \approx \sum_i \int_{u_i}^{u_{i+1}} f(u) j_\ell(u) du$ , onde  $j_\ell(u_i) = 0 \forall i$  e  $f(u)$  sendo suave e não nula para  $u \in [u_i, u_{i+1}]$ . Para fazer isso

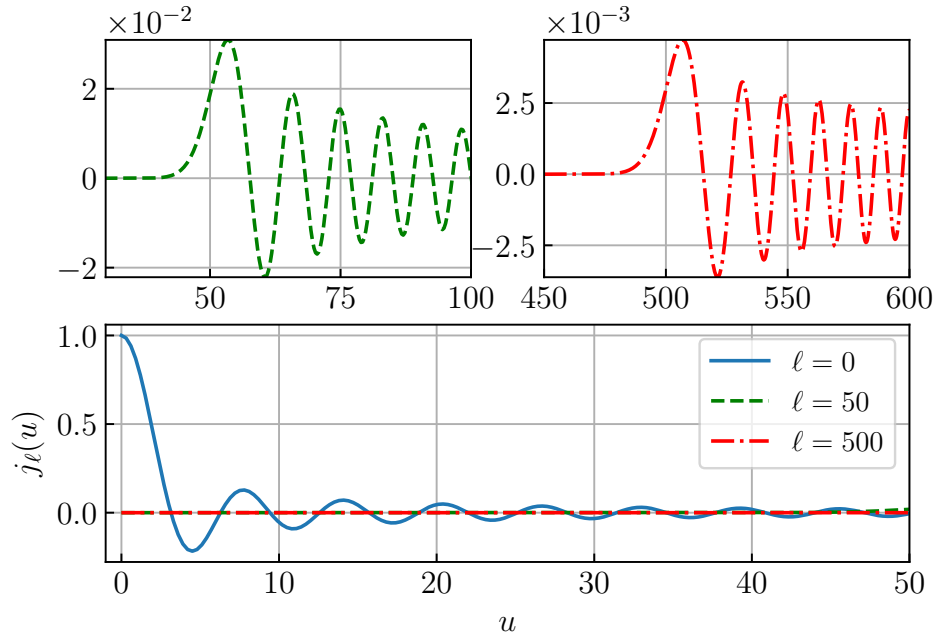


Figura 6.13: Análise do comportamento geral das funções esféricas de Bessel do primeiro tipo para três valores do multipolo  $\ell$ .

precisamos conhecer as raízes de  $j_\ell(u)$ . Porém  $j_\ell(u)$  não são periódicas, a grosso modo elas são *assintoticamente periódicas*. Independentemente disso, ainda precisaríamos efetuar centenas de integrações, e portanto estaremos confinados ao caso de complexidade de tempo  $O(N^2)$ .

Para contornar essas e outras dificuldade é necessário baixar a ordem de complexidade de  $O(N^2)$  para pelo menos a ordem imediatamente mais baixa, que de acordo com o que foi descrito acima é  $O(N \log N)$ . Para isso, passamos a utilizar o Core Cosmology Library CCL<sup>8</sup>. Com o CCL é possível computar grandezas padrões da Cosmologia. Além disso, essa biblioteca será empregada nas análises pelo LSST Dark Energy Science Collaboration [15]. Em particular para a ACF, esse programa utiliza o método de FFTLog (veja, *e.g.*, [14]) cujo tempo escala justamente com  $O(N \log N)$  e, por isso, em relação à força-bruta, computa as grandezas que estamos interessados em um tempo muito inferior.

<sup>8</sup><https://github.com/LSSTDESC/CCL>



## 6.5 Espectro de potência angular & CCL

Da mesma forma que fizemos para a função de seleção na §6.3, nesta seção estamos interessados em analisar o impacto de alguns dos principais parâmetros na APS. Para gerar essa função iremos utilizar o CCL. Antes de prosseguir, é importante salientar que

Inicialmente, consultando a Figura 6.3 vemos que primeiramente é necessário informar a cosmologia para posteriormente obter a APS e as demais grandezas. Nesse sentido, iremos adotar como *cosmologia fiducial* os parâmetros cosmológicos obtidos pela missão *Planck* [4] que obtiveram restrições nos parâmetros cosmológicos por meio de medidas das anisotropias de temperatura da *cosmic microwave background* (CMB). Na Tabela 6.1 mostramos os parâmetros utilizados

Densidade de matéria escura	$\Omega_c h^2$	$0.11907 \pm 0.00094$
Densidade de matéria bariônica	$\Omega_b h^2$	$0.02234 \pm 0.00014$
Índice espectral	$n_s$	$0.9671 \pm 0.0038$
Constante de Hubble [ $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ ]	$H_0$	$67.66 \pm 0.42$
EoS da Energia escura	$w_0$	$-1.028 \pm 0.032$
Amplitude de flutuação da matéria	$\sigma_8$	$0.8083 \pm 0.0060$

Tabela 6.1: Parâmetros cosmológicos fiduciais assumidos para obter grandezas como APS e ACF.

A primeira análise que podemos fazer é em relação ao comportamento da APS em termos da Eq. (6.2) parametrizada pelo coeficiente  $\sigma_{z0}$ . A Figura 6.14 mostra a APS obtida no bin de redshift  $[0.9, 0.95]$ . Como podemos observar, à medida que  $\sigma_{z0}$  aumenta, a amplitude da APS é suprimida. Isso está de acordo com o que se espera ao analisar as Eqs. (5.84) e (5.85) juntamente com o gráfico da função de seleção dado pela Figura 6.8. Além disso, podemos observar as Oscilações Acústicas de Bárions (BAOs) que, por intermédio da Eq. (5.84), se propagam do espectro de potência  $P(k)$  para a sua contrapartida angular  $C_\ell$ .

Consultando a Eq. (6.1) podemos observar a presença do parâmetro de bias entre o foto-z e o spec-z quantificado por  $\delta z$ . Como mencionado, seu valor padrão é nulo. No entanto gostaríamos de explorar o impacto dessa quantidade tomando pequenas variações em torno do seu valor padrão para verificar se de fato isto não altera muito a APS. A Figura 6.15 demonstra que pequenas flutuações  $\delta z$  em torno do seu valor padrão não produzem grandes impactos na forma e/ou amplitude da APS, como esperado. Portanto, para nossos propósitos, será suficiente assumir  $\delta z = 0$ .

Uma análise de extrema importância é a dependência do espectro de potência,

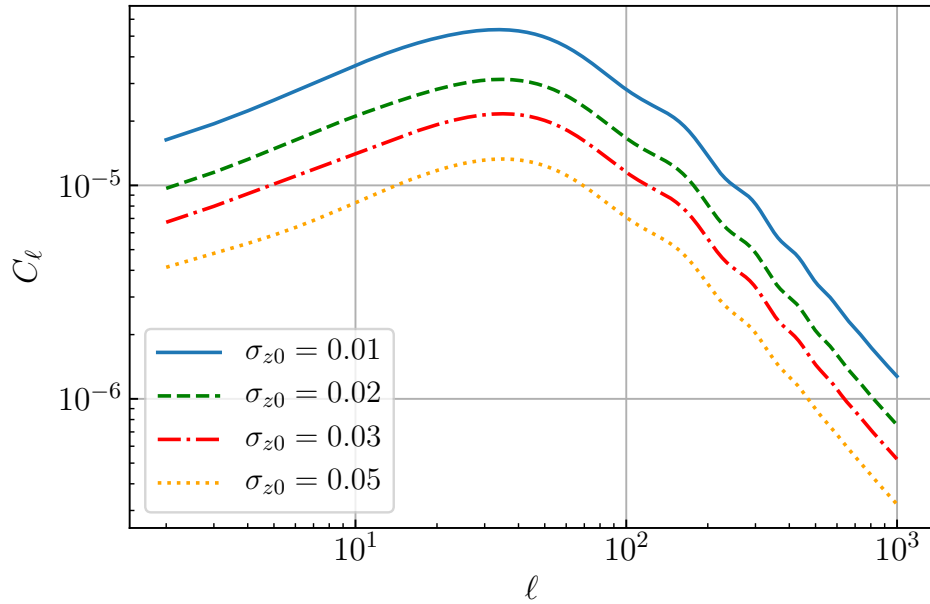


Figura 6.14: Análise do comportamento do espectro de potência angular em termos de variações do parâmetro de erro de foto-z. A APS foi obtida para o bin de redshift fixo  $\Delta z = [0.9, 0.95]$ . Como o bin de redshift é fixo, então  $i = j$ , e por isso a notação foi simplificada de  $C_\ell^{i,j}$  para simplesmente  $C_\ell$ .

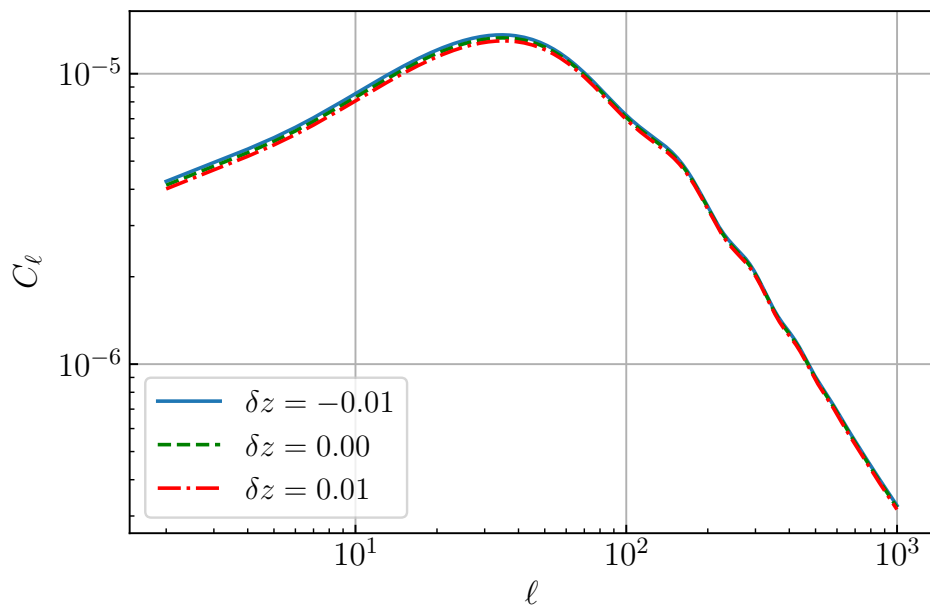


Figura 6.15: Impacto de  $\delta z$  na APS para o bin de redshift  $\Delta z = [0.90, 0.95]$  e  $\sigma_{z0} = 0.05$ .

3D ou 2D, em relação aos parâmetros cosmológicos. Com efeito, a função de transferência, e portanto o espectro de potência, dependem do *parâmetro de forma* dado por  $\Gamma = \Omega_m h$ . Matsubara (2004)[44] avalia e discute o impacto de alguns parâmetros cosmológicos, em particular a densidade total de matéria  $\Omega_m$  e a fração de densidade de bárions em relação a densidade total de matéria  $f_b = \Omega_b/\Omega_m$ , em  $P(k)$  e  $\xi(x)$ .

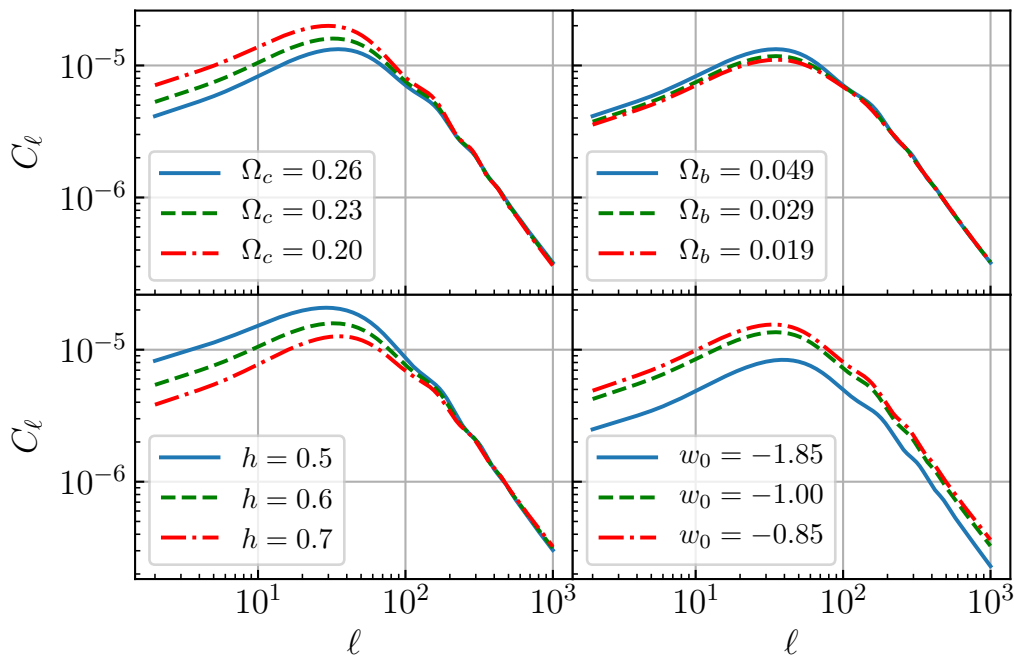


Figura 6.16: Espectro de potência angular em função dos principais parâmetros cosmológicos: Densidade de matéria escura e bariônica  $\Omega_c$  e  $\Omega_b$ , respectivamente, constante de Hubble  $h = H_0/100$  e EoS para a energia escura  $w_0$ . Todos foram calculados considerando o bin de redshift  $\Delta z = [0.90, 0.95]$ ,  $\sigma_{z0} = 0.05$  e  $\delta z = 0$ .

Na Figura 6.16 computamos a APS em função dos quatro principais parâmetros cosmológicos. Podemos observar que para  $\ell$  pequeno (e portanto grandes escalas angulares), à medida que a densidade de matéria escura,  $\Omega_c$ , aumenta, a amplitude da APS diminui. Pode-se dizer que  $C_\ell$  herda esse comportamento da sua contrapartida espacial, pois algo semelhante também ocorre com  $P(k)$ . O comportamento oposto, porém em menos intensidade, acontece quando se aumenta a densidade de matéria bariônica  $\Omega_b$ . Por outro lado, um Universo com uma taxa de expansão acelerada maior tende a suprimir a intensidade da APS, como podemos observar quando se aumenta a constante de Hubble  $h$ . Por fim, temos o efeito da EoS da energia escura.  $w_0$  não afeta o espectro de potência primordial, mas seu efeito se propaga para a contrapartida angular do espectro de potência por meio da função de crescimento

$D(z)$ , como indicado por meio das Eqs. (5.84) e (5.85).

Agora que já fizemos uma breve discussão sobre o comportamento geral da APS em termo dos principais parâmetros (cosmológicos e os advindos da função de seleção), podemos retornar ao passo-a-passo dado pela Figura 6.3. Vale observar que o CCL nos permitiu obter a APS sem necessidade de adentrarmos nos detalhes da modelarmos computacionalmente (pelos motivos citados na §6.4) as funções  $\Psi_\ell^i(k)$ . Portanto, o próximo passo é avaliar a APS para diferentes bins de redshift  $\Delta z_i$ . Para fins de ilustração, vamos assumir que os bins de redshift seguem a distribuição dada pela Tabela 6.2

n°	Bin de Redshift
1	$\Delta z_1 = [0.90, 0.95]$
2	$\Delta z_2 = [0.95, 1.00]$
3	$\Delta z_3 = [1.00, 1.05]$
4	$\Delta z_4 = [1.05, 1.10]$

Tabela 6.2: Divisão simplificada de bins de redshift.

Em termos de nomenclatura e notação, vale mencionar que quando a APS é calculada para o *mesmo* bin de redshift, então  $i = j$ , de modo que escrevemos  $C_\ell^{i,j}$  como simplesmente  $C_\ell^i$ , e essa é dita espectro de potência angular de *auto* correlação (*auto-correlation angular power spectrum*). No caso de  $i \neq j$  mantemos a notação  $C_\ell^{i,j}$ , e essa é dita espectro de potência angular de *cross* correlação (*cross-correlation angular power spectrum*).

Na Figura 6.17 temos a APS de auto correlação calculada para os quatro bins de redshift da Tabela 6.2. Nesse caso, como todos os demais parâmetros estão fixados nos valores padrões, temos que a amplitude da APS é ditada totalmente pelo comportamento da função de seleção nesses bins de redshift. Como podemos observar claramente pelas Figuras 6.10 e 6.11, se a amplitude da APS vai aumentar ou diminuir à medida que se muda de bin e/ou a largura do próprio bin de redshift, vai depender da região do intervalo da função de seleção, que por sua vez depende da forma como os bins de redshift são definidos.

Por fim, na Figura 6.18 fazemos o gráfico da APS para o caso geral da Tabela 6.2. Dessa forma, por exemplo, a segunda linha e a terceira coluna da Figura 6.18 corresponde ao espectro de potência angular cruzado entre as faixas (bins) de redshift para  $i = 2$  e  $j = 3$ , o que resulta em  $C_\ell^{2,3}$  (no gráfico suprimimos a virgula entre  $i$  e  $j$  por simplicidade). Vale observar ainda que, de acordo com a Eq (5.84) temos que  $C_\ell^{i,j} = C_\ell^{j,i}$  e indicamos essa propriedade com cores iguais em relação a diagonal

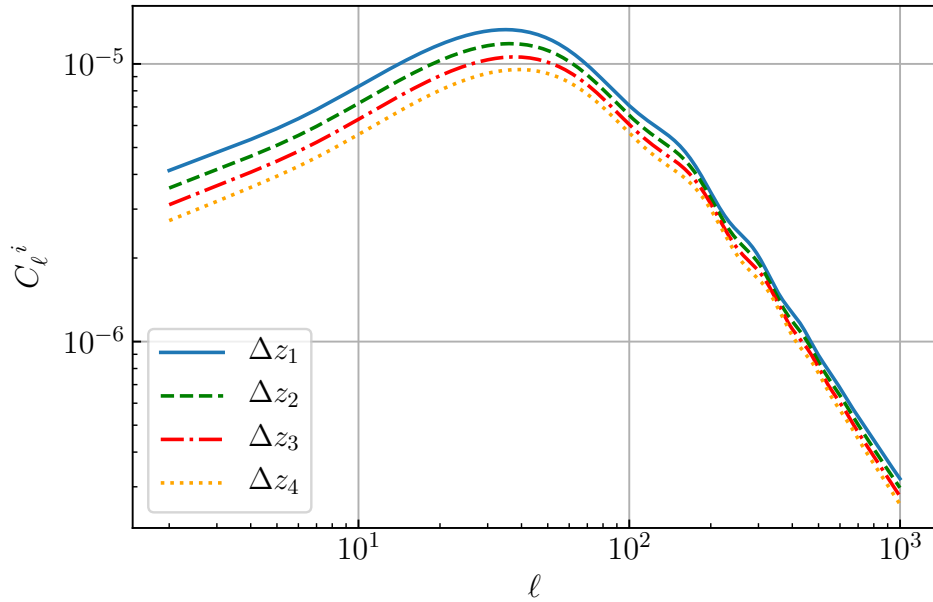


Figura 6.17: APS de auto-correlação para os quatro bins de redshift da Tabela 6.2.

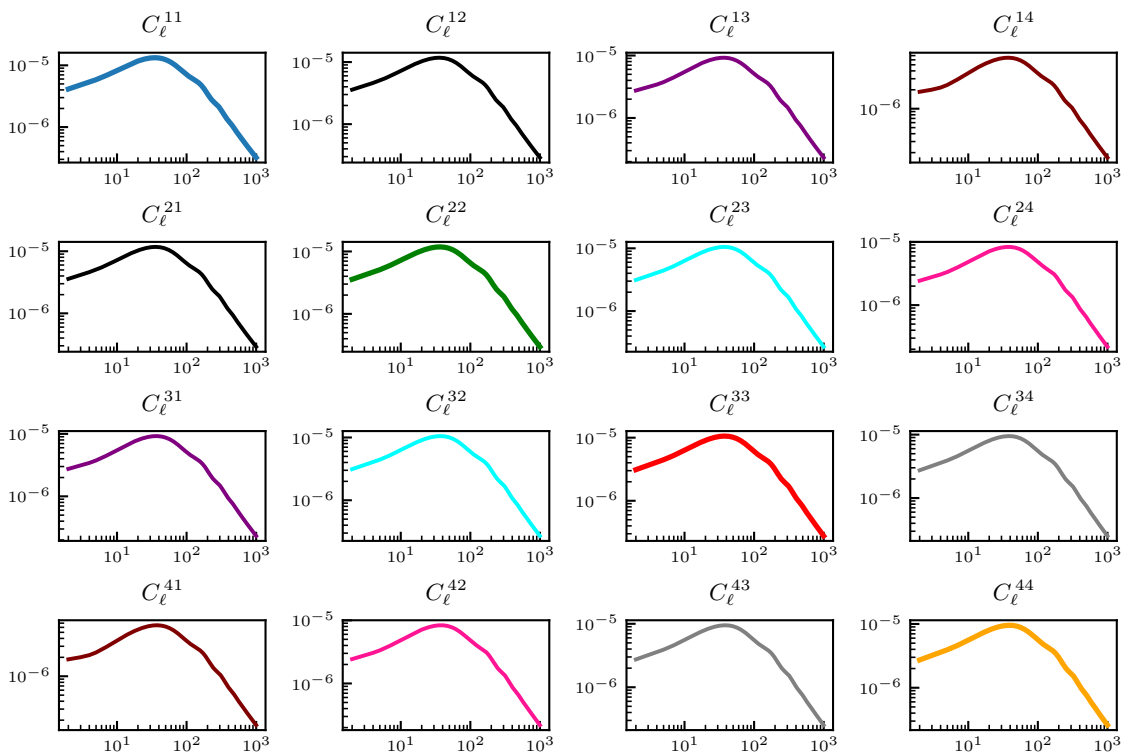


Figura 6.18: Espectro de potência angular,  $C_\ell^{i,j}$ , para todas as combinações dos bins de redshift da Tabela 6.2. A diagonal principal corresponde a APS de auto correlação, e fora da diagonal principal temos a APS de cross correlação.

principal. Vale observar ainda que a diagonal principal da Figura 6.18 é exatamente a Figura 6.17.

## 6.6 Função de correlação angular & CCL

De acordo com a Figura 6.3, uma vez de posse do espectro de potência angular, o próximo passo antes de obter a matriz de covariância é obter a função de correlação angular (ACF),  $w(\theta)$ . Há duas maneiras de se obter a ACF em termos do formalismo desenvolvido nos capítulos anteriores: por meio da Eq. (4.4) (nesse caso será necessário determinar  $\xi(x)$  dado pela Eq. (3.87)), ou por meio da Eq. (4.13). Para a obtenção da ACF por meio do primeiro modo, veja *e.g.* [55]. Aqui utilizaremos o CCL, que por meio da técnica de FFTLog realiza os cálculos em um tempo que escala com  $O(N \log N)$ .

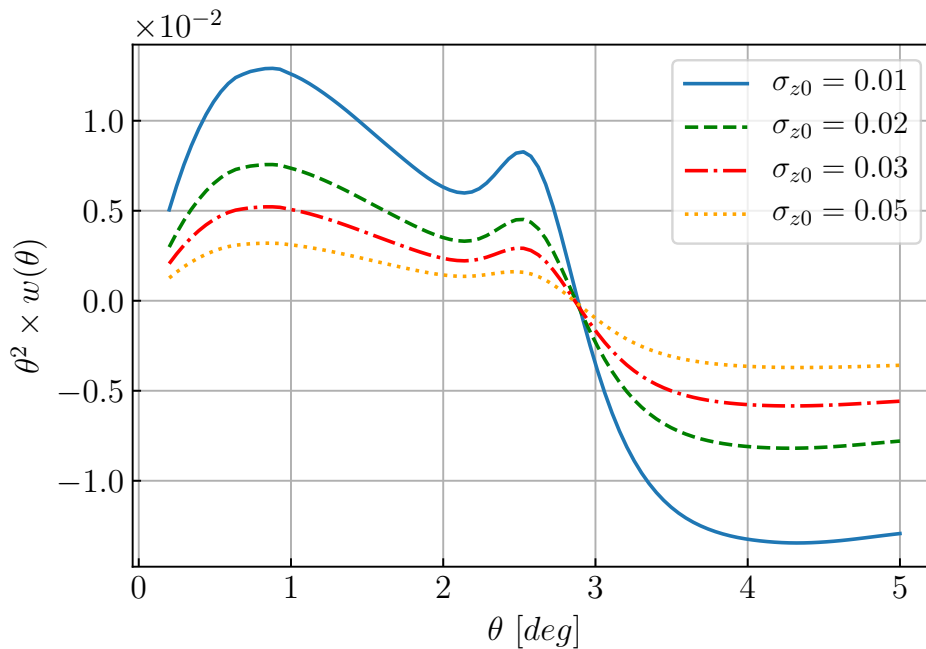


Figura 6.19: Função de correlação angular (multiplicada pelo seu respectivo ângulo ao quadrado) para diferentes valores do erro de foto-z. Assumimos  $\Delta z = [0.90, 0.95]$ .

Semelhante ao que foi feito para a APS na Figura 6.14, realizamos uma análise do impacto do parâmetro  $\sigma_{z0}$  na ACF como mostrado na Figura 6.19. Como podemos observar, quanto maior é o erro de foto-z, menor será a intensidade do pico de BAO.

Na Figura 6.20 mostramos que o impacto do bias  $\delta z$  na ACF também é pequeno quando se toma pequenas variações em torno do seu valor padrão.

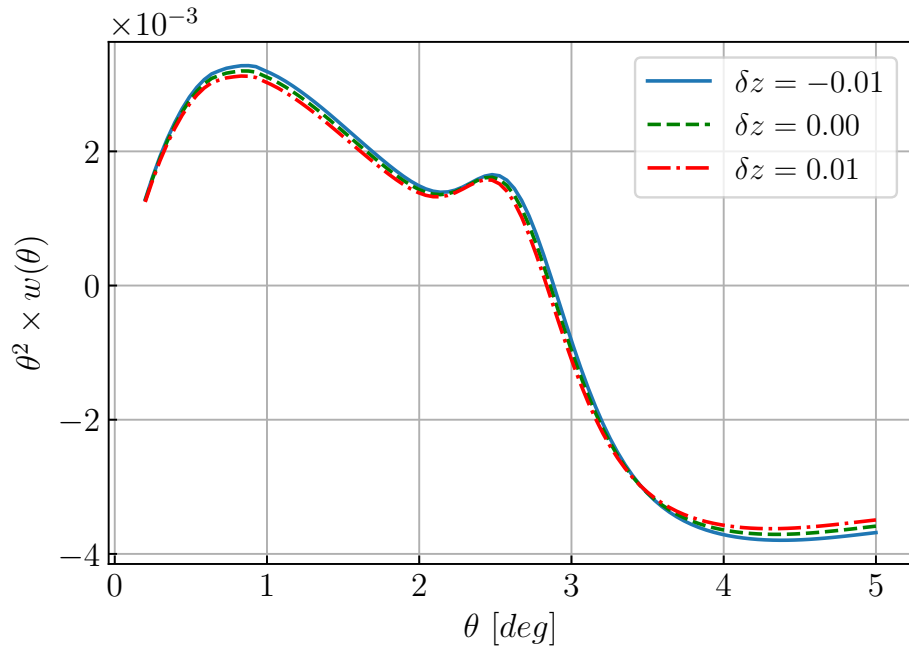


Figura 6.20: Impacto de  $\delta z$  na ACF para o bin de redshift  $\Delta z = [0.90, 0.95]$  e  $\sigma_{z0} = 0.05$ .

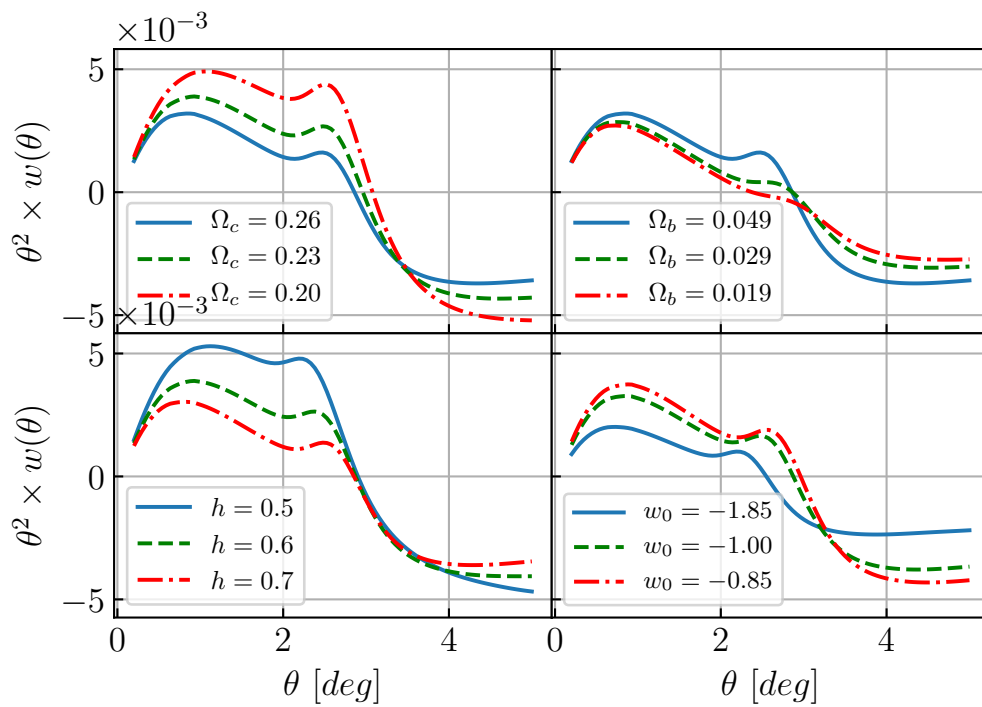


Figura 6.21: ACF em termos dos principais parâmetros cosmológicos. Todos foram calculados considerando o bin de redshift  $\Delta z = [0.90, 0.95]$ ,  $\sigma_{z0} = 0.05$  e  $\delta z = 0$ .

Na Figura 6.21 exploramos o comportamento da ACF em termos dos principais parâmetros cosmológicos. Como discutido em [55], a forma como os parâmetros cosmológicos podem influenciar na função de correlação angular (e portanto a ACF é fonte de informação para esses parâmetros) são divididas, de modo geral, em quatro categorias: (i) por meio do espectro de potência primordial da matéria  $P_m(k)$ , (ii) a função de crescimento  $D(z)$ , (iii) o parâmetro que quantifica a distorção no espaço de redshift  $f = d \ln D / d \ln a$ , (vi) e a distância radial comóvel  $x(z)$ , que aparece principalmente como argumento das funções esféricas de Bessel do primeiro tipo.

O espectro de potência sofre pouca influência da equação de estado da energia escura  $w_0$ . Portanto, a dependência da ACF com o parâmetro  $w_0$  advém da função de crescimento  $D(z)$  e da distância radial comóvel, pois estes dois dependem de  $w_0$ . Podemos observar ainda que  $w_0$  influencia no pico do BAO, mas também em sua posição: para valores menores de  $w_0$  o pico do BAO se desloca para pequenas escalas angulares, e para valores maiores de  $w_0$  o pico do BAO se desloca para grandes escalas angulares. Por outro lado, a posição do pico do BAO é pouco influenciada pela densidade de matéria escura  $\Omega_c$ , mas sua amplitude é fortemente correlacionada por esse parâmetro (confira, *e.g.*, [55]).

Observamos também que quanto maior a densidade de matéria bariônica,  $\Omega_b$ , mais pronunciado se torna o pico do BAO (efeito oposto ao da densidade de matéria escura). Por fim, quanto maior a taxa de expansão acelerada do Universo (quantificado pelo parâmetro de Hubble  $h$ ), mais suprimido se torna o pico do BAO à medida que se desloca para escalas angulares maiores.

Assim como foi feito para o espectro de potência angular, agora computamos a função de correlação angular dentro de cada um dos quatro bins de redshift indicados na Tabela 6.2. Os resultados são mostrados na Figura 6.22. Novamente, como todos os parâmetros (cosmológicos e os advindos da função de seleção fotométrica) estão fixos, isso significa que a forma e amplitude da ACF é totalmente modelada pelo comportamento da função de seleção dentro da cada bin  $\Delta z_i$  bem como do próprio bin de redshift.

Seguindo o argumento de [55], a largura ideal para um dado bin de redshift, indicado aqui por  $|\Delta z|$ , é aquela a partir da qual, usando-se larguras menores, não influenciam-se de forma significativa no sinal (na amplitude) da função de correlação angular. Matematicamente, a ideia é a seguinte:

$$|\Delta z|_I = \max\{|\Delta^c z_i|\} \text{ tal que } \left| w(\theta_{\text{BAO}}^{i-1}; |\Delta^c z_{i-1}|) - w(\theta_{\text{BAO}}^i; |\Delta^c z_i|) \right| < M, \quad (6.9)$$

onde  $|\Delta z|_I$  é a largura *ideal*,  $|\Delta^c z_i|$  é a  $i$ -ésima largura do bin de redshift centrado



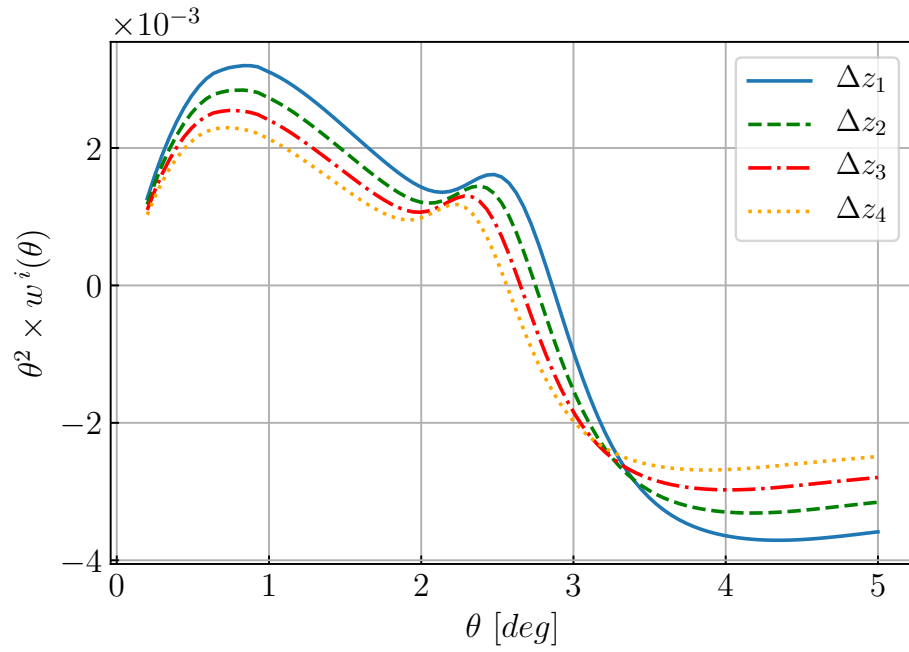


Figura 6.22: Função de correlação angular calculada para os quatro bins de redshift da Tabela 6.2.

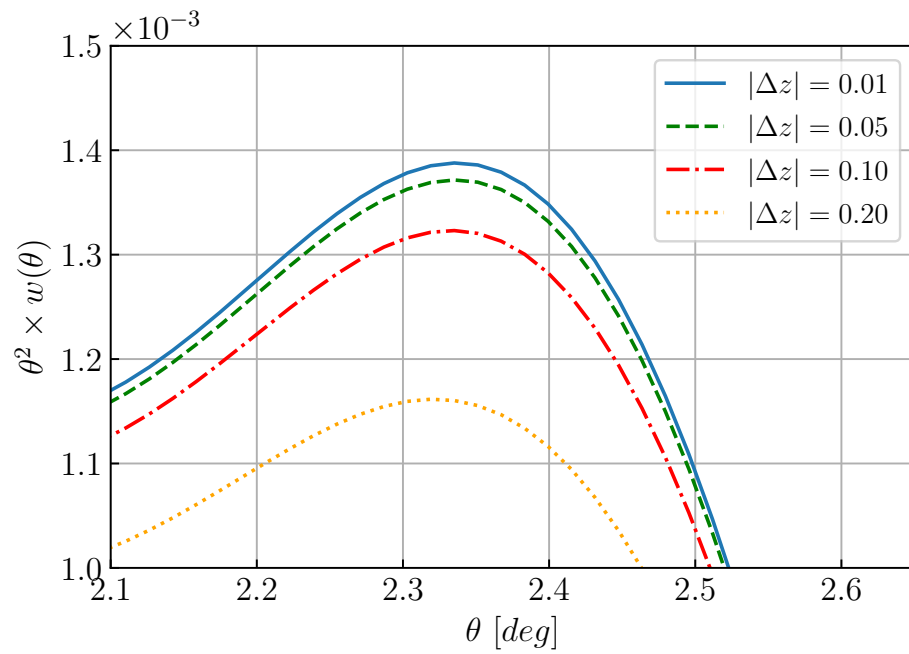


Figura 6.23: Impacto da largura do bin de redshift na região próximo ao pico do BAO da ACF. Todos bins estão centrados em  $c = 1.0$ .

em  $c$  e tal que  $|\Delta^c z_{i-1}| > |\Delta^c z_i|$ ,  $\theta_{\text{BAO}}^i$  é o valor do ângulo correspondente ao pico do BAO para a  $i$ -ésima largura do bin de redshift e  $M$  é uma constante positiva.

Isso é expressado pela Figura 6.23. Podemos observar que quanto menor é a largura do bin de redshift, menor é a variação da altura (e portanto menor é a diferença entre dois picos consecutivos) do pico do BAO. Portanto, nesse caso, existe uma espessura  $|\Delta^c z_i|$  máxima tal que a Eq. (6.9) é verdadeira. Vale observar que, para  $M$  fixo, em princípio podemos ter que  $|\Delta z|_I = |\Delta z|_I(c)$ , *i.e.*, a largura pode depender da posição do centro do bin de redshift.

## 6.7 Representação da matriz de covariância

Uma vez obtido o espectro de potência angular,  $C^{i,j}$ , e a função de correlação angular,  $w^i(\theta)$ , o próximo passo em direção à determinação da matriz de Fisher, em termos da Figura 6.3, é obter a matriz de covariância dada por meio da Eq. (5.87) reproduzida na Eq. (6.12) onde fizemos a mudança de notação  $\theta \rightarrow \theta_i^m$  e  $\theta' \rightarrow \theta_j^n$ .

$$\mathbf{Cov}[\mathbf{ACF}] = \begin{bmatrix} \mathbf{SCov}^{11} & \mathbf{SCov}^{12} & \dots & \mathbf{SCov}^{1t} \\ \mathbf{SCov}^{21} & \mathbf{SCov}^{22} & \dots & \mathbf{SCov}^{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{SCov}^{t1} & \mathbf{SCov}^{t2} & \dots & \mathbf{SCov}^{tt} \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{SCov}^{ij} = \begin{bmatrix} \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^1 \theta_j^1}^{ij} & \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^1 \theta_j^2}^{ij} & \dots & \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^1 \theta_j^{N_j}}^{ij} \\ \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^2 \theta_j^1}^{ij} & \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^2 \theta_j^2}^{ij} & \dots & \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^2 \theta_j^{N_j}}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^{N_i} \theta_j^1}^{ij} & \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^{N_i} \theta_j^2}^{ij} & \dots & \text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^{N_i} \theta_j^{N_j}}^{ij} \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

$$\text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^m \theta_j^n}^{ij} = \frac{2}{f_{\text{sky}}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{(4\pi)^2} \mathcal{P}_\ell(\cos \theta_i^m) \mathcal{P}_\ell(\cos \theta_j^n) \left[ C_\ell^{i,j} + \frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i} \right]^2. \quad (6.12)$$

Onde  $\mathbf{Cov}[\mathbf{ACF}]$  é a matriz de covariância total,  $\mathbf{SCov}^{ij}$  são *sub* matrizes de covariância fixada a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima faixa de redshift, onde cada elemento é dado por  $\text{Cov}[\text{ACF}]_{\theta_i^m \theta_j^n}^{ij}$ . Vale observar ainda que

$$\dim(\mathbf{SCov}^{ij}) = N_i \times N_j,$$

e por tanto

$$\dim(\mathbf{Cov}[\mathbf{ACF}]) = \sum_i N_i \times \sum_j N_j = \sum_i N_i \times \sum_i N_i,$$

pois a matriz de covariância é quadrada.

Podemos observar pela Eq. (6.12) que  $\mathbf{Cov}[\mathbf{ACF}]$  é uma matriz simétrica em relação a diagonal principal, logo  $\mathbf{SCov}^{ij} = \mathbf{SCov}^{ji}$ . Isso pode ser útil em termos de cálculos computacionais, pois significa que não precisamos computar todos os elementos da matriz, sendo suficiente que calculemos a matriz de covariância triangular superior (ou inferior), e depois tomemos a transposta. Esse argumento pode ser estendido para as sub matrizes de covariância desde que  $N_i = N_j$ , pois nesse caso, mesmo que  $i \neq j$ , ainda teremos que  $\mathbf{SCov}^{ij}$  é uma matriz quadrada.

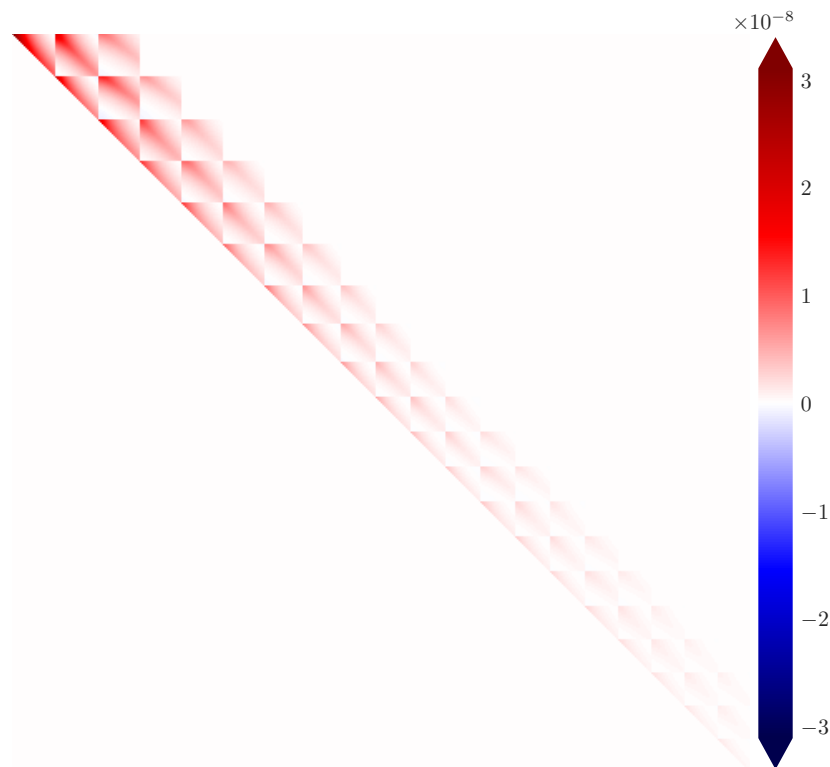


Figura 6.24: Matriz de covariância diagonal para o DES obtida a partir da divisão de bins de redshift e bins angulares de acordo com a tabela I disponível na referência [55].

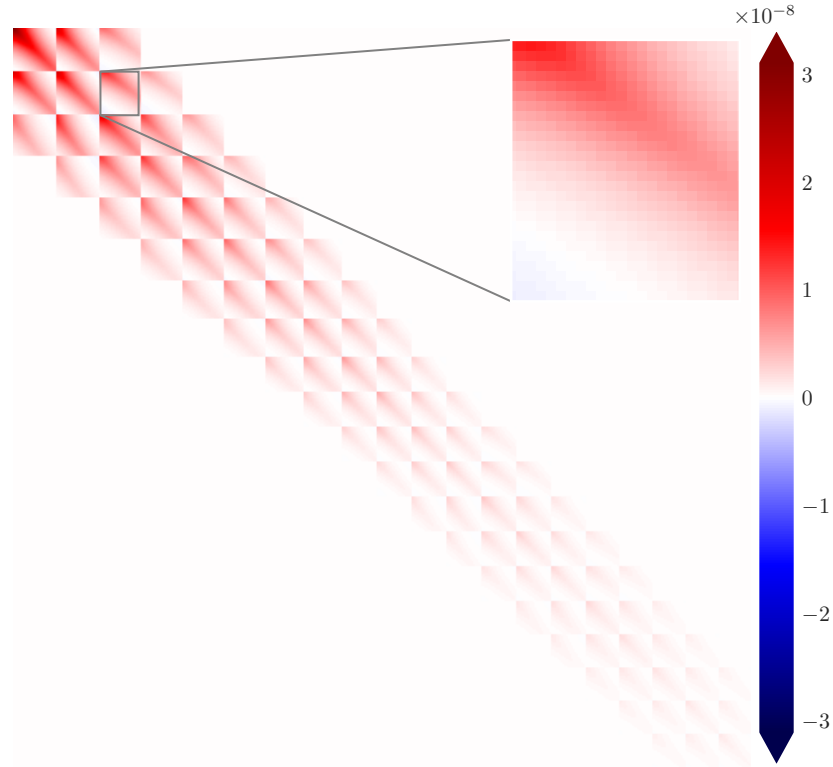


Figura 6.25: Matriz de covariância para o DES obtida a partir da divisão de bins de redshift e bins angulares de acordo com a tabela I disponível na referência [55].

As Figuras 6.24 e 6.25 mostram o que foi dito acima. Primeiramente, antes de discutir os detalhes dessas matrizes, esclarecemos que a ideia inicial era reproduzir os resultados da referência [55] para verificarmos a confiabilidade dos nossos códigos. Por isso, ambas as figuras foram obtidas a partir da divisão de bins de redshift e de bins angulares tal como disposto na tabela I de [55]. Uma vez feito esse teste de reprodutibilidade, dado que o formalismo teórico de forecasts é o mesmo (salvo pequenas mudanças, principalmente na função de seleção fotométrica, na divisão de bins de redshift e angulares e na escolha da cosmologia fiducial) o próximo passo seria aplicar para o LSST. Porém, dada as circunstância, a aplicabilidade dos nossos códigos para o LSST tiveram que ser postergadas e inclusas em perspectivas futuras.

A Figura 6.24 mostra a matriz de covariância triangular superior da Eq. (6.10), pois foi utilizado a propriedade  $\mathbf{SCov}^{ij} = \mathbf{SCov}^{ji}$ . Dessa forma, a transposta

da matriz 6.24 nos fornece os elementos abaixo da diagonal principal da matriz de covariância 6.25, formando assim a matriz de covariância completa dada pela Eq. (6.10).

De acordo com a referência [55], foram tomados 20 bins de redshift de 0.4 à 1.4. Em cada bins de redshift foi definido uma binagem angular, e a soma de todos esses bins angulares é 445. Portanto, a matriz de covariância mostrada na Figura 6.25 tem dimensão  $445 \times 445$ , entretanto, desprezamos correlação para além de dois bins de redshifts consecutivos (assim como feito em [55]) e por isso que, em relação a diagonal principal da Fig. 6.25, sempre existem apenas duas submatrizes matrizes à direita e à esquerda, e acima e abaixo. Por fim, na Figura 6.25 mostramos um zoom na submatriz de covariância  $\mathbf{SCov}^{23}$  obtida a partir da correlação entre o segundo e o terceiro bin de redshift da tabela I de [55]. Essa submatriz em particular,  $\mathbf{SCov}^{23}$ , tem dimensão de  $26 \times 25$ , pois o segundo bin de redshift tem 26 bins angulares e o terceiro bin de redshift tem 25 bins angulares.

# Capítulo 7

## Conclusões e perspectivas futuras

Neste trabalho exploramos o formalismo matemático bem como os conceitos físicos envolvidos no método, e nos assuntos correlatos, de se obter estimativa dos erros para os parâmetros cosmológicos. Isso é feito a partir da modelagem adequada da função de correlação angular para o levantamento fotométrico futuro em que estamos interessados, nesse caso, o Legacy Survey of Space and Time. Portanto, apenas logramos realizar tal estudo se conhecemos de antemão as especificações do survey em questão, tais como o intervalo de redshift pretendido a ser observado, a porção do céu pretendida a ser coberta, os parâmetros da função de seleção, bem como qualquer outra informação que possa ser relevante para esse estudo.

Algo fundamental envolvido nestes estudos são as funções de correlação e os espectros de potência, tridimensional e bidimensional. Estes são formas de medir estatisticamente a intensidade do quanto a distribuição de matéria pelo Universo se distancia da premissa de homogeneidade e isotropia tal como o proposto pelo modelo cosmológico de FRW. Na cosmologia, isso constitui o estudo da Estrutura em Grande Escala do Universo. Em um primeiro contato, a maneira mais simples de aproximar o modelo de FRW do nosso Universo real fora pela Teoria da Perturbação Linear.

Essa abordagem nos permite obter várias equações úteis, e algumas das quais com até boas aproximações para descrever o nosso Universo. Entretanto, algumas correções de caráter físico e/ou observacional, bem como a não linearidade, podem se tornar importantes de ser levadas em consideração. Nesses casos, é de extrema importância realizar um estudo mais aprofundado do quanto a grandeza em questão que queremos medir é sensível a estes efeitos e correções.

Os dois parágrafos imediatamente supracitados por si só são embebidos por uma descrição teórica bastante refinada em nível matemático, e algumas passagens se

respaldam em argumentos físicos sutis. Por isso nessa dissertação nos concentramos bastante na demonstração de cada equação. Esse foi um dos objetivos perseguidos com bastante insistência, e cujo êxito esperamos ter logrado.

Uma vez de posse da descrição teórica, para efetivamente realizarmos a estimativa dos erros dos parâmetros cosmológicos a partir da função de correlação angular, é necessário adentrar no formalismo estatístico, que é o meio pelo qual podemos interligar a teoria com as observações, nesse caso, com estimativa de observações futuras. Assim surgiram naturalmente as matrizes de covariância e a matriz de informação de Fisher.

Nesse caso, é indispensável e extremamente necessário o uso de códigos que possam computar tais grandezas que cumpram com dois requisitos básicos: precisão e rapidez. Neste trabalho nós tentamos desenvolver os nossos próprios códigos. Realizar essa tarefa foi de extrema importância para que pudéssemos ter uma assimilação mais sólida do formalismo teórico bem como nos aproximar do que é feito corriqueiramente em cosmologia. Em termos de aprendizado e experiência o objetivo foi alcançado. Entretanto, lidar com o desenvolvimento desses códigos a partir do “zero” nos mostrou a necessidade de buscar por conhecer códigos já existentes à anos e em constante desenvolvimento por parte de uma grande comunidade envolvida em cosmologia.

Nesse sentido, imediatamente procuramos buscar tomar ciência da existência desses códigos. Porém, as dúvidas que se sucederam a partir do estudo de tais códigos não puderam ser sanadas na velocidade necessária que era preciso para realizarmos o progresso que tínhamos em mente. O código que se mostrou mais acessível aos nossos conhecimentos, dada as circunstâncias, foi o Core Cosmology Library. A partir daí certo progresso fora de fato feito, uma vez que já tínhamos tentado incessantemente desenvolver nossos próprios códigos. Dessa forma criamos uma junção entre partes dos códigos que já tínhamos desenvolvidos com as grandezas fornecidas pelo CCL.

Dado que se trata apenas de uma primeira versão do código completo, as estimativas dos erros dos parâmetros cosmológicos obtidas seguindo a prescrição do capítulo 6 com esse código foi insatisfatória. Em outras palavras, precisamos realizar novos testes e identificar possíveis lapsos nos códigos. Isso, portanto, constitui apenas uma das nossas várias perspectivas futuras.

Algumas questões que não foram respondidas satisfatoriamente, e que se mostraram relevantes para a análise da estimativa dos erros dos parâmetros cosmológicos são:

- Qual o critério para se definir a espessura dos bins angulares para um dado bin de redshift?.
- Dado que a tecnologia tem permitido aos grandes surveys cobrir intervalos de redshift cada vez maior, e dado que a matriz de covariância aumenta sua dimensão à medida que se aumenta a quantidade de bins de redshift (e portanto o custo computacional), é necessário sempre mantermos o intervalo de redshift total?.
- Há maneira de reduzir o intervalo de redshift sem prejuízo à estimativa dos erros dos parâmetros cosmológicos?.
- A função de correlação angular e o espectro de potência angular dependem da escolha dos parâmetros cosmológicos. Portanto, dado duas cosmologias, A e B, qual o critério objetivo para se escolher A como sendo a cosmologia fiducial ao invés de B?. Tal escolha pode influenciar na estimativa dos erros dos parâmetros para o survey em questão?.

No futuro pretendemos responder satisfatoriamente a essas questões. Além disso vamos continuar aprofundando os conhecimentos sobre cosmologia, estrutura em larga escala com extensão da abordagem da teoria linear de perturbação para a não linear, que considera a inclusão de termos de altas ordens para uma melhor aproximação das grandezas que descrevem o nosso Universo real. Pretendemos também nos apropriar dos progressos e desafios acerca do estudo da energia escura, componente misteriosa que provoca a atual expansão acelerada do Universo.



# Referências

- [1] TMC Abbott, S Allam, P Andersen, et al. First cosmology results using type ia supernovae from the dark energy survey: constraints on cosmological parameters. *The Astrophysical Journal Letters*, 872(2):L30, 2019. doi:[10.3847/2041-8213/ab04fa](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab04fa).
- [2] Paul A Abell, Julius Allison, Scott F Anderson, et al. Lsst science book, version 2.0. *arXiv: 0912.0201*, 2009.
- [3] L Raul Abramo. The full fisher matrix for galaxy surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420(3):2042–2057, 2012. doi:[10.1111/j.1365-2966.2011.20166.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20166.x).
- [4] N Aghanim, Yashar Akrami, M Ashdown, et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv: 1807.06209*, 2018.
- [5] Y Akrami, F Arroja, M Ashdown, et al. Planck 2018 results. i. overview and the cosmological legacy of planck. *arXiv:1807.06205*, 2018.
- [6] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press, 2010. doi:[10.1063/1.3603920](https://doi.org/10.1063/1.3603920).
- [7] James M Bardeen, JR Bond, Nick Kaiser, and AS Szalay. The statistics of peaks of gaussian random fields. *The Astrophysical Journal*, 304:15–61, 1986. doi:[10.1086/164143](https://doi.org/10.1086/164143).
- [8] WA Baum. Problems of extragalactic research. In *IAU Symposium, 1962*, volume 15, pages 390–397, 1962.
- [9] Francis Bernardeau, S Colombi, E Gaztanaga, and R Scoccimarro. Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory. *Physics reports*, 367(1-3):1–248, 2002. doi:[10.1016/S0370-1573\(02\)00135-7](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00135-7).

- [10] J Richard Bond, George Efstathiou, and Max Tegmark. Forecasting cosmic parameter errors from microwave background anisotropy experiments. *arXiv preprint astro-ph/9702100*, 1997.
- [11] Tamas Budavari, Andrew J Connolly, Alexander S Szalay, et al. Angular clustering with photometric redshifts in the sloan digital sky survey: Bimodality in the clustering properties of galaxies. *The Astrophysical Journal*, 595(1):59, 2003. doi:[10.1086/377168](https://doi.org/10.1086/377168).
- [12] Emory F Bunn and Martin White. The 4 year coBE normalization and large-scale structure. *The Astrophysical Journal*, 480(1):6, 1997. doi:[10.1086/303955](https://doi.org/10.1086/303955).
- [13] Anna Cabré, Pablo Fosalba, Enrique Gaztanaga, and Marc Manera. Error analysis in cross-correlation of sky maps: application to the integrated Sachs–Wolfe detection. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 381(4):1347–1368, 2007. doi:[10.1111/j.1365-2966.2007.12280.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12280.x).
- [14] Hugo Orlando Camacho Chavez. *Large Scale Structures in photometric and spectroscopic surveys*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2019. URL <https://doi.org/10.11606/T.43.2019.tde-07052019-084133>.
- [15] Nora Elisa Chisari, David Alonso, Elisabeth Krause, et al. Core cosmology library: Precision cosmological predictions for lsst. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 242(1):2, 2019. doi:[10.3847/1538-4365/ab1658](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab1658).
- [16] Dan Coe. Fisher matrices and confidence ellipses: a quick-start guide and software. *arXiv: 0906.4123*, 2009.
- [17] Matthew Colless, Gavin Dalton, Steve Maddox, et al. The 2df galaxy redshift survey: spectra and redshifts. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 328(4):1039–1063, 2001. doi:[10.1046/j.1365-8711.2001.04902.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04902.x).
- [18] Adrian A Collister and Ofer Lahav. Annz: Estimating photometric redshifts using artificial neural networks. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 116(818):345, 2004. doi:[10.1086/383254](https://doi.org/10.1086/383254).
- [19] Martin Crocce and Roman Scoccimarro. Renormalized cosmological perturbation theory. *Physical Review D*, 73(6):063519, 2006. doi:[10.1103/PhysRevD.73.063519](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.73.063519).

- [20] Martín Crocce, Anna Cabré, and Enrique Gaztañaga. Modelling the angular correlation function and its full covariance in photometric galaxy surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 414(1):329–349, 2011. doi:[10.1111/j.1365-2966.2011.18393.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18393.x).
- [21] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. doi:[10.1016/B978-0-12-219141-1.X5019-0](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-219141-1.X5019-0).
- [22] Daniel J Eisenstein and Wayne Hu. Baryonic features in the matter transfer function. *The Astrophysical Journal*, 496(2):605, 1998. doi:[10.1086/305424](https://doi.org/10.1086/305424).
- [23] Daniel J Eisenstein, Wayne Hu, and Max Tegmark. Cosmic complementarity: joint parameter estimation from cosmic microwave background experiments and redshift surveys. *The Astrophysical Journal*, 518(1):2, 1999. doi:[10.1086/307261](https://doi.org/10.1086/307261).
- [24] George FR Ellis, Roy Maartens, and Malcolm AH MacCallum. *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press, 2012. doi:[10.1017/CBO9781139014403](https://doi.org/10.1017/CBO9781139014403).
- [25] Hume A Feldman, Nick Kaiser, and John A Peacock. Power spectrum analysis of three-dimensional redshift surveys. *arXiv preprint astro-ph/9304022*, 1993. doi:[10.1086/174036](https://doi.org/10.1086/174036).
- [26] Ronald A Fisher. The logic of inductive inference. *Journal of the royal statistical society*, 98(1):39–82, 1935. doi:[10.2307/2342435](https://doi.org/10.2307/2342435).
- [27] Brenna Flaugher. The dark energy survey. *International Journal of Modern Physics A*, 20(14):3121–3123, 2005. doi:[10.1142/S0217751X05025917](https://doi.org/10.1142/S0217751X05025917).
- [28] M Fukugita, K Shimasaku, T Ichikawa, JE Gunn, et al. The sloan digital sky survey photometric system. Technical report, SCAN-9601313, 1996.
- [29] David M Goldberg and Michael A Strauss. Determination of the baryon density from large-scale galaxy redshift surveys. *The Astrophysical Journal*, 495(1):29, 1998. doi:[10.1086/305284](https://doi.org/10.1086/305284).
- [30] AJS Hamilton. Measuring omega and the real correlation function from the redshift correlation function. *The Astrophysical Journal*, 385:L5–L8, 1992. doi:[10.1086/186264](https://doi.org/10.1086/186264).
- [31] AJS Hamilton. Linear redshift distortions: a review. In *The evolving universe*, pages 185–275. Springer, 1998. doi:[10.1007/978-94-011-4960-0\\_17](https://doi.org/10.1007/978-94-011-4960-0_17).

- [32] Alan Heavens. Statistical techniques in cosmology. *arXiv: 0906.0664*, 2009.
- [33] Michael P Hobson, Andrew H Jaffe, Andrew R Liddle, et al. *Bayesian methods in cosmology*. Cambridge University Press, 2010. doi:[10.1017/CBO9780511802461](https://doi.org/10.1017/CBO9780511802461).
- [34] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173, 1929. doi:[10.1073/pnas.15.3.168](https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168).
- [35] Željko Ivezić, Steven M Kahn, J Anthony Tyson, et al. Lsst: From science drivers to reference design and anticipated data products. *The Astrophysical Journal*, 873(2):111, 2019. doi:[10.3847/1538-4357/ab042c](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab042c).
- [36] Nick Kaiser. Clustering in real space and in redshift space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 227(1):1–21, 1987. doi:[10.1093/mnras/227.1.1](https://doi.org/10.1093/mnras/227.1.1).
- [37] Hannu Karttunen, Pekka Kröger, Heikki Oja, et al. *Fundamental astronomy*. Springer, 2016. doi:[10.1007/978-3-662-53045-0](https://doi.org/10.1007/978-3-662-53045-0).
- [38] Maurice George Kendall et al. The advanced theory of statistics. *The advanced theory of statistics.*, (2nd Ed), 1946.
- [39] Juna A Kollmeier, Gail Zasowski, Hans-Walter Rix, et al. Sdss-v: Pioneering panoptic spectroscopy. *arXiv: 1711.03234*, 2017.
- [40] Andrew Liddle. An introduction to modern cosmology. 2003.
- [41] Marcos Lima and Wayne Hu. Photometric redshift requirements for self-calibration of cluster dark energy studies. *Physical Review D*, 76(12):123013, 2007. doi:[10.1103/PhysRevD.76.123013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.123013).
- [42] Ideusa Celestino Lopes. Giordano bruno: Entre o geocentrismo e o heliocentrismo. *Griot: Revista de Filosofia*, 9(1):1–25, 2014.
- [43] Vicent J Martinez, Enn Saar, Enrique Martinez Gonzales, et al. *Data Analysis in Cosmology*, volume 665. Springer, 2009. doi:[10.1007/978-3-540-44767-2](https://doi.org/10.1007/978-3-540-44767-2).
- [44] Takahiko Matsubara. Correlation function in deep redshift space as a cosmological probe. *The Astrophysical Journal*, 615(2):573, 2004. doi:[10.1086/424561](https://doi.org/10.1086/424561).

- [45] Nikhil Padmanabhan, David J Schlegel, Uroš Seljak, et al. The clustering of luminous red galaxies in the sloan digital sky survey imaging data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 378(3):852–872, 2007. doi:[10.1111/j.1365-2966.2007.11593.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.11593.x).
- [46] Phillip James Edwin Peebles. *The large-scale structure of the universe*. Princeton university press, 1980.
- [47] PJE Peebles. Statistical analysis of catalogs of extragalactic objects. i. theory. *The Astrophysical Journal*, 185:413–440, 1973. doi:[10.1086/152431](https://doi.org/10.1086/152431).
- [48] Saul Perlmutter, Goldhaber Aldering, G Goldhaber, et al. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2): 565, 1999. doi:[10.1086/307221](https://doi.org/10.1086/307221).
- [49] William H Press, Saul A Teukolsky, William T Vetterling, and Brian P Flannery. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press, 2007. doi:[10.1145/1874391.187410](https://doi.org/10.1145/1874391.187410).
- [50] Adam G Riess, Alexei V Filippenko, Peter Challis, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998. doi:[10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499).
- [51] VC Rubin. Velocities and mass distribution in the barred spiral ngc 5728. *The Astrophysical Journal*, 238:808–817, 1980. doi:[10.1086/158041](https://doi.org/10.1086/158041).
- [52] Vera C Rubin and W Kent Ford Jr. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, 159:379, 1970. doi:[10.1086/150317](https://doi.org/10.1086/150317).
- [53] Vera C Rubin, W Kent Ford Jr, and Norbert Thonnard. Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from ngc 4605/ $r=4\text{kpc}$ /to ugc 2885/ $r=122\text{kpc}$ . *The Astrophysical Journal*, 238:471–487, 1980. doi:[10.1086/158003](https://doi.org/10.1086/158003).
- [54] Peter Schneider. *Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction*. Springer, 2014. doi:[10.1007/978-3-642-54083-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-54083-7).
- [55] F Sobreira, F de Simoni, Rogério Rosenfeld, et al. Cosmological forecasts from photometric measurements of the angular correlation function. *Physical Review D*, 84(10):103001, 2011. doi:[10.1103/PhysRevD.84.103001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.103001).

- [56] Flávia Sobreira. Estimativas de parâmetros cosmológicos para o dark energy survey. 2011. URL <http://hdl.handle.net/11449/102498>.
- [57] Max Tegmark. How to measure cmb power spectra without losing information. *Physical Review D*, 55(10):5895, 1997. doi:[10.1103/PhysRevD.55.5895](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.5895).
- [58] Max Tegmark. Measuring cosmological parameters with galaxy surveys. *Physical Review Letters*, 79(20):3806, 1997. doi:[10.1103/PhysRevLett.79.3806](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.3806).
- [59] Max Tegmark, Andy N Taylor, and Alan F Heavens. Karhunen-loeve eigenvalue problems in cosmology: How should we tackle large data sets? *The Astrophysical Journal*, 480(1):22, 1997. doi:[10.1086/303939](https://doi.org/10.1086/303939).
- [60] Max Tegmark, Andrew JS Hamilton, Michael A Strauss, et al. Measuring the galaxy power spectrum with future redshift surveys. *The Astrophysical Journal*, 499(2):555, 1998. doi:[10.1086/305663](https://doi.org/10.1086/305663).
- [61] Max Tegmark, Scott Dodelson, Daniel J Eisenstein, et al. The angular power spectrum of galaxies from early sloan digital sky survey data. *The Astrophysical Journal*, 571(1):191, 2002. doi:[10.1086/339894](https://doi.org/10.1086/339894).
- [62] Max Tegmark, Michael R Blanton, Michael A Strauss, et al. The three-dimensional power spectrum of galaxies from the sloan digital sky survey. *The Astrophysical Journal*, 606(2):702, 2004. doi:[10.1086/382125](https://doi.org/10.1086/382125).
- [63] Shaun A Thomas, Filipe B Abdalla, and Ofer Lahav. The angular power spectra of photometric sloan digital sky survey luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 412(3):1669–1685, 2011. doi:[10.1111/j.1365-2966.2010.18004.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.18004.x).
- [64] Roberto Trotta. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. *Contemporary Physics*, 49(2):71–104, 2008. doi:[10.1080/00107510802066753](https://doi.org/10.1080/00107510802066753).
- [65] Michael S Vogeley and Alexander S Szalay. Eigenmode analysis of galaxy redshift surveys i. theory and methods. *arXiv preprint astro-ph/9601185*, 1996. doi:[10.1086/177399](https://doi.org/10.1086/177399).
- [66] David M Wittman, J Anthony Tyson, David Kirkman, et al. Detection of weak gravitational lensing distortions of distant galaxies by cosmic dark matter at large scales. *Nature*, 405(6783):143–148, 2000. doi:[10.1038/35012001](https://doi.org/10.1038/35012001).

- [67] Xiaoying Xu, Nikhil Padmanabhan, Daniel J Eisenstein, et al. A 2 per cent distance to  $z=0.35$  by reconstructing baryon acoustic oscillations—ii. fitting techniques. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427(3):2146–2167, 2012. doi:[10.1111/j.1365-2966.2012.21573.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21573.x).
- [68] Fritz Zwicky. On the masses of nebulae and of clusters of nebulae. *The Astrophysical Journal*, 86:217, 1937. doi:[10.1086/143864](https://doi.org/10.1086/143864).

# Apêndice A: Estimador de Feldman, Kaiser & Peacock

Neste apêndice apresentamos brevemente uma generalização da análise estatística do espectro de potência 3D para *surveys* de galáxias que foi desenvolvido inicialmente no capítulo 5. Em particular, focamos apenas nas §2.1, §2.2 e o início da §2.3 do trabalho desenvolvido em 1994 por H. A. Feldman, N. Kaiser e J. A. Peacock [25] (por simplicidade, FKP).

Em suma, FKP apresentam um método geral e rigoroso de estimar o espectro de potência  $\hat{P}(k)$  e sua variância  $\sigma_P^2$ , com isso, e sob a hipótese (empiricamente verificada) de flutuações Gaussianas, é possível minimizar a variância impondo que a função peso  $w(\mathbf{r})$  (*weight function*), inicialmente arbitrária, assuma uma forma analítica particular  $w_0(\mathbf{r})$  (*optimum weighting*).

O ponto de partida para toda a análise, começa pela definição de uma função  $F(\mathbf{r})$  que representa a flutuação, i.e., a diferença entre a densidade do número de galáxias de um catálogo, representado por  $n_g(\mathbf{r})$ , pela densidade do número de galáxias de um catálogo sintético  $n_s(\mathbf{r})$

$$F(\mathbf{r}) := \frac{w(\mathbf{r}) [n_g(\mathbf{r}) - \alpha n_s(\mathbf{r})]}{[\int d^3\mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}^2(\mathbf{r})]^{1/2}}, \quad (7.1)$$

sendo  $w(\mathbf{r})$  a função peso mencionada acima,  $\alpha$  é um fator que estabelece a proporção entre o número médio de galáxias do catálogo com o sintético, i.e,  $\bar{n}_g(\mathbf{r}) = \alpha \bar{n}_s(\mathbf{r})$ , e por fim,  $F(\mathbf{r})$  é convenientemente normalizada pelo fator  $[\int d^3\mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}^2(\mathbf{r})]^{1/2}$ .

Para relacionar a Eq. (7.1) com o espectro de potência, calculamos a transformada de Fourier de  $F(\mathbf{r})$  para determinar  $F(\mathbf{k})$ , e depois tomamos a média do seu



quadrado, i.e

$$\langle |F(\mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{\int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' w(\mathbf{r})w(\mathbf{r}') \langle [n_g(\mathbf{r}) - \alpha n_s(\mathbf{r})] [n_g(\mathbf{r}') - \alpha n_s(\mathbf{r}')] \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\int d^3\mathbf{r} w^2(\mathbf{r})\bar{n}^2(\mathbf{r})}. \quad (7.2)$$

Expandindo a média em (7.2), aparecerá três funções de correlação distintas. O primeiro termo,  $\langle n_g(\mathbf{r})n_g(\mathbf{r}') \rangle$ , é a função de correlação do catálogo de galáxias que é derivada considerando um processo de Poisson (veja apêndice A de [25]), e portanto apresenta uma auto-correlação, quantificada por  $\xi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , mas também um ruído de Poisson (*shot-noise*). O segundo termo,  $\langle n_s(\mathbf{r})n_s(\mathbf{r}') \rangle$ , é a função de correlação do catálogo sintético, e por ser aleatório, não apresenta auto-correlação, i.e.,  $\xi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv 0$ , mas o *shot-noise* ainda é diferente de zero. Por fim, teremos o termo de cross-correlação  $\langle n_g(\mathbf{r})n_s(\mathbf{r}') \rangle$ , que é o mais simples, pois não apresenta auto-correlação e nem *shot-noise*, trata-se apenas da média do produto do número de galáxias do catálogo real pelo catálogo sintético. É possível mostrar que cada um desses termos será

$$\langle n_g(\mathbf{r})n_g(\mathbf{r}') \rangle = \bar{n}(\mathbf{r})\bar{n}(\mathbf{r}') [1 + \xi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] + \bar{n}(\mathbf{r})\delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (7.3)$$

$$\langle n_s(\mathbf{r})n_s(\mathbf{r}') \rangle = \alpha^{-2}\bar{n}(\mathbf{r})\bar{n}(\mathbf{r}') + \alpha^{-1}\bar{n}(\mathbf{r})\delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (7.4)$$

$$\langle n_g(\mathbf{r})n_s(\mathbf{r}') \rangle = \alpha^{-1}\bar{n}(\mathbf{r})\bar{n}(\mathbf{r}'). \quad (7.5)$$

Portanto, a Eq. (7.2) pode ser reduzida na soma de dois termos

$$\begin{aligned} \langle |F(\mathbf{k})|^2 \rangle &= \frac{\int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' w(\mathbf{r})w(\mathbf{r}')\bar{n}(\mathbf{r})\bar{n}(\mathbf{r}')\xi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\int d^3\mathbf{r} w^2(\mathbf{r})\bar{n}^2(\mathbf{r})} \\ &+ (1 + \alpha) \frac{\int d^3\mathbf{r} w^2(\mathbf{r})\bar{n}(\mathbf{r})}{\int d^3\mathbf{r} w^2(\mathbf{r})\bar{n}^2(\mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Escrevendo  $\xi$  como a T.F. de  $P$ , isto é,  $\xi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ , e além disso, definindo

$$G(\mathbf{k}) := \frac{\int d^3\mathbf{r} w(\mathbf{r})\bar{n}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{[\int d^3\mathbf{r} w^2(\mathbf{r})\bar{n}^2(\mathbf{r})]^{1/2}}, \quad (7.7)$$

podemos escrever a Eq. (7.6) na forma padrão do resultado obtido por FKP, dado

por

$$\langle |F(\mathbf{k})|^2 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} P(\mathbf{k}') |G(\mathbf{k} - \mathbf{k}')|^2 + (1 + \alpha) \frac{\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}(\mathbf{r})}{\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}^2(\mathbf{r})}. \quad (7.8)$$

O segundo termo de (7.8) não depende de  $P$ , portanto é o espectro de potência de *shot-noise*, de modo que podemos definir

$$P_{\text{shot}} = (1 + \alpha) \frac{\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}(\mathbf{r})}{\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}^2(\mathbf{r})}. \quad (7.9)$$

Se a função  $G$  é suficientemente compacta na região do espaço- $\mathbf{k}$  em que o espectro  $P$  é suficientemente suave, então podemos aproximar a Eq. (7.8) por

$$\langle |F(\mathbf{k})|^2 \rangle \approx P(\mathbf{k}) + P_{\text{shot}}. \quad (7.10)$$

Portanto, o estimador  $\hat{P}$  do espectro de potência verdadeiro  $P$  é o espectro total  $|F|^2$  com a subtração do ruído de fundo  $P_{\text{shot}}$ , isto é:

$$\hat{P}(\mathbf{k}) = |F(\mathbf{k})|^2 - P_{\text{shot}}. \quad (7.11)$$

Na prática, o espaço- $\mathbf{k}$  é dividido em sub-volumes (*sampling grid*), então é de interesse considerar o valor médio do estimador para todos os número de onda pertencentes a região delimitada por esse sub-volume, i.e.,

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} d^3 \mathbf{k}' \hat{P}(\mathbf{k}'). \quad (7.12)$$

A variância do estimador é dada por

$$\sigma_P^2(k) := \left\langle \left[ \hat{P}(k) - \langle \hat{P}(k) \rangle \right]^2 \right\rangle = \left\langle \left[ \hat{P}(k) - P(k) \right]^2 \right\rangle. \quad (7.13)$$

Usando a Eq. (7.11) e definindo  $\delta \hat{P}(\mathbf{k}) := \hat{P}(\mathbf{k}) - P(k)$ , podemos escrever a variância como

$$\sigma_P^2(k) = \frac{1}{V_k^2} \int_{V_k} d^3 \mathbf{k} \int_{V_k} d^3 \mathbf{k}' \langle \delta \hat{P}(\mathbf{k}) \delta \hat{P}(\mathbf{k}') \rangle. \quad (7.14)$$

Para calcular  $\langle \delta \hat{P}(\mathbf{k}) \delta \hat{P}(\mathbf{k}') \rangle$  precisamos assumir um modelo. O mais aceito (e que concorda com as observações) é a hipótese de flutuações Gaussianas. Nesse caso,

é possível mostrar (veja apêndice B de [25]) que

$$\langle \delta \hat{P}(\mathbf{k}) \delta \hat{P}(\mathbf{k}') \rangle = \left| \langle F(\mathbf{k}) F^*(\mathbf{k}') \rangle \right|^2. \quad (7.15)$$

Para calcular  $\langle F(\mathbf{k}) F^*(\mathbf{k}') \rangle$  seguimos os mesmos passos que nos levaram à Eq. (7.2), portanto, do lado direito da Eq. (7.6), a exponencial do primeiro termo passa a ser  $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'')}$  e no integrando do segundo termo aparecerá a exponencial  $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}$ , por fim, usando novamente  $\xi$  como a T.F. de  $P$ , vamos encontrar que

$$\langle F(\mathbf{k}) F^*(\mathbf{k}') \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}''}{(2\pi)^3} P(\mathbf{k}'') G(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') G^*(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') + S(\mathbf{k}' - \mathbf{k}), \quad (7.16)$$

onde  $S$ , definido por

$$S(\mathbf{k}) := (1 + \alpha) \frac{\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}^2(\mathbf{r})}, \quad (7.17)$$

é a generalização do termo de *shot-noise*, com efeito, se  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$  então  $S(\mathbf{0}) = P_{\text{shot}}$ .

Ademais, seguindo o mesmo argumento que nos conduziu à Eq. (7.10), é possível mostrar que (7.16) pode ser aproximada por

$$\langle F(\mathbf{k}) F^*(\mathbf{k} + \delta \mathbf{k}) \rangle \approx P(\mathbf{k}) Q(\delta \mathbf{k}) + S(\delta \mathbf{k}), \quad (7.18)$$

onde  $\delta \mathbf{k} := \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  e

$$Q(\mathbf{k}) := \frac{\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}^2(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}^2(\mathbf{r})}. \quad (7.19)$$

Novamente, observe que se  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$  então  $Q(\mathbf{0}) = 1$  e a Eq. (7.18) recai na Eq. (7.10). Por fim, da Eq. (7.15), temos que

$$\langle \delta \hat{P}(\mathbf{k}) \delta \hat{P}(\mathbf{k}') \rangle = \left| P(\mathbf{k}) Q(\delta \mathbf{k}) + S(\delta \mathbf{k}) \right|^2. \quad (7.20)$$

Usando a equação acima, as definições de  $Q(\mathbf{k})$ ,  $S(\mathbf{k})$  e a identidade de Parseval<sup>1</sup> podemos determinar a variância

$$\frac{\sigma_P^2(k)}{P^2(k)} = \frac{(2\pi)^3 \int d^3 \mathbf{r} w^4(\mathbf{r}) \bar{n}^4(\mathbf{r}) [1 + 1/(\bar{n}(\mathbf{r})P(k))]}{V_k [\int d^3 \mathbf{r} w^2(\mathbf{r}) \bar{n}^2(\mathbf{r})]^2}. \quad (7.21)$$

<sup>1</sup>Se  $\Phi(\mathbf{r})$  e  $\Psi(\mathbf{k})$  são transformada de Fourier uma da outra, então a identidade de Parseval estabelece que  $\int d^3 \mathbf{r} |\Phi(\mathbf{r})|^2 \propto \int d^3 \mathbf{k} |\Psi(\mathbf{k})|^2$ .