

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**IMPLEMENTAÇÃO DE ANÁLISE NÃO LINEAR  
GEOMÉTRICA EM PROGRAMA DE VIGAS MISTAS**

**Bárbara dos Santos Sánchez**

Porto Alegre  
2020

BÁRBARA DOS SANTOS SÁNCHEZ

**IMPLEMENTAÇÃO DE ANÁLISE NÃO LINEAR  
GEOMÉTRICA EM PROGRAMA DE VIGAS MISTAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

Porto Alegre

2020

**Bárbara dos Santos Sánchez**

**IMPLEMENTAÇÃO DE ANÁLISE NÃO LINEAR  
GEOMÉTRICA EM PROGRAMA DE VIGAS MISTAS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 08 de maio de 2020.

**Prof. Inácio BenvegnuMorsch**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS  
Orientador

**Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS  
Coorientador

Prof. Nilo Cesar Consoli  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Alexandre Luis Braun (UFRGS)**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

**Prof. Jean Marie Désir (UFRGS)**  
Dr. pelo COPPE/UFRJ

**Prof. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco (UERJ)**  
PhD. pela Imperial College of Science Technology and Medicine  
University of London (UK)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, pelo suporte emocional, que nunca deixaram de acreditar em mim, mesmo nas vezes em que eu mesma duvidei. Agradeço, também, o suporte financeiro ao longo dessa trajetória. Mariza, João Gervásio e Sabrina, obrigada por demonstrarem, cada um à sua maneira, o apoio dado em todos os passos para chegar até aqui.

Agradeço ao professor Inácio Benvegnu Morsch, pelas orientações e disponibilidade que sempre demonstrou ao longo deste processo. Agradeço, especialmente, ao professor Jorge Tamayo pelas orientações, envolvimento e empenho constante, os quais foram fundamentais para o presente trabalho.

Agradeço aos amigos de longa data, conhecida como família 31F, vocês foram muito importantes até aqui. Às minhas amigas da graduação, Bianca e Priscila, por cada palavra de apoio. Aos amigos “rivais”, que fizeram da minha morada em Porto Alegre mais acolhedora desde o primeiro dia em que cheguei, obrigada Deividi por dividir esta tua família comigo.

Agradeço a minha *roommate* e amiga, Manoelly, pelos risos, abraços, bolos e revisão deste trabalho. Agradeço, especialmente, a minha amiga e xará Bárbara, que me ensinou suas características leoninas, fazendo com que me enxergasse de outra maneira. Obrigada por cada carinho, palavra e momentos divididos, que fazem com que nossa amizade, ou melhor, irmandade, se torne mais forte.

Agradeço à todos os colegas do PPGEC e aos amigos do CEMACOM, que foram importantes neste processo, desde os conhecimentos transmitidos, abraços trocados e mates divididos. Por fim, agradeço aos amigos que nesta etapa final me emprestaram o computador, tornando possível o término deste trabalho. E a todos os outros que de alguma forma contribuíram para que eu vencesse mais essa etapa em minha vida, meu sincero agradecimento.

*"The paradox of education is precisely this - that as one begins to become conscious, one begins to examine the society in which he is being educated."*

*James Baldwin, "A Talk to Teachers" speech, 1963.*

## RESUMO

SÁNCHEZ, B.S. **Implementação de análise não linear geométrica em programa de vigas mistas.** 2020, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós- Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Embora o comportamento inicial de uma viga mista possa ser descrito por uma resposta linear, a estrutura apresenta um comportamento não linear conforme as cargas e deformações vão se tornando maiores. Isto é devido ao comportamento não linear dos materiais e à mudança da geometria da estrutura. A análise não linear desempenha papel importante na análise de estruturas, pois ao considerar estes efeitos aprimoram-se os resultados e gera-se economia no projeto estrutural. Neste contexto, o presente trabalho visa, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), analisar o comportamento de vigas mistas em algumas situações nas quais a não linearidade geométrica pode influenciar a resposta da estrutura. Os casos analisados referem-se às vigas mistas de grande porte ou contínuas, vigas mistas com protensão interna e externa, ou ainda, vigas mistas submetidas à força axial. No entanto, a formulação implementada permite, desde que sejam adicionadas irregularidades iniciais, analisar vigas mistas com grandes aberturas na alma do perfil de aço, vigas mistas compostas por perfis de aço não compactos, castelados ou alveolares. Para avaliar o comportamento não linear geométrico, foram desenvolvidos os procedimentos necessários para realizar esta análise no código computacional VIMIS, desenvolvido no CEMACOM/PPGEC– UFRGS. Desta forma, o trabalho consistiu na complementação da formulação existente para a modelagem da laje de concreto, perfil de aço e cabo de protensão interna e externa. Foi adotado uma abordagem clássica Lagrangeana Total para a consideração de grandes deslocamentos e rotações moderadas, esta mudança acarretou na alteração da formulação dos elementos finitos, implicando na consideração de uma parcela de rigidez geométrica e atualização de variáveis cinemáticas. Todos os procedimentos realizados no presente trabalho são contrastados com resultados experimentais e numéricos de outros autores, validando, desta forma, a programação realizada.

**Palavras-chave:** *vigas mistas; análise não linear geométrica; elementos finitos.*

## ABSTRACT

SÁNCHEZ, B.S. **Implementação de análise não linear geométrica em programa de vigas mistas.** 2020, Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós- Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Although the linear behaviour may be considered at early stages of loading in a structure, the response is essentially nonlinear at greater loads and displacements due to material behaviour and geometry changes. The nonlinear analysis plays an important role in the analysis of structures, because when these effects are considered, the results are improved and savings in structural design are generated. In this context, the purpose of this work is to analyze the behavior of composite beams in situations in which geometric non-linearity can influence the structure's response, through the Finite Element Method (FEM). The analyzed cases refer to large or continuous composite beams, composite beams with internal or external prestressing, or even, composite beams subjected to axial force. If initial irregularities are implemented, the present formulation allows analyzing composite beams with large holes, composite beams with of non-compact profile, cast-iron or honeycomb steel profiles. Due to evaluate the geometric nonlinear behavior, the computational code VIMIS was modified, this code has been developed at CEMACOM / PPGEC - UFRGS. The present work consisted of complementing the existing formulation for the modeling of the concrete slab, steel profile and internal and external prestressing cable. A classic Lagrangean Total approach was adopted to consider large displacements and moderate rotations, implying the consideration of a geometric stiffness and updating of kinematic variables. All the procedures performed in the present work are contrasted with experimental and numerical results from other authors.

**Key-words:** *composite beams; geometric nonlinear analysis; finite elements.*

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1 JUSTIFICATIVA .....	15
1.2 OBJETIVOS .....	16
1.3 METODOLOGIA .....	16
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	17
1.4.1 Pesquisas no CEMACOM .....	17
1.4.2 Demais Pesquisas .....	19
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	22
<b>2. MODELOS CONSTITUTIVOS UTILIZADOS NA MODELAGEM DE VIGAS MISTAS DE AÇO-CONCRETO .....</b>	<b>23</b>
2.1 CONCRETO EM COMPRESSÃO .....	23
2.2 CONCRETO EM TRAÇÃO .....	25
2.3 COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DO CONCRETO .....	27
2.4 AÇO DA ARMADURA DE REFORÇO .....	28
2.5 AÇO DO CABO PROTENDIDO .....	28
2.6 AÇO ESTRUTURAL DO PERFIL METÁLICO .....	29
2.7 CONECTORES DE CORTE .....	30
2.8 PROGRAMA COMPUTACIONAL VIMIS NA SUA VERSÃO ATUAL .....	31
<b>3. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA .....</b>	<b>34</b>
3.1 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA .....	34
3.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL .....	39
<b>4 ELEMENTO FINITO PARA MODELAR LAJE .....</b>	<b>45</b>
4.1 ELEMENTO FINITO DE CASCA ESPESSA .....	45
4.2 APLICAÇÃO NUMÉRICA EM CONCRETO ARMADO .....	57
4.2.1 Placa de Jofriet e Mcneice (1971) .....	57
4.2.1 Placa de Taylor et al. (1966) .....	60
4.3 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS .....	62
<b>5. ELEMENTO FINITO PARA PERFIL DE AÇO .....</b>	<b>64</b>
5.1 DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO TEORIA DE VON KÁRMÁN .....	65



5.1.1. Placa simplesmente apoiada .....	78
5.1.2. Placa quadrada apoiada .....	81
5.1.3 Placa quadrada engastada .....	83
5.2 DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO TENSOR DE DEFORMAÇÃO COMPLETO ..	87
5.2.1 Chapa em formato de L .....	90
5.2.2 Viga engastada .....	93
5.2.3 Viga fina engastada submetida à força cortante no plano.....	95
5.3 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS .....	97
<b>6. ELEMENTO UNIDIMENSIONAL PARA CABO DE PROTENSÃO INTERNA ....</b>	<b>99</b>
6.1 APLICAÇÕES NUMÉRICAS .....	108
6.1.1 Viga de Figueiras (1983).....	109
6.1.2 Placa de Jofriet e Mcneice (1971).....	113
6.1.3 Coluna de Aroni (1968).....	114
6.2 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS .....	117
<b>7 APLICAÇÕES NUMÉRICAS EM VIGAS MISTAS.....</b>	<b>119</b>
7.1 VIGA MISTA BIAPOIADA DE CHAPMAN E BALAKRISHNAN (1964) .....	122
7.2 VIGAS MISTAS CONTÍNUAS.....	134
7.2.1 Viga mista contínua CTB4 testada por Ansourian (1981) .....	134
7.2.2 Viga mista contínua CCB1 ensaiada por Li (2003) .....	139
7.3 VIGAS MISTAS COM PROTENSÃO EXTERNA .....	145
7.3.1 Vigas mistas contínuas de dois vãos ensaiadas por Li (2003).....	147
7.3.2 Vigas experimentais de Chen e Gu (2005) .....	159
<b>8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>173</b>
8.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	177
<b>9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>178</b>

## **LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS**

**AASHTO** - American Association of State Highway and Transportation Officials

**ABNT** - Associação Brasileira de Normas Técnicas

**CEMACOM** - Centro de Mecânica Aplicada e Computacional

**FORTRAN** - IBM Mathematical Formula Translation System

**CEB-FIP MC 90** -Comité Euro-International du Béton, 1993

**CEBFIP MC 99** -Comité Euro-International du Béton, 1999

**FIB MC 2010** –Fédération Internationale du Béton, 2012

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{u}$  – vetor de deslocamentos;

$\boldsymbol{\varepsilon}$  – tensor de deformação de Green Lagrange;

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$  – parcela linear do tensor de deformação de Green Lagrange;

$\boldsymbol{\varepsilon}_L$  – parcela não linear do tensor de deformação de Green Lagrange;

$\boldsymbol{\sigma}$  – tensor de tensões;

$\mathbf{D}$  – matriz constitutiva do material;

$\mathbf{B}$  – matriz de transformação deformação-deslocamento;

$\mathbf{B}_0$  – matriz de transformação deformação-deslocamento linear;

$\mathbf{B}_L$  – matriz de transformação deformação-deslocamento não linear;

$\mathbf{f}$  – vetor de forças externas;

$\mathbf{p}$  – vetor de forças internas;

$\mathbf{K}$  – matriz de rigidez do elemento;

$\mathbf{K}_0$  – matriz de rigidez linear;

$\mathbf{K}_L$  – matriz de rigidez não linear;

$\mathbf{K}_\sigma$  – matriz de rigidez geométrica;

$J$  – a matriz jacobiana de transformação

$u, v, w$  – componentes do deslocamento no referencial global

$u', v', w'$  – componentes do deslocamento no referencial local

$(x, y, z)$  – sistema de coordenadas global

$(x', y', z')$  – sistema de coordenadas local

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  – sistema de coordenadas nodal

$\xi, \eta, \zeta$  – coordenadas curvilíneas

$E_c$  – módulo de elasticidade longitudinal do concreto

$E_s$  – módulo de elasticidade longitudinal do aço

$E'_s$  – módulo de elasticidade do aço referente ao segundo tramo da curva tensão-deformação

## 1 INTRODUÇÃO

Vigas mistas de aço-concreto consistem na associação de um perfil de aço e uma laje de concreto armado ou protendido. Para restringir o escorregamento longitudinal e a separação vertical na interface dos elementos estruturais, laje e viga são unidas por conectores de cisalhamento, sendo o *stud bolt* a solução usual, conforme a Figura 1.

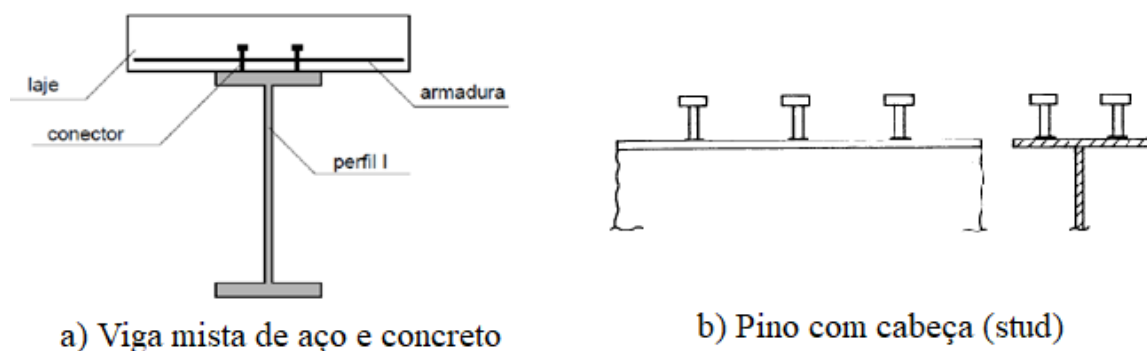


Figura 1 - Modelo de uma viga mista do tipo aço-concreto

O excelente desempenho das estruturas mistas é consequência da combinação do potencial dos seus componentes, ou seja, do aço, quando submetido à tração, e do concreto, quando submetido à compressão. Desta forma, utilizam-se as melhores características mecânicas de cada material de maneira conjunta, obtendo uma relação de benefício mútuo. Em função disso, no princípio da utilização destas estruturas, o seu uso era restrito em vigas biapoiadas, situação mais eficiente para o sistema misto, visto que a viga de aço é solicitada predominantemente à tração e a laje de concreto, à compressão.

As vigas mistas surgiram como consequência da utilização de vigas de aço sob as lajes, as quais eram projetadas apenas para suportar o peso próprio da laje de concreto. Posteriormente, a contribuição da laje passou a ser considerada, caracterizando um sistema misto. No contexto mundial, a utilização dos sistemas compostos teve seu início por volta de 1922, entretanto, apenas em 1944, passaram a fazer parte das normas americanas.

No Brasil, em meados dos anos 50, a construção mista limitou-se a alguns edifícios e pequenas pontes, utilizando normas estrangeiras para o projeto. Somente em 1986, este tipo de estrutura foi normatizada pela ABNT, através da norma técnica NBR8800, a qual trata somente

de projetos de edifícios, enquanto que a primeira norma brasileira para pontes em estrutura mista ainda está em análise (SCHMITZ, 2017).

No que concerne a concepção de projeto e análise numérica de vigas mistas, geralmente são utilizados métodos lineares para prever o comportamento da estrutura. Entretanto, todas as estruturas apresentam um comportamento não linear conforme as cargas e deformações vão se tornando maiores (FIGUEIRAS, 1983). Estas não linearidades estão associadas, basicamente, a duas fontes distintas: não linearidade física, associada ao comportamento do material, e não linearidade geométrica, associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada da estrutura.

A análise não linear geométrica é caracterizada pela necessidade de considerar a influência das mudanças na geometria de uma estrutura durante o processo de carregamento na sua capacidade de suportar cargas. Em uma análise geométrica linear, as deformações produzidas pelas cargas são pequenas, e desta forma, essas mudanças são negligenciáveis no cálculo da carga última. Conseqüentemente, a análise não linear geométrica deve considerar uma análise de grandes deslocamentos e rotações moderadas.

No que diz respeito à análise numérica, no contexto de um material com comportamento elástico linear, a consideração de grandes deslocamentos é necessária quando a deformação adquirida pela estrutura contribui significativamente à geração de esforços de segunda ordem, podendo alterar significativamente a rigidez da estrutura. Esta solução pressupõe que a rigidez seja alterada durante o carregamento, aplicando a carga em etapas e atualizando a rigidez para cada etapa da solução. Por outro lado, a solução de pequenos deslocamentos assume que a rigidez não muda, não sendo necessária a análise incremental.

Na eventualidade de análises de estruturas laminares, ou seja, em estruturas que apresentam duas de suas dimensões predominantes em relação à terceira, como é o caso da laje de concreto e o perfil de aço, enfatiza-se a necessidade de abrangência do comportamento não linear geométrico, de acordo com Wrobel (1997). Isso ocorre, pois, em estruturas de placa quando submetidas a grandes deslocamentos, não há independência dos efeitos de flexão em relação à deformação no plano da placa. Sendo assim, devem ser considerados estes efeitos acoplados, surgindo as não-linearidades do sistema (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

A necessidade de se considerar os efeitos da não linearidade geométrica no projeto de vigas mistas está associada com possibilidade de instabilidade local de seus componentes, pois o perfil pode estar sob compressão. Ocorrendo a probabilidade de flambagem no perfil, e uma vez que este é um fenômeno de instabilidade, o mesmo não pode ser identificado quando é realizada uma análise geométrica linear. Isto se deve ao fato da natureza desta ser, de uma forma intrínseca, geometricamente não linear.

De acordo com Camotim e Reis (2001), tem-se que, por definição, qualquer análise de estabilidade de uma estrutura envolve o estabelecimento das equações de equilíbrio na sua configuração deformada e consideração de relações cinemáticas não lineares. Outra situação que evidencia a importância da análise não linear geométrica em vigas mistas é a possibilidade de utilização de grandes vãos em estruturas isostáticas, onde se requer uma melhor aproximação dos resultados de flechas, por exemplo.

A utilização de perfis esbeltos, ou ainda, quando há aplicação de protensão interna ou externa à laje de concreto são outros casos onde esta análise é importante. A protensão de uma viga mista quando é executada externamente à estrutura constitui uma das técnicas mais poderosas para reforço ou reabilitação de estruturas existentes. Isto é devido à simplicidade na construção do sistema de protensão externa e em relação à inspeção e manutenção do sistema interno, constituindo também uma boa alternativa na concepção de novos projetos estruturais.

Esta última circunstância pode ser bem exemplificada no caso de pontes que apresentam flecha excessiva e necessitam da protensão externa como reforço, de forma que a melhor abordagem numérica, a priori, deve considerar o efeito da não linearidade geométrica em toda a estrutura e não apenas no cabo de protensão, como apontado no trabalho de Wayar (2016). Em casos de novos projetos, o efeito de segunda ordem acontece quando a peça é esbelta e deflete, resultando na não compatibilidade entre o deslocamento do cabo e a viga de aço entre os desviadores e as ancoragens, o que resulta numa variação de excentricidade entre o eixo do cabo e um eixo de referência qualquer da viga de aço.

Em consequência aos pontos relatados anteriormente, os quais mostram a relevância da análise não linear geométrica em vigas mistas, e somado à crescente utilização desse sistema construtivo, devido a suas inúmeras qualidades, como seus aspectos relacionados a prazo, industrialização, produtividade e impacto ambiental, justifica-se a importância de dar

continuidade ao estudo de estruturas mistas, de modo a desenvolver o conhecimento nessa área e contribuir para o estado atual da arte sobre o tema.

Neste contexto, este trabalho visa, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), analisar o comportamento de vigas mistas em algumas situações nas quais a não linearidade geométrica pode influenciar nos resultados. Estas situações referem-se às vigas mistas de grande porte ou contínuas, vigas mistas solicitadas à esforços axiais em sua seção transversal ou ainda, vigas mistas com protensão interna e externa.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Embora o comportamento inicial de um sistema estrutural possa ser descrito por uma resposta linear, todas as estruturas apresentam um comportamento não linear conforme as cargas e deformações vão se tornando maiores (FIGUEIRAS, 1983). A análise não linear desempenha papel importante na análise de estruturas, pois ao considerar estes efeitos aprimoram-se os resultados e gera-se economia no projeto estrutural.

Além disso, no que diz respeito às vigas mistas, a seção do perfil de aço pode estar total ou parcialmente em compressão. Desta forma, é necessária uma análise da flambagem local, tornando indispensável a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica. Outros casos como a utilização de grandes vãos e a utilização de protensão interna ou externa, tornam necessário ter em conta tais efeitos na previsão do comportamento da estrutura. Na literatura técnica do tema existem poucos trabalhos onde se realize uma comparação dos efeitos de segunda ordem na resposta de vigas mistas.

Visto a importância da análise não linear, entende-se como relevante a necessidade de aprimoramento das capacidades do programa VIMIS, pois atualmente o mesmo não tem condições de avaliar problemas que envolvam não linearidade geométrica. Neste contexto, o presente trabalho visa colaborar ao estudo do tema através da implementação, no código computacional VIMIS, das rotinas necessárias para a realização da análise não linear geométrica.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é permitir que o programa VIMIS realize a análise não linear geométrica. A fim de atingir este objetivo, primeiramente é necessário alcançar alguns objetivos preliminares que são:

- a) Implementar a formulação abrangendo grandes deslocamentos do elemento que modela a laje de concreto através da abordagem Lagrangeana Total;
- b) Implementar a formulação abrangendo grandes deslocamentos do elemento que modela o perfil de aço através da abordagem Lagrangeana Total;
- c) Implementar a formulação abrangendo grandes deslocamentos do elemento que modela o cabo de protensão interna aderente através da abordagem Lagrangeana Total;
- d) Analisar vigas mistas compostas por laje de concreto e perfil de aço;
- e) Empregar o *software* GID como ferramenta de pré e pós-processamento;
- f) Utilizar o *software* ANSYS para analisar exemplos que possam ser usados como referência para as formulações a serem testadas;
- g) Validação do código por meio de comparação com resultados experimentais e numéricos de outros pesquisadores.

## 1.3 METODOLOGIA

Para atingir os objetivos propostos, foram programados, em linguagem Fortran90, os procedimentos necessários para realizar a análise não linear geométrica no código VIMIS (TAMAYO, 2011), desenvolvido no CEMACOM/PPGEC– UFRGS. Atualmente, o programa emprega diferentes tipos de elementos finitos para representar a laje de concreto, o perfil de aço e conector de cisalhamento, todos estes com a sua respectiva formulação limitando-se a análise de pequenos deslocamentos. Além desses, também são empregados diferentes tipos de elementos para representar o cabo de protensão interna e o cabo de protensão externa, sendo que este último o único com possibilidade de considerar a análise não linear geométrica.



Desta forma, o trabalho consistiu na expansão da formulação dos elementos finitos que modelam a laje de concreto, perfil de aço e cabo de protensão externa e interna aderente. A princípio, considera-se que não é necessário implementar a formulação em grandes deslocamentos para o conector, pois este tem os nós coincidentes com os planos médios da laje e mesa superior do perfil de aço, acompanhando assim o processo de deformação. Para alcançar o objetivo, acrescentou-se os termos não lineares do tensor de deformações de Green Lagrange, esta mudança acarreta na alteração da formulação dos elementos finitos, mediante a consideração de uma parcela de rigidez geométrica e a correspondente atualização das variáveis cinemáticas.

A formulação é desenvolvida no contexto de uma abordagem Lagrangeana Total, a qual consiste em referenciar o equilíbrio da estrutura segundo sua configuração indeformada inicial. Isto é, o tensor de deformações e tensões num ponto qualquer do corpo são expressos em relação à configuração indeformada, e o campo atual de deslocamento do sistema em relação à sua posição inicial. Todos os procedimentos realizados no presente trabalho são contrastados com resultados experimentais e numéricos de outros autores, validando, desta forma, a programação realizada.

## 1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A modelagem numérica de estruturas mistas é complexa devido às particularidades desse sistema, como o comportamento particular do concreto e dos conectores de corte, e flexibilidade na interface laje-viga. Tais fatores foram analisados em inúmeros trabalhos a fim de melhor representar na modelagem numérica o comportamento real dessa estrutura. Apresentam-se na sequência, de maneira breve, as pesquisas realizadas no CEMACOM e em outros centros de pesquisas.

### 1.4.1 Pesquisas no CEMACOM

A modelagem numérica de vigas mistas de aço e concreto foi tema de pesquisa de diversos trabalhos no laboratório CEMACOM. O tema foi abordado, primeiramente, por Tamayo (2011), que desenvolveu a base do código computacional VIMIS em linguagem Fortran90. O código resultante tinha condições de analisar vigas mistas submetidas a cargas de curta duração em regime de serviço e até o colapso, considerando o comportamento não linear

dos materiais envolvidos. Esse código foi validado por meio de comparações com resultados experimentais de outros pesquisadores.

Dias (2013) implementou os efeitos de longa duração (fluência e retração) com base no código modelo CEB-FIP 90 e desenvolveu uma entrada de dados customizando o *software* GiD. Moreno (2016) adicionou outros modelos diferidos para considerar os efeitos de longa duração no concreto e acrescentou uma ferramenta estatística para a comparação dos resultados obtidos por esses modelos. Além disso, estudou a utilização de proteção interna na laje de concreto.

Wayar (2016) implementou o recurso da protensão externa, sendo o cabo de protensão modelado por elementos finitos tipo catenária ou elementos de treliça. Reginato (2017) empregou o código VIMIS para realizar um estudo paramétrico de vigas mistas tendo como foco o critério de projeto da largura efetiva. Nesse trabalho foram adicionados procedimentos numéricos para avaliar a largura efetiva, comprovando potenciais falhas nos códigos de projeto atuais.

Schmitz (2017) adotou uma abordagem distinta dos demais trabalhos ao fazer uma proposta de modelo numérico no software ANSYS. Para isso, fez-se uma customização desse *software* através da rotina *usermat*. Este processo teve como base os trabalhos de Lazzari (2015) e Lazzari *et al.* (2016) para a implementação do comportamento do concreto. O modelo resultante tem condições de analisar problemas de vigas mistas considerando cargas de curta duração até o colapso e cargas de serviço de longa duração considerando os efeitos de fluência e retração.

Mittelstadt Jr. (2017) estudou a importância da análise não linear geométrica e o emprego da análise de autovalores e autovetores para a geração de irregularidades geométricas iniciais. Foi estudada a influência na resposta final do número de modos de deformação empregados para gerar as irregularidades, através do *software* ANSYS. Além disso, o autor implementou uma rotina para a atualização de coordenadas no código VIMIS. A partir disso, esperava-se que a imprecisão numérica associada com o sistema de equações de grande porte, para um problema de mecânica dos sólidos, fosse suficiente para introduzir as necessárias irregularidades, o que não se verificou verdadeiro.

Franco (2018) adicionou no código VIMIS os recursos de protensão interna, na laje de concreto, do tipo aderente e não aderente. A discretização dos cabos em elementos finitos

unidimensionais foi feita de forma automática de acordo com a malha escolhida para a estrutura. Para minimizar o tempo necessário para análise, incluiu-se o solver PARDISO, o qual reduz o uso de memória no armazenamento da matriz de rigidez global da estrutura e soluciona os sistemas de equações lineares via memória distribuída entre multiprocessadores.

Benincá (2019) propôs um modelo de elementos finitos parametrizado para o estudo de vigas mistas alveolares utilizando o *software* ANSYS. O perfil de aço foi modelado por elementos de casca, a laje de concreto por elementos sólidos hexaédricos e suas barras de aço por elementos de armadura incorporada. Para o comportamento do concreto, o autor utilizou a ferramenta *usermat* do referido *software* e a sua opção *DP-Concrete*. Além disso, o autor estudou os efeitos de instabilidade locais, a partir da adição de imperfeições geométricas iniciais no perfil.

A seguir, na Figura 2, apresenta-se uma linha do tempo dos trabalhos realizados no VIMIS, bem como o seu assunto principal. O presente trabalho busca dar continuidade ao tema de estruturas mistas complementando o programa e suprimindo as necessidades de aprimoramento identificadas por estes trabalhos.

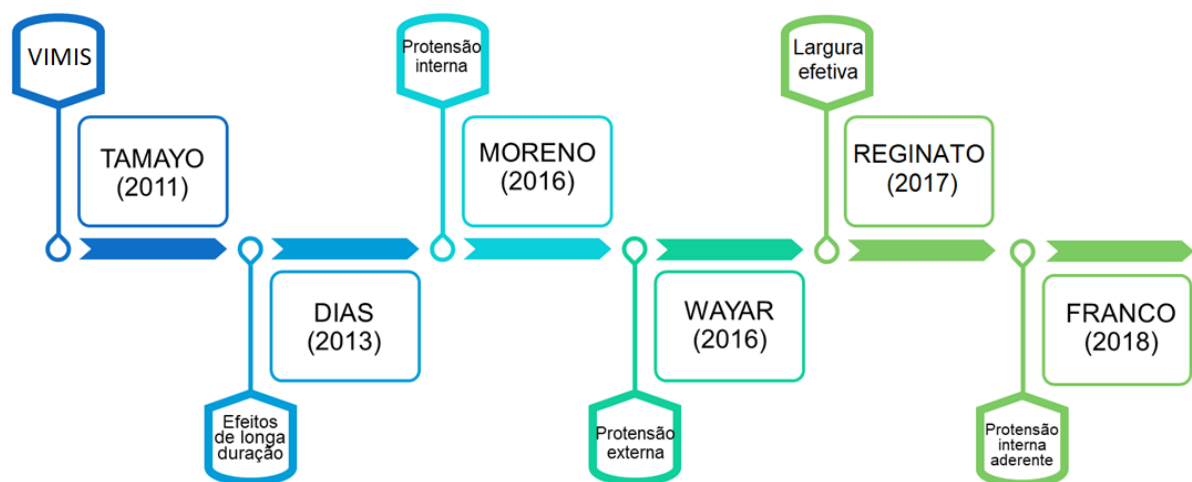


Figura 2 - Trabalhos realizados no CEMACOM

#### 1.4.2 Demais Pesquisas

Wood e Zienkiewicz (1977), através da aplicação da abordagem Lagrangeana Total em elementos isoparamétricos, realizaram uma análise não linear geométrica em estruturas de vigas, pórticos, arcos e cascas axissimétricas. A formulação proposta teve como base as teorias

de von Kármán para placas e de Marguerre para cascas finas. As equações de equilíbrio não lineares foram resolvidas utilizando o método de Newton-Raphson.

Hughes e Liu (1980) apresentam a formulação de um elemento finito de casca tridimensional, adotando a não linearidade geométrica e considerando grandes deformações e rotações. Neste trabalho foram considerados três diferentes quantidades de nós no elemento, além de analisar diferentes tipos de integração. Os autores apresentam, também, um algoritmo “incremental objetivo” para incluir grandes rotações

Figueiras (1983) desenvolveu formulações de elementos finitos para análise não linear de placas e cascas de concreto armado, tendo proposto um código computacional capaz de analisar a resposta não linear até a carga última. O autor adotou o processo incremental e iterativo de Newton Raphson para solucionar os problemas de plasticidade e grandes deslocamentos. O modelo não linear geométrico desenvolvido é baseado na abordagem Lagrangeana Total e abrange problemas com grandes deslocamentos com base na teoria de von Kármán.

Vasilescu (2000) apresenta a teoria e implementação computacional do elemento chamado na literatura inglesa de *quadrilateral facet-shell finite element* (QFSE) para simulação não linear geométrica. A formulação apresentada baseia-se nas hipóteses de Kirchhoff e assume o comportamento do elemento através da sua espessura por divisões de camadas da mesma. O autor adotou a abordagem Lagrangeana Total, utilizando o tensor de deformação de Green Lagrange e segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. Para a solução, foi adotado o algoritmo incremental iterativo de Newton-Raphson.

Póvoas (1991) apresentou como objetivo principal de seu trabalho o desenvolvimento de modelos computacionais para a análise e dimensionamento de estruturas laminares de concreto armado com grandes vãos. Para isso, o autor levou em consideração os efeitos de grandes deslocamentos, adotando a abordagem Lagrangeana Total e apresentou a formulação para o elemento de casca degenerada, com a possibilidade de utilização de cabo de protensão interno a esse elemento.

Chow (1986) realizou a análise de estruturas de concreto dependente do tempo, considerando retração, fluência, fissuração e relaxação da protensão aplicada. A sua formulação em elementos finitos emprega o elemento finito de casca degenerada, levando em conta a não

linearidade física e geométrica, com grandes deslocamentos empregando a teoria de von Kármán, através da abordagem Lagrangeana Total.

Zouari *et al.* (2016) estudaram elementos finitos quadriláteros de membrana com rotação no plano para a análise de problemas geometricamente não lineares. Os elementos são baseados em uma adaptação plana do conceito de rotação de fibra espacial que considera rotações virtuais de uma fibra nodal dentro do elemento. A abordagem Lagrangeana Atualizada é utilizada para descrever grandes deslocamentos com cinemática de pequena deformação.

Quanto ao estudo de vigas mistas abordando a não linearidade geométrica, destaca-se o trabalho de Zona, Ragni e Dall'asta (2008), o qual apresenta uma formulação de elementos finitos para um modelo de vigas de concreto e mistas externamente protendidas, considerando a não linearidade geométrica e do material. Neste trabalho, a variação da excentricidade do cabo é abordada através de uma teoria cinemática não linear.

Em Hozjan *et al.* (2012) se avalia a resposta de estruturas mistas adotando elementos planos de viga composta. Além de trabalhar com a obtenção da carga de flambagem em uma coluna de madeira composta, a não linearidade geométrica em vigas mistas de aço e concreto foi analisada. Isto foi realizado através da comparação dos resultados numéricos com os resultados experimentais de Chapman e Balakrishnan (1964).

Em Nguyen, Hjiáj e Lai (2014) se apresenta um estudo em estruturas mistas através da consideração de elementos de viga-coluna. O autor propõe três exemplos para validar sua implementação, em um deles é analisada uma viga mista biapoiada, onde os conectores são considerados contínuos e com interação parcial. Neste exemplo, o autor evidencia a importância da análise não linear geométrica em vigas mistas ao comparar seus resultados com uma análise linear elástica.

Em Amaral *et al.* (2018) se investiga vigas mistas nas regiões de momento negativo, onde ocorre a flambagem lateral com distorção. Foi avaliada a formulação analítica prescrita pela norma NBR 8800/2008, comparando-a com modelos numéricos em elementos finitos aplicando diversas condições de contorno. Os autores concluíram que a NBR 8800/2008 pode conduzir a resultados contrários à segurança, sendo propostos novos valores para o método de cálculo da referida norma.

Segundo Wang *et al.*(2018), atualmente, as especificações existentes não possuem método de cálculo para a estabilidade de vigas mistas na área de flexão negativa e os resultados computacionais de diferentes teorias apresentadas por pesquisadores diferem entre si. Com o objetivo de discutir este tema, o método dos elementos finitos foi aplicado para comparar três métodos teóricos para a consideração da carga crítica na zona de momento negativo. A análise mostrou que o método de energia de flexão é impreciso e inseguro e a viga no método de fundação elástica é mais concisa e simples.

Lou e Karavasilis (2019) estudaram vigas mistas com protensão, onde o aço do cabo é substituído por compósitos de polímero reforçado com fibra, podendo ser de aramida (AFRP) ou carbono (CFRP). No trabalho são realizadas análises numéricas, avaliando vigas biapoçadas e contínuas, analisando os tipos de cabo e o nível de pré-esforço. Os autores concluíram que o comportamento das vigas pretensionadas convencionais e com a aplicação de CFRP é semelhante, enquanto os cabos com material AFRP resultam em menor carga final e maior capacidade de deformação.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido em oito capítulos. O capítulo 1 introduz os temas abordados, apresenta os objetivos do trabalho e contextualiza a pesquisa. O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o programa VIMIS, apresentando os modelos constitutivos utilizados para modelar vigas mistas. O capítulo 3 descreve a origem da não linearidade geométrica nas estruturas e aborda de forma geral a formulação Lagrangeana Total para análise de grandes deslocamentos. O capítulo 4 particulariza esta formulação para o elemento finito de casca grossa e apresenta exemplos para a validação das modificações realizadas. O capítulo 5 desenvolve a formulação para o elemento de casca fina, considerando a teoria de von Kármán e, posteriormente, considerando o tensor de deformações completo.

O capítulo 6 detalha a formulação para o elemento finito unidimensional do cabo de protensão interna e mostra exemplos para a validação do mesmo. O capítulo 7 apresenta exemplos da aplicação do modelo numérico na simulação de vigas mistas que foram ensaiadas experimentalmente por outros autores. Os resultados obtidos são analisados e discutidos, através da comparação de experimentais, bem como resultados numéricos de trabalhos anteriores. Por fim, no capítulo 8 são apresentadas as conclusões do trabalho e as sugestões para futuras pesquisas sobre os temas abordados.

## 2. MODELOS CONSTITUTIVOS UTILIZADOS NA MODELAGEM DE VIGAS MISTAS DE AÇO-CONCRETO

Este item aborda um breve resumo dos modelos constitutivos dos materiais utilizados nas peças que compõem a viga mista. Algumas características do programa computacional VIMIS são também salientadas através de um fluxograma. Ressalta-se que, em diversas publicações, esse código computacional foi testado e validado pelos referidos autores no contexto de pequenos deslocamentos e não linearidade dos materiais. Para informações mais detalhadas indica-se consultar as seguintes pesquisas: Tamayo (2011), Dias (2013), Moreno (2016), Wayar (2016) e Franco (2018), entre outras.

### 2.1 CONCRETO EM COMPRESSÃO

A Teoria da Plasticidade Associada foi utilizada para a caracterização do comportamento do concreto, sendo adotado um critério de plastificação do tipo de Drucker-Prager com endurecimento não linear para a representação do comportamento em compressão. A determinação das relações constitutivas do tipo incremental é estabelecida por meio de três leis: Critério de escoamento, Lei de fluxo plástico e Lei de endurecimento.

Definiram-se duas superfícies de escoamento: a 1ª superfície determina o início da deformação plástica e a 2ª separa o estado com endurecimento não linear do estado com comportamento elastoplástico perfeito. As duas superfícies são determinadas pela função de plastificação representada pela Equação (2.1), na qual  $I_1$  é o 1º invariante do tensor de tensões e  $J_2$  é o 2º invariante do tensor das tensões desviadoras. Os parâmetros  $a = 0.355\sigma_0$  e  $\beta = 1.355$  são definidos em função do material e  $\sigma_0$  é a tensão efetiva equivalente considerada como a tensão de compressão de um ensaio uniaxial.

$$f(I_1, J_2) = (3J_2\beta + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_0 \quad (2.1)$$

A Figura 3 ilustra as superfícies de escoamento definidas no espaço das tensões principais ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ), com  $f_c$  sendo a resistência média do concreto à compressão uniaxial. Nota-se que quando a superfície que caracteriza o critério de escoamento inicial é atingida e a

carga é incrementada, deformações plásticas ocorrem. Isso faz com que aconteça a expansão da superfície conforme a lei de endurecimento adotada, chegando à superfície limite de escoamento, onde é iniciado o comportamento elastoplástico perfeito, até que a condição de esmagamento do concreto à compressão seja verificada.

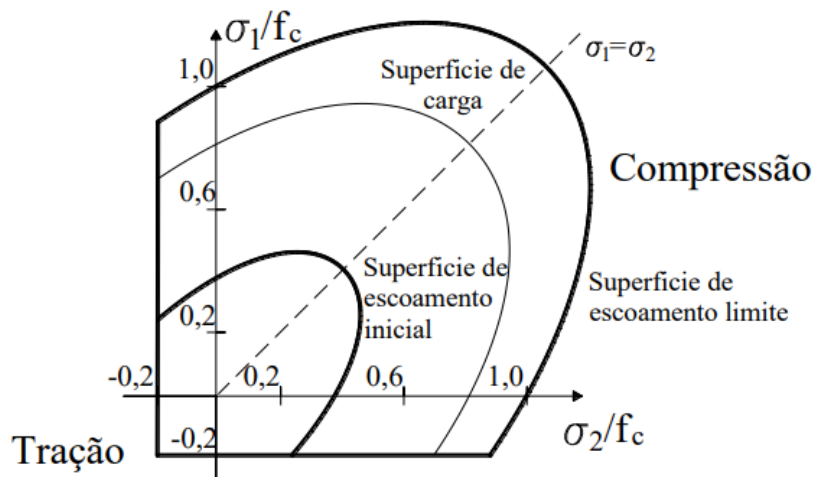


Figura 3 - Superfície de escoamento definida no espaço das tensões (TAMAYO, 2011)

A segunda lei trata do fluxo plástico e define o incremento da deformação plástica conforme a Equação (2.2), em que  $d\lambda$  é a constante de proporcionalidade que determina a magnitude da deformação plástica, e  $\partial f(\sigma)/\partial \sigma_{ij}$  define a direção perpendicular à superfície de escoamento atual.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.2)$$

Por fim, a 3ª lei, definida na equação (2.3), determina o endurecimento associado à evolução da superfície de plastificação  $f(\sigma)$  da Equação (2.1). A tensão de escoamento  $\sigma_Y$  está relacionada ao parâmetro de endurecimento  $k$ , que corresponde à deformação plástica equivalente  $\bar{\varepsilon}^p$  do material, obtida a partir de uma hipótese de trabalho de deformação (HINTON; OWEN, 1980). A evolução de  $\sigma_Y$  depende da deformação plástica equivalente  $\bar{\varepsilon}^p$  e varia segundo a relação tensão efetiva-deformação definida com base na parábola de Madrid mostrada na Figura 4.

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - \sigma_Y(k) = 0 \quad (2.3)$$



Para o concreto em compressão, também deve ser definido o critério de esmagamento para um estado multiaxial de tensões. Para isto, converteu-se arbitrariamente o critério de plastificação da Equação (2.1), que estava em termos das tensões às deformações (FIGUEIRAS; PÓVOAS, 1994). Quando alcançada a deformação última, o material perde todas suas características de rigidez e resistência. No presente modelo constitutivo, se necessário, o amolecimento do material pode ser considerado quando o concreto atinge o valor máximo de  $f_c$ , assim o patamar de escoamento pode ser em parte substituído por uma reta descendente até o valor de deformação última  $\varepsilon_u = 0,01$ , conforme ilustrado na Figura 4.

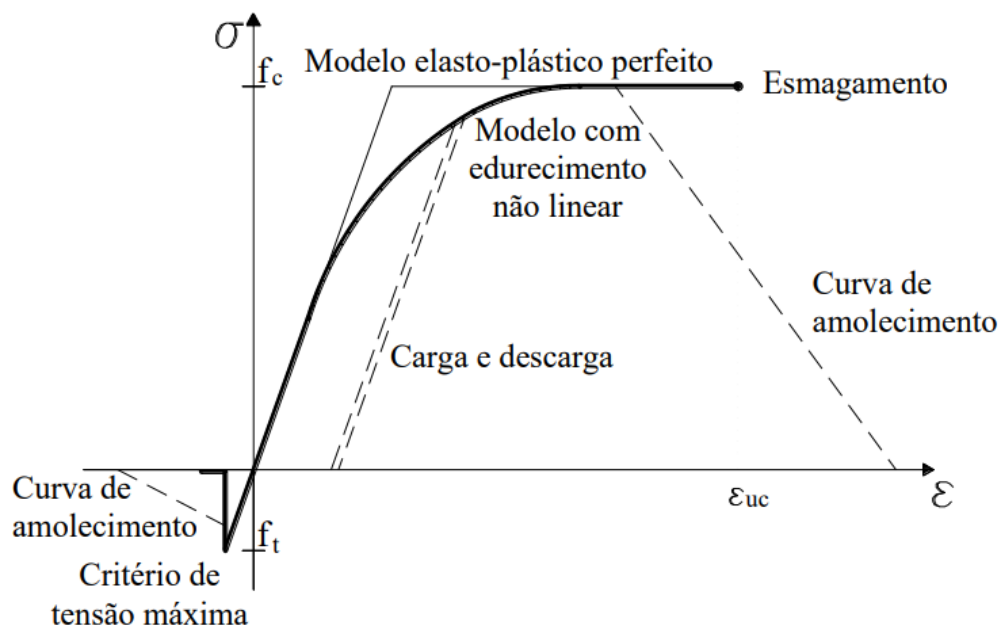


Figura 4 - Representação unidimensional do diagrama tensão-deformação (TAMAYO, 2011)

## 2.2 CONCRETO EM TRAÇÃO

Para a consideração do concreto fissurado foi aplicado o conceito de fissuração distribuída. Neste caso, a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissuração é atualizada, sem a necessidade de alteração da malha de elementos finitos. No momento em que a tensão principal máxima, atuante na direção local  $n$ , torna-se maior que a tensão de fratura do concreto, ocorre a formação de uma fissura no plano  $tz'$  (onde  $t$  é a direção perpendicular à direção  $n$  e  $z'$  é vetor na direção do produto vetorial destas duas direções) na direção perpendicular à referida tensão principal.

A formação de uma segunda fissura perpendicular à primeira fissura é permitida sempre que se exceda a resistência à tração. Portanto, um máximo de duas fissuras perpendiculares entre si são permitidas em cada ponto de integração. Após a fissuração do material se considera que o concreto se comporta como um material ortótropo segundo as direções das fissuras.

As relações constitutivas formuladas para o concreto fissurado são estabelecidas no referencial local  $n, t, z'$  definido a partir do ângulo  $\alpha_{cr}$ , que define a orientação das fissuras em relação ao sistema cartesiano global (Figura 5). Estas relações são expressas em termos de tensões e deformações totais e são apresentadas pela Equação (2.4), sendo que o módulo de elasticidade,  $E$  e  $G$ , tomam valores variáveis de acordo com a configuração de fissuração instalada, onde sobrescritos se referem às direções  $n, t$  e  $z'$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \tau_{nz'} \\ \tau_{tz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_{tn} & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{nz'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{tz'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{nz'} \\ \gamma_{tz'} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

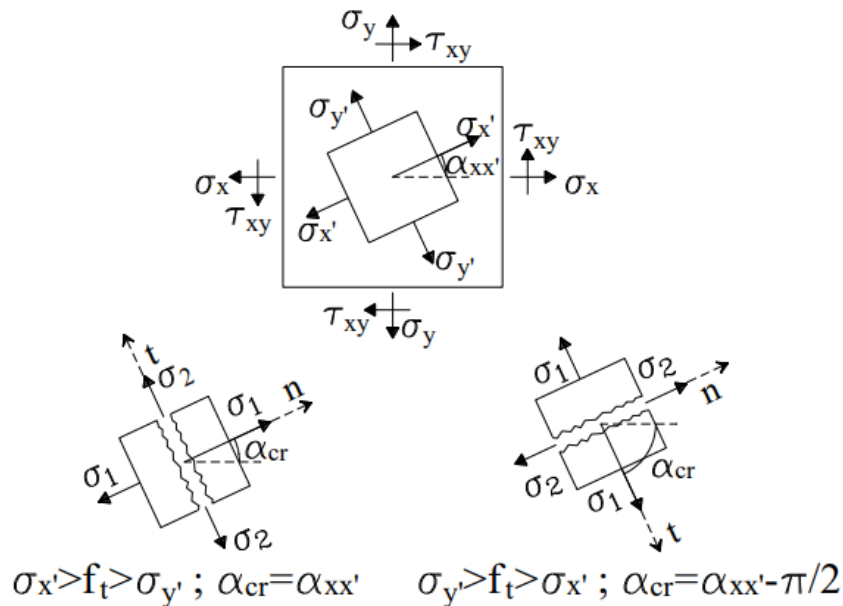


Figura 5 - Definição do referencial da fissura

No caso da presença de uma fissura aberta no plano  $tz'$ ,  $E_{nn} = E_{nt} = E_{tn} = 0$ ,  $E_{tt} = E$ ,  $G_{nz'} = G_{nt} = \beta_n G$  e  $G_{tz'} = 5/6G$ , onde  $\beta_n$  é coeficiente de retenção ao corte. O presente modelo considera assim a degradação da rigidez ao corte com a extensão da abertura da fissura.

Além disso, o concreto entre fissuras ainda permanece intacto e é capaz de garantir rigidez ao sistema, portanto o fenômeno de enrijecimento de tensão chamado na literatura inglesa de *tension stiffening* é considerado mediante a curva bilinear triangular em tração mostrada na Figura 4. O amolecimento em tração para concreto simples é, também, baseado neste diagrama. Admitem-se as diferentes configurações de fissuração ilustradas na Figura 6.

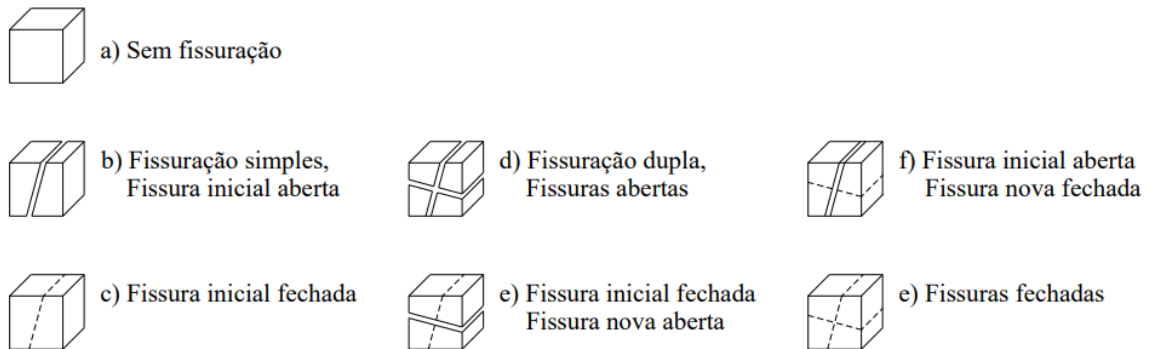


Figura 6 - Configurações admitidas para o concreto fissurado

## 2.3 COMPORTAMENTO VISCOELASTICO DO CONCRETO

Para a consideração da fluência no concreto adota-se a teoria da solidificação, apresentada por Bazant e Prasannan (1989). Essa teoria fundamenta que o processo de envelhecimento se deve, em grande parte, ao incremento de volume da pasta de cimento solidificada por unidade de volume de concreto, que ocupa poros originalmente ocupados pela água e por uma parte de cimento dissolvido (DIAS, 2013). A teoria da solidificação é aplicada ao concreto através do aumento de uma fração de volume do material solidificado, que é tratado como um material viscoelástico sem envelhecimento descrito por uma cadeia Kelvin com parâmetros independentes da idade.

Os modelos de fluência e retração implementados no programa VIMIS são devidos a diversos códigos de projeto e trabalhos de pesquisa, entre eles podemos citar: CEB-FIP MC 90, CEBFIP MC 99, FIB MC 2010, GL2000 e ACI 209, B3, todos eles apresentados no relatório do ACI Committe 209 (2008). É importante salientar que como hipótese do modelo se considera que o princípio de superposição ainda é válido para o concreto fissurado. Nos exemplos tratados nesta dissertação efeitos de longa duração serão desconsiderados.

## 2.4 AÇO DA ARMADURA DE REFORÇO

As barras de aço, que constituem o concreto armado da laje, são modeladas com o modelo elastoplástico com endurecimento linear, considerando um diagrama tensão-deformação bilinear ou trilinear, conforme a Figura 7, onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço correspondente ao primeiro trecho linear. Quando a descarga ocorre, a mesma segue a inclinação inicial. O segundo trecho do comportamento apresenta uma inclinação  $E_{s'}$ . Embora seja apresentado um quadrante, o modelo constitutivo é válido tanto para tração quanto para compressão.

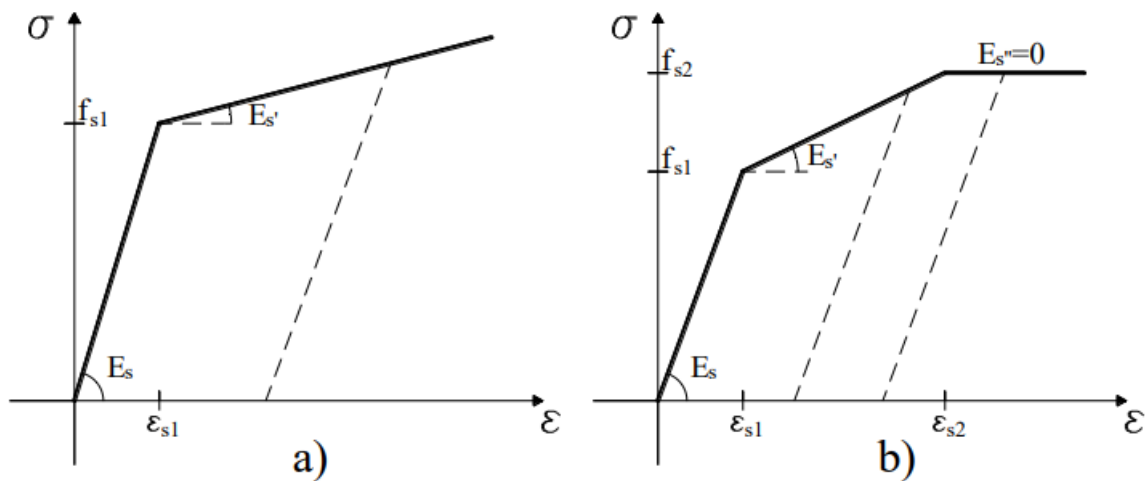


Figura 7 - Diagrama tensão-deformação para o aço a) bilinear b) trilinear (TAMAYO, 2011)

## 2.5 AÇO DO CABO PROTENDIDO

Os cabos de protensão são compostos por cordoalhas, normalmente constituídas por aço de alta resistência, os quais resistem às forças axiais. A protensão é modelada uniaxialmente, na condição da protensão interna ou externa à laje de concreto. No caso do cabo interno, a mesma encontra-se discretizada dentro dos elementos de concreto e a inclusão da sua rigidez na rigidez global da estrutura vai depender se o cabo é aderente ou não aderente ao concreto. Nos elementos em que há ausência de aderência, a armadura de protensão pode mover-se livremente em relação ao concreto, enquanto que na opção de armadura aderente se verifica uma compatibilidade de deformações entre o aço e concreto.

O mesmo modelo elastoplástico com endurecimento que foi utilizado para o reforço passivo é empregado para o aço ativo de protensão interna e externa, sendo considerada apenas a região de tração, pois os cabos de protensão resistem apenas solicitações axiais em tração. Como já foi comentado, o comportamento tensão *versus* deformação adotado é bilinear, de acordo com a Figura 7 (a). A deformação axial, depois de atingir o escoamento, tem duas componentes, uma elástica e outra plástica. As inclinações em cada uma destas parcelas na curva tensão-deformação são diferentes, conforme ilustrado na Figura 7 (a).

## 2.6 AÇO ESTRUTURAL DO PERFIL METÁLICO

O aço estrutural possui um modelo elastoplástico associativo com endurecimento isotrópico linear. Definem-se, com este objetivo, três requerimentos:

- I) Critério de escoamento: definido pela Lei de Huber-von Mises para estado plano de tensões, sendo igual para tração e compressão, baseado nas tensões atuantes no plano estrutural conforme a Equação (2.5) e apresentada pela Figura 8.

$$f(\sigma) = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} = \sigma_0 \quad (2.5)$$

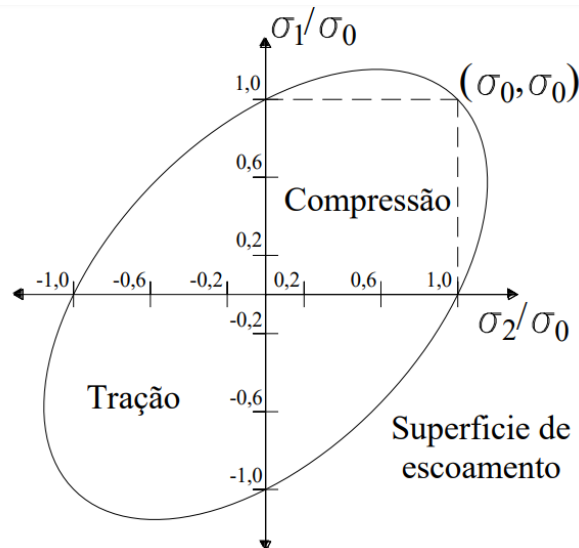


Figura 8 - Critério de escoamento em tração e compressão para o aço

- II) Lei de escoamento: relaciona os incrementos das deformações plásticas com as tensões do material através de uma regra de fluxo plástico, de maneira similar ao concreto.

- III) Lei de endurecimento: define o movimento da superfície de escoamento através da curva bilinear da Figura 7 (a), o qual leva em consideração o módulo de endurecimento do material.

## 2.7 CONECTORES DE CORTE

Para modelar o comportamento dos conectores de cisalhamento, é necessário obter a sua curva força-deslocamento relativo característica, pois esta determina a variação da rigidez do conector conforme se incrementa a força. A Equação (2.6) estabelece, a partir de uma expressão exponencial, o comportamento desta curva, que é dependente de dois parâmetros,  $a$  e  $b$ , que definem a sua forma e tamanho, sendo que  $F_\alpha$  é a força de corte atuante no conector e  $s_\alpha$  é o deslocamento relativo associado à direção  $\alpha$ .

$$F_\alpha = a[1 - e^{-bs_\alpha}] \quad (2.6)$$

É importante salientar que a direção  $\alpha$  é zero quando o cisalhamento no conector segue direção do eixo longitudinal da viga mista. O valor de  $\alpha = 90^\circ$  corresponde ao caso da direção transversal. Os problemas abordados neste trabalho correspondem a situações onde o momento existe apenas um plano predominante em flexão, portanto o escorregamento relativo é predominante na direção  $\alpha = 0^\circ$ . A Figura 9 apresenta a rigidez tangente e a rigidez cortante que podem ser utilizadas para a determinação da rigidez dos conectores de cisalhamento.

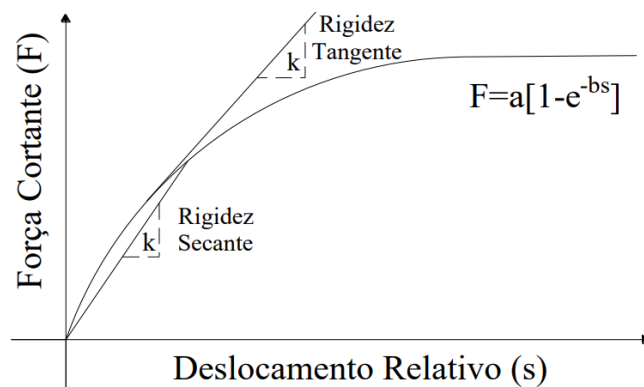


Figura 9 - Representação das rigidezes tangente e secante dos conectores de cisalhamento (DIAS, 2013).

## 2.8 PROGRAMA COMPUTACIONAL VIMIS NA SUA VERSÃO ATUAL

As etapas de pré e pós-processamentos são realizadas por meio do *software* GiD. Este processo ocorre através da programação do *Problem Type*, ou seja, programa-se o formato em que se deseja a entrada e saída de dados do código. Desta forma, é possível realizar a integração do GiD com o solver externo.

A Figura 10 apresenta o fluxograma geral do programa VIMIS para análise de carga última e análise de longa duração. Ao se executar o programa, o módulo “mdata” é o responsável por ler e armazenar os dados dos arquivos de entrada gerados no programa de pré-processamento GiD. Nestes arquivos, são informados o tipo de análise a ser realizada (carga última ou longa duração), o tipo de integração, as coordenadas dos nós, as condições de contorno do problema, as conectividades dos elementos finitos, propriedades dos materiais utilizados e se há utilização de protensão.

Em seguida, o código faz a leitura dos dados de entrada das cargas aplicadas na estrutura em “loads” e, na sequência, zera a maioria dos vetores e matrizes que serão utilizadas na análise numérica na rotina “zero”. A partir deste ponto, o programa possui duas sequências distintas: uma para análise de carga última e uma para análise de longa duração. Uma vez encerradas as análises, escrevem-se todos os resultados obtidos e geram-se os arquivos de pós-processamento para serem lidos no GiD.

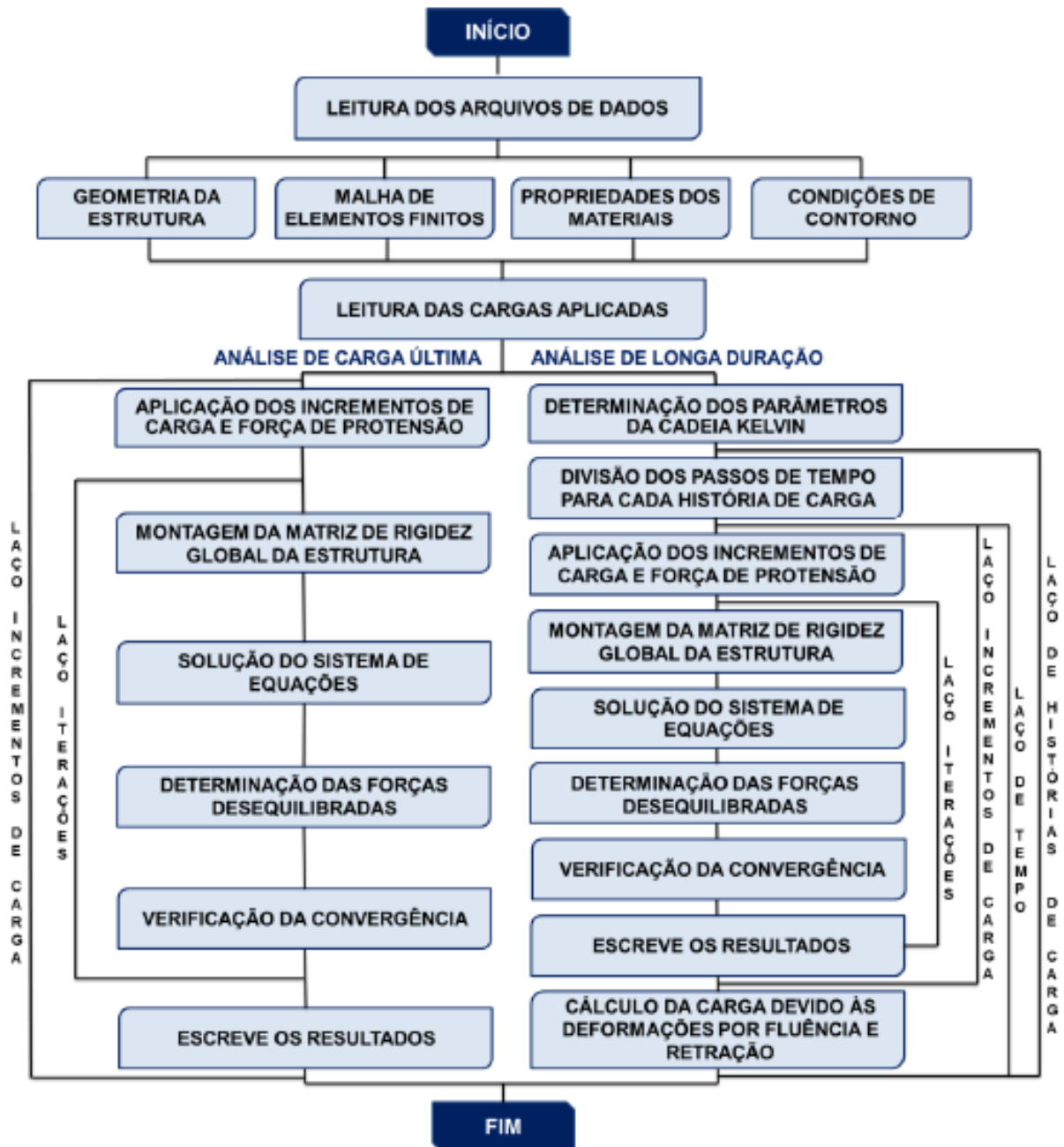


Figura 10 - Fluxograma do programa VIMIS (FRANCO, 2018)

No que diz respeito ao processo de solução utilizado no programa VIMIS, ressalta-se que é utilizada uma formulação incremental iterativa, uma vez que esta é necessária em problemas que envolvem análises não lineares. Ou seja, para avaliar este tipo de problema é necessário dividir o carregamento externo total em pequenos incrementos de carga. Dentro de cada incremento de carga, são realizados ciclos iterativos para obter uma solução convergente correspondente ao estágio de carregamento em consideração. Considera-se convergido quando, aplicando o teorema dos trabalhos virtuais, a diferença entre o trabalho das forças externas e



das tensões internas é inferior a uma dada tolerância. O procedimento adotado para solução é o Método de *Newton Raphson*, com controle de forças. No processo da análise não linear geométrica, a matriz de rigidez é avaliada em cada iteração de cada incremento.

No que concerne a modelagem em elementos finitos do programa VIMIS, apresenta-se na Tabela 1 o elemento finito que modela cada elemento estrutural, o mesmo é ilustrado na Figura 11.

Tabela 1 - Elementos finitos adotados

Elemento estrutural	Elemento Finito
Laje de concreto	Casca degenerada de oito nós
Perfil de aço	Casca fina de quatro nós
Conectores de aço	Viga-coluna tridimensional de dois nós
Cabos de protensão interna	Unidimensionais quadráticos de três nós
Cabos de protensão externa	Unidimensionais de dois nós

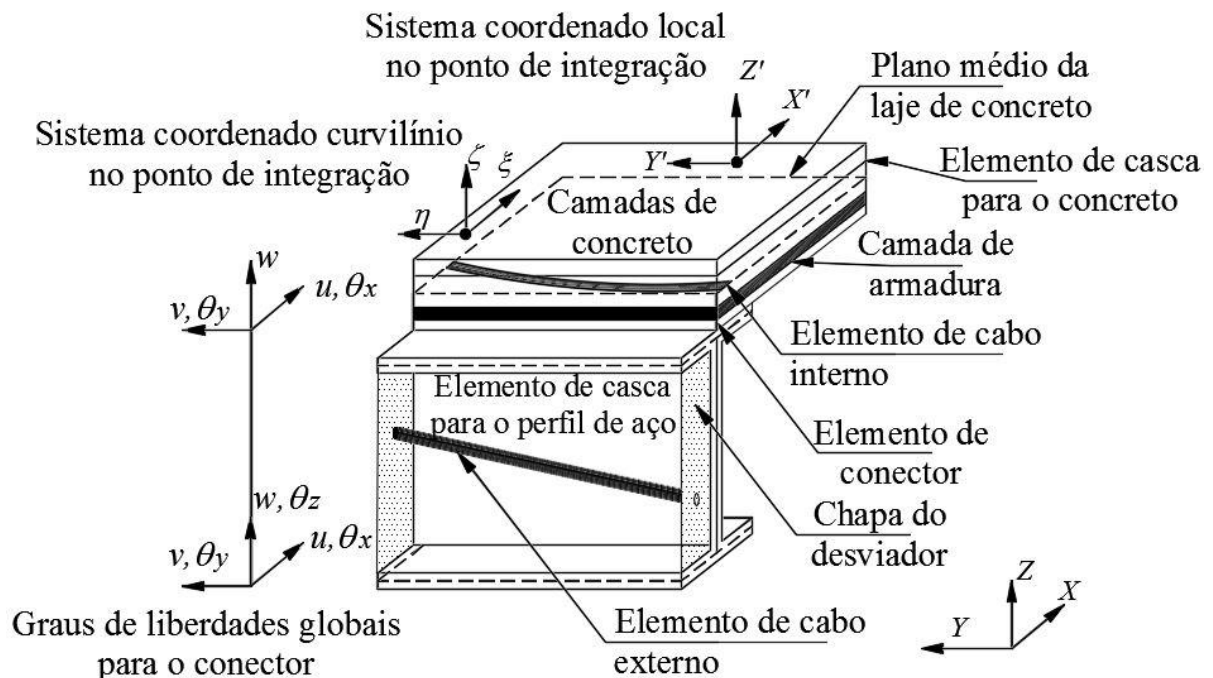


Figura 11 - Esquema modelo numérico (REGINATO, 2017)

### 3. ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

A consideração dos efeitos de uma análise não linear geométrica no projeto de vigas mistas está associada com a necessidade de se empregar modelos numéricos mais representativos do comportamento real da estrutura, uma vez que este fenômeno é importante quando se trata de instabilidade local dos componentes da viga mista e da excentricidade no cabo de protensão, por exemplo. Neste contexto, este capítulo trata, primeiramente, de discutir a teoria em relação a não linearidade geométrica e, posteriormente, apresentar a abordagem Lagrangeana Total aplicada à técnica de elementos finitos.

#### 3.1 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A determinação da carga para a qual uma estrutura perde a estabilidade (carga crítica) é um problema que deve ser considerado em seu projeto. As análises de estabilidade incluem, obrigatoriamente, efeitos geometricamente não lineares, sendo que a não linearidade do material pode estar presente ou não. No caso do material ser elástico linear, trata-se de uma análise de estabilidade elástica, enquanto que se o material for não linear, trata-se de uma análise de estabilidade em regime elastoplástico. (CAMOTIM; REIS, 2001).

A instabilidade estrutural, como a flambagem, por exemplo, não pode ser identificada quando é realizada uma análise linear, uma vez que a natureza da mesma é, de modo intrínseco, geometricamente não linear. De acordo com Camotim e Reis (2001), qualquer análise de estabilidade de uma estrutura envolve o estabelecimento das equações de equilíbrio na sua configuração deformada e consideração de relações cinemáticas não lineares.

Sendo assim, pode-se afirmar que uma análise não linear geométrica é caracterizada pela necessidade de considerar a influência das mudanças na geometria de uma estrutura durante o processo de carregamento na sua capacidade de suportar cargas. Neste tipo de análise, os deslocamentos não são desprezíveis na definição da carga última. Por outro lado, em uma análise geométrica linear, as deformações produzidas pelas cargas são pequenas, e desta forma, essas mudanças são negligenciáveis no cálculo da carga última.

Em outras palavras, as não linearidades geométricas em uma estrutura se referem à mudança na geometria desta, à medida que a mesma se deforma. Para exemplificar este conceito, considera-se uma barra submetida a uma força vertical de compressão de valor  $P$ , que atua com uma excentricidade  $e$  em relação ao seu eixo (Figura 12). A resposta é uma trajetória de equilíbrio não linear, o que é resultado da interação que existe entre os valores de deslocamentos e momentos fletores que atuam no pilar.

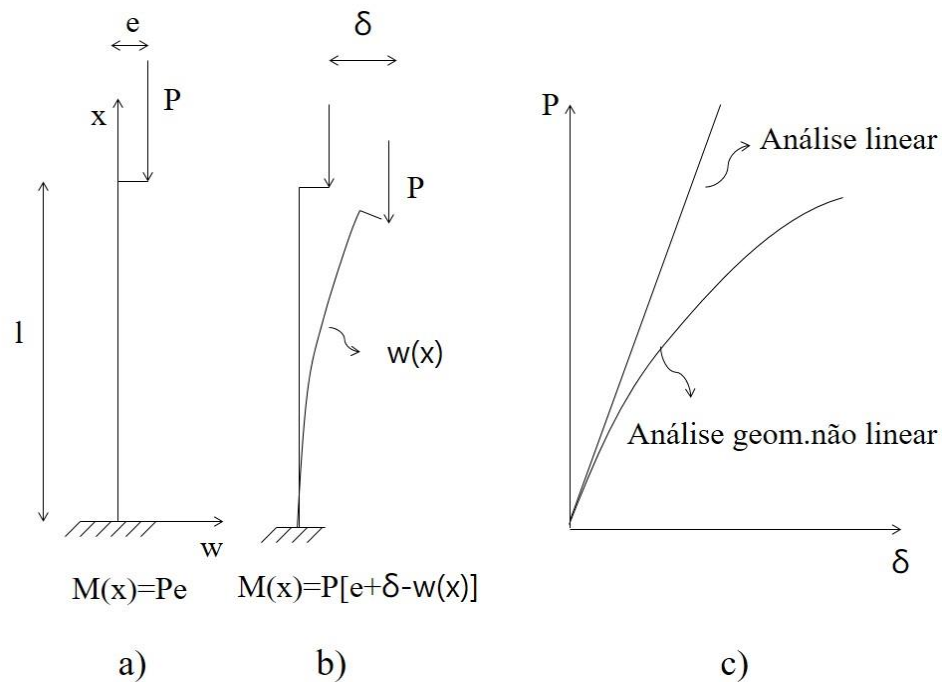


Figura 12 - Comportamento de um pilar comprimido excêntrica: a) configuração indeformada, b) configuração deformada, c) trajetória de equilíbrio (CAMOTIM; REIS, 2001)

O mesmo ocorre em estruturas bidimensionais, Wrobel (1977) cita que em trabalhos clássicos sobre o assunto, adotou-se a teoria da instabilidade linear para avaliar a carga crítica de certos tipos de estruturas laminares. Entretanto, experiências mostraram que as estruturas reais alcançavam o colapso, normalmente, com cargas de intensidade menores do que as previstas pela teoria linear, devido à presença de imperfeições iniciais e de não linearidade geométrica.

De acordo com o mesmo autor, a consideração de não linearidade geométrica é um fator importante na análise de estruturas laminares, pois a resposta não linear de uma estrutura pode ser bastante diferente da linear quando as deflexões que a estrutura sofre são finitas, ao invés de infinitesimais (como consideradas pela teoria linear).

Ao se tratar de não linearidades geométricas, é necessária uma análise incremental, ou seja, a cada incremento de tempo ou carga a condição de equilíbrio deve ser novamente satisfeita. Sendo assim, o problema básico da análise não linear é encontrar o estado de equilíbrio de um corpo submetido a um determinado incremento de carregamento. Para esta análise incremental, considera-se que a solução para um tempo discreto  $t$  é conhecida e que a solução para o tempo discreto  $t + \Delta t$  é requerida.

Para ilustrar este conceito, considera-se o movimento de um corpo em um sistema de coordenadas cartesianas como mostrado na Figura 13, onde o objetivo é avaliar as posições de equilíbrio do corpo nos instantes de tempo  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ , sendo  $\Delta t$  o passo de tempo. Para isso, supõe-se que a solução tenha sido resolvida para todos os intervalos de tempo de  $0$  ao  $t$  e que a solução para o tempo  $t + \Delta t$  é desconhecida (BATHE *et al.*, 1974).

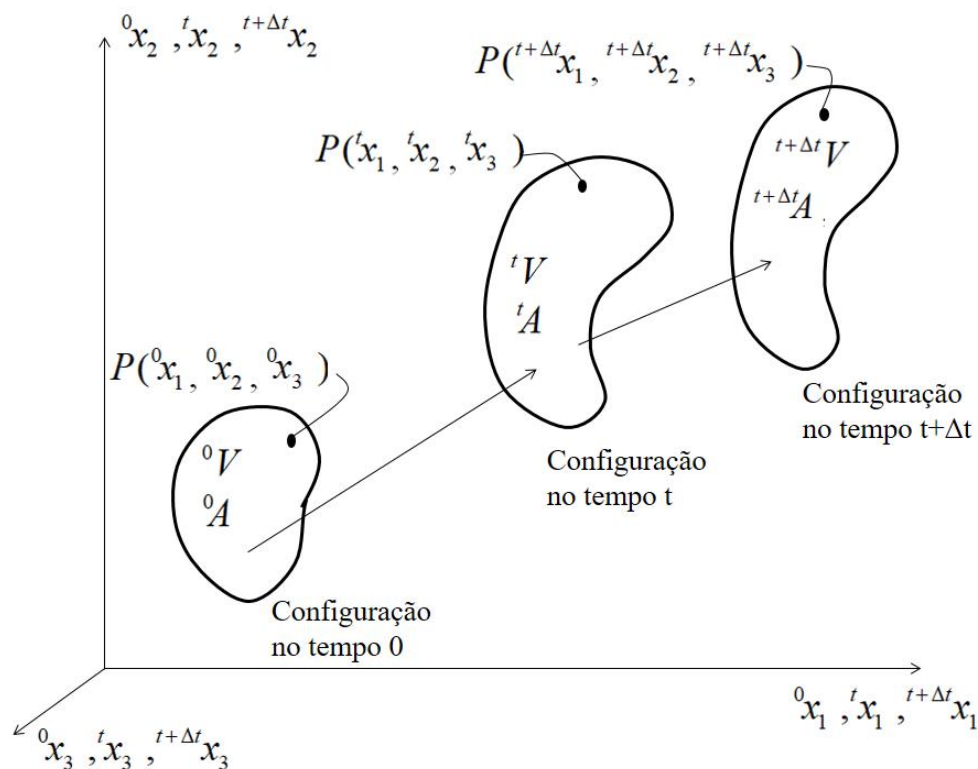


Figura 13– Deslocamento de um corpo em um sistema de referência cartesiano (BATHE *et al.*, 1974)

As coordenadas que descrevem a configuração de uma partícula do corpo no tempo  $0$  são  ${}^0x_1, {}^0x_2$  e  ${}^0x_3$ , e no tempo  $t$  são  ${}^t'x_1, {}^t'x_2$  e  ${}^t'x_3$ , onde os sobrescritos na esquerda referem-se aos tempos associados com as diferentes configurações do corpo, enquanto os subscritos na direita representam as direções segundo os eixos do sistema cartesiano. Os deslocamentos têm notação

similar e as coordenadas nos instantes de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$  são definidas pelas seguintes expressões:

$$\left. \begin{aligned} {}^t x_i &= {}^0 x_i + {}^t u_i \\ {}^{t+\Delta t} x_i &= {}^0 x_i + {}^{t+\Delta t} u_i \end{aligned} \right\} i=1,2,3 \quad (3.1)$$

Entretanto, o incremento de deslocamento no intervalo de tempo  $t$  para  $t+\Delta t$  é dado por:

$$u_i = {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i ; i=1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Como a configuração do corpo no tempo  $t + \Delta t$  não é conhecida, as forças aplicadas, campos de tensões e deformações são referidas a uma configuração de equilíbrio conhecida. Na prática, a escolha consiste essencialmente entre duas formulações diferentes: Lagrangeana Total e Lagrangeana Atualizada.

No referencial Lagrangeano Total, todas as variáveis estáticas e cinemáticas no tempo  $t + \Delta t$  são referidas à configuração indeformada da estrutura (tempo 0). Por outro lado, no referencial Lagrangeano Atualizado, todas as variáveis são referidas à última configuração de equilíbrio da estrutura (tempo  $t$ ). Neste caso, a geometria da estrutura é sucessivamente atualizada durante o processo incremental, através da soma do incremento de deslocamento e das coordenadas atuais.

Uma vez que diferentes referenciais podem ser usados para expressar o tensor de tensões e deformações, diferentes relações energeticamente compatíveis são utilizadas em cada uma das formulações. Na abordagem Lagrangeana Total, se utiliza o tensor de deformações de Green-Lagrange conjuntamente com o 2º tensor de tensões de Piola Kirchhoff. Já na abordagem Lagrangeana Atualizada, é usualmente utilizado o tensor de deformação de Almansi, conjuntamente com o tensor de tensões de Cauchy (BATHE *et al.*, 1974).

A tensão de Cauchy tem o significado usual de tensão, isto é, força por unidade de área na configuração deformada atual, enquanto que o significado físico do 2º tensor de tensões de Piola Kirchoff é perdido se mudanças significativas no volume original ocorrem (problema com grandes deformações). Apesar das diferenças entre as duas formulações, ressalta-se que ambas fornecem o mesmo resultado numérico sempre que se levem em consideração as correspondentes transformações na matriz constitutiva do material. A escolha de usar uma ou

outra solução depende da eficiência numérica das mesmas, que por sua vez, depende do elemento finito empregado e a lei constitutiva do material.

Segundo Figueiras (1983), a abordagem Lagrangeana Total parece ser a mais atrativa computacionalmente, porque apresenta vantagens para os elementos de casca utilizados na modelagem da laje de concreto. Por exemplo, uma das vantagens é que os gastos computacionais na transformação entre sistema local e global são utilizados apenas uma vez, pois a geometria não precisa ser atualizada. Também, a matriz de transformação deformação-deslocamento chamada frequentemente de **B** é, essencialmente, calculada uma vez durante o processo não linear e depois apenas a parte não linear dela é atualizada, conforme será apresentado no item a seguir. Uma vantagem adicional do 2º tensor de tensões de Piola Kirchhoff reside na sua independência relativamente ao sistema de eixos de referência (Princípio da objetividade material).

Sendo assim, a abordagem Lagrangeana Total é utilizada neste trabalho conjuntamente com a consideração de grandes deslocamentos e moderadas rotações, porém com pequenas deformações. Desta forma, na formulação apresentada a seguir considera-se o tensor de tensões de engenharia igual ao 2º tensor de tensões de Piola Kirchhoff, em função da linearização que é realizada na equação de equilíbrio dos trabalhos virtuais. Essa aproximação é válida para pequenas deformações, conforme pode ser visto no gráfico mostrado na Figura 14, onde todas as medidas de deformação coincidem bem até aproximadamente  $\pm 10\%$ . Portanto, tomando-se como referência a deformação máxima de um aço ASTM A572, a qual é da ordem de 11%, as deformações em problemas usuais de vigas mistas, mesmo em estado limite último, devem apresentar pequenas deformações.

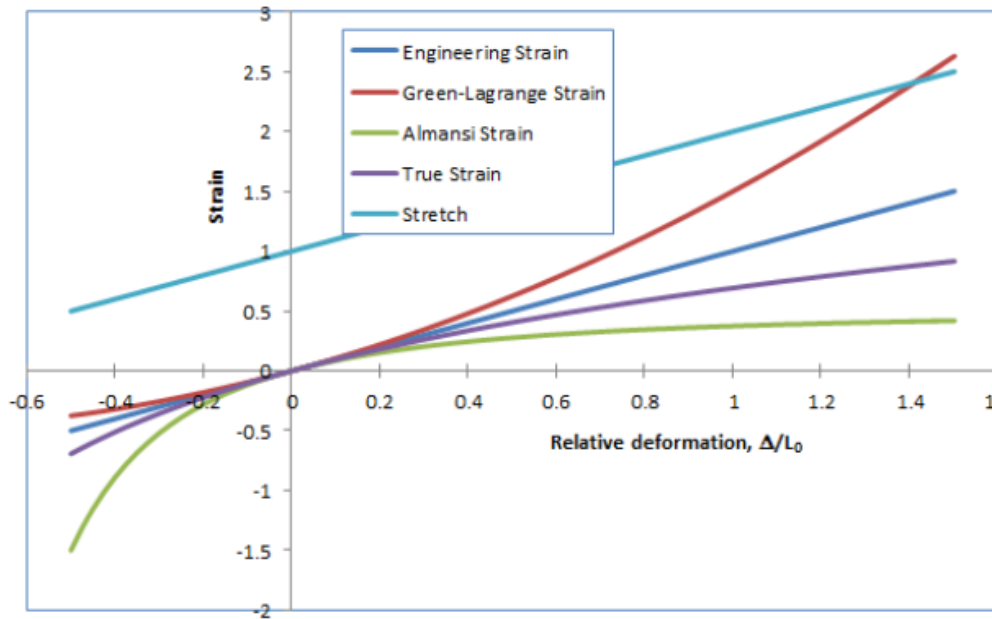


Figura 14 - Comparação entre diferentes medidas de deformação (Tutorial *software* COMSOL MULTIPHYSICS, 2018)

### 3.2 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

A análise de sistemas estruturais está primeiramente preocupada com a determinação de três campos internos: deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ), deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) e tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ). Os dois últimos estão relacionados entre si mediante o tensor constitutivo do material expresso através da matriz constitutiva ( $\mathbf{D}$ ). O campo de deformação é relacionado com o deslocamento nodal do elemento finito atual através da matriz de transformação deformação-deslocamento ( $\mathbf{B}$ ). Um problema não linear precisa ser resolvido se uma ou mais relações são não lineares. Aplicando-se o procedimento usual do princípio dos trabalhos virtuais para obter a forma fraca das equações de equilíbrio e aplicando a discretização espacial segundo as funções de interpolação dos elementos finitos adotados, chega-se nas expressões seguintes.

Para uma análise linear, tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças externas e  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do elemento dada por:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3.4)$$

A solução direta da Equação (3.3), considerando um processo de montagem elemento a elemento, não é possível em situações não lineares onde a matriz de rigidez depende do deslocamento ( $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{u})$ ), portanto esta não pode ser exatamente calculada antes da determinação desta variável. Sendo assim, o princípio básico em um problema não linear é encontrar um estado de equilíbrio do sistema estrutural correspondente às forças externas  $\mathbf{f}$  e internas  $\mathbf{p}$ . Essa equação de equilíbrio pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\mathbf{f} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

onde  $\mathbf{p}$  representa o vetor de forças internas equivalentes ao nível de tensão instalada no elemento, e que vem expressa por:

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.6)$$

A matriz deformação-deslocamento  $\mathbf{B}$  de um elemento finito se dá em função do campo atual de deslocamento e deve ser atualizada durante o processo não linear. Isto é devido a que o tensor de deformação pode ser separado em uma parcela linear e outra não linear, e, conseqüentemente, existiria a contribuição de duas matrizes como segue:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L \quad (3.7)$$

O subscrito “0” refere-se à parte linear, que corresponde à matriz usualmente utilizada na análise de pequenos deslocamentos ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ ). O subscrito “L” refere-se à parte não linear, sendo que a letra  $L$  introduz o significado na literatura inglesa de *large displacements* (grandes deslocamentos). Esta matriz depende dos deslocamentos atuais  $\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_L(\mathbf{u})$ .

Tomando as variações da Equação 3.6 com respeito à variação de deslocamento, tem-se:

$$d\mathbf{p} = \int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV + \int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K} d\mathbf{u} \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez tangente da configuração atual. Destaca-se que:



$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}d\mathbf{u} \quad (3.9)$$

Uma vez que a  $\mathbf{B}_0$  não depende dos deslocamentos, a variação de  $\mathbf{B}$  é dada por:

$$d\mathbf{B}^T = d\mathbf{B}_L^T \quad (3.10)$$

Assumindo que:

$$\int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_\sigma d\mathbf{u} \quad (3.11)$$

A matriz de rigidez tangente pode ser escrita como:

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_\sigma \quad (3.12)$$

onde  $\bar{\mathbf{K}}$  é usualmente definida de acordo com a Equação (3.13), e  $\mathbf{K}_\sigma$  é conhecida como matriz de rigidez geométrica, a qual será posteriormente definida.

$$\bar{\mathbf{K}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3.13)$$

Para iniciar o processo de análise não linear, apresenta-se primeiramente o tensor de deformação de Green Lagrange, o qual é expresso em termos de derivadas dos deslocamentos na Equação (3.14) seguindo a notação de Voigt.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

O tensor de deformações pode ser, como mencionado anteriormente, escrito em uma parte linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ ) e outra não linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ), em termos dos deslocamentos globais do corpo, conforme mostrado na Equação (3.15).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_L, \text{ sendo } \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \boldsymbol{\varepsilon}_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

A sua vez, as derivadas dos deslocamentos segundo as coordenadas globais são escritas em função de derivadas referidas ao sistema curvilíneo da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde  $J$  é a matriz jacobiana de transformação, e  $J^{-1}$  é a sua inversa, as quais são definidas pela Equação (3.17).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Quanto à parte não linear do tensor de deformações, é possível expressá-lo através de uma multiplicação de matrizes conforme a Equação (3.18). Estas matrizes serão,

posteriormente, particularizadas para cada elemento finito nos próximos capítulos. A separação acontece de forma a desmembrar a parcela que será atualizada durante o processo de solução do problema ( $\mathbf{S}$ ) daquela que será calculada apenas uma vez ( $\mathbf{G}$ ).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \mathbf{S} \mathbf{R} \quad , \quad \text{onde } \mathbf{R} = \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (3.18)$$

Para definir a  $\mathbf{B}_L$ , deriva-se a deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}_L$  da seguinte maneira:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} d\mathbf{S} \mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{S} d\mathbf{R} = \mathbf{S} d\mathbf{R} = \mathbf{S} \mathbf{G} d\mathbf{u} \quad (3.19)$$

Sabendo que  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}$ , logo, por definição, tem-se:

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{S} \mathbf{G} \quad (3.20)$$

A matriz  $\mathbf{B}_L$  tem número de linhas e colunas variáveis de acordo com as características do elemento finito. No código implementado, as matrizes  $\mathbf{B}_0$  e  $\mathbf{G}$  são calculadas e armazenadas no início do processo, enquanto que, a matriz  $\mathbf{B}$  é atualizada somando a parcela constante  $\mathbf{B}_0$  e o valor corrente de  $\mathbf{B}_L$ , a qual é obtida a partir dos deslocamentos atuais e da expressão da matriz  $\mathbf{S}$ .

Agora que a matriz de deformação-deslocamento para grandes deslocamentos é conhecida, pode-se definir a matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_\sigma$ , mostrada anteriormente na Equação (3.11) e Equação (3.12) a partir de sua derivada. Como apenas a matriz  $\mathbf{S}$  está variando em relação aos deslocamentos, tem-se que:

$$\mathbf{K}_\sigma d\mathbf{u} = \int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{G}^T d\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.21)$$

onde  $d\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}$  pode ser expressa como mostra a Equação (3.22), na qual foram rearranjados os termos da equação, resultando agora em uma matriz de tensões  $[\boldsymbol{\sigma}]$ . A fim de exemplificar as operações matemáticas realizadas, o próximo capítulo mostra detalhadamente o processo para o elemento finito de casca espessa.

$$d\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{G} d\mathbf{u} \quad (3.22)$$

Substituindo a Equação (3.22) em (3.21), a matriz de rigidez geométrica passa a ser definida como:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^T [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{G} dV \quad (3.23)$$

Agora, substituindo a matriz de rigidez geométrica na Equação (3.12), obtém-se a expressão final para a rigidez do elemento:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV + \int_V \mathbf{G}^T [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{G} dV = \int_V (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L)^T \mathbf{D} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) dV + \int_V \mathbf{G}^T [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{G} dV \quad (3.24)$$

O procedimento apresentado aqui é feito ao nível de elemento, posteriormente é realizado o processo de montagem clássica ao nível da estrutura através da contribuição de todos os elementos finitos presentes na malha.

## 4 ELEMENTO FINITO PARA MODELAR LAJE

Este capítulo aborda os aspectos do elemento finito de casca degenerada de oito nós utilizado para modelar a laje de concreto. Apresentam-se suas características, como número de graus de liberdade por nó, matriz de deformação-deslocamento e matriz de rigidez, para a abordagem com grandes deslocamentos e moderadas rotações, através da formulação Lagrangeana Total. Por fim, são apresentados exemplos com o objetivo de validar a implementação no código.

### 4.1 ELEMENTO FINITO DE CASCA ESPESSA

Para modelar a laje de concreto emprega-se um elemento quadrático de casca degenerada de oito nós. Cada nó apresenta 5 graus de liberdade, correspondentes a três deslocamentos e a duas rotações. Este elemento é resultado do processo degenerativo do elemento sólido tridimensional do tipo quadrático, neste processo é necessário assumir que (HINTON; OWEN, 1984):

- a) Os vetores normais à superfície permanecem normais após a deformação;
- b) A energia de deformação correspondente à componente da tensão perpendicular à superfície média do elemento finito é nula.

A definição independente de graus de liberdade de deslocamento e rotações permite considerar componentes de tensão de corte fora do plano, pois as rotações estão desacopladas da inclinação da superfície média. Esta formulação equivale a usar a teoria geral de cascas e se reduz à hipótese de Reissner e Mindlin aplicadas em placas (FIGUEIRAS, 1983). A Figura 15 mostra o elemento de casca em consideração, bem como os sistemas coordenados utilizados na sua definição, entre eles tem-se: Sistema de Coordenadas Global, Sistema Coordenado Nodal, Sistema Curvilíneo e Sistema Local, os quais são definidos na sequência.

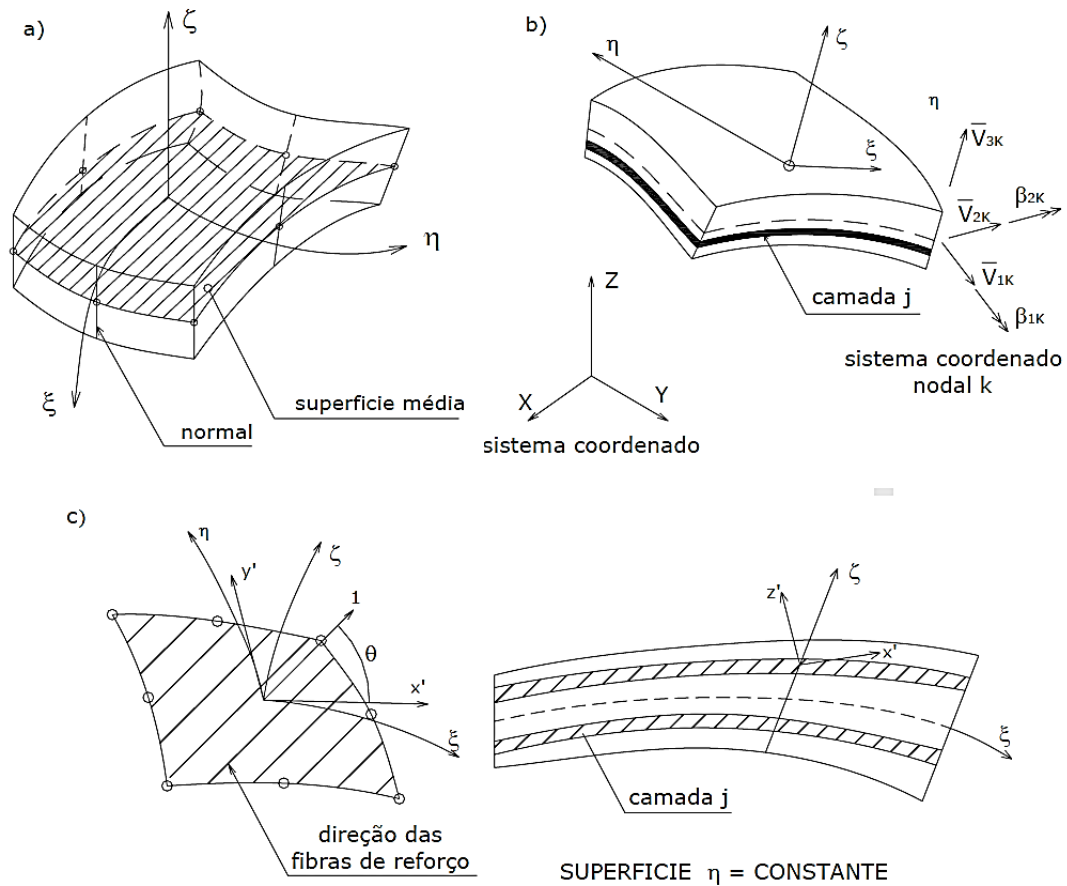


Figura 15 - a) Elemento finito de casca degenerado; b) Sistema de coordenadas global e nodal; c) Sistema de coordenadas local e curvilíneo (adaptado de TAMAYO, 2011)

A geometria da estrutura no espaço é definida através de um Sistema Global Cartesiano escolhido arbitrariamente. As coordenadas e deslocamentos nodais, matriz de rigidez global e vetor de forças são referenciados através deste sistema. A seguinte notação é utilizada:

$$x_i \ (i=1,3) \ e \ x_1 = x, \ x_2 = y, \ x_3 = z \quad (4.1)$$

$$u_i \ (i=1,3) \ e \ u_1 = u, \ u_2 = v, \ u_3 = w \quad (4.2)$$

Já o Sistema de Coordenadas Nodal é definido em cada nó do elemento finito em questão, com origem na superfície do plano médio de referência, como se mostra a Figura 15(a). O sistema nodal é definido pelos vetores unitários  $\mathbf{V}_{ik}$ , onde o subscrito  $i$  apresenta o significado definido na Equação (4.2), e  $k$  é o nó em questão do elemento finito atual. Sendo assim, o vetor  $\mathbf{V}_{3k}$  é obtido conforme a Equação (4.3) a partir das coordenadas nodais da

superfície superior  $x_k^{sup}$  e inferior  $x_k^{inf}$  no nó  $k$ . É importante salientar que no caso em que o plano médio da laje seja horizontal, o vetor  $\mathbf{V}_{3k}$  seguirá a direção vertical  $z$ .

$$\mathbf{V}_{3k} = \frac{\mathbf{x}_k^{sup} - \mathbf{x}_k^{inf}}{|\mathbf{x}_k^{sup} - \mathbf{x}_k^{inf}|}, \quad \mathbf{x}_k = [x_k \quad y_k \quad z_k]^T \quad (4.3)$$

entretanto, o vetor  $\mathbf{V}_{1k}$  é perpendicular ao vetor unitário  $\mathbf{V}_{3k}$  e paralelo ao plano global  $xz$ , dado por:

$$\mathbf{V}_{1k} = \frac{[V_{3k}^z \quad 0 \quad -V_{3k}^x]^T}{|[V_{3k}^z \quad 0 \quad -V_{3k}^x]^T|} \quad (4.4)$$

ou, alternativamente, se o vetor  $\mathbf{V}_{3k}$  está na direção  $y$  ( $V_{3k}^x = V_{3k}^z = 0.0$ ) tem-se:

$$\mathbf{V}_{1k} = \frac{[-V_{3k}^y \quad 0 \quad 0]^T}{|[-V_{3k}^y \quad 0 \quad 0]^T|} \quad (\text{na direção } x) \quad (4.5)$$

onde os sobrescritos estão associados às componentes dos vetores no sistema de coordenadas global. Sendo assim, o vetor  $\mathbf{V}_{2k}$  é perpendicular ao plano definido pelos vetores  $\mathbf{V}_{1k}$  e  $\mathbf{V}_{3k}$ , ou seja, é obtido pela multiplicação vetorial dos mesmos, conforme a Equação (4.6). O vetor  $\mathbf{V}_{3k}$  define a direção normal no nó  $k$ , enquanto  $\mathbf{V}_{1k}$  e  $\mathbf{V}_{2k}$  completam o triedro tornando-se referencias para as rotações (ver Figura 15(b)).

$$\mathbf{V}_{2k} = \mathbf{V}_{3k} \times \mathbf{V}_{1k} \quad (4.6)$$

Seguidamente, se define o Sistema de Coordenadas Curvilíneas, no qual  $\xi$  e  $\eta$  representam as coordenadas curvilíneas no plano médio do elemento e  $\zeta$  é a coordenada linear na direção da espessura, aproximadamente perpendicular ao plano médio de referência (HINTON; OWEN, 1984). Se supõe que  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  tomam valores entre -1 e +1 nas respectivas faces do elemento e relacionam-se com as coordenadas globais através das funções de forma  $N_k$ , as quais são definidas pelas Equações (4.7) e (4.8).

$$N_k = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)(\xi\xi_k + \eta\eta_k - 1), \quad k = 1, 3, 5, 7 \quad (4.7)$$

$$N_k = \frac{\xi_k^2}{2} (1 + \xi_k \xi_k) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_k^2}{2} (1 + \eta_k \eta_k) (1 - \xi^2), \quad k = 2, 4, 6, 8 \quad (4.8)$$

Por fim, define-se o Sistema de Coordenadas Locais  $(x', y', z')$  como um sistema cartesiano nos pontos de integração, onde são calculadas as tensões e deformações como se mostra na Figura 16. A direção  $x'$  pode ser considerada como tangente à direção  $\xi$  no ponto de integração e a direção local  $y'$  é definida como produto vetorial das direções locais  $z'$  e  $x'$ . A direção  $z'$  é perpendicular à superfície atual  $\zeta$ , sendo esta obtida pelo produto vetorial das direções  $\xi$  e  $\eta$ , conforme a Equação (4.9).

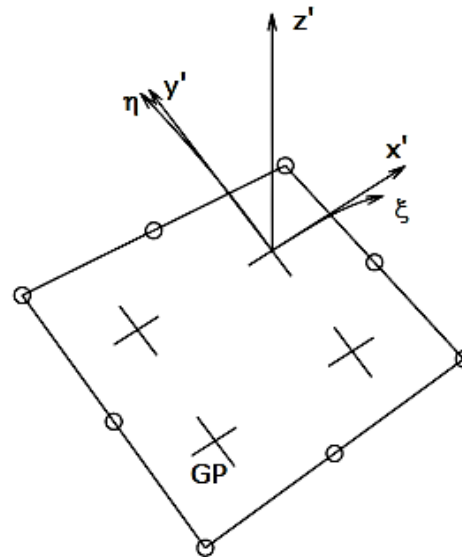


Figura 16 - Sistema de eixos para a definição das tensões e deformações (TAMAYO, 2011)  
GP: Ponto de Gauss

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{z}' \times \mathbf{x}', \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

O sistema de coordenadas locais varia ao longo da espessura do elemento e depende da curvatura da casca e de sua variação da espessura. A matriz de cossenos de direção  $[\theta]$  relaciona a transformação entre o sistema de coordenadas local e global e é definida como:

$$[\theta] = [\bar{\mathbf{x}}' \quad \bar{\mathbf{y}}' \quad \bar{\mathbf{z}}'] \quad (4.10)$$



onde  $\bar{x}'$ ,  $\bar{y}'$  e  $\bar{z}'$  correspondem aos vetores unitários nas direções  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , respectivamente.

Na formulação isoparamétrica, as coordenadas de um ponto dentro do elemento são obtidas aplicando as funções de interpolação conjuntamente com as coordenadas nodais, conforme a Equação (4.11).

$$x_i = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right) x_{ik}^{\text{sup}} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) x_{ik}^{\text{sup}} \quad (4.11)$$

em que  $n$  é o número de nós do elemento (oito no presente caso),  $N_k$  é a função de interpolação e  $i=1,2,3$  se refere às três direções globais. Outras variáveis apresentam o significado descrito anteriormente.

Como já comentado anteriormente, a casca degenerada é caracterizada por ter cinco graus de liberdade por nó: três deslocamentos ( $\delta_{ik}$ ) e duas rotações ( $\beta_{1,2k}$ ) (Figura 17). Os deslocamentos de um ponto sobre a normal é o resultado das duas rotações e são obtidas pela Equação (4.12).

$$\delta_{1k} = h\beta_{2k} \quad , \quad \delta_{2k} = h\beta_{1k} \quad (4.12)$$

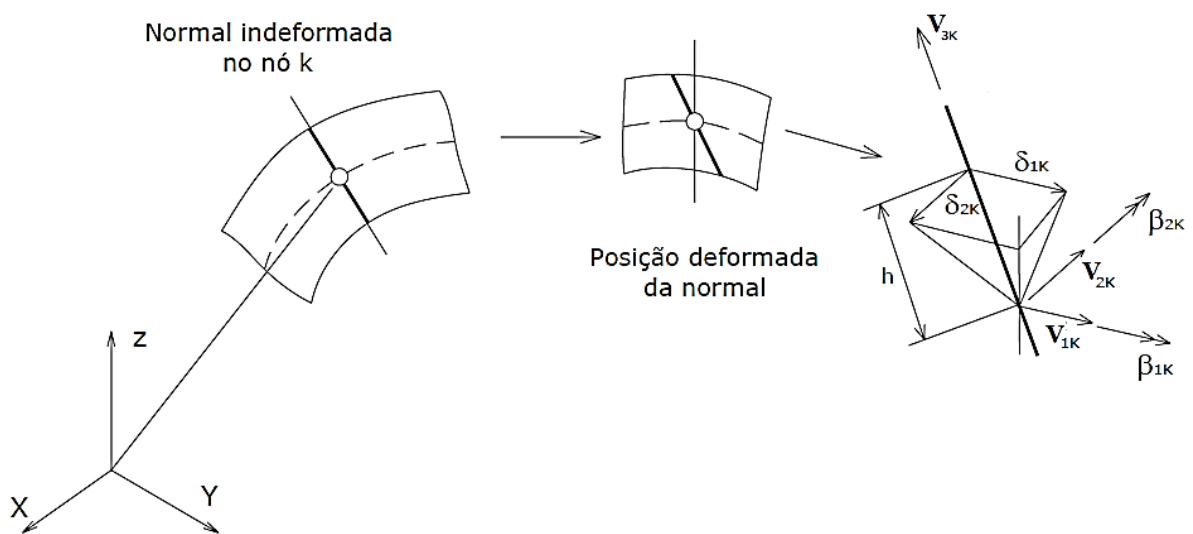


Figura 17- Deslocamento em um ponto da normal no nó k (TAMAYO, 2011)

Nessa expressão  $\delta_{1k}$  é o deslocamento na direção do vetor  $\mathbf{V}_{1k}$  e  $\delta_{2k}$  é o deslocamento na direção  $\mathbf{V}_{2k}$ , sendo  $h$  a espessura do elemento no nó  $k$ . Para obter as componentes dos deslocamentos  $u_i$  aplica-se a Equação (4.13). Destaca-se que estas equações estabelecem uma relação linear e admitem que as rotações são pequenas.

$$(u_i)_{\beta_{2k}} = \delta_{1k}(V_{1k}^i) \quad , \quad (u_i)_{\beta_{1k}} = \delta_{2k}(-V_{2k}^i) \quad (4.13)$$

Desta forma, a contribuição dos deslocamentos globais do nó  $k$  vem dada por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^x & N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^x \\ 0 & N_k & 0 & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^y & N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^y \\ 0 & 0 & N_k & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^z & N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Conforme apresentado no capítulo 3, quando utilizada a abordagem Lagrangeana Total, as deformações são expressas pelo tensor de deformações de Green-Lagrange a partir dos deslocamentos locais, onde a componente  $\varepsilon_z$  é desconsiderada, conforme a Equação (4.15).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} + \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} + \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} + \left( \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \frac{\partial w'}{\partial z'} \right) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Para os problemas estudados neste trabalho, considera-se suficiente considerar as seguintes hipóteses de von Kármán:

- a) A espessura  $h$  é muito menor que o comprimento  $L$  da placa  $h \ll L$ ;

- b) A magnitude da deflexão  $w$  é de mesma ordem da espessura  $|w|=O(h)$ ;
- c) A inclinação é em todo lugar pequena  $|\partial w / \partial x| \ll 1$ ,  $|\partial w / \partial y| \ll 1$  ;
- d) Os deslocamentos tangenciais  $u$  e  $v$  são pequenos. Nas relações de deformação versus deslocamento, apenas os termos não lineares dependentes de  $|\partial w / \partial x|$  e  $|\partial w / \partial y|$  são mantidos, enquanto os outros termos não lineares são negligenciados.
- e) Todas as componentes de deformações são pequenas.

Desta maneira, obtém-se o tensor de deformações simplificado como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Escrevendo o tensor de deformações em duas parcelas, uma linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ ) e outra não linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ ), tem-se a Equação (4.17).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_L, \text{ sendo } \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \boldsymbol{\varepsilon}_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Ambas as parcelas de deformação são descritas através das derivadas locais dos deslocamentos, as quais estão relacionadas às derivadas globais dos deslocamentos mediante a transformação da Equação (4.18).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} [\theta] \quad (4.18)$$

onde  $[\theta]$  já foi definida como a matriz de transformação na Equação (4.10) e rescrita com detalhe na Equação (4.19), sendo  $m_i$  um vetor na direção  $x'$ ,  $n_i$  um vetor na direção  $y'$  e  $o_i$  um vetor na direção  $z'$ .

$$[\theta] = \begin{bmatrix} m_1 & n_1 & o_1 \\ m_2 & n_2 & o_2 \\ m_3 & n_3 & o_3 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Efetuada as multiplicações presentes na Equação (4.18), obtêm-se os termos das derivadas locais explicitamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} &= \left( m_1 \frac{\partial u}{\partial x} + m_2 \frac{\partial u}{\partial y} + m_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) m_1 + \left( m_1 \frac{\partial v}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v}{\partial y} + m_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) m_2 + \left( m_1 \frac{\partial w}{\partial x} + m_2 \frac{\partial w}{\partial y} + m_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) m_3 \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} &= \left( m_1 \frac{\partial u}{\partial x} + m_2 \frac{\partial u}{\partial y} + m_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) n_1 + \left( m_1 \frac{\partial v}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v}{\partial y} + m_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) n_2 + \left( m_1 \frac{\partial w}{\partial x} + m_2 \frac{\partial w}{\partial y} + m_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_3 \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} &= \left( m_1 \frac{\partial u}{\partial x} + m_2 \frac{\partial u}{\partial y} + m_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) o_1 + \left( m_1 \frac{\partial v}{\partial x} + m_2 \frac{\partial v}{\partial y} + m_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) o_2 + \left( m_1 \frac{\partial w}{\partial x} + m_2 \frac{\partial w}{\partial y} + m_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) o_3 \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} &= \left( n_1 \frac{\partial u}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u}{\partial y} + n_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) m_1 + \left( n_1 \frac{\partial v}{\partial x} + n_2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) m_2 + \left( n_1 \frac{\partial w}{\partial x} + n_2 \frac{\partial w}{\partial y} + n_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) m_3 \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} &= \left( n_1 \frac{\partial u}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u}{\partial y} + n_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) n_1 + \left( n_1 \frac{\partial v}{\partial x} + n_2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) n_2 + \left( n_1 \frac{\partial w}{\partial x} + n_2 \frac{\partial w}{\partial y} + n_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_3 \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} &= \left( n_1 \frac{\partial u}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u}{\partial y} + n_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) o_1 + \left( n_1 \frac{\partial v}{\partial x} + n_2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) o_2 + \left( n_1 \frac{\partial w}{\partial x} + n_2 \frac{\partial w}{\partial y} + n_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) o_3 \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} &= \left( o_1 \frac{\partial u}{\partial x} + o_2 \frac{\partial u}{\partial y} + o_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) m_1 + \left( o_1 \frac{\partial v}{\partial x} + o_2 \frac{\partial v}{\partial y} + o_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) m_2 + \left( o_1 \frac{\partial w}{\partial x} + o_2 \frac{\partial w}{\partial y} + o_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) m_3 \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} &= \left( o_1 \frac{\partial u}{\partial x} + o_2 \frac{\partial u}{\partial y} + o_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) n_1 + \left( o_1 \frac{\partial v}{\partial x} + o_2 \frac{\partial v}{\partial y} + o_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) n_2 + \left( o_1 \frac{\partial w}{\partial x} + o_2 \frac{\partial w}{\partial y} + o_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_3 \\ \frac{\partial w'}{\partial z'} &= \left( o_1 \frac{\partial u}{\partial x} + o_2 \frac{\partial u}{\partial y} + o_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) o_1 + \left( o_1 \frac{\partial v}{\partial x} + o_2 \frac{\partial v}{\partial y} + o_3 \frac{\partial v}{\partial z} \right) o_2 + \left( o_1 \frac{\partial w}{\partial x} + o_2 \frac{\partial w}{\partial y} + o_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) o_3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

As derivadas dos deslocamentos no sistema global são escritas conforme a Equação (3.16) a partir de suas derivadas locais e a inversa do Jacobiano de transformação. Por outro lado, as derivadas dos deslocamentos globais  $u$ ,  $v$  e  $w$ , em relação às coordenadas curvilíneas ( $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ ) podem ser definidas pelas Equações (4.21)-(4.29) a partir da Equação (4.14).

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} u_k + \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1k}^x \beta_1 - \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2k}^x \beta_2 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial N_k}{\partial \eta} u_k + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1k}^x \beta_1 - \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2k}^x \beta_2 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = N_k \frac{h}{2} V_{1k}^x \beta_1 - N_k \frac{h}{2} V_{2k}^x \beta_2 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} v_k + \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1k}^y \beta_1 - \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2k}^y \beta_2 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial N_k}{\partial \eta} v_k + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1k}^y \beta_1 - \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2k}^y \beta_2 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = N_k \frac{h}{2} V_{1k}^y \beta_1 - N_k \frac{h}{2} V_{2k}^y \beta_2 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} w_k + \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1k}^z \beta_1 - \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2k}^z \beta_2 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial N_k}{\partial \eta} w_k + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1k}^z \beta_1 - \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2k}^z \beta_2 \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = N_k \frac{h}{2} V_{1k}^z \beta_1 - N_k \frac{h}{2} V_{2k}^z \beta_2 \quad (4.29)$$

Efetuada a substituição das Equações de (4.21)-(4.29) em (3.16), são encontradas as equações que definem as derivadas dos deslocamentos globais. Com o objetivo de não tornar repetitiva a leitura, a Equação (4.30), mostra o cálculo explícito apenas do termo  $\partial u / \partial x$ , sendo os outros termos obtidos de maneira similar.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( \frac{\partial N_k}{\partial \xi} u_k + \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{1k}^x \beta_1 - \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h}{2} V_{2k}^x \beta_2 \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left( \frac{\partial N_k}{\partial \eta} u_k + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{1k}^x \beta_1 - \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h}{2} V_{2k}^x \beta_2 \right) + \\ & + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left( N_k \frac{h}{2} V_{1k}^x \beta_1 - N_k \frac{h}{2} V_{2k}^x \beta_2 \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

De maneira semelhante, utilizando a Equação (4.18) obtêm-se as derivadas dos deslocamentos no sistema local e, partir desses termos, é possível encontrar as componentes do tensor de deformação local  $\boldsymbol{\varepsilon}$  da Equação (4.17). Conforme mencionado no capítulo anterior, a parcela não linear do tensor de deformação pode ser escrita de forma matricial, como segue:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (4.32)$$

A matriz  $\mathbf{G}$  possui duas linhas e número de colunas igual ao número total de variáveis nodais ( $8 \times 5 = 40$ ), onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento. A matriz  $\mathbf{G}$  é definida então pela Equação (4.33).

$$\mathbf{G} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}_k \quad (4.33)$$

na qual  $n$  é o número de nós do elemento e os termos “ $a$ ” são dados por:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= o_1 N_{k,\xi} \alpha^\xi + o_1 N_{k,\eta} \alpha^\eta & a_{21} &= o_1 N_{k,\xi} \beta^\xi + o_1 N_{k,\eta} \beta^\eta \\
a_{12} &= o_2 N_{k,\xi} \alpha^\xi + o_2 N_{k,\eta} \alpha^\eta & a_{22} &= o_2 N_{k,\xi} \beta^\xi + o_2 N_{k,\eta} \beta^\eta \\
a_{13} &= o_3 N_{k,\xi} \alpha^\xi + o_3 N_{k,\eta} \alpha^\eta & a_{23} &= o_3 N_{k,\xi} \beta^\xi + o_3 N_{k,\eta} \beta^\eta \\
a_{14} &= \sum_{i=1}^3 (\alpha^\xi N_{k,\xi} \zeta + \alpha^\eta N_{k,\eta} \zeta + \alpha^\zeta N_k) o_i \frac{h}{2} V_{1k}^l & a_{24} &= \sum_{i=1}^3 (\beta^\xi N_{k,\xi} \zeta + \beta^\eta N_{k,\eta} \zeta + \beta^\zeta N_k) o_i \frac{h}{2} V_{1k}^l \\
a_{15} &= -\sum_{i=1}^3 (\alpha^\xi N_{k,\xi} \zeta + \alpha^\eta N_{k,\eta} \zeta + \alpha^\zeta N_k) o_i \frac{h}{2} V_{2k}^l & a_{25} &= -\sum_{i=1}^3 (\beta^\xi N_{k,\xi} \zeta + \beta^\eta N_{k,\eta} \zeta + \beta^\zeta N_k) o_i \frac{h}{2} V_{2k}^l
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Nas expressões acima  $i=1,2,3$  e  $l=x,y,z$ , variando de forma única, ou seja, quando  $i=1$ ,  $l=x$  e assim sucessivamente. As variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  são definidas pela Equação (4.35), lembrando que as variáveis  $m$  e  $n$  são componentes dos cossenos diretores da matriz de rotação definida na Equação (4.19).

$$\begin{aligned}
\alpha^\xi &= (\xi_{,x} m_1 + \xi_{,y} m_2 + \xi_{,z} m_3) \\
\alpha^\eta &= (\eta_{,x} m_1 + \eta_{,y} m_2 + \eta_{,z} m_3) \\
\alpha^\zeta &= (\zeta_{,x} m_1 + \zeta_{,y} m_2 + \zeta_{,z} m_3) \\
\beta^\xi &= (\xi_{,x} n_1 + \xi_{,y} n_2 + \xi_{,z} n_3) \\
\beta^\eta &= (\eta_{,x} n_1 + \eta_{,y} n_2 + \eta_{,z} n_3) \\
\beta^\zeta &= (\zeta_{,x} n_1 + \zeta_{,y} n_2 + \zeta_{,z} n_3)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Desta forma, tem-se conhecimento das variáveis que determinam a matriz de deformação-deslocamento não linear ( $\mathbf{B}_L = \mathbf{S} \mathbf{G}$ ). Logo, é possível escrever a matriz de rigidez do elemento, bem como a matriz geométrica, escrita na Equação (3.22), em que  $d\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}$  é expressa pela Equação (4.36).

$$d\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} = d \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

A expressão anterior pode ser rescrita como:

$$d\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right) \sigma_{x'} + d\left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right) \tau_{x'y'} \\ d\left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right) \sigma_{y'} + d\left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right) \tau_{x'y'} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Apenas rearranjando os termos da Equação (4.37), tem-se:

$$d\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\left(\frac{\partial w'}{\partial x'}\right) \\ d\left(\frac{\partial w'}{\partial y'}\right) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

O segundo termo de multiplicação da Equação (4.38) é igual à Equação (4.32), logo pode-se escrever:

$$d\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}] \mathbf{G} d\mathbf{u} \quad (4.39)$$

Lembrando que  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões em notação de Voigt e  $[\boldsymbol{\sigma}]$  é uma matriz organizada de forma a ser compatível com as dimensões necessárias, apresentada por:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Considerando a tensão na direção  $z'$  como nula, as cinco componentes de tensão no sistema local são dadas pela Equação (4.41), conjuntamente com a relação constitutiva do material, onde  $\mathbf{D}$  foi estabelecida no Capítulo 1 como o tensor constitutivo do material.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.41)$$



## 4.2 APLICAÇÃO NUMÉRICA EM CONCRETO ARMADO

A formulação, anteriormente apresentada, foi implementada no código computacional VIMIS. Os exemplos de aplicação a seguir visam verificar o código modificado, bem como demonstrar a diferença de resultados entre análise linear e não linear geométrica, evidenciando a importância da última. Em todos os exemplos a não linearidade do material é considerada.

### 4.2.1 Placa de Jofriet e Mcneice (1971)

Uma placa apoiada nos cantos foi ensaiada experimentalmente por Jofriet e Mcneice (1971), sendo usual considerar esses resultados para verificar modelos numéricos de concreto. A placa estudada é quadrada com dimensão de 91,44 cm e 4,445 cm de espessura, de acordo com a geometria mostrada na Figura 18. Nesta figura, também são apresentadas as taxas de armadura em cada direção ( $\mu_x$  e  $\mu_y$ ) e a malha de elementos finitos utilizada para modelar um quarto da placa, devido à sua simetria nos dois eixos.

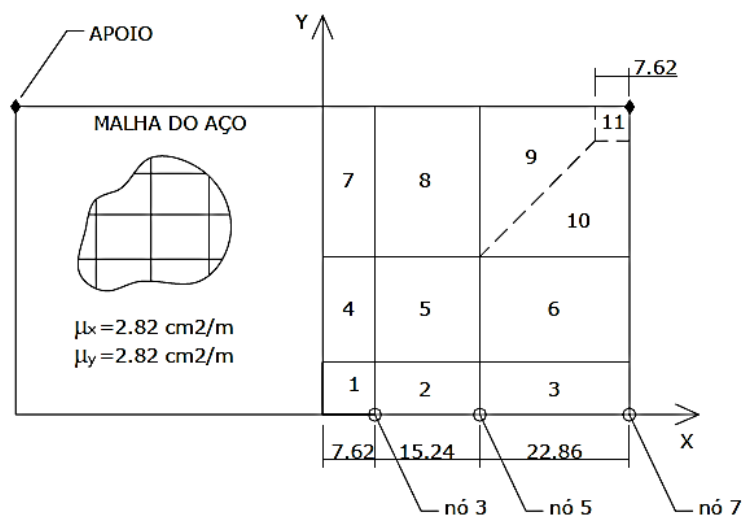


Figura 18 - Placa ensaiada por Jofriet e Mcneice (1971) (unidades: cm)

Duas condições de contorno são utilizadas neste exemplo para os nós dos cantos. Primeiramente, a placa é analisada com apoios horizontalmente livres e, finalmente, com apoios horizontalmente fixos. A carga é aplicada no nó central e os resultados de deslocamento do nó 3 são comparados com os valores experimentais. Posteriormente, os resultados numéricos para cada condição de apoio são avaliados, comparando as análises linear e não linear geométrica. As propriedades dos materiais do modelo estão apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 - Propriedade dos materiais (TAMAYO, 2011)

Propriedades do Concreto (kN, cm)		Propriedades do aço (kN, cm)	
Mód.de Elasticidade	2860	Mód.de Elasticidade	20000
Poisson	0,15	Mód.de Elasticidade (Es')	0
Res. Ult. à Compressão	3,8	Tensão de Escoamento	41,34
Res. Ult. à Tração	0,38	Ângulo com o eixo X	0
Def. Ult. à Compressão	0,0035	Ângulo com o eixo Y	1,57
Coefficiente de Tração	0,5	$h_{normalizada\ armadura}$	$1,269 \cdot 10^{-2}$
Def. Ult. à Tração	0,002	Localização da camada	-0,49

A placa é isotropicamente reforçada na superfície inferior de acordo com a taxa de aço ilustrada na Figura 18 em suas respectivas direções. A placa é discretizada em 8 camadas de concreto e 2 camadas de aço. Dois tipos de análise são considerados: análise não linear geométrica (NLG) e análise linear geométrica (LG). Primeiramente, apresentam-se na Figura 19 os resultados de deslocamento para o nó 3, comparando os valores experimentais e os obtidos considerando apoios livre e fixo horizontalmente para uma análise LG.

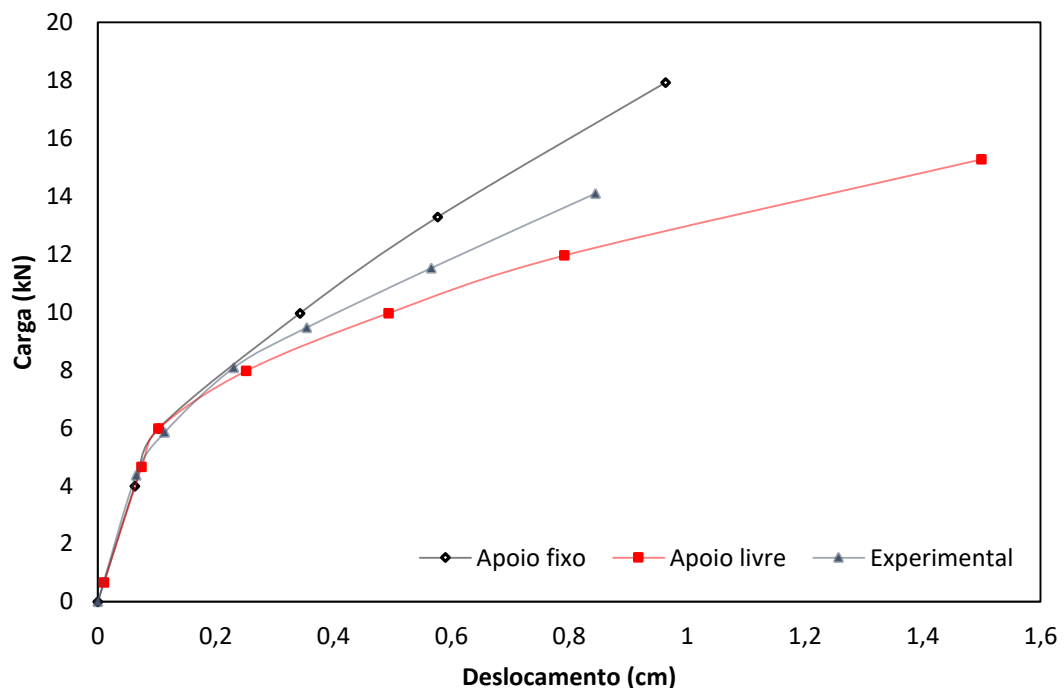


Figura 19 - Resultados de deslocamento vertical no nó 3: Análise linear geométrica

Pode-se observar que a capacidade de carga da placa aumenta quando se consideram os apoios fixos. De acordo com Figueiras (1983), com a propagação de fissuras, espera-se uma expansão da superfície média, o que leva ao desenvolvimento de forças compressivas planas quando os deslocamentos são restritos. A existência dessas forças compressivas resulta em uma resposta mais rígida e em uma maior carga final.

Fazendo a comparação de resultados das análises LG e NLG para o caso de apoio livre horizontalmente, percebe-se que estes são similares, pois a placa é livre para mover-se no plano, não desenvolvendo os esforços de compressão no suporte. Ambas as análises fornecem valores de acordo com o resultado experimental, conforme ilustrado na Figura 20.

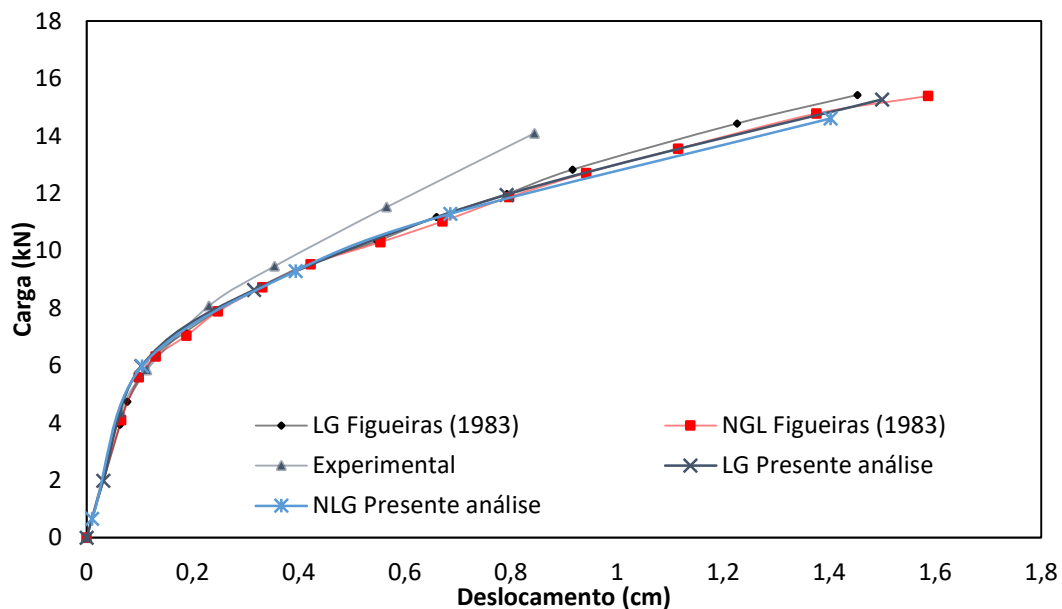


Figura 20 - Deslocamento vertical no nó 3: apoio horizontalmente livre

As curvas correspondentes ao caso de apoio horizontalmente fixo são apresentadas na Figura 21. Estes resultados apresentam boa concordância com os valores experimentais. É importante destacar que os resultados experimentais não são totalmente publicados até o carregamento de carga última. Através da análise da figura, percebe-se que quando o comportamento não linear geométrico é desconsiderado, uma resposta mais rígida e uma maior carga de colapso são obtidas. Isso ocorre, pois, quando as deflexões são consideradas na análise, a compressão desenvolvida na superfície média inicial causa um aumento no momento de flexão.

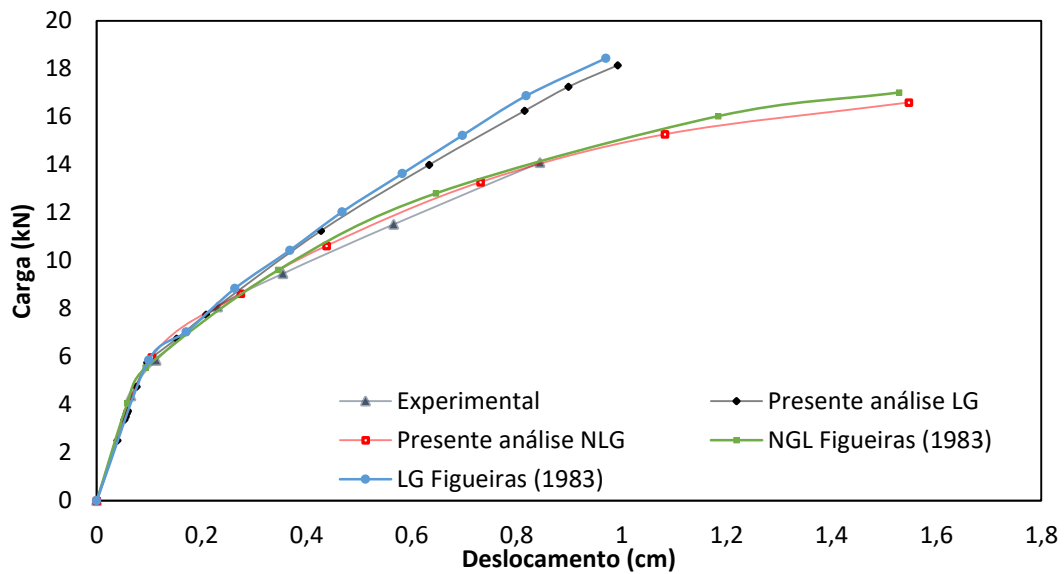


Figura 21 – Deslocamento vertical no nó 3: apoio horizontalmente fixo

#### 4.2.1 Placa de Taylor *et al.* (1966)

Uma placa testada por Taylor *et al.* (1966), denominada S1, é analisada aqui. A placa é simplesmente apoiada em todos os lados, sendo que os três nós presentes no canto da placa estão livres, conforme ilustrado na Figura 22. As barras de reforço estão uniformemente espaçadas e paralelas aos suportes e a placa está submetida a uma carga uniformemente distribuída. A placa é quadrada com dimensão de 198cm e espessura de 5,1cm. As propriedades do material são especificadas na Tabela 3 e a Figura 22 apresenta a geometria e malha de elementos finitos consideradas no modelo numérico, onde apenas um quarto da placa é modelado, em função da simetria nas duas direções.

Tabela 3 - Propriedade dos materiais da placa S1 (kN, cm)

Concreto		Aço	
Módulo de Elasticidade $E_c$	3242	Módulo de elasticidade $E_s$	20691
Coeficiente de Poisson $\nu$	0,18	Módulo de elasticidade $E'_s$	3000
Resistência à compressão	3,5	Tensão de escoamento $\sigma_y$	37,59
Resistência à tração	0,379		
Deformação última à compressão	0,0035		

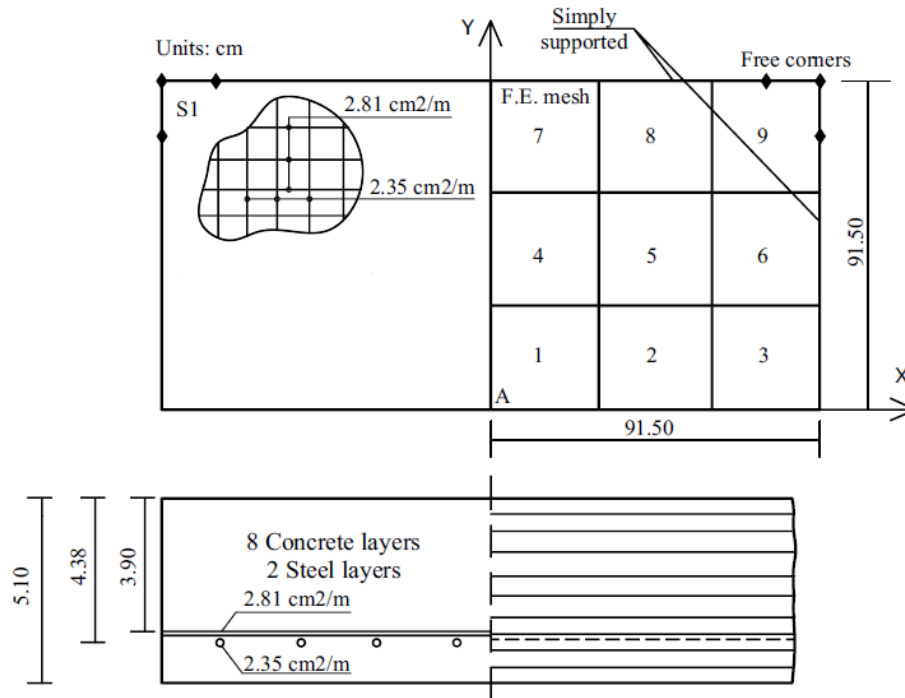


Figura 22 - Placa ensaiada por Taylor *et al.* (1966) (DIAS, 2013)

A análise de deslocamento vertical é referente ao ponto central da placa de concreto, nomeado ponto A na Figura 22. Os resultados obtidos para a placa S1 nas análises LG e NLG são comparados com os resultados da análise numérica de Figueiras (1983) na Figura 23, bem como com os resultados experimentais de Taylor *et al.* (1966). Pelo estudo dos resultados percebe-se que para ambas as análises o comportamento é concordante com os resultados de Figueiras (1983). Ao comparar os valores obtidos, é possível notar que a análise NLG apresenta uma resposta mais rígida, quando comparada com a análise LG, ou seja, para um mesmo valor de carga aplicada, a resposta de deslocamento é menor, sendo assim, o valor de carga última é mais alto para análise NLG.

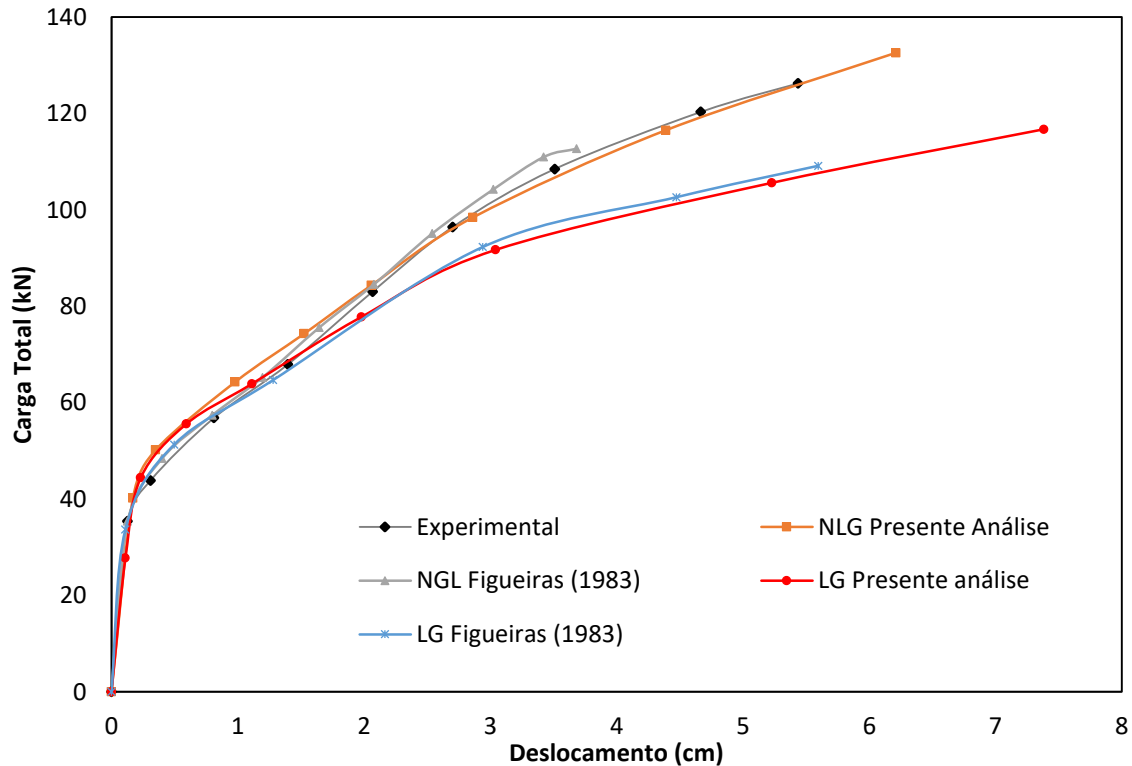


Figura 23 - Resultado Placa de Taylor *et al.* (1966)

### 4.3 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

A partir dos exemplos apresentados, pode-se concluir que os resultados para análise NLG foram obtidos conforme o esperado, mostrando boa concordância com os valores experimentais e numéricos de outros autores. Desta forma, é possível afirmar que a abordagem considerando a hipótese de von Kármán é adequada para o estudo, uma vez que apresentou a não linearidade que se espera em relação a laje de concreto. Destaca-se que, para essa teoria, a magnitude da deflexão é de mesma ordem da espessura.

A afirmação anterior pode ser verificada no primeiro exemplo, onde a máxima deflexão atinge 1/3 da espessura da placa. Nesta placa estudada por Jofriet e Mcneice (1971), nota-se que as condições de apoio são de grande influência nos resultados numéricos. Isso é ressaltado quando são comparados os deslocamentos obtidos na consideração da análise NLG. Nesta análise, no caso de apoios simples, uma mudança suave acontece, enquanto que no caso de apoios fixos, o comportamento é alterado significativamente, apresentando uma resposta menos rígida a partir de carregamentos intermediários.

Isto ocorre, pois, ao considerar apoios fixos, uma carga de compressão na seção média é desenvolvida, o que causa o aumento do momento fletor quando os deslocamentos são considerados na análise. É possível afirmar, dessa forma, que a consideração do efeito não linear geométrico é evidenciado quando há forças no plano. Já no caso da placa de Taylor *et al.* (1966), onde é considerado apoio simples em toda a borda, exceto nos cantos, o comportamento não é semelhante. Uma vez que nenhuma força no plano é desenvolvida no apoio, as forças de membrana devem ser desenvolvidas para o equilíbrio interno.

Segundo Figueiras (1983), as forças de tração de membrana são desenvolvidas na zona central da placa, que são balanceadas com as forças de compressão desenvolvidas na zona perto do apoio. Os efeitos da força de tração, considerando o atual deslocamento, consistem essencialmente em reduzir os momentos na zona central. A combinação da ação da força de tração e momento resulta, conseqüentemente, em uma tensão de tração menor na zona central, aumentando a capacidade de carga da placa.

Neste exemplo, mais uma vez é demonstrada a importância da consideração correta das condições de apoio, quando se trata de análise não linear geométrica. Se a placa fosse restrita tangencialmente (sem os cantos livres), um comportamento mais flexível seria identificado, em função da força de compressão de membrana criada nos apoios, essencialmente, nos cantos (FIGUEIRAS, 1983).

## 5. ELEMENTO FINITO PARA PERFIL DE AÇO

O elemento finito utilizado para modelar a viga de aço é um elemento de casca plana de 4 nós baseado na Teoria de Placas Finas, o mesmo é obtido pela superposição de um elemento de placa e outro de membrana, resultando em 6 graus de liberdade por nó, conforme descrito abaixo e ilustrado na Figura 24.

- O elemento de membrana possui translações nos eixos  $x$  e  $y$  e uma rotação no plano em torno de  $z$ . Adota-se o elemento proposto por Ibrahimbegovic *et al.* (1990).
- O elemento de placa possui translação no eixo  $z$  e rotações em torno dos eixos  $x$  e  $y$ . Adota-se o elemento chamado DKQ proposto por Batoz e Tahar (1982).

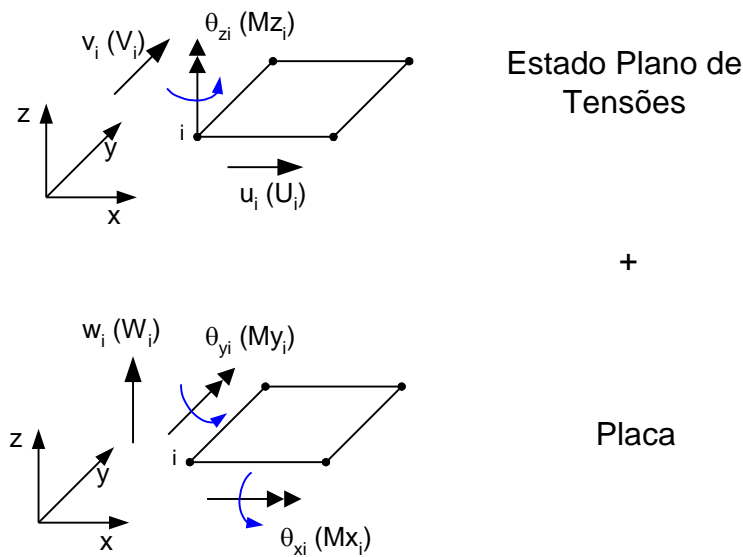


Figura 24 - Graus de liberdade dos elementos finitos

O tensor de Green Lagrange apresentado no Capítulo 3 é utilizado também para este elemento, porém expresso diretamente segundo o sistema global cartesiano. Uma primeira abordagem do problema NLG consistiu na utilização das hipóteses simplificadoras de von Kármán para placas finas, para logo finalmente utilizar o tensor completo de deformação em problemas onde a ordem de grandeza das flechas é maior em relação à espessura da placa. Isto se torna relevante quando há a necessidade de avaliação das deformações não lineares no plano (efeito de membrana).



## 5.1 DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO TEORIA DE VON KÁRMÁN

A Teoria de von Kármán pode ser aplicada para placas esbeltas com grandes deslocamentos transversais, onde a contribuição aos deslocamentos verticais depende das deformações por flexão e da carga axial de membrana atuante no interior da placa. Suas principais hipóteses são:

- Há deformações no plano médio da placa após a flexão;
- Seções planas normais ao plano médio da placa permanecem planas e normais ao plano médio após a flexão. Isto significa que as distorções no plano  $xz$  e  $yz$  são desprezadas ( $\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$ ).
- A magnitude da deflexão  $w$  é de mesma ordem da espessura  $|w|=O(h)$ ;
- A inclinação é em todo lugar pequena  $|\partial w / \partial x| \ll 1$  e  $|\partial w / \partial y| \ll 1$ ;
- Os deslocamentos tangenciais  $u$  e  $v$  são pequenos. Nas relações de deformação *versus* deslocamento, apenas os termos não lineares dependentes  $|\partial w / \partial x|$  e  $|\partial w / \partial y|$  são mantidos, enquanto os outros termos não lineares são negligenciados.
- Todas as componentes de deformações são pequenas.

Sendo assim, o tensor de Green Lagrange pode ser reescrito para o caso das componentes de deformação no plano da placa como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

De acordo com o Capítulo 3, o tensor de deformação em notação de Voigt pode ser escrita em duas parcelas, sendo que a primeira parcela é linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ ), enquanto que a segunda é não linear ( $\boldsymbol{\varepsilon}_l$ ), conforme mostra a Equação (5.2).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_L \quad (5.2)$$

A parte linear da deformação é composta pelas deformações devido aos movimentos de membrana (extensão e torção) e aos movimentos de placa (movimentos de flexão), de acordo com a Equação (5.3), onde  $z$  representa a coordenada normal ao plano médio da placa positiva para acima, o sobrescrito  $m$  refere-se à parte de membrana e  $\theta_y = w_{,x}$  e  $\theta_x = w_{,y}$  são as rotações devido aos movimentos de placa. Ressalta-se que os movimentos de placa não contribuem com a deformação no plano médio, dado que  $z$  é zero ( $\boldsymbol{\varepsilon}^b = 0$ ).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^m_{,x} \\ v^m_{,y} \\ u^m_{,y} + v^m_{,x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ \theta_{x,x} + \theta_{y,y} \end{bmatrix} z = \boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_0^b \quad (5.3)$$

sendo  $u_{,x}$  a derivada do deslocamento  $u$  em relação ao eixo  $x$  e  $v_{,y}$  é a derivada do deslocamento  $v$  em relação ao eixo  $y$  e assim sucessivamente.

Analisando somente a parte de membrana, a qual é apresentada por Ibrahimbegovic *et al.* (1990), considera-se um elemento quadrilátero de 4 nós, com três graus de liberdade, sendo um deles rotacional no plano e chamado de *drilling* na literatura inglesa, como mostrado na Figura 25, onde por exemplo  $n_{12}$  representa a direção da normal do lado 1-2 do quadrilátero.

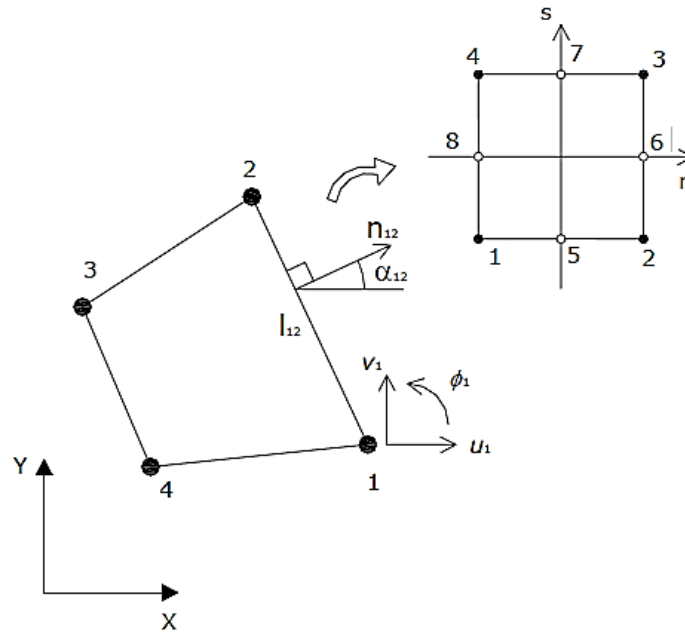


Figura 25 - Elemento quadrilátero com grau de liberdade rotacional (TAMAYO, 2011)

O campo de rotação independente é interpolado mediante um campo bilinear da forma apresentada na Equação (5.4).

$$\phi = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \phi_i \quad (5.4)$$

Sendo  $N_i$  as funções de interpolação definidas pela Equação (5.5):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.5)$$

A interpolação do tipo Allman (1988) para os deslocamentos no plano é definida da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 N_k(\xi, \eta) \frac{l_{ij}}{8} (\phi_j - \phi_i) \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ S_{ij} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

com:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_j - x_i & ; & & y_{ij} &= y_j - y_i & ; & & l_{ij} &= (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2} \\ C_{ij} &= \cos \gamma_{ij} = \frac{y_{ij}}{l_{ij}} & ; & & S_{ij} &= \text{sen} \gamma_{ij} = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}} \\ k &= 5, 6, 7, 8 & ; & & i, j &= 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 1 \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde  $N_k$  são as funções de interpolação no elemento, dadas por:

$$\begin{aligned} N_k(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_k \eta) & k = 5, 7 \\ N_k(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_k \xi)(1 - \eta^2) & k = 6, 8 \end{aligned} \quad (5.8)$$

e tendo conhecimento de  $u$  e  $v$  dados na Equação (5.6), o tensor de deformação de membrana pode-se escrever de forma matricial da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \begin{bmatrix} u^m_{,x} \\ v^m_{,y} \\ u^m_{,y} + v^m_{,x} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

e tendo conhecimento de  $u$  e  $v$  dados na Equação (5.6), pode-se organizar a deformação em uma multiplicação de matrizes, conforme segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \mathbf{B}_0^m \{\mathbf{u}\}^m \quad (5.10)$$

onde  $\mathbf{B}_0^m = [\mathbf{B}_1^m \ \mathbf{B}_2^m \ \mathbf{B}_3^m \ \mathbf{B}_4^m]$ ,  $\{\mathbf{u}\}^m = [\{\mathbf{u}_1\}^m \ \{\mathbf{u}_2\}^m \ \{\mathbf{u}_3\}^m \ \{\mathbf{u}_4\}^m]^T$ , sendo  $\{\mathbf{u}_i\}^m$  um vetor cujas componentes para o nó  $i$  são dadas na Equação (5.11), sendo  $u_i$  e  $v_i$  os deslocamentos nodais de membrana e  $\phi_i$  a rotação no eixo  $z$ , ortogonal ao plano do elemento. A matriz  $[\mathbf{B}]_i^m$  referente a cada nó  $i$  (1,2,3,4) é dada pela Equação (5.12).

$$\{\mathbf{u}_i\}^m = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \phi_i \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{B}_{0\ i}^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial x} - l_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial y} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \left( l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial x} - l_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x} \right) + \left( l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial y} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

com  $i = 1,2,3,4$  ;  $m = 5,6,7,8$  ;  $l = 8,5,6,7$  ;  $k = 2,3,4,1$  e  $j = 4,1,2,3$ . Conhecendo a matriz  $\mathbf{B}_0^m$  pode-se determinar a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{K}_0^m$  , entretanto por adicionar o grau de liberdade rotacional a matriz assim obtida apresenta modos espúrios, podendo tornar-se singular em algumas situações. Para evitar esse problema, é introduzida uma matriz de estabilização  $\mathbf{P}$  calculada a partir de uma matriz  $\mathbf{B}^{dril}$  de acordo com as Equações (5.13)-(5.15).

$$\mathbf{K}_0^m = \int_V (\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m dV \quad (5.13)$$

$$\mathbf{B}^{dril} = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad -\frac{1}{16} \left( l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial y} - l_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) + \frac{1}{16} \left( l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial y} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) - N_i \right\} \quad (5.14)$$

$$\mathbf{P} = \rho \int_V (\mathbf{B}^{dril})^T \mathbf{B}^{dril} dV \quad (5.15)$$

$$\mathbf{K}_0^m = \mathbf{K}_0^m + \mathbf{P} \quad (5.16)$$

O parâmetro  $\rho$  da Equação (5.15) é dependente do problema, para elasticidade isotrópica é sugerido que este valor seja igual ao módulo de corte do material  $G$ . Para o presente trabalho, o valor de  $0.375G$  foi considerado por fornecer melhores resultados para a modelagem da viga de aço de seção I (TAMAYO, 2011).

Em relação à parte linear da placa, se considera o elemento desenvolvido por Batoz e Tahar (1982), conhecido na literatura inglesa por DKQ (*Discrete Kirchhoff Quadrilateral*), pois considera as hipóteses de Kirchhoff para placa delgada (Figura 26), o qual é capaz de representar a flexão dos elementos de casca. O elemento possui quatro nós, com três graus de liberdade cada um (deslocamento transversal e rotações no plano  $\theta_x$  e  $\theta_y$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente). Os graus de liberdade são definidos como:

$$\begin{aligned} w &= w_{(x,y)} \\ \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.17)$$

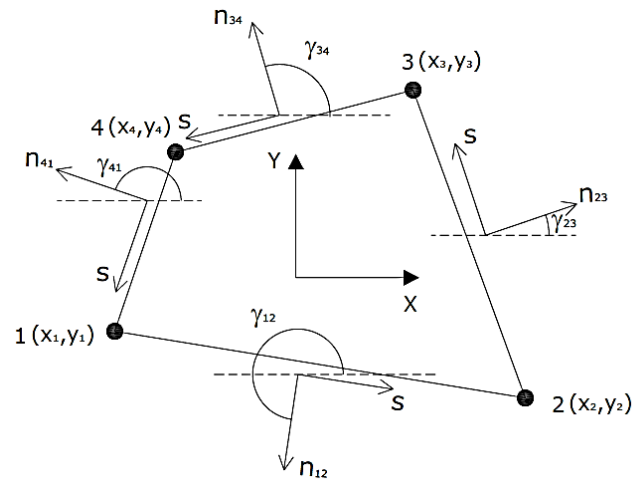


Figura 26 - Elemento quadrilátero de placa (TAMAYO, 2011)

Para o caso de um material isotrópico homogêneo, as curvaturas são dadas por:

$$[\chi] = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (5.18)$$

em que  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são as rotações das normais à superfície média da placa nos planos  $x-z$  e  $y-z$ , definidas por polinômios incompletos, conforme a Equação (5.19) através dos valores nodais.

$$\begin{aligned} \beta_x &= \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{xi} \\ \beta_y &= \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{yi} \end{aligned} \quad (5.19)$$

No desenvolvimento da formulação do elemento, se considera quatro nós intermediários em cada lado do quadrilátero, os quais são internos e empregam as funções de interpolação de um elemento de oito nós, as quais são apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)] \\
N_2 &= -\frac{1}{4}[(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)] \\
N_3 &= -\frac{1}{4}[(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)] \\
N_4 &= -\frac{1}{4}[(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)] \\
N_5 &= \frac{1}{2}[(1-\xi^2)(1-\eta)] \\
N_6 &= \frac{1}{2}[(1+\xi)(1-\eta^2)] \\
N_7 &= \frac{1}{2}[(1-\xi^2)(1+\eta)] \\
N_8 &= \frac{1}{2}[(1-\xi)(1-\eta^2)]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

As hipóteses de Kirchhoff são então aplicadas nos nós de canto, obtendo-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{xi} + \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i \\ \beta_{yi} + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \end{array} \right\} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad i=1,2,3 \text{ e } 4 \tag{5.21}$$

Substituindo (5.21) em (5.19), tem-se:

$$\begin{aligned}
\beta_x &= \sum_{i=1}^8 -N_i \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i \\
\beta_y &= \sum_{i=1}^8 -N_i \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i
\end{aligned} \tag{5.22}$$

As equações anteriores podem ser organizadas em uma multiplicação de matrizes conforme segue:

$$\begin{aligned}
\beta_x &= \langle H^x_{(\xi,\eta)} \rangle \{ \mathbf{u}^b \} \\
\beta_y &= \langle H^y_{(\xi,\eta)} \rangle \{ \mathbf{u}^b \}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Sendo  $\{ \mathbf{u}^b \}$  o vetor de deslocamentos dados pela Equação (5.23) e o vetor  $H_{(\xi,\eta)}$  é apresentado nas Equações (5.24) e (5.25).

$$\{ \mathbf{u}^b \} = \{ w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \} \tag{5.24}$$

$$\langle H^x_{(\xi,\eta)} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(a_5 N_5 - a_8 N_8) \\ b_5 N_5 + b_8 N_8 \\ N_1 - c_5 N_5 - c_8 N_8 \\ \frac{3}{2}(a_6 N_6 - a_5 N_5) \\ b_6 N_6 + b_5 N_5 \\ N_2 - c_6 N_6 - c_5 N_5 \\ \frac{3}{2}(a_7 N_7 - a_6 N_6) \\ b_7 N_7 + b_6 N_6 \\ N_3 - c_7 N_7 - c_6 N_6 \\ \frac{3}{2}(a_8 N_8 - a_7 N_7) \\ b_8 N_8 + b_7 N_7 \\ N_4 - c_8 N_8 - c_7 N_7 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$\langle H^y_{(\xi,\eta)} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(d_5 N_5 - d_8 N_8) \\ -N_1 + e_5 N_5 + e_8 N_8 \\ -b_5 N_5 - b_8 N_8 \\ \frac{3}{2}(d_6 N_6 - d_5 N_5) \\ -N_2 + e_6 N_6 + e_5 N_5 \\ -b_6 N_6 - b_5 N_5 \\ \frac{3}{2}(d_7 N_7 - d_6 N_6) \\ -N_3 + e_7 N_7 + e_6 N_6 \\ -b_7 N_7 - b_6 N_6 \\ \frac{3}{2}(d_8 N_8 - d_7 N_7) \\ -N_4 + e_8 N_8 + e_7 N_7 \\ -b_8 N_8 - b_7 N_7 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} \quad ; \quad b_k = \frac{3}{4} \frac{x_{ij} y_{ij}}{l_{ij}^2} \quad ; \quad c_k = \frac{\left( \frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2 \right)}{l_{ij}^2} \\ d_k &= -\frac{y_{ij}^2}{l_{ij}^2} \quad ; \quad e_k = \frac{\left( \frac{1}{4} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} x_{ij}^2 \right)}{l_{ij}^2} \\ x_{ij} &= x_i - x_j \quad ; \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad ; \quad l_{ij}^2 = (x_{ij}^2 - y_{ij}^2) \end{aligned} \quad (5.27)$$

com os valores de  $k=5,6,7,8$  para  $ij=12,23,34,4$ .



A matriz que relaciona componentes de deslocamento e deformação  $\mathbf{B}_0^b$  é obtida da derivação dos vetores  $H^x_{(\xi,\eta)}$  e  $H^y_{(\xi,\eta)}$ , conforme a Equação (5.28). Sendo o sobrescrito  $b$  utilizado para assinalar flexão.

$$\mathbf{B}_0^b = \begin{bmatrix} \langle H^x_{,x} \rangle \\ \langle H^y_{,y} \rangle \\ \langle H^x_{,y} + H^y_{,x} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} \langle H^x_{,\xi} \rangle + j_{12} \langle H^x_{,\eta} \rangle \\ j_{21} \langle H^y_{,\xi} \rangle + j_{22} \langle H^y_{,\eta} \rangle \\ j_{11} \langle H^y_{,\xi} \rangle + j_{12} \langle H^y_{,\eta} \rangle + j_{21} \langle H^x_{,\xi} \rangle + j_{22} \langle H^x_{,\eta} \rangle \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Sendo  $j_{ij}$  as componentes da inversa do Jacobiano dado por:

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_{21} + x_{34} + \eta(x_{12} + x_{34}) & y_{21} + y_{34} + \eta(y_{12} + y_{34}) \\ x_{32} + x_{41} + \xi(x_{12} + x_{34}) & y_{32} + y_{41} + \xi(y_{12} + y_{34}) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Sendo assim, pode-se escrever a matriz de rigidez do elemento de placa como:

$$\mathbf{K}_0^b = \int_{V^e} (\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^b dV^e \quad (5.30)$$

Por fim, terminado o estudo da parcela linear, analisa-se a parte não linear referente ao tensor de deformação representada pela Equação (5.31), a qual está associada apenas à flecha da placa, desconsiderando-se a contribuição dos deslocamentos horizontais (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1991), conforme mostra a Figura 27.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

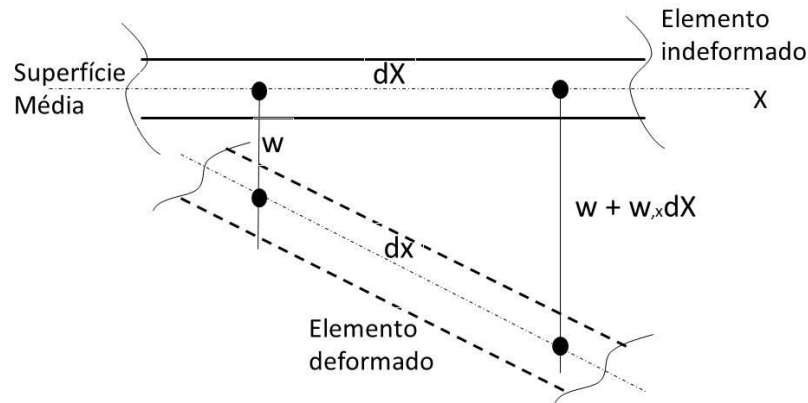


Figura 27 - Deformação de elemento de placa (adaptado de VASILESCU, 2000)

A Figura 27 exemplifica o significado da deformação não linear em  $x$ , quando são considerados grandes deslocamentos, onde  $w_{,x}$  é a derivada do deslocamento vertical  $w$  na direção  $x$ . Como forma de exemplo apresenta-se a seguir a interpretação física desta componente. Realizando os seguintes procedimentos de cálculo, tem-se:

$$dx^2 = dX^2 + (w + w_{,x}dX - w)^2$$

$$dx = dX \sqrt{1 + w_{,x}^2} \cong dX \left[ 1 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right]$$

A Equação (5.31) pode ser organizada em uma multiplicação de matrizes, conforme apresentado na Equação (3.18). Estas matrizes são apresentadas a seguir:

$$\mathbf{S}^b = \begin{bmatrix} -\langle H^x \rangle \{ \mathbf{u}^b \} & 0 \\ 0 & -\langle H^y \rangle \{ \mathbf{u}^b \} \\ -\langle H^y \rangle \{ \mathbf{u}^b \} & -\langle H^x \rangle \{ \mathbf{u}^b \} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{G}^b = \begin{bmatrix} -\langle H^x \rangle \\ -\langle H^y \rangle \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

onde  $\{ \mathbf{u}^b \}$  já foi definido na Equação (5.24). A matriz de transformação deformação *versus* deslocamento da parcela não linear de placa ( $\mathbf{B}_L^b$ ) é então dada por:

$$\mathbf{B}_L^b = \mathbf{S}^b \mathbf{G}^b \quad (5.34)$$

Por considerar a contribuição de dois elementos (membrana e placa), a matriz  $\mathbf{B}$  do elemento pode ser escrita conforme as Equações (5.35)-(5.36). A seguir é também explicitado o procedimento de cálculo para a determinação da matriz de rigidez do elemento.

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_m \quad \mathbf{B}_b] \quad (5.35)$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_0^m, \quad \mathbf{B}_b = z\mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_L^b \quad (5.36)$$

$$\mathbf{K} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV_e = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T \\ \mathbf{B}_b^T \end{bmatrix} \mathbf{D} [\mathbf{B}_m \quad \mathbf{B}_b] dV_e \quad (5.37)$$

$$\mathbf{K} = \int \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T \mathbf{D} \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b \end{bmatrix} dV_e \quad (5.38)$$

$$\mathbf{K} = \int \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m & (\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} (z\mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_L^b) \\ (z(\mathbf{B}_0^b)^T + (\mathbf{B}_L^b)^T) \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m & (z(\mathbf{B}_0^b)^T + (\mathbf{B}_L^b)^T) \mathbf{D} (z\mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_L^b) \end{bmatrix} dV_e \quad (5.39)$$

A Equação (5.38) pode ser organizada em função das parcelas lineares e não lineares da matriz de rigidez, conforme mostrado abaixo:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L \quad (5.40)$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^m & \mathbf{K}_0^{mb} \\ \mathbf{K}_0^{bm} & \mathbf{K}_0^b \end{bmatrix} = \int_{V_e} \begin{bmatrix} z(\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m & (\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} z\mathbf{B}_0^b \\ z(\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m & (\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} z\mathbf{B}_0^b \end{bmatrix} dV_e \quad (5.41)$$

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_L^{mb} \\ \mathbf{K}_L^{bm} & \mathbf{K}_L^b \end{bmatrix} = \int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^b \\ (\mathbf{B}_L^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m & (z(\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^b) + ((\mathbf{B}_L^b)^T \mathbf{D} z\mathbf{B}_0^b) + ((\mathbf{B}_L^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^b) \end{bmatrix} dV_e \quad (5.42)$$

Além disso, deve ser considerada a matriz de rigidez geométrica na contribuição da matriz de rigidez tangente, obtendo-se:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (5.43)$$

A matriz  $\mathbf{K}_\sigma$  pode ser obtida multiplicando a matriz  $\mathbf{G}^b$  dada na Equação (5.32) pelas tensões, de acordo com o que segue:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{G}^b)^T [\boldsymbol{\sigma}]^b \mathbf{G}^b \end{bmatrix} dV_e, \text{ sendo: } [\boldsymbol{\sigma}]^b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Inicialmente a montagem da matriz do elemento é realizada no sistema local deste (ver Tamayo, 2011), através da reorganização de linhas e colunas para acompanhar a estrutura do vetor de deslocamentos mostrada na Equação (5.45). Assim as matrizes quadradas de ordem 12x12,  $\mathbf{K}^m$ ,  $\mathbf{K}^b$ ,  $\mathbf{K}^{mb}$  e  $\mathbf{K}^{bm}$ , as quais já consideram as parcelas lineares e não lineares, são usadas nesta montagem, indicando uma matriz final de ordem 24x24. A Equação (5.46), por exemplo, mostra a montagem da primeira submatriz (de um nó) do elemento.

$$\mathbf{u}_i^e = \{u_{xi} \quad v_{yi} \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}\} \quad i=1,2,3,4 \quad (5.45)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^m & K_{12}^m & K_{11}^{mb} & K_{12}^{mb} & K_{13}^{mb} & K_{13}^m & \dots \\ K_{21}^m & K_{22}^m & K_{21}^{mb} & K_{22}^{mb} & K_{23}^m & K_{23}^m & \dots \\ K_{11}^{bm} & K_{12}^{bm} & K_{11}^b & K_{12}^b & K_{13}^b & K_{13}^{bm} & \dots \\ K_{21}^{bm} & K_{22}^{bm} & K_{21}^b & K_{22}^b & K_{23}^b & K_{23}^{bm} & \dots \\ K_{31}^{bm} & K_{32}^{bm} & K_{31}^b & K_{32}^b & K_{33}^b & K_{33}^{bm} & \dots \\ K_{31}^m & K_{32}^m & K_{31}^{mb} & K_{32}^{mb} & K_{33}^{mb} & K_{33}^m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Em que  $\mathbf{K}_{ij}^e$  representa o termo da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $\mathbf{K}^m$ , sendo esta a matriz de rigidez de membrana com uma dimensão de 12x12. O mesmo vale para as matrizes de placa  $\mathbf{K}^b$  e de acoplamento  $\mathbf{K}^{mb}$  e  $\mathbf{K}^{bm}$ .

Tendo em vista que as equações de equilíbrio do elemento são estabelecidas num sistema global de referência e que todas as discussões apresentadas até o momento são construídas segundo o sistema local do elemento, é necessário estabelecer uma relação de transformação entre o sistema local e o sistema global. Os deslocamentos do nó  $i$  do elemento  $e$  são transformados do sistema global para o local por:

$$\{\mathbf{u}_i^e\}^L = \mathbf{T}_r \{\mathbf{u}_i^e\}^G \quad (5.47)$$

onde  $\mathbf{T}_r$  é a matriz de transformação global-local, conforme a Equação (5.48):

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}$$

Em que  $\boldsymbol{\lambda}$  é a submatriz que contém os cossenos diretores:

$$\begin{aligned} \lambda_{x'x} &= dx_1 / a, \quad \lambda_{y'x} = dy_1 / a, \quad \lambda_{z'x} = dz_1 / a \\ \lambda_{x'z} &= dxx / ab, \quad \lambda_{y'z} = dyy / ab, \quad \lambda_{z'z} = dzz / ab \\ \lambda_{x'y} &= \lambda_{y'x} \lambda_{z'x} - \lambda_{z'z} \lambda_{y'x}, \quad \lambda_{y'y} = \lambda_{z'z} \lambda_{x'x} - \lambda_{x'z} \lambda_{z'x}, \quad \lambda_{z'y} = \lambda_{x'z} \lambda_{y'x} - \lambda_{y'z} \lambda_{x'x} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Com:

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 - x_1, \quad dx_2 = x_4 - x_1, \quad dx_3 = x_4 - x_2 \\ dy_1 &= y_2 - y_1, \quad dy_2 = y_4 - y_1, \quad dy_3 = y_4 - y_2 \\ dz_1 &= z_2 - z_1, \quad dz_2 = z_4 - z_1, \quad dz_3 = z_4 - z_2 \\ dxx &= dy_1 dz_2 - dz_1 dy_2, \quad dyy = dz_1 dx_2 - dx_1 dz_2, \quad dzz = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2 \\ ab &= \sqrt{dxx^2 + dyy^2 + dzz^2}, \quad a = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \end{aligned} \quad (5.50)$$

sendo que  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$ , com  $i=1, 2, 3, 4$ , representam as coordenadas globais dos quatro nós do elemento finito.

A abordagem Lagrangeana Total foi programada para o elemento de casca de quatro nós. Desta maneira, as aplicações numéricas a seguir têm como objetivo a verificação desta formulação. São apresentados quatro exemplos de placas, os quais foram obtidos de trabalhos de outros autores. Todos os casos consideram o comportamento do material elástico, com o objetivo de simplificar e reconhecer os efeitos não lineares geométricos. No programa VIMIS, o procedimento para solução adotado é o Método de Newton Raphson e no processo, a matriz de rigidez é calculada em cada iteração de cada incremento.

Nestes exemplos, também se emprega o *software* comercial ANSYS para ser mais um conjunto de resultados como referência. Todos modelos desenvolvidos no ANSYS empregam um elemento de casca de 4 nós considerando a rigidez de flexão e membrana, que é denominado

Shell 63. Esse elemento apresenta 6 graus de liberdade por nó: translações nas direções x, y, e z, e rotações em torno dos eixos x, y e z. O elemento tem condições de considerar grandes deflexões (rotação finita) e o enrijecimento por tensão (matriz de rigidez geométrica).

### 5.1.1. Placa simplesmente apoiada

Este exemplo é um exercício da disciplina: Método dos Elementos Finitos no curso de engenharia civil da UFRGS e é proposto para validar os resultados do modelo numérico VIMIS. A placa representada na Figura 28 é simplesmente apoiada em todas as bordas e submetida a uma carga distribuída de  $3 \times 10^{-3} \text{MPa}$ . A placa foi definida com as propriedades elásticas do aço ASTM A36 ( $E=2 \times 10^5 \text{MPa}$ ,  $\nu=0,3$ ). A espessura utilizada foi de 7,94mm e os elementos de tamanho 125mm x 125mm.

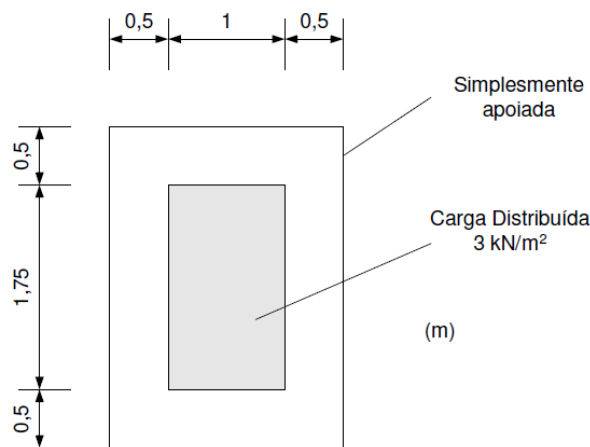


Figura 28 - Placa simplesmente apoiada (Fonte: Prof. Morsch)

Tanto no código VIMIS quanto no ANSYS, foram realizadas duas análises: a primeira elástica LG e a segunda elástica NLG. No caso da análise não linear geométrica no VIMIS foram considerados os seguintes parâmetros de análise: 10 passos de carga e tolerância de 0,0001, em que a cada iteração a matriz de rigidez é atualizada. No ANSYS, o controle dos critérios de convergência é arbitrado pelo *software*, com uma tolerância de 0,005.

Na Figura 29 podem ser apreciadas as curvas força *versus* deslocamento, considerando o deslocamento vertical medido no centro da placa, para ambas as análises, LG e NLG. Para este último caso, apresenta-se na Tabela 4 o valor de deslocamento máximo para a carga de 3kPa, e o valor da tensão de von Misses no centro do vão.

Tabela 4 - Valores de deslocamento e tensões

Programa	Deslocamento(cm)	Erro (%)	Tensão (MPa)	Erro (%)
ANSYS	1,466	-	35,9	-
VIMIS	1,465	0,062	35,5	1,127

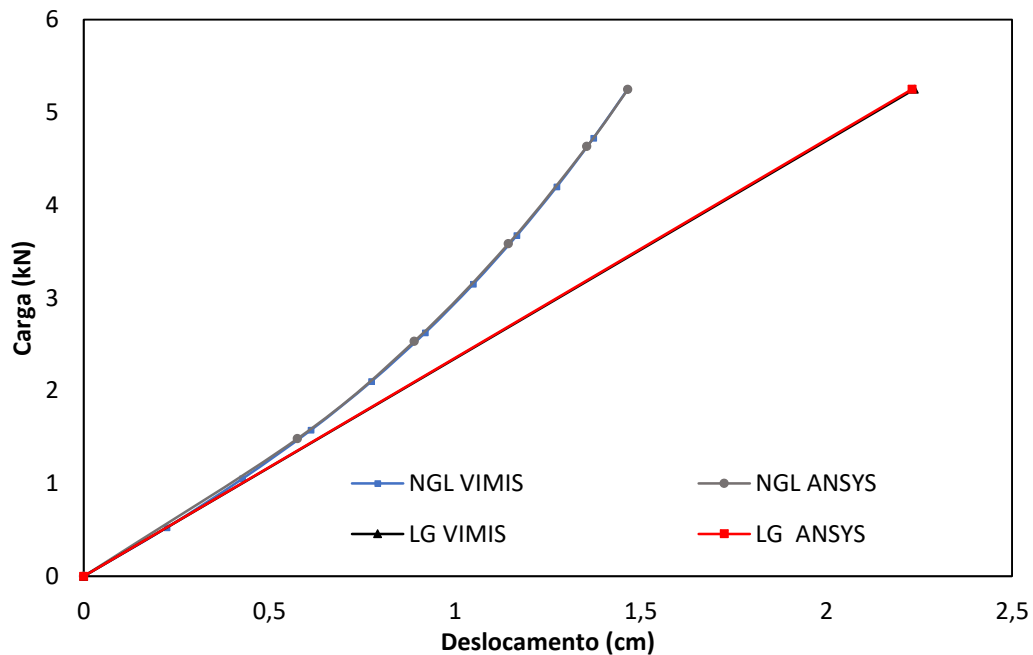


Figura 29 - Resultados placa simplesmente apoiada

Nota-se uma boa concordância entre os resultados de VIMIS e ANSYS. Cabe destacar que os resultados das análises elásticas lineares devem ser considerados apenas como uma referência, já que a flecha máxima nesses casos é de 2,23cm, o que supera a hipótese de Kirchoff e também de Reisner & Mindlin, que estabelece que a flecha máxima deve ser menor ou igual a metade da espessura da laje.

É interessante notar que numa situação real de projeto, que fosse limitada a uma análise elástica linear, levaria a uma espessura de 1,27cm para a laje, para que a condição de validade das teorias de placa fosse respeitada. Esse fato demonstra a importância da consideração da não linearidade geométrica, já que permite especificar uma espessura menor se o deslocamento obtido for aceito. Isso ocorre, pois a resposta não linear geométrica da placa resulta em uma maior rigidez gerada pelas forças da membrana de tração que são desenvolvidas pela ação de flexão.

Analisando as curvas da análise NLG observa-se que a flecha resulta em 1,46cm. Uma questão relevante é que a hipótese de von Kármán indica que a flecha deveria ser da ordem da espessura da placa que é de 0,794cm. De fato essa limitação não se verifica, logo é prudente ratificar esse resultado. Para tal se repetiu a análise no VIMIS considerando o tensor de Green Lagrange completo. A formulação desta abordagem está apresentada no item 5.2. Os resultados são apresentados na Figura 30, onde pode-se perceber uma sutil diferença entre os valores encontrados. No caso em que é considerado o tensor de deformações completo, os resultados são levemente mais rígidos.

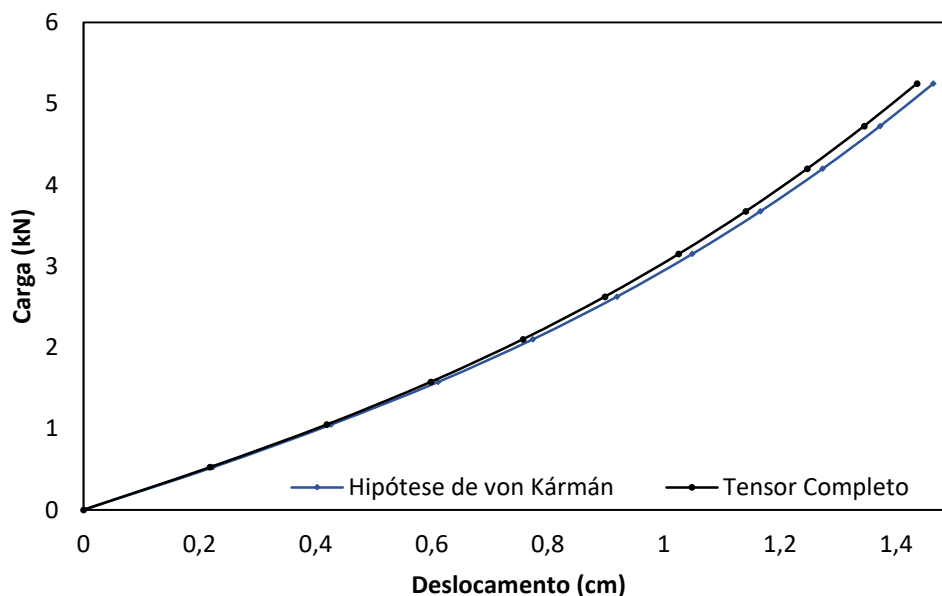


Figura 30 - Deflexão no centro da placa

A Tabela 5 apresenta os valores últimos para as análises realizadas, bem como o erro em relação ao programa ANSYS. Analisando os dois casos realizados no VIMIS, pode-se perceber que a diferença de resultados considerando a Hipótese de von Kármán e considerando o tensor completo é em torno 1,95%. Como esta diferença é pequena, o resultado da análise anterior pode ser considerado como válido.

Tabela 5 - Comparação de resultados da placa

Programa	Deslocamento (cm)	Dif. relativa (%)
ANSYS	1,466	-
Hipótese de von Kármán	1,465	0,062
Tensor completo	1,436	2,00



Como o nível de tensão de von Mises na placa é baixo,  $\sigma = 36$  MPa, e o aço da placa apresenta tensão de escoamento de 250 MPa, se está no trecho de comportamento linear do material e portanto com pequenas deformações, logo o 2º tensor de Piola – Kirchhoff e a tensão verdadeira podem ser aproximadas pela tensão de engenharia.

### 5.1.2. Placa quadrada apoiada

Uma placa quadrada simplesmente apoiada em todas as arestas sob carga normal uniformemente distribuída foi analisada por Vasilescu (2000), a mesma tem dimensões de 406,4mm. A malha utilizada para modelar a placa é composta de 16x16 elementos finitos para ambos os programas VIMIS e ANSYS, conforme adotado na citada referência. Os nós de aresta da placa tiveram os deslocamentos horizontais restritos. Foi assumido comportamento elástico do material, com módulo de elasticidade  $E=200000$  N/mm<sup>2</sup> e espessura de 2,54 mm.

No VIMIS foi necessário utilizar 24 passos de carga e foi empregada uma tolerância de 0,00010. A Figura 31 apresenta as curvas carga *versus* deslocamento vertical medido no centro da placa obtida por VIMIS, ANSYS e Vasilescu (2000). Destaca-se que as três curvas são praticamente coincidentes. Na Tabela 6 é apresentada a deflexão máxima no centro da placa e o erro em relação ao resultado de Vasilescu (2000).

Tabela 6 – Resultados placa de Vasilescu (2000)

	Deslocamento (cm)	Dif. relativa (%)
Vasilescu (2000)	0,487	-
ANSYS	0,500	-2,671
VIMIS	0,499	-2,465

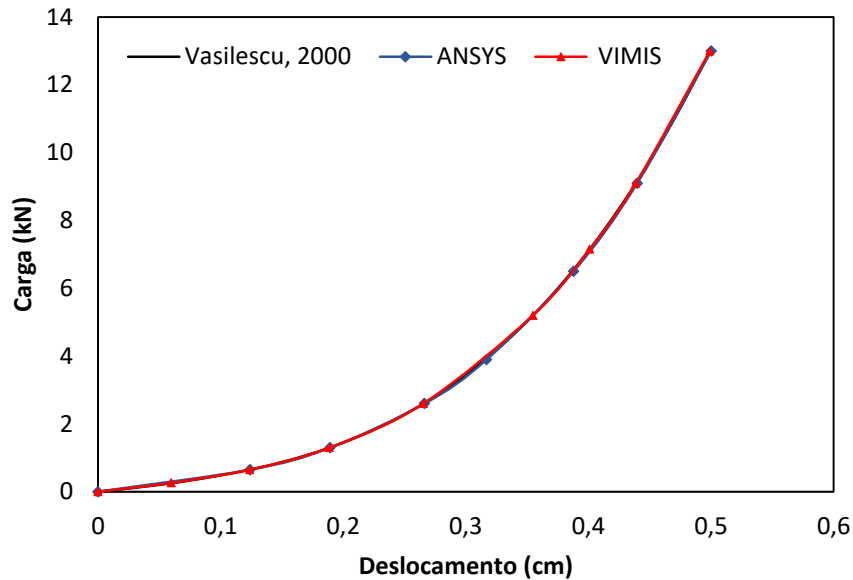


Figura 31 - Resultados da placa de Vasilescu (2000)

A análise mostra uma boa concordância do VIMIS com os demais resultados. Deve-se destacar que a flecha máxima obtida no VIMIS é de 5mm e que a espessura da placa é de 2,54mm, logo é interessante verificar o efeito da consideração do tensor de deformações completo nos resultados, conforme apresentado na Figura 32. Pode-se observar que o comportamento é semelhante ao exemplo anterior, apresentando uma sutil diferença nos resultados com uma maior rigidez, quando comparado à hipótese de von Kármán. A Tabela 7 apresenta os valores de deslocamentos para a carga aplicada e compara com os resultados do autor.

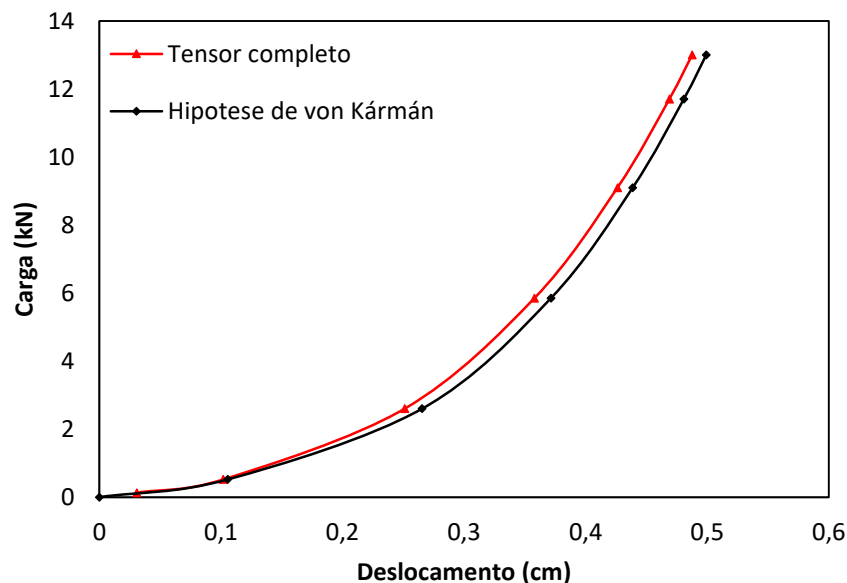


Figura 32 - Resultados deflexão para placa de Vasilescu (2000)

Tabela 7 - Comparação de resultados

	Deslocamento (cm)	Dif. relativa (%)
Vasilescu (2000)	0,487	-
Hipótese de von Kármán	0,499	2,465
Tensor Completo	0,488	0,108

De acordo com os dados apresentados na Tabela 7, pode-se perceber que a análise realizada com o tensor completo se aproxima mais do resultado de Vasilescu (2000), entretanto é possível dizer que a primeira análise realizada também pode ser considerada correta, uma vez que a máxima deformação equivalente de von Mises dentro da placa resultou em torno de 0,112%. A diferença entre os resultados da consideração do tensor completo e hipótese de von Kármán resulta em 2,3%.

### 5.1.3 Placa quadrada engastada

Uma placa quadrada sob carga distribuída uniforme ( $7,85 \times 10^{-4} \text{N/mm}^2$ ) com os bordos engastados (rotações e deslocamentos restritos) foi analisada. A placa tem dimensões de 1000mm e espessura  $h=2\text{mm}$ . O material foi considerado elástico com módulo de elasticidade de  $196000 \text{N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson de 0,3.

No presente trabalho foram estudadas duas malhas, a primeira com malha de  $10 \times 10$  elementos e a segunda com  $20 \times 20$  elementos. Os parâmetros de análise considerados foram: número de passos de carga igual a 10 e tolerância no valor de 0,0001. Os resultados podem ser apreciados na Figura 33, sendo possível perceber que o refinamento da malha não afeta os resultados.

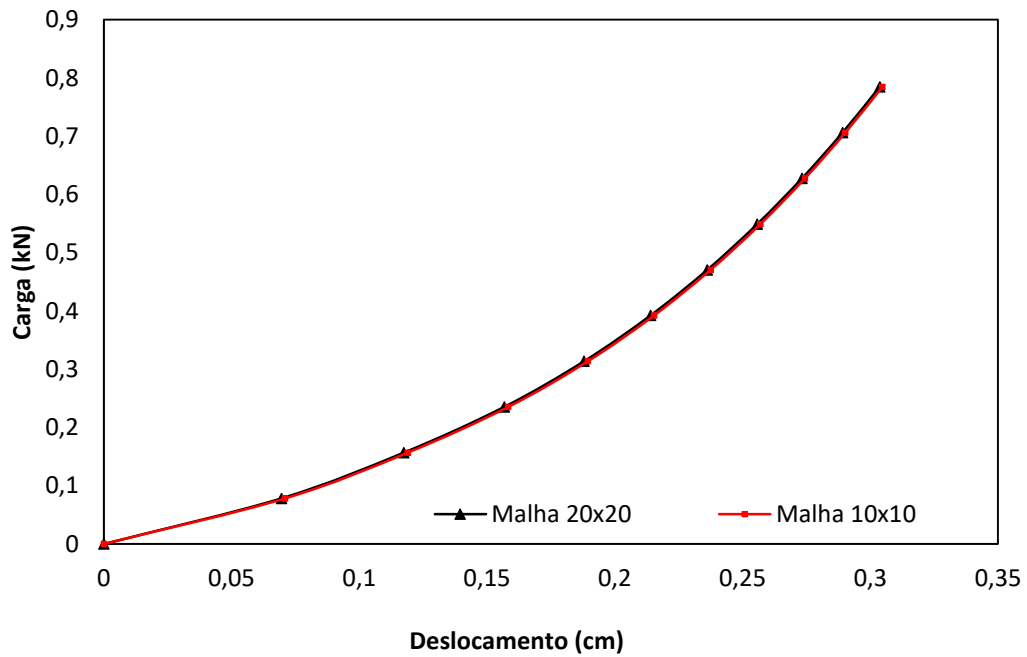


Figura 33 - Estudo da malha

A Figura 34 apresenta as curvas carga *versus* deslocamento no centro da placa, obtidas pelo VIMIS e ANSYS. Além disso, são mostrados os resultados dos autores Hughes e Liu (1980). Na Tabela 8 são apresentados os valores máximos de deflexão para a carga total resultante de 0,785kN e o respectivo erro correspondente considerando o valor do artigo como referência.

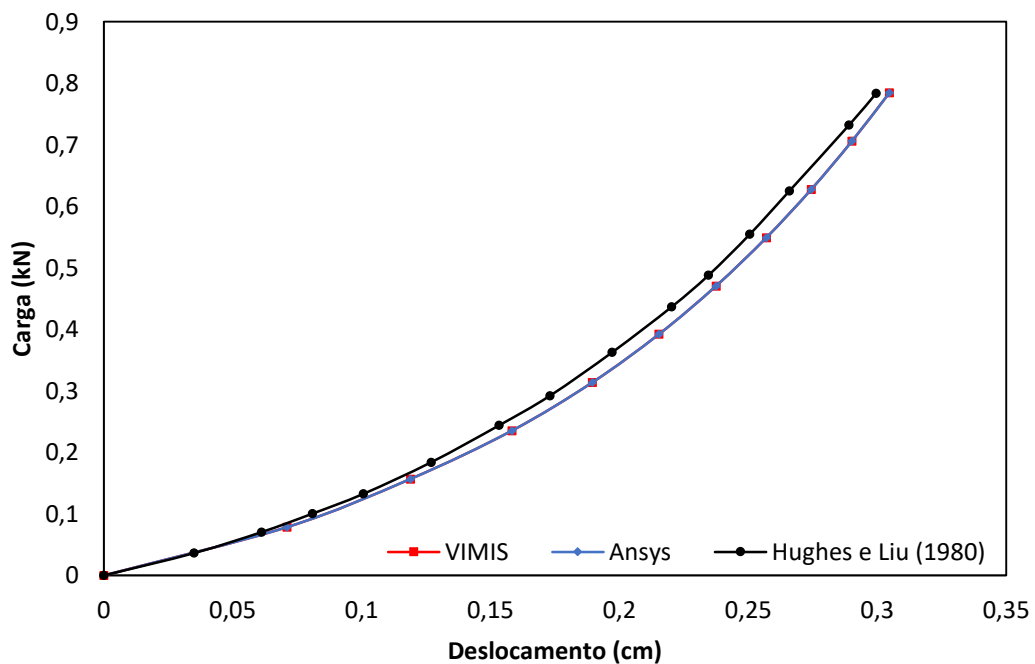


Figura 34 - Resultados placa de Hughes e Liu (1980)

Tabela 8 - Resultados de deflexão máxima

	Deslocamento (cm)	Dif. relativa (%)
Hughes e Liu (1980)	0,299	-
ANSYS	0,306	-2,341
VIMIS	0,304	-1,672

O autor não indica outras propriedades do material, sendo assim, presume-se que o mesmo esteja na faixa elástica do comportamento do material. A placa apresenta tensão de von Mises de 36MPa. Quanto à deformação, a máxima observada é 0,018%, desta forma pode-se afirmar que o problema apresenta pequenas deformações.

#### 5.1.4. Placa Cilíndrica

Considera-se a placa cilíndrica ilustrada na Figura 35. Esta placa é submetida a uma carga central e tem os deslocamentos restringidos em ambas as arestas retas. A placa foi representada por uma malha com 256 elementos de casca fina, malhas menos refinadas foram testadas, entretanto não foram obtidos os resultados desejados.

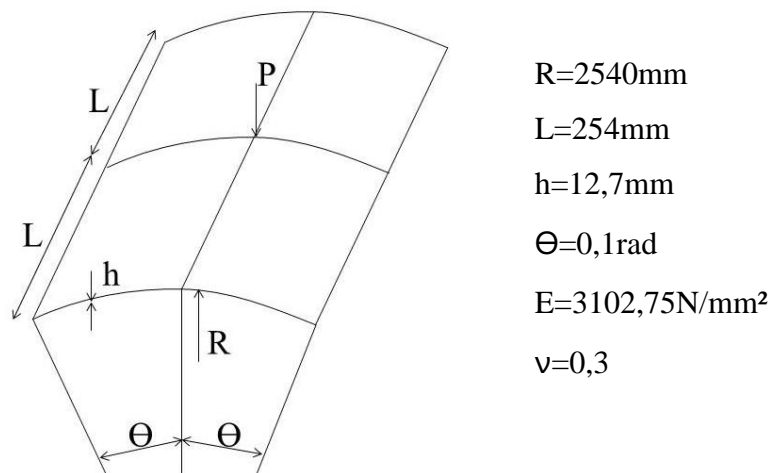


Figura 35 - Placa cilíndrica de Hughes e Liu (1980)

No VIMIS a carga foi dividida em 32 passos de carga e a tolerância utilizada foi de 0,00001, idêntica à utilizada pelos autores. A Figura 36 apresenta as curvas carga *versus* deslocamento vertical medido no centro da placa, obtidas pelo VIMIS e ANSYS. As mesmas são contrastadas com os resultados dos autores Hughes e Liu (1980), utilizando o seu elemento denominado UI. A carga máxima obtida pelos autores é de 2,20kN, além disso, o artigo cita

outros dois resultados encontrados por Bathe e Bolourchi (1980) no valor de 2,24kN e Horrigmoe (1977) no valor de 2,22kN. A carga máxima na análise NLG realizada no VIMIS foi de 2,21kN, sendo o mesmo resultado encontrado no *software* ANSYS. Para os valores de carga citados, apresentam-se na Tabela 9 as respectivas deflexões máximas, bem como o erro em relação ao artigo de referência.

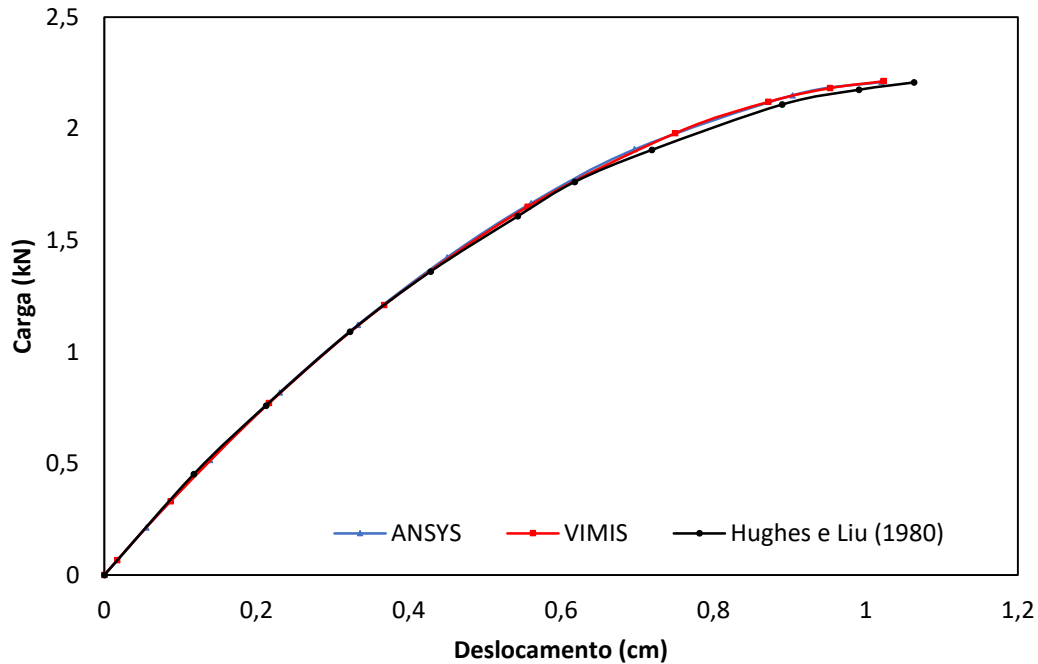


Figura 36 - Resultados casca cilíndrica Hughes e Liu (1980)

Tabela 9 - Resultados casca cilíndrica

Programa	Carga (kN)	Dif. relativa (%)	Deslocamento (cm)	Dif. relativa (%)
Hughes e Liu (1980)	2,200	-	1,063	-
ANSYS	2,210	-0,473	1,023	-3,781
VIMIS	2,213	-0,600	1,020	-4,049

Como a flecha máxima é inferior a espessura da placa tem-se um indicativo que a hipótese de von Kármán é respeitada. Apenas a título de conhecimento é mostrado na Figura 37 os resultados obtidos considerando o tensor de deformações completo. Ambos apresentam o mesmo valor de carga última 2,21kN e deflexão máxima 1,02cm. Ressalta-se que a máxima deformação apresentada é de 0,011%, o que ratifica a consideração de pequenas deformações e o consequente emprego de tensões de engenharia.

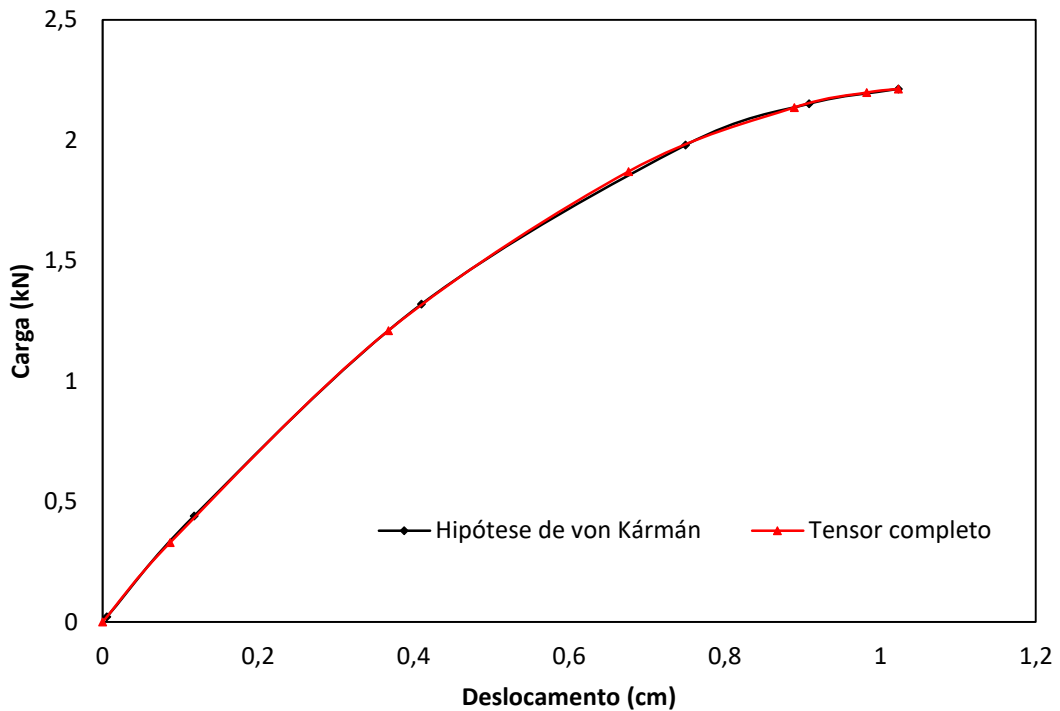


Figura 37 - Comparação entre as análises com diferente tensor de deformação

## 5.2 DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO TENSOR DE DEFORMAÇÃO COMPLETO

Dado o tensor de Green Lagrange na Equação (5.51) para uma placa fina, na qual admite-se que as seções planas normais ao plano médio da placa permanecem planas e normais ao plano médio após a flexão e que a tensão normal na direção  $z$  pode ser desprezada, pode-se organizá-lo conforme suas parcelas lineares (subscrito  $0$ ) e não lineares (subscrito  $L$ ), bem como de acordo com a origem de seu movimento, membrana (sobrescrito  $m$ ) ou placa (sobrescrito  $b$ ), segundo apresentado na Equação (5.52).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m + \boldsymbol{\varepsilon}_0^b + \boldsymbol{\varepsilon}_L^b \quad (5.52)$$

As parcelas lineares de membrana e placa foram explicadas no item 5.1, bem como a parcela não linear de placa, que foi analisada quando foi considerada a hipótese de von Kármán. Desta forma, resta analisar a parcela não linear de membrana, representada na Equação (5.53).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

A deformação não linear de membrana é organizada conforme a Equação (3.18), sendo que a matriz  $\mathbf{S}$  é dada pela Equação (5.54) e a matriz  $\mathbf{G}$ , referente a cada nó  $i$  (1,2,3,4), é dada pela Equação (5.55), esta matriz tem dimensões de 4x12.

$$\mathbf{S}^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{G}^m_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{1}{8} \left( l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial x} - l_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{1}{8} \left( l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial y} - l_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{1}{8} \left( l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial x} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial xy} \right) \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{1}{8} \left( l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial y} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (5.55)$$



Considera-se que  $i = 1,2,3,4$  ;  $m = 5,6,7,8$  ;  $l = 8,5,6,7$  ;  $k = 2,3,4,1$  e  $j = 4,1,2,3$ . Determinada a matriz  $\mathbf{G}$ , pode-se escrever a matriz  $\mathbf{B}_L^m$  conforme Equação (5.56). Esta matriz possui dimensão de  $3 \times 12$ .

$$\mathbf{B}_L^m = \mathbf{S}^m \mathbf{G}^m \quad (5.56)$$

Desta forma, tem-se conhecimento de todas as parcelas da matriz de transformação deformação-deslocamento, de acordo com a Equação (5.57).

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_0^m + \mathbf{B}_L^m, \quad \mathbf{B}_b = z\mathbf{B}_0^b + \mathbf{B}_L^b \quad (5.57)$$

Conforme procedimento de cálculo apresentado no item 5.1, determina-se a matriz de rigidez, sendo esta escrita em parcela linear e não linear nas Equações (5.58) e (5.59), respectivamente.

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^m & \mathbf{K}_0^{mb} \\ \mathbf{K}_0^{bm} & \mathbf{K}_0^b \end{bmatrix} = \int_{V_e} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m & z(\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^b \\ z(\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m & z^2(\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^b \end{bmatrix} dV_e \quad (5.58)$$

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_L^m & \mathbf{K}_L^{mb} \\ \mathbf{K}_L^{bm} & \mathbf{K}_L^b \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^m + (\mathbf{B}_L^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m + (\mathbf{B}_L^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^m & (\mathbf{B}_0^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^b + (\mathbf{B}_L^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^b + z(\mathbf{B}_L^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^b \\ (\mathbf{B}_L^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^m + (\mathbf{B}_L^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^m + z(\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^m & z(\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^b + z(\mathbf{B}_L^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0^b + z(\mathbf{B}_0^b)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L^b \end{bmatrix} dV_e \quad (5.59)$$

A matriz de rigidez geométrica é dada por:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int \begin{bmatrix} (\mathbf{G}^m)^T [\boldsymbol{\sigma}]^m \mathbf{G}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{G}^b)^T [\boldsymbol{\sigma}]^b \mathbf{G}^b \end{bmatrix} dV_e \quad (5.60)$$

em que

$$[\boldsymbol{\sigma}]^m = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x & \sigma_{xy} \\ 0 & 0 & \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

As forças internas são dadas pela Equação (5.62), na qual  $\boldsymbol{\sigma}$  é o vetor de tensões em notação de Voigt.

$$\mathbf{F}_i = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV_e \quad (5.62)$$

$$\mathbf{F}_i = \int \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^T \\ \mathbf{B}_b^T \end{bmatrix} \mathbf{D} [\mathbf{B}_m \quad \mathbf{B}_b] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} dV_e \quad (5.63)$$

$$\mathbf{F}_i = \int \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_0^m + \mathbf{B}_L^m)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m + z\boldsymbol{\varepsilon}_0^b + \boldsymbol{\varepsilon}_L^b) \\ (\mathbf{B}_0^b)^T z\mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m + z\boldsymbol{\varepsilon}_0^b + \boldsymbol{\varepsilon}_L^b) + (\mathbf{B}_L^b)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}_0^m + \boldsymbol{\varepsilon}_L^m + z\boldsymbol{\varepsilon}_0^b + \boldsymbol{\varepsilon}_L^b) \end{bmatrix} dV_e \quad (5.64)$$

A abordagem Lagrangeana Total foi programada para o elemento de casca de quatro nós, considerando grandes deslocamentos através da soma de todas as parcelas do tensor de Green Lagrange, conforme apresentado neste item. Desta maneira, as aplicações numéricas, abordadas a seguir, têm como objetivo a validação da presente formulação no que se refere à parte de membrana através de exemplos com alta não linearidade geométrica. São apresentados três exemplos de membranas, os quais foram utilizados em trabalhos de outros autores. É importante lembrar que a formulação proposta é válida para pequenas deformações e moderadas rotações.

### 5.2.1 Chapa em formato de L

Uma chapa em formato de L é estudada neste exemplo, conforme ilustrado na Figura 38. Esta chapa está engastada e uma força horizontal distribuída é aplicada no seu extremo. Consideram-se todas as propriedades e geometria adimensionais, o material é considerado elástico linear com módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson de  $3 \times 10^7$  e 0,3, respectivamente. O presente exemplo foi utilizado por diversos autores, incluindo Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014), Zouari *et al.* (2016) e Battini (2008). A Figura 38 b) ilustra a malha de elementos finitos empregada pelos autores Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014), totalizando 304 elementos quadráticos.

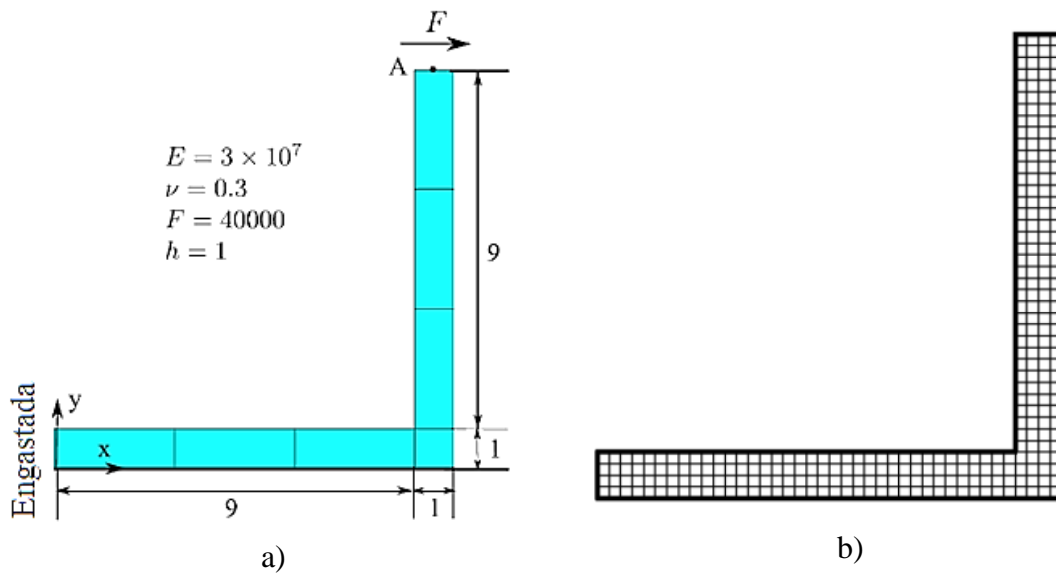


Figura 38 – a) Chapa L (Adaptado de Zouari *et al.*, 2016), b) malha de elementos finitos utilizada por Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014)

Entretanto, foi necessária uma malha de 900 elementos para obter resultados compatíveis com os demais autores, além disso, empregou-se 60 incrementos de carga e tolerância igual 0,005. Foram testadas malhas mais refinadas, entretanto não foram constatadas diferenças significativas no resultado. Modelo idêntico foi feito no ANSYS, com mesmos parâmetros de análise e mesma malha de elementos finitos, utilizando o elemento *Shell63*.

A Figura 39 apresenta as curvas carga *versus* deslocamento horizontal no topo da chapa em L, no nó central, obtidas pelo VIMIS, ANSYS e pelos autores Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014). Percebe-se uma boa concordância nesse comportamento, conforme pode ser confirmado na Tabela 10, onde são apresentados deslocamentos máximos e erro percentual obtido em relação ao artigo de referência.

Tabela 10 - Resultados de deslocamento máximo

	Deslocamento (cm)	Dif. relativa (%)
Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014)	6,761	-
ANSYS	6,796	0,512
VIMIS	6,680	1,19

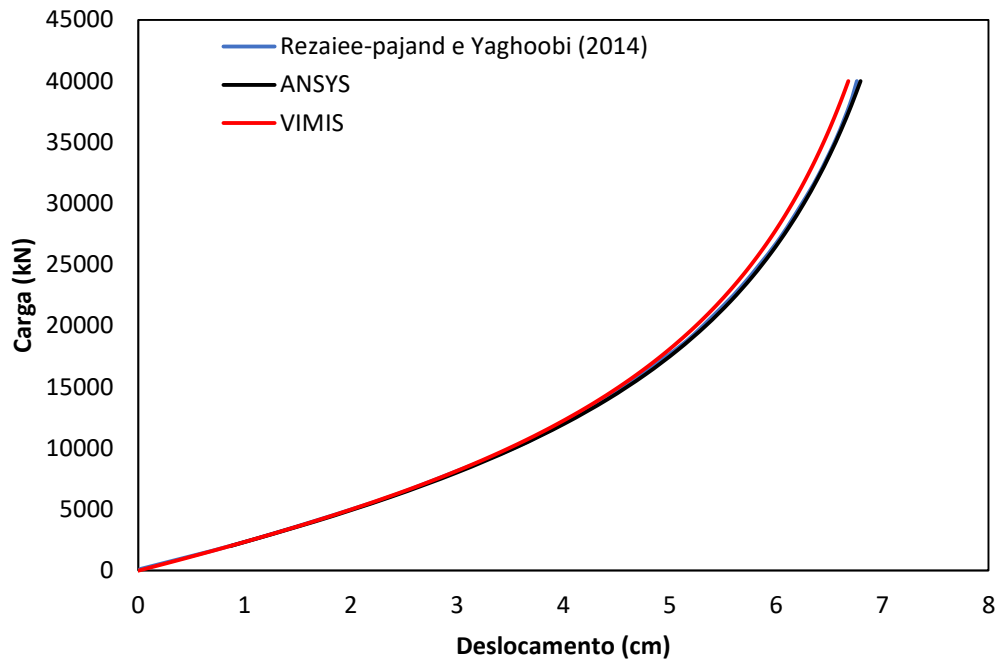


Figura 39 - Resultados da chapa em L

Através do pós processamento realizado no GiD, é ilustrado a deformada da chapa na Figura 40. Ao analisar as deformações de von Mises, verifica-se que a deformação máxima é menor que 10%, caracterizando um problema de pequenas deformações. Uma característica do elemento implementado no VIMIS é que a equação constitutiva do material é expressa num referencial local que acompanha a rotação do elemento.

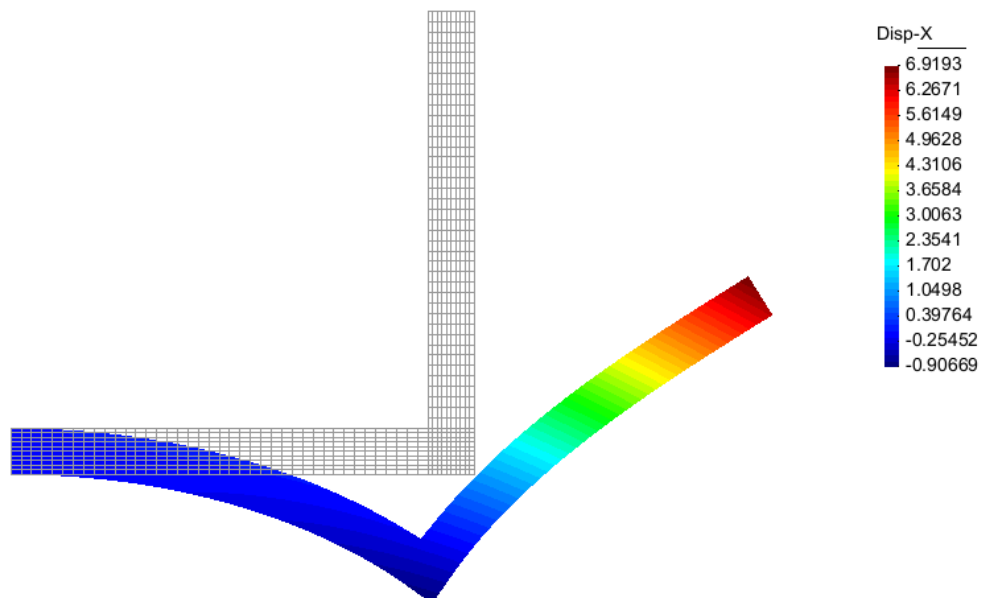


Figura 40 - Deformada da chapa em L

Com objetivo de demonstrar a importância da implementação do tensor de deformações completo, é apresentado na Figura 41 o resultado obtido através da análise considerando apenas as hipóteses de von Kármán. Percebe-se que o comportamento é linear, pois essa consideração não é capaz de analisar não linearidade geométrica em casos planos de tensão.

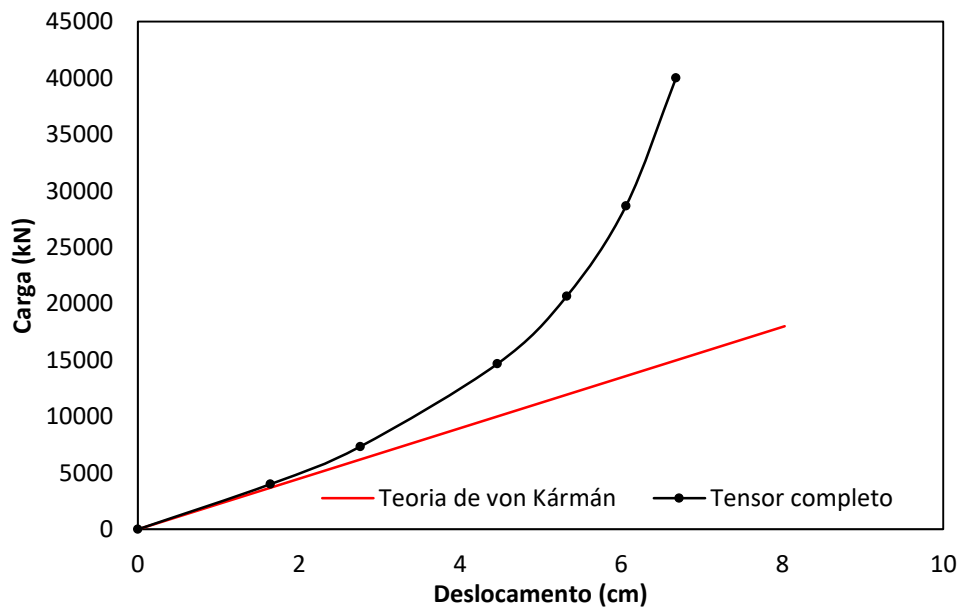


Figura 41 - Comparação entre os resultados de diferentes tensores de deformação

### 5.2.2 Viga engastada

Considera-se uma viga engastada submetida a uma carga de cortante concentrada distribuída no seu extremo livre, conforme ilustrado na Figura 42. O material é considerado elástico linear com módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson iguais a 206GPa e 0,3, respectivamente. A malha utilizada pelo autor Khosravi *et al.* (2007) é de 80 elementos triangulares, e a força é aplicada conforme a Figura 42.

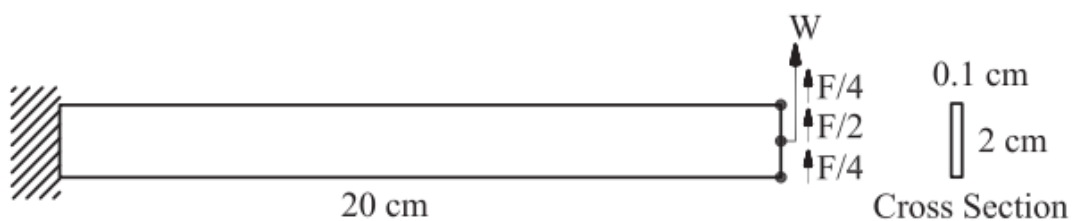


Figura 42 - Geometria da viga engastada (KHOSRAVI *et al.*, 2007)

Os modelos no ANSYS e no VIMIS são idênticos em número de elementos finitos, totalizando 40 elementos. Os parâmetros de convergência usados para a análise, também são os mesmos, tolerância no valor de 0,005 e 40 passos de carga.

Foi analisado o deslocamento vertical no extremo da viga no nó central, obtidas pelo VIMIS, ANSYS e pelos autores Khosravi *et al.*(2007) e Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014). Este comportamento pode ser observado na Figura 43 e na Tabela 11, onde podem ser apreciados os valores do deslocamento máximo para a carga aplicada de 6000N, bem como o erro dos modelos quando comparados aos resultados dos autores.

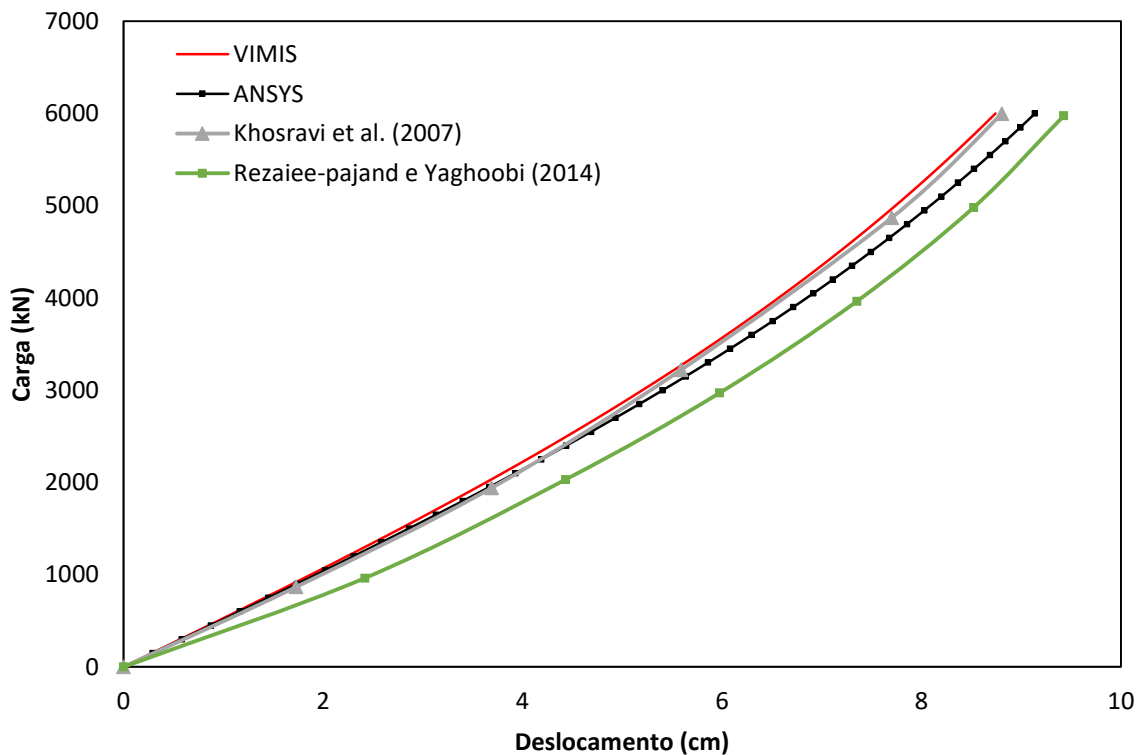


Figura 43 - Resultados de deslocamento vertical da viga engastada

Tabela 11 - Resultados de deslocamento máximo

	Deslocamento (cm)
Khosravi <i>et al.</i> (2007)	8,807
Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014)	9,428
ANSYS	9,139
VIMIS	8,742

A Figura 44 ilustra a deformada da viga obtida com VIMIS. Analisando a distribuição de deformações equivalente na viga, o valor máximo resultante é de 0,0734, o qual está dentro

do limite que permite a aproximação do tensor de deformações com a deformação de engenharia.

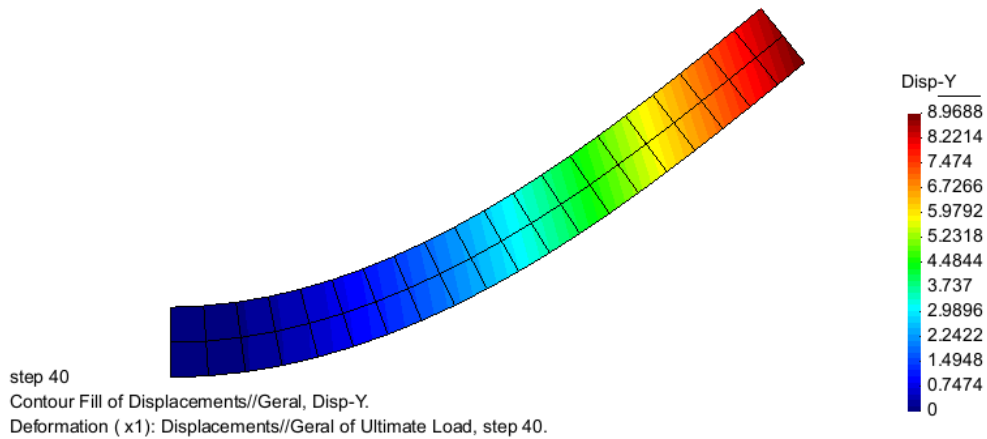


Figura 44 - Deformada da viga engastada

### 5.2.3 Viga fina engastada submetida à força cortante no plano

No presente problema, consideram-se todas as propriedades e geometria adimensionais. A viga com seção retangular é engastada num extremo e livre no outro, onde é aplicada uma carga vertical de 200. As dimensões da viga estão ilustradas na Figura 45. É empregado um material elástico linear com módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson de  $10^6$  e 0,3, respectivamente.

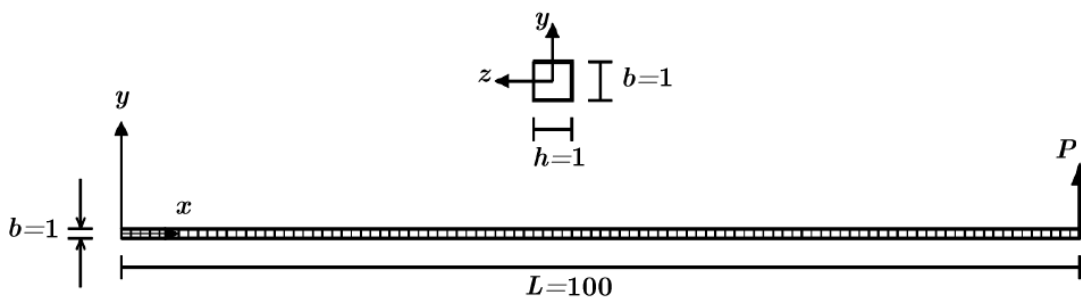


Figura 45 - Geometria da viga fina engastada (Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014))

A viga foi modelada por uma malha com 1600 elementos finitos no software ANSYS e VIMIS. A carga é concentrada no nó de extremidade e foi aplicada em 102 incrementos e a tolerância utilizada foi de 0,005, para ambas as análises. A Figura 46 apresenta o desenvolvimento dos deslocamentos verticais no nó de extremidade onde é aplicada a carga. É possível dizer que o VIMIS é capaz de representar bem este comportamento, uma vez que apresenta erro relativo aos autores igual a 1,89%, conforme a Tabela 12.

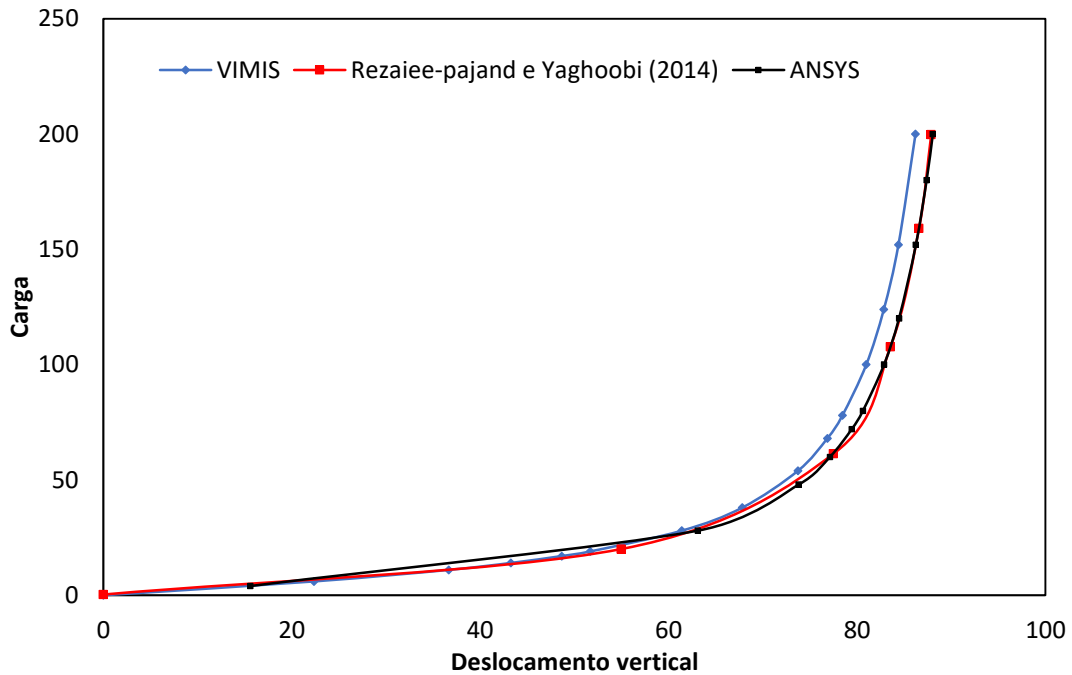


Figura 46 – Deslocamento vertical da viga fina engastada

Os autores também investigam em seu trabalho o deslocamento horizontal no extremo livre da viga fina engastada, este comportamento pode ser observado na Figura 47. Os valores máximos de deslocamento para a carga aplicada de 200 são apresentados na Tabela 12.

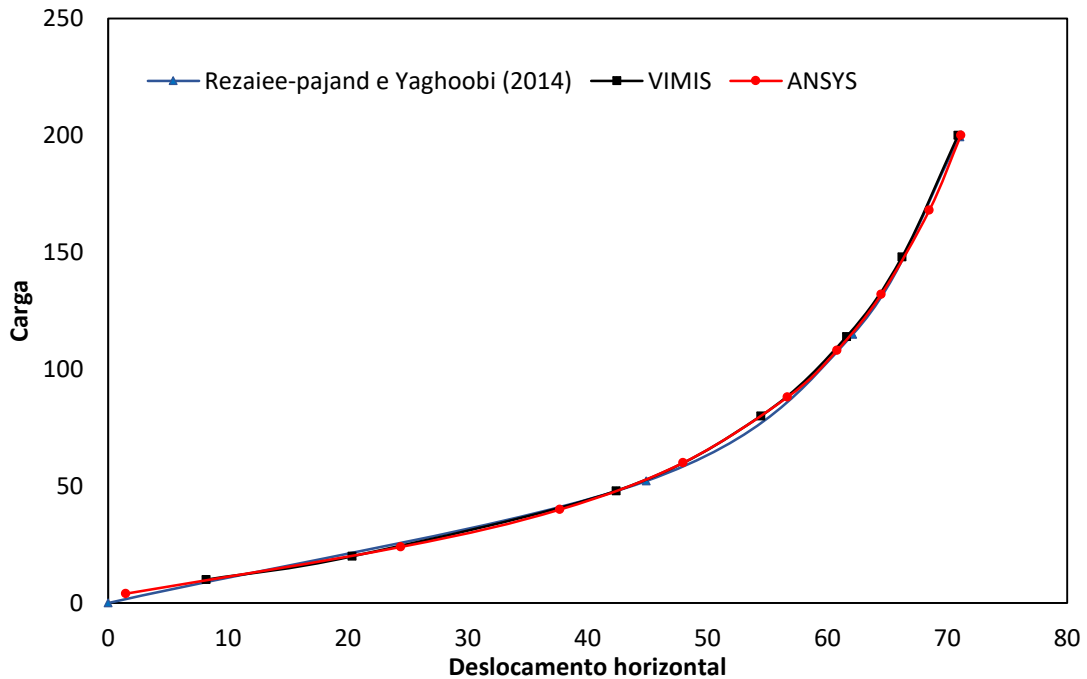


Figura 47 – Deslocamento horizontal da viga fina engastada



Tabela 12 - Resultados de deslocamento máximo

	Deslocamento vertical	Dif. relativa (%)	Deslocamento horizontal	Dif. relativa (%)
Rezaiee-pajand e Yaghoobi (2014)	87,879	-	71,063	-
ANSYS	88,051	-0,196	71,138	-0,106
VIMIS	86,213	1,896	70,906	0,220

Na Figura 48 é mostrada a distribuição da deformação equivalente de von Mises, com valor máximo de 0,035, conjuntamente com a deformada da viga. Conforme mencionado nos exemplos anteriores, este valor caracteriza pequenas deformações. Ressalta-se que em ambas as análises a força aplica no nó é conservativa.

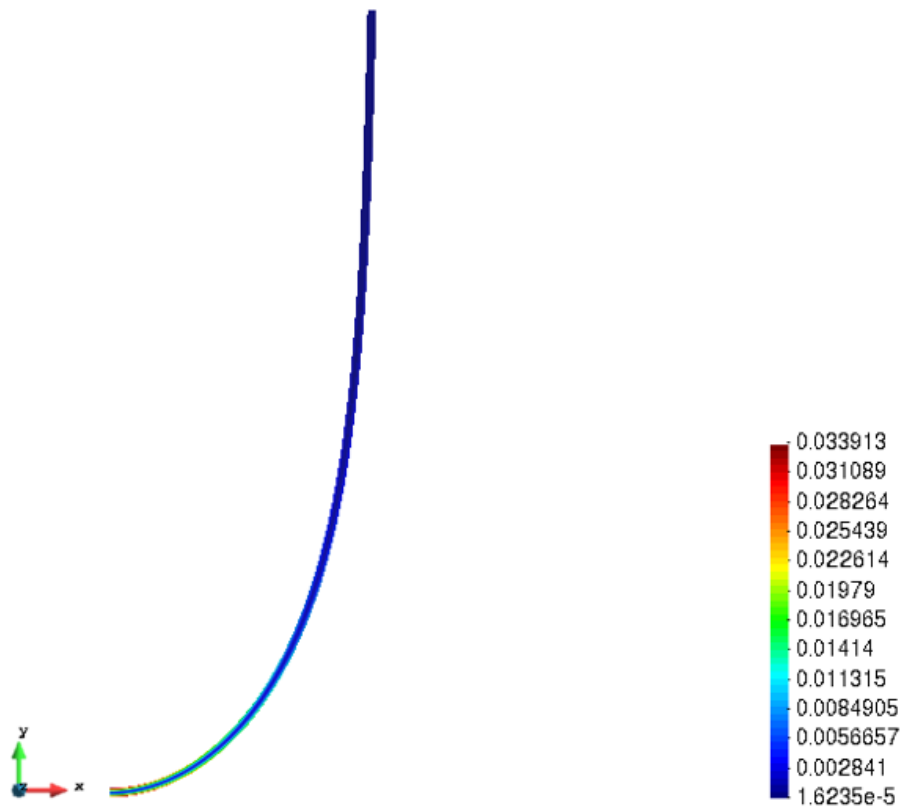


Figura 48 – Deformação equivalente na viga engastada

### 5.3 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

A partir das aplicações numéricas realizadas, pode-se concluir que os resultados para análise NLG no elemento de casca fina foram obtidos conforme o esperado, para ambas as hipóteses adotadas (von Kármán e tensor completo), mostrando boa concordância com os

resultados de outros autores. Ressalta-se, o elemento foi testado não somente com placas planas, mas também em cascas cilíndricas onde o comportamento NLG é de suma importância, mostrando-se adequado para este tipo análise.

Primeiramente, foi adotada a hipótese de von Kármán para a formulação da casca fina. Nestas análises foi possível demonstrar a importância da consideração da não linearidade geométrica em casos de projeto, por exemplo, já que permite especificar uma espessura menor se o deslocamento obtido for aceito. Isso ocorre, pois a resposta NLG da placa resulta em uma maior rigidez gerada pelas forças da membrana de tração que são desenvolvidas pela ação de flexão.

Esta hipótese considera que os grandes deslocamentos são causados apenas pela flexão. Entretanto, quando atua um carregamento na estrutura, em que a maior quantidade de energia absorvida se dá por deformação de membrana e esta energia é transformada em energia associada a deformação por flexão, a estrutura pode entrar em colapso por flambagem. É a presença da rigidez de membrana a principal responsável pela subsequente perda de rigidez no regime pós flambagem (SILVEIRA, 1990).

Desta forma, como o objetivo de trabalhos futuros é a implementação da captura de flambagem local no perfil de aço, em um segundo momento, foi adotada a não linearidade geométrica na rigidez de membrana. Com esta consideração, o tensor de deformações na formulação de casca fina é implementado por completo, diferentemente do elemento da laje de concreto. Esta implementação demonstrou um bom comportamento quando comparado a outros autores e a outro *software*, quando analisados problemas com estado plano de tensões.

Além disso, os resultados utilizando o tensor completo de deformações foram comparados aos valores obtidos com a consideração da hipótese de von Kármán. Essa comparação foi realizada, pois foi verificado que em alguns exemplos estudados a limitação que descreve que a deflexão deve ser de mesma ordem da espessura não era atendida. Desta forma, foi possível observar que para maiores deflexões a consideração do tensor de deformações completo resultou em um comportamento com maior rigidez.

## 6. ELEMENTO UNIDIMENSIONAL PARA CABO DE PROTENSÃO INTERNA

O cabo de protensão é modelado através de um elemento finito unidimensional incorporado ao elemento finito de casca degenerada que modela a laje de concreto, de acordo com a metodologia de Povóas (1991), conforme ilustrado na Figura 49. Desta maneira, a malha do cabo deve coincidir com a malha dos elementos da laje de concreto. Na análise, definem-se as contribuições que o elemento de cabo faz ao elemento de concreto ao qual pertence. Essas contribuições dizem respeito às cargas aplicadas, tensões produzidas pelo efeito da protensão, deformações e incremento de rigidez.

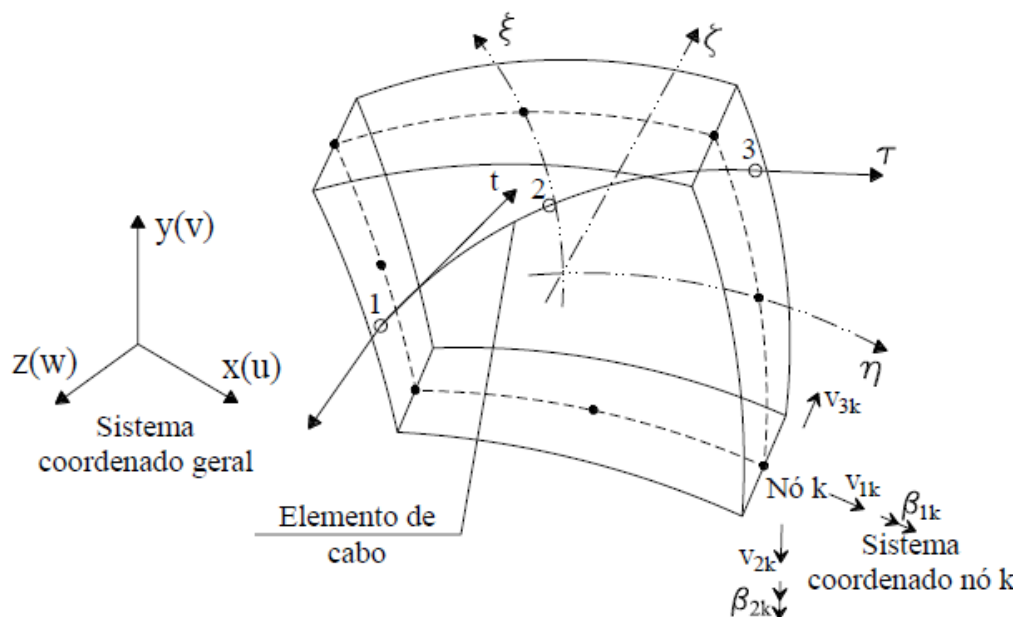


Figura 49 - Representação do cabo de protensão incorporado dentro do elemento de casca (TAMAYO, 2011)

A geometria do elemento estudado é definida por três nós, as coordenadas globais do segmento do cabo são obtidas na fase de pré-processamento, através do *software* GiD, conforme procedimento descrito por Franco (2018). Enquanto que as coordenadas paramétricas são calculadas no código computacional utilizando um processo de mapeamento inverso, ou seja, a partir das suas coordenadas globais são obtidas as coordenadas paramétricas dos três pontos que definem a geometria do cabo (dentro de cada elemento de concreto atravessado). Sugere-

se a leitura dos trabalhos de Moreno (2016) e Franco (2018), que explicam detalhadamente este processo.

A definição da geometria de um segmento de cabo embutido em um elemento de casca é dada na Equação (6.1) com  $\mathbf{x}_p(\tau) = \{x \ y \ z\}$ , em que  $N_j'(\tau)$  são as funções de interpolação adotadas para um elemento unidimensional parabólico, expressas pela Equação (6.2), onde  $\tau$  é a coordenada curvilínea correspondente e o subscrito  $p$  refere-se a protensão. Adicionalmente defina-se um sistema local  $(x', y', z')$  em cada ponto de integração ao longo do segmento correspondente.

$$\{x_p(\tau)\} = \sum_{j=1}^3 N_j'(\tau) \{x_{p,j}\} \quad (6.1)$$

$$N_1'(\tau) = -\frac{1}{2}\tau(1-\tau) \quad ; \quad N_2'(\tau) = (1-\tau^2) \quad ; \quad N_3'(\tau) = \frac{1}{2}\tau(1+\tau) \quad (6.2)$$

O vetor tangente unitário  $\{\mathbf{t}(\tau)\}$ , mostrado na Figura 49, é definido na Equação (6.3), sendo  $\mathbf{v}(\tau)$  o vetor definido pela Equação (6.4) utilizando os vetores unitários do sistema cartesiano global  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}$  e  $\mathbf{k})$ , entretanto sua norma  $|\mathbf{v}(\tau)|$  é obtida pela Equação (6.5).

$$\mathbf{t}(\tau) = \frac{\mathbf{v}(\tau)}{|\mathbf{v}(\tau)|} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{v}(\tau) = \frac{dx}{d\tau} \mathbf{i} + \frac{dy}{d\tau} \mathbf{j} + \frac{dz}{d\tau} \mathbf{k} \quad (6.4)$$

$$|\mathbf{v}(\tau)| = v = \left[ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.5)$$

A direção do vetor tangente unitário  $\{t(\tau)\}$  define a orientação do eixo local  $x'$  no ponto de interesse, entretanto as orientações dos eixos  $y'$  e  $z'$ , fica condicionada apenas pela obrigatoriedade de definir um triedro local. Dessa forma, os vetores de base unitários  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  e  $\mathbf{k}'$  do sistema local, são escritos de acordo com as Equações (6.6)-(6.8).

$$\mathbf{i}' = \mathbf{t}(\tau) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{j}' = \frac{1}{(b^2 + a^2)^{1/2}} (-b\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \quad (6.7)$$

$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{i}' \times \mathbf{j}'}{|\mathbf{i}' \times \mathbf{j}'|} \quad (6.8)$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  definidos pela Equação (6.9).

$$a = \frac{1}{\nu} \frac{dx}{d\tau} ; b = \frac{1}{\nu} \frac{dy}{d\tau} ; c = \frac{1}{\nu} \frac{dz}{d\tau} \quad (6.9)$$

A matriz de rotação, que relaciona os sistemas de eixos coordenados local e global, é então definida através dos vetores unitários, conforme as Equações (6.10) e (6.11). Esta matriz apresenta o mesmo significado da matriz definida na Equação (4.10).

$$[\theta] = [\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'] \quad (6.10)$$

$$[\theta] = \begin{bmatrix} a & \frac{-b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} & \frac{-ac}{[(ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2]^{1/2}} \\ b & \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}} & \frac{-bc}{[(ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2]^{1/2}} \\ c & 0 & \frac{a^2 + b^2}{[(ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2]^{1/2}} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Conhecendo a matriz de rotação, podem-se definir as derivadas parciais das componentes dos deslocamentos no sistema referencial local (Equação 4.18), sendo apenas de interesse a componente axial do tensor de Green Lagrange conforme apresentado na Equação (6.12).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x'} = \frac{du'}{dx'} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du'}{dx'} \right)^2 + \left( \frac{dv'}{dx'} \right)^2 + \left( \frac{dw'}{dx'} \right)^2 \right] \quad (6.12)$$

Realizando a substituição da Equação (6.11) em (4.18), conforme mostrado na Equação (6.13), tem-se o resultado apresentado em (6.14) para o termo linear da componente de deformação.

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = [a \quad b \quad c] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + ab \frac{\partial u}{\partial y} + ac \frac{\partial u}{\partial z} + ab \frac{\partial v}{\partial x} + b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + cb \frac{\partial v}{\partial z} + ac \frac{\partial w}{\partial x} + bc \frac{\partial w}{\partial y} + c^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6.14)$$

O campo de deslocamento deve ser o mesmo do elemento de concreto, de acordo com a Equação (4.14), desta forma as derivadas globais que são apresentadas no Capítulo 4 definem a matriz de transformação deformação-deslocamento da componente linear da armadura de protensão  $\mathbf{B}_0^p$ .

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \boldsymbol{\varepsilon}_{x'} = \left[ \dots (B_0^1)_k \quad (B_0^2)_k \quad (B_0^3)_k \quad (B_0^4)_k \quad (B_0^5)_k \dots \right] \begin{bmatrix} \cdot \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

sendo cada componente definida por:

$$(B_0^1)_k = \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \quad (6.16)$$

$$(B_0^2)_k = \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \quad (6.17)$$

$$(B_0^3)_k = \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_0^4)_k &= \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \\
&+ \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^y + \\
&+ \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^y + \left( ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{1k}^y + \quad (6.19) \\
&+ \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^z + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^z + \\
&+ \left( ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{1k}^z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}_0^5)_k &= \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^x + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^x + \\
&+ \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{2k}^x + \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^y + \\
&+ \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^y + \left( ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{2k}^y + \quad (6.20) \\
&+ \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^z + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^z + \\
&+ \left( ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{2k}^z
\end{aligned}$$

A componente de deformação não linear é expressa de acordo com a Equação (6.21), onde, como usual, as matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{R}$  são definidas nas Equações (6.22)-(6.23), respectivamente.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du'}{dx'} \right)^2 + \left( \frac{dv'}{dx'} \right)^2 + \left( \frac{dw'}{dx'} \right)^2 \right] \quad (6.21)$$

$$\mathbf{S}^p = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{R}^p = \mathbf{G}^p \mathbf{u}^p = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

A matriz  $\mathbf{G}$ , por sua vez, é definida na Equação (6.24), sendo a sua primeira componente definida na Equação (6.25).

$$\mathbf{G}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{u}^p = \frac{\partial u'}{\partial x'}, \text{ logo } \mathbf{G}_1 = \mathbf{B}^p_0 \quad (6.25)$$

Já para a segunda componente da matriz  $\mathbf{G}$ , tem-se:

$$\mathbf{G}_2 \mathbf{u}^p = \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad (6.26)$$

Considerando as relações anteriormente definidas na Equação (4.18) e (6.11), pode-se escrever a derivada do deslocamento  $v'$  como:

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} = [a \quad b \quad c] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \\ \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

que pode ser rescrita como:

$$\frac{dv'}{dx'} = \frac{1}{(a^2 + b^2)} \left( -ab \frac{du}{dx} - b^2 \frac{du}{dy} - bc \frac{du}{dz} + a^2 \frac{dv}{dx} + ab \frac{dv}{dy} + ac \frac{dv}{dz} \right) \quad (6.28)$$

Explicitando as derivadas parciais das componentes de deslocamentos referidas às coordenadas curvilíneas, em termos dos deslocamentos nodais do elemento de casca, obtém-se a segunda componente da matriz  $\mathbf{G}$ , conforme a Equação (6.29).



$$\frac{dv'}{dx'} = \left[ \dots (G_{2,1})_k \quad (G_{2,2})_k \quad (G_{2,3})_k \quad (G_{2,4})_k \quad (G_{2,5})_k \dots \right] \begin{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{u}_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

com  $k=1, n$ , onde  $n$  é o número de nós do elemento de casca. Sendo estes termos expressos por:

$$G_{2,1} = \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \left[ \left( -ab \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + \left( -ab \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right] \quad (6.30)$$

$$(G_{2,2})_k = \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \left[ \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right] \quad (6.31)$$

$$(G_{2,3})_k = 0 \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} (G_{2,4})_k = \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} & \left[ \left( -ab \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \left( -ab \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \right. \\ & + \left( -ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^y + \\ & \left. + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^y + \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{1k}^y \right] \quad (6.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (G_{2,5})_k = -\frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} & \left[ \left( -ab \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^y + \left( -ab \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^y \right. \\ & + \left( -ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{2k}^y + \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^x \\ & \left. + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^x + \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{2k}^x \right] \quad (6.34) \end{aligned}$$

Por fim, determina-se a última componente de  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G}_3 \mathbf{u}^p = \frac{\partial w'}{\partial x'} \quad (6.35)$$

Considerando mais uma vez as relações definidas em (4.18) e (6.11), pode-se escrever a derivada do deslocamento  $w'$  em relação a  $x'$  como:

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = [a \quad b \quad c] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2 + b^2 \end{bmatrix} \frac{1}{\left[ (ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2 \right]^{1/2}} \quad (6.36)$$

Explicitando:

$$\frac{\partial w'}{\partial x'} = \frac{1}{\left[ (ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2 \right]^{1/2}} \left( -a^2 c \frac{\partial u}{\partial x} - abc \frac{\partial u}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial u}{\partial z} - abc \frac{\partial v}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial v}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right. \\ \left. + a(a^2 + b^2) \frac{\partial w}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial w}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (6.37)$$

E, desta forma:

$$\frac{dw'}{dx'} = \left[ \dots (G_{3,1})_k \quad (G_{3,2})_k \quad (G_{3,3})_k \quad (G_{3,4})_k \quad (G_{3,5})_k \dots \right] \begin{bmatrix} \cdot \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Com as componentes do nó  $k$  expressas por:

$$G_{3,1} = \frac{1}{\left[ (ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2 \right]^{1/2}} \left[ \left( -a^2 c \frac{\partial \xi}{\partial x} - abc \frac{\partial \xi}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \right. \\ \left. + \left( -a^2 c \frac{\partial \eta}{\partial x} - abc \frac{\partial \eta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right] \quad (6.39)$$

$$(G_{3,2})_k = \frac{1}{\left[ (ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2 \right]^{1/2}} \left[ \left( -abc \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \left( -abc \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2 c \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right] \quad (6.40)$$

$$(G_{3,3})_k = \frac{1}{\left[ (ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2 \right]^{1/2}} \left[ \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \right] \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned}
(G_{3,4})_k = & \frac{1}{\left[ (ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2 \right]^{1/2}} \left[ \left( -a^2c \frac{\partial \xi}{\partial x} - abc \frac{\partial \xi}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \right. \\
& + \left( -a^2c \frac{\partial \eta}{\partial x} - abc \frac{\partial \eta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \\
& + \left( -a^2c \frac{\partial \zeta}{\partial x} - abc \frac{\partial \zeta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{1k}^x + \\
& + \left( -abc \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2c \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^y + \\
& + \left( -abc \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2c \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^y + \\
& + \left( -abc \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b^2c \frac{\partial \zeta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{1k}^y + \\
& + \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^z + \\
& + \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^z + \\
& \left. + \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{1k}^z \right] \quad (6.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(G_{3,5})_k = & \frac{1}{\left[ (ac)^2 + (bc)^2 + (a^2 + b^2)^2 \right]^{1/2}} \left[ \left( -a^2c \frac{\partial \xi}{\partial x} - abc \frac{\partial \xi}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^x + \right. \\
& + \left( -a^2c \frac{\partial \eta}{\partial x} - abc \frac{\partial \eta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^x + \\
& + \left( -a^2c \frac{\partial \zeta}{\partial x} - abc \frac{\partial \zeta}{\partial y} - ac^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{2k}^x + \\
& + \left( -abc \frac{\partial \xi}{\partial x} - b^2c \frac{\partial \xi}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^y + \\
& + \left( -abc \frac{\partial \eta}{\partial x} - b^2c \frac{\partial \eta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^y + \\
& + \left( -abc \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b^2c \frac{\partial \zeta}{\partial y} - bc^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{2k}^y + \\
& + \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^z + \\
& + \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^z + \\
& \left. + \left( a(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial x} + b(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial y} + c(a^2 + b^2) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) N_k \frac{h_k}{2} V_{2k}^z \right] \quad (6.43)
\end{aligned}$$

Obtidas as matrizes  $\mathbf{S}^p$  e  $\mathbf{G}^p$ , que determinam a matriz de transformação deformação-deslocamento  $\mathbf{B}_L^p$  associados aos termos não lineares da componente de deformação axial, pode-se escrever a matriz de rigidez do elemento  $\mathbf{K}^p$  como a soma de três matrizes, designadamente: a matriz de rigidez linear  $\mathbf{K}_0^p$ ; a matriz de rigidez dos grandes deslocamentos  $\mathbf{K}_L^p$ ; e a matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_\sigma^p$ , de acordo com a Equação (6.44).

$$\mathbf{K}^p = \mathbf{K}_0^p + \mathbf{K}_L^p + \mathbf{K}_\sigma^p \quad (6.44)$$

Sendo:

$$\mathbf{K}_0^p = \int_l (\mathbf{B}_0^p)^T E_p \mathbf{B}_0^p A_p dl \quad (6.45)$$

$$\mathbf{K}_L^p = \int_l \left( (\mathbf{B}_0^p)^T E_p \mathbf{B}_L^p + (\mathbf{B}_L^p)^T E_p \mathbf{B}_0^p + (\mathbf{B}_L^p)^T E_p \mathbf{B}_L^p \right) A_p dl \quad (6.46)$$

$$\mathbf{K}_\sigma^p = \int_l (\mathbf{G}^p)^T [\sigma] \mathbf{G}^p A_p dl \quad (6.47)$$

Com a tensão  $[\sigma]$  dada por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_p \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

onde  $l$  e  $A_p$  representam, respectivamente, o comprimento e área do segmento de cabo embutido no elemento de casca, entretanto  $\sigma_p$  é a tensão atuante no cabo. O vetor que contém a contribuição da armadura para a determinação das forças nodais equivalentes, relativas aos nós do elemento de casca, vem definido pela relação:

$$\mathbf{p}_p = \int_l (\mathbf{B}_0^p + \mathbf{B}_L^p)^T \sigma_p A_p dl \quad (6.49)$$

## 6.1 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste item, o elemento finito unidimensional incorporado ao elemento finito de casca degenerada, o qual modela o cabo de protensão, é testado através de três aplicações numéricas.

Consideram-se uma viga de concreto armado, uma laje com armaduras em ambas direções e uma coluna pré-tensionada. É importante salientar que a viga e a laje estudadas não são pré-tensionadas, porém são trabalhadas com cabos discretos. Deve-se destacar a necessidade de análise NLG no exemplo de protensão.

### 6.1.1 Viga de Figueiras (1983)

Figueiras (1983) analisou os efeitos da análise NLG, relacionando-os à razão de deflexão em relação à espessura. O autor utilizou duas vigas com diferentes alturas, porém para o presente trabalho abordou-se somente a viga com maior altura. Destaca-se também a importância das condições de apoio sobre os efeitos de não linearidade geométrica.

A viga analisada é apoiada em seus extremos, entretanto é submetida a uma força concentrada no meio do vão como mostrado na Figura 50. Duas condições de apoio são testadas: apoios simples e duplos. A viga possui uma taxa de armadura superior e inferior de 1,135%. As propriedades dos materiais são apresentadas na

Tabela 13.

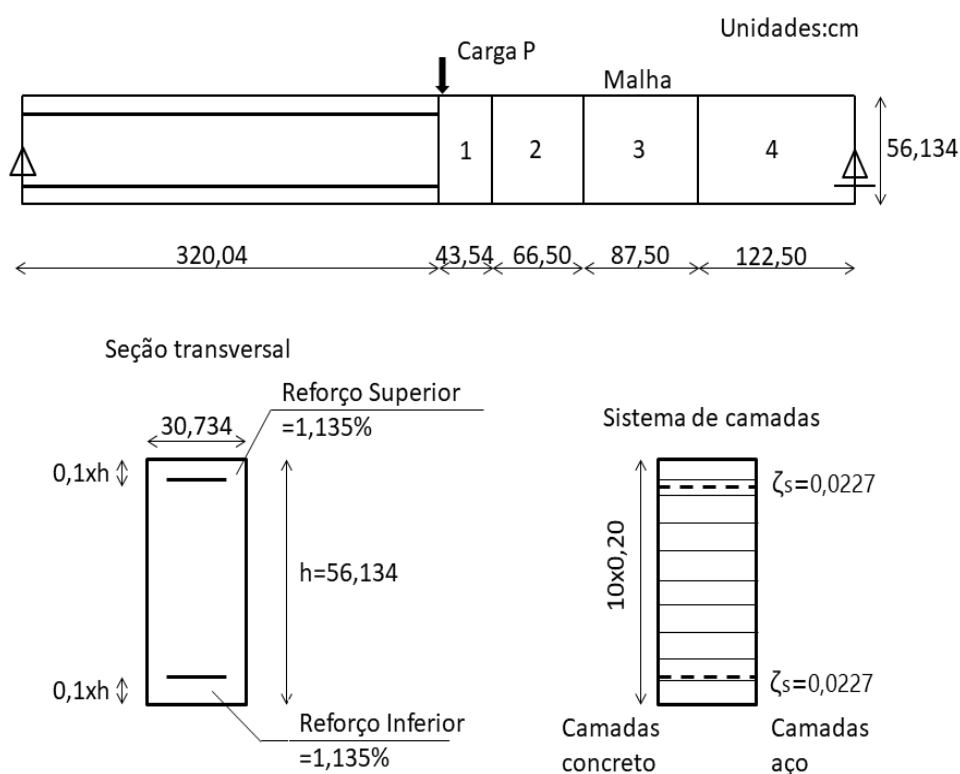


Figura 50 - Geometria da viga de Figueiras (1983): Armadura distribuída em camada equivalente

Tabela 13 - Propriedades dos materiais (cm, kN)

Concreto		Aço	
Módulo de Elasticidade $E_c$	2980	Módulo de elasticidade $E_s$	20530
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,15	Módulo de elasticidade $E'_s$	2053
Resistência à compressão	3,5	Tensão de escoamento $\sigma_y$	55.2
Resistência à tração	0,43		
Deformação última à compressão	0,0035		

Foi considerada a simetria da viga e adotou-se uma malha com quatro elementos de casca. Inicialmente a seção da viga é dividida em dez camadas iguais de concreto e duas camadas distribuídas de aço em sua altura, de maneira similar à discretização utilizada por Figueira (1983). A Figura 51 apresenta as curvas carga *versus* deslocamento vertical no centro da viga, para o caso LG com apoios simples (AS) e duplos (AD). Destaca-se que nesses casos é considerado o comportamento não linear dos materiais envolvidos.

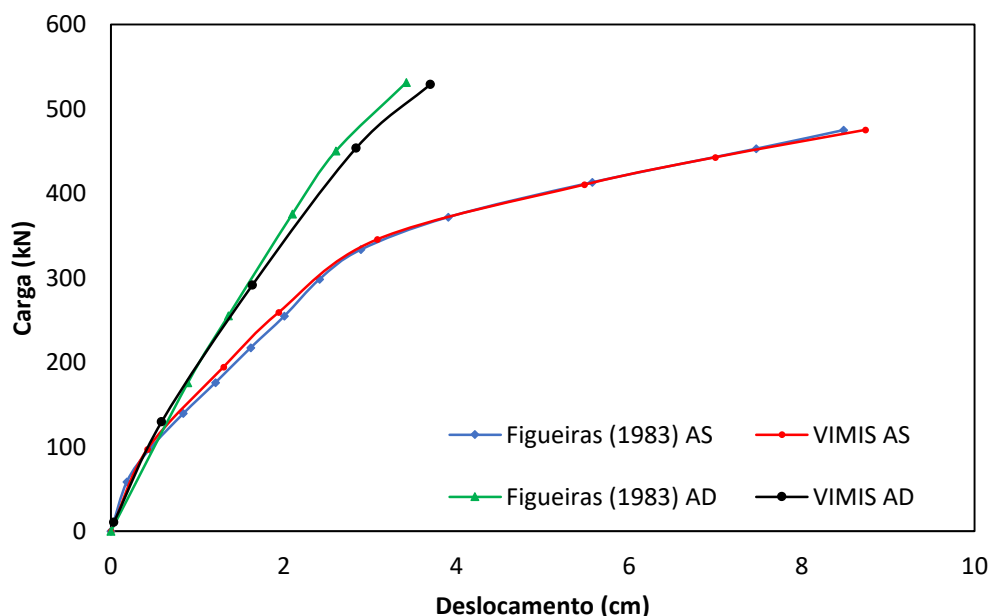


Figura 51 - Resultado da análise considerando o concreto e o aço em camadas

Conforme pode ser apreciado na Figura 51, foram obtidos resultados compatíveis com o referido autor para uma análise LG e não linear dos materiais, as pequenas diferenças se devem a que os modelos constitutivos na fase de fissuração não são totalmente idênticos. Na Tabela 14, apresentam-se os valores de carga e deslocamentos máximos obtidos na análise. O

autor comenta que a falha da viga ocorre por esmagamento do concreto na seção ao meio de vão, o mesmo se verifica na presente análise para ambos os casos de restrição de apoio.

Tabela 14 - Resultados da viga no modelo de aço em camadas

Apoio Simples				
	Deslocamento (cm)	Erro (%)	Carga (kN)	Erro (%)
Figueiras (1983)	8,485	-	475,000	-
VIMIS	8,735	-2,949	475,200	-0,042
Apoio Duplo				
	Deslocamento (cm)	Erro (%)	Carga (kN)	Erro (%)
Figueiras (1983)	3,421	-	531,270	-
VIMIS	3,700	-8,162	529,200	0,390

Em um segundo momento, o aço deixa de ser modelado como camada equivalente distribuída e esta área é trabalhada através de cabos discretos. Utiliza-se, arbitrariamente, 14 cabos para cobrir a área de aço utilizada pelo autor, a seção transversal é ilustrada na Figura 52.

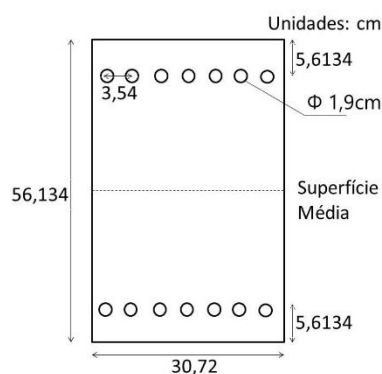


Figura 52 - Seção transversal com armadura discreta

A Figura 53 apresenta a curva força *versus* deslocamento vertical para a seção ao meio do vão com apoio simples, onde são comparados os resultados das análises LG e NLG. Como esperado o comportamento é similar, sendo que a carga última obtida é a mesma para ambas as análises, no valor de 475,2kN. Os resultados concordam bem com aqueles obtidos com aço modelado em camadas. As duas análises são interrompidas pelo esmagamento do concreto, no caso LG a viga atinge 8,72cm de deslocamento, enquanto na análise NLG este valor é de 8,51cm.

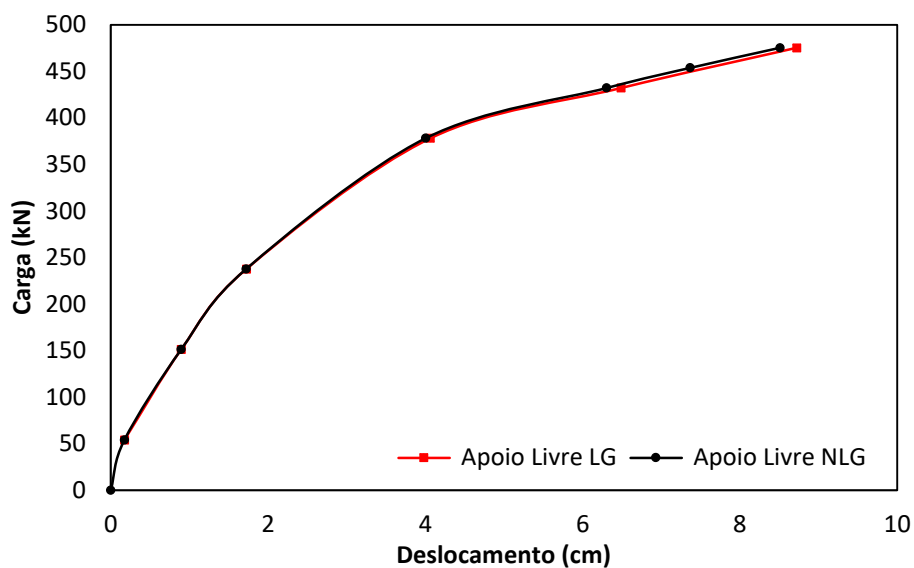


Figura 53 - Resultados da viga com cabos discretos e apoios livres

A Figura 54 apresenta as curvas cargas *versus* deslocamento vertical no centro da viga para a análise LG e NLG com os cabos discretos e apoios duplos. A diferença é resultado das forças horizontais que são desenvolvidas quando utilizado o apoio duplo, aumentando o momento fletor na viga com o acréscimo da flecha. Estas diferenças começam a ser percebidas no comportamento quando ocorre a primeira fissura na viga, na carga aplicada no valor de 64,8kN. A partir deste momento os resultados das análises tornam-se divergentes, sendo a resposta NLG a mais flexível. As diferenças de resultados podem ser analisadas na Tabela 15, onde são mostrados os valores de carga e deslocamento máximo.

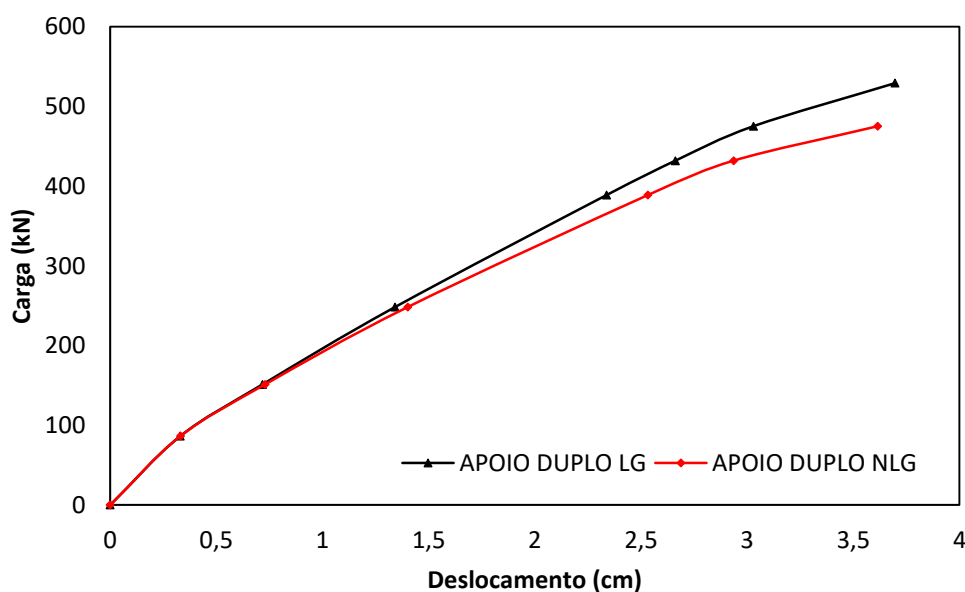


Figura 54 - Resultados para viga com cabo discreto e apoio duplo



Tabela 15 – Resultados da viga de Figueiras (1983) com cabos discretos

	Carga (kN)		Deslocamento (cm)	
	LG	NLG	LG	NLG
Apoio simples	475,200	475,200	8,722	8,510
Apoio fixo	529,2	491,400	3,696	3,915

Na análise NLG, verifica-se que o aço começa a atingir sua tensão de escoamento na carga 432kN. Enquanto que, na análise LG, o mesmo ocorre quando a carga aplicada tem valor de 464,4kN. Para as cargas últimas suportadas, tem-se 59,6kN/cm<sup>2</sup> e 61,3kN/cm<sup>2</sup> de tensão no cabo para as análises LG e NLG, respectivamente. A deformação axial máxima instalada no cabo é de 0,56% para a tensão de 61,3kN/cm<sup>2</sup>, menor que o valor limite de 10%.

### 6.1.2 Placa de Jofriet e Mcneice (1971)

A placa de Jofriet e Mcneice (1971) já foi analisada neste trabalho no Capítulo 4. As propriedades dos materiais, bem como a geometria da placa podem ser encontradas nesse capítulo. No presente item, analisa-se a mesma laje com o objetivo de testar a formulação do elemento unidimensional, quando aplicado nas duas direções da laje para representar, através de elementos de cabos, a armadura de reforço.

Nesse caso, 10 elementos de cabos são utilizados em cada direção para obter a taxa de armadura de 2,82 cm<sup>2</sup>/m em cada direção, fornecendo assim uma área transversal de 0,129 cm<sup>2</sup> em cada cabo. A distância da superfície média da placa para os cabos é a mesma para ambas direções, de acordo com o procedimento realizado para as camadas equivalentes. Quanto à malha de elementos finitos utilizada, empregou-se a mesma da análise do Capítulo 4, utilizando, novamente simetria nos dois eixos. A partir desta é determinada a malha para os cabos, conforme procedimento apresentado por Franco (2018).

Em relação aos apoios, foi adotada somente a condição de deslocamento horizontal restrito, uma vez que foi identificado que para este caso os efeitos da não linearidade geométrica são enfatizados. É adotado número de incrementos de carga igual a 60 e tolerância igual a 0,01. Os resultados desta análise são comparados com os obtidos no Capítulo 4 seção 4.2.1. A Figura 55 apresenta as curvas cargas *versus* deslocamento medido no centro da laje. Percebe-se uma boa concordância nas duas análises, LG e NLG.

No caso linear a análise é interrompida pelo esmagamento do concreto, que ocorre no valor de carga 18,59kN, para ambas as considerações de modelo de armadura. O deslocamento vertical é de 1,06cm e 1,04cm, para o caso de aço como camada e cabo discreto, respectivamente. O mesmo comportamento é identificado na análise NLG, onde pode ser visto que nos dois casos utilizados para armadura, a carga última tem valor de 15,93kN, com correspondente deslocamento vertical de 1,29cm e 1,21cm, para aço como camada e cabo, respectivamente.

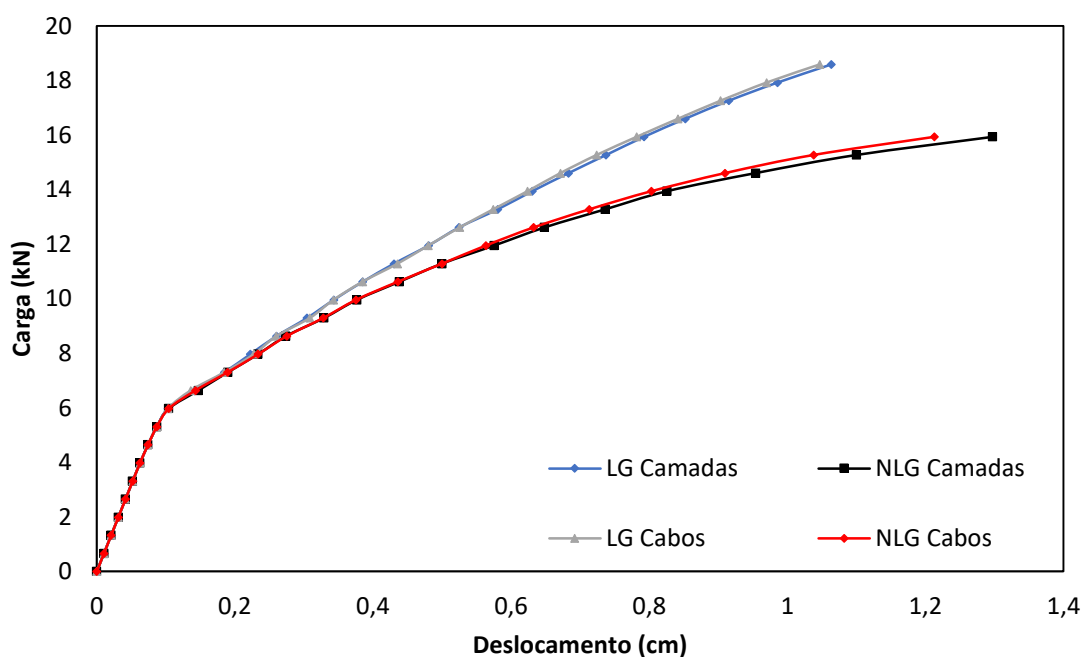


Figura 55 - Resultados da laje com cabos discretos

Analisando somente os efeitos de não linearidade geométrica no comportamento onde se considera os cabos discretos, tem-se que no valor de carga última ( $P_u=18,59\text{kN}$ ) no caso linear, o aço apresenta tensão máxima de  $41,34\text{kN/cm}^2$ , mesmo valor apresentado na análise não linear para uma carga aplicada menor ( $P_u=15,93\text{kN}$ ). Esta tensão tem valor de tensão para a qual o aço começa o escoamento. O início de fissuração é identificado na carga de 4kN para ambas as análises.

### 6.1.3 Coluna de Aroni (1968)

Neste exemplo se avalia a coluna designada por A230C5 no trabalho de Aroni (1968). Na Figura 56 é mostrada a geometria, condições de carga, malha de elementos finitos e respectivo padrão de camadas. Além disso, são apresentados os graus de liberdades

restringidos, sendo  $\alpha$  a rotação em  $y$ , e  $\beta$  a rotação em  $x$ . Na Tabela 16 são apresentadas as propriedades mecânicas dos materiais.

Para a aplicação da carga excêntrica foi considerado um momento resultante e uma carga concêntrica aplicada na extremidade da coluna. A coluna possui 4 cabos de aço de alta resistência de 5 mm de diâmetro, que constituem a armadura de protensão. Admite-se que há aderência perfeita entre a armadura e o concreto. No relatório experimental consta que foi realizado o pré esforço aos 14 dias após a concretagem e, na sequência, o concreto permanece sem carga adicional até seus 28 dias, tempo em que se efetua a aplicação da carga excêntrica, até que ocorra o colapso.

Como o presente trabalho limita-se à análise de carga última, estas características foram simuladas da seguinte maneira: no primeiro passo de carga é aplicada apenas a força relativa à protensão, gerando uma contra flecha e tensão nos cabos e elementos de concreto. O segundo passo de carga corresponde à análise incremental da carga externa até o colapso da coluna. A carga de protensão efetiva foi utilizada no valor de 17,38kN, pois a referência é omissa quanto ao valor de protensão efetiva instalada na coluna, referindo apenas o valor da tensão instalada no concreto na data de transferência como de 15,6 Mpa. Além disso, é relatado no trabalho a existência de uma excentricidade inicial de 5,6mm no meio do vão, sendo esta incluída na presente análise através de uma função seno.

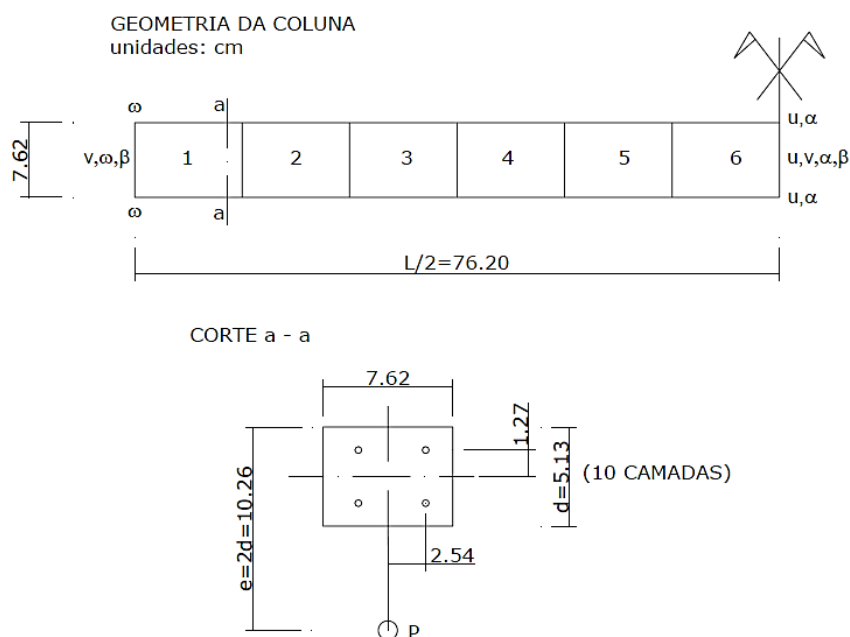


Figura 56 - Geometria e condições de carga da coluna (TAMAYO, 2011)

Tabela 16 - Propriedades dos materiais da coluna de Aroni (1968) (kN e cm)

Concreto		Aço	
Módulo de Elasticidade $E_c$	3400	Módulo de elasticidade $E_s$	20000
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,18	Módulo de elasticidade $E'_s$	470
Resistência à compressão	3,85	Tensão de escoamento $\sigma_y$	150,2
Resistência à tração	0,38		
Deformação última à compressão	0,0035		

Comparam-se as respostas obtidas na presente análise e no ensaio experimental, através das curvas que representam o desenvolvimento do deslocamento no meio do vão conforme a carga é aplicada, ressaltando a boa aproximação verificada entre ambas as curvas. Na Figura 57, inclui-se ainda curvas de outros autores, registrando-se uma boa concordância entre a presente solução e aquela apresentada por Póvoas (1991). A maior flexibilidade apresentada pela solução deste autor deve-se, em princípio, a adoção de um diagrama trilinear de tensão deformação para o aço, em alternativa ao diagrama bilinear adotado na presente análise. A diferença também está associada à limitação do presente modelo constitutivo de concreto na consideração da redução da resistência à compressão em zonas fissuradas.

Quanto ao modo de colapso na coluna, o presente estudo reproduz o mesmo identificado no ensaio experimental, que se caracteriza pela ocorrência de esmagamento do concreto no centro do vão. No que diz respeito à carga que este fato acontece, os valores obtidos na análise numérica ( $P_u=9,3\text{kN}$ ) excedem ligeiramente o valor experimental ( $P_u=8,7\text{kN}$ ). Póvoas (1991) cita em seu trabalho que em sua análise numérica a carga última obtida pela mesma é de  $9,3\text{kN}$ , entretanto a mesma não é verificada na curva que representa os resultados, desta maneira presume-se que o autor não apresenta os valores até esta fase do comportamento, não sendo possível identificar o deslocamento final.

Este autor ressalta a importância da aplicação da não linearidade geométrica nas armaduras de protensão, pois este desempenha um papel determinante na definição da resposta da coluna. Para ilustrar esse fato, Póvoas (1991) apresenta os resultados de uma análise NLG, denominada na Figura 57 como 'NGL Simpl', a qual é efetuada considerando apenas os efeitos de segunda ordem no elemento de casca, desprezando estes no cabo. Segundo o autor, a análise

é interrompida após os primeiros incrementos de carga devido ao aparecimento de um *'pivot'* negativo na matriz de rigidez global.

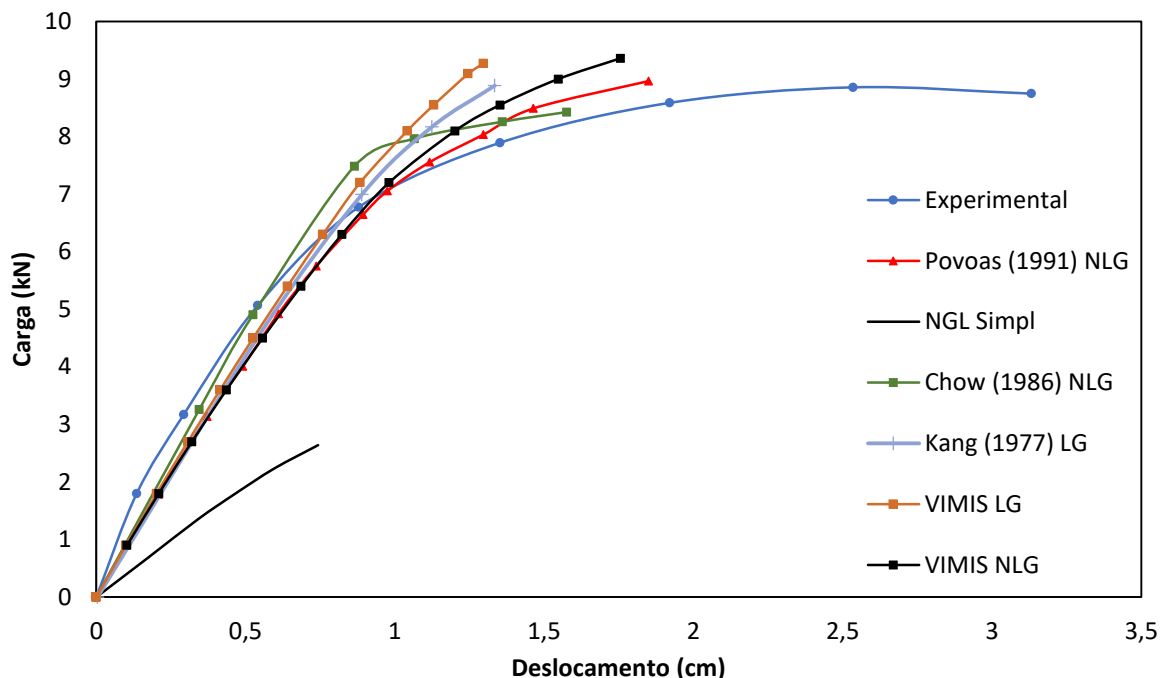


Figura 57 - Resultados para Coluna de Aroni (1968)

## 6.2 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

A partir dos exemplos apresentados, pode-se concluir que as alterações realizadas na formulação do elemento que modela o cabo de protensão foram bem realizadas, uma vez que atingiram o objetivo de incluir a análise com grandes deslocamentos através da abordagem Lagrangeana Total. Tais constatações podem ser comprovadas ao comparar-se os resultados obtidos com os valores experimentais e numéricos de outros autores.

Nas duas primeiras aplicações numéricas foram analisados exemplos bem conceituados na literatura. Entretanto, ambos não contavam com a força de protensão nos cabos de aço, de maneira que estas aplicações tiveram o objetivo apenas de verificar a correta formulação do elemento de cabo, sem a tensão inicial aplicada, a qual é importante neste tipo de verificação, pois a mesma é utilizada para o cálculo da matriz de rigidez geométrica. Destaca-se que para a modelagem destes exemplos, foi necessária a alteração da programação do programa de pré-processamento com que conta VIMIS no GiD, para a possibilidade de utilização de 20 cabos.

Por fim, realizou-se a análise de uma coluna com protensão aderente submetida a uma carga excêntrica e excentricidade inicial no centro do seu vão. Os resultados desta análise mostraram um comportamento conforme o esperado e, além disso, demonstrou a necessidade de utilização da análise NLG do cabo conjuntamente com aquela do elemento de casca, pois na análise efetuada apenas com a não linearidade geométrica no elemento de casca foi interrompida nos primeiros incrementos de carga.

Conforme foi observado durante a realização dos modelos ao longo do presente trabalho, a existência de uma carga axial na casca resulta em uma menor rigidez quando a não linearidade geométrica é levada em consideração. Uma vez que o objetivo da utilização de protensão é justamente introduzir uma carga axial na estrutura através da armadura ativa, os efeitos não lineares geométricos tornam-se significativos. Ressalta-se que o presente estudo limitou-se na aplicação de cabo de protensão interna com interação completa, isto é, considera-se a aderência total entre cordoalha e concreto. No entanto, a formulação do cabo não aderente existe no VIMIS e pode ser modificada e utilizada caso seja necessário.

## 7 APLICAÇÕES NUMÉRICAS EM VIGAS MISTAS

Neste capítulo, as alterações realizadas no programa VIMIS para a análise de problemas envolvendo efeitos não lineares geométricos são validadas e testadas com o objetivo de comprovar a eficiência das modificações implementadas quando atuam em conjunto. É importante lembrar que os elementos finitos modificados foram aqueles que modelam a laje de concreto, viga de aço e cabo de protensão interna aderente. A princípio não é visto como necessária a alteração da formulação do elemento de barra que modela o conector, pois o mesmo tem seus nós coincidentes com a laje e perfil, os quais já contemplam o comportamento não linear geométrico. Seguindo com a nomenclatura utilizada anteriormente, as sentenças “linear geométrica” e “não linear geométrica” são representadas pelas siglas LG e NLG, respectivamente.

Os casos de vigas mistas estudadas no presente trabalho são: 1) Viga mista biapoiada chamada de A2 no relatório experimental de Chapman e Balakrishnan (1964) com diferentes condições de apoio; 2) Duas vigas mistas contínuas: viga de Ansourian (1981), sendo esta com perfil I, e uma viga mista contínua ensaiada por Li (2003) *apud* Nie *et al.* (2009), com perfil caixão; 3) Cinco vigas contínuas de dois vãos com protensão externa ensaiadas também por Li (2003) *apud* Nie *et al.* (2009) e 4) Duas vigas biapoiadas com protensão externa ensaiadas por Chen e Gu (2005). Comparam-se as respostas dos comportamentos dos elementos estruturais obtidos através da análise no VIMIS com os resultados experimentais e/ou aqueles obtidos do *software* ANSYS.

É importante ressaltar que o modelo utilizado no ANSYS foi devidamente validado nos trabalhos de Schmitz (2017), Mittelstadt Jr (2017) e Benincá (2019), portanto recomenda-se a leitura destes para informações mais aprofundadas. No entanto, a seguir tem-se uma breve descrição das considerações e modelos utilizados neste *software*.

Para análise de vigas biapoiadas, utilizou-se um *script* parametrizado desenvolvido por Benincá (2019). Neste *script* é necessário informar a análise que se deseja realizar e as características geométricas da estrutura. Para a laje de concreto foram utilizados elementos hexaédricos homogêneos de vinte nós com integração completa (SOLID186), incluindo

plasticidade e grandes deslocamentos. Este elemento possibilita a utilização de armadura incorporada através do elemento de barra tridimensional REINF264.

Para o perfil de aço, é empregado o elemento finito de casca de 4 nós SHELL181, que possui 6 graus de liberdade em cada nó. O elemento possibilita análises de problemas lineares e não lineares, inclusive com grandes deformações e rotações. Por este motivo, a formulação utiliza tensões e deformações verdadeiras, no lugar das tensões e deformações nominais de engenharia através de uma abordagem Lagrangeana Atualizada.

Para modelar o comportamento dos conectores, são utilizados elementos de mola não lineares COMBIN39, os quais são posicionados entre os nós da mesa superior do perfil e da face inferior da laje nas respectivas posições dos conectores. Estes elementos atuam na direção longitudinal da viga, de forma que o deslizamento relativo dos nós do perfil e da laje nesta direção são governados pela relação constitutiva força cortante *versus* escorregamento mostrada Equação (7.1).

$$F = F_{\max} \left(1 - e^{-ms}\right)^n \quad (7.1)$$

onde  $F$  é a força cortante atuante no conector,  $F_{\max}$  é força cortante máxima resistida pelo conector,  $s$  é o deslizamento relativo e  $m$  e  $n$  são parâmetros de ajuste da curva que definem a forma desta e a rigidez do conector.

Quanto à armadura incorporada, admite-se que a mesma apresenta um comportamento elástico perfeito. Já para o aço do perfil, faz-se uso de um modelo constitutivo bilinear. Em relação ao modelo do comportamento dos materiais, no caso do concreto, o *script* permite a utilização de modelo customizado via usuário (*usermat*) ou do modelo constitutivo interno chamado de *DP-concrete*. Quando escolhida a simulação do comportamento do concreto através da interface *usermat*, o modelo corresponde a aquele trabalhado por Schmitz (2017). Este modelo de concreto é elastoplástico, baseado no critério de ruptura de Ottosen (1977). No que diz respeito à plastificação do concreto comprimido, admite-se que o concreto possui endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação têm o mesmo formato da superfície de ruptura.

Schmitz (2017) considerou um critério que zera abruptamente as tensões do ponto de integração do elemento no momento em que a deformação específica última de compressão é



atingida, admitindo este ponto como esmagado e com contribuição nula em tensões, o que acelera o processo de não convergência. Entretanto, nem sempre este processo é finalizado quando ocorre o esmagamento, sendo necessário verificar os arquivos de saída para identificar o passo de carga em que este fenômeno ocorre.

No que diz respeito ao comportamento do concreto tracionado, o material apresenta comportamento elástico linear até que seja atingida a superfície de ruptura. Neste momento é dado início ao processo de fissuração. Com esse objetivo, é utilizado o modelo de fissuras distribuídas, considerando o fenômeno de *Tension Stiffening* através de um ramo descendente na relação tensão-deformação do concreto.

Já o modelo constitutivo *Drucker-Prager Concrete (DP-Concrete)* trabalha com duas superfícies distintas: uma superfície de ruptura para o comportamento em tração e em tração - compressão. Quanto ao comportamento tração - compressão, este pode ser uma superfície de *Rankine* ou uma superfície de *Drucker-Prager*, sendo o primeiro caso adotado no presente trabalho. Em relação ao comportamento em compressão, a superfície de plastificação é a superfície de *Drucker-Prager*, a qual é distinta da anterior.

No modelo *DP-Concrete* não existe um critério explícito de esmagamento. Nesta condição, o que ocorre é que a tensão efetiva em um ponto com altos níveis de deformação passa a ser cada vez menor e, portanto, sua capacidade resistente diminui. Por este motivo, no momento em que um número suficiente de elementos finitos estiver sob níveis elevados de deformação, o incremento do passo de carga externo não será acompanhado de um incremento equivalente de forças internas e a solução não irá atingir a convergência. Contudo, cabe ressaltar que nestes casos deve-se sempre verificar o nível de tensão e de deformação dos elementos comprimidos na etapa de pós-processamento, a fim de certificar-se que a não convergência da solução ocorreu, de fato, devido ao esmagamento (BENINCÁ, 2019).

No que diz respeito ao comportamento do concreto tracionado, admite-se que o material possui comportamento elástico linear até que seja atingida a superfície de ruptura adotada (*Rankine*), quando ocorre, então, a fissuração. Este fenômeno é introduzido através da lei de amolecimento em tração, que depende do modelo HSD adotado (*hardening, softening, dilatation*), o qual foi considerado linear no presente trabalho. Desta forma, o trecho descendente que caracteriza o comportamento *tension stiffening* é linear até que seja atingida a máxima deformação em tração.

## 7.1 VIGA MISTA BIAPOIADA DE CHAPMAN E BALAKRISHNAN (1964)

Chapman e Balakrishnan (1964) realizaram em seu trabalho uma análise experimental, a qual consistiu em testar vigas mistas de aço e concreto com diferentes números de conectores, variando o tipo de carga aplicada e propriedades dos materiais. A viga mista simplesmente apoiada com carregamento pontual, designada A2, é estudada no presente trabalho. O autor salienta que o tipo de falha da estrutura observada experimentalmente foi devido ao esmagamento na laje de concreto na região central da viga mista.

A viga A2 apresenta a distância de 548,64cm entre os apoios, espessura da laje de concreto de 15,2cm e altura da viga de aço de 30,5cm. A ligação entre viga e laje é realizada através de 76 conectores de cisalhamento distribuídos em duas linhas no sentido longitudinal da peça, com espaçamento constante de 15,5cm. A geometria e a seção transversal da estrutura podem ser visualizadas na Figura 58. As propriedades dos materiais empregados encontram-se na Tabela 17.

A viga foi submetida a um carregamento pontual no centro do vão, porém o relatório experimental não apresenta dados sobre sua área de aplicação. Neste contexto, adotou-se aproximadamente a área que o pesquisador Kronk (2006) cita em seu trabalho. Como foi considerada a simetria da viga, a área correspondente é de 121,92cm<sup>2</sup>, ou seja, em um modelo completo da viga, a força seria aplicada em uma área de 243,84cm<sup>2</sup>.

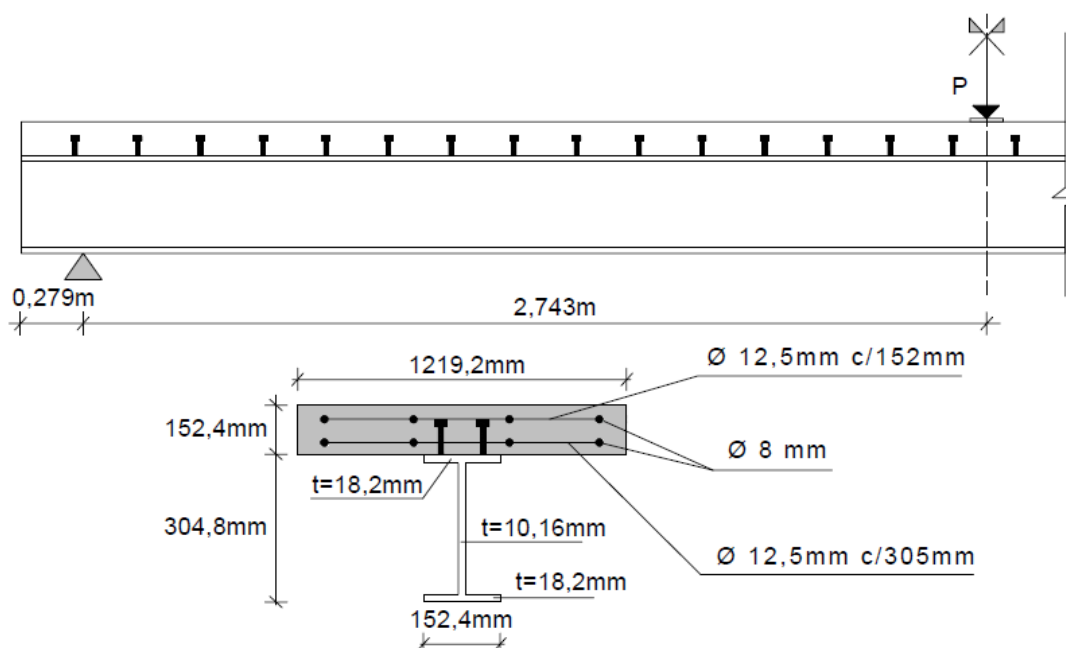


Figura 58 – Seção transversal da viga mista A2

Tabela 17 - Propriedades dos materiais

<b>Material</b>	<b>Propriedade (cm, kN)</b>		
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	mesa	20216
		alma	20368
	Tensão de escoamento	mesa	23
		alma	23,9
	Tensão última	mesa	41
		alma	41,8
	Poisson		0,3
Def. última		25%	
Aço de reforço	Módulo de elasticidade		20500
	Tensão de escoamento		32
	Poisson		0,3
	Def. última		25%
Concreto	Resistência à compressão		2,71
	Módulo de elasticidade		2967
	Resistência a tração		0,3
	Poisson		0,2
	Def. última		4,5‰
Conector	Espaçamento		15,5
	Diâmetro		1,9
	Número de linhas		2
	Poisson		0,3
	Parâmetro a		120,6
	Parâmetro b		$1,2mm^{-1}$

Na análise realizada no programa VIMIS, a rigidez dos conectores é calculada conforme a equação exponencial apresentada por Yam e Chapman (1972), mostrada na Equação (7.2), com os parâmetros adotados nos valores de  $a=130kN$  e  $b=1,2mm^{-1}$ , de acordo com o utilizado pelos autores Tamayo (2011) e Dias (2013). Já para o *script* fornecido para a análise no *software* ANSYS, utiliza-se a Equação (7.1) apresentada anteriormente, com parâmetros  $n=1$ ,  $m=1,2mm^{-1}$  e  $F_{max} = 130kN$ . Na Figura 59 é apresentada a curva experimental do modelo constitutivo do conector representado pela força cortante *versus* escorregamento, conjuntamente com aqueles utilizados no VIMIS e no ANSYS.

$$F = a(1 - e^{-bs}) \quad (7.2)$$

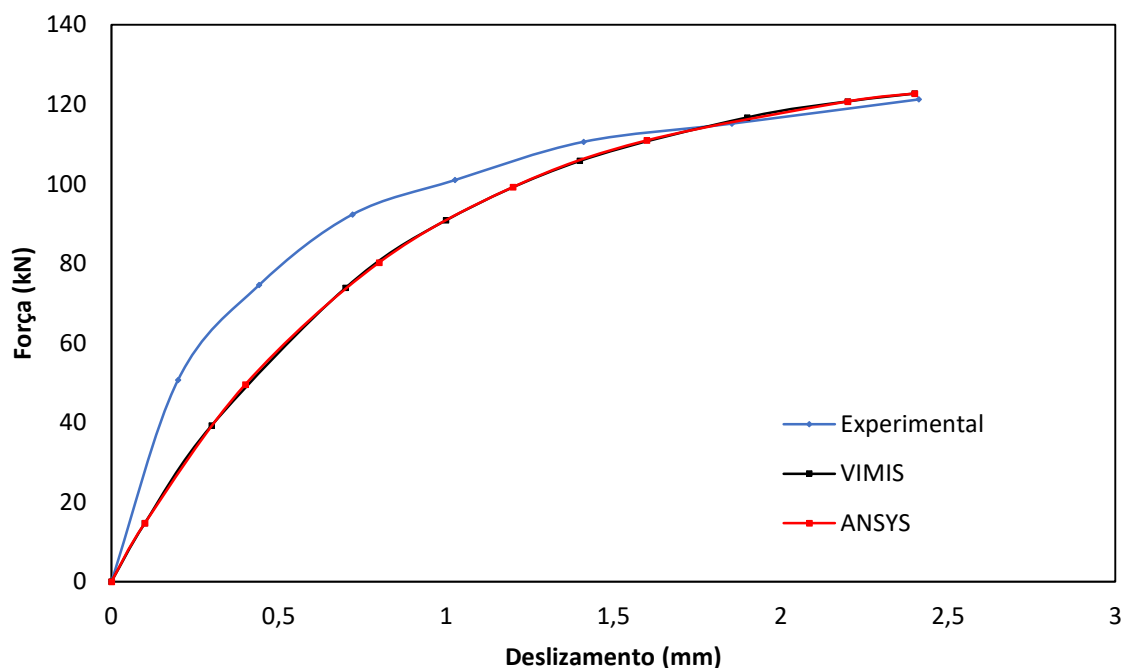


Figura 59 - Curva constitutiva do conector

A geometria e a malha de elementos finitos para a viga A2 foram geradas através do GiD, considerando a simetria da viga (Figura 60). A malha de elementos finitos é gerada em função da distribuição real dos conectores de cisalhamento. Desta forma, o modelo emprega 140 elementos de casca para representar a laje de concreto, 240 elementos de casca plana para representar a viga de aço e 38 elementos viga-coluna para representar os conectores de cisalhamento. Quanto à distribuição de camadas de concreto e aço, foi adotada igual quantidade que a autora Dias (2013), as quais podem ser apreciadas na Figura 61.

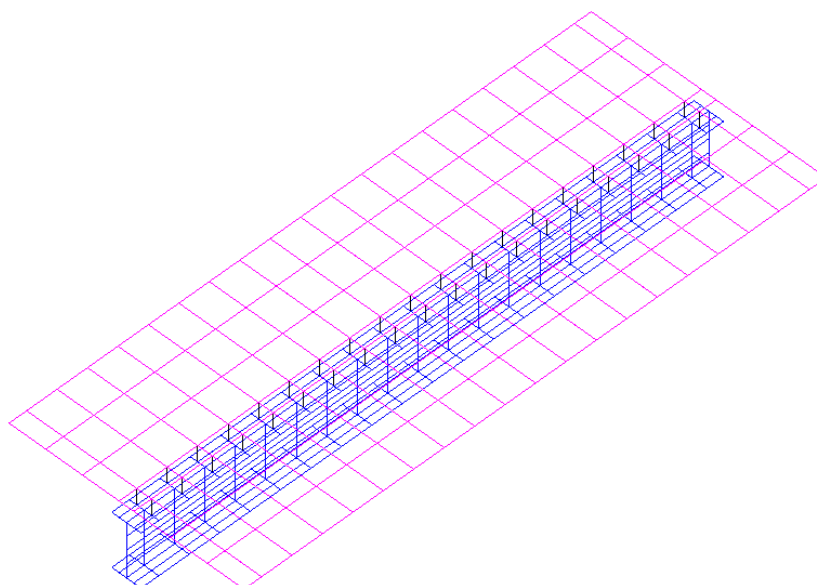


Figura 60 - Malha de elementos finitos (VIMIS)

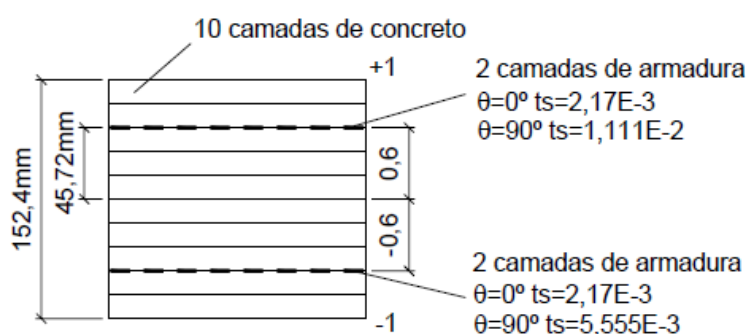


Figura 61 – Camadas de concreto ao longo da espessura da laje (DIAS, 2013)

Já para o modelo no ANSYS foram utilizados 1910 elementos hexaédricos para a laje de concreto, com armadura incorporada por elementos de reforço discretos tridimensionais. Para o perfil de aço, foram empregados 1027 elementos de casca e utilizados elementos de mola não lineares, para modelar os conectores. A Figura 62 mostra a malha de elementos finitos utilizada nesta modelagem. Quanto aos modelos dos materiais, foram utilizados os descritos anteriormente no início do capítulo, utilizando o modelo de concreto da *usermat* de Schmitz (2017).

Em relação aos parâmetros de convergência, adota-se no VIMIS uma quantidade de incrementos de carga igual a 76, já para o ANSYS é fornecida a quantidade mínima de 60 passos de carga. A tolerância utilizada no VIMIS e ANSYS é de 0,01 e 0,1, respectivamente.

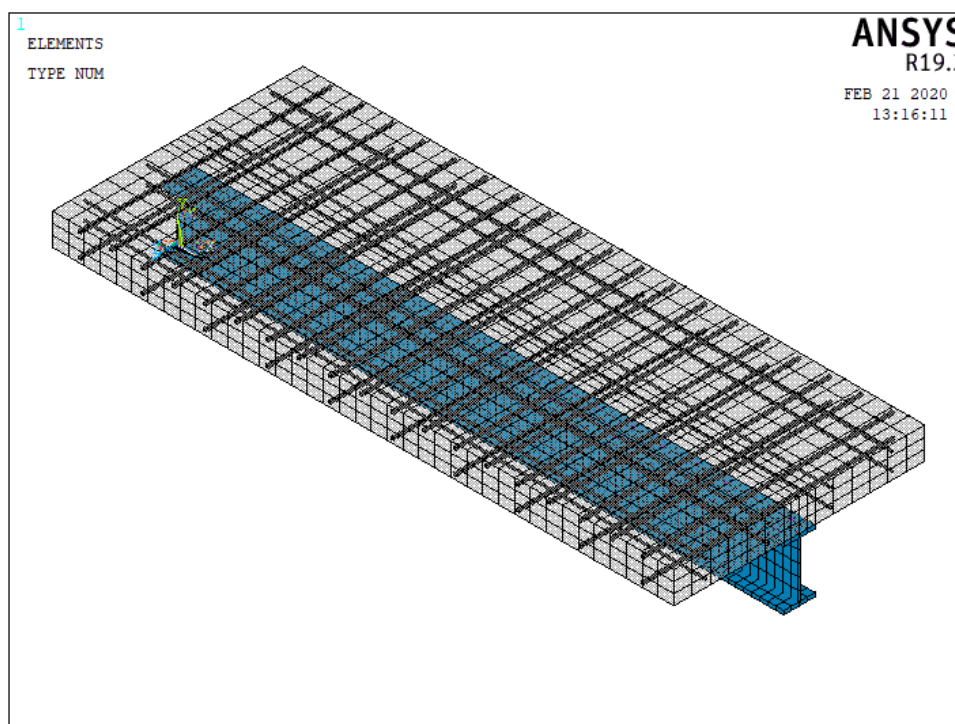


Figura 62 – Malha de elementos finitos ANSYS

Em um primeiro momento, validam-se os modelos do VIMIS e do ANSYS através da comparação do desenvolvimento do deslocamento vertical no centro do vão conforme a carga é aplicada, com os resultados obtidos experimentalmente, de acordo com o que é mostrado na Figura 63 para ambas as análises LG e NLG. A análise no ANSYS convergiu até a carga aplicada de 500kN, entretanto apresentam-se os resultados nesta curva até a carga aplicada de 415kN em que ocorre o esmagamento do concreto. A conferência deste fato é realizada através da saída de dados da *usermat*, em que consta o passo de carga em que se atinge a deformação última do concreto de 0,0045. Na Figura 64 podem ser verificadas as deformações do concreto para esta carga no ANSYS. Como se pode observar, a máxima deformação equivalente na laje tem valor de 0,0078, na região inferior da laje próxima aos conectores. No entanto, valores acima de 0,0045 também se encontram na parte inferior da laje na seção de simetria.

No VIMIS, a convergência da análise é interrompida no valor de carga aplicada igual a 399kN, sendo este o valor que caracteriza o esmagamento do concreto através de sua deformação última. Os valores mencionados de força aplicada para os dois programas correspondem às análises não lineares geométricas da estrutura. Em relação às diferenças de valores encontradas na análise LG e NLG, tem-se, no ANSYS, um valor de carga última 4,55% maior na análise LG. Enquanto que no VIMIS, este acréscimo não ocorre, porém para a mesma carga última o deslocamento tem valores de 3,35cm e 3,33cm, para LG e NLG, respectivamente, o que pode se considerar desprezível.

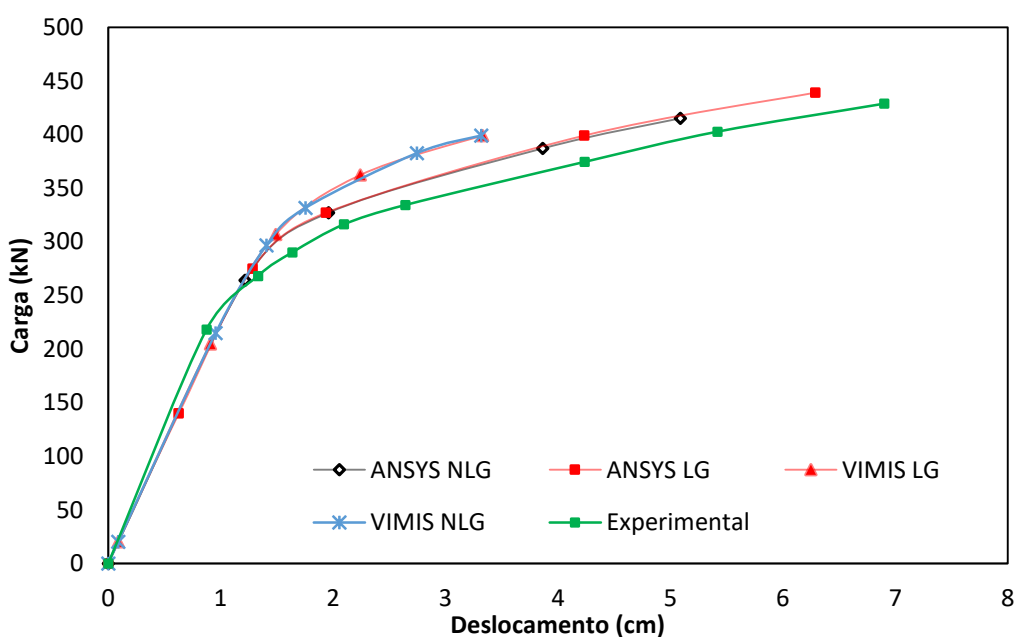


Figura 63 – Resultados da viga A2 com apoio simples

De acordo com os resultados apresentados nos capítulos anteriores, os valores encontrados ocorrem conforme o esperado, não diferenciando praticamente o comportamento entre as análises LG e NLG, pois não existem fatores determinantes para isto, ou seja, a viga não apresenta um grande vão, perfil esbelto ou apoios fixos. Isto faz com que não sejam gerados esforços de compressão na seção transversal, não sendo, conseqüentemente, alterada a rigidez da viga.

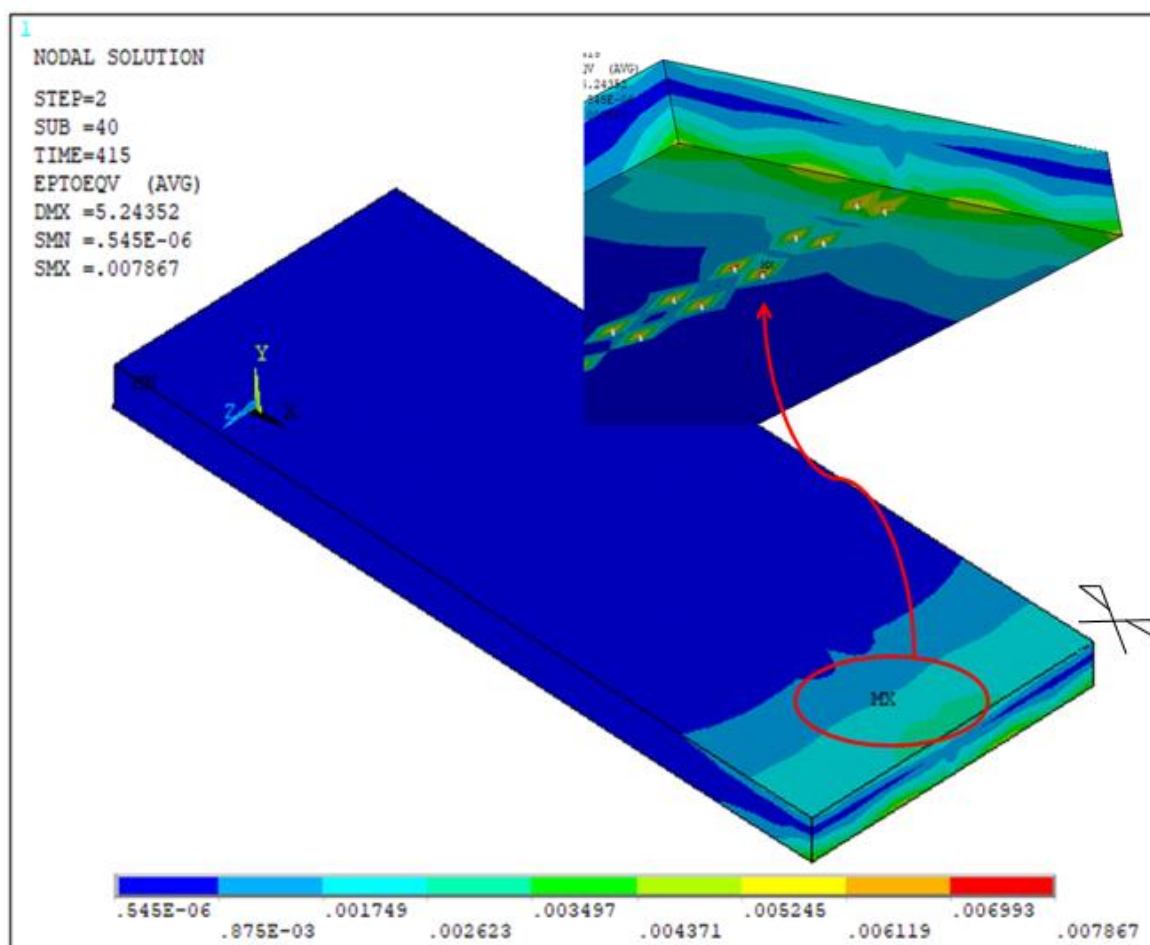


Figura 64 – Análise NLG ANSYS com apoios simples: Deformação no concreto (P= 415kN)

Já na Figura 65 apresenta-se a distribuição de tensões no perfil de aço para a análise realizada no VIMIS, na condição de carga última (399kN), onde é possível perceber que na região próxima à linha de simetria quase toda a seção do perfil atingiu a tensão de escoamento de 23,9 kN/cm<sup>2</sup>.

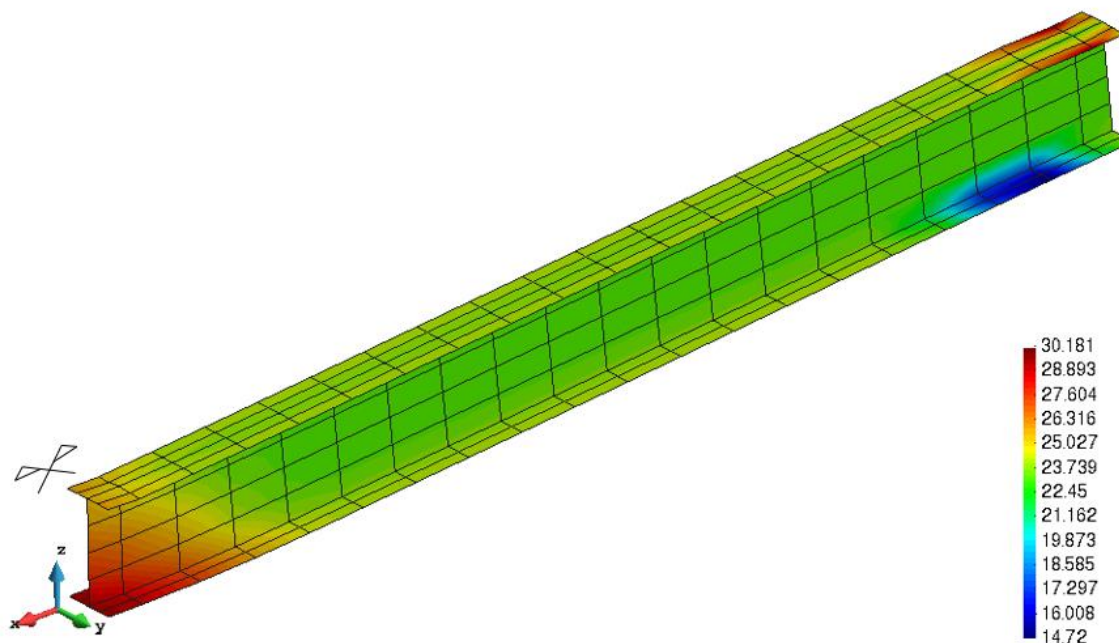


Figura 65 - Análise NLG no VIMIS com apoios simples: Tensões de von Mises no perfil de aço  $\text{kN/cm}^2$  ( $P = 399\text{kN}$ )

De acordo com o que foi concluído dos exemplos antecedentes, a consideração dos efeitos não lineares geométricos são evidenciados quando há forças no plano, pois esta força axial causa o aumento do momento fletor quando os deslocamentos são consideráveis. Com este intuito são adotados arbitrariamente apoios duplos na viga. Sendo assim, os resultados obtidos pelo VIMIS são comparados com os valores calculados através do ANSYS para esta situação como mostrado na Figura 66. Os resultados experimentais são omitidos na figura, uma vez que não há valores experimentais para essa situação.

Percebe-se que ao considerar apoio duplo, a rigidez inicial é alterada quando esta é comparada aos resultados de apoio simples, sendo possível notar que a análise com a viga com apoios simples é mais flexível. Quanto aos resultados das análises LG e NLG, pode-se identificar que estas estão de acordo com os resultados encontrados no ANSYS, uma vez que já se esperava que o VIMIS apresentasse um resultado levemente mais rígido, pois este comportamento já foi identificado em trabalhos anteriores. Este fato se justifica, pois o modelo constitutivo do concreto utilizado no VIMIS é mais rígido, uma vez que na sua versão atual, este não considera a diminuição da resistência à compressão em zonas fissuradas.

O valor de carga última encontrado no VIMIS é de 654,8kN e 638,33kN, para a análise LG e NGL, respectivamente, já para ANSYS, esses valores são, respectivamente, 589kN e



565kN para estas análises. Estes valores correspondem à carga em que acontece o esmagamento do concreto, o qual ocorre no centro do vão. No caso da análise realizada no VIMIS, a análise é interrompida nesta carga, não ocorrendo a convergência do processo. Enquanto que no ANSYS, a análise ocorre até a carga final aplicada, sendo necessário verificar o estado de deformação dentro da laje de concreto. Sendo assim, é possível verificar que a deformação máxima no concreto na carga última é de 0,008677 e 0,008459 para os casos de análise LG e NLG, respectivamente, mostrando claramente que a deformação última do concreto de 0,0045 poderia ter sido já ultrapassada. Em relação aos deslocamentos últimos, estes são respectivamente, 2,04cm e 2,09cm para a análises LG e NLG no VIMIS. Já no ANSYS os valores respectivos são de 1,92cm e 1,79cm.

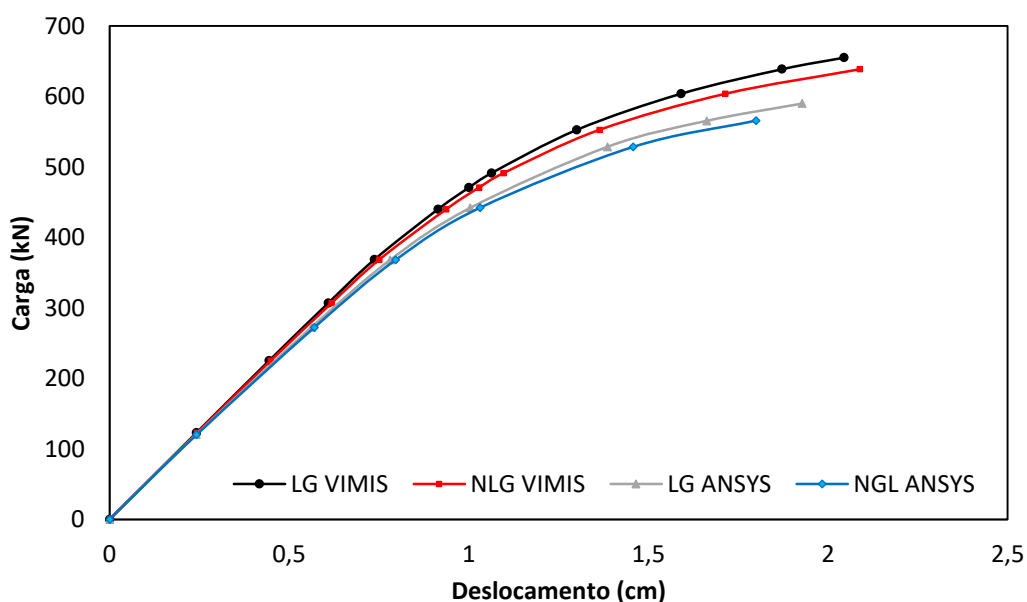


Figura 66 - Resultados da viga A2 com apoio fixo

Abaixo é exposta a Tabela 18, onde são indicados os valores máximos para cada modelo e apresentado o erro relativo obtido em relação ao *software* de referência.

Tabela 18 - Resultados da viga A2 com apoios duplos (kN, cm)

		Deslocamento	Carga	Tensão no concreto	Tensão no perfil
LG	ANSYS	1,93	589,80	-2,68	26,10
	VIMIS	2,07	654,80	-2,71	24,02
	Erro (%)	-7,24	-11,02	-1,12	7,99
NLG	ANSYS	1,80	565,25	-2,53	25,97
	VIMIS	2,09	638,43	-2,70	23,93
	Erro (%)	-16,08	-12,89	-6,72	7,86

Quanto a tensão no aço de reforço, estes resultados tem valores máximos de 23,24kN/cm<sup>2</sup> e 21,71kN/cm<sup>2</sup>, respectivamente, para a análise LG e NLG. A fim de exemplificação, as tensões no reforço são ilustradas na Figura 67 para o caso NLG.

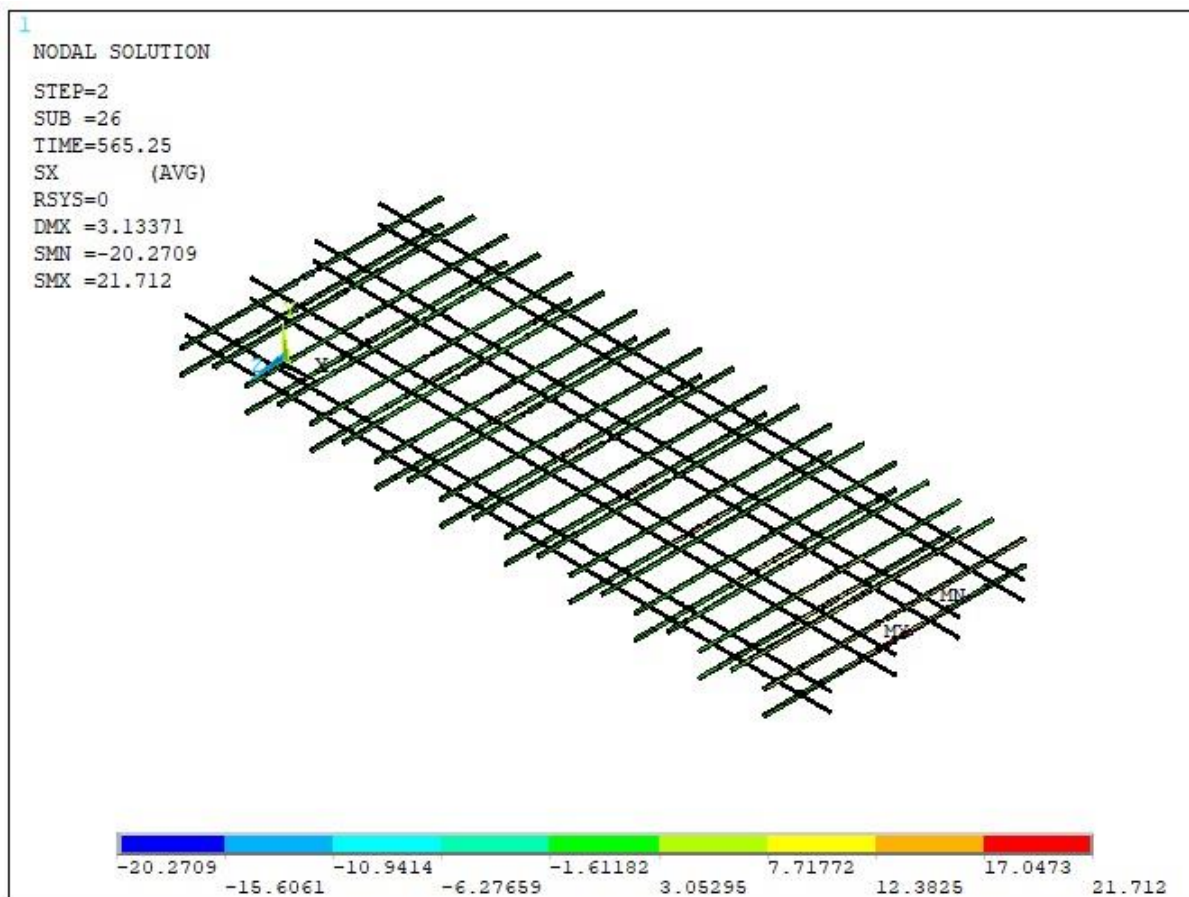


Figura 67 - Análise NLG no ANSYS com apoio duplo: Tensões na armadura de reforço (kN/cm<sup>2</sup>) (P=565,25kN)

Ocorre também uma mudança suave nas tensões axiais na seção transversal ao meio do vão na consideração dos efeitos não lineares geométricos, conforme pode ser visto na Figura 68 para o caso da análise LG, onde é possível perceber que parte do perfil de aço está submetido à compressão. Este valor é menor quando considerado a análise NLG (Figura 69), enquanto que os valores de tensão de tração no aço continuam os mesmos para ambas as análises. É importante salientar que estes resultados são obtidos no *software* ANSYS e consideram interação parcial, uma vez que o conector é modelado como elemento de mola.

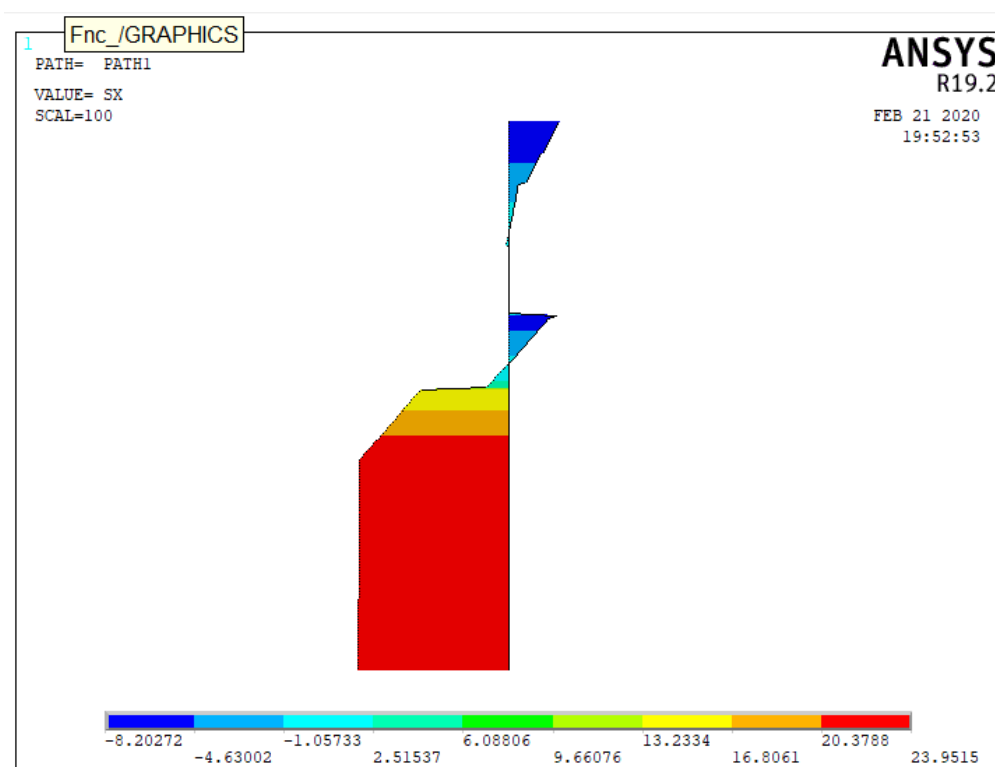


Figura 68 – Análise LG no ANSYS com apoio fixo: Tensão axial na seção transversal (kN/cm<sup>2</sup>)

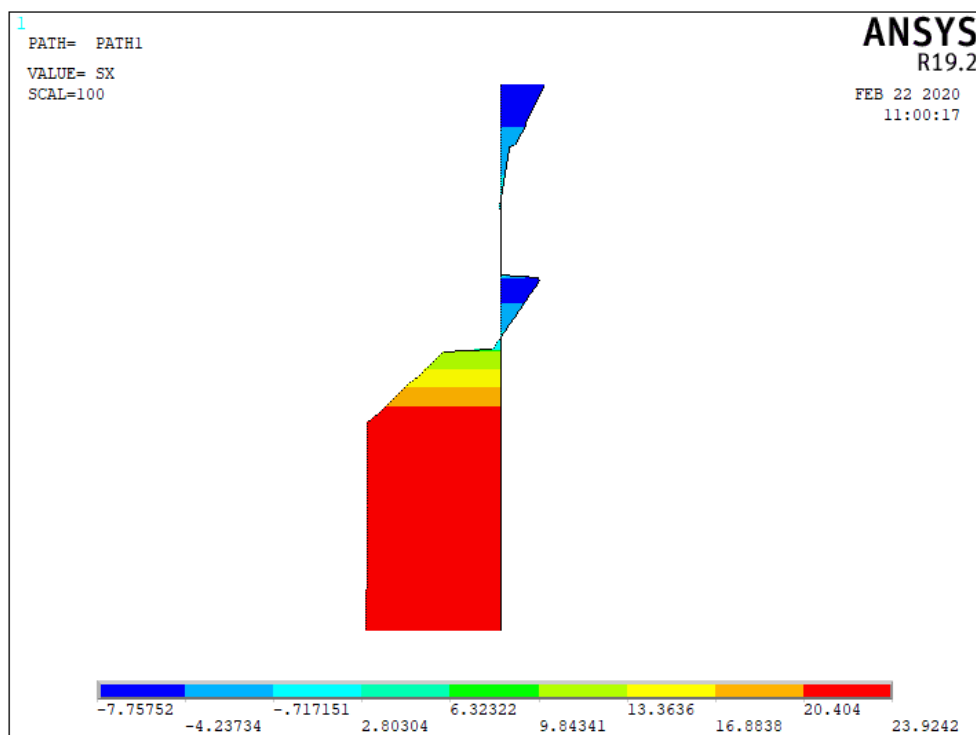


Figura 69 – Análise NLG no ANSYS com apoio fixo: Tensão axial na seção transversal (kN/cm<sup>2</sup>)

No caso dos resultados obtidos pelo VIMIS, é possível verificar a distribuição da fissuração quando a estrutura é submetida à carga última, onde as marcações em linhas retas indicam que, naquele ponto de integração, ocorreu fissuração, além disso, indicam a orientação da fissura, bem como se ocorreu fissura dupla, o círculo indica que a tensão de compressão atingiu o limite da resistência de compressão do concreto e o asterisco indica que ocorreu o esmagamento. Sendo assim, a Figura 70 mostra o padrão de fissuração da camada superior da laje, demonstrando os comportamentos já relatados. Como se pode apreciar o esmagamento acontece na seção de simetria (ao meio do vão), determinando assim a interrupção da análise para este nível de carga.

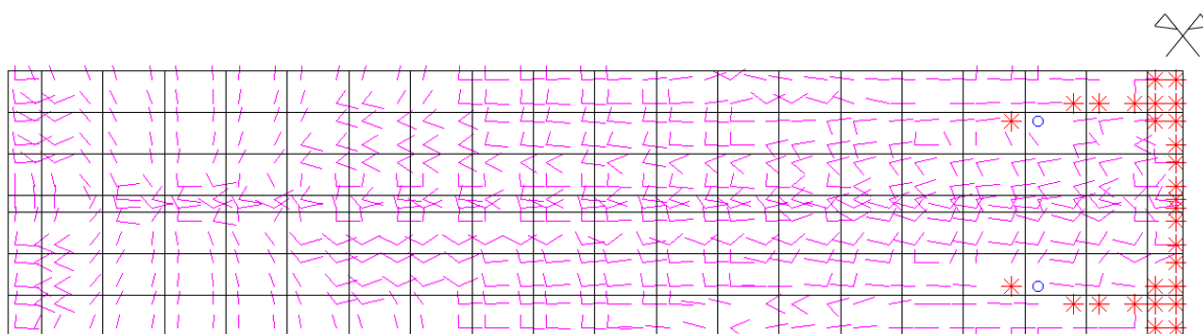


Figura 70 - Análise NLG no VIMIS com apoios duplos: Fissuração e esmagamento na camada superior da laje

Por fim, é analisado se há mudanças no comportamento do deslocamento relativo do conector. Para isso é verificada a força cortante máxima atingida na análise LG e NLG no caso de apoios fixos para o conector mais solicitado, ou seja, no extremo da viga. Na primeira situação de análise a força cortante máxima é de 44,49kN, com um deslocamento relativo de 0,35mm, já para a análise NGL este valor é igual a 46kN, com um deslizamento de 0,37mm. É importante lembrar que os conectores apresentam comportamento não linear desde o início da aplicação da carga, embora a Figura 71 pareça indicar o contrário para a análise NLG. Isto é, a falha no conector está longe de acontecer dado os níveis baixos de força de cisalhamento e escorregamento, o que é esperado pois o autor dimensionou o conector de forma que a falha da estrutura não ocorra neste elemento estrutural.

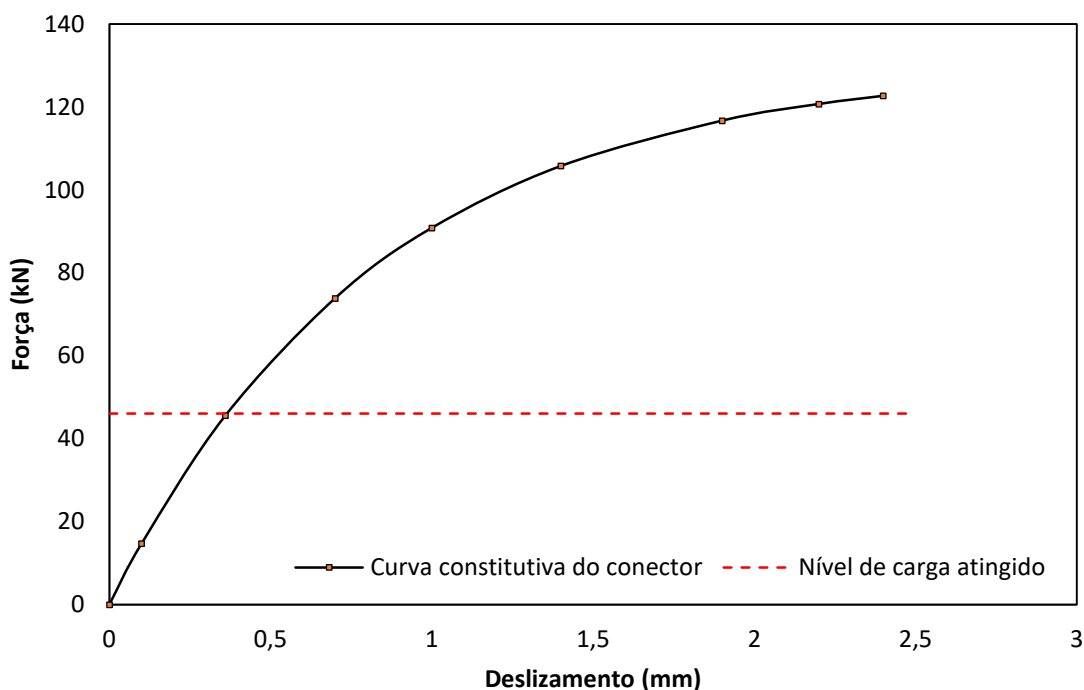


Figura 71 - Deslocamento relativo dos conectores

A deformada da viga pode ser visualizada na Figura 72, onde é representado o deslocamento vertical máximo da estrutura no caso da análise NLG no VIMIS. Abaixo é apresentada a Tabela 19, relacionando os valores máximos de deslocamento encontrados no VIMIS para as duas análises. Pode-se concluir que a consideração dos efeitos não lineares geométricos resultam em um comportamento mais flexível para níveis de carga últimos, indicando um possível colapso antecipado. Desta forma, pode-se dizer que em termos de fatores de segurança, esta se apresenta mais adequada.

Tabela 19 - Diferenças entre valores linear e não linear geométrico (kN, cm)

	LG	NLG	Diferença (%)
Deslocamento	2,07	2,09	1,01
Carga	654,80	638,43	-2,56
Tensão no concreto	-2,71	-2,70	-0,37

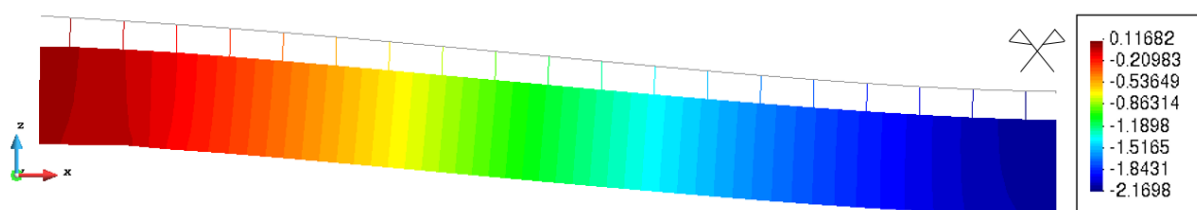


Figura 72 - Deformada da viga A2 com apoios duplos (cm)

## 7.2 VIGAS MISTAS CONTÍNUAS

Viga mista contínua diz respeito a viga com mais de dois apoios e, por consequência, com trechos submetidos a momento fletor negativo devido a carregamentos verticais, ou seja, sob tração na parte superior da laje e sob compressão na parcela inferior da viga. Sobre o comportamento do concreto, é de conhecimento que o mesmo não trabalha bem quando submetido à tração, quanto ao perfil de aço em compressão, é possível que este venha a apresentar problemas de instabilidade. Desta forma, é importante avaliar neste tipo de viga mista as implicações geradas pela análise não linear geométrica. Com este objetivo, no presente item, são estudadas duas vigas mistas contínuas, sendo uma delas com perfil I e uma com perfil caixão.

### 7.2.1 Viga mista contínua CTB4 testada por Ansourian (1981)

A viga mista contínua, denominada CTB4 e testada por Ansourian (1981), possui dois vãos iguais de 4,5 m e é carregada simetricamente com cargas pontuais no centro do vão. As características geométricas são apresentadas na Figura 73, onde são mostradas duas zonas com diferentes espaçamentos de conectores ao longo do comprimento da viga. Os conectores de cisalhamento são dispostos em três fileiras, espaçados a cada 35 cm, com exceção da zona do apoio interno, onde o espaçamento é reduzido a cada 30 cm. As propriedades dos materiais estão especificadas na Tabela 20.

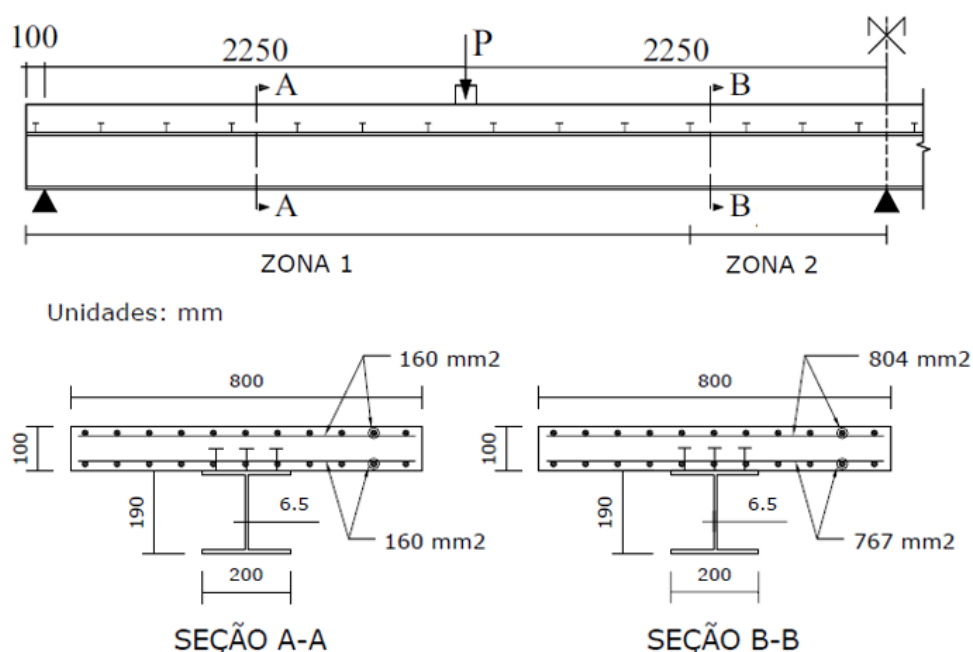


Figura 73 - Geometria da viga CTB4

Tabela 20 - Propriedade dos materiais da viga mista CTB4

<b>Material</b>	<b>Propriedade (cm, kN)</b>	
Aço Estrutural	Módulo de Elasticidade	21000
	Tensão de escoamento	23,7
	Tensão última (mesa)	39,3
	Tensão última (alma)	40,1
	Poisson	0,3
	Def. última	0.25
Aço de reforço	Módulo de elasticidade	21000
	Tensão de escoamento	43
	Tensão última	53
	Poisson	0,3
	Def. última	0,05
Concreto	Resistência à compressão	2.8
	Módulo de elasticidade	3000
	Resistência a tração	0,28
	Poisson	0,15
	Def. última	6‰
Conector	Espaçamento	30 e 35
	Número de linhas	3
	Constante $a$ (Modelo 1)	110
	Constante $a$ (Modelo 2)	1,3 mm <sup>-1</sup>
	Constante $b$ (Modelo 1)	72
	Constante $b$ (Modelo 2)	0,7 mm <sup>-1</sup>

A curva de carga *versus* deflexão no centro do vão obtida a partir das análises LG e NLG foram comparadas com os dados experimentais conforme mostra a Figura 74. No entanto, o relatório experimental não informa a lei constitutiva do conector, sendo assim dois conjuntos de propriedades encontrados na literatura foram utilizados (WANG, 2016 e TITOUUM *et al.*, 2008). Isto é, uma primeira análise considera valores de  $a=110\text{kN}$ ,  $b = 1,3 \text{ mm}^{-1}$  (modelo 1), enquanto a segunda utiliza  $a = 72 \text{ kN}$ ,  $b=0,7\text{mm}^{-1}$  (modelo 2). É possível perceber que ambos os modelos conseguem se aproximar do valor de colapso, capturando aceitavelmente bem a rigidez inicial. Como se pode observar, a rigidez inicial dos conectores tem um comportamento

relevante, principalmente na captura do trajeto final de carga. Uma análise quantitativa sobre os valores últimos são apresentados na Tabela 21. Embora não apresentado na tabela abaixo, segundo o relatório experimental, a carga última obtida por método plástico foi de 251 kN, entretanto aquela utilizando uma análise mais rigorosa, incluindo escorregamento na interface, foi de 252,5 kN. Estes valores são mais próximos do valor obtido na presente análise de 250 kN.

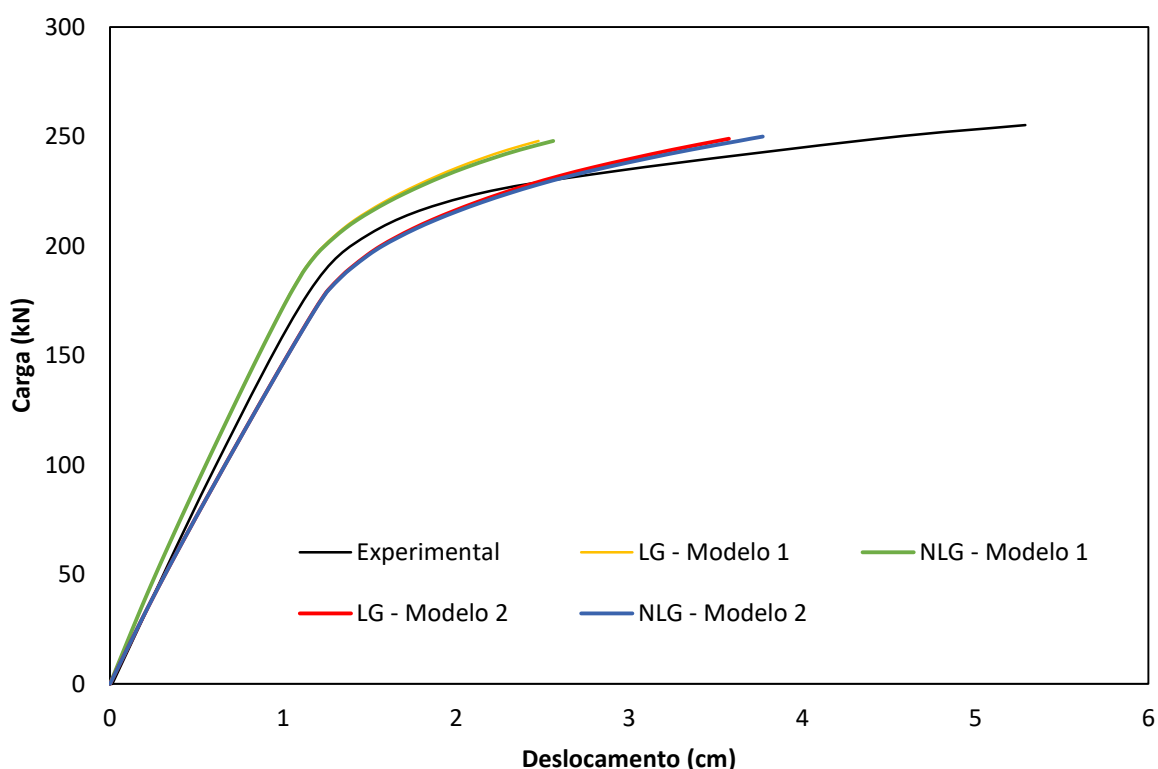


Figura 74 - Resultados da viga CTB4

Tabela 21 – Comparação de resultados da viga CTB4 (cm, kN)

	Experimental	Modelo 1				Modelo 2			
		LG	Erro	NLG	Erro	LG	Erro	NLG	Erro
Pu	259	248,00	4,25	248,00	4,25	249	3,86	250,00	3,47
du	5,29	2,48	53,18	2,56	51,58	3,58	32,30	3,77	28,71

Os mecanismos de colapso são similares para os modelos 1 e 2, porém apenas se apresenta o mecanismo de colapso referente ao modelo 1. A Figura 75 mostra a deformada da viga na condição de carregamento último, para o caso da análise NLG. A partir desta figura, é possível observar o deslizamento relativo máximo do conector de corte no extremo da laje, na condição de carga última com valor de 0,41mm, enquanto o valor experimental é de 0,40mm.



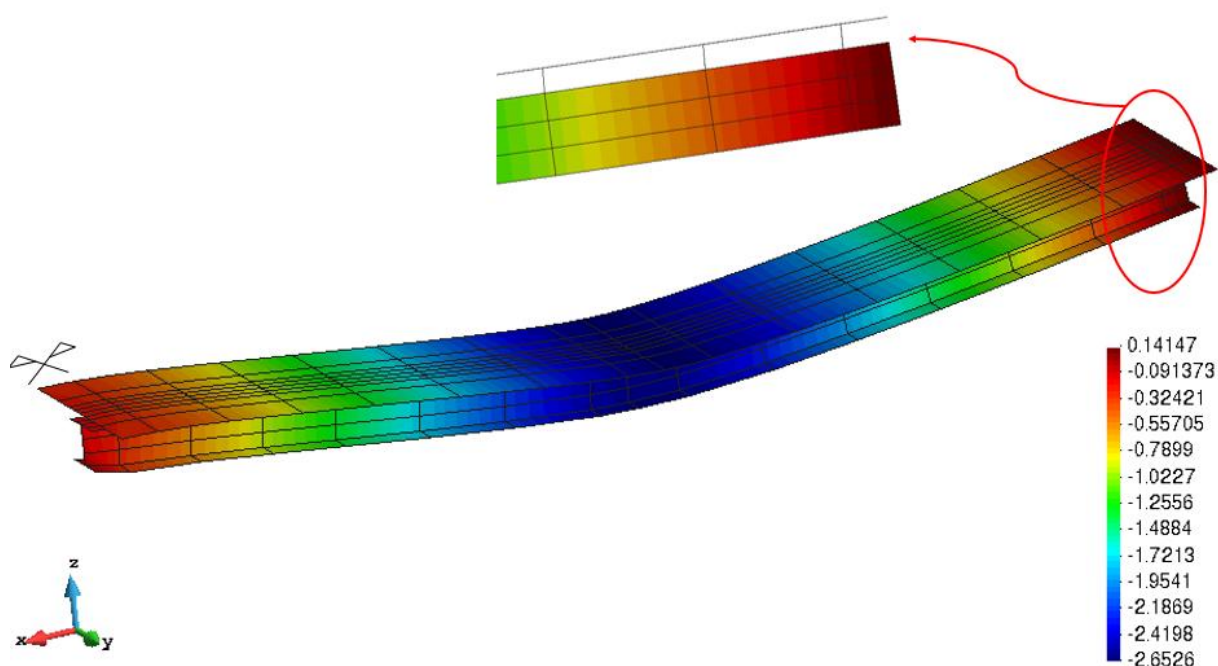


Figura 75 - Análise NLG Modelo 1: Deformada da viga CTB4 (cm) (P=248kN)

A primeira fissura ocorre na camada superior de concreto sobre o apoio interior para a carga aplicada de 30 kN, sendo este comportamento idêntico nas duas análises (LG e NLG). Nesta zona, as fissuras são formadas perpendicularmente ao eixo longitudinal e se espalham ao longo da largura da laje, de acordo com o que pode ser visto na Figura 76.

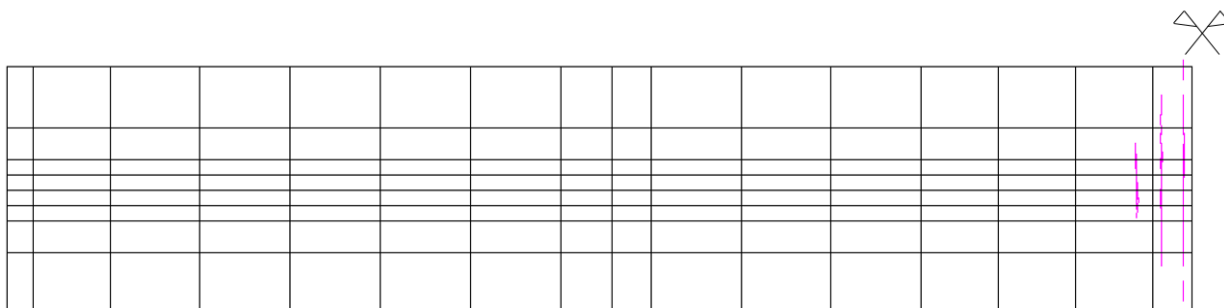


Figura 76 - Padrão de fissuração (P=30kN)

Posteriormente, a viga de aço começa a escoar na sua parte inferior, sobre o apoio intermediário, simultaneamente com a mesa inferior no centro da viga. Este comportamento ocorre para uma carga de 190 kN, de acordo com a Figura 77.

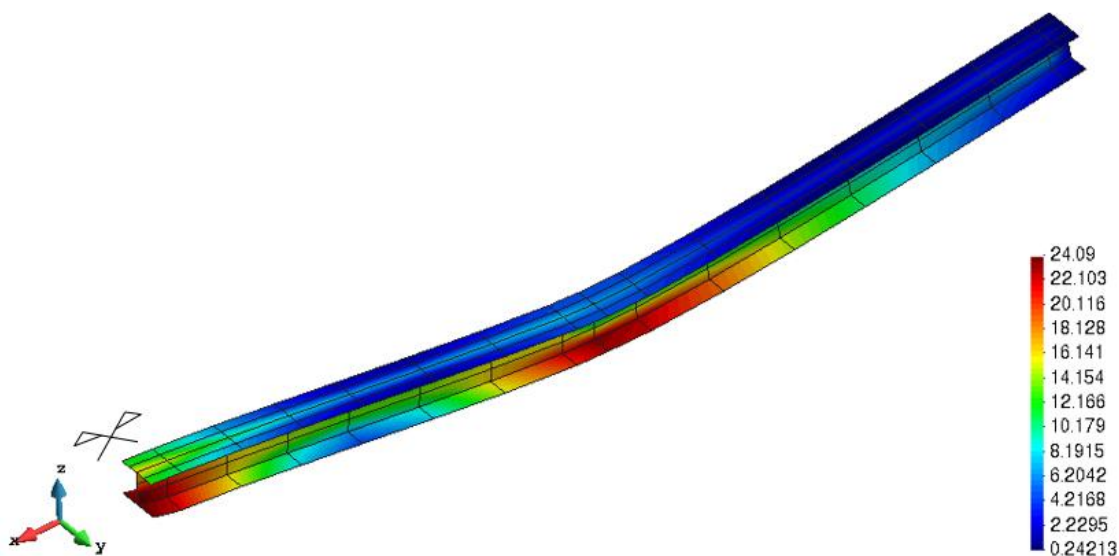


Figura 77 - Análise NLG: Distribuição de tensões de von Mises ( $\text{kN/cm}^2$ ) ( $P=190\text{kN}$ )

Na Figura 78 é representado o padrão de fissuração da camada superior da laje, onde é possível perceber o esmagamento (asterisco vermelho) do concreto na zona de momento positivo perto da aplicação da carga. Também pode ser visto o padrão de fissuração (linhas retas) e os pontos que ultrapassaram a tensão de resistência à compressão do concreto (círculos em azul), apresentando um comportamento elastoplástico.

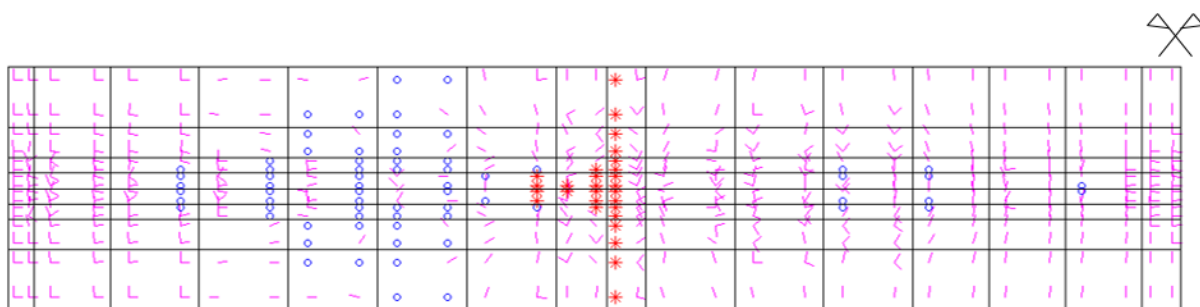


Figura 78 - Análise NLG: Padrão de fissuração e esmagamento na camada superior  
( $P=248\text{kN}$ )

Simultaneamente com o mecanismo anterior, pode-se observar que na região do apoio interno, a alma do perfil está sujeita a tensões de von Mises variando de  $28,81\text{kN/cm}^2$  na parte inferior a  $24,07\text{kN/cm}^2$  na parte superior (Figura 79). É importante lembrar que a tensão de escoamento do material é definida com valor de  $23,7\text{kN/cm}^2$ , sendo assim, pode-se dizer que toda a alma do perfil está plastificada.

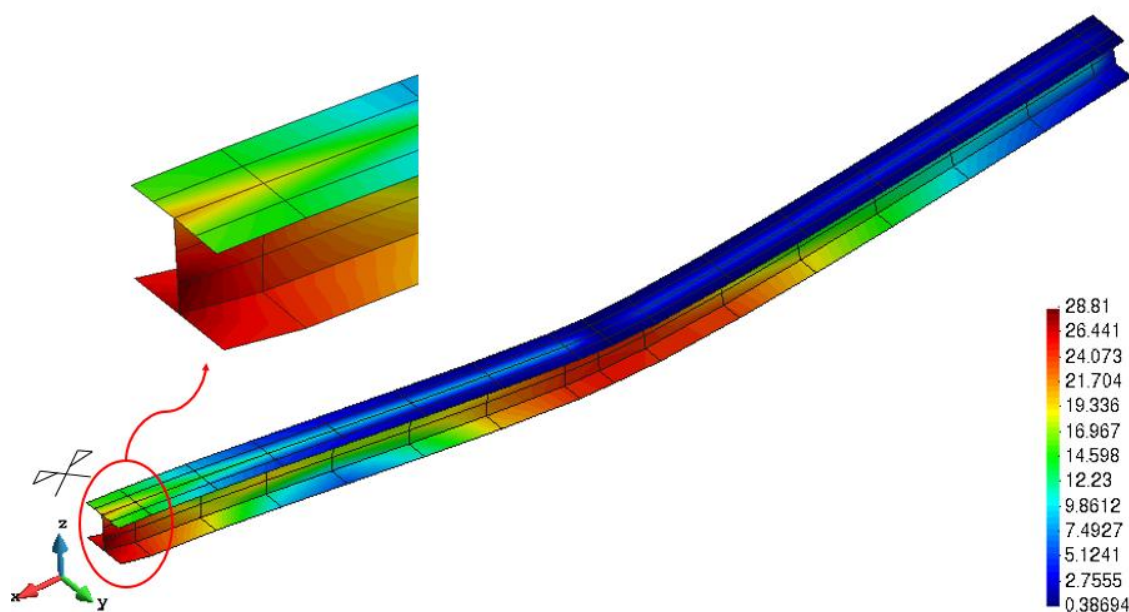


Figura 79 - Análise NLG: Distribuição de tensões de von Mises ( $\text{kN/cm}^2$ ) ( $P=248\text{kN}$ )

As análises numéricas sequencialmente confirmaram as observações experimentais de Ansourian (1981), onde a laje de concreto começa a fissurar na zona do apoio interno e, portanto, perdendo sua rigidez progressivamente nesta região. Em seguida, a parte inferior do perfil na região do apoio interno começa a plastificar, sendo assim, a malha de reforço na laje é mais solicitada, alcançando sua tensão de escoamento, até que se produz escoamento na parte inferior do perfil de aço ao meio do vão conjuntamente com o esmagamento da laje.

### 7.2.2 Viga mista contínua CCB1 ensaiada por Li (2003)

Em Li (2003) *apud* Nie *et al.* (2009), sete vigas mistas contínuas de dois vãos foram ensaiadas, sendo a viga sem protensão CCB1 selecionada nesta seção. As dimensões da seção transversal da viga estão apresentadas na Figura 80, enquanto as dimensões longitudinais, bem como o posicionamento da aplicação de carga, são ilustradas na Figura 81.

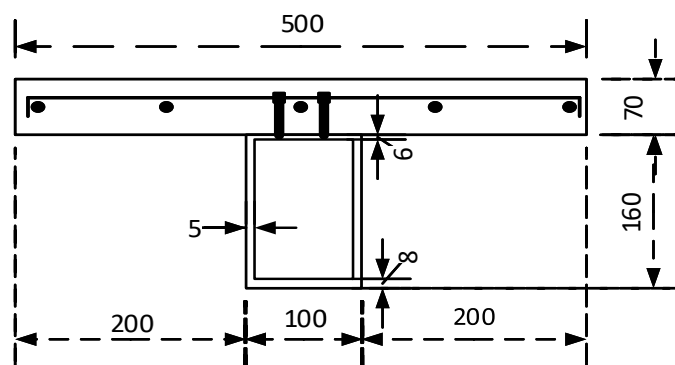


Figura 80 - Seção Transversal viga CCB1 (mm)

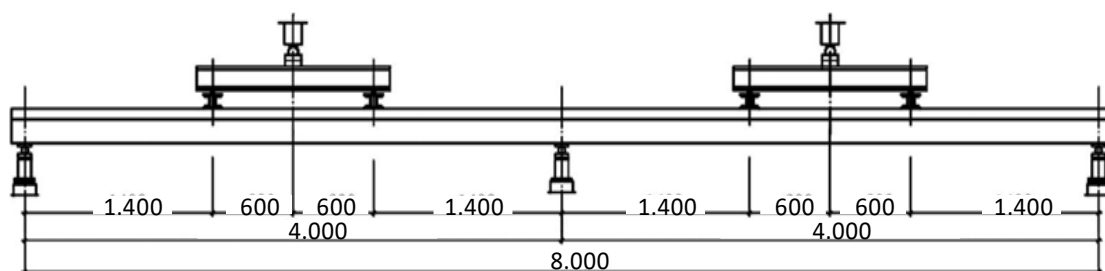


Figura 81 - Seção longitudinal e esquema de aplicação de cargas (mm)

Em relação à posição do aço de reforço na laje de concreto, não existem dados na referência consultada. Considera-se que a armadura encontra-se soldada na ponta dos conectores a 45 mm da borda inferior da laje de concreto (WAYAR, 2016). O relatório experimental também não indica o espaçamento entre as barras, uma vez que as barras são modeladas em camadas, esse dado não se fez necessário. O reforço na direção longitudinal tem taxa de armadura igual a 1,62% e 0,67% no sentido transversal. As propriedades mecânicas dos materiais são apresentadas na Tabela 22.

Tabela 22 - Características da Viga CCB1

Material	Propriedades (cm, kN)		
Aço Estrutural	Tensão de Escoamento	Almas	28,77
		Mesa Superior	24,93
		Mesa Inferior	27,23
	Tensão Última	Almas	44,33
		Mesa Superior	42,83
		Mesa Inferior	48,94
	Módulo de Elasticidade		20000
	Poisson		0,3
	Deformação Última (alma)		0,24
	Deformação Última (mesas)		0,28
Aço de Reforço	Tensão de Escoamento		30
	Tensão Última		40
	Módulo de Elasticidade		20000
	Poisson		0,3
	Deformação Última		0,25
Concreto	Resistência à Compressão		3,14
	Resistência à Tração		0,26
	Módulo de Elasticidade		4333,9
	Poisson		0,2
	Deformação Última		0,0045
Conector	Número total		116
	Número de Linhas		2
	Constante 1		18
	Constante 2		5 mm <sup>-1</sup>

Considerando a simetria no eixo  $x$ , apenas a metade da viga foi considerada. Os nós da mesa inferior do apoio extremo tiveram os deslocamentos restritos na direção Z (vertical) e Y (perpendicular ao plano da alma). Além das condições de simetria, os nós da face central da viga tiveram os deslocamentos restritos de forma a simular um apoio duplo com restrição ao giro. A rigidez considerada nos conectores é mostrada na Figura 82, onde são utilizadas as constantes  $a = 18\text{kN}$  e  $b = 5\text{mm}^{-1}$  conforme utilizado no trabalho de Wayar (2016). Quanto aos parâmetros de convergência, adotou-se tolerância igual a 0,01 e número de incremento de carga igual a 15.

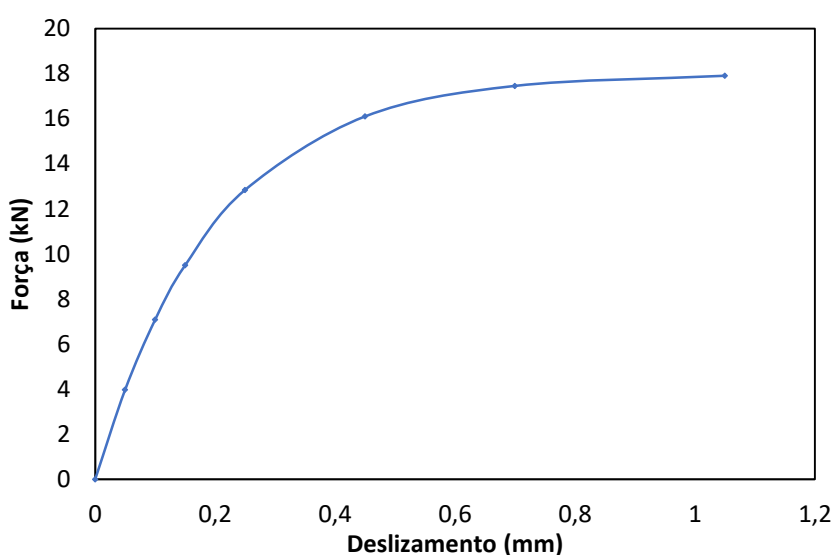


Figura 82 - Rigidez dos conectores da viga CCB1

Em relação à aplicação das cargas, esta foi considerada uniformemente distribuída nas áreas dos elementos mostrados na Figura 83. O modelo numérico da viga CCB1 no VIMIS apresenta 570 elementos na viga de aço, 228 elementos na laje de concreto e 116 conectores acomodados em duas linhas segundo o esquema da Figura 80.

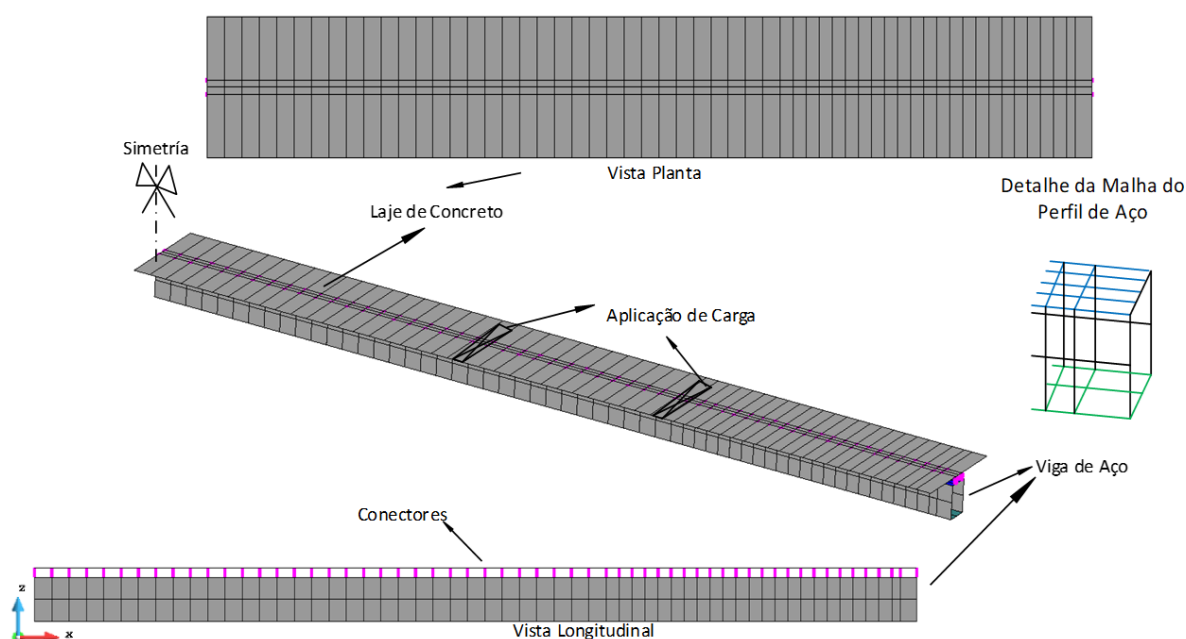


Figura 83 - Malha de Elementos Finitos correspondente a um vão: Viga CBB1

Duas análises são realizadas, a primeira, denominada LG, a qual não considera grandes deslocamentos, levando em conta somente a não linearidade dos materiais, e a segunda (NLG) com a consideração da não linearidade geométrica. São comparados os resultados obtidos com os valores experimentais, conforme é apresentado na Figura 84, para o estudo do desenvolvimento de deflexão no meio do vão à medida que a carga é aplicada. Percebe-se uma boa correlação entre as curvas, sendo que uma análise quantitativa destes resultados é mostrada na Tabela 23, na qual é possível observar que os resultados de carga última na análise NLG são mais próximos aos experimentais, porém a trajetória de carga entre as duas análises são bastante similares entre si.

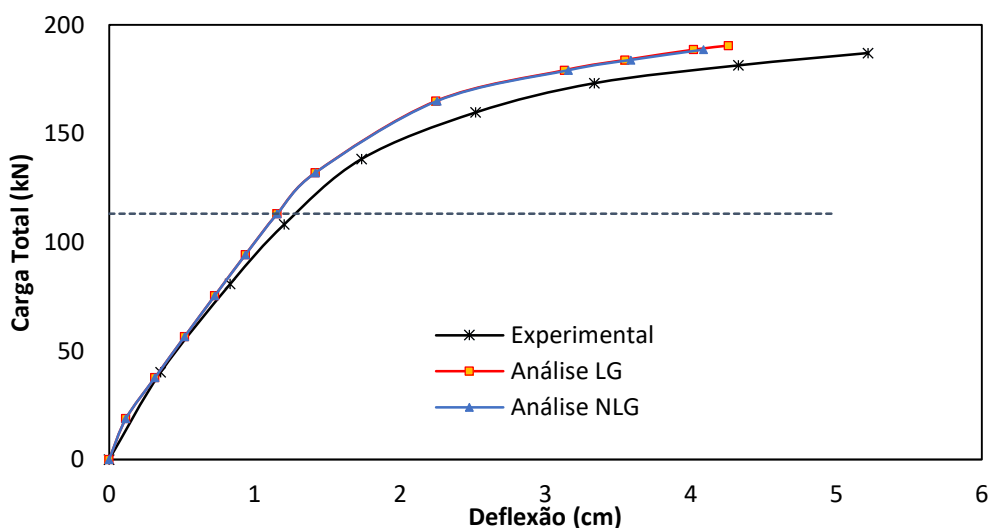


Figura 84 - Resultados viga contínua CBB1

Tabela 23 - Comparação de resultados viga contínua CBB1

	Teste Experimental	Análise LG	Erro (%)	Análise NLG	Erro (%)
Pu (kN)	187,07	190,49	1,83	188,60	0,82
du (cm)	5,22	4,26	18,40	4,09	21,71

Na curva mostrada na figura anterior, pode-se perceber que a partir de certo ponto, o incremento de deslocamento passa a ser não linear. Este ponto se refere ao início do escoamento da mesa inferior e superior da viga de aço, onde as tensões na região do apoio interno atingem a tensão de escoamento,  $27,23\text{kN/cm}^2$  e  $24,94\text{kN/cm}^2$ , respectivamente. Este fato ocorre para uma carga externa de  $113,16\text{ kN}$ , com um deslocamento associado no centro vão de  $1,2\text{ cm}$ , estes valores são encontrados para ambas as análises, enquanto que no ensaio experimental é relatado que este deslocamento é de  $1,1\text{ cm}$ . As tensões equivalentes no perfil de aço na carga mencionada são mostradas na Figura 85.

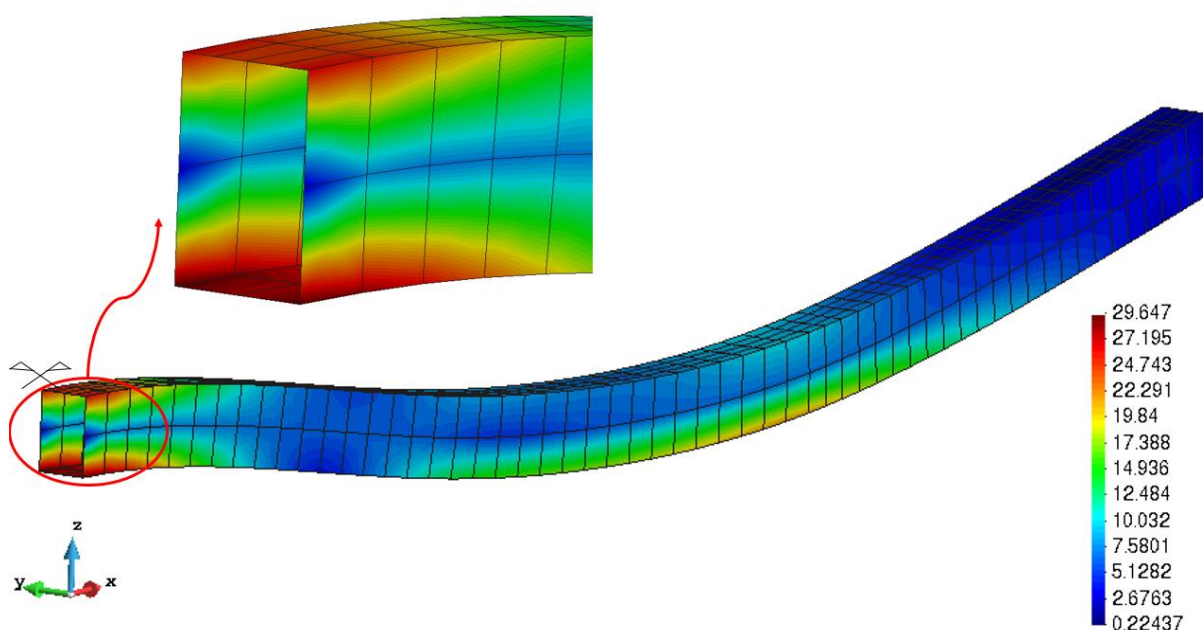


Figura 85 – Análises LG e NLG: Tensões de von Mises na alma do perfil de aço ( $\text{kN/cm}^2$ )  
( $P=113,16\text{ kN}$ )

O concreto encontra-se em tração na região do apoio central, o que ocasiona fissuras logo no segundo passo de carga ( $37,72\text{ kN}$ ), resultando na redução de rigidez da estrutura, conforme comentado no exemplo anterior. As fissuras formadas nesse incremento de carga podem ser apreciadas na Figura 86, na camada superior da laje. Já na camada inferior (ver Figura 87) as fissuras ocorrem na região da aplicação da carga, indicando que parte da espessura

da laje encontra-se em tração, ou seja, a linha neutra está na espessura da mesma. Este comportamento é idêntico nas análises LG e NLG.

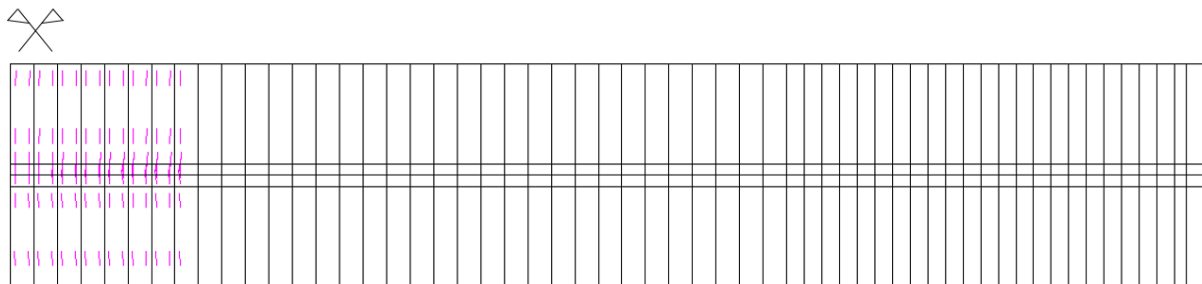


Figura 86 - Análises LG e NLG: Padrão de fissuração na camada superior no incremento 2 (P=37,72 kN)

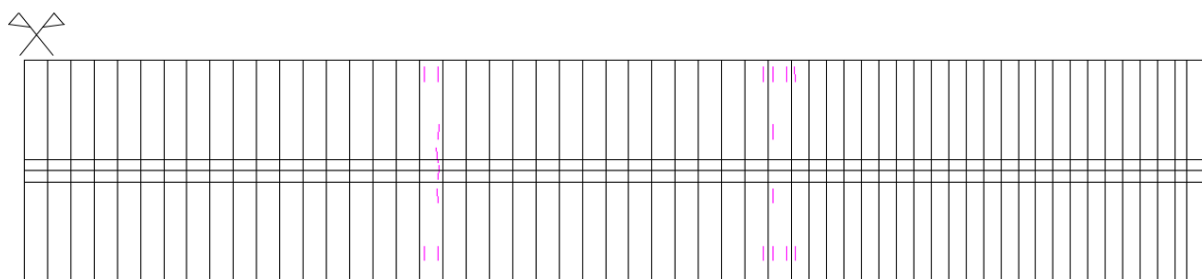


Figura 87 - Análises LG e NLG: Padrão de fissuração na camada inferior no incremento 2 (P=37,72 kN)

Ao examinar os motivos de parada da análise, concluiu-se que a mesma foi interrompida pelo esmagamento do concreto, este fato resulta em uma carga última no valor de 190,49kN, na análise LG. O esmagamento do concreto pode ser verificado simultaneamente na região onde é aplicada uma das cargas e próxima do apoio interior (seção de simetria). A Figura 88 mostra, para o carregamento último, a distribuição de fissuras na camada superior (retas cor magenta), pontos onde ocorreu o esmagamento (asterisco vermelhos) e zonas de compressão que atingiram a máxima resistência do concreto (círculos azuis).

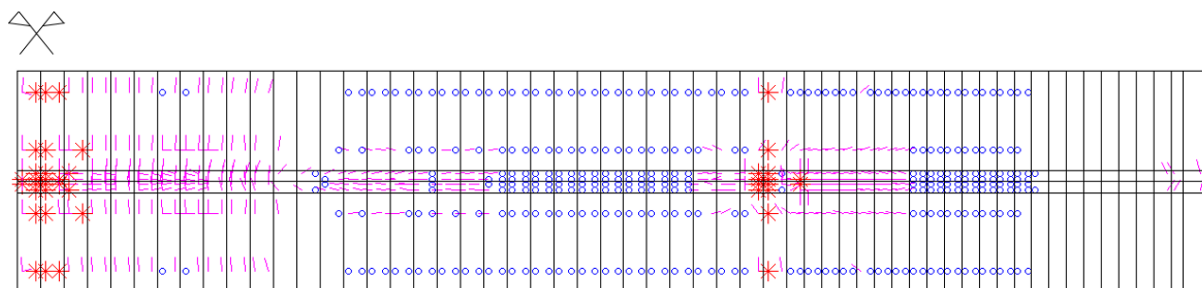


Figura 88 – Análise LG: Padrão de fissuração e esmagamento na camada superior (P=190,49kN)



A carga de falha da estrutura para a análise NLG é de 188,6kN. Para este caso de estudo não ocorreu o esmagamento na região fissurada, sendo a análise interrompida por esmagamento do concreto na região de aplicação da força, conforme é observado na Figura 89.

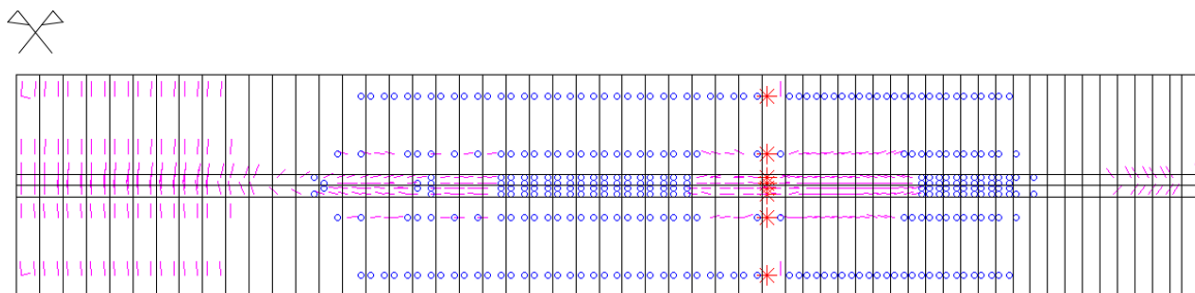


Figura 89 - Análise NLG: Padrão de fissuração e esmagamento na camada superior  
(P=188,6kN)

Abaixo, na Tabela 24 pode ser observado um resumo dos valores que caracterizam a análise de vigas mistas, como carga última ( $P_u$ ) e deslocamento vertical associado ao centro vão ( $du$ ), deslocamento no momento em que ocorre por primeira vez o escoamento do perfil ( $dy$ ), carga em que começam a ocorrer fissuras ( $P_{cr}$ ) e coeficiente de ductilidade ( $du/dy$ ). É possível perceber que o maior erro encontrado foi em relação à carga em que a laje começa a fissurar, isso pode ser devido ao passo de carga utilizado ou ao refinamento da malha. Desta forma, com o objetivo de aproximar esse valor do experimental, o ideal seria aumentar a quantidade de incrementos próximos desta carga, entretanto, como esse comportamento não veio a influenciar no comportamento geral da viga, manteve-se dessa forma.

Tabela 24 – Comparação de resultados viga CBB1

	Teste Experimental	LG	Erro (%)	NLG	Erro (%)
$P_{cr}$ (kN)	13,2	18,86	42,88	18,86	42,88
$P_u$ (kN)	188,60	190,49	1,00	188,60	0,00
$du$ (cm)	5,88	4,26	27,55	4,09	30,49
$dy$ (cm)	1,15	1,16	-0,56	1,16	-0,56
$du/dy$ (kN)	5,11	3,68	27,95	3,53	30,94

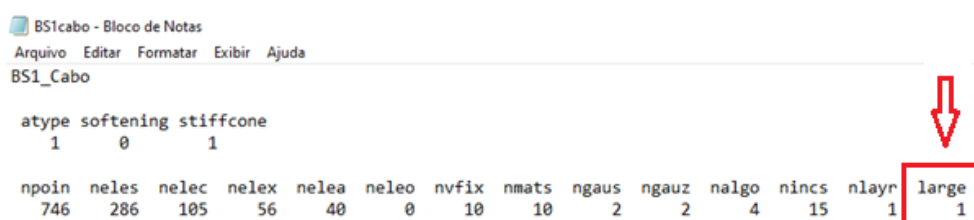
### 7.3 VIGAS MISTAS COM PROTENSÃO EXTERNA

A análise NLG se faz importante no estudo de vigas mistas com protensão externa, pois, o cabo tem grande influência nesse comportamento, tornando-se ainda mais evidente quando o mesmo não é retilíneo. Em casos em que a aderência parcial é considerada, o efeito de segunda

ordem acontece quando a peça deforma resultando na não compatibilidade entre o deslocamento do cabo e aquele da viga de aço em zonas entre desviadores e ancoragens, o que resulta numa variação de excentricidade entre o eixo do cabo e um eixo de referência qualquer da viga de aço.

Para o estudo de vigas mistas com protensão externa, é utilizado o elemento catenária, o qual foi implementado no programa VIMIS por Wayar (2016). Este elemento foi adotado pois é capaz de representar grandes curvaturas, quando comparado com o uso do elemento clássico de treliça. Estudado em Coarita e Flores (2015), a catenária é um elemento lagrangeano que considera seu peso próprio de forma exata. Diferente da abordagem utilizada para os elementos finitos estudados no presente trabalho, em que o peso próprio deve aplicar-se como carga externa. Outra diferença é que o elemento de catenária implementado tem sua formulação descrita no referencial Lagrangeano Atualizado.

Os elementos finitos de casca que modelam a laje e o perfil de aço tem sua formulação escrita segundo a abordagem Lagrangeana Total e para indicar a utilização da análise em grandes deslocamentos é necessário que no arquivo de dados de entrada seja indicado “large=1”, de acordo com a Figura 90. No caso do cabo de protensão, a formulação é empregada no referencial Lagrangeano Atualizado e para especificar ao programa que deve ser utilizada a análise de grandes deslocamentos, deve-se assinalar internamente a opção “geométrica=1” e “TipoEle=1”, com o objetivo de utilizar o elemento de catenária (Figura 91).



```

BS1cabo - Bloco de Notas
Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda
BS1_Cabo

atype softening stiffcone
  1      0      1

npoin neles nelec nelex nelea neleo nvfix nmats ngaus ngauz nalgo nincs nlayr large
 746  286  105   56   40    0   10   10    2    2    4   15    1    1

```

Figura 90 - Arquivo de entrada de dados

```

83  character(6),allocatable:: kefsx(:)      !element freedom signature connector
84  character(6),allocatable:: kefsa(:)      !element freedom signature cable
85  character(6),allocatable:: kefso(:)      !element freedom signature cable
86
87  integer(2),parameter :: Geometrica=1     !1=NLG e NLF 0=NLF %No cabo
88  integer(2),parameter :: TipoEle=1       !0=Treliça 1=Flores
89  !convergence
90  integer(2),parameter :: criterio=1      !1=forces, 2=displacement
91

```

Figura 91 - Módulo geral do programa VIMIS

Desta maneira, a análise de grandes deslocamentos é incluída no cabo por meio da atualização de suas coordenadas, que ocorre a cada iteração e ao nível de elemento, dentro da rotina de rigidez e força interna referente ao cabo, evitando-se assim as atualizações dos vetores de deslocamento globais. Este fato poderia acarretar possíveis conflitos entre nós compartilhados entre o cabo e o perfil de aço como, por exemplo, acontece em situações de aderência perfeita entre uma placa enrijecedora que serve de ancoragem para um cabo. Para todas as análises foram consideradas duas etapas de carga, sendo que a primeira corresponde à aplicação conjunta da força de protensão com o peso próprio da estrutura. Já na segunda etapa é aplicada a força externa a partir de um estado de tensões iniciais geradas pela primeira etapa.

### 7.3.1 Vigas mistas contínuas de dois vãos ensaiadas por Li (2003)

Nesta aplicação numérica são estudadas cinco vigas mistas contínuas com protensão externa ensaiadas experimentalmente por Li (2003) apud Nie *et al.* (2009). O autor denomina as vigas de PCCB1, PCCB2, PCCB3, PCCB4 e PCCB5, devido a que diferentes números de cabos, valores de força de protensão e traçados foram utilizados para os cabos, conforme se apresenta na Tabela 25. A geometria da viga é idêntica a CCB1 e corresponde a aquela apresentada na Figura 81 (item 7.2.2). Quanto ao traçado do cabo, estas são ilustradas na Figura 92, além disso são mostrados os desviadores utilizados na modelagem.

Tabela 25 - Descrição da série PCCB

Nome	Geometria	Quantidade de cabos	Força em cada cabo (kN)	Localização
PCCB-1	Linha reta	1	130,62	Interno a viga caixão
PCCB-2	Linha reta	2	128,84	Interno a viga caixão
PCCB-3	Com curvatura	1	133,73	Interno a viga caixão
PCCB-4	Com curvatura	2	123,22	Interno a viga caixão
PCCB-5	Linha reta	1	128,00	Externo à viga caixão

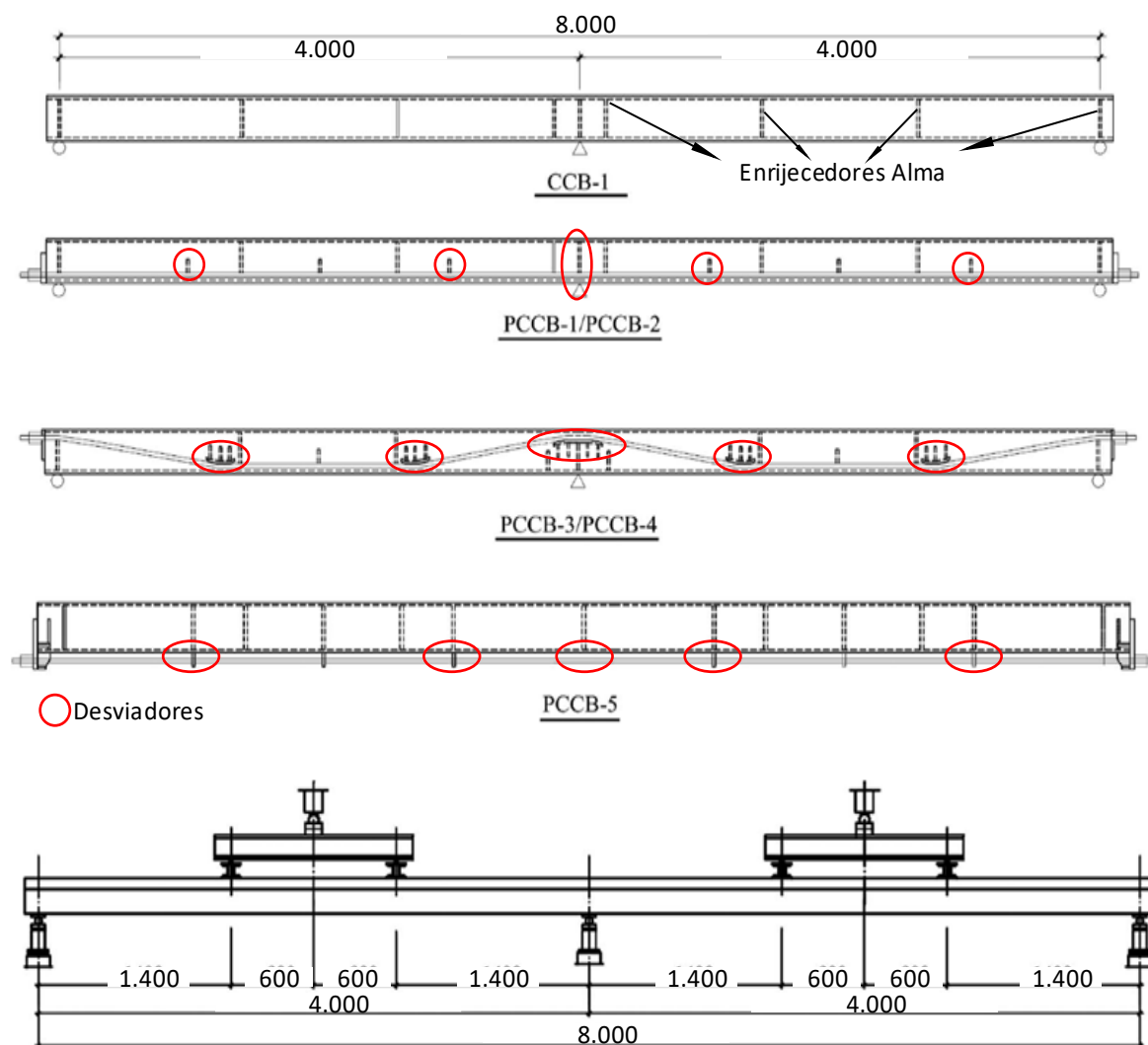


Figura 92 – Geometria da série PCCB (mm). Fonte: (NIE *et al.* 2009) Adaptado Por Wayar (2016)

Todas as vigas em questão foram modeladas com 174 elementos na laje de concreto, 116 conectores (mesma disposição que a viga CCB1) e 15 elementos em cada cabo de protensão. A quantidade de elementos da viga de aço é dependente do número de cabos, pois há a necessidade de discretizar a chapa de acordo com a posição longitudinal e transversal dos cabos. Além disso, com o objetivo de testar a influência da consideração de aderência perfeita ou parcial, são utilizados elementos de contato entre os desviadores e cabo de aço. No caso da viga PCCB1, a mesma é protendida por um cabo horizontal colocado a 38 mm da mesa inferior do perfil e bem no centro da seção, conforme a Figura 93.

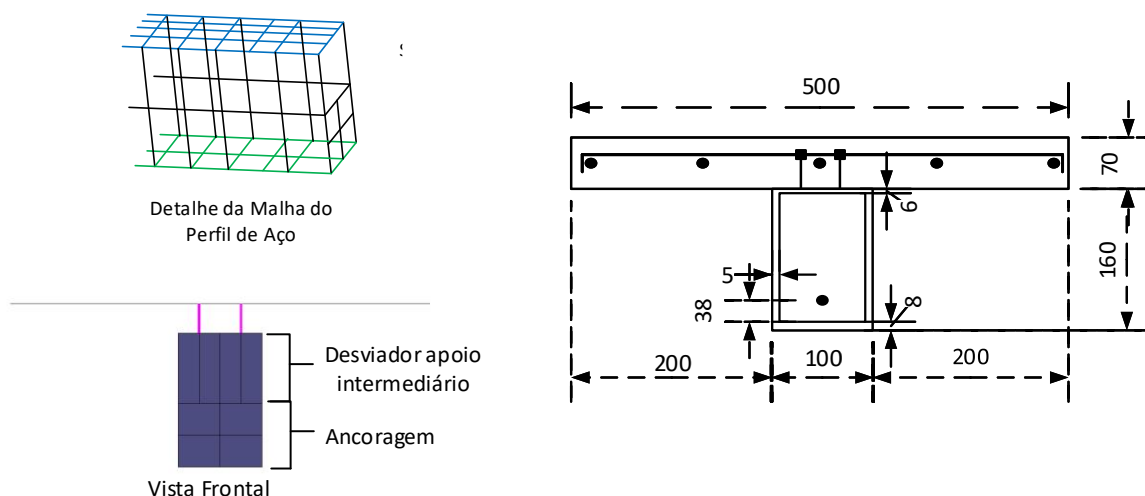


Figura 93 - Malha de elementos finitos e detalhe da posição do cabo para viga PCCB1 (mm)  
(Adaptado de Wayar, 2016)

A Figura 94 apresenta os resultados da análise da viga PCCB1, para o caso de análise considerando aderência perfeita, nos pontos de ancoragem (extremidade) e nos pontos dos desviadores, apresentando compatibilidade de deformação, durante todo o processo incremental de carga. É possível perceber que a análise NLG apresenta um comportamento mais próximo ao experimental, apesar de totalizar um erro ligeiramente maior em relação à carga última experimental (4,22%). Por outro lado, a análise com grandes deslocamentos representa melhor a rigidez da estrutura, resultando em um comportamento mais flexível quando comparado ao resultado LG.

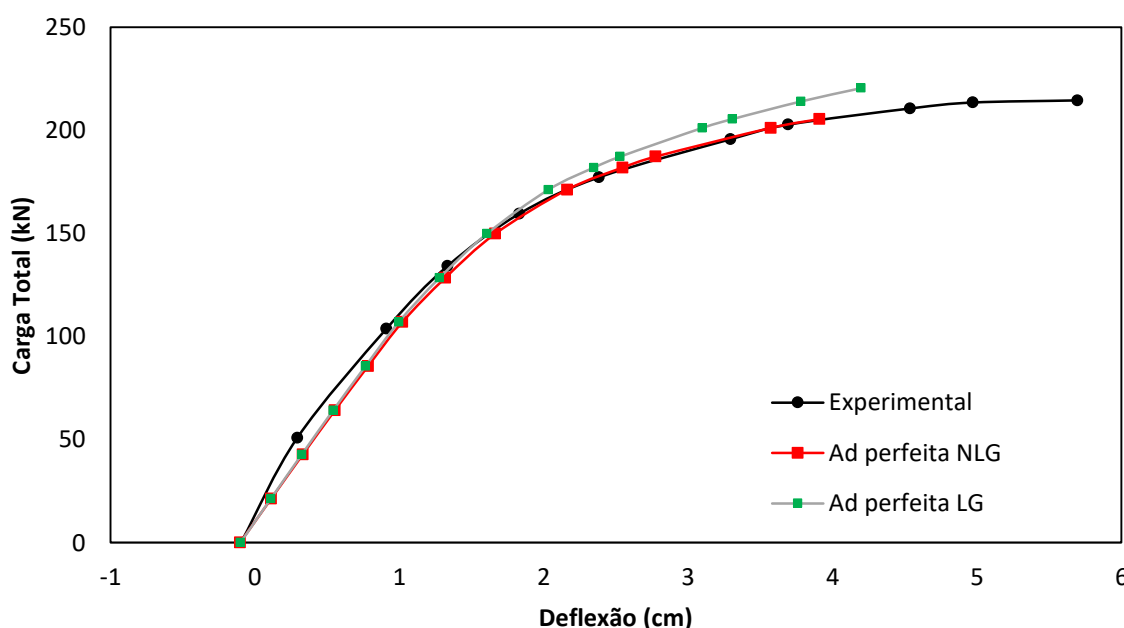


Figura 94 - Resultados da viga PCCB1 com aderência perfeita

Também foi verificado o caso em que se considera aderência parcial na zona dos desviadores, para isso foi utilizado um elemento de contato entre o cabo e desviadores. Nos extremos da viga, ou seja, nas ancoragens, foi adotado aderência perfeita, a fim de garantir o equilíbrio da estrutura. Esta situação representa mais realisticamente a interação existente entre o perfil de aço com o cabo segundo os relatórios experimentais, embora não exista consenso no valor do coeficiente de atrito a utilizar. Estes resultados são mostrados na Figura 95. Na Tabela 26 pode ser observada uma comparação quantitativa dos valores encontrados, em que é possível perceber que no caso em que é considerada compatibilidade de deformações a diferença entre os resultados de carga última das análises LG e NLG apresentam uma diferença ligeiramente maior (7,29 %), o que não acontece nas outras vigas estudadas.

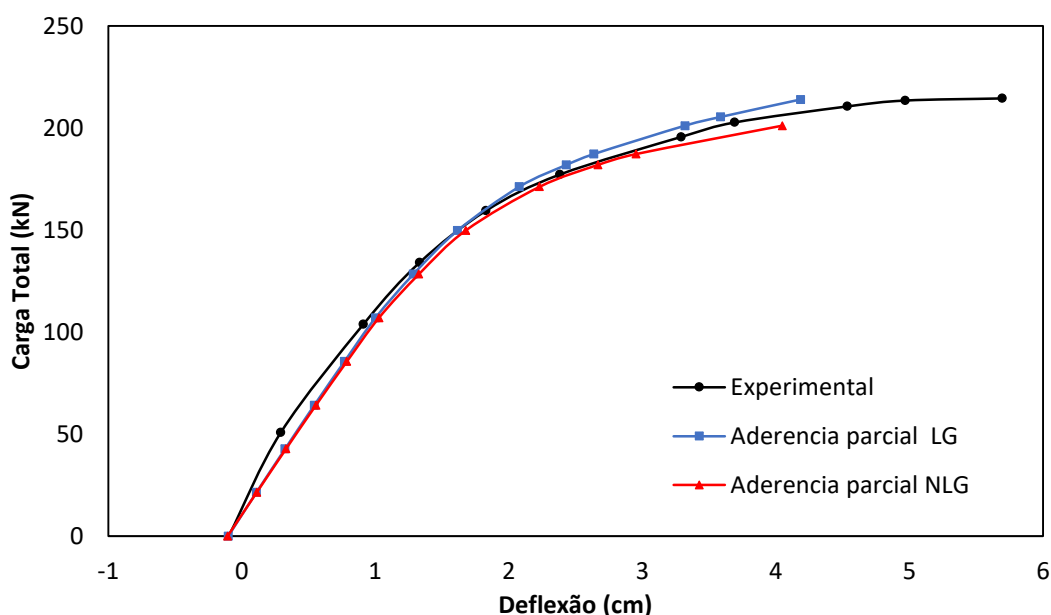


Figura 95 - Resultados da viga PCCB1 com aderência parcial

Tabela 26 - Comparação de resultados Viga PCCB1

	Teste	Análise Numérica							
		Experimental		Ad. parcial				Ad. perfeita	
	-	LG	Erro (%)	NLG	Erro (%)	LG	Erro (%)	NLG	Erro (%)
P <sub>u</sub> (kN)	214,50	214,00	0,23	201,16	6,22	220,42	2,76	205,44	4,22
d <sub>u</sub> (cm)	5,64	4,19	25,77	4,05	28,20	4,20	25,59	3,91	30,70
		Diferença LG e NLG			6,38	Diferença LG e NLG			7,29

Para o caso de aderência parcial com atrito igual a zero, é apresentado o desenvolvimento da força axial no cabo à medida em que são aplicadas as cargas na viga (Figura 96). Como se pode observar na Figura 97 a), no caso da análise LG, não há influência da localização do ponto escolhido no cabo, pois o mesmo apresenta uma tensão uniforme. No entanto para a análise NLG, há uma influência da localização e neste caso foi selecionada a seção do apoio intermediário.

Como não há atrito entre o cabo e desviadores, no ponto de vista físico a tensão no cabo deveria ser constante. Entretanto, observa-se que há três regiões com valores de tensões uniformes e que estas variações estão sendo introduzidas pelos desviadores. O provável motivo deste resultado é que os desviadores são modelados com o mesmo elemento de casca fina que foi empregado no perfil. Portanto, a formulação deste elemento para considerar o efeito não linear geométrico segue a abordagem Lagrangeana Total (ver item 5.1), por outro lado, a formulação do cabo de protensão externa segue a abordagem Lagrangeana Atualizada. Neste contexto, atribui-se o resultado da tensão do cabo não ser uniforme, para o caso com atrito nulo, a uma possível incompatibilidade entre as formulações.

De modo qualitativo, pode-se avaliar a tensão no cabo pelo valor médio correspondente à distribuição apresentada na Figura 97 b), no valor de 154,85 kN/cm<sup>2</sup>, com coeficiente de variação de 2,32%. Já para o caso de aderência total e análise NLG, a variação de tensões é superior, em torno de 42,6% (Figura 98). Isso é explicado, pois, ao considerar a aderência perfeita, cabo e perfil possuem o mesmo nó, causando uma restrição de deformação no cabo, o que ocasiona tensões no mesmo.

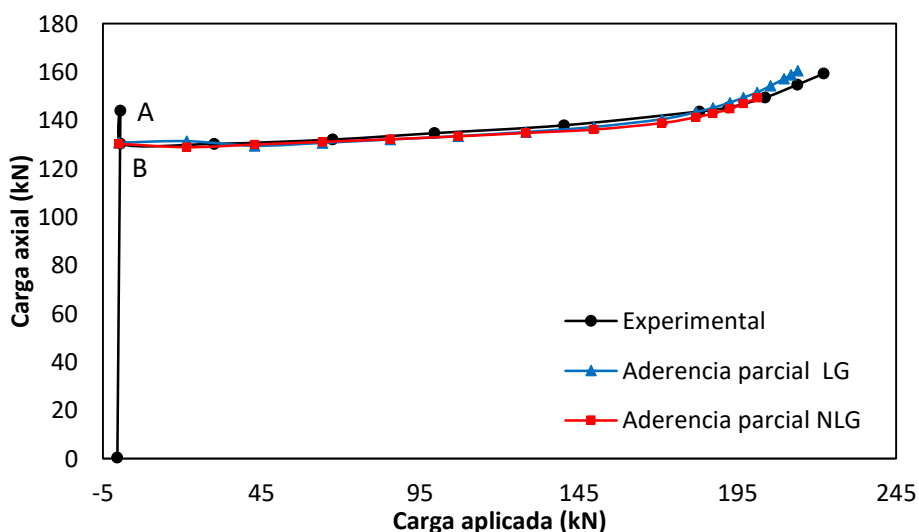


Figura 96 - Força Axial vs. Força Externa viga PCCB1

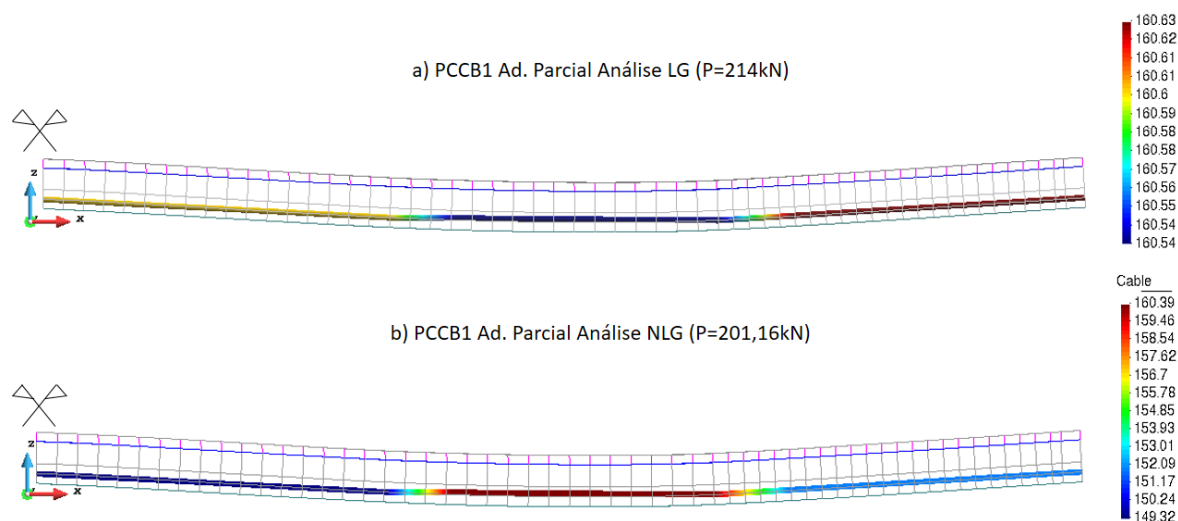


Figura 97 - Tensões axiais no cabo de protensão da viga PCCB1 com aderência parcial

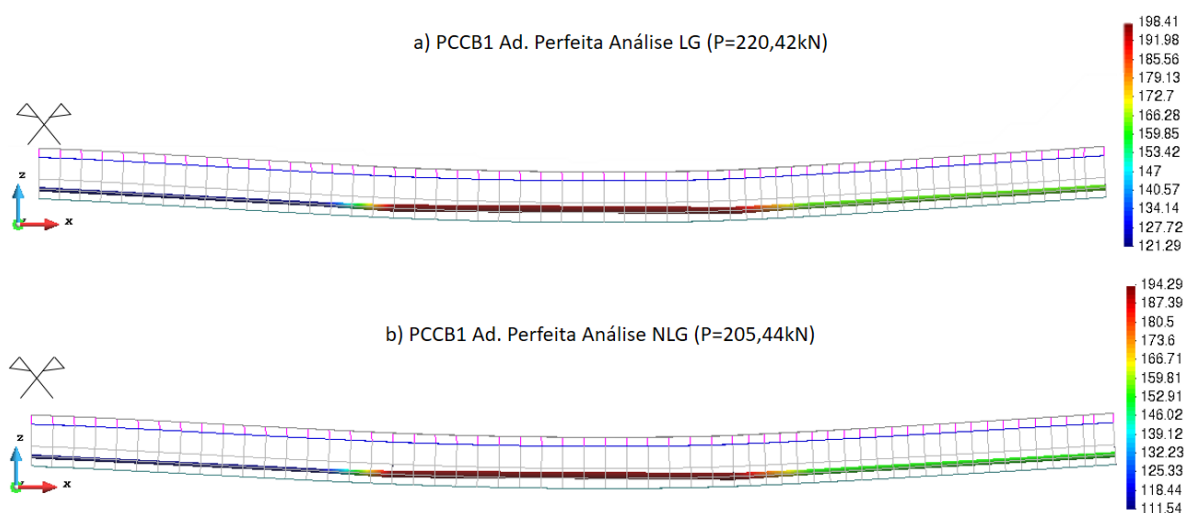


Figura 98 - Tensões axiais no cabo de protensão da viga PCCB1 com aderência perfeita

Na Figura 99 é mostrada a contra flecha gerada pela aplicação da força de protensão. Neste comportamento, a diferença de resultados de deslocamento no centro do vão das análises LG e NLG corresponde cerca de 4,5%, para as duas configurações de aderência. É importante lembrar que no modelo não foi considerada a relaxação do cabo de protensão, é por este fato que na análise de força axial mostrada na Figura 96, nos resultados experimentais, há um pico de forças, denominado de ponto A, enquanto que no estudo numérico este pico não existe, iniciando o processo no ponto B, chamado de tensão efetiva.



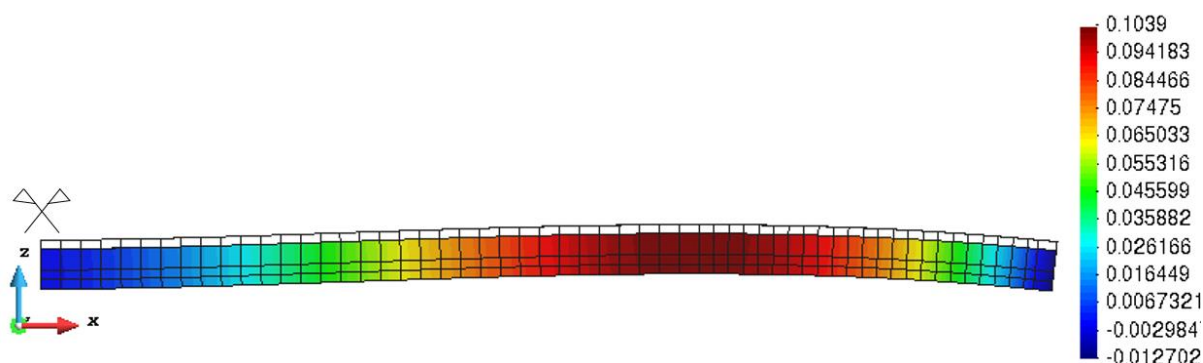


Figura 99 - Análise NLG: PCCB1 com Ad. perfeita – Contra flecha ocasionada pela protensão

Conforme mencionado anteriormente, na maioria dos casos com utilização de protensão externa, a diferença entre análise LG e NLG é evidenciada mais claramente nos casos em que se considera aderência parcial. Este fato foi possível ser identificado nas vigas PCBB2 e PCCB4, onde foram utilizados dois cabos internos e na viga PCCB5, onde foram utilizados dois cabos externos e um cabo externo à viga caixão com excentricidade, respectivamente. Esse comportamento pode ser identificado na Tabela 27 para a viga PCCB2, conjuntamente com as curvas força *versus* deslocamento da Figura 100.

Tabela 27 - Comparação de resultados viga PCCB2

	Teste	Análise Numérica							
		Ad parcial				Ad perfeita			
	Experimental	LG	Erro (%)	NLG	Erro (%)	LG	Erro (%)	NLG	Erro (%)
$P_u$ (kN)	228,30	248,52	8,86	193,80	15,11	250,80	9,86	230,28	0,87
$d_u$ (cm)	5,27	4,73	10,22	2,60	50,55	4,25	19,33	4,18	20,66
		Diferença LG e NLG			28,23	Diferença LG e NLG			8,91

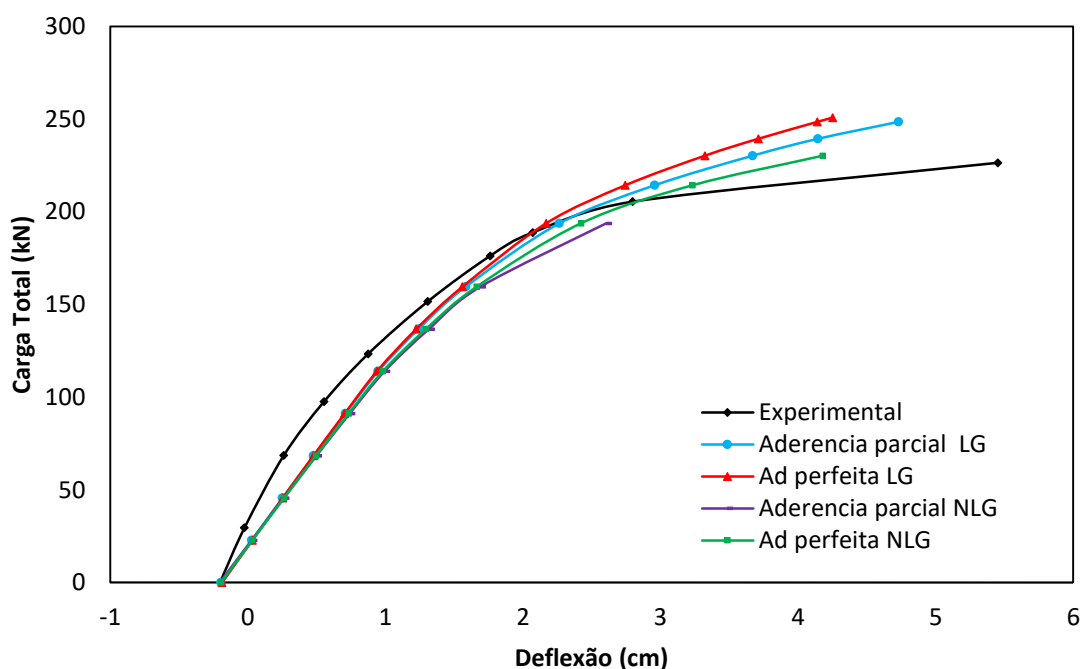


Figura 100 - Resultados viga PCCB2

O escoamento do perfil de aço ocorre para as quatro análises mostradas na figura anterior, na mesma carga aplicada de 91,2kN. A partir desse instante os resultados das análises com aderência perfeita e parcial começam a apresentar diferenças. Neste instante do comportamento a diferença da consideração de grandes deslocamentos não foi significativa. A Figura 101 mostra a distribuição de tensões de von Mises no perfil de aço, onde é possível identificar que a mesa superior alcança a tensão de escoamento (24,93kN/cm<sup>2</sup>) na região do apoio central.

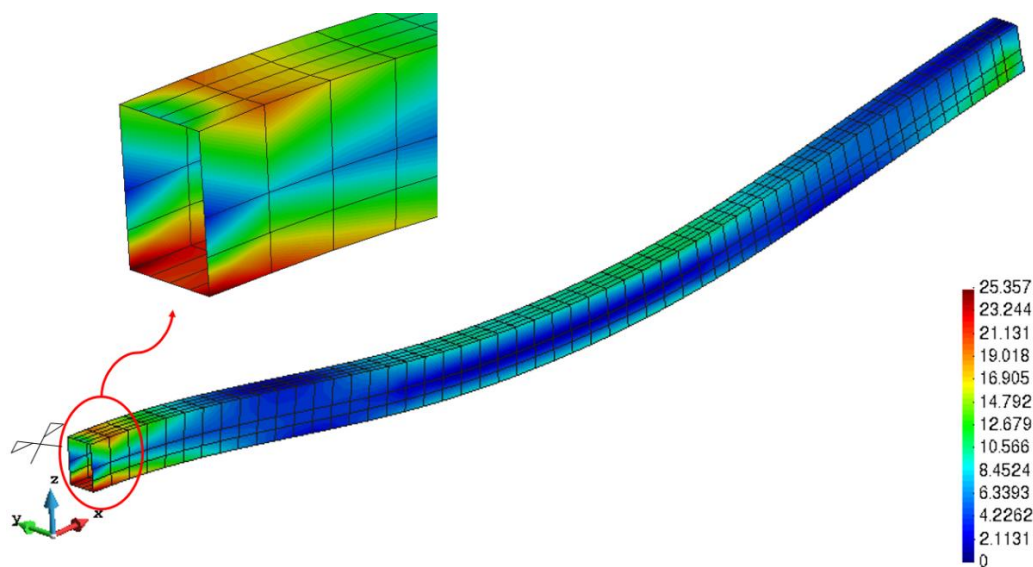


Figura 101 - Tensão de von Mises no perfil de aço viga PCCB2 (kN/cm<sup>2</sup>) (P=91,2kN)

Segundo Nie *et al.* (2009), é comum que nas vigas mistas sem protensão, as fissuras apareçam numa distância de até 15% do vão livre entre apoios. No caso da utilização de cabos protendidos essa fissuração sobre o apoio central tem a tendência de diminuir. Este fenômeno pode ser apreciado na Figura 102, onde é mostrada a camada superior da laje de concreto para uma carga aplicada de 45,6kN, considerando a análise NLG, para os casos da viga sem protensão (CCB1), viga com um cabo de protensão (PCCB1) e com dois cabos de protensão (PCCB2). Nesta última viga, pode ser observada a formação de fissuras na zona próxima do apoio externo, isto ocorre logo no primeiro passo de carga, o qual é relativo à aplicação da força de proteção. Este fato só pôde ser verificado quando foi considerada a análise NLG.

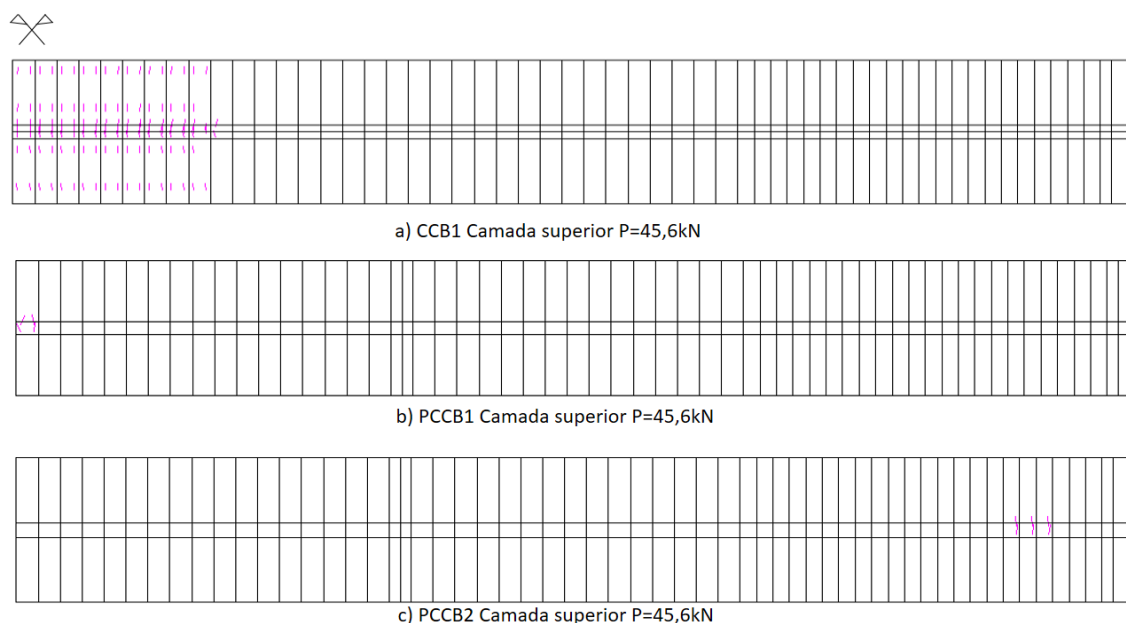


Figura 102 - Padrão de fissuração na camada superior nas vigas CCB1, PCCB1 e PCCB2

No caso da utilização de cabos de protensão não retilíneos, é esperado que os efeitos da consideração da não linearidade geométrica sejam evidenciados. De fato, isto pode ser apreciado nas vigas PCCB3 e PCCB4, onde é possível perceber que a análise NLG se aproxima mais do comportamento experimental. Em questão de carga última, a análise LG apresenta valor superior de 8,5% e 11,7%, para PCCB3 e PCCB4, respectivamente. Os resultados podem ser observados na Figura 103 e Figura 104, onde é possível concluir mais uma vez que os resultados em grandes deslocamentos são mais flexíveis. Nestas análises não se obteve diferenças significativas entre a consideração de aderência perfeita ou parcial.

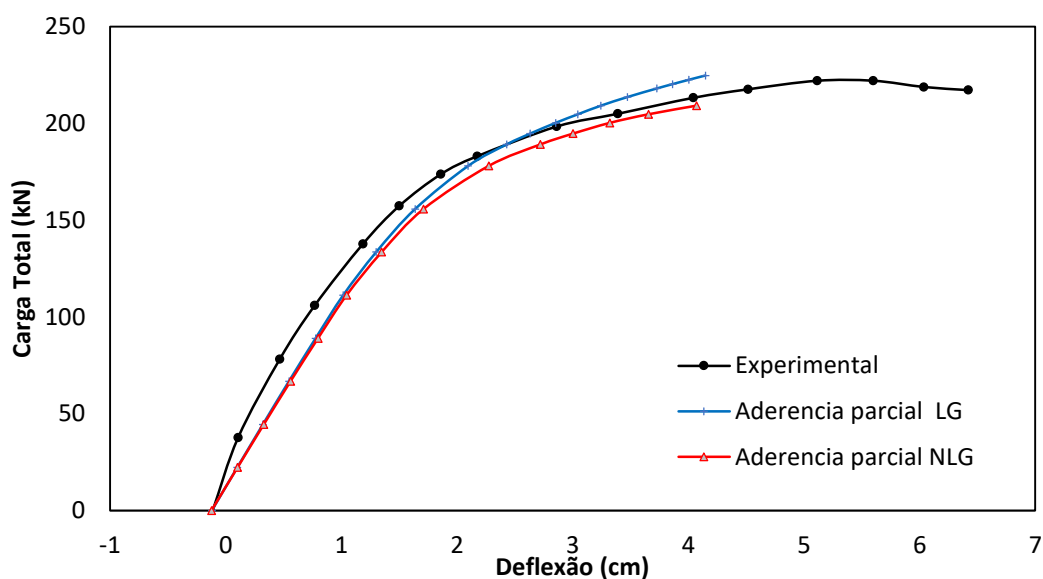


Figura 103 - Resultados da viga PCCB3

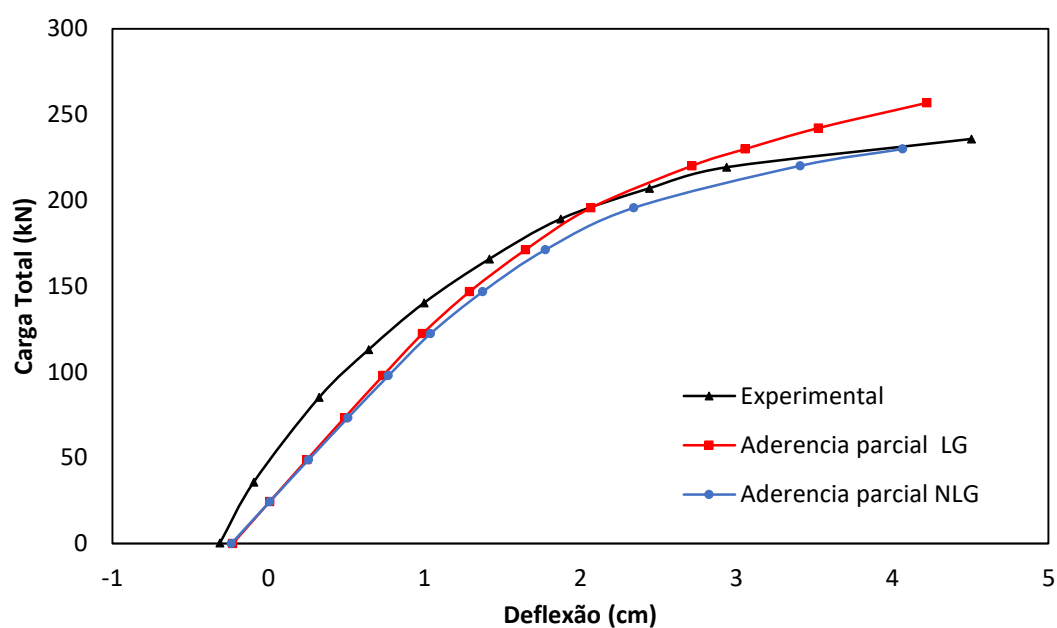


Figura 104 – Resultados da viga PCCB4

Os resultados das análises linear e não linear geométrica começam a divergir entre si a partir do momento em que ocorre o escoamento do aço. Na viga PCCB4 este fato pode ser observado quando é aplicada a carga de 97,84kN, gerando uma tensão de 28,27kN/cm<sup>2</sup> na mesa superior do perfil de aço, na região do apoio central. Este comportamento é ilustrado na Figura 105, onde é mostrada a tensão de von Mises.

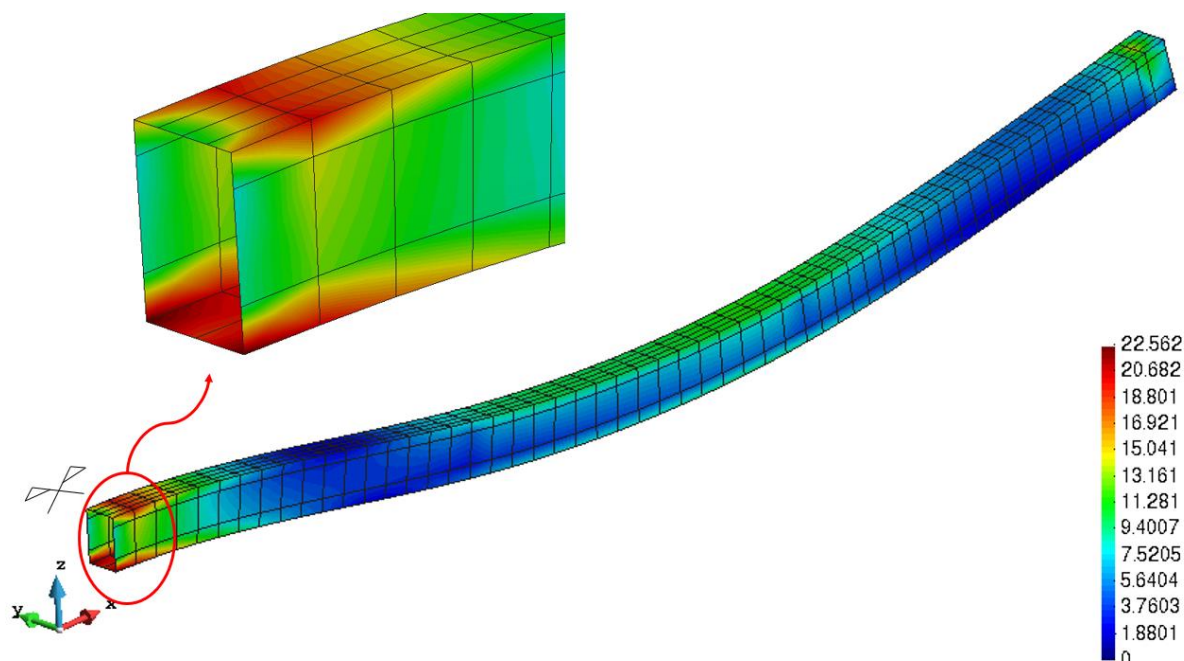


Figura 105 - Análise NLG: Tensão de von Mises no perfil de aço viga PCCB4 com aderência parcial (kN/cm<sup>2</sup>) (P=97,84kN)

Apesar da semelhança existente entre as curvas força *versus* deslocamento para as análises com aderência parcial e perfeita, o comportamento em nível de tensões no cabo é diferente. No caso de aderência perfeita há variações de tensões de cerca de 18,8%, enquanto que na aderência parcial essa diferença cai para cerca de 1,1%. Em relação à análise NLG, no momento em que são considerados os efeitos de segunda ordem há uma diminuição de tensões no cabo, isso ocorre pois a carga última aplicada tem valor menor, uma vez que o comportamento resultante é mais flexível. Este comportamento pode ser apreciado na Figura 106.

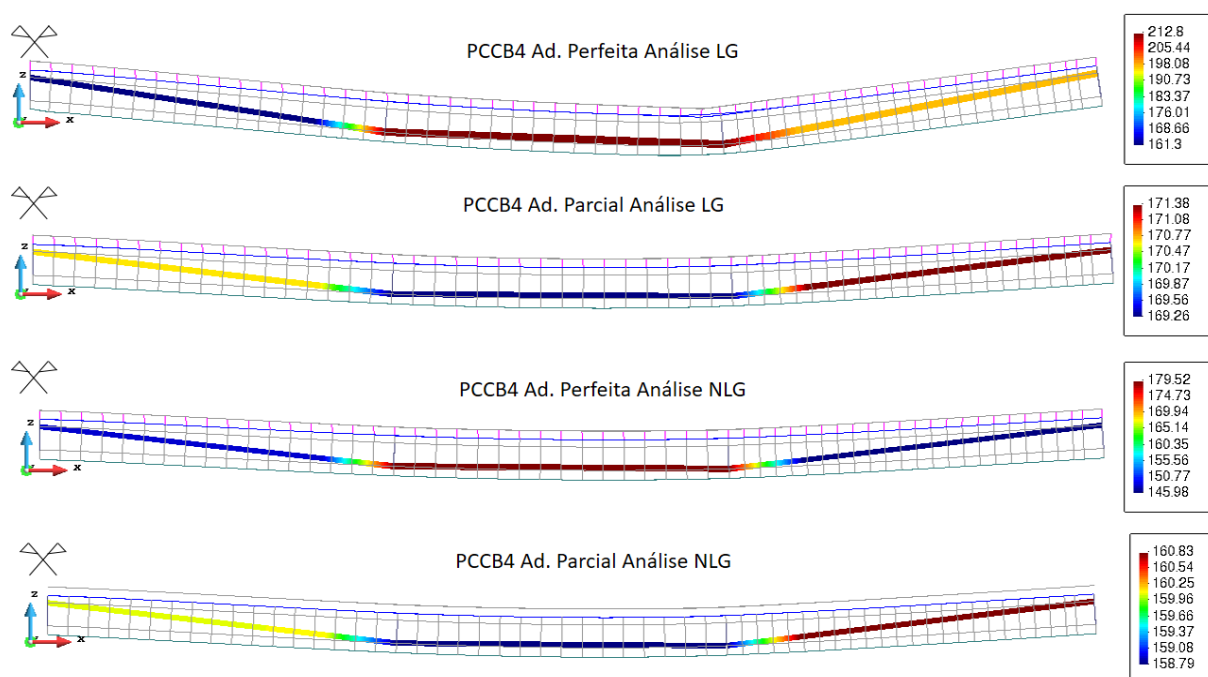


Figura 106 – Tensões axiais no cabo de proteção na viga PCCB4 (kN/cm<sup>2</sup>)

Por fim, é analisada a viga PCCB5, a qual possui apenas um cabo de protensão, sendo este posicionado externamente à viga caixão. A curva deflexão *versus* carga aplicada é apresentada na Figura 107. Esta viga, bem como as demais já comentadas, apresenta a interrupção da análise numérica em função do esmagamento da laje de concreto. Este comportamento é identificado na região de apoio interno, na camada inferior, conforme pode ser visto na Figura 108 a). Ou seja, onde há momento negativo, ocasionando a tração da parte superior e compressão da parte inferior da viga mista. Sendo assim, ocorre a fissuração na camada superior da laje e esmagamento na sua camada inferior. Isso demonstra que a linha neutra pode estar na espessura da laje. Este padrão de comportamento é observado na série de vigas PCCB. Na Figura 108 b) é apresentada a camada superior da laje, onde é possível apreciar que a zona ao meio do vão, entre pontos de aplicação da carga, a laje está totalmente em compressão, sugerindo uma zona de potencial esmagamento, enquanto a zona do apoio interior está em tração.

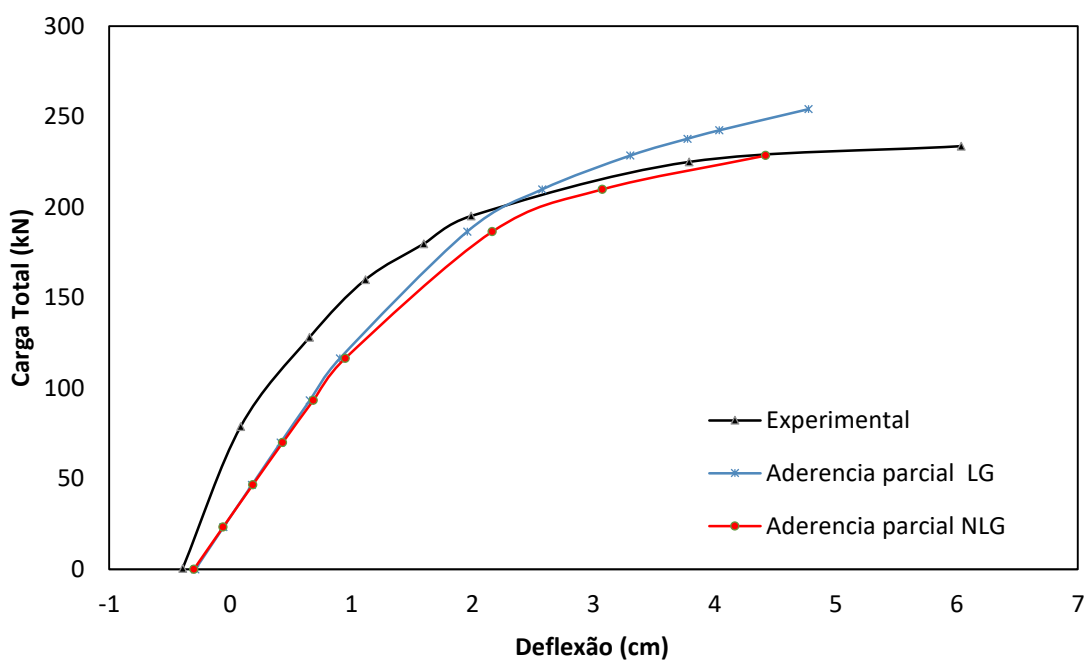
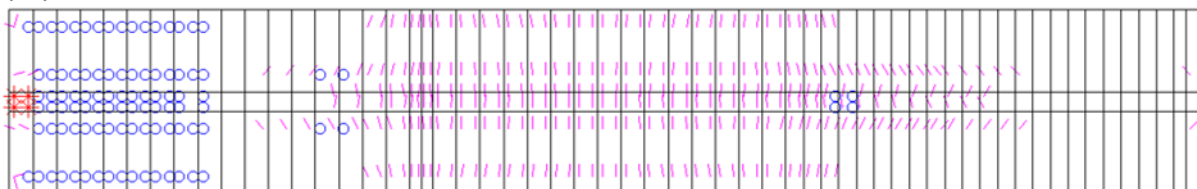


Figura 107 - Resultados da viga PCBB5



a) Camada inferior da laje da viga PCCB5



b) Camada superior da laje da viga PCCB5

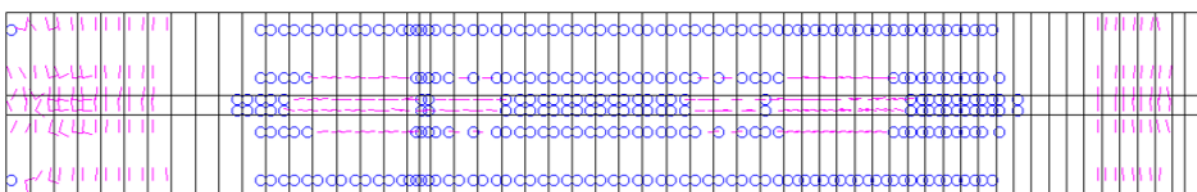


Figura 108 - Análise NLG: Padrão de fissuração e esmagamento da laje da viga PCBB5

(P=228,5kN)

### 7.3.2 Vigas experimentais de Chen e Gu (2005)

Nos testes experimentais sobre vigas mistas de aço-concreto com cabos de protensão externa disponíveis na literatura científica, a não linearidade geométrica não influencia significativamente o comportamento estrutural. No entanto, em algumas situações, a geometria

da viga mista, a condição de carregamento e a posição dos cabos são capazes de destacar estes efeitos. Zona, Ragni e Dall'asta (2008) comentam em seu estudo que este é o caso dos testes experimentais publicados por Chen e Gu (2005), ao se referenciarem a viga simplesmente apoiada, denominada BS2.

Desta forma, a presente seção tem como objetivo avaliar a viga BS2, bem como a viga denominada BS1. Ambas têm as mesmas características geométricas, diferenciando-se entre si pela força de protensão aplicada. As duas vigas analisadas são biapoiadas com relação comprimento/altura de 14,28, com vão entre apoios de 5m e com comprimento total 5,15m. As vigas são pré-tensionadas com dois cabos retos excêntricos sem desviadores intermediários e sujeitas a dois pontos simétricos de aplicação de carga. A ligação entre viga e laje é realizada através de 56 conectores de cisalhamento distribuídos em duas linhas no sentido longitudinal da peça. A geometria e a seção transversal da estrutura podem ser visualizadas na Figura 109 e Tabela 28. Na Figura 110, apresenta-se o esquema experimental dos referidos autores.

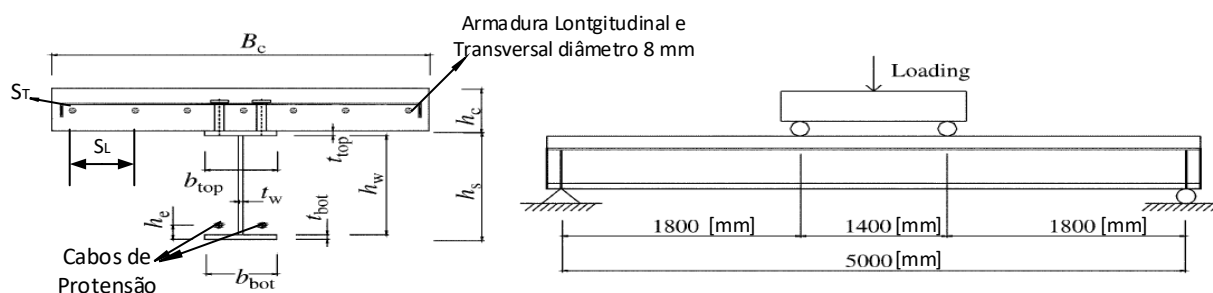


Figura 109 - Geometria das vigas mistas BS1 e BS2 (CHEN e GU, 2005)

Tabela 28 - Dimensões da seção transversal

	$B_c$	$h_c$	$b_{top}$	$t_{top}$	$h_w$	$t_w$	$b_{bot}$	$t_{bot}$	$h_e$	$S_L$	$S_T$
Dimensões Nominiais (mm)	1100	90	120	10	250	6	120	10	30	155	200





Figura 110 - Geometria das vigas mistas BS1 e BS2 (CHEN e GU, 2005)

As propriedades dos materiais empregados encontram-se na Tabela 29. É válido comentar que os dados do material da viga de aço, como a tensão de escoamento e a tensão última são a média dos valores, máximo e mínimo, de um teste de tração feito sobre corpos de prova do aço usado na construção da viga, sendo esse teste descrito na referência mencionada. Com estes dados, Wayar (2016) testa em seu trabalho a aplicação das propriedades indicadas, demonstrando as mais favoráveis e menos favoráveis e, por fim, validando a utilização da tensão de escoamento e tensão última segundo indicado na Tabela 29.

Tabela 29 - Propriedades dos materiais

<b>Material</b>	<b>Propriedades (kN, cm)</b>	
Aço Estrutural	Tensão de Escoamento	36,71
	Tensão Última	54,31
	Módulo de Elasticidade	20000
	Poisson	0,3
	Deformação Última (alma)	0,24
	Deformação Última (mesa)	0,28
	Aço de Reforço	Tensão de Escoamento
	Tensão Última	49,26
	Módulo de Elasticidade	20000
	Poisson	0,3
	Deformação Última	0,25

Material	Propriedades (kN, cm)	
Concreto	Resistência à Compressão	3,00
	Resistência à Tração	0,3
	Módulo de Elasticidade	3292
	Poisson	0,15
	Deformação Última	0,0045
Conector	Espaçamento	20
	Constante 1	75
	Constante 2	6 mm <sup>-1</sup>
Cabo	Tensão de Escoamento	168,0
	Tensão Última	186,0
	Módulo de Elasticidade	20000
	Deformação Última	0,25

Conforme os dados experimentais, o conector de cisalhamento foi dimensionado a fim de garantir interação total, de acordo com a BS5400: Parte 5 [8]. Desta forma, duas fileiras de conectores de 16 mm de diâmetro por 65 mm de comprimento foram soldadas a mesa superior, com um espaçamento transversal de 76 mm simétrico à linha central da mesa superior e um espaçamento longitudinal de 200 mm. O comportamento de rigidez adotado no presente trabalho emprega os mesmos parâmetros utilizados por Wayar (2016), resultando na curva força cortante *versus* escorregamento apresentada na Figura 111.

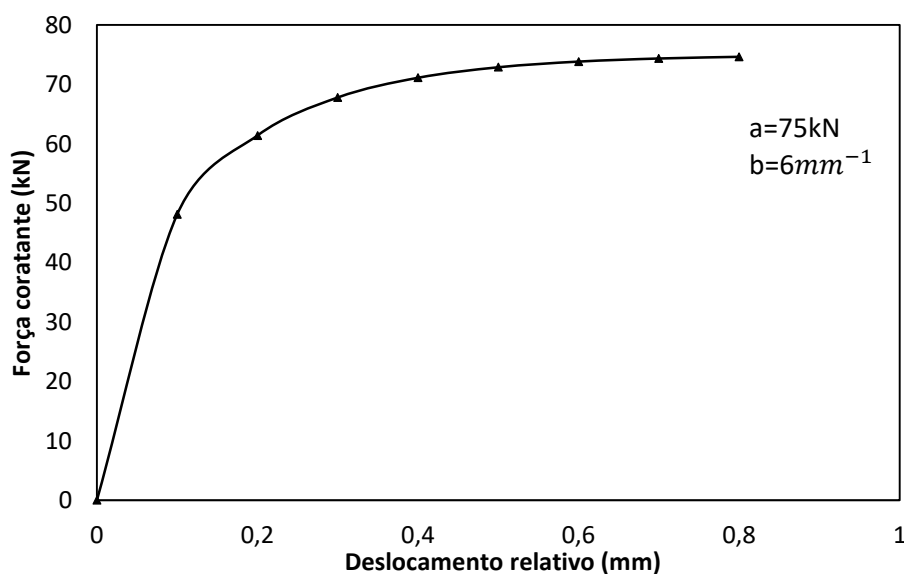


Figura 111 - Curva constitutiva para o conector

Para analisar as duas vigas foi utilizado o mesmo modelo de elementos finitos, o qual se compõe de 286 elementos de casca fina (perfil de aço), 56 elementos de barra para representar os conectores de corte e 105 elementos de casca espessa para modelar a laje de concreto armado. A Figura 112 mostra os detalhes desta malha. A laje foi modelada através de 10 camadas de concreto e reforçada por 2 camadas de armadura, de acordo com a ilustração da Figura 113. Em relação à discretização da malha do cabo de protensão, o mesmo foi modelado através de 20 elementos de catenária.

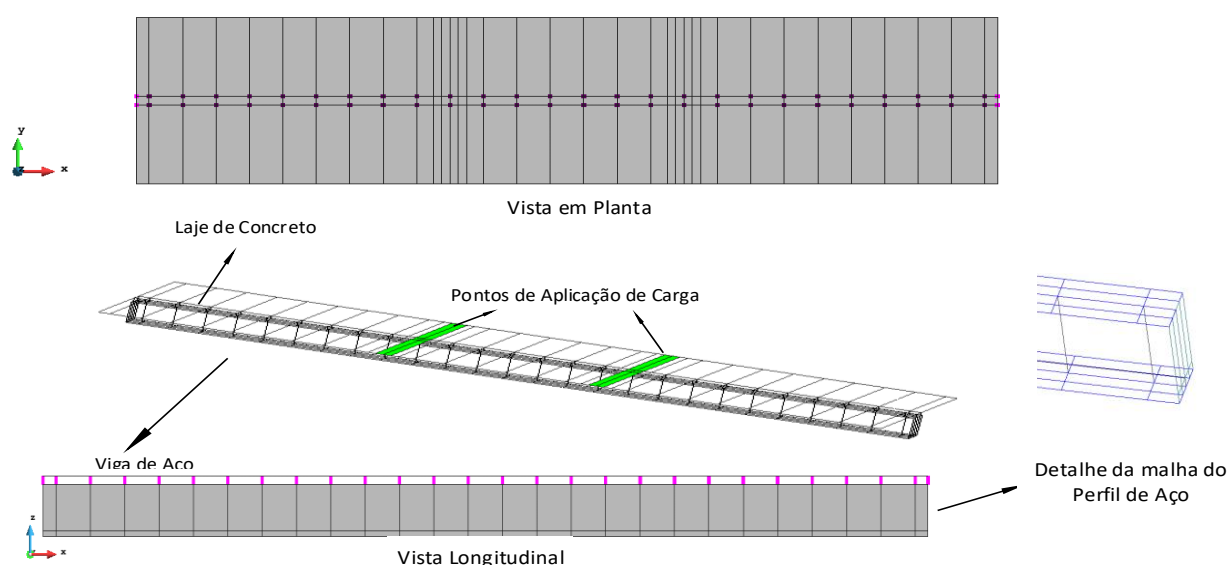


Figura 112 - Detalhes da Malha de Elementos Finitos

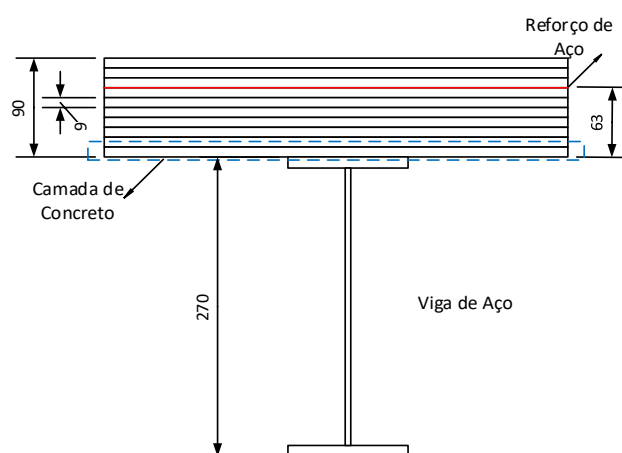


Figura 113 - Esquema de camadas para a laje de concreto (Unidades: mm)

A carga externa foi aplicada sobre toda a largura da laje de concreto nos pontos indicados no esquema da Figura 112. As forças de protensão aplicadas tem valores iguais a 107,6 kN e 112,6kN para a viga BS1 e BS2, respectivamente, sendo esta a única diferença entre

elas. Cabe salientar que o cabo e a viga metálica somente apresentam compatibilidade de deslocamentos nos extremos da viga, na zona de ancoragens, permitindo a rotação do elemento de cabo.

### 7.3.2.1 Viga BS1

Foram consideradas duas etapas de carga na análise, a primeira etapa é referente à aplicação da força de protensão, no valor de 107,6kN em cada cabo. A segunda etapa de carga é referente à força vertical, a qual é aplicada utilizando 16 e 18 incrementos de carga para análise LG e NLG, respectivamente, com tolerância igual a 0,01.

O comportamento das curvas de flecha *versus* momento fletor atuante obtidas no experimento e com modelo numérico podem ser observadas na Figura 114 para a seção ao meio do vão. O momento fletor máximo atingido no teste experimental foi de 342 kNm, com flecha associada de 80,8 mm (aproximadamente  $L/62$ , onde  $L$  é comprimento da viga), enquanto que nas análises numéricas LG e NLG tem-se aproximadamente valores em torno de 55,4 mm ( $L/90$ ). Neste caso, a diferença ocasionada pela não linearidade geométrica é mais marcada nas cargas últimas.

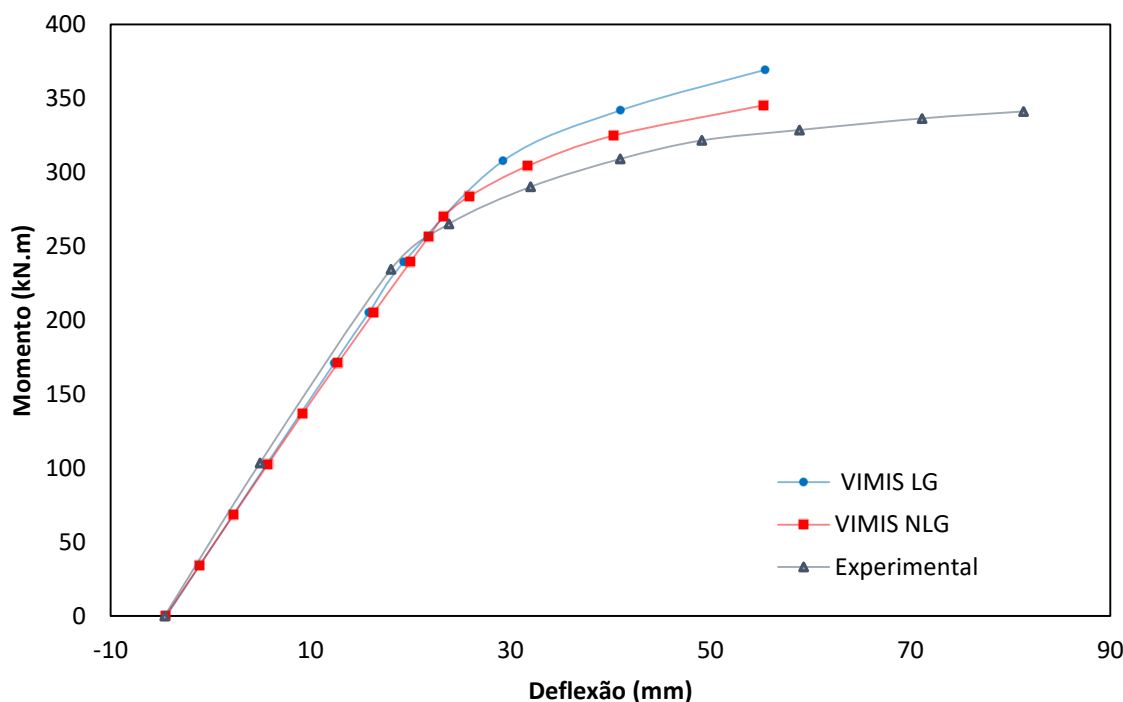


Figura 114 - Comportamento Deflexão x Momento da Viga BS1

Na Tabela 30 se apresentam os valores de momento e deslocamento na metade do vão reportados no programa experimental e aqueles obtidos pelas análises numéricas LG e NL. Sendo  $M_y$  o valor do momento fletor em que ocorre o início do escoamento no perfil de aço e  $M_u$  o momento fletor referente à carga última, as respectivas deflexões são representadas por  $d_y$  e  $d_u$ . Além disso, é apresentado o valor de carregamento axial no cabo ( $N_u$ ) na condição de carga última.

Tabela 30 - Resultados da Viga BS1

	Teste Experimental	LG	Erro (%)	NLG	Erro (%)
$M_y$ (kNm)	255,30	287,23	12,51	270,14	5,81
$d_y$ (mm)	19,10	24,89	30,32	23,34	22,19
$M_u$ (kNm)	342,00	369,30	7,98	345,37	0,98
$N_u$ (kN)	172,60	180,09	4,34	168,43	2,42
$d_u$ (mm)	80,80	55,48	31,34	55,33	31,52

Percebe-se que a análise LG corresponde a uma carga última 6,48% mais alta em relação à carga obtida pela análise NLG, já para o deslocamento tem-se um valor 0,26% maior. Desta forma, pode-se dizer que no momento em que se considera a não linearidade geométrica, a estrutura resulta em um comportamento mais flexível. Sendo assim, quando adotado o comportamento LG, o projeto superestima os esforços, neste caso o dimensionamento resulta em vigas mais robustas, devido aos momentos fletores no meio do vão serem superestimados.

Em relação ao carregamento axial no cabo, é resultante um erro de 2,42% quando a análise NLG é realizada, sendo que estas diferenças podem ser observadas na Figura 115. Através do exame desta, pode-se observar que a força axial efetiva inicial ( $N$ ) em cada cabo foi de 107,6 kN, totalizando uma carga axial de 215,2 kN ( $2N$ ) para os dois cabos agindo na viga. Precisamente, este é o ponto de início da curva no eixo horizontal da figura. Pode-se observar que as forças de protensão nos cabos são incrementadas linearmente até o perfil atingir a carga de escoamento, depois disso um incremento não linear foi observado na força de tração do cabo até atingir uma força máxima de  $N = 180,09\text{kN}$  (ou  $2N = 360,18\text{kN}$ ) na análise LG, e  $N = 168,43\text{kN}$  (ou  $2N = 336,86\text{kN}$ ) na análise NLG. Já na análise experimental, a força no cabo corresponde a 172,60kN (ou  $2N = 345,2\text{kN}$ ).

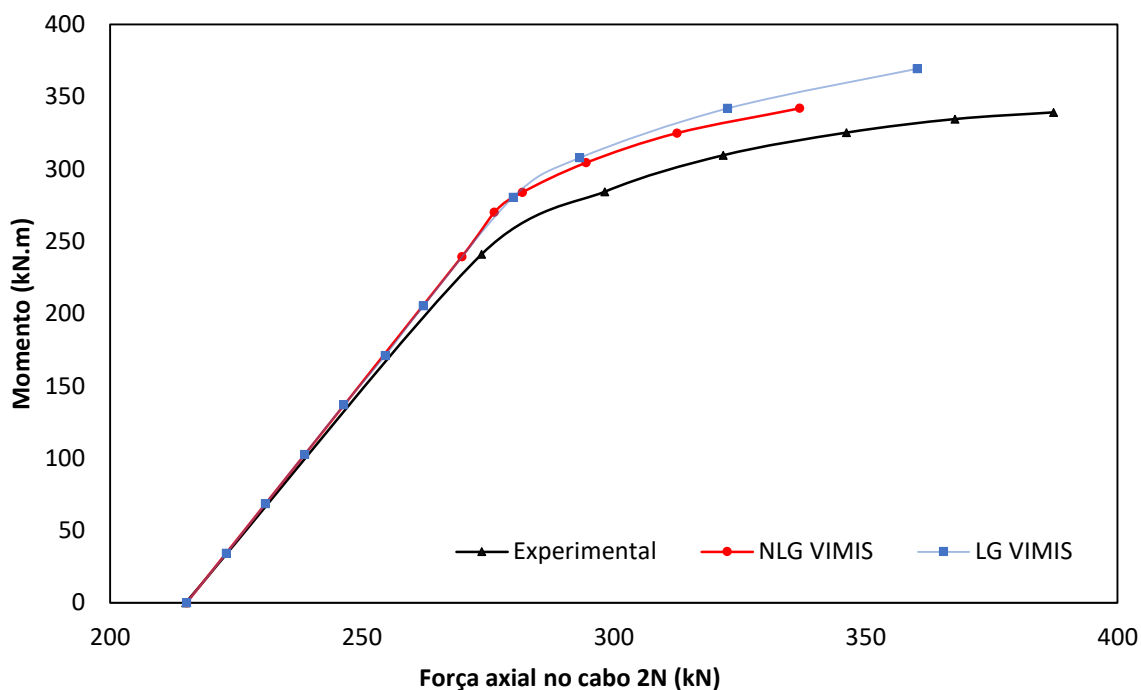


Figura 115 - Força axial no cabo BS1

A contra flecha medida no centro da viga na mesa inferior, logo depois de aplicada a protensão, ou seja, na primeira etapa de análise, foi 4,41 mm, como pode ser visualizado na Figura 116.

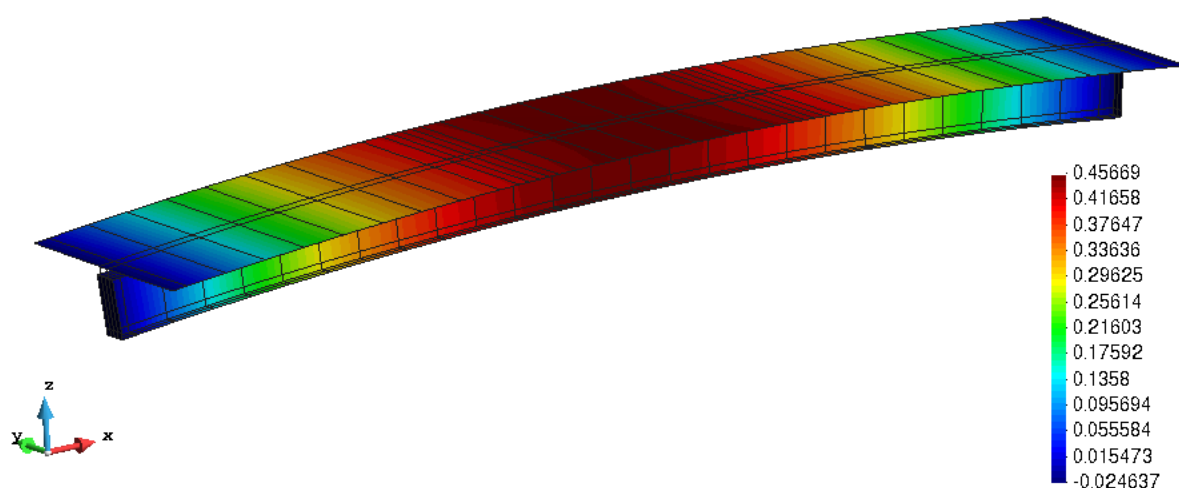


Figura 116 - Contra flecha ocasionada pela protensão (cm)

O início do comportamento não linear do material é referente ao início do escoamento na mesa inferior do perfil de aço ao meio do vão. Quando a carga vertical aplicada tem valor de 300,15kN (NLG), equivalente a um momento fletor na seção do centro da viga de

270,14kNm, este esforço gera uma deflexão de 23,34mm. A Figura 117 mostra a distribuição de tensões no perfil.

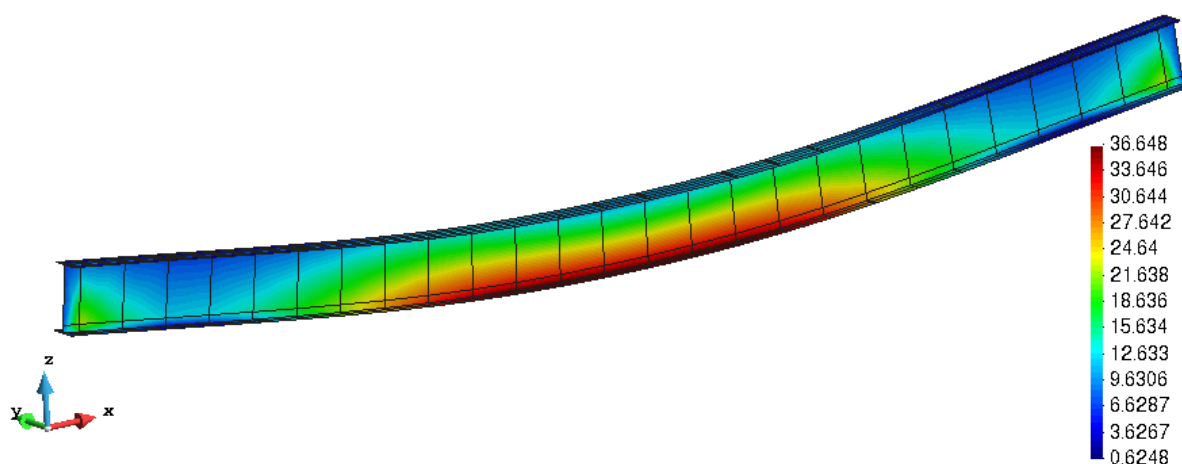


Figura 117 – Análise NLG: Tensões de von Mises na viga BS1 ( $\text{kN/cm}^2$ ) ( $M=270,14\text{kNm}$ )

No relatório experimental, Chen e Gu (2005) relatam que quando o momento fletor no valor de 342kN é alcançado no centro do vão, fissuras longitudinais no topo da laje são detectadas, fazendo com que mudanças repentinas nas deformações medidas nas barras fossem encontradas. Esta carga é considerada última, provocando uma deflexão de 80,2mm. Para o caso da carga última na análise NLG o comportamento é mostrado na Figura 118, onde se observa o concreto em compressão nas zonas fora do trecho central (círculo), fissuras transversais ao eixo da viga (linhas) e esmagamento (asterisco vermelho) na zona do trecho central.

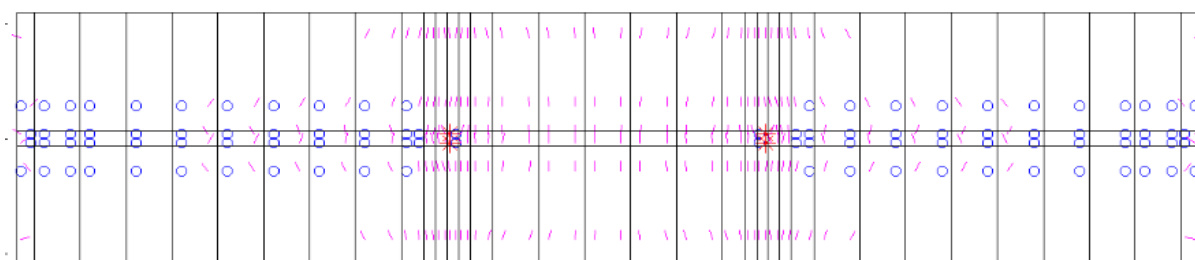


Figura 118 - Análise NLG: Fissuração e esmagamento camada inferior ( $M=345,37\text{kNm}$ )

Também é comparada a consequência dos efeitos na distribuição de tensões axiais na laje de concreto no caso LG (Figura 119) e NLG (Figura 120). Percebe-se uma leve alteração nessa distribuição, a mais notória é a que na análise de grandes deslocamentos o efeito *shear lag* no centro do vão é reduzido. No caso da análise LG, é possível observar que há uma maior

concentração de tensões no centro do vão, próximo dos conectores. Já na análise NLG, o mesmo não acontece, apresentando uma distribuição mais homogênea.

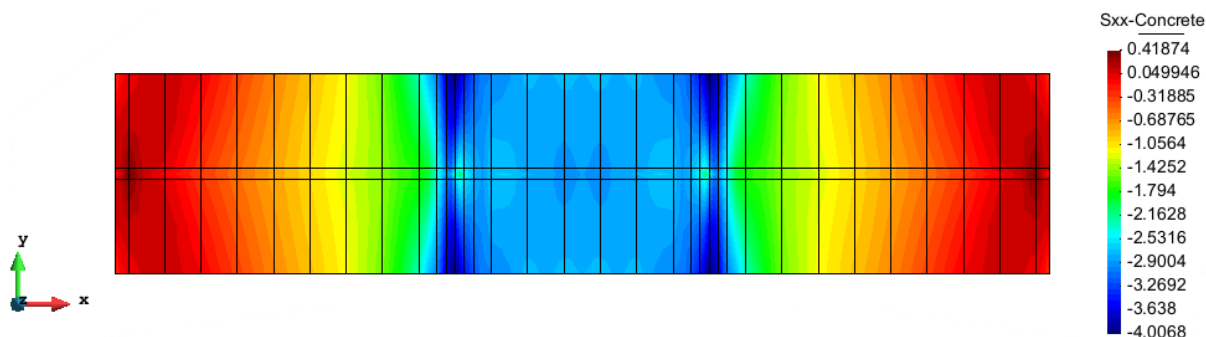


Figura 119 - Análise LG: Distribuição de tensões na camada superior da laje (kN/cm<sup>2</sup>)  
(M=345kN/m)

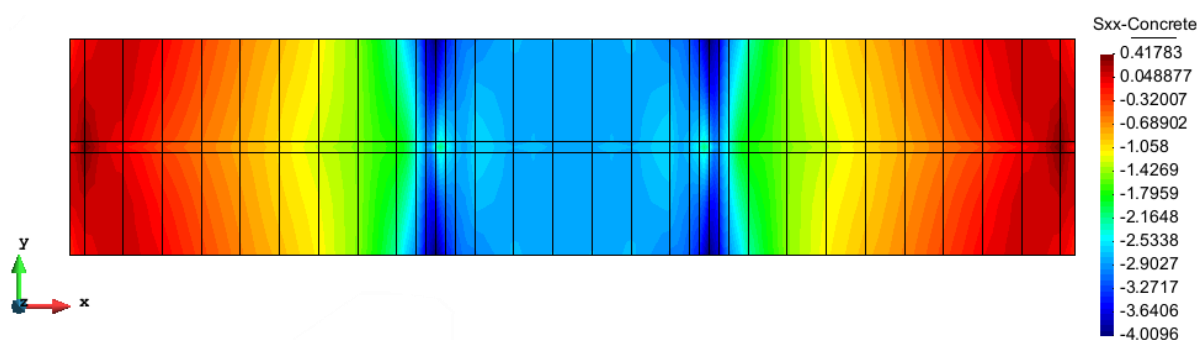


Figura 120 - Análise NLG: Distribuição de tensões na camada superior da laje (kN/cm<sup>2</sup>)  
(Mu=345,37kNm)

### 7.3.2.1 Viga BS2

Na viga BS2 foi aplicada em cada cabo de protensão uma força efetiva de 112,6kN, a geometria e demais características são idênticas a viga BS1. Foi adotada a tolerância de 0,01 com 24 incrementos de carga. São apresentados os resultados para a análise LG e NLG na Figura 121, contrastando-os com os valores experimentais e os resultados de Zona, Ragni e Dall'asta (2008), pois o objetivo do trabalho destes autores é semelhante com o objetivo do presente trabalho, porém dando maior relevância a peças de concreto armado com protensão externa. Os autores fazem uso de um elemento de barra, com 10 graus de liberdade.



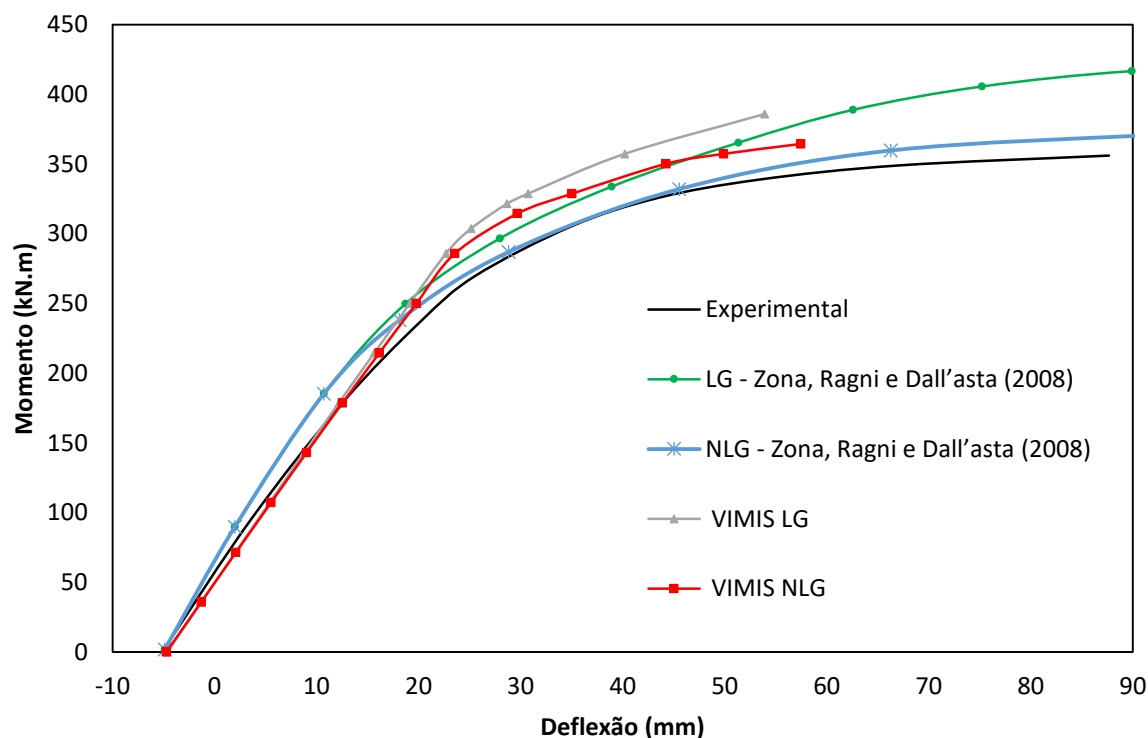


Figura 121 - Resultados da viga BS2

Como se pode observar, os resultados da análise NLG são consideravelmente mais semelhantes à curva experimental, apresentando uma carga última 2,37 % maior. Os resultados de Zona, Ragni e Dall'asta (2008) são mais flexíveis em relação aos de VIMIS, isso pode ser devido ao fato da diferente abordagem de formulação de elementos finitos e à diferença no modelo constitutivo adotado pelos autores para o perfil de aço (com endurecimento parabólico conjuntamente com o modelo de Menegotto-Pinto). Além disso, a rigidez inicial da curva dos autores não acompanha a inclinação inicial experimental, sendo mais rígida. Não fica claro o que caracteriza a interrupção da análise numérica nesta referência. Quanto ao relatório experimental, é verificado que a falha foi na laje de concreto, conforme o comportamento apresentado na presente análise.

Quando aplicada a força de protensão inicial, no ensaio experimental registra-se que ocorreu uma contra flecha inicial de 5,7 mm na metade do vão. Em ambas as análises realizadas no VIMIS, esta carga é aplicada na primeira etapa de carga, resultando em uma flecha de 4,6mm no centro do vão na mesa inferior do perfil para o caso LG e uma flecha de 4,71 mm para a análise NLG. Percebe-se que a análise não linear aproxima-se mais do resultado experimental, totalizando um erro de 17,32%. Este comportamento pode ser visualizado na Figura 122.

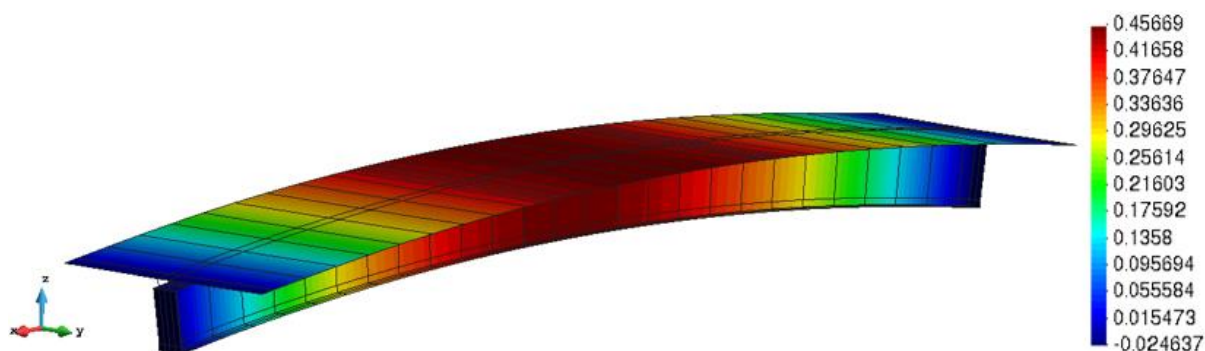


Figura 122 - Contra flecha ocasionada pela protensão (cm)

Chen e Gu (2004) relatam que o escoamento da mesa inferior do perfil ocorre quando o momento no centro do vão tem valor de 248,6 kNm. A partir desse instante, a curva que representa o comportamento deflexão *versus* momento fletor passa a apresentar um comportamento não linear. No caso da análise LG, este comportamento aparece quando um momento fletor resultante no centro do vão é de 337,5 kN é aplicada, enquanto que na análise NLG, isto pode ser observado para uma carga aplicada de 317,6kN, resultando em um momento no centro do vão no valor de 285kNm. Na Figura 123 são apresentadas as distribuições de tensões no momento em que aço começa a escoar (análise NLG). É importante salientar que este resultado poderia ser aprimorado utilizando uma curva suavizada (menor tensão de escoamento) de transição entre os dois trechos retos que definem o diagrama bilinear do modelo constitutivo de aço.

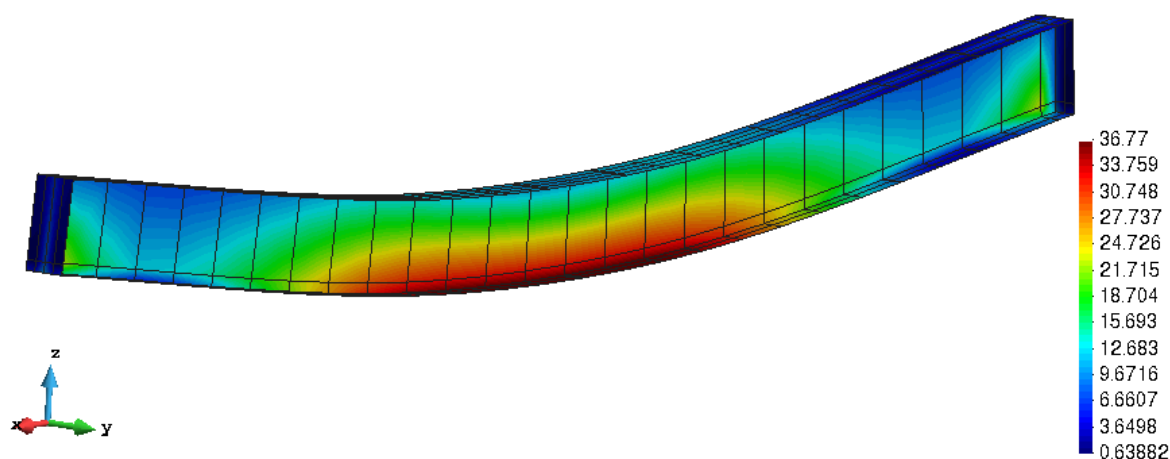


Figura 123 – Análise NLG: Distribuição de tensões de von Mises na viga BS2 (kN/cm<sup>2</sup>)

(M= 285kNm)

No que diz respeito ao incremento de força axial, as consequências da consideração da análise não linear geométrica não são tão visíveis, uma vez que ambas as análises apresentam um percentual de erro por volta de 13%. Segundo os dados apresentados na Tabela 29, a tensão de ruptura dos cabos indicada pelo fabricante é 1,860 MPa, correspondente a uma força equivalente de protensão de 255,6 kN em cada cabo. No modelo numérico a força axial final no cabo é de  $N = 184$  kN (ou  $2N = 368$  kN), ou seja 64% maior que a força inicial aplicada (224,6 kN) e correspondente a 72% da força equivalente à tensão de ruptura do cabo ( $2 \times 255,6 = 511,2$  kN). No caso do teste experimental a força axial no cabo atingiu um valor 94% maior em relação à força de protensão inicial em cada cabo e quase 88% da força de ruptura do cabo de protensão ( $2N = 452,84$ ) (Figura 124).

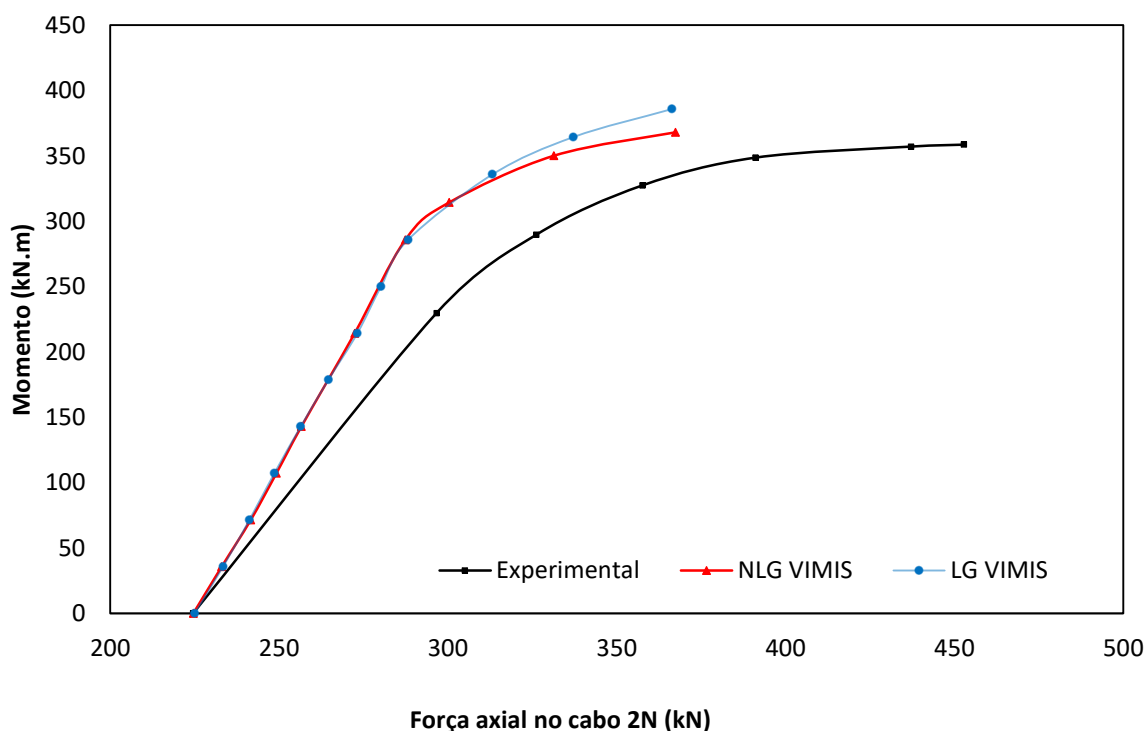


Figura 124 - Incremento de força axial no cabo da viga BS2

É importante ressaltar que o valor de momento último apresentado na presente análise, para ambos os casos, é o valor de carga que provoca o esmagamento do concreto. Este comportamento também é apreciado no relatório experimental. A comparação dos valores críticos é resumida na Tabela 31. Nesta tabela são expressos os seguintes valores: momento de escoamento na mesa inferior da viga de aço ( $M_y$ ) e a deflexão da viga ( $d_y$ ); momento de falha ( $M_u$ ), deflexão correspondente a esse passo de carga ( $d_u$ ), força última no cabo ( $N_u$ ), e flecha inicial devido a aplicação de protensão no cabo ( $\delta$ ).

Tabela 31 - Comparação de resultados das análises LG e NLG

	Experimental	LG	Erro (%)	NLG	Erro (%)
My (kNm)	248,60	303,71	22,17	285,84	14,98
d (mm)	19,90	25,13	26,30	23,56	18,38
Mu (kNm)	356,00	385,88	8,39	364,45	2,37
Nu (kN)	212,50	183,20	13,79	183,70	13,55
d (mm)	82,10	57,48	29,99	57,48	29,99
$\delta$ (mm)	5,70	4,623	18,89	4,713	17,32

Os valores da Tabela 31 permitem concluir que na predição dos valores de escoamento, o modelo numérico que considera grandes deslocamentos apresenta um melhor resultado, pois os valores obtidos são mais próximos aos resultados experimentais. O mesmo ocorre na situação de carga última, onde a análise não linear geométrica da viga BS2 é capaz de prever o valor do momento último com um erro de 2,37%. A predição do momento último é confiável para fazer o dimensionamento, desde que a falha não esteja associada com a falha dos cabos de protensão já que o incremento de tensão nos cabos não corresponde com os dados experimentais. A flecha sobre carga última também não é corretamente associada, mas, segundo Wayar (2016) trata-se de uma informação de importância secundária e de difícil avaliação.

Acredita-se que a utilização de uma relação constitutiva uniaxial para o aço com uma transição curvilínea suavizada do estado elástico para o regime plástico permitirá acompanhar melhor a trajetória de carga e o desenvolvimento da força no cabo e, assim, melhorar sua predição. Isto está associado ao fato numérico de que pequenos acréscimos de carga perto do colapso aumentariam consideravelmente o deslocamento associado e, portanto, o aparente ganho em ductilidade.

Nesta aplicação, pode ser visto novamente que a análise não linear geométrica leva a resultados mais confiáveis, os quais se aproximam mais do real comportamento da estrutura. E, apesar da análise linear apresentar bons resultados do comportamento, com valor final a favor da segurança, esta pode conduzir a gastos extras no projeto, uma vez que sua estrutura será superdimensionada, pois os carregamentos últimos encontrados para esta análise tem valores superiores.

## 8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

O presente trabalho teve como objetivo estudar a importância da consideração da não linearidade geométrica em problemas envolvendo vigas mistas de aço-concreto utilizando o método dos elementos finitos. Para esse propósito, o programa VIMIS desenvolvido no CEMACOM para análise tridimensional de vigas mistas foi utilizado, sendo necessário inserir, através da Formulação Lagrangeana Total, as considerações para análises com grandes deslocamentos e moderadas rotações, porém pequenas deformações.

A formulação do elemento finito de casca espessa foi alterada para a inclusão de grandes deslocamentos, por meio do desenvolvimento de álgebra matricial das expressões correspondentes à matriz de transformação deslocamento-deformação (**B**) e matriz de rigidez geométrica do elemento. A partir das análises realizadas para validar esse processo, pode-se concluir que o programa foi capaz de representar bem o comportamento das placas testadas experimentalmente por outros autores. Além disso, pode-se inferir que a condição de apoio gera significativa mudança no comportamento não linear geométrico, ou seja, na consideração de apoios fixos horizontalmente, o comportamento resultante é mais flexível comparado à análise linear geométrica. Uma similar conclusão foi obtida por Chajes (1987).

O segundo passo do trabalho consistiu em alterar a formulação do elemento finito de casca fina que modela o perfil de aço. Neste caso, essa etapa foi realizada em duas partes. Inicialmente, foram testadas as hipóteses de von Kármán, incluindo apenas os termos do tensor de deformações de Green-Lagrange associados com o deslocamento vertical. Os comportamentos obtidos para esta situação estiveram de acordo com resultados experimentais e numéricos de outros autores.

A segunda parte da formulação foi desenvolvida com o objetivo de possibilitar trabalhos futuros associados à captura de flambagem local no perfil de aço. Com esta consideração, o tensor de deformações na formulação do elemento finito de casca fina é implementado por completo. Os resultados obtidos pela teoria de von Kármán quando comparados aos valores provenientes da análise que considera o tensor de deformação de Green-Lagrange completo, mostram-se mais flexíveis.

Por fim, foram modificadas as rotinas que caracterizam o comportamento do cabo de protensão. É importante lembrar que o presente trabalho limitou-se ao desenvolvimento da formulação do cabo de protensão interna aderente. Para o elemento finito unidimensional utilizado, obtiveram-se bons resultados, mostrando que o mesmo também é capaz de modelar o aço de reforço de forma discreta. Nos exemplos, onde se aplicaram o elemento do cabo, pode-se concluir novamente que a existência de uma carga axial na casca resulta em uma menor rigidez quando a não linearidade geométrica é levada em consideração. Uma vez que o objetivo da utilização de protensão é justamente introduzir uma carga axial na estrutura através da armadura ativa, os efeitos não lineares geométricos tornam-se significativos.

Quanto às análises realizadas em vigas mistas de aço e concreto, é importante ressaltar que foi difícil encontrar aplicações que tivessem o mesmo objetivo do presente trabalho. Ou seja, que desejassem salientar os efeitos da aplicação de não linearidade geométrica em vigas mistas. Os trabalhos consultados comentam a sua utilização, porém não demonstram minuciosamente as consequências causadas pela mesma. Sendo assim, o primeiro exemplo, é uma aplicação proposta pelo presente trabalho.

A primeira aplicação consistiu em adotar apoios fixos para uma viga mista biapoiada inicialmente testada experimentalmente com apoios simples e submetida a uma força concentrada no centro do vão (Chapman e Balakrishnan, 1964). Uma vez que não há registro experimental para este caso, foi adotado o *software* ANSYS como referência para os resultados obtidos. Pode-se concluir que os resultados da análise não linear geométrica tem comportamento mais flexível. Desta forma, a carga última obtida negligenciando estes efeitos é maior e com deslocamento vertical menor no centro do vão. A diferença em carga última entre a análise linear e não linear geométrica para este exemplo é em torno de 2,56%.

Duas vigas mistas contínuas foram analisadas, a primeira viga chamada de CBT4, com relação comprimento/altura de 15,51, foi testada experimentalmente por Ansourian (1981). No presente estudo numérico foi possível verificar os diversos mecanismos de falha que acontecem na viga mista conforme a carga é incrementada. Estes incluem a fissuração da laje em zona de tração, escoamento da malha de reforço, plastificação do perfil metálico no apoio interno e ao meio do vão, e esmagamento do concreto na zona central. Em relação às análises linear geométrica e não linear geométrica, não foi possível identificar diferenças significativas em termos de carga e flecha última, embora essas diferenças sejam maiores quando a rigidez dos

conectores diminuem. Precisamente, é a rigidez dos conectores que tem um comportamento relevante, não apenas no trecho linear elástico, também na captura do trajeto final da curva força aplicada *versus* deflexão.

Na análise das vigas mistas protendidas externamente ensaiadas por Li (2003), foi possível verificar a influência da não linearidade geométrica quando considerada interação perfeita e parcial. Conclui-se que na consideração de aderência parcial, a diferença entre análise linear e não linear geométrica é maior quando utilizado dois cabos ou um cabo com excentricidade, podendo chegar, em termos de carga última, a 28%. Enquanto que, quando utilizado apenas um cabo com geometria retilínea, a maior diferença se encontra nos casos estudados com aderência perfeita.

Cabe destacar que na região de momento negativo presente nas vigas mistas contínuas, os resultados devem ser analisados com cautela. A questão é como se dá o comportamento dos conectores de cisalhamento em área de momento negativo, esse assunto é um tema de pesquisa e não tem uma posição consolidada. Atualmente, utilizar dados de ensaio de push-out é o que se tem disponível, entretanto como concreto está em tração e, por consequência, fissurado, logo a transmissão da força nessa região é algo duvidoso. Uma alternativa é empregar dados de um ensaio tipo *pull-out*, este é um ensaio de cisalhamento direto e invertido, no qual o perfil é empurado e está preso na laje pelos conectores.

A próxima análise consistiu em estudar os efeitos da não linearidade geométrica em duas vigas mistas biapoiadas com protensão externa ensaiadas experimentalmente por Chen e Gu (2005) com relação comprimento altura de 14. Este exemplo foi utilizado por outro autor com o mesmo objetivo, ou seja, evidenciar a importância da consideração de grandes deslocamentos. As duas vigas diferem-se entre si em função do nível da protensão aplicada, sendo possível identificar que na viga onde é aplicada uma força de protensão menor (chamada de BS1) o resultado de momento último é mais próximo do experimental, resultando em um erro de apenas 0,98%. Em relação ao incremento de tensão no cabo durante a análise, neste caso o VIMIS foi capaz de prever com boa precisão o trajeto das forças no cabo.

Enquanto que na viga com força de protensão mais alta (chamada de BS2) os resultados não foram totalmente satisfatórios, mesmo com a inclusão da não linearidade geométrica. Acredita-se que a inclusão de um diagrama trilinear com transição suavizada entre o trecho linear elástico e plástico para o aço estrutural, poderia aprimorar consideravelmente os

resultados obtidos. Isto se deve a que o escoamento do perfil metálico monitora claramente o trajeto de esforços da viga mista em carregamentos últimos. Fato que ainda está associado ao efeito de que pequenos acréscimos de carga para cargas próximos do colapso poderiam acarretar flechas substancialmente maiores.

Em relação ao cabo de protensão interno à laje de concreto, o elemento foi testado em peças de concreto armado e protendido e embora, não foram executados exemplos em vigas mistas, o programa VIMIS após as modificações realizadas tem o potencial de analisar este tipo de situações em futuros trabalhos. Este tipo de protensão interna pode ser aderente ou não aderente e são utilizados, principalmente, com o intuito de diminuir a fissuração do concreto sobre o apoio central de vigas mistas contínuas.

Em todas as análises realizadas com vigas mistas, a inclusão da não linearidade geométrica resultou em um comportamento mais flexível. Desta forma, conclui-se que a análise linear apesar de apresentar valores condizentes com o comportamento experimental, os resultados encontrados para carga última são superiores aos valores reais. Este fato também é verificado na análise do comportamento de incremento de tensão no aço de protensão, bem como na carga que prediz o escoamento do aço.

Sendo assim, em termos de projeto, pode-se dizer que na análise linear geométrica as estruturas podem ser superdimensionadas, uma vez que os esforços são superestimados. Além disso, em uma análise que necessite limitar a flecha encontrada, a consideração de um comportamento linear geométrico subestima este valor, indo contra a segurança. Já em termos de análise em elementos finitos, demonstrou-se que o comportamento não linear geométrico das cascas utilizadas para o modelo numérico VIMIS foi bem representada, uma vez que os resultados obtidos foram semelhantes aos resultados de outros modelos numéricos, que incluíam modelagens extremamente complexas e computacionalmente custosas através da utilização de elementos sólidos, como aquele de ANSYS.

Sempre que disponível foram feitas comparações com resultados experimentais, obtendo-se na maioria das situações resultados satisfatórios ao nível local e global da resposta. Finalmente, é importante salientar, a alta complexidade e alto grau de incerteza associados à modelagem de vigas mistas de aço e concreto, o que inclui a simulação de efeitos de interação na interface laje-viga, interação cabo-perfil metálico, assim como todas as não linearidades envolvidas dos materiais, tais como, comportamento do aço de reforço na laje de concreto,



escorregamento do conector, não linearidade do aço estrutural e do cabo, e fissuração e esmagamento do concreto. Neste contexto, pode-se dizer que o presente trabalho alcançou seu objetivo inicial.

## 8.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Seguindo a linha sugerida ao longo do trabalho, sugere-se implementação de análises de grandes deslocamentos incluindo a utilização de protensão interna não aderente, para isto é necessária a alteração da formulação do cabo interno considerado não aderente em questões de forças internas, uma vez que as demais modificações já foram realizadas no presente trabalho. Entende-se ainda, que os resultados deste trabalho possam ser aprimorados se utilizado um controle de deslocamentos, em oposição ao controle de cargas utilizados.

Sugere-se o aprimoramento do VIMIS, no sentido de acrescentar a possibilidade de captura de flambagem local no perfil de aço. Para isso seria necessário implementar a introdução de irregularidades geométricas no perfil, através da sobreposição de modos de flambagem obtidas em análise elástica, por meio da solução de autovetores e autovalores. Com o intuito de analisar o comportamento pós flambagem, recomenda-se adicionar um solver do tipo *Arc Length*.

Por fim, sugere-se o estudo do comportamento dos conectores na região de momento negativo em vigas mistas. Uma vez que o concreto está em tração e fissurado, torna-se duvidoso o comportamento quanto à transmissão de forças nessa região. Conforme mencionado, não há uma posição consolidada na literatura nestes casos, tornando-se um tema de pesquisa atual.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACI. **Guide for modeling and calculation shrinkage and creep in hardened concrete**. 209, A. C. 2008.

ALLMAN D. J. A Quadrilateral Finite Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 26, p. 717-730, 1988

AMARAL, T., OLIVEIRA, J., CALENZANI, A., TEIXEIRA, F. Lateral-distortional buckling of continuous steel-concrete composite beam. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, [s.l.], v. 11, n. 4, p.719-756, ago. 2018. <http://dx.doi.org/10.1590/s1983-41952018000400006>.

ANSOURIAN, P. “**Experiments on continuous composite beams**”, Proceeding of Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol. 71, pp. 25-51. 1981.

ANSYS Inc. ANSYS Help System. Version 19.2. Canonsburg, 2018.

ARONI S. Slender Prestressed Concrete Columns. **Journal of the Structural Division**, Vol. 94, No 4, p. 875-904, 1968.

**ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.

BATHE, K-J., RAMM, E., WILSON, E. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**. F, p. 353-386. 18 fev. 1974.

BATHE, K-J; BOLOURCHI, S. A geometric and material nonlinear plate and shell element. **Computers & Structures**, [s.l.], v. 11, n. 1-2, p.23-48, fev. 1980. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(80\)90144-3](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(80)90144-3).

BATOZ J.; TAHAR M. Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 18, No 2, p. 1655-1677, 1982.

BATTINI, Jean-marc. A non-linear corotational 4-node plane element. **Mechanics Research Communications**, [s.l.], v. 35, n. 6, p. 408-413, set. 2008. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2008.03.002>.

BAZANT, Z. P.; PRASANNAN, S. Solidification Theory for concrete creep. I: Formulation. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 8, p. 1691-1703, 1989.

BENINCÁ, M. E. **Simulação numérica de vigas alveolares mistas de aço e concreto: modelo parametrizado de elementos finitos**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

British standards institution. Design of composite bridges, London: BSI; 1979, BS5400: Part 5.

CAMOTIM, D.; REIS, A. **Estabilidade Estrutural**. Portugal: Mcgraw-hill, 2001.

CHAJES, A , CHURCHILL, J. E., “Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods”, **Journal of Structural Engineering**, Vol 113, n.06, American Society of Civil Engineering (ASCE), USA, Junho de 1987.

CHAPMAN J., BALAKRISHNAN S. Experiments on Composite Beams. **Structural Engineer**, Vol. 42, p. 369-383, 1964

CHEN, S.; GU, P. Load Carrying Capacity of Composite Beams Prestressed with External Tendons Under Positive Moment. **Journal of Constructional Steel Research**, Shanghai, China, 2005.

CHOW, C.O. **Time Dependent Nonlinear Finite Element Analysis Of Reinforced And Prestressed Concrete Structures**. 404 f. Ph. D. Thesis. University Of Wales, 1986.

COARITA, E.; FLORES, L. Nonlinear Analysis of Structures Cable - Truss. **International Journal of Engineering and Technology**, Puno, Peru, Junho 2015. 160-169.

DIAS, M. M. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos**: Efeitos de longa duração. 2013. 177 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2013.

FIGUEIRAS J. A. **Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells**, PhD. Thesis, University of Wales, 1983.

FIGUEIRAS J.A.; PÓVOAS R.H.C. F. Modelling of Prestress in Non-Linear Analysis of Concrete Structures. **Computers & Structures**, Vol. 53, No. 1, p. 173-187, 1994.

FRANCO, M. I. E. de. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto com protensão aderente e não aderente pelo método dos elementos finitos**. 2018. Dissertação (Mestre em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

HINTON E.; OWEN D.R. **Finite Element in Plasticity-Theory and Practice**, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980

HINTON E.; OWEN D.R. **Finite Element Software for Plates and Shells**, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1984

HORRIGMOE, G. Finite element instability analysis of free-form shells, Report 77-2, **Division of Structural Mechanics**, Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, Norway (May 1977).

HOZJAN, T., SAJE, M., SRPCIC, S., PLANIC, I. Geometrically and materially non-linear analysis of planar composite structures with an interlayer slip. **Computers & Structures**, [s.l.], v. 114-115, p. 1-17, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.09.012>.

HUGHES, T.; LIU, W. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. **Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering**, [s.l.], v. 26, n. 3, p. 331-362, jun. 1980. [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(81\)90121-3](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(81)90121-3).

IBRAHIMBEGOVIC A. ; TAYLOR R. ; WILSON E. A Robust Quadrilateral Membrane Finite Element with Drilling Degrees of Freedom. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 30 , No 3, p.445-457, 1990.

JOFRIET J.C.; MCNEICE G.M. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs. **Journal of the Structural Division**, Vol. 97, No. 3, p. 785-806, 1971.

KANG, Y. J. **Nonlinear Geometric, Material, and Time-dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames**. PhD. Thesis, University of California, Berkeley, 1977.

KHROSRAVI, P., GANESAN, R., SEDAGHATI, R. Corotational non-linear analysis of thin plates and shells using a new shell elemento. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 69:859-885.

KRONK, M. **Ultimate Strength of Steel-Concrete Composite Beams under Combined Bending and Torsion**. 2006. 90 f. Dissertação - University of Southern Queensland - Faculty of Engineering and Surveying.

LAZZARI, B. M. **Análise de elementos finitos por peças de concreto armado e protendido sob estados planos de tensão**. 2015. 200 f. Dissertação (Mestrado Engenharia Civil) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

LAZZARI, P. M.; FILHO, A. C.; LAZZARI, B. M. Análise não linear tridimensional de viga segmentada com protensão externa utilizando o ANSYS. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE PONTES E ESTRUTURAS, n. 9, 2016, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro, 2016. Não paginado. 1 CD.

Li, S. J. “**Experimental study on prestressed and prestress reinforced continuous steel-concrete composite beams**.” MS thesis, Tsinghua Univ., Beijing. 2003.

LOU, T.; KARAVASILIS, T, L.; Numerical evaluation of prestressed steel-concrete composite girders with external FRP or steel tendons. **Journal Of Constructional Steel Research**, [s.l.], v. 162, nov. 2019. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2019.105698>.

MITTELSTADT Jr, L.C. **Estudo sobre a Aplicação da Não Linearidade Geométrica na Análise de Vigas Mistas de Aço e Concreto**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

MORENO, J. C. Á. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método doselementos finitos: modelos para os efeitos de longa duração e protensão interna**. 2016. 181 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, PortoAlegre, 2016.

NGUYEN, Q.; HJIAJ, M.; LAI, V. Force-based FE for large displacement inelastic analysis of two-layer Timoshenko beams with interlayer slips. **Finite Elements In Analysis And Design**, [s.l.], v. 85, p. 1-10, ago. 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2014.02.007>.

NIE, J., TAO, M., CAI, C., LI, S. Deformation Analysis of Prestressed Continuous Steel-Concrete Composite Beams. **Journal of Structural Engineering**, Beijing, China, Novembro 2009. 1377-1389.

OTTOSEN, N. S. A failure criterion for concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE**, New York, v. 103, p.527-535, 1977.

PÓVOAS R.H.C.F. **Modelos Não Lineares de Análise e Dimensionamento**, Tese de Doutorado, Universidade de Porto, 1991.

REGINATO, L. H. **Estudo da Largura Efetiva de Vigas Mistas de Aço-Concreto em Carregamento de Serviço: Método dos Elementos Finitos versus Códigos de Projeto**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

REZAIIEE-PAJAND, M.; YAGHOOBI, M. An efficient formulation for linear and geometric non-linear membrane elements. **Latin American Journal Of Solids And Structures**, [s.l.], v. 11, n. 6, p.1012-1035, nov. 2014. <http://dx.doi.org/10.1590/s1679-78252014000600007>.

SCHMITZ, R. J. **Estrutura mista aço-concreto: análise de uma ponte composta por vigas de alma cheia**. 2017. 212 f. Dissertação (Mestrado Engenharia Civil) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

SILVEIRA, R. **Análise não linear geométrica de cascas cilíndricas isotrópicas e enrijecidas**. 1990. 214 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1990.

TAMAYO, J. L. P. **Análise numérica de vigas mistas pelo método dos elementos finitos**. 2011. 147 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2011.

TAYLOR, R., MAHER, D., HAYES, B. Effect of the arrangement of the reinforcement on the behavior of reinforced concrete slabs. **Mag Concrete Res** 18:85–9. 1966.

TITOUM, M., TEHAMI, M., ACHOUR, B., JASPART, J-P. Analysis of Semi-Continuous Composite Beams with Partial Shear Connection Using 2-D Finite Element Approach. **Asian Journal Of Applied Sciences**, [s.l.], v. 1, n. 3, p. 185-205, 1 mar. 2008. Science Alert. <http://dx.doi.org/10.3923/ajaps.2008.185.205>.

Tutorial software Comsol MULTIPHYSICS. **Analysis of Deformation in Solid Mechanics**. April 19, 2018. Disponível em: <https://www.comsol.pt/multiphysics/analysis-of-deformation>. Acesso em: 17 mar. 2020.

VASILESCU, A. **Analysis of Geometrically Nonlinear and Softening Response of Thin Structures by a New Facet Shell Element**, M.Eng. Thesis, Dept. of Civil Engineering, Carleton University, Ottawa, Canada, 2000.

WANG, A. J. Studies on structural behaviour of long-span continuous composite beams with flexible shear studs of limited ductility. **Australian Journal Of Structural Engineering**, [s.l.], v. 17, n. 2, p. 109-135, 3 maio 2016. Informa UK Limited.

WANG, S. MA, Ji. LI, Z. MA, H. **Comparative Study on Stability Theory of Steel-concrete Composite Beams in Negative Moment Region Based on ABAQUS**. Iop Conference Series:

Earth and Environmental Science, [s.l.], v. 186, 11 out. 2018. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1755-1315/186/2/012055>.

WAYAR, A. M. M. **Análise numérica de vigas mistas aço-concreto pelo método dos elementos finitos: Protensão externa**. 2016. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2016.

WOOD, R. D.; ZIENKIEWICZ, O. C. Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. **Computers & Structures**. Grã-Bretanha, p.725-735.1977.

WROBEL, L. **Análise não-linear de estruturas laminares pelo método dos elementos finitos**. 1977. 129 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977.

YAM, L. C. P.; CHAPMAN J. C. The inelastic behaviour of simply supported composite beams of steel and concrete. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 41, n. 1, p. 651-683, 1968.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method**. Vol. 2, Solid Mechanics, Fifth Edition, Butterworth Heinemann. 1991.

ZONA, A.; RAGNI, L.; DALL'ASTA, A. Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons. **Finite Elements In Analysis And Design**, [s.l.], v. 44, n. 15, p.910-919, nov. 2008. <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2008.06.005>.

ZOUARI, W.; HAMMADI, F.; AYAD, R. Quadrilateral membrane finite elements with rotational DOFs for the analysis of geometrically linear and nonlinear plane problems. **Computers & Structures**, [s.l.], v. 173, p.139-149, set. 2016. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2016.06.004>.