

# Solução numérica para previsão do comportamento de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRF

M. R. Garcez<sup>(1)</sup>, L. C. P. da Silva Filho<sup>(2)</sup>

Trabalho recebido em 18/10/2007 e aprovado para publicação em 9/10/2009.

## Resumo

Polímeros Reforçados com Fibras começaram a ser empregados no reforço de estruturas de concreto armado na década de 80 e, desde então, muitos avanços relativos a esta técnica de reforço ocorreram, desde a variação das fibras formadoras do compósito de reforço até a aplicação de protensão nos laminados para um melhor aproveitamento da sua resistência à tração. Visando desenvolver uma solução analítica para prever o comportamento de vigas de concreto armado reforçadas com laminados PRF uma solução não-linear foi proposta, assumindo um diagrama momento-curvatura com resposta tri-linear para a seção transversal, com estágios determinados pela fissuração do concreto, escoamento do aço e capacidade última do elemento reforçado. A partir do diagrama momento-curvatura da seção transversal do elemento reforçado são obtidas as deflexões, por dupla integração, e são geradas as respostas carga-deslocamento. A análise numérica foi realizada através do software Matlab® e os resultados numéricos gerados se mostraram compatíveis quando comparados com os obtidos experimentalmente, através de ensaios de flexão em vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRFC protendidos e não-protendidos.

*Palavras-chave:* PRF. Análise tri-linear. Solução analítica.

<sup>(1)</sup> Dra., Pesquisadora do Laboratório de Ensaios e Modelos Estruturais (LEME) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: mrgarcez@hgotmail.com

<sup>(2)</sup> PhD., Professor do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: lcarlos@ppgec.ufrgs.br  
Laboratório de Ensaios e Modelos Estruturais. Av. Osvaldo Aranha, 99 - Térreo, CEP 90.135-190, Porto Alegre, Brasil.

# 1 Introdução

A utilização de Polímeros Reforçados com Fibras (PRF) no reforço de estruturas de concreto armado vem se popularizando em todo o mundo, desde a década de 80, quando começaram a ser investigados e aplicados na Europa, Japão e Estados Unidos. No Brasil, sua aplicação se popularizou na década de 90 e, desde então, muitos avanços ocorreram, seja na área de pesquisa ou em aplicações reais em estruturas de concreto armado.

Visando desenvolver uma solução analítica para prever o comportamento das vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRF, sendo estes protendidos ou não-protendidos, foi desenvolvido um procedimento de análise não-linear, com base em recomendações existentes na literatura sobre o comportamento de elementos reforçados. O modelo numérico criado foi implementado computacionalmente com auxílio do software MATLAB® que, segundo descrição da fabricante, é uma linguagem computacional técnica de alto nível com ambiente para desenvolvimento de algoritmos, visualização e análise de dados.

## 2 Descrição da solução analítica proposta

O modelo numérico não-linear desenvolvido adotou um diagrama momento *versus* curvatura com resposta tri-linear, abordagem também utilizada por Charkas et al.(2002 e 2003), El-Mihilmy et al.(2000) e Razaqpur et al.(2000), para análise da seção transversal de vigas de concreto armado reforçadas com PRF.

Conforme pode ser observado na Figura 1, o diagrama é caracterizado por três estágios: fissuração do concreto (Estádio I), escoamento do aço (Estádio II) e desenvolvimento da capacidade última do elemento reforçado (Estádio III). A partir do diagrama momento *versus* curvatura da seção transversal do elemento reforçado são obtidas as deflexões, por integração, e geradas as respostas carga-deslocamento.

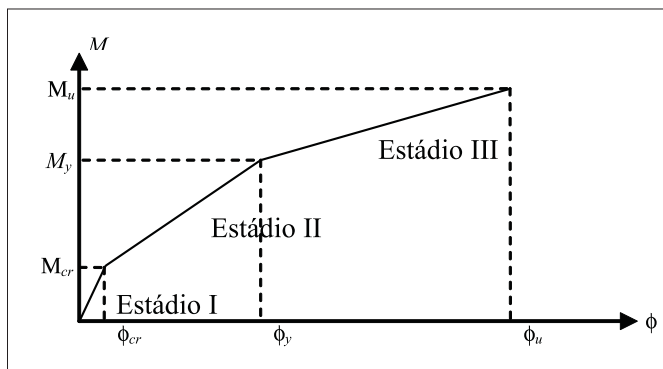


Figura 1 – Diagrama momento *versus* curvatura com resposta tri-linear

Observa-se que no Estádio I, qualquer momento atuante na seção transversal ( $M$ ) deve ser menor que o momento em que ocorre fissuração do concreto ( $M_{cr}$ ). No Estádio II,  $M$  está situado entre  $M_{cr}$  e  $M_y$ , que corresponde ao momento em que ocorre o escoamento do aço. No Estádio III, o  $M$  se situa entre  $M_y$  e  $M_u$ , que corresponde ao momento último da seção transversal.

A relação momento *versus* curvatura de uma seção de concreto armado reforçada com PRF pode ser determinada através do equilíbrio interno de forças, como no caso do concreto armado. A Figura 2 mostra uma distribuição de tensões e deformações que pode ser utilizada para verificação do equilíbrio interno de forças da seção reforçada em cada fase do diagrama momento *versus* curvatura, quando são utilizados laminados não-protendidos.

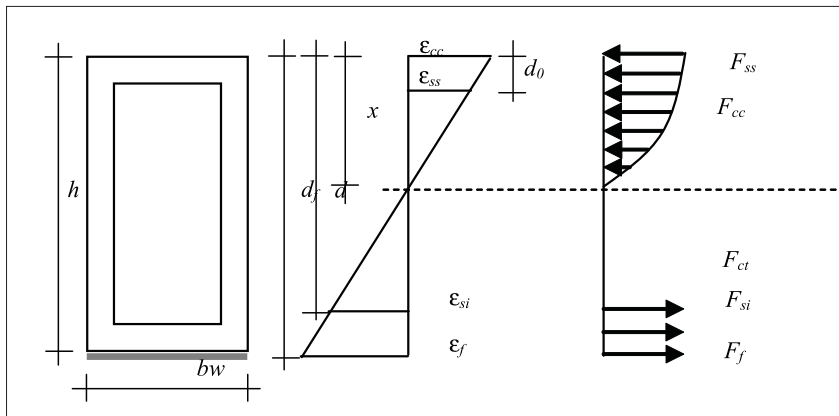


Figura 2 – Equilíbrio interno de forças de uma seção de concreto armado reforçada.

O equilíbrio interno da seção transversal resulta em:

$$F_{cc} + F_{ss} = F_{si} + F_{ct} + F_f \quad (\text{Eq. 1})$$

Onde:

- $F_{cc}$  – Força referente ao concreto comprimido.
- $F_{ss}$  – Força referente ao aço da armadura superior.
- $F_{si}$  – Força referente ao aço da armadura inferior.
- $F_{ct}$  – Força referente ao concreto tracionado.
- $F_f$  – Força referente ao PRF.

As Equações 2 e 3 expressam os valores das tensões de tração e compressão no concreto. O comportamento do concreto à compressão foi considerado de acordo com a parábola proposta por Hognestad, em 1975 (Eq. 3).

$$\sigma_{ct} = E_c \varepsilon_{ct} \quad [\text{Eq. 2}]$$

$$\sigma_{cc} = f_c \left[ 2 \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{cu}} - \left( \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{cu}} \right)^2 \right] \quad (\text{Eq. 3})$$

Sendo:

$E_c$  – Módulo de elasticidade do concreto.

$f_c$  - Resistência à compressão do concreto.

$\varepsilon_{cc}$  e  $\varepsilon_{ct}$  – Deformações no concreto nas bordas superior e inferior da seção transversal.

$\varepsilon_{cu}$  – Deformação última do concreto à compressão.

$\sigma_{cc}$  e  $\sigma_{ct}$  – Tensões no concreto nas bordas superior e inferior da seção transversal.

O comportamento do aço das armaduras foi considerado como sendo elasto-plástico perfeito. A Equação 4 representa o comportamento do aço até o escoamento e a Equação 5 representa o comportamento do aço após o escoamento

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (\text{Eq. 4})$$

$$\sigma_s = f_y \quad (\text{Eq. 5})$$

Sendo:

$E_s$  – Módulo de elasticidade do aço.

$f_y$  – Tensão de escoamento do aço.

$\varepsilon_s$  – Deformação no aço.

$\sigma_s$  – Tensão no aço.

Para o PRF foi considerado um comportamento linear-elástico até a ruptura, representado pela Equação 6.

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f \quad (\text{Eq. 6})$$

Sendo:

$E_f$  - Módulo de elasticidade do PRF.

$\varepsilon_f$  – Deformação no PRF.

Estabelecidas as relações constitutivas dos materiais, podem-se determinar as equações de equilíbrio para cada estágio. Para o Estádio I a equação de equilíbrio descrita pela Equação 1 resulta na Equação 7:

$$bw \int_0^x \sigma(y) dy + \varepsilon_{ss} E_s A_{ss} = \varepsilon_{si} E_s A_{si} + \varepsilon_{ct} E_{ct} A_{ct} + \varepsilon_f E_f A_f \quad (\text{Eq. 7})$$

Aplicando as equações de compatibilidade de deformações, temos:

$$bw f_c \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{cu}} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{cc}}{3\varepsilon_{cu}} \right) x + \varepsilon_{cc} \left( \frac{x-d_0}{x} \right) E_s A_{ss} = \varepsilon_{cc} \left( \frac{d-x}{x} \right) E_s A_{si} + \varepsilon_{cc} \left( \frac{h-x}{x} \right) E_c bw \left( \frac{h-x}{2} \right) + \varepsilon_{cc} \left( \frac{d_f-x}{x} \right) E_f A_f \quad (\text{Eq. 8})$$

Finalmente, rearranjando os termos, obtemos a Equação 9, de segundo grau, que representa o equilíbrio no Estádio I:

$$\left(\frac{2p}{\epsilon_{cc}} - E_c b\right)x^2 + (2E_s A_{ss} + 2E_c bwh + 2E_s A_{si} + 2E_f A_f)x - (2d_0 E_s A_{ss} + bwE_c h^2 + 2d E_s A_{si} + 2d_f E_f A_f) = 0 \quad (\text{Eq. 9})$$

Sendo:

$$p = bwf_c \frac{\epsilon_{cc}}{\epsilon_{cu}} \left(1 - \frac{\epsilon_{cc}}{3\epsilon_{cu}}\right) \quad (\text{Eq. 10})$$

$A_{ss}$  – Área de aço na posição comprimida da viga.

$A_{si}$  – Área de aço na posição tracionada da viga.

$A_f$  – Área de reforço.

No Estádio II o concreto já chegou ao seu limite de resistência à tração, logo a equação de equilíbrio descrita pela Equação 1 resulta em:

$$bw \int_0^x \sigma(y) dy + \epsilon_{ss} E_s A_{ss} = \epsilon_{si} E_s A_{si} + \epsilon_f E_f A_f \quad (\text{Eq. 11})$$

Aplicando as equações de compatibilidade de deformações, temos:

$$bwf_c \frac{\epsilon_{cc}}{\epsilon_{cu}} \left(1 - \frac{\epsilon_{cc}}{3\epsilon_{cu}}\right)x + \epsilon_{cc} \left(\frac{x-d_0}{x}\right) E_s A_{ss} = \epsilon_{cc} \left(\frac{d-x}{x}\right) E_s A_{si} + \epsilon_{cc} \left(\frac{d_f-x}{x}\right) E_f A_f \quad (\text{Eq. 12})$$

Finalmente, rearranjando os termos, obtemos a Equação 13, de segundo grau, que representa o equilíbrio no Estádio II:

$$px^2 + (\epsilon_{cc} E_s A_{ss} + \epsilon_{cc} E_s A_{si} + \epsilon_{cc} E_f A_f)x - (\epsilon_{cc} d_0 E_s A_{ss} + \epsilon_{cc} d E_s A_{si} + \epsilon_{cc} d_f E_f A_f) = 0 \quad (\text{Eq. 13})$$

Considerando que, no Estádio III, o aço da armadura inferior atingiu a tensão de escoamento, a Equação 1 se transforma em:

$$bw \int_0^x \sigma(y) dy + \epsilon_{ss} E_s A_{ss} = f_y A_{si} + \epsilon_f E_f A_f \quad (\text{Eq. 14})$$

Aplicando as equações de compatibilidade de deformações, temos:

$$b w f_c \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_{cu}} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{cc}}{3\varepsilon_{cu}} \right) x + \varepsilon_{cc} \left( \frac{x - d_0}{x} \right) E_s A_{ss} = f_y A_{si} + \varepsilon_{cc} \left( \frac{d_f - x}{x} \right) E_f A_f \quad (\text{Eq. 15})$$

Finalmente, rearranjando os termos, obtemos a Equação 16, de segundo grau, que representa o equilíbrio no Estádio III:

$$p x^2 + \left( \varepsilon_{cc} E_s A_{ss} + f_y A_{si} + \varepsilon_{cc} E_f A_f \right) x - \left( \varepsilon_{cc} d_0 E_s A_{ss} + \varepsilon_{cc} d_f E_f A_f \right) = 0 \quad (\text{Eq. 16})$$

Utilizando-se as equações de equilíbrio específicas de cada estágio, podem ser determinadas, através de um processo iterativo, a posição da linha neutra, as tensões e as deformações nos materiais, nos limites dos Estádios I, II e III. Em seguida podem-se determinar os momentos e curvaturas para cada estágio, a partir de equações adaptadas do código ACI 440.4R-02 (2002).

Segundo El-Mihilmy & Tedesco (2000) o momento  $M_{cr}$  que caracteriza o limite do Estádio I pode ser expresso pela Equação 17:

$$M_{cr} = \frac{f_t' I_g}{y} \quad (\text{Eq. 17})$$

Sendo:

$f_t'$  – Valor de cálculo da resistência à tração na flexão do concreto.

$I_g$  – Momento de inércia equivalente para o Estádio I.

$y$  – Distância do centróide da viga até a fibra mais tracionada.

O valor de  $\phi_{cr}$  pode ser expresso pela Equação 18:

$$\phi_{cr} = \frac{M_{cr}}{E_c I_g} \quad (\text{Eq. 18})$$

Para o cálculo de  $M_y$ , limitante do Estádio II, El-Mihilmy e Tedesco (2000) sugerem a formulação da Equação 19:

$$M_y = E_c I_{cr} \phi_y \quad (\text{Eq. 19})$$

Sendo:

$I_{cr}$  - Momento de inércia para a seção fissurada do Estádio II.

$\phi_y$  – Curvatura correspondente ao escoamento do aço.

A curvatura correspondente ao escoamento do aço pode ser expressa pela Equação 20:

$$\phi_y = \frac{\varepsilon_y}{d - x} \quad (\text{Eq. 20})$$

Para a determinação do limite do Estádio III determina-se, primeiramente, a capacidade resistente da seção ( $M_u$ ). Segundo Charkas et al.(2003), a determinação dos valores de  $M_u$  e  $\phi_u$  depende do modo de falha que ocorre na viga de concreto armado reforçada.

Quando a ruptura ocorre no PRF pode-se utilizar a formulação mostrada na Equação 21 para determinação de  $M_u$ . Se, por outro lado, ocorrer ruptura do concreto, antes da ruptura do PRF, a Equação 22 pode ser utilizada para determinação de  $M_u$ :

$$M_u = A_{si} f_y (d - \gamma c) + A_f f_{fu} (d_f - \gamma c) + A_{ss} \sigma_{ss} (\gamma c - d_0) \quad (\text{Eq. 21})$$

$$M_u = A_{si} f_y \left( d - \frac{\beta_1 x}{2} \right) + A_f \sigma_f \left( d_f - \frac{\beta_1 x}{2} \right) + A_{ss} \sigma_{ss} (\gamma x - d_0) \quad (\text{Eq. 22})$$

Sendo:

$$\gamma = \frac{4\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{cc}}{4(3\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{cc})} \quad (\text{Eq. 23})$$

$f_{fu}$  – Tensão última no PRF.

$\beta_1$  – Relação entre as profundidades da seção retangular de concreto equivalente e da linha neutra.

$\sigma_{ss}$  – Tensão no aço da armadura superior.

Razagpur et al.(2000) apresentam as seguintes equações para determinação da curvatura ( $\phi_u$ ), que corresponde a  $M_u$ , no limite do Estádio III:

Se a ruptura ocorre no PRF,  $\phi_u$  é calculado pela Equação 24:

$$\phi_u = \frac{\varepsilon_f}{d_f - x} \quad (\text{Eq. 24})$$

Se ocorrer ruptura do concreto antes da ruptura do PRF,  $\phi_u$  é calculado pela Equação 25:

$$\phi_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \quad (\text{Eq. 25})$$

O critério utilizado para determinação da máxima força ancorada pelo reforço, que caracteriza a ruptura do PRF, foi o proposto por Teng et al. (2002). Segundo este crité-

rio, deve-se, primeiramente, calcular o coeficiente de largura do reforço à flexão ( $\beta_p$ ), que considera a largura da viga ( $b_w$ ) e a largura do laminado de reforço ( $L_f$ ) e pode ser determinado pela Eq 26.

$$\beta_p = \sqrt{\frac{\left(2 - \frac{L_f}{b_w}\right)}{\left(1 + \frac{L_f}{b_w}\right)}} \quad (\text{Eq. 26})$$

O comprimento de ancoragem efetivo ( $L_e$ ) é determinado pela Equação 27:

$$L_e = 0,5623 \sqrt{\frac{t_f E_f}{\sqrt{f_c}}} \quad (\text{Eq. 27})$$

Sendo:

$t_f$  – Espessura do PRF.

A partir do valor de  $L_e$ , pode-se determinar a força máxima ancorada pelo reforço ( $F_{fu}$ ), através da Equação 28.

$$F_{fu} = 0,3162 \beta_p \beta_l \sqrt{f_c} L_f L_e \quad (\text{Eq. 28})$$

$\beta_l$  é o fator que relaciona o comprimento de ancoragem  $L$  e o comprimento de ancoragem efetivo  $L_e$  e pode ser expresso pelas Equações 29 ou 30.

$$\beta_l = 1, \text{ se } L \geq L_e \quad (\text{Eq. 29})$$

$$\beta_l = \text{sen} \left[ \frac{\pi L}{2L_e} \right] \quad (\text{Eq. 30})$$

O comprimento de ancoragem  $L$ , utilizado para determinação de  $\beta_l$ , é determinado pela Equação 31.

$$L = \frac{f_{fu} t_f}{\tau_{bu}} \quad (\text{Eq. 31})$$



Sendo:

$\tau_{bu}$  - Tensão última de aderência em MPa.

Segundo Teng et al.(2002), a tensão máxima atuante no reforço, em kN/cm<sup>2</sup>, pode ser expressa pela Equação 32:

$$f_{fu} = 0,1956\beta_p\beta_l\sqrt{\frac{E_f\sqrt{f_c}}{t_f}} \quad (\text{Eq. 32})$$

Determinados os momentos e as curvaturas correspondentes aos Estádios I, II e III inicia-se o procedimento para cálculo dos deslocamentos verticais no centro do vão.

Como observado na Figura 1, a rigidez de uma viga de concreto armado reforçada diminui com o incremento de carregamento. Considerando a alteração na rigidez do elemento reforçado durante o carregamento, Charkas et al.(2002) apresentam um procedimento para consideração da distribuição de rigidez nos três estádios do diagrama momento *versus* curvatura. Para tanto os autores consideram como a fissuração afeta a rigidez da seção de concreto ao longo do comprimento da viga. No processo de cálculo estabelece os valores de  $L_g$  e  $L_y$ , que localizam os trechos onde o concreto não se encontra fissurado (junto aos apoios) e o trecho onde os momentos atuantes não causam o escoamento do aço. Estes conceitos estão ilustrados na Figura 3, que mostra a distribuição destes valores para uma viga de concreto armado reforçada, simplesmente apoiada, submetida à flexão em quatro pontos, sendo  $L_a$  o valor do vão de cisalhamento.

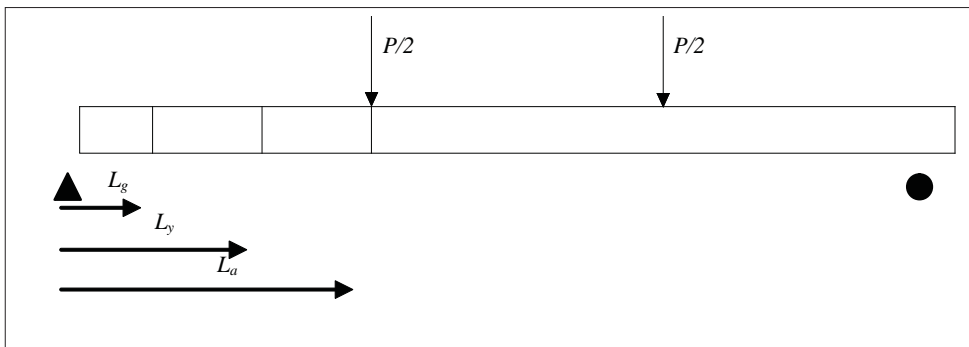


Figura 3: Distribuição de rigidez para flexão em quatro pontos

Para uma viga simplesmente apoiada, submetida à flexão em quatro pontos, a integração proposta fornece a seguinte expressão para a deflexão no centro do vão:

$$\delta_{m'ax} = \frac{\phi_a}{24}(3L^2 - 4L_a^2) + \frac{L_y}{6}[\phi_{cr}(L_y + L_g) - \phi_a(L_y + L_a)] + \frac{\phi_y(L_a - L_g)(L_a + L_y + L_g)}{6} \quad (\text{Eq. 33})$$

Sendo:

$\phi_a$  – Curvatura correspondente ao momento atuante na viga.

$L_a$  – Vão de cisalhamento.

Os valores de  $L_g$  e  $L_y$  são expressos pelas Equações 34 e 35.

$$L_g = \frac{2M_{cr}}{P} \quad (\text{Eq. 34})$$

$$L_y = \frac{2M_y}{P} \quad (\text{Eq. 35})$$

Sendo:

$P$  = Carga atuante na viga.

Simplificando a Equação 33 para o Estádio II, onde  $L_y = L_a$ , e para o Estádio I, onde  $L_g = L_a$ , encontramos finalmente as Equações 36 e 37 que podem ser utilizadas para a determinação das deflexões nos Estádios I e II.

$$\delta_{m'ax} = \frac{\phi_a}{24}(3L^2 - 4L_a^2) + \frac{(L_g + L_a)}{6}(\phi_{cr}L_a - \phi_aL_g) \quad (\text{Eq. 36})$$

$$\delta_{m'ax} = \frac{\phi_a}{24}(3L^2 - 4L_a^2) \quad (\text{Eq. 37})$$

A Figura 4 mostra a distribuição de tensões e deformações da viga reforçada quando são utilizados laminados de PRF protendidos. Essa distribuição difere da mostrada na Figura 2 pela inclusão da força de protensão, que gera, na seção da viga reforçada, deformações no momento de sua aplicação.

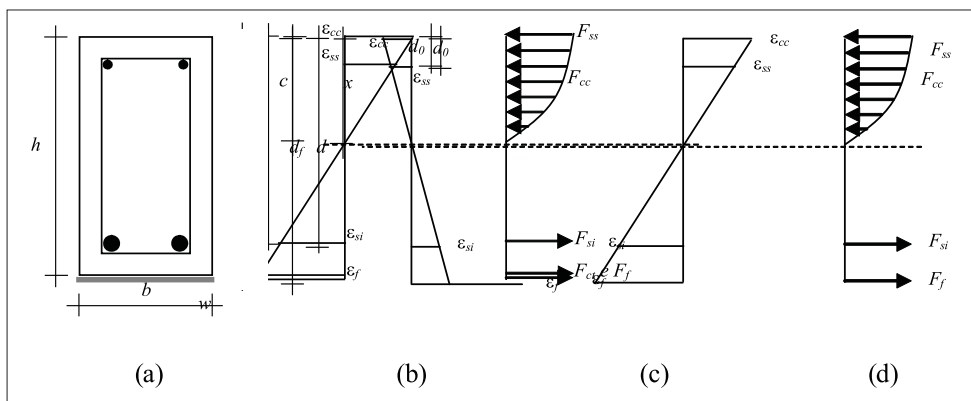


Figura 4: Equilíbrio interno de forças de uma seção de concreto armado reforçada com PRF protendido: (a) Seção transversal; (b) Deformações iniciais devido à protensão; (c) Deformações durante o carregamento; (d) Forças atuantes na seção transversal

Observa-se na Figura 4 (a) que, no momento da aplicação da protensão, surgem na seção da viga reforçada tensões e deformações com sentido contrário ao sentido das tensões e deformações causadas pelo carregamento. As tensões no concreto das bordas superior e inferior da seção transversal podem ser determinadas pelas Equações 38 e 39.

$$\sigma_{cc} = \frac{-N_p}{Ac} + \frac{e_p}{W_{ss}} \quad (\text{Eq. 38})$$

$$\sigma_{ct} = \frac{-N_p}{Ac} - \frac{e_p}{W_{si}} \quad (\text{Eq. 39})$$

Sendo:

$e_p$  – Excentricidade da protensão.

$N_p$  – Força de protensão que atua na seção após as perdas.

$W_{ss}$  e  $W_{si}$  – Módulo resistente à flexão nas bordas superior e inferior da seção transversal.

Um elemento estrutural reforçado com laminados de PRFC protendidos está sujeito a perdas de tensão nos laminados que podem ser imediatas, derivadas do encurtamento elástico do concreto, ou progressivas, por retração e deformação lenta ou fluência do concreto e por relaxação do PRF. Essas perdas devem ser descontadas da força de protensão aplicada, inicialmente, pela máquina empregada para tensionar o laminado.

Conhecidas as tensões no concreto nas bordas superior e inferior da seção transversal, pode ser aplicado um momento inicial  $M_0$  que anule a tensão no concreto na face inferior da seção. O momento  $M_0$  pode ser estimado de acordo com a Equação 40.

$$M_0 = \frac{-\sigma_{ct} I}{y} \quad (\text{Eq. 40})$$

Aplicado o momento  $M_0$ , podem ser determinadas novamente as tensões no concreto nas bordas superior e inferior da seção transversal. Com os novos valores de  $\sigma_{cc}$  e  $\sigma_{ct}$ , determinam-se as deformações no concreto nas faces superior e inferior (Equações 41 e 42) e a curvatura da seção (Equação 43), que são resultantes da aplicação do momento  $M_0$ .

$$\varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_{cc}}{E_c} \quad (\text{Eq. 41})$$

$$\varepsilon_{ct} = \frac{\sigma_{ct}}{E_c} \quad (\text{Eq. 42})$$

$$\phi_0 = \frac{-\varepsilon_{cc} + \varepsilon_{ct}}{h} \quad (\text{Eq. 43})$$

Sendo:

$\phi_0$  – Curvatura inicial devida à aplicação da protensão.

Após a determinação do momento e da curvatura do estágio anterior ao carregamento da viga, que ocorrem devido à aplicação da protensão, são determinadas as posições da linha neutra, as tensões e as deformações nos materiais, nos limites dos Estádios I, II e III, utilizando-se as equações de equilíbrio específicas de cada estágio. Após esse processo iterativo podem-se determinar os momentos e curvaturas para cada estágio a partir de equações anteriormente descritas para os casos onde são utilizados laminados não-protendidos.

O momento  $M_o$  e a curvatura  $\phi_o$ , determinados antes do início da interação, devem ser adicionados aos momentos e curvaturas calculados em cada estágio.

Quando são utilizados laminados protendidos, dependendo do sistema de ancoragem utilizado, pode-se considerar que o limite do Estádio III ocorre pelo esgotamento da capacidade resistente do laminado. Do contrário, quando o sistema de ancoragem é passível de falha antes que o laminado atinja sua capacidade resistente, é necessário considerar a ocorrência de uma redução no limite do Estádio III.

### 3 Apresentação e análise dos resultados

Os dados utilizados para a comparação dos resultados experimentais com os obtidos através da solução analítica proposta foram compilados em uma tabela, com o resumo das cargas e deslocamentos em pontos determinantes para a análise, e na forma de gráficos, que mostram o comportamento das curvas carga *versus* deslocamento vertical no centro do vão para as vigas ensaiadas.

Os gráficos das Figuras 4 a 6 apresentam as comparações entre os resultados experimentais e os estimados com a solução analítica proposta, respectivamente para uma viga testemunho (VT), para uma viga reforçada com dois laminados de PRFC não-protendidos (VFC\_NP\_01) e para uma viga reforçada com dois laminados de PRFC protendidos (VFC\_PE\_01).

Na Tabela 1 podem ser encontrados os valores das cargas ( $P_{exp}$  e  $P_{num}$ ) e dos deslocamentos verticais no centro do vão ( $\delta_{exp}$  e  $\delta_{num}$ ), obtidos experimentalmente e através da solução analítica proposta, para as três fases do diagrama carga *versus* deslocamento.

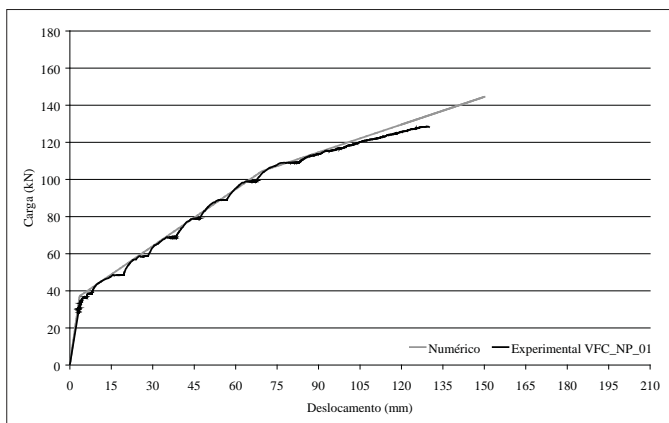


Figura 5: Carga *versus* deslocamento vertical no centro do vão para a viga VT

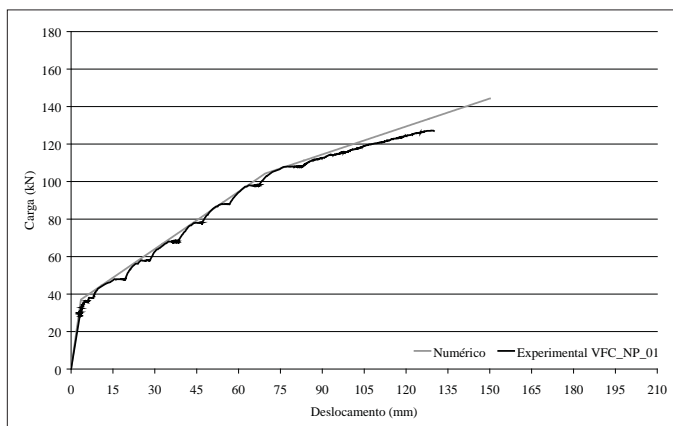


Figura 6: Carga *versus* deslocamento vertical no centro do vão para a viga VFC\_NP\_01

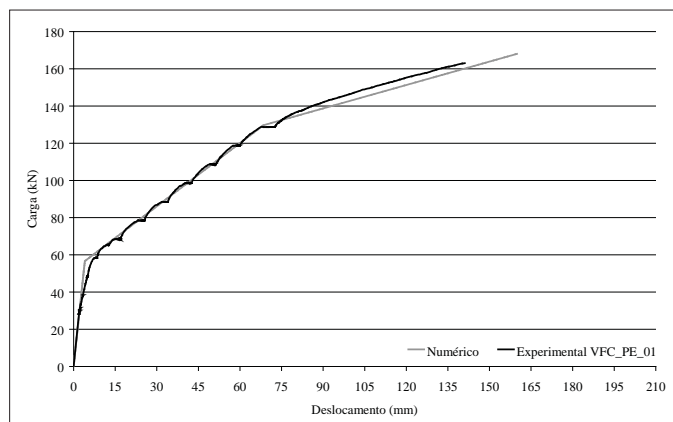


Figura 7: Carga *versus* deslocamento vertical no centro do vão para a viga VFC\_PE\_01

Tabela 1: Cargas e deslocamentos verticais no centro do vão obtidos experimentalmente e através da solução analítica para as três fases do diagrama carga *versus* deslocamento

Viga	Fase do diagrama	$P_{exp}$ (kN)	$\delta_{exp}$ (mm)	$P_{num}$ (kN)	$\delta_{num}$ (mm)	$\frac{P_{num}}{P_{exp}}$	$\frac{\delta_{num}}{\delta_{exp}}$
VT	Fissuração do concreto	37,00	3,44	36,97	3,53	0,999	1,026
	Escoamento do aço	88,00	71,38	89,52	67,54	1,017	0,946
	Final do ensaio*	100,14	219,91	100,14	198,15	1	0,901
VFC_NP_01	Fissuração do concreto	37,00	3,44	36,97	3,53	0,999	1,026
	Escoamento do aço	108,00	76,93	104,21	69,53	0,964	0,903
	Ruptura do reforço	127,25	129,48	144,43	150,46	1,132	1,162
VFC_PE_01	Fissuração do concreto	58,00	7,68	57,89	4,031	0,998	0,524
	Escoamento do aço	128,00	70,87	129,78	69,19	1,014	0,976
	Ruptura do reforço	162,41	144,07	167,78	159,95	1,033	1,110

\*Na viga VT, a simulação foi encerrada quando foi alcançada a carga correspondente ao final do ensaio.

Os dados apresentados na tabela indicam que a solução analítica, em geral, representou de forma adequada o comportamento das vigas analisadas. Diferenças de 16,2% e 11% foram observadas na determinação do deslocamento vertical no centro do vão no momento da ruptura do reforço das vigas com dois laminados, com e sem protensão. Diferenças pequenas, inferiores a 5%, foram registradas nas cargas de fissuração do concreto, escoamento do aço e ruptura do reforço. Mais significativa foi a diferença de 47,6% que ocorreu no deslocamento no centro do vão na primeira fase do diagrama para a viga VFC\_PE\_01.

Observa-se, na Figura 5 e na Tabela 1, que a solução analítica proposta representou, apropriadamente, o comportamento da viga testemunho, VT. Pela solução analítica, a carga de fissuração obtida numericamente é praticamente igual à obtida experimentalmente. Nessa fase, o modelo prevê um deslocamento vertical no centro do vão 2,6% superior ao obtido experimentalmente. Diferenças insignificantes também ocorrem em relação à carga e ao deslocamento vertical no centro do vão no momento do escoamento da armadura, sendo que o modelo prevê valores respectivamente 1,7% superior e 5,4% inferior aos valores obtidos experimentalmente. A ruptura prevista pela solução analítica, escoamento do aço antes da ruptura à compressão do concreto, foi a mesma obtida experimentalmente. A terceira fase do diagrama na solução analítica foi obtida forçando-se o concreto a responder à compressão após o escoamento do aço da armadura. Nesse caso, como salientado na Tabela 6.7, a simulação foi encerrada quando foi alcançada a carga obtida no final do ensaio da VT.

O gráfico da Figura 6 e a Tabela 1 mostram os resultados da solução analítica desenvolvida para a viga VFC\_NP\_01, quando confrontados com os obtidos experimentalmente. Observa-se que, somente na terceira fase do diagrama, as duas curvas sofrem um ligeiro afastamento, o que ocorre devido ao modo de ruptura prematuro do reforço.

O modo de ruptura que ocorre na viga nem sempre concorda com o critério de ruptura utilizado pela solução analítica, que, nesse caso, foi o proposto por Teng et al. (2002), que previa uma deformação máxima no reforço de 8,1‰.

Na última fase do diagrama, a diferença entre as cargas de ruptura numérica e experimental foi de 10,7%, e a relação entre os deslocamentos verticais no centro do vão foi de 16,2%. As diferenças ocorridas na primeira fase do diagrama, que vai até a fissuração do concreto, são de menos de 1% para a carga e 2,6% para o deslocamento vertical no centro do vão, da mesma forma que na VT. Ao final da segunda fase do diagrama, correspondente ao escoamento do aço, essas diferenças são de apenas 3,6% para a carga e 9,7% para o deslocamento vertical no centro do vão.

O gráfico da Figura 7 e os dados da Tabela 1 representam o comportamento da viga VFC\_PE\_01, reforçada externamente com laminados de PRFC protendidos. Embora os resultados numérico e experimental dos pontos característicos do final da primeira fase do diagrama da viga VFC\_PE\_01 tenha apresentado uma diferença de 47,6%, os pontos característicos do final da segunda e terceira fases do diagrama não apresentam diferenças significativas, ficando em torno de 1,4% e 2,4% para a carga e o deslocamento na segunda fase, e 1,7% e 2,1% para a carga e o deslocamento na terceira fase. A viga VFC\_PE\_01 não apresentou uma boa relação entre os resultados numérico e experimental na terceira fase do diagrama, já que a ruptura do reforço ocorreu de forma prematura, por *peeling-off*, antes do esgotamento da capacidade resistente do laminado. Nesse caso, as diferenças na carga de ruptura e no deslocamento vertical no centro do vão foram, respectivamente, 3,5% e 11%.

Observa-se, pela análise dos gráficos das Figuras 5 a 7 e da Tabela 1 que, embora tenham ocorrido algumas diferenças entre os resultados experimentais e numéricos, os dados obtidos numericamente se aproximam de forma satisfatória dos dados obtidos através dos experimentos.

## 4 Considerações finais

A análise numérica realizada para as vigas reforçadas com laminados de PRFC, em geral, representou de forma adequada o comportamento de todas as vigas analisadas, embora o modelo tenha previsto uma maior carga de ruptura para a viga VFC\_NP\_01 e um comportamento mais rígido para a viga VFC\_PE\_01, no final do primeiro estágio de carregamento.

Diferenças máximas de 16,11% e 11% foram observadas na determinação do deslocamento vertical no centro do vão no momento da ruptura do reforço das vigas VFC\_NP\_01 e VFC\_PE\_01. No geral, as diferenças na determinação das cargas de fissuração do concreto, escoamento do aço e ruptura do reforço, foram inferiores a 5%.

Os modos de ruptura das vigas reforçadas foram corretamente estimados, entretanto, as cargas de ruptura estimadas foram 13,20% (VFC\_NP\_01) e 3,30% (VFC\_PE\_01) superiores às obtidas experimentalmente.

Embora tenham ocorrido algumas diferenças entre os resultados experimentais e numéricos, os dados obtidos numericamente se aproximam, de forma satisfatória, dos dados obtidos através dos experimentos, e podem servir de base para o cálculo de aplicações reais, uma vez que o programa determina os diagramas momento versus curvatura dos elementos reforçados, que podem ser transformados em deslocamentos dependendo da vinculação e tipo de carregamento atuante.

## Referências

CHARKAS, H., RASHEEDH, A., MELHEM, H. Simplified Load-deflection calculation of FRP strengthened RC beams based on a rigorous approach. In: 15<sup>th</sup> ASCE ENGINEERING MECHANICS CONFERENCE, 2002, New York. **Anais...** New York: 15<sup>th</sup> ASCE ENGINEERING MECHANICS CONFERENCE, 2002. [CD-Rom].

CHARKAS, H., RASHEEDH, A., MELHEM, H. Rigorous procedure for calculating deflections of Fiber-Reinforced Polymer-Strengthened reinforced concrete beams. **ACI Structural Journal**, julho/agosto, 2003. p. 529-539.

EL-MIHILMY, M. T., TEDESCO, J. W. Deflection of concrete beams strengthened with Fiber-Reinforced Polymer (FRP) plates. **ACI Structural Journal**, setembro/outubro, 2000. p. 679-688.

EL-MIHILMY, M. T., TEDESCO, J. W. Deflection of concrete beams strengthened with Fiber-Reinforced Polymer (FRP) plates. **ACI Structural Journal**, setembro/outubro, 2000. p. 679-688.

RAZAQPUR, A. G., SVECOVÁ, D., CHEUNG, M. S. Rational method for calculating deflection of Fiber-Reinforced Polymer reinforced beams. **ACI Structural Journal**, janeiro/fevereiro, 2000. p. 175-184.

TENG, J. G., CHEN, J. F., SMITH, S. T., LAM, L. **FRP Strengthened RC Structures**. Chichester: Wiley, 2002. 245p.



# Numerical solution to predict the behavior of concrete beams reinforced with FRP

## Abstract

Fiber Reinforced Polymers (FRP) started to be used as structural post-strengthening for reinforced concrete structures at 80's and a notable progress regarding the use of these new generation of post-strengthening materials happened since then. Aiming to develop an analytical solution to describe the behavior of reinforced concrete beams post-strengthened with FRP systems, a non-linear solution based on a tri-linear moment-curvature response was proposed. The three stages of the moment-curvature diagram are determined by concrete cracking, steel yielding and ultimate capacity of the cross section. The load-deflection responses of the post-strengthened beams are obtained by double integration of the moment-curvature curves. The analytical procedure was implemented through the Matlab® software and the numerical results perfectly agree with experimental results obtained through bending tests realized in concrete beams post-strengthened with post-tensioned and non post-tensioned CFRP strips.

*Key words:* FRP. Tri-linear analysis. Analytical solution.