

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas,
Metalúrgica e de Materiais (PPGE3M)

**Modelagem semiautomática de continuidade espacial
com FFT e tabelas de covariância**

Victor Tolentino Abbud

Trabalho desenvolvido no Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento
Mineiro do Departamento de Engenharia de Minas.

Porto Alegre
Agosto de 2019

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas,
Metalúrgica e de Materiais (PPGE3M)

**Modelagem semiautomática de continuidade espacial
com FFT e tabelas de covariância**

Dissertação de Mestrado desenvolvida no Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento Mineiro da Escola de Engenharia da UFRGS, apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGE3M), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Tecnologia Mineral, Ambiental e Metalurgia Extrativa.

Victor Tolentino Abbud
Engenheiro de Minas

Orientação: Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa
Co-orientação: Prof. Dr. Marcel Antonio Arcari Bassani

Porto Alegre
Agosto de 2019

Modelagem semiautomática de continuidade espacial com FFT e tabelas de covariância

Por: Victor Tolentino Abbud, Engenheiro de Minas.

Essa dissertação foi analisada e julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia, área de concentração de Tecnologia Mineral, Ambiental e Metalurgia extrativa, e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora designada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGE3M) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientação: Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa
Co-orientação: Prof. Dr. Marcel Antonio Arcari Bassani

Banca Examinadora:

Prof. Dr^a. Vanessa Cerqueira Koppe
PPGE3M/DEMIN – UFRGS

Prof. Dr. Áttila Leães Rodrigues
IF – UFRGS

Dr^a. Camilla Zacche da Silva
LPM - UFRGS

Porto Alegre
Agosto de 2019

Believe you can
And you are halfway there.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Luis Fernando Abbud e Marcella Tolentino, por serem essa fonte de amor incondicional e alicerce para meu crescimento. Mãe, obrigado por ser a base da minha existência e por toda compreensão, afeto, amizade, dedicação e orgulho que sempre teve de mim. Pai, obrigado por ser um modelo de ética, disciplina, humildade, simplicidade e trabalho duro, seja como pai, engenheiro, amigo, atleta.

Ao meu querido e muito amado avô, Sr. Arthur Tolentino, maior exemplo de gentileza e cumplicidade desde que me entendo por gente. Conversador, prestativo, dedicado e não perdia a oportunidade de distribuir um sorriso. Tinha um orgulho enorme pelos netos e mal sabia que metade do que sou se deve a ele. Quem me ensinou que todo ser humano é digno de respeito, independente de classe social, cor, etnia ou credo. Levo os ensinamentos, a amizade que construímos e a lembrança do sorriso e brilho no olhar com muito amor e orgulho por onde quer que eu vá.

Aos meus irmãos, Lucas e Felipe, meus melhores amigos dos quais tenho um orgulho enorme e sou muito grato por tudo que viemos aprendendo junto. Obrigado pela amizade, suporte e compreensão e que sigamos vibrando juntos por cada conquista, crescimento e aprendizado.

Ao meu ilustre orientador João Felipe Coimbra Leite Costa, exemplo de pessoa, profissional, pesquisador e professor. Agradeço todos os ensinamentos compartilhados ao longo desse período em que trabalhamos juntos. Obrigado por ser esse exemplo de autenticidade e fonte de inspiração dentro e fora da universidade.

Aos colegas do Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento Mineiro (LPM) pela amizade, companheirismo, apoio e trocas. Orgulho em integrar um grupo de tamanha excelência.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação Luiz Englert (FLE) pelos recursos disponibilizados para o desenvolvimento dessa pesquisa.

Resumo

A aplicação de metodologias geoestatísticas para determinação de modelos representativos da realidade depende da identificação de leis matemáticas que retratem as assinaturas de continuidade espacial dos fenômenos em estudo com base nas informações limitadas disponíveis no conjunto de dados. Essa dissertação propôs a investigação do método de modelagem semiautomática de continuidade espacial por intermédio do estudo de caso em um depósito de bauxita, a partir do qual se buscou apreciar diferentes aspectos possivelmente limitantes da técnica, de forma aprofundar os conhecimentos sobre metodologia e viabilizar e direcionar posteriores conjecturas. Os modelos de covariância são obtidos através das transformadas de Fourier aplicadas à modelos base que reproduzam minimamente as características espaciais e estatísticas do conjunto amostral. O âmago dessa dissertação consiste na utilização de modelos de covariância gerados semi-automaticamente para realização de processos de simulação estocástica aplicados a estudos geológicos. Os resultados evidenciam a importância do modelo base, cuja representatividade em relação ao conjunto de dados está diretamente relacionado à qualidade do produtos obtidos. Apesar do desempenho ser significativamente prejudicado em regiões com grandes espaçamentos amostrais, o estudo de caso demonstra o potencial da metodologia para obtenção de modelos de continuidade espacial satisfatórios.

Abstract

The application of geostatistical methods to determine representative models of reality depends on the identification of mathematical laws that can be retrieved as spatial detection signatures of phenomena in studies based on limited information available in the data set. This dissertation proposes an investigation of the semi-automatic modeling method through a case study in a bauxite deposit, intending to appreciate different possibly limiting aspects of the technique and to deepen the knowledge, enabling and directing further conjectures. The covariance models are acquired through the Fourier transforms applied to base models that minimally reproduce spatial characteristics and statistics of the sample set. The core of this dissertation is the use of semi-automatically generated covariance models to perform stochastic simulation processes on geological studies. The results show the importance of the base model, whose representativeness in relation to the data set is directly related to the quality of the products obtained. Though the performance of the methodology is harmed due to regions with large sample spaces, the case study demonstrates its potential to acquire satisfactory covariance models.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Considerações gerais	13
1.2	Meta	14
1.3	Objetivos específicos	14
1.4	Panorama da metodologia de estudo	15
1.5	Estrutura da dissertação	16
2	REVISÃO BIBLIOGRAFICA	17
2.1	Continuidade espacial	17
2.2	Simulação estocástica	20
2.3	Semiautomatização do mapeamento de continuidade espacial	24
3	METODOLOGIA E ÁREA DE ESTUDO	29
3.1	Visão geral da metodologia	29
3.2	Área de estudo	31
3.3	Condução do estudo de caso	33
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	39
4.1	Simulação via CT sem imputação do efeito pepita	39
4.2	Simulação via CT com imputação do efeito pepita	43
4.3	Comparação de desempenhos	48
5	CONCLUSÕES	51
5.1	Considerações finais	51
5.2	Recomendações para trabalhos futuros	53
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Sequência de aplicação da metodologia. Adaptado de Kloeckner <i>et. al</i> (2019) ...	29
Figura 2. Mapa de localização das amostras de alumina aproveitável.....	31
Figura 3. Histograma dos dados de alumina aproveitável.	32
Figura 4. Variogramas nas direções de máxima (plano horizontal) e mínima (plano vertical) continuidade.....	34
Figura 5. Cenário do conjunto de simulações referência realizados via variografia tradicional	35
Figura 6. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados via variografia tradicional.....	35
Figura 7. Análise de reprodução dos histogramas nos modelos simulados via variografia tradicional.....	36
Figura 8. Interface do <i>plugin</i> utilizado na metodologia proposta para imputação do efeito pepita	Erro! Indicador não definido.
Figura 9. BMEC construído via <i>nearest neighbour</i> utilizando todas as amostras disponíveis (NN global).....	40
Figura 10. BMEC construído via <i>nearest neighbour</i> utilizando o subconjunto de amostras selecionado (NN parcial)	40
Figura 11. Histogramas dos BMECs construídos via NN global e parcial	40
Figura 12. Cenário do conjunto de simulações com tabela de covariância extraída de NN global.....	41
Figura 13. Cenário do conjunto de simulações com tabela de covariância extraída de NN parcial.....	41
Figura 14. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de NN global.....	42

Figura 15. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de NN parcial	42
Figura 16. Cenário do conjunto de simulações com CT extraída de NN global com imputação do efeito pepita	44
Figura 17. Cenário do conjunto de simulações com CT extraída de NN parcial com imputação do efeito pepita	44
Figura 18. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de NN global com imputação do efeito pepita	44
Figura 19. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de NN parcial com imputação do efeito pepita	45
Figura 20. Análise de reprodução dos histogramas nos modelos simulados com CTs extraídas de NN global e parcial	45
Figura 21. BMEC construído via estimador <i>ensemble</i>	46
Figura 22. Histograma do BMEC construído via estimador <i>ensemble</i>	46
Figura 23. Cenário do conjunto de simulações via CT extraída de modelo <i>ensemble</i>	47
Figura 24. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de modelo <i>ensemble</i>	47
Figura 25. Análise de reprodução dos histogramas nos modelos simulados com CT extraída de modelo <i>ensemble</i>	48
Figura 26. Comparação dos modelos de variogramas expressos pelas tabelas de covariância.....	48
Figura 27. Contraste entre referência e simulação via CT (NN parcial) sem imputação do efeito pepita	49
Figura 28. Contraste entre referência e simulação via CT (NN parcial) com imputação do efeito pepita	49
Figura 29. Contraste entre referência e simulação via CT (NN parcial) com imputação do efeito pepita	49

1 INTRODUÇÃO

A evolução exponencial dos recursos e ferramentas computacionais tem impactado significativamente atividades nos mais diversos ramos da engenharia. São inúmeras e indefinidamente diversificadas as aplicações que vêm sendo desenvolvidas e testadas evidenciando notáveis melhorias em diferentes análises quantitativas e qualitativas ao mesmo passo que apresentam sensíveis reduções tanto nos custos de investimento quanto na complexidade dos métodos e de suas respectivas rotinas de operacionalização. A geologia vem sendo um dos grandes agentes motivadores do desenvolvimento de técnicas computacionais com ênfase na concepção de representações gráficas de fenômenos naturais, uma vez que têm sido observadas, a nível mundial, frequentes incompatibilidades entre os resultados previstos pelas pesquisas geológicas em relação aos produtos das etapas de exploração dos recursos minerais. A origem dos esforços para o aprimoramento de tais técnicas se deve, em grande parte, à magnitude dos custos para lidar com os impactos consequentes dessas incongruências. A pesquisa nesta área exige a interpretação, compreensão e modelagem dos fenômenos que distribuem-se ao longo da crosta terrestre, sendo um dos âmbitos científicos cujo material de estudo encontra-se mais distante do pesquisador. Como consequência da forte dependência na qualidade das observações disponíveis, destaca-se o papel da estatística para análise de dados aplicados aos diferentes procedimentos associados à caracterização dos fenômenos.

Os bancos de dados de fenômenos das ciências da terra se distinguem dos demais em função do posicionamento espacial das informações e da interdependência entre os eventos observados por intermédio dos conjuntos de amostras, cujas características de tendências direcionais, ocorrência de altos valores e graus de continuidade são substanciais à descrição do fenômeno em estudo. Através da aplicação de ferramentas gráficas e matemáticas, se busca a identificação de tais ordenações pelo reconhecimento de padrões de continuidade espacial, de forma a evidenciar essa propriedade intrínseca do fenômeno em estudo. A aplicação de metodologias geoestatísticas para determinação de modelos representativos da realidade depende da identificação de uma lei matemática que retrate tais assinaturas de continuidade espacial com base nas informações limitadas do fenômeno disponíveis no conjunto de dados.

O variograma, definido em termos gerais como uma medida de variabilidade espacial, representa a principal ferramenta na qual fundamentam-se os estudos geoestatísticos. Sua essência consiste na substituição das distâncias Euclidianas por distâncias estruturais, específicas aos atributos e região em estudo, retratando o grau médio de dissimilaridade entre as informações amostradas (Deutsch & Journel, 1998). Na prática, as representações dos padrões

de continuidade espacial são geralmente originados com base nas evidências observadas no banco de dados, através dos variogramas experimentais, aos quais são ajustadas funções contínuas de forma a definir valores para todas as distâncias e direções, posteriormente utilizadas na obtenção dos valores de covariância aplicados à composição dos sistemas de krigagem para interpolação dos valores nos locais que se deseja conhecer. Certos valores de covariância podem gerar um sistema de krigagem instável que inviabilize os procedimentos geoestatísticos, seja pela inexistência de solução ou possibilidade de múltiplas respostas. De forma a assegurar a existência e unicidade de solução do sistema, deve-se garantir que o mesmo reflita a propriedade conhecida por “definição positiva”. Embora hajam diversas maneiras de verificar tal característica, a existência de uma única solução é amparada, na prática, pela utilização de funções de variogramas previamente conhecidas por suas características de definição positiva para representação das estruturas de variabilidade do fenômeno (Isaaks & Srivastava, 1989). Ainda que o ajuste de uma função aos variogramas experimentais seja a abordagem mais comumente utilizada para caracterizar os padrões de continuidade espacial e represente um oportuno mecanismo para grande parte dos semivariogramas, não constitui a única abordagem possível e não necessariamente representa a melhor forma de fazê-lo (Isaaks & Srivastava, 1989; Pyrcs & Deutsch, 2006).

Abordagens modernas buscando maiores eficiência e automatização dos procedimentos de modelagem de continuidade espacial são propostas em Yao *et. al* (1998), Pyrcz *et. al* (2006) e Kloeckner *et. al* (2019) utilizando como base as proposições feitas em Marcotte (1996) para computação das funções de variogramas através dos domínios espectrais utilizando as transformadas rápidas de Fourier (FFT), aspecto chave que possibilitou o desencadeamento dos trabalhos subsequentes acerca do tema. Yao & Journel (1998) buscam contornar as principais limitações observadas na operacionalização da modelagem de variogramas via FFT trazendo o Teorema de Bochner como uma alternativa não paramétrica para garantir a definição positiva dos sistemas abordados através de restrições aplicadas à construção da função de densidade espectral, propondo uma metodologia automática que mais tarde veio a ser retratada em Yao (2000), dadas as necessidades de interação do usuário em pontos chave da metodologia. Yao (2000) traz as devidas correções aos métodos propostos em Yao & Journel (1998) apresentando a abordagem semi-automática para calcular uma tabela de covariância utilizando dados experimentais considerando primordialmente a conformidade aos critérios de definição positiva, sendo ainda necessário a inserção de estratégias de busca dos pares experimentais e parâmetros de suavização das tabelas de covariância no espaço de Fourier.

Kloeckner (2018) afirma que grandes avanços para a modelagem automática de funções de continuidade espacial foram atingidos em Yao & Journel (1998) e Yao (2000) a respeito da utilização da transformada rápida de Fourier para computação de variogramas proposta inicialmente em Marcotte (1996), todavia todos os métodos possuem certas limitações em distintas etapas dos seus procedimentos, sejam elas computacionais ou de complexidade operacional, que vão de encontro à busca por modelagens com a mínima necessária influência do usuário. Diante disso, é proposto em Kloeckner *et. al* (2019) uma metodologia baseada na extração de uma tabela de covariância via FFT a partir de um modelo base conceitual (“*base model to extract covariance*” ou BMEC), apresentando resultados satisfatórios em suas aplicações em ambientes sintéticos e controlados.

1.1 Considerações gerais

Os promissores resultados observados em Kloeckner *et. al* (2019) e ciente das limitações observadas nos trabalhos dos principais autores comprometidos com os avanços acerca do tema motivaram o desenvolvimento da presente dissertação. Acredita-se na possibilidade de obter tanto uma redução da interferência humana quanto maior rapidez na obtenção de modelos representativos de continuidade espacial dos fenômenos a partir da correta e moderada utilização da inteligência computacional.

O âmago dessa dissertação consiste na apreciação da utilização de modelos de covariância gerados semi-automaticamente para realização de processos de simulação estocástica aplicados a estudos geológicos. O fluxo de processos para modelagem das medidas de continuidade espacial em tabelas de covariância via FFT pode ser resumido, de maneira ampla e sucinta, em três etapas fundamentais: (i) construção de um modelo base para extrair covariâncias (BMEC) fundamentado nos dados experimentais, representado em um *grid* regular cujos blocos estejam preenchidos em sua totalidade, com o intuito de preparar as informações e viabilizar a etapa subsequente; (ii) realização da transformada rápida de Fourier, de forma a converter o BMEC ao domínio de frequências, cuja essência está na observação das informações espacialmente dispostas como “componentes periódicos”, para posterior aplicação do teorema da convolução, cujo ofício, sob a óptica de Fourier, é atuar como um operador linear e fornecer as funções transformadas; e (iii) retrotransformação dos resultados das operações realizadas no domínio de frequências para o âmbito dos dados, resultando na tabela de covariância.

Os modelos construídos pela aplicação da metodologia proposta em Kloeckner *et. al* (2019) evidenciam valores de covariância para as distâncias e direções definidas pelo grid da tabela de covariância, e apresentam resultados satisfatórios quanto à sua aplicação direta em procedimentos geoestatísticos nos testes submetidos pelo autor em ambientes sintéticos controlados, indicando a viabilidade de aplicação do método. Contudo, a inexistência de testes em ambientes reais que retratam desafios enfrentados na prática deixam dúvidas quanto à sua eficiência, uma vez que a tabela de covariância depende essencialmente da qualidade do modelo base do qual é extraída, aspecto diretamente ligado a quantidade e qualidade das informações disponíveis. Uma das principais limitações observadas está na falta de reprodução das estruturas de curto alcance que compõem o efeito pepita. Essa dissertação tem como base a investigação do método de mapeamento semiautomático de continuidade espacial por intermédio do estudo de caso em um depósito de bauxita, a partir do qual se acredita ser possível apreciar diferentes aspectos possivelmente limitantes da técnica de forma a viabilizar e direcionar posteriores conjecturas. As informações são provenientes de uma campanha de sondagem segundo uma malha irregular com espaçamentos que variam entre 25 m e 250 m, composta tanto por informações exploratórias quanto de reconciliação do depósito.

1.2 Meta

Essa dissertação de mestrado tem como meta aprofundar os conhecimentos a respeito do método semiautomático de mapeamento de continuidade espacial via tabelas de covariância por intermédio da observação de sua performance em depósito mineral real.

1.3 Objetivos específicos

A fim de atingir a meta proposta, essa dissertação busca cumprir os seguintes objetivos específicos:

- i. conduzir um estudo de caso em depósito de bauxita e verificar a qualidade das realizações por simulação estocásticas utilizando a tabela de covariância como modelo de continuidade espacial, contrastando-as com os produtos obtidos com a modelagem de variogramas direcionais;
- ii. observar a influência que o modelo base utilizado na extração da covariância exerce na reprodução da continuidade espacial do fenômeno, contrastando os resultados das simulações via tabelas de covariância obtidas por diferentes modelos base;
- iii. observar o comportamento das estruturas de curto alcance e propor uma metodologia de imputação do efeito pepita no procedimento de simulação.

1.4 Panorama da metodologia de estudo

Fundamentado nos objetivos específicos propostos para essa dissertação, desenvolveu-se fluxos de trabalho que abrangem, sobretudo, as técnicas geoestatísticas fundamentais para realização de simulações estocásticas. Essas técnicas compreendem, essencialmente, análises exploratórias dos dados, atenuação dos efeitos de coletas irregulares de amostras no conjunto de informações, normalização de dados, geração de modelos de continuidade espacial, criação de cenários equiprováveis e validação da representatividade das simulações realizadas.

Para fins de referência, o estudo inicia pela definição de um conjunto de simulações com base em uma função de continuidade espacial modelada seguindo a metodologia tradicional de variografia. Consiste em uma etapa fundamental, uma vez que define as marcas de referência utilizadas ao longo do estudo de caso, desde a estimação da contribuição de variância das estruturas de curto alcance (efeito pepita) até o aprimoramento dos parâmetros utilizados no procedimento de simulação.

O processo simulatório foi aperfeiçoado com o intuito de representar o melhor conjunto de realizações possível, afim de contrastar seus resultados com os produtos obtidos utilizando a metodologia da tabela de covariância, servindo como um indicador da qualidade dos resultados alcançados com a aplicação do método proposto.

Com o intuito de observar a influência que o BMEC utilizado na extração da tabela de covariância exerce na reprodução da continuidade espacial do fenômeno, foram conduzidos diferentes experimentos aplicando a simulação sequencial Gaussiana segundo os modelos de continuidade espacial obtidos nas tabelas de covariância extraídas a partir de diferentes BMECs. A experimentação buscou contemplar metodologias de construção do BMEC com diferentes níveis de detalhes afim de avaliar seus efeitos pela observação dos produtos obtidos na simulação.

O estudo investiga as limitações do método referente à reprodução das estruturas de curto alcance, aspecto trabalhado por intermédio da imputação do efeito pepita nos parâmetros da simulação e pela construção de um BMEC que carregue as informações deste. O desempenho dos experimentos conduzidos foram contrastados com o conjunto de simulações referência de forma a verificar a proximidade das realizações via tabela de covariância em comparação ao *benchmark* estabelecido.

1.5 Estrutura da dissertação

O capítulo 2 dedica-se a revisar os principais conceitos abordados nessa dissertação, trazendo primeiramente os aspectos considerados de maior relevância à continuidade espacial e às técnicas tradicionais de modelagem de variogramas, posteriormente visitando os principais conceitos sobre simulação estocástica e por fim trazendo uma formulação dos aspectos fundamentais que compõem as tabelas de covariância e metodologias de computação de funções de continuidade espacial no domínio espectral por meio das transformações rápidas de Fourier (FFT).

O capítulo 3 compreende a apresentação da área de estudo e do banco de dados através da análise exploratória dos dados e elucida as etapas da metodologia proposta para condução do estudo de caso.

No capítulo 4, os resultados obtidos a partir da aplicação da metodologia são apresentados e discutidos, expondo os produtos das simulações estocásticas e contraste dos resultados obtidos com a técnica semiautomática em relação à metodologia tradicional.

O capítulo 5 encerra a dissertação, analisando de maneira geral os resultados obtidos, trazendo conclusões e recomendações para desenvolvimentos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

O presente capítulo apresenta uma revisão dos principais tópicos relevantes ao estudo de caso proposto nessa dissertação. São trazidos conceitos da continuidade espacial e suas abordagens tradicionais de medida, indica-se os principais aspectos das funções de continuidade e limitações das metodologias convencionalmente utilizadas. Após, uma revisão dos conceitos de simulação estocástica é apresentada, trazendo também um breve aprofundamento do método de simulação sequencial Gaussiana escolhido para condução do estudo de caso. Por fim, os estudos cujos avanços contribuíram e impulsionaram o desenvolvimento da metodologia semiautomática de mapeamento de continuidade espacial foram revisitados, de forma a identificar suas respectivas contribuições ao tema e limitações práticas.

2.1 Continuidade espacial

A continuidade espacial é uma característica das variáveis regionalizadas estudadas na geoestatística. Os bancos de dados que retratam fenômenos das ciências da terra se distinguem das demais em função dos valores dependerem da posição espacial e existir uma interdependência entre os valores das amostras. Características da localização de informações como valores extremos, tendências direcionais e grau de continuidade são de considerável interesse uma vez que auxiliam a evidenciar o processo formacional do fenômeno.

A disposição espacial dos valores é uma propriedade intrínseca aos fenômenos em estudo, e para garantir a aplicabilidade de procedimentos geoestatísticos, é imprescindível a identificação de leis matemáticas que caracterizem tais assinaturas de maneira operacional, para todas as direções e distâncias, com base nas informações presentes no banco de dados. Essas leis são denominadas funções regionalizadas (Isaaks & Srivastava, 1989). A modelagem de funções regionalizadas consiste na conversão do entendimento físico e geológico em termos matemáticos, de forma a fundamentar os procedimentos geoestatísticos, sintetizando os padrões de continuidade espacial passíveis de serem observados nos conjuntos de informações e expressando-os em função das distâncias e direções observadas.

2.1.1 Modelagem tradicional de funções de continuidade espacial

É reconhecido, que nas ciências da terra, o comportamento e padrões de variabilidade espacial de um dado fenômeno estão diretamente relacionados ao processo formacional do qual se originou e tendem a apresentar propriedades que se manifestam de maneira distinta conforme as direções consideradas (Goovaerts, 1997; Sinclair & Blackwell, 2004), característica

denominada de anisotropia. No âmbito da geologia, o conceito de anisotropia é fundamental às aplicações geoestatísticas para a obtenção de estimativas de recursos e reservas com qualidades satisfatórias, que sugere a relação direta existente entre as direções preferenciais de continuidades geológicas e as direções de maior continuidade de teores (Sinclair & Blackwell, 2004). A aplicação de procedimentos geoestatísticos exige a criação de um modelo que represente a maneira que o fenômeno se comporta em localizações que não tenham sido amostradas (Isaaks & Srivastava, 1989).

A análise estrutural de um fenômeno regionalizado consiste na construção de um modelo de variograma que caracterize os principais aspectos da regionalização, sendo necessário tanto uma boa compreensão física do fenômeno em estudo quanto habilidades práticas no ajuste de modelos geoestatísticos (Journel & Huijbregts, 1978). O variograma tem sido tradicionalmente utilizado na análise e modelagem da variabilidade espacial e pode ser definido como a variância observada entre pares de amostras separados por uma distância h , substituindo a distância euclidiana por uma distância estrutural (Deutsch & Journel, 1998). Para cada direção de estudo, os pares amostrais são formados para diferentes h (*lags*) e avaliados quanto à diferença quadrática entre seus valores, cujas médias são graficamente representadas no chamado variograma experimental, permitindo uma apreciação das dissimilaridades em função dos valores absolutos de h ao longo das direções (Wackernagel, 1998).

2.1.2 Operacionalização do variograma experimental com modelos permissíveis

O variograma experimental é uma conveniente ferramenta para a análise de dados espacialmente dispostos, uma vez que se baseia em uma simples medida de desigualdade. Ainda que um conjunto de variogramas em diferentes direções forneça um excelente sumário descritivo da continuidade espacial, provavelmente não fornecerá todos os valores de variogramas necessários pelo sistema de krigagem (Isaaks & Srivastava, 1989). Sua aplicação se dá pelo ajuste de uma função teórica de variograma, essencialmente pelo fato de que o modelo criado deve apresentar um significado físico de forma a garantir que uma função randômica com determinado variograma possa existir (Wackernagel, 1998). A relevância dos modelos de variogramas às aplicações geoestatísticas, bem como as variedades, características e respectivas formulações matemáticas são detalhadamente discutidas em Journel & Huijbregts (1978), Isaaks & Srivastava (1989), Deutsch & Journel (1998), Wackernagel (1998) e Sinclair & Blackwell (2004).

Tradicionalmente, são utilizados modelos de variograma que respeitam a condição de *definição positiva*, os chamados “modelos permissíveis”, com a finalidade de garantir que a

variância de quaisquer combinações lineares nos sistemas de krigagem preenchidos por valores amostrais seja positiva (Wackernagel, 1998; Sinclair & Blackwell, 2004). De fato, o problema que se busca contornar com a utilização de modelos permissíveis para o ajuste de funções aos variogramas experimentais consiste na existência e unicidade de solução da matriz de krigagem construída utilizando os valores de variogramas. Portanto, a condição matemática conhecida como *definição positiva* deve ser respeitada pela matriz de covariâncias do sistema de krigagem (Isaaks & Srivastava, 1989), não necessariamente pela função teórica ajustada ao variograma.

A restrição a combinações lineares de modelos base previamente conhecidos por suas características de definição positiva é, por vezes, limitativa, e o processo de modelagem pode, além de demandar tempo, ser consideravelmente subjetivo (Yao & Journel, 1998). Além disso, apesar das abordagens tradicionais de modelagem se mostrarem viáveis para a maioria dos variogramas, existem casos em que as estruturas convencionais não são adequadas, motivo que justifica a busca por modelos válidos de variogramas que respeitem as restrições de definição positiva do sistema de krigagem evitando artefatos de instabilidade numérica (Pyrzcz & Deutsch, 2006).

2.1.3 “Aninhamento” de estruturas de variabilidade

A variabilidade que se busca caracterizar por meio do variograma é composta por diferentes aspectos estruturais associados a diferentes escalas de observação. As estruturas de variabilidade de um dado fenômeno podem ser provenientes de (i) erros de medida para $h \cong 0$ devido a flutuações nas taxas de recuperação de corpos de amostra ou erros de amostragem; (ii) transições entre elementos mineralógicos a nível petrográfico ($|h| \leq 1 \text{ cm}$); (iii) alternância de conjuntos estratiformes em escalas estratigráficas ($|h| \leq 100 \text{ m}$); (iv) distribuição de depósitos relacionados à orogenia de determinada província geológica ($|h| \leq 100 \text{ km}$). Na prática, essas fontes de variabilidade nunca são observadas simultaneamente, uma vez que seria necessário a disponibilidade de uma enorme quantidade de dados abrangendo todas essas faixas de variabilidade (Journel & Huijbregts, 1978).

Esse fato é ilustrado pelo problema prático observado no âmbito da mineração. Na avaliação de uma frente operacional mineira por intermédio de amostras de canaletas, o suporte amostral desses canais integram as variabilidades (i) e (ii) em uma única e indiferenciável estrutura. Da mesma forma, no procedimento de avaliação desse depósito mineral como um todo, através das amostras de furos de sondagens espaçadas em intervalos de 50 m a 100 m, as variabilidades (i), (ii) e (iii) não seriam passíveis de distinção, sendo a (iv) identificada pela

alternância estratigráfica ou tendências de valores observadas nos teores amostrados. Essas fontes ou estruturas de variabilidade atuam de maneira simultânea em todas as distâncias h e são denominadas *nested structures* ou “estruturas aninhadas”. Nos diversos procedimentos de observação e avaliação das informações disponíveis, se torna impossível diferenciar variabilidades cujas escalas são menores que a escala de observação dos dados, de forma a impossibilitar a integração das estruturas de variabilidade de menores escalas (Journel & Huijbregts, 1978).

2.1.4 Nugget effect (efeito pepita)

No estudo da variabilidade espacial entre amostras posicionadas em locais próximos, os valores neles analisados podem, por vezes, divergir consideravelmente, contrariando o condicionamento esperado pela interdependência espacial dos fenômenos das ciências da terra. O termo “efeito pepita” é utilizado para designar a caracterização de influências residuais provenientes das variabilidades que apresentem alcances (a_0) menores que as distâncias (h) de observação disponíveis. As distâncias de observação de amostras obtidas por furos de sondagem são, com frequência, consideravelmente maiores que as dimensões que configuram as menores estruturas de variabilidade do fenômeno em estudo, dando a impressão, a níveis observacionais (e.g. $h \approx 20\text{ m} \gg a_0$), que o conjunto dessas micro-estruturas residuais surgem como aparentes descontinuidades na origem (Journel & Huijbregts, 1978).

É de suma importância que o ajuste de funções aos variogramas experimentais considere a interpretação tanto do comportamento na origem quanto para distâncias além do alcance do variograma experimental (Wackernagel, 1998). Apesar das informações geológicas disponíveis permitir a interpretação das principais características do fenômeno em estudo, a eficiência dos métodos interpretativos dependem fortemente do nível de informação disponível e estão intimamente relacionadas ao suporte amostral e escalas observacionais. É fundamental a compreensão de que a adoção de modelos para caracterização de tais aspectos depende de suposições implícitas a respeito tanto da continuidade geológica quanto dos valores que o representam (Sinclair & Blackwell, 2004).

2.2 Simulação estocástica

No contexto geológico e de operações mineiras, a definição de estimativas locais e globais são frequentemente insuficientes para caracterizações em termos de planejamento e operação, sendo muitas vezes essencial a realização de previsões a respeito das possíveis variações que características em estudo possam apresentar. As estimativas deduzidas das informações

fragmentadas e limitadas a que se normalmente tem acesso são excessivamente imprecisas para realização dos cálculos de dispersão nos níveis de detalhes necessários (Journel & Huijbregts, 1978). A maioria das aplicações exigem uma medida da incerteza conjunta dos atributos distribuídos ao longo de uma região (Deutsch & Journel, 1998).

Uma vez que é impossível estimar a realidade *in situ* com detalhes suficientes apenas com base nas escassas informações disponíveis, uma simples ideia consiste na simulação com base em um modelo representativo dessa realidade (Journel & Huijbregts, 1978). A simulação pode ser resumida como uma tentativa de criar uma coleção de valores que apresentam as mesmas características espaciais e estatísticas dos valores conhecidos dos atributos de interesse (Sinclair & Blackwell, 2004). Simulação estocástica consiste no processo de construção de modelos equiprováveis alternativos de alta resolução que caracterizam possibilidades da distribuição espacial de um atributo $z(u)$ (Deutsch & Journel, 1998). As coleções de valores simulados são construídos de forma que seus valores variam em uma escala similar às reais variações locais dos atributos (Sinclair & Blackwell, 2004). Através da geração de múltiplas realizações da distribuição conjunta do valor dos atributos no espaço, se obtém uma apreciação da incerteza espacial do atributo em estudo (Goovaerts, 1997). As simulações de um depósito apresentam os mesmos valores observados nas localizações dos dados experimentais e manifestam as mesmas características de dispersão do depósito real observadas a partir das informações disponíveis (Journel & Huijbregts, 1978). Simulações que respeitam as amostras, suas distribuições de probabilidade e as características espaciais observadas e modeladas são ditas “condicionais” (Deutsch & Journel, 1998; Sinclair & Blackwell, 2004).

Visto que as simulações produzem valores para espaçamentos muito menores que as distâncias entre os dados condicionantes, a disposição do atributo simulado é quase perfeitamente conhecida por intermédio de um amplo conjunto de valores pontuais. Além disso, em função da possibilidade simulação de grandes quantidades de valores pontuais dentro de blocos que representam unidades práticas, as médias de todos os valores simulados no interior do agrupamento pode ser assumido como uma estimativa próxima do valor real desse bloco (Sinclair & Blackwell, 2004).

2.2.1 Simulação vs estimativa

O objetivo dos algoritmos de interpolação é fornecer, em cada ponto da região de estudo, um valor ótimo de estimativa que seja o mais próximo possível do valor real desconhecido (Journel & Huijbregts, 1978). Cada estimativa observada independentemente dos valores estimados em sua vizinhança representa o valor ótimo para esse ponto, uma vez que o estimador

fundamenta-se na minimização da variância do erro local (Goovaerts, 1997). Contudo, não existe razão para que a variabilidade espacial dos valores reais dos atributos seja reproduzida nos procedimentos de interpolação, cuja tendência é suavizar as variações locais dos atributos de interesse (Journel & Huijbregts, 1978; Goovaerts, 1997). Tipicamente, atributos caracterizados por baixos valores são superestimados enquanto aqueles de maiores magnitudes são subestimados. Além disso, a suavização não é uniforme e depende da configuração dos dados locais, ocorrendo de forma mais intensa nas áreas em que não há pontos amostrais e sendo minimizada em locais com maior abundância de dados experimentais (Goovaerts, 1997).

As simulações se diferem da krigagem ou quaisquer algoritmos de interpolação em dois principais aspectos: (i) enquanto nos algoritmos interpoladores o objetivo consiste na obtenção da melhor, e conseqüentemente única, estimativa local de um atributo sem considerar as estatísticas espaciais em conjunto, nos processos de simulação a reprodução das estatísticas e características globais são prioritárias em relação à acuracidade local; (ii) a estimativa fornece apenas uma medição incompleta da acuracidade local e nenhuma apreciação em âmbito global, ao passo que, através da diferença entre os valores alternativos simulados, é possível apreciar tais medidas tanto em escalas locais quanto globais. (Deutsch & Journel, 1998).

A simulação estocástica trabalha, em termos gerais, de forma a honrar os valores dos dados nas localizações em que são conhecidas e reproduzir de maneira aproximada os histogramas e modelos de continuidade espacial proveniente das informações amostrais (Goovaerts, 1997). A simulação viabiliza a identificação da dispersão das principais características dos valores reais (Journel & Huijbregts, 1978), uma vez que, ao invés de fornecer um mapa com as melhores estimativas locais, gera realizações que reproduzem as estatísticas consideradas mais relevantes para o fenômeno em estudo (Goovaerts, 1997).

As simulações apresentam uma representação melhor das flutuações observadas na realidade, sendo preferível no estudo de dispersão das características do fenômeno em estudo (Journel & Huijbregts, 1978). O efeito de suavização observado na maioria dos algoritmos de interpolação se deve a um componente de erro faltante. Com o intuito de reconstituir a variância total do modelo de função randômica, uma solução consiste na simulação da função randômica do erro com média zero e correta variância (Deutsch & Journel, 1998). A simulação pode ser vista como a adição desse erro aos valores obtidos por krigagem que, pelo fato de serem condicionados aos dados, nas localizações dos dados condicionantes apresentam valores nulos (Sinclair & Blackwell, 2004). Em qualquer caso, quanto melhor for o conhecimento prévio e modelagem do fenômeno, melhores serão as representações das estruturas de variabilidade,

resultando em simulações mais próximas e representativas da realidade (Journel & Huijbregts, 1978).

2.2.2 Simulação sequencial Gaussiana

Um dos algoritmos utilizado para geração de simulações de um campo Gaussiano é fornecido pelo princípio da simulação sequencial. A abordagem sequencial se deve ao princípio de que o valor de uma variável aleatória $Z(u)$ pode ser obtido a partir de uma função de probabilidade cumulativa condicional (*ccdf*) de forma a incluir todas as informações disponíveis dentro de uma determinada circunvizinhança de u , incluindo dados originais e valores previamente simulados (Deutsch & Journel, 1998). A implementação do princípio da simulação sequencial em modelos de função randômica multiGaussianos é referida como simulação sequencial Gaussiana e depende primordialmente da adequação da função de distribuição de densidade acumulada (*cdf*) frente à suposição de biGaussianidade assumida para aplicabilidade do método (Goovaerts, 1997). A base teórica e descrições detalhadas a respeito do paradigma da simulação sequencial e conceitos acerca do formalismo Gaussiano relevantes ao tema são encontradas em Goovaerts (1997) e Deutsch & Journel (1998).

Descrito de forma sucinta, o procedimento de simulação sequencial Gaussiana, abordado minuciosamente em Goovaerts (1997) e Deutsch & Journel (1998), após as devidas verificações e transformações dos conjuntos de informações, tem início pela definição de um caminho randômico em que cada nó do *grid* é visitado uma única vez. Em cada localização u , os valores de média e variância da *ccdf* são determinados com base na krigagem simples, utilizando o modelo de variograma da função randômica normalizada, e nos dados condicionantes situados na circunvizinhança do local u sendo simulado. O valor simulado é randomicamente obtido a partir da *ccdf* e adicionado ao conjunto de dados, repetindo o processo na localização u seguinte, definida pelo caminho randômico, até que todos os nós do *grid* tenham sido simulados e o cenário esteja completamente preenchido. Por fim, o cenário concebido por valores normais simulados é retrotransformado ao espaço original da variável. Na obtenção do conjunto de realizações, cada cenário simulado é obtido por intermédio de um caminho randômico diferente, de forma com que a sequencia de configurações dos dados, assim como os sistemas de krigagem simples, sejam diferentes para cada realização, resultando no conjunto de representações alternativas do fenômeno em estudo, produzindo uma distribuição de valores de resposta a serem utilizadas em subsequentes análises de risco.

2.3 Semiautomatização do mapeamento de continuidade espacial

Abordagens modernas buscando automatizar procedimentos de modelagem de variogramas garantindo a eficiência dos modelos para aplicação direta em procedimentos de estimativa e simulação são propostas em Yao (1998) e Kloeckner (2018). Ambos fundamentam-se nas proposições feitas em Marcotte (1996) para computação das funções de variogramas através de abordagem via domínio espectral utilizando as transformações de Fourier. Os conceitos abordados em Marcotte (1996) com ênfase na eficiência computacional representam um aspecto chave no desencadeamento dos trabalhos subsequentes acerca do tema. Yao (1998) busca contornar as principais limitações observadas na operacionalização da modelagem de variogramas via transformação rápida de Fourier (FFT) com enfoque na garantia de definição positiva dos modelos de continuidade espacial concebidos e chamados de tabelas de covariância. Kloeckner (2018) propõe uma metodologia baseada na extração de uma tabela de covariância via FFT a partir de um modelo base conceitual (BMEC), buscando essencialmente uma metodologia semiautomática simples que apresentasse modelos de continuidade robustos e passíveis de serem aplicados diretamente em procedimentos geostatísticos. A presente seção faz uma visita aos principais tópicos abordados pelos principais autores comprometidos com o desenvolvimento acerca do tema.

2.3.1 Computação de funções de continuidade espacial via FFT

O trabalho desenvolvido em Marcotte (1996) demonstra que a computação de funções de continuidade espacial pode ser significativamente acelerada por intermédio da manipulação matemática das mesmas no domínio das frequências. O autor apresenta algoritmos baseados na transformação rápida de Fourier (FFT) implementadas com sucesso para o cálculo de funções de variogramas e covariogramas, diretos e cruzados, trazendo um aprofundamento matemático e ilustrativo acerca do tema.

Considerando duas funções randômicas $f(x, y)$ e $g(x, y)$, a covariância entre elas a uma dada distância h_x e h_y é expressa por (Marcotte, 1996):

$$C(h_x, h_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)g(x + h_x, y + h_y)dx dy.$$

A transformada de Fourier (\mathcal{F}) aplicada à equação de covariância $C(h_x, h_y)$ indica que:

$$\mathcal{F}(C) = \bar{F}(x, y) \times G(x, y),$$

onde $F(x, y)$ e $G(x, y)$ são as transformadas de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, respectivamente, e $\bar{F}(x, y)$ é o complexo conjugado de $F(x, y)$.

A covariância não-centrada é obtida pela computação das transformadas F e G , multiplicando-as e realizando a transformada inversa. Para utilização da FFT no cálculo da covariância direta de $f(x, y)$, a função g deve ser simplesmente substituída por f (Marcotte, 1996).

As comparações entre os métodos de modelagem de continuidade espacial no domínio dos dados e de frequências constatam que a utilização da FFT reduz dramaticamente o tempo exigido na computação das funções estruturais, apresentando como principal inconveniência o espaço de memória necessário para execução dos cálculos. Os detalhes a respeito dos testes e performance computacional são encontradas em Marcotte (1996). Exemplos ilustrativos acerca da transformação de Fourier são didaticamente propostos por Kloeckner (2018).

2.3.2 Buscando a permissibilidade da tabela de covariância

Na maioria das situações, duas ou mais estruturas básicas são combinadas de forma a ajustar a curva de uma função de covariância aos valores experimentais, onde cada uma dessas estruturas podem ser consideradas como a contribuição de componentes de funções randômicas independentes (Yao, 1998). Convencionalmente adotado, as curvas escolhidas para o ajuste são provenientes exclusivamente de modelos previamente conhecidos por respeitar as condições de *definição positiva*, com a finalidade de garantir a existência e unicidade de solução da matriz de krigagem construída utilizando os valores fornecidos pelas curvas ajustadas, de forma que a variância de quaisquer combinações lineares das amostras seja positiva (Isaaks & Srivastava, 1989; Wackernagel, 1998; Sinclair & Blackwell, 2004). Conforme comentado anteriormente, uma vez que um dos problemas que se busca contornar consiste na existência e unicidade de solução da matriz de krigagem construída utilizando os valores de variogramas, a condição de *definição positiva* deve ser respeitada pelas matrizes de covariâncias do sistema de krigagem (Isaaks & Srivastava, 1989), não necessariamente pela função teórica ajustada ao variograma.

Seguindo o contexto convencional para garantir a definição positiva do sistema de krigagem resultante, utilizando apenas modelos cujas estruturas sejam positivas definidas, Yao (1998) introduz uma metodologia não paramétrica para modelagem de uma tabela de covariância com ênfase na garantia da definição positiva da tabela de covariância gerada, utilizando como base o Teorema de Bochner (Bochner, 1949). O teorema sugere que uma função de covariância

$C(h)$ é positiva definida somente se esta for passível de ser expressa como a transformada de Fourier de uma medida limitada positiva não-decrescente $S(w)$:

$$C(h) = \int_{\mathfrak{R}^d} e^{2\pi i/h \cdot w} dS(w),$$

sendo h um vetor distância no espaço \mathfrak{R}^d de d dimensões e w o vetor frequência no domínio a que corresponde. Se a função randômica estacionária possui um modelo $Z(u)$ com variância unitária tal que $C(0) = 1 = \text{Var } Z(u)$, $S(w)$ pode ser entendida como uma função de distribuição acumulada (*cdf*) na forma $dS(w) = s(w)dw$. A densidade espectral da função randômica $Z(u)$ é dada por $s(w)$, considerada pelo teorema como a função de probabilidade de densidade (*pdf*) respeitando que $s(w) \geq 0, \forall w$ e $\int s(w)dw = 1$, permitindo que a integral descrita seja aproximada pela somatória discreta dada por:

$$C(h) = \sum_{k=1}^K e^{2\pi i/h \cdot w_k} s(w_k), k = 1, \dots, K.$$

De maneira sucinta, o fluxo de trabalho a ser realizado para aplicação da metodologia proposta em Yao (1998) tem início pela definição de um mapa discreto de covariâncias experimentais. O autor sugere a utilização do programa *varmap* do GSLIB (Deutsch & Journel, 1998) como ferramenta para obtenção desse mapeamento primário e comenta a necessidade dos mapas apresentarem suficientes *lags* para uso posterior nos sistemas de krigagem. Visto que se espera a presença de significativas flutuações experimentais e diversas entradas faltantes, uma suavização preliminar é realizada com a finalidade de preencher todas as entradas da tabela de covariância e filtrar as flutuações mais severas. Yao (1998) faz referência a esse mapa preliminarmente suavizado como um “pseudo-mapa” de covariância, uma vez que não necessariamente satisfaz a condição de definição positiva. Utilizando a transformação rápida de Fourier (FFT), esse mapa resultante é transformado em uma tabela de *quasi*-densidade espectral e seus valores são também suavizados com base nas restrições observadas no Teorema de Bochner, resultando então em uma função de probabilidade de densidade espectral lícita.

A metodologia demonstra que a construção dos sistemas de krigagem através da leitura direta de uma tabela “lícita” de covariância pode ser realizada sem a necessidade de construção de modelos analíticos, uma vez que todos os programas tradicionais de estimativa e simulação geoestatística podem ser modificados para leitura dos valores de covariância diretamente das tabelas de covariância construídas. As transformações entre os domínios espacial e de frequência são realizadas rapidamente além de abreviar as tarefas tediosas e subjetivas de

ajuste de modelos analíticos de covariância, eximindo o usuário da definição prévia de quantidade e configuração dos componentes estruturais do fenômeno em estudo (Yao, 1998).

2.3.3 Simplificando a semiautomatização do modelo de covariância

O desenvolvimento de uma metodologia semiautomática para a obtenção de uma tabela de covariância com enfoque na simplificação do procedimento de aquisição de um modelo descritivo de um fenômeno espacial em estudo é apresentado em Kloeckner (2018) e Kloeckner *et. al* (2019). As contribuições feitas em Marcotte (1996) são apontadas como fundamentais na introdução do uso da transformação de Fourier no campo de análise de continuidade espacial, cujo trabalho prova a eficiência da abordagem no domínio espectral para computação de variogramas. Similarmente, a metodologia proposta em Yao (1998) é considerada a principal referência no desenvolvimento da abordagem, indicando a complexidade do método como principal fator limitante que motivou a busca por novas soluções (Kloeckner, 2018).

A metodologia apresentada fundamenta-se na utilização de um modelo base para extrair covariância (BMEC) que reproduza minimamente características espaciais dos dados para obtenção da densidade espectral por intermédio de sua transformada rápida de Fourier. A utilização de um modelo simples do fenômeno representa o ponto-chave da metodologia, representando uma significativa simplificação dos procedimentos para mapeamento da continuidade espacial. Contudo, esse modelo deve ser construído segundo um *grid* regular e estar completamente preenchido para realização da transformação rápida de Fourier (Kloeckner *et. al* (2019). São apresentados como principais diferenciais em relação às metodologias de Marcotte (1996) e Yao (1998) a utilização de valores diferentes de zero para preenchimento das funções discretas e preenchimento prévio do *grid* para então transformação via FFT, respectivamente (Kloeckner, 2018).

É argumentado em Kloeckner *et. al* (2019) que, apesar do grau de semelhança necessário entre a realidade e o BMEC do qual é obtida a densidade espectral ser questionável, mesmo os BMECs obtidos por métodos simples para preenchimento do *grid* apresentaram resultados suficientemente satisfatórios quanto à tabela de covariância gerada. Os testes foram conduzidos em ambiente sintético e controlado observando a eficiência do método em procedimentos de estimativa e simulação em contraste com a modelagem tradicional de variogramas. A técnica proposta foi considerada eficiente pelo desenvolvimento do estudo de caso, concluindo que a qualidade dos resultados são fortemente atreladas à qualidade do modelo base do qual é extraída a tabela de covariância.

Entretanto, as principais discrepâncias observadas entre as abordagens tradicionais e via tabela de covariância consistem na reprodução das estruturas de variabilidade de curto alcance, na prática contidas no efeito pepita. A utilização de uma técnica empírica para criação do modelo base pela combinação de diferentes algoritmos de aprendizado de máquina é proposta em Kloeckner *et. al* (2019) com o intuito de contornar a adversidade da ausência das estruturas de curto alcance no BMEC. Ademais, a metodologia não garante um sistema de krigagem que respeite as condições de definição positiva. Todavia, a utilização de uma “região central lícita”, limitada pela definição do elipsóide de busca aplicado nos procedimentos de estimativa e simulação, resultou em modelos de continuidade permissíveis nos testes conduzidos em distintos casos particulares de anisotropia.

Os autores recomendam investigações de métodos de correção que garantam a definição positiva do sistema de krigagem além de maneiras de incorporação do efeito pepita, ambos considerados aspectos de grande relevância. Além disso, sugere-se a reprodução da metodologia em banco de dados real, cuja malha amostral apresente maiores complexidades (Kloeckner, 2018). Essa dissertação propõe a execução da metodologia e observação de sua eficiência por intermédio da simulação sequencial Gaussiana aplicada a um depósito mineral real de bauxita, caracterizado por uma malha amostral complexa e irregular. Ainda, o estudo investiga as limitações do método referente à reprodução das estruturas de curto alcance, aspecto abordado através da imputação deste nos parâmetros da simulação estocástica. A metodologia proposta em Kloeckner *et. al* (2019), a área de estudos utilizada e as etapas de condução do estudo de caso são apresentadas no capítulo a seguir.

3 METODOLOGIA E ÁREA DE ESTUDO

Após as elucidações a respeito dos principais conceitos e fundamentos acerca do tema, este capítulo descreve a metodologia proposta para realização do estudo de caso e identifica o fenômeno retratado pelo banco de dados. Uma visão geral a respeito da obtenção e aplicação das tabelas de covariância é apresentada de forma a elucidar os aspectos chaves ao desenvolvimento do estudo. A área de estudo é introduzida através da identificação dos dados disponíveis, análises das configurações da malha de sondagem e estatísticas globais das amostras, de forma a identificar especificidades do conjunto de informações e principais adversidades para aplicação do método. Por fim, as etapas propostas para condução do estudo de caso são apresentadas, elucidando a sequência lógica utilizada na investigação conduzida pela dissertação.

3.1 Visão geral da metodologia

O aspecto chave da metodologia proposta em Kloeckner *et. al* (2019) consiste na utilização de um modelo base (BMEC) conceitual que reproduza satisfatoriamente as características globais dos dados para extração de uma tabela de covariância. A tabela de covariância é obtida a partir da manipulação dos dados no domínio das frequências, realizados por intermédio das transformações rápidas de Fourier (FFT) e expressa valores de covariância para todas as distâncias e direções. A execução do algoritmo FFT segundo proposto em Kloeckner *et. al* (2019) exige um grid regular completamente preenchido para viabilização da extração da tabela de covariância e sua sequência lógica é apresentada pela Figura 1.

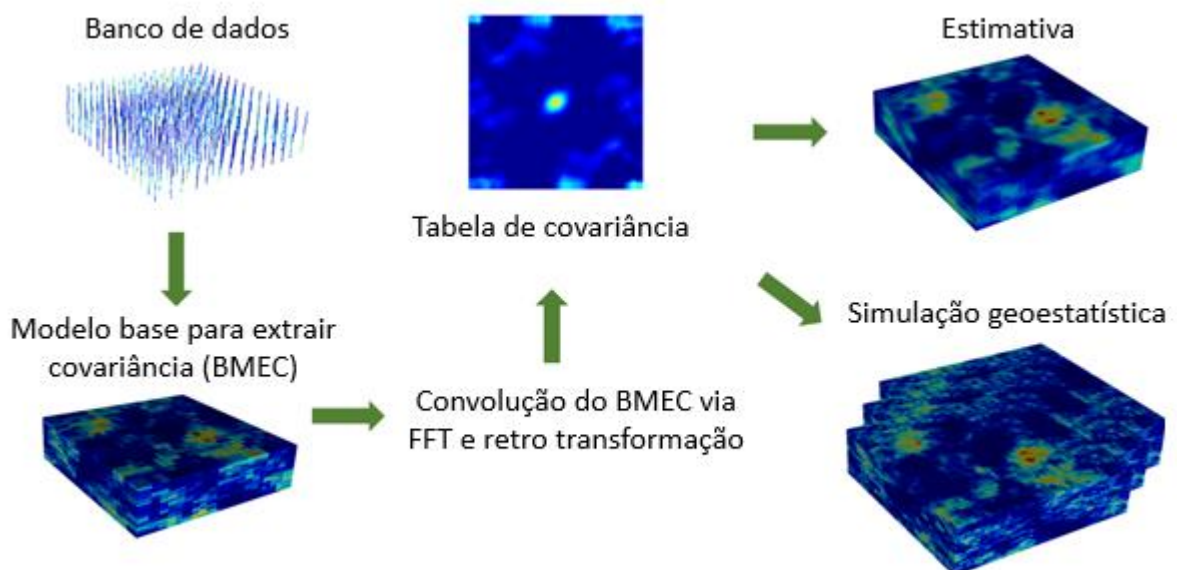


Figura 1. Sequência de aplicação da metodologia. Adaptado de Kloeckner *et. al* (2019)

Sabendo que a continuidade espacial é uma característica intrínseca do fenômeno em estudo, precisa-se de modelos de fácil obtenção que possuam uma continuidade espacial semelhante aos dados que se deseja obter a covariância. A extração da tabela de covariância pode ser realizada a partir de um modelo construído utilizando métodos muito simples. A construção do BMEC pode ser realizada utilizando desde algoritmos mais simples, como inverso da distância linear ou quadrático e estimativas de vizinhos mais próximos (*nearest neighbour*), até modelos mais complexos incorporando dados secundários correlacionados ou ainda algoritmos de aprendizado de máquina. A qualidade do modelo de continuidade espacial expresso na tabela de covariância está diretamente relacionada ao modelo base escolhido para aplicação da FFT e extração do modelo. Se compreende que a robustez do método utilizado na construção do BMEC está intimamente relacionado com a reprodução das características de continuidade espacial carregadas pelo modelo e captada pela FFT, resultando em melhores tabelas de covariância.

Contudo, uma vez que o ponto chave para aplicação da metodologia consiste na simplificação da tarefa de modelagem dos variogramas direcionais, por vezes laboriosa, essa dissertação se propõe a estudar a eficiência do método com enfoque na aplicação de modelos construídos utilizando algoritmos de simples aplicação. É apresentado em Kloeckner *et. al* (2019) um estudo comparativo utilizando modelos base de resoluções muito distintas para extração das tabelas de covariância, nas quais se observa apenas diferenças sutis entre os modelos finais obtidos. Todavia, a utilização de modelos simplistas tem como desvantagem a extrapolação excessiva de valores, podendo acarretar em distorções do modelo representado pela tabela de covariância, principalmente em campanhas de sondagem com grandes espaçamentos amostrais, além da falta de reprodução das estruturas de curto alcance.

Conforme explicado no capítulo anterior, considerando duas funções randômicas $f(x, y)$ e $g(x, y)$, a covariância entre elas a uma dada distância h_x e h_y é expressa por (Marcotte, 1996):

$$C(h_x, h_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)g(x + h_x, y + h_y)dx dy.$$

A aplicação a transformada de Fourier (\mathcal{F}) à equação de covariância $C(h_x, h_y)$ equivale à densidade espectral da função de covariância $s(w)$. A correspondência dada pelo teorema da convolução indica que (Marcotte, 1996):

$$\mathcal{F}(C) = s(w) = \bar{F}(x, y) * G(x, y),$$

onde $F(x, y)$ e $G(x, y)$ são as transformadas de Fourier de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, respectivamente, e $\bar{F}(x, y)$ é o complexo conjugado de $F(x, y)$.

A tabela de covariância pode ser obtida aplicando a retrotransformação da densidade espectral para o domínio espacial, expressa por:

$$C(h_x, h_y) = \mathcal{F}^{-1}[s(w)] = \mathcal{F}^{-1}[\bar{F}(x, y) * G(x, y)].$$

Uma vez que o estudo de caso proposto nessa dissertação visa a aplicação da metodologia em uma única variável, a transformação rápida de Fourier é aplicada à uma única função, diga-se $f(x, y)$, de forma que a manipulação via FFT denota a autocorrelação da variável.

3.2 Área de estudo

A bauxita é uma rocha que não apresenta uma composição específica e consiste na principal fonte para obtenção de alumínio, cuja indústria consome cerca de 90% da bauxita minerada. Diversos depósitos ocorrem em antigos platôs e planícies, cujas formações representam longos períodos de condições geológicas estáveis, resultando em configurações tabulares de grandes extensões. Depósitos tabulares extensos têm ocorrência na Austrália, África, América do Sul e Índia. O banco de dados exibido na Figura 2 representa um depósito tabular de bauxita localizado no Brasil e a variável de interesse no presente estudo de caso é a alumina aproveitável (AA). A área de estudo é caracterizada por grandes extensões horizontais e inexpressiva amplitude vertical, estendendo-se por quase 12 km na direção leste-oeste e aproximadamente 5 km na direção norte-sul, variando não mais que 9 m entre topo e base da camada de interesse.

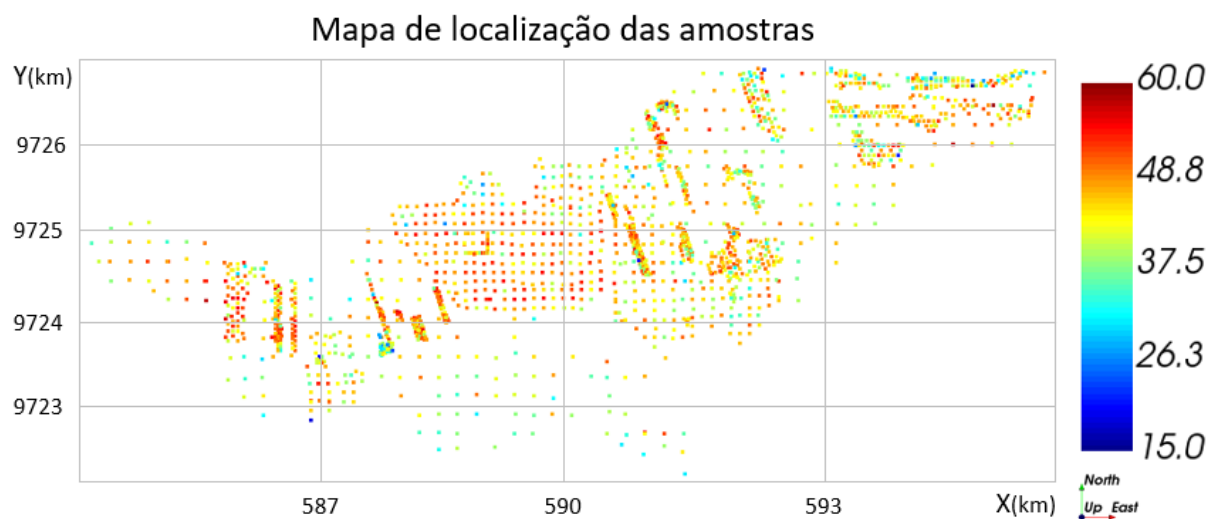


Figura 2. Mapa de localização das amostras de alumina aproveitável.

3.2.1 Análise exploratória dos dados

As informações disponíveis são compostas por 2784 furos de sondagem verticais com amostragens realizadas em intervalos de 0.5 m, obtidas em malha amostral irregular cujos espaçamentos entre furos variam de 25 m a 200 m no plano XY. É destacada a presença de informações amostradas em campanhas de exploração para caracterização do depósito, apresentando os maiores espaçamentos, e amostragens de curto prazo, caracterizadas pelas distâncias mais inferiores. A utilização simultânea de dados provenientes de diferentes campanhas de sondagem sem a necessidade de correção do suporte amostral foi possibilitada pela existência de um protocolo único de amostragem.

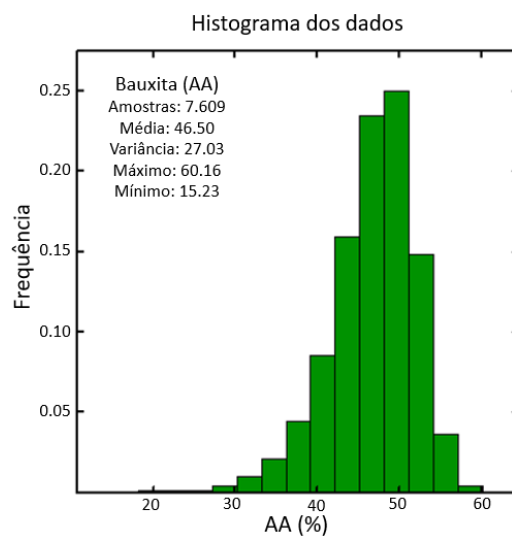


Figura 3. Histograma dos dados de alumina aproveitável.

O conjunto de aproximadamente 7600 amostras apresenta uma média de 46.5% de alumina aproveitável (AA) e desvio padrão igual a 5.2%, com valores mínimo e máximo equivalentes a 15.23% e 60.16%, respectivamente. O desagrupamento das amostras realizado por vizinho mais próximo e células móveis não representou nenhuma variação expressiva tanto na média quanto na variância. A utilização simultânea das informações de distintas campanhas de sondagem é possível uma vez que a mesma metodologia de amostragem é aplicada, não acarretando em variações referentes à qualidade das informações. O depósito de bauxita proposto para o estudo de caso representa alguns desafios à aplicação da tabela de covariância para mapeamento da continuidade espacial. A extensão do depósito e a grande quantidade de informações refletem em um elevado custo computacional dos procedimentos, enquanto a malha amostral irregular e grandes espaçamentos entre as amostras, frente à necessidade de um grid regular e completamente preenchido, acarretam em excessivas extrapolações de valores na geração do modelo base para extrair a covariância.

3.3 Condução do estudo de caso

A seguir as etapas fundamentais do estudo são apresentadas. O estudo inicia pela obtenção de cenários simulados via variogramas direcionais construídos a partir da metodologia tradicional de variografia, definido como conjunto referência. Posteriormente, foram testados diferentes BMECs seguindo uma sequência evolutiva de complexidade destes, utilizados na extração das tabelas de covariância inseridas como funções de continuidade nas simulações seguintes. É apresentada a lógica de imputação das estruturas de curto alcance (efeito pepita) no procedimento de simulação, aspecto que representa o ponto chave do estudo. Por fim, a metodologia de comparação para avaliar o desempenho das diferentes simulações em relação ao conjunto de referência é descrita. A condução do estudo de caso foi realizada a partir do *software* AR2GeMS.

3.3.1 Definição dos variogramas e simulações de referência

O estudo de caso inicia pela definição do conjunto referência de simulações, criado utilizando o algoritmo de simulação sequencial Gaussiana com base em uma função de continuidade espacial modelada segundo a metodologia tradicional de variografia. Consiste em uma etapa fundamental do estudo de caso, uma vez que define todas as marcas de referência utilizadas ao longo do estudo, desde a estimativa da contribuição de variância das estruturas de curto alcance (efeito pepita) até o aprimoramento dos parâmetros utilizados nos procedimentos de simulação. Os aspectos do processo simulatório foram aperfeiçoados com o intuito de representar o melhor conjunto de realizações possível, afim de contrastar seus resultados com os modelos simulados utilizando a tabela de covariância, servindo como um indicador da qualidade dos resultados alcançados com o método em estudo.

3.3.1.1 Efeito pepita e variogramas direcionais

O termo “efeito pepita” é utilizado para designar a caracterização de influências residuais provenientes das variabilidades que apresentem alcances (a_0) menores que as distâncias (h) de observação disponíveis. As distâncias entre as amostras obtidas por furos de sondagem são, com frequência, consideravelmente maiores que as dimensões que configuram as menores estruturas de variabilidade do fenômeno em estudo, dando a impressão que o conjunto dessas micro-estruturas residuais surgem como aparentes descontinuidades na origem (Journel & Huijbregts, 1978). Uma prática comum adotada para estimativa do efeito pepita consiste na busca de pares de variograma no sentido dos furos de sondagem (“*down-the-hole*” ou DTH).

Uma vez que os intervalos de amostragem *down-the-hole* apresentam as menores distâncias entre observações (nesse caso $h = 0.5 \text{ m}$), a aproximação do efeito pepita foi realizada pela extrapolação do modelo de variograma DTH até $h = 0$ e identificação do ponto de interceptação no eixo de $\gamma(h)$. É importante ressaltar, que a contribuição das estruturas de curto alcance na variância explicada do fenômeno pode ser aproximada de distintas formas, como análises duplicatas de amostras em laboratório e expertise do geomodelador em depósitos análogos. A adoção de modelos para caracterização de tais aspectos depende de suposições implícitas a respeito tanto da continuidade geológica quanto dos valores que o representam (Sinclair & Blackwell, 2004). Através dos variogramas experimentais, identificou-se que as direções de maior e menor continuidade seguem, respectivamente, os planos horizontal e vertical, cujo modelo é descrito pela equação e exibido pela Figura 4.

$$\gamma(h) = 3.51 + 17.82 \operatorname{Sph}\left(\frac{NS}{60m}, \frac{EW}{60m}, \frac{vert.}{1.85m}\right) + 5.13 \operatorname{Sph}\left(\frac{NS}{1150m}, \frac{EW}{1150m}, \frac{vert.}{7.3m}\right) + 0.54 \operatorname{Sph}\left(\frac{NS}{5000m}, \frac{EW}{5000m}, \frac{vert.}{9m}\right).$$

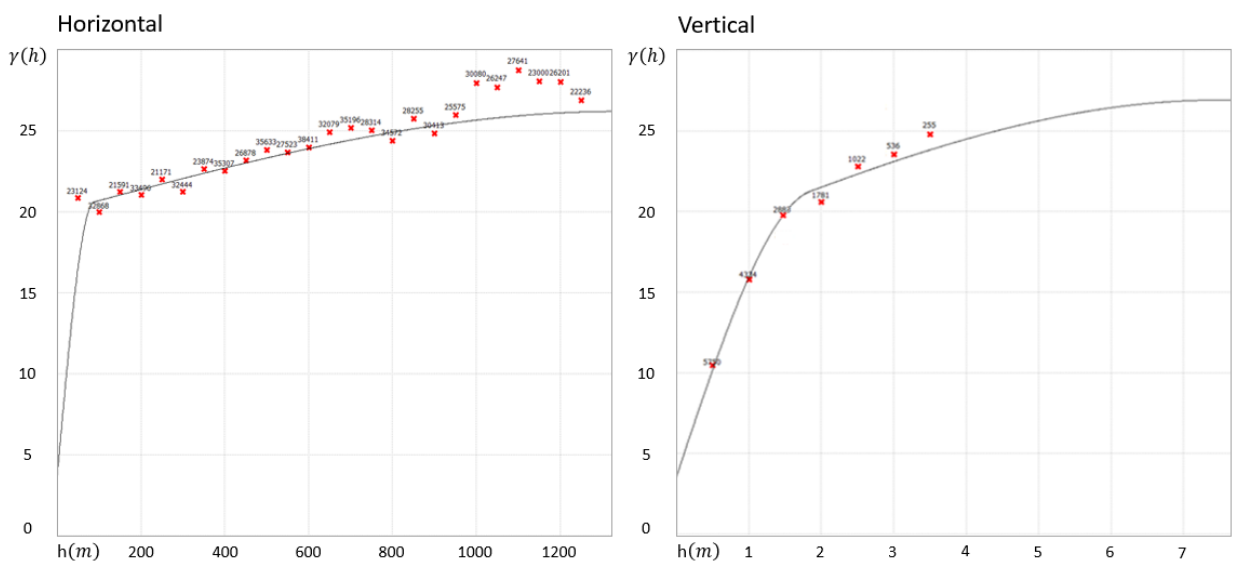


Figura 4. Variogramas nas direções de máxima (plano horizontal) e mínima (plano vertical) continuidade.

3.3.1.2 Conjunto de cenários simulados

A partir da normalização do modelo de continuidade espacial apresentado, foram simulados cenários que compõem o conjunto de referência utilizado ao longo do estudo de caso, utilizando o algoritmo de simulação sequencial Gaussiana (Isaaks, 1990). Diferentes estratégias de busca foram testadas afim de identificar os parâmetros ótimos a serem aplicados nos procedimentos de simulação, replicando-os nos procedimentos de simulação realizados

utilizando as tabelas de covariância. Os resultados das simulações foram analisados através dos histogramas e variogramas reproduzidos pelos cenários obtidos e *accuracy plot* (Goovaerts, 2001). Os produtos da simulação criados com base na modelagem tradicional de variogramas desempenham a função de *benchmark*, definindo um parâmetro para contraste dos resultados obtidos com a metodologia semiautomática de modelagem da continuidade espacial.

A Figura 5 apresenta um dos cenários do conjunto de referência e a Figura 6 e Figura 7 ilustram as análises dos produtos obtidos na simulação, considerados adequados para servir de referência na condução dos estudos propostos. Os modelos simulados apresentaram boa reprodução tanto dos variogramas quanto dos histogramas.

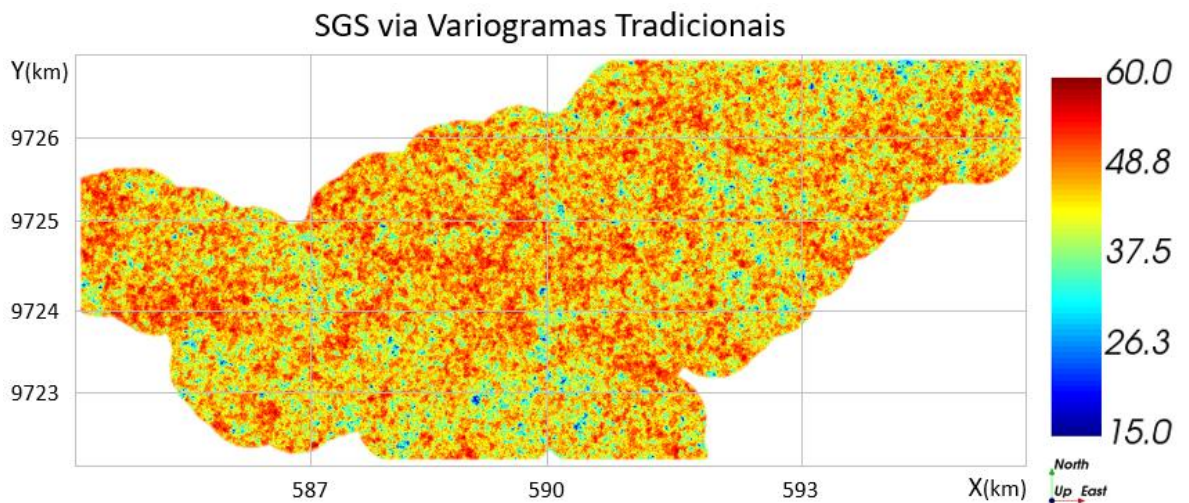


Figura 5. Cenário do conjunto de simulações referência realizados via variografia tradicional

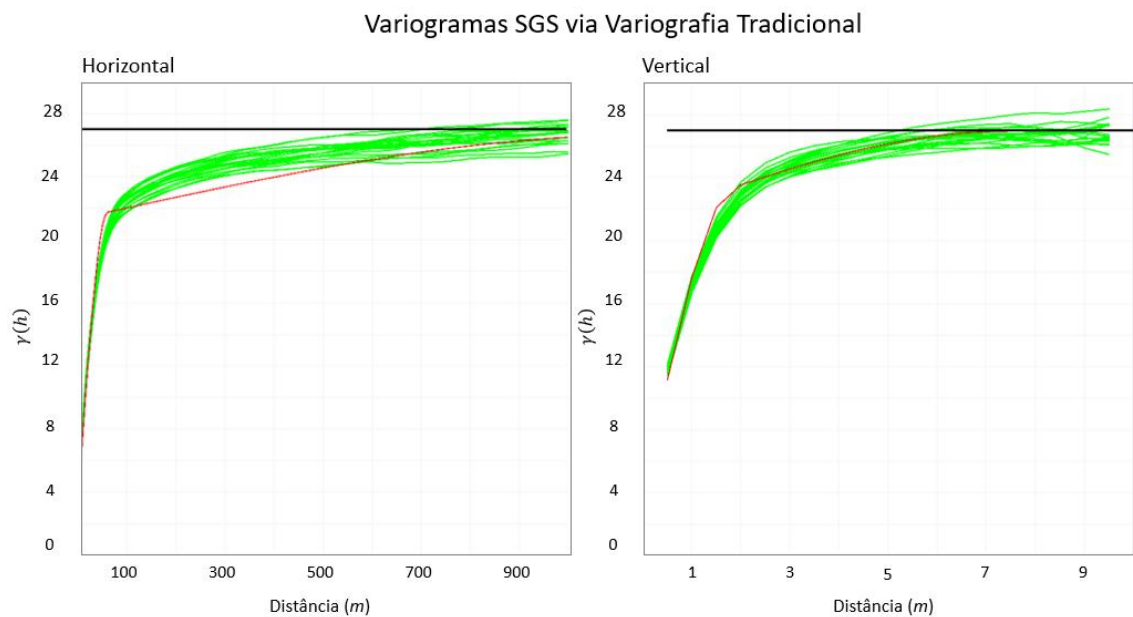


Figura 6. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados via variografia tradicional

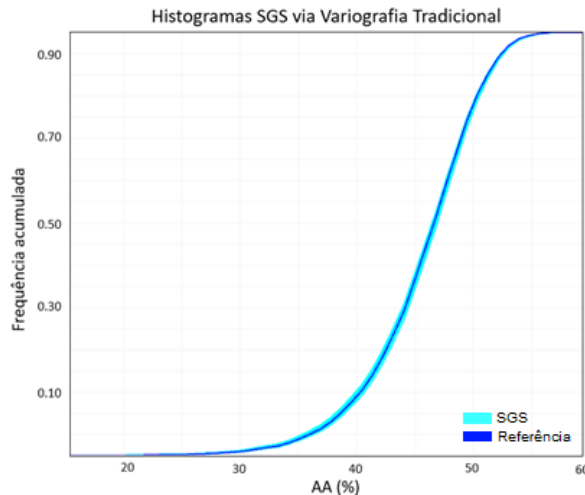


Figura 7. Análise de reprodução dos histogramas nos modelos simulados via variografia tradicional

3.3.2 Simulação via tabela de covariância

Em qualquer caso de aplicação dos procedimentos de simulação, quanto melhor for o conhecimento prévio e modelagem do fenômeno, melhores serão as representações das estruturas de variabilidade, resultando em cenários mais próximos e representativos da realidade (Journel & Huijbregts, 1978). As tabelas geradas pela aplicação da metodologia enfatizada nessa dissertação evidenciam valores de covariância para todas as distâncias e direções e são passíveis de serem aplicadas diretamente em procedimentos geoestatísticos de estimativa e simulação. Diferentes testes aplicando a simulação sequencial com as tabelas de covariância foram realizados e contrastados com o conjunto de realizações definido como referência.

3.3.2.1 Obtenção do modelo base para extrair covariância (BMEC)

Com o intuito de observar a influência que o BMEC utilizado na extração da tabela de covariância exerce na reprodução da continuidade espacial do fenômeno, foram conduzidos experimentos utilizando tabelas de covariância produzidas a partir de diferentes BMECs. A experimentação buscou contemplar metodologias de construção do BMEC com diferentes níveis de detalhes afim de avaliar seus efeitos pela observação dos produtos obtidos na simulação.

Os primeiros experimentos foram realizados extraindo as tabelas de covariância a partir de BMECs criados utilizando o algoritmo *nearest neighbour*, cuja aplicação prática consiste na definição de polígonos a partir da semi-distância entre um ponto amostral e os pontos amostrais localizados em sua circunvizinhança. Os limites dos polígonos ou poliedros são obtidos através das bissetrizes perpendiculares traçadas entre os pontos amostrais, resultando em uma área representa a fronteira de proximidade entre amostras distintas (Dirichlet, 1850). É destacado em Kloeckner (2018), que excessivas duplicações de valores no BMEC devido ao método de

construção aplicado podem acarretar em distorções na tabela de covariância extraída. Por se tratar de uma campanha de sondagem irregular, com amostras por vezes bastante esparsas, espera-se que os modelos construídos com o algoritmo *nearest neighbour* apresentem expressivas extrapolações de valores. Ainda, avaliou-se o desempenho de modelos base construídos a partir de subconjuntos de amostras, buscando atenuar a duplicação de valores para preenchimento do *grid* regular. Imputação do efeito pepita

Outro aspecto enfatizado pelo estudo de caso consiste na ausência de efeito pepita observada pela utilização dos modelos construídos via *nearest neighbour*, visto que às localidades mais próximas de um ponto amostral são atribuídos valores idênticos à amostra, acarretando em um efeito pepita nulo. Se buscou contornar essa limitação por intermédio da imputação desse valor nos parâmetros da simulação sequencial Gaussiana, reduzindo a influência da tabela de covariância à mesma proporção da contribuição da estrutura de curto alcance adicionada. Dessa forma, priorizou-se a simplicidade do método aplicado na geração do BMEC. Para isso, utilizou-se o valor do efeito pepita estimado através dos variogramas verticais, uma vez que as distâncias dos *lags* correspondem aos intervalos amostrais e representam as menores distâncias entre pares de amostras passíveis de serem observados no conjunto de dados. A interface do *plugin* utilizada para imputação do efeito pepita é exibida pela Figura 8.

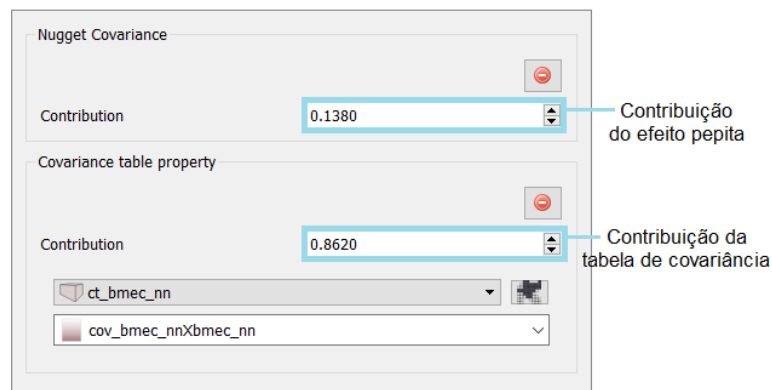


Figura 8. Interface do plugin utilizado na metodologia proposta para imputação do efeito pepita

Diferente da metodologia proposta nessa dissertação, em Kloeckner *et. al* (2019) a falta de representação do efeito pepita é contornada pela construção de um BMEC que carregue as informações de variabilidade de curto alcance, inseridas nos parâmetros de execução do algoritmo. Nesse caso, os autores propõem a obtenção de um modelo base a partir de um algoritmo de aprendizado de máquina denominado estimador *ensemble*, fundamentado na minimização do erro de validação cruzada (*k-fold cross-validation*). Os métodos *ensemble* funcionam através da combinação de um determinado algoritmo de aprendizado de máquina com um ou mais estimadores base e tem como finalidade melhorar a robustez da estimativa do

atributo de interesse e conseqüentemente a habilidade de reconhecer padrões no conjunto de dados (Kloeckner *et. al*, 2019). A técnica de estimativa *ensemble*, apesar de seu caráter empírico e elevado custo computacional, resulta em modelos base representativos do conjunto global e consiste em um método eficaz para incorporação do efeito pepita (Kloeckner *et. al*, 2019). No geral, as aplicações de métodos *ensemble* resultam em melhoras nas acuracidades de predições (Marmion *et. al*, 2009; Tadié *et. al*, 2015) e vêm sendo implementadas em diferentes campos de estudos como a ecologia (Araújo *et. al*, 2007), climatologia (Raftery *et. al*, 2005) e hidrologia (Goswami & O'Connor, 2007).

Ainda que os BMECs gerados pela aplicação da técnica permitam a extração de tabelas de covariância representativas do fenômeno (Kloeckner *et. al*, 2019), a metodologia é questionável quanto à sua complexidade de implementação. Visto que, uma das principais finalidades na utilização da tabela de covariância consiste na simplificação da tarefa de modelagem dos variogramas direcionais, é essencial a observação da eficiência do método a partir de modelos construídos utilizando algoritmos de simples aplicação, tal qual realizado via *nearest neighbour*. Contudo, para fins de contraste dos resultados, foram simulados cenários com base na tabela de covariância extraída de um BMEC construído via estimador *ensemble*, inserindo os mesmos valores de efeito pepita imputados anteriormente e respeitando as mesmas fronteiras do BMEC construído via *nearest neighbour* aplicado ao subconjunto de dados.

3.3.3 Comparação de desempenho

Por fim, o desempenho dos experimentos conduzidos foram contrastados com o conjunto de simulações obtidos a partir do modelo tradicional de variograma com o intuito de verificar a proximidade das realizações via tabela de covariância em comparação às referências estabelecidas no início do estudo. Foi selecionado um cenário para cada experimento conduzido com base na ordenação das realizações, de forma a comparar simulações que compartilham de um mesmo caminho aleatório percorrido pelo processo de simulação. A comparação entre as experimentações e o conjunto de referência foi realizada por intermédio de gráficos de dispersão, permitindo avaliar o grau de correlação entre os cenários resultantes.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados obtidos nos experimentos conduzidos utilizando a tabela de covariância (CT) como modelo de continuidade espacial. Os métodos em teste se diferenciam em dois aspectos principais: (a) ausência ou presença da contribuição do efeito pepita e (b) método de construção do modelo base (BMEC) utilizado para extração da tabela de covariância. Primeiramente, são introduzidos os testes sem imputação do efeito pepita, de forma a observar a resposta de aplicação direta do método, sem necessidade de estudo prévio para conhecimento das estruturas de curto alcance. Após, são apresentados os resultados referente à imputação do efeito pepita na simulação, utilizando as tabelas de covariância extraídas dos mesmos BMECs. Além disso, é apresentado o produto da simulação com a tabela de covariância extraída do BMEC construído via estimador *ensemble*, modelo que carrega a contribuição do efeito pepita em função do seu método de construção. Por fim, apresentadas e comentadas as comparações entre os resultados obtidos com os distintos modelos base e imputação explícita do efeito pepita.

4.1 Simulação via CT sem imputação do efeito pepita

Os testes primários foram conduzidos afim de observar o desempenho da metodologia aplicada de forma direta. Dessa maneira, a aplicação da modelagem da continuidade espacial via tabelas de covariância se aproxima da automatização, sendo necessário apenas definir e preencher os valores no *grid* que compõe o modelo base, cuja construção foi realizada com o método do vizinho mais próximo (NN).

Considerando que o aspecto chave da metodologia consiste na utilização de um BMEC que reproduza minimamente as características globais dos dados para extração de uma tabela de covariância representativa, o intuito dos experimentos primários consiste na observação do desempenho do método frente a diferentes modelo base. Sabendo que a realização da transformação rápida de Fourier exige um BMEC de formato regular e completamente preenchido, e em vista à disposição irregular das amostras na área de estudo, a obtenção de conjuntos representativos de toda população de amostras. Foram avaliados os desempenhos do método pela utilização de um modelo compreendendo todos os dados (NN global), caracterizado por maiores distorções e extrapolações de valores nas bordas do modelo, conforme ilustra a Figura 9, e outro utilizando um subconjunto de amostras (NN parcial), buscando atenuar a duplicação de valores no preenchimento do *grid*, tal qual exibido na Figura 10.

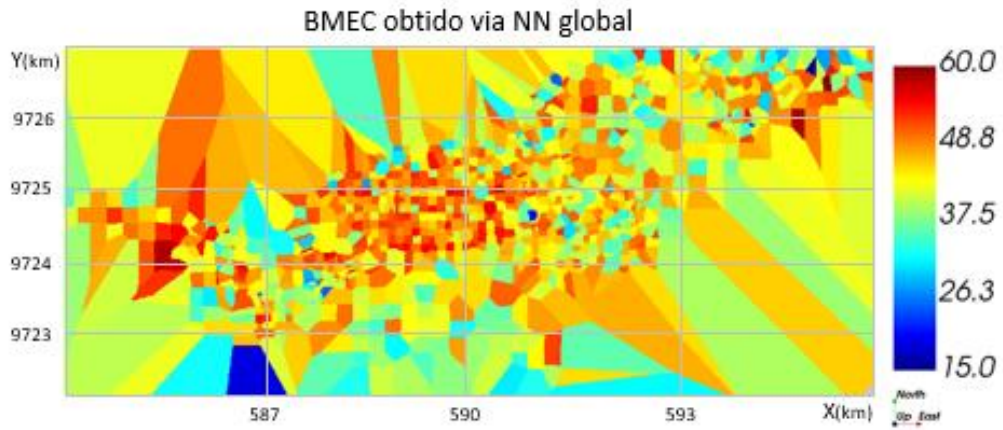


Figura 9. BMEC construído via *nearest neighbour* utilizando todas as amostras disponíveis (NN global)

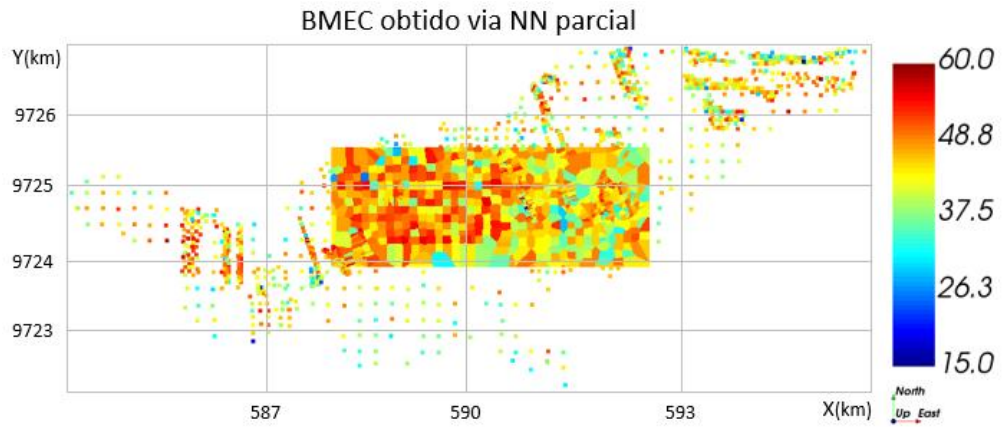


Figura 10. BMEC construído via *nearest neighbour* utilizando o subconjunto de amostras selecionado (NN parcial)

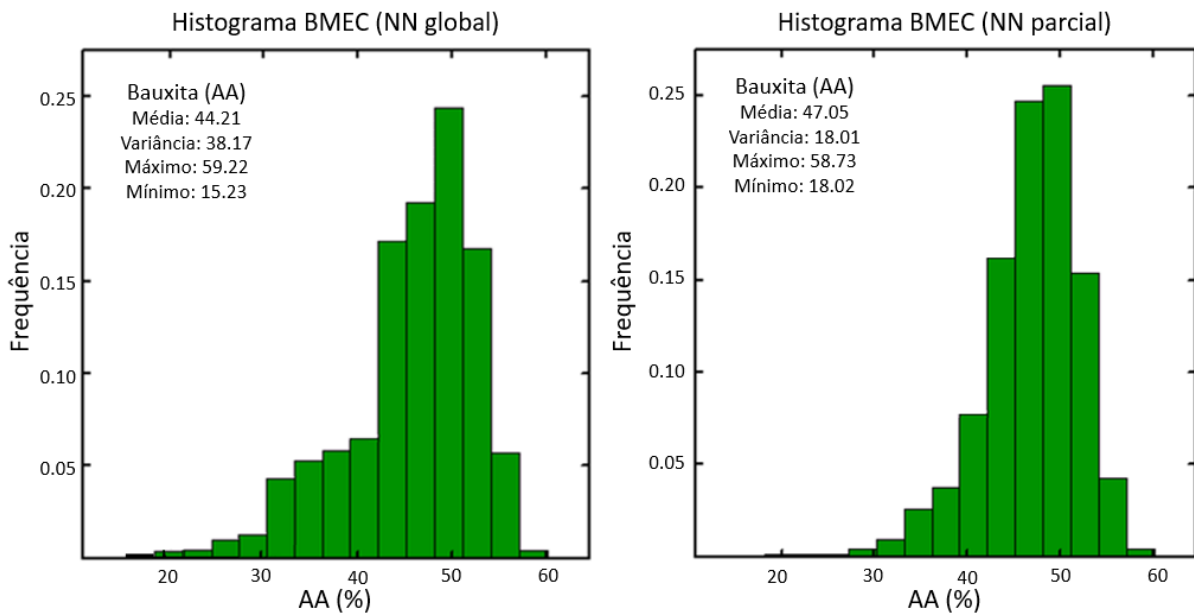


Figura 11. Histogramas dos BMECs construídos via NN global e parcial

Observa-se que o modelo base obtido utilizando o NN global apresenta excessivas extrapolações de valores nas bordas, tanto para as regiões não amostradas do grid quanto nas áreas com grandes espaçamentos amostrais. Por outro lado, o modelo construído a partir do subconjunto de amostras resulta em um BMEC mais representativo do fenômeno, tanto pela semelhança dos histogramas quanto por respeitar uma região do depósito totalmente amostrada com espaçamentos amostrais não tão amplos.

Aplicando as mesmas estratégias utilizadas na simulação sequencial Gaussiana via variogramas tradicionais, foram conduzidas simulações utilizando tabelas de covariância extraídas dos BMECs obtidos via NN global e parcial. A seguir, exibidos na Figura 12 e Figura 13, um dos cenários obtidos em cada uma das simulações permite uma apreciação visual do resultado. Os testes retraram a transição de um cenário excessivamente suavizado para uma realização significativamente mais próxima da referência.

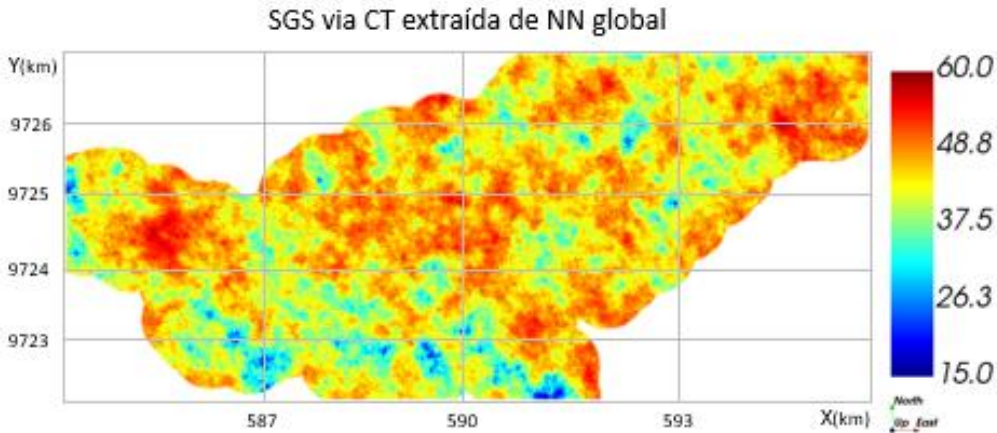


Figura 12. Cenário do conjunto de simulações com tabela de covariância extraída de NN global

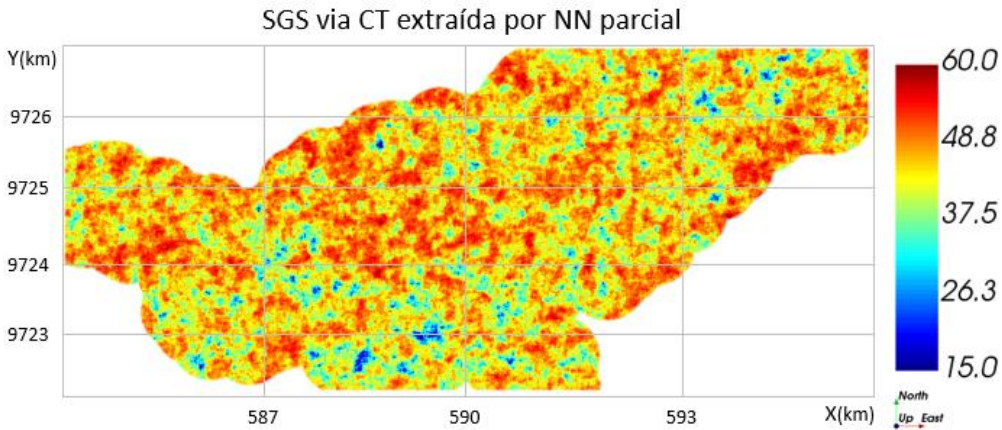


Figura 13. Cenário do conjunto de simulações com tabela de covariância extraída de NN parcial

Tal qual observado nas apreciações visuais, a suavização excessiva dos valores simulados utilizando o BMEC extraído do NN global pode ser verificada na análise dos variogramas dos cenários simulados, apresentados na Figura 14. Percebe-se que em ambos os testes não ocorre a reprodução das estruturas de curto alcance, aspecto de caráter imprescindível para a condução dos estudos geoestatísticos. Os variogramas referentes ao BMEC criado a partir do subconjunto, exibidos na Figura 15, se mostraram mais próximos da referência, especialmente no plano horizontal, indicando uma maior adequabilidade do BMEC. No plano vertical, apesar da baixa aderência em ambas realizações, se percebe uma redução na suavização pela utilização do subconjunto na construção do modelo base.

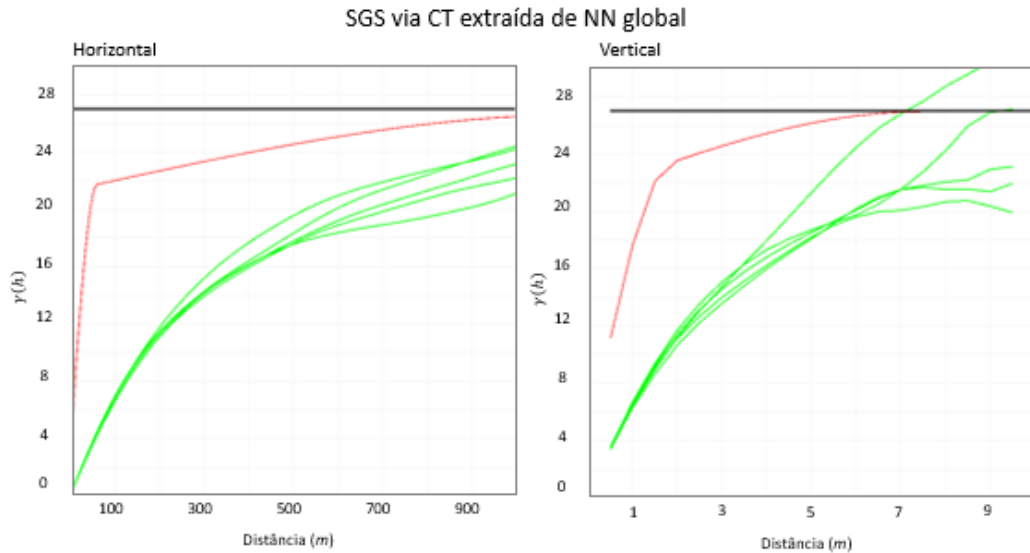


Figura 14. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de NN global

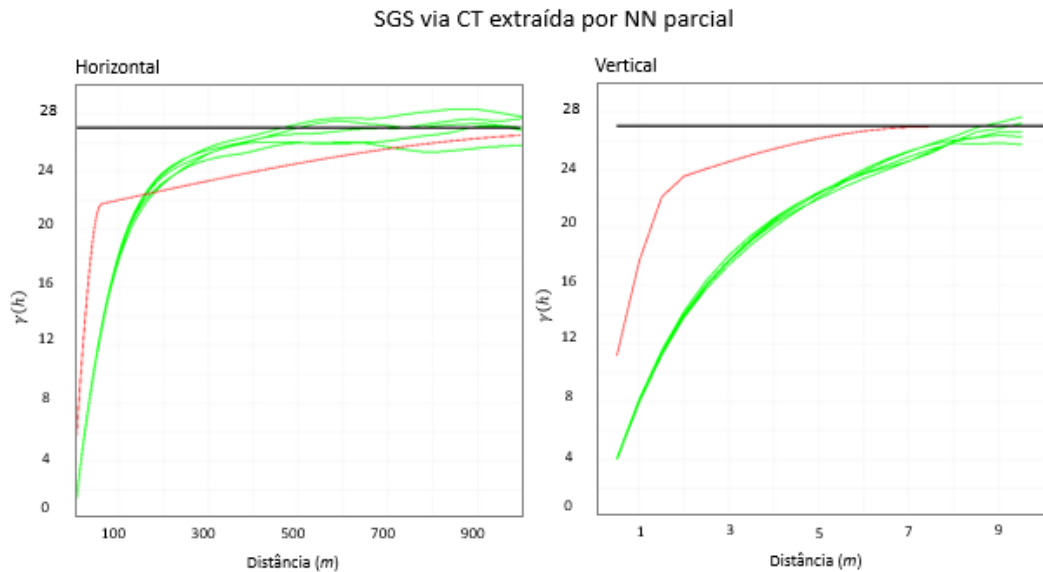


Figura 15. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de NN parcial

4.2 Simulação via CT com imputação do efeito pepita

Nessa etapa do estudo de caso, foram conduzidos experimentos considerando as estruturas de curto alcance. A contribuição do efeito pepita na variância do fenômeno foi estimada utilizando os variogramas *down-the-hole* durante a simulação dos cenários de referência. São apresentadas duas abordagens distintas para inclusão do efeito pepita: (a) pela redução da contribuição da tabela de covariância nos parâmetros do algoritmo de simulação e inclusão dessa mesma proporção a uma nova estrutura correspondente ao efeito pepita e (b) pela utilização de um BMEC que carrega a contribuição do efeito pepita em função do seu método de construção.

4.2.1 Efeito pepita como um parâmetro da simulação

Como estratégia de otimização dos testes de simulação com tabelas de covariância extraídas dos modelos base construídos pelo método do vizinho mais próximo, foi reduzida a contribuição da tabela de covariância e introduziu-se uma nova estrutura referente ao efeito pepita, de forma que a soma das contribuições resultasse em 100% da variância explicada do fenômeno. No procedimento de construção dos cenários de referência, utilizando os variogramas no sentido *down-the-hole*, estimou-se um efeito pepita de 13,8% da variância total. Nos experimentos, os variogramas foram construídos utilizando duas estruturas: a primeira correspondente ao efeito pepita, com a contribuição estimada, e a segunda referente à tabela de covariância, com 86,2% de contribuição. As tabelas de covariância utilizadas nas simulações apresentadas no item 4.1 foram novamente aplicadas na simulação sequencial Gaussiana, dessa vez seguindo a estratégia proposta para inclusão da estrutura de curto alcance estimada.

A solução se mostrou eficiente, resultando em melhoras expressivas nos resultados das simulações, principalmente em termos de reprodução do variograma de referência. A imputação do efeito pepita na simulação por tabela de covariância utilizando BMEC construído por NN global apresentou inexpressivas melhoras nos cenários simulados, não se mostrando suficiente para atenuar a excessiva suavização gerada pelo modelo. Por outro lado, a simulação via tabela de covariância extraída do BMEC NN parcial resultou em cenários significativamente mais próximos do conjunto de referência, tanto no aspecto visual dos cenários quanto na aderência dos histogramas e variogramas em relação às referências. A seguir, são elucidados os resultados de ambos experimentos, apresentando os cenários obtidos na Figura 16 e Figura 17, e as análises dos variogramas e histogramas das simulações em contraste com o conjunto de referência do estudo nas Figuras 18, Figura 19 e Figura 20.

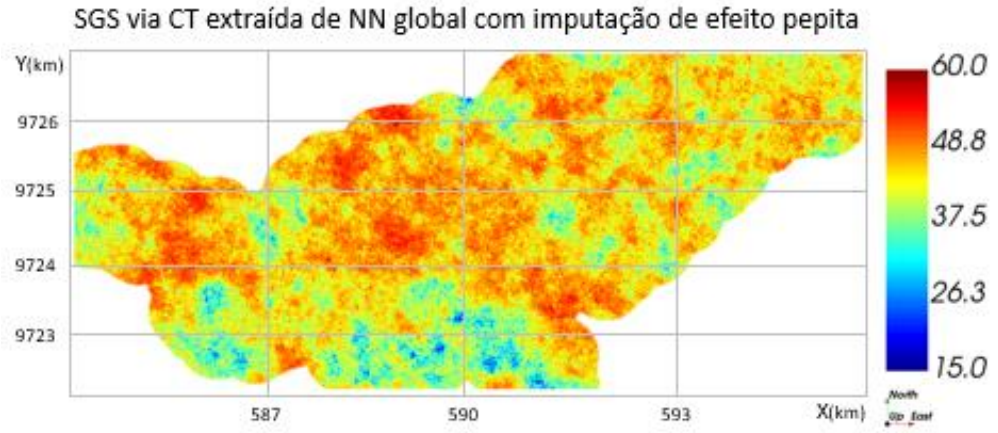


Figura 16. Cenário do conjunto de simulações com CT extraída de NN global com imputação do efeito pepita

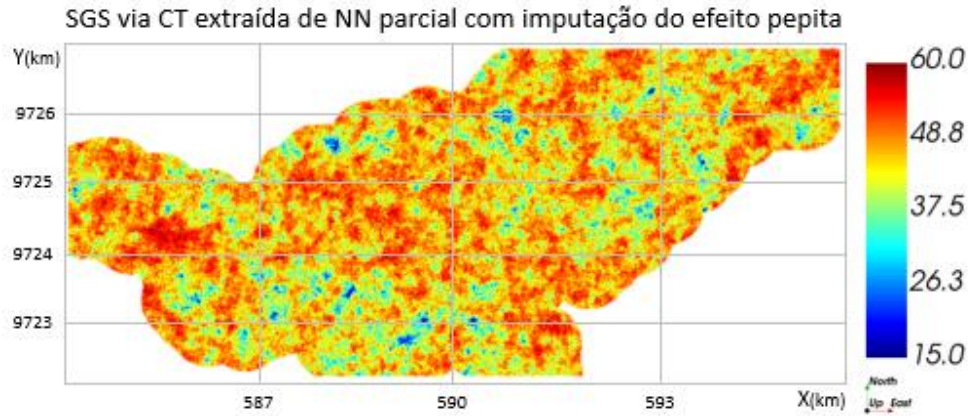


Figura 17. Cenário do conjunto de simulações com CT extraída de NN parcial com imputação do efeito pepita

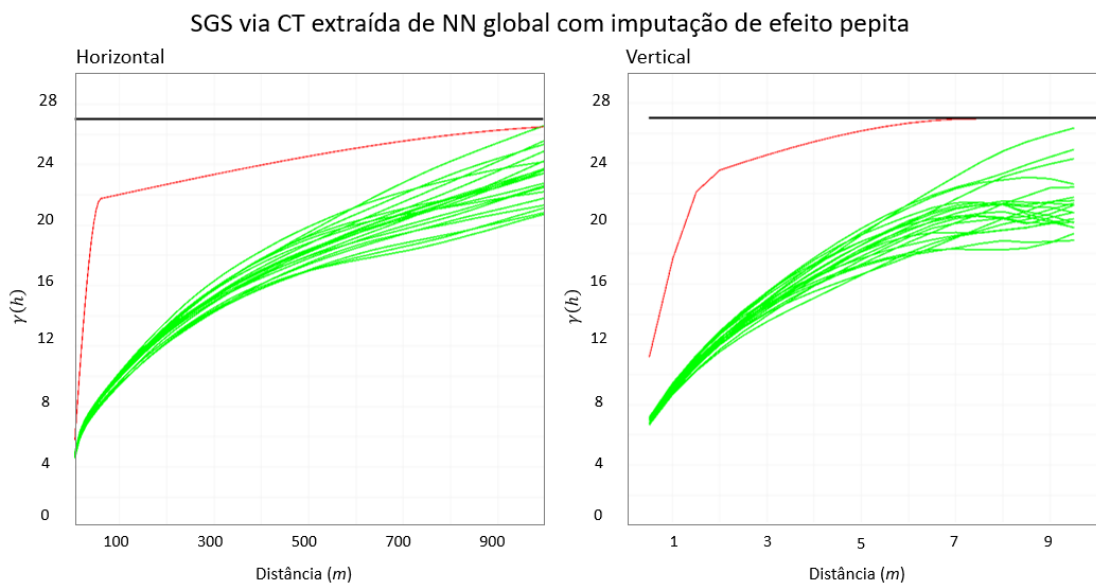


Figura 18. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de NN global com imputação do efeito pepita

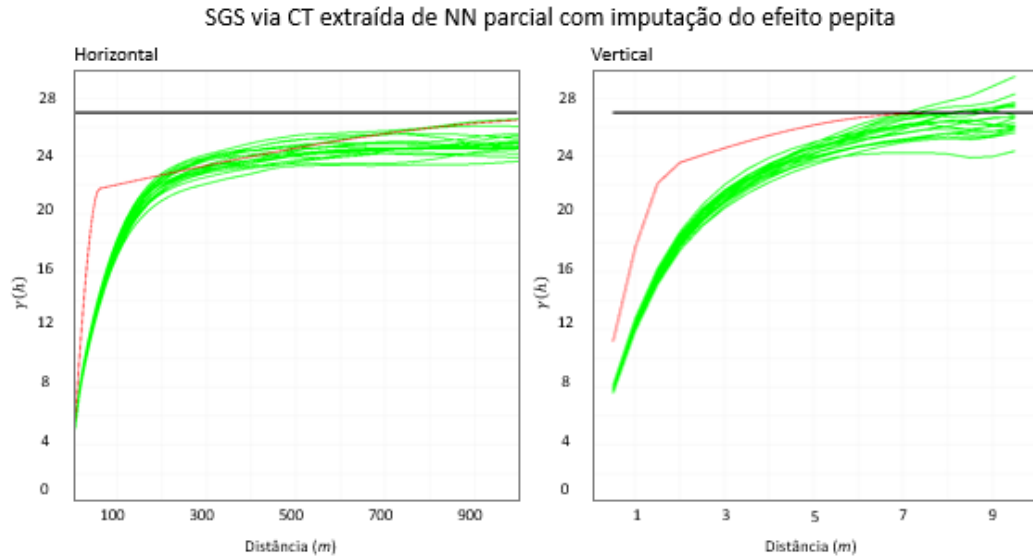


Figura 19. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de NN parcial com imputação do efeito pepita

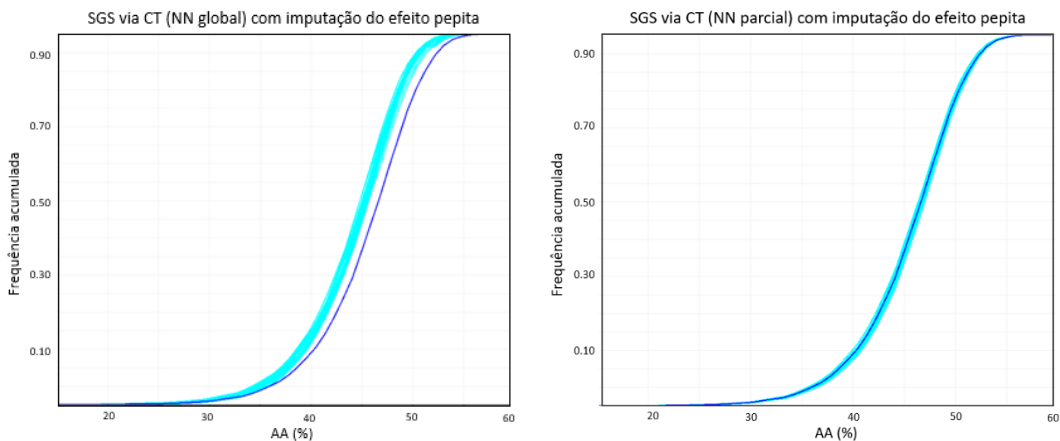


Figura 20. Análise de reprodução dos histogramas nos modelos simulados com CTs extraídas de NN global e parcial

Apesar do efeito pepita ter sido reproduzido pela imputação na simulação via CT extraída de NN global, o modelo de continuidade expresso pela tabela de covariância é claramente inadequado com variogramas excessivamente suavizados, resultando também em uma pobre reprodução dos histogramas. Mesmo esperando resultados insatisfatórios pela utilização de um BMEC tão distante do conjunto de dados, considerou-se o teste relevante uma vez que demonstra a importância da seleção de um subconjunto representativo para aplicação do método em *grids* irregulares. Na simulação via CT extraída do NN parcial, ainda que se observe uma certa suavização dos variogramas dos cenários produzidos, especialmente nos *lags* iniciais, se percebe uma melhora expressiva na reprodução dos variogramas das simulações em relação ao teste com o NN parcial sem a imputação do efeito pepita, além de uma boa aderência do histograma dos cenários em relação à referência.

4.2.2 Imputação do efeito pepita no BMEC via estimativa *ensemble*

Outra maneira de incluir as estruturas de curto alcance, conforme proposto em Kloeckner *et. al* (2019), consiste na extração da tabela de covariância a partir de um modelo base que carregue a variabilidade referente ao efeito pepita. A construção do BMEC foi realizada utilizando o algoritmo de estimativa *ensemble*, cuja execução permite a inserção da contribuição do efeito pepita como um parâmetro da estimativa, ao qual foi atribuído o valor de 13,8%, tal qual utilizado anteriormente. A metodologia de construção foi aplicada à mesma região selecionada para obtenção do BMEC via NN parcial com o intuito de comparar resultados obtidos a partir de um mesmo subconjunto de dados. Percebe-se que o BMEC criado a partir do estimador *ensemble* apresenta uma aparência semelhante a um cenário simulado, uma vez que o método trabalha de forma recursiva, com o intuito de minimizar o erro de validação cruzada dos blocos estimados.

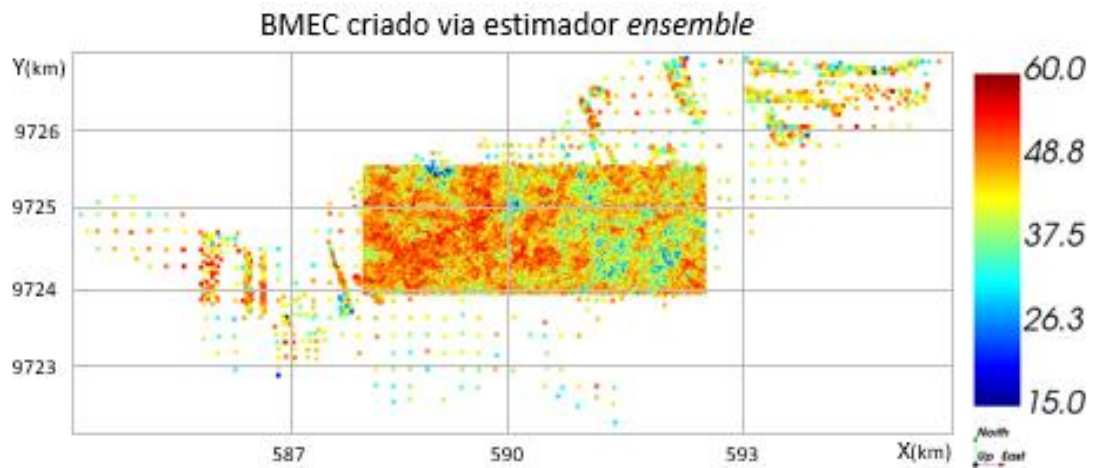


Figura 21. BMEC construído via estimador *ensemble*

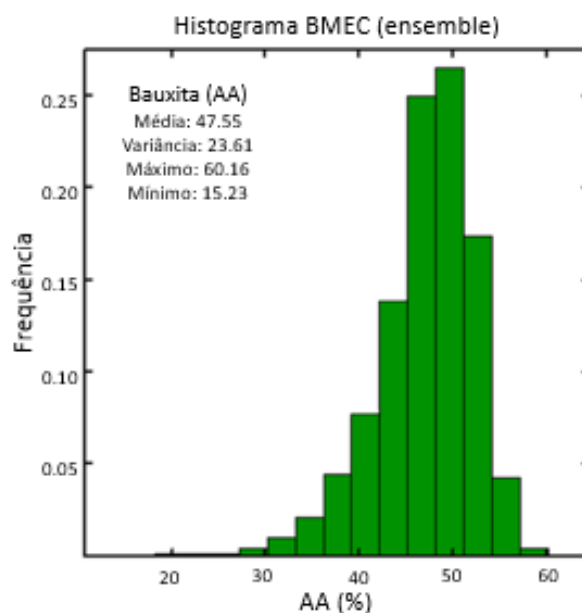


Figura 22. Histograma do BMEC construído via estimador *ensemble*

A principal finalidade da recursividade do método consiste no aperfeiçoamento do erro de validação, resultando numa maior robustez da estimativa do atributo e no reconhecimento de padrões no conjunto de dados (Kloeckner *et. al*, 2019). Os resultados da simulação realizada com a tabela de covariância extraída do modelo *ensemble* são apresentados a seguir.

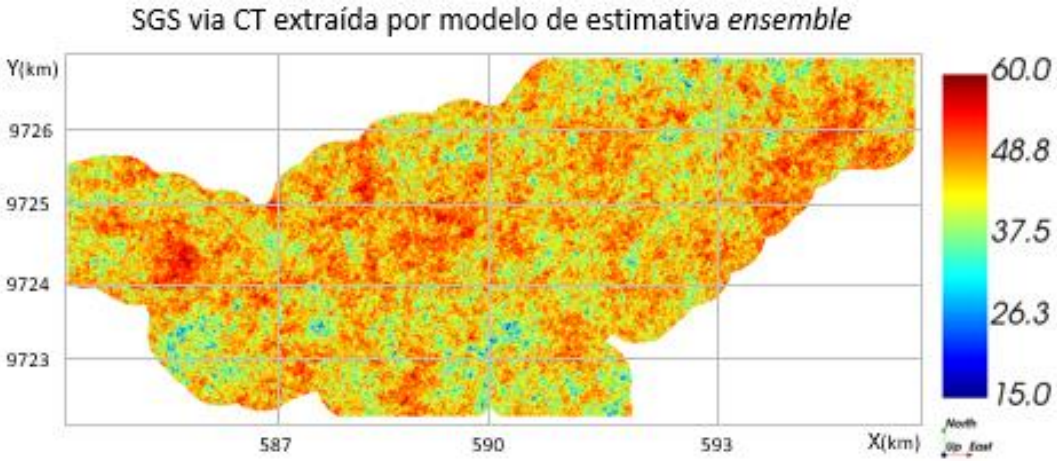


Figura 23. Cenário do conjunto de simulações via CT extraída de modelo *ensemble*

Em uma apreciação visual do cenário simulado ilustrado na Figura 23, é possível perceber uma significativa redução na suavização de informações no curto alcance, de forma a retratar cenários ainda mais semelhantes aos observados na simulação referência. Analisando os variogramas reproduzidos pelas simulações na Figura 24, observa-se essa atenuação pela melhor aderência ao modelo de referência nos *lags* iniciais, tanto no plano horizontal quanto vertical. Ainda, no plano vertical, tem-se uma aproximação expressiva dos variogramas à referência comparado ao desempenho observado via NN parcial.

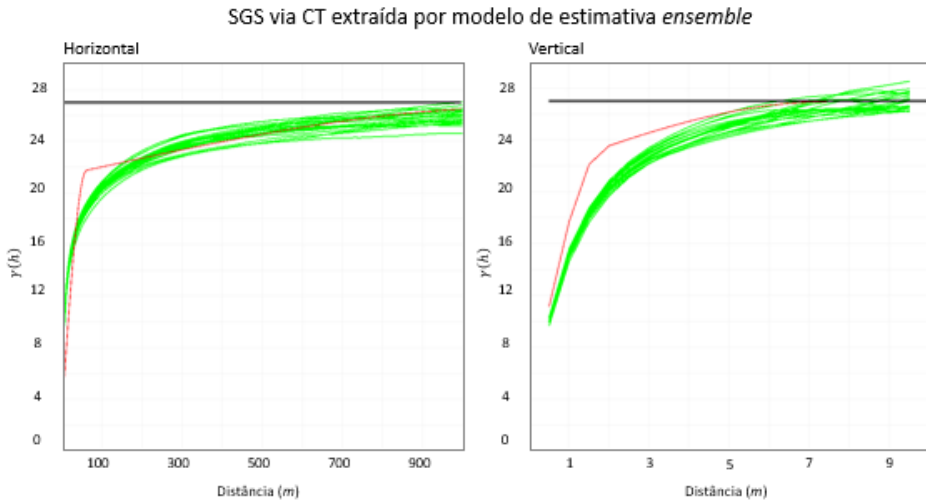


Figura 24. Análise de reprodução dos variogramas nos modelos simulados com CT extraída de modelo *ensemble*.

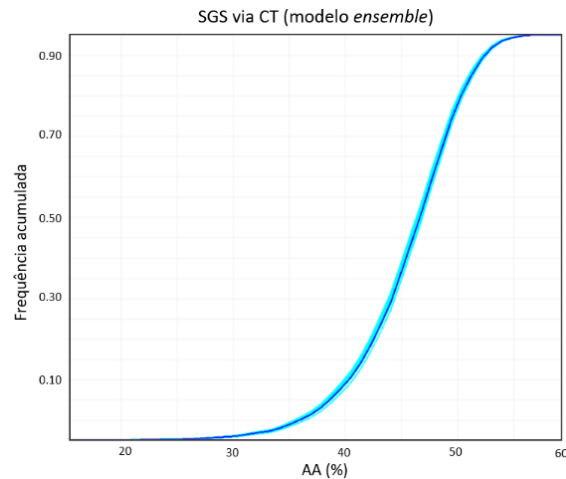


Figura 25. Análise de reprodução dos histogramas nos modelos simulados com CT extraída de modelo *ensemble*

Os histogramas das simulações ilustrados na Figura 25 indicam uma ótima reprodução da distribuição de probabilidade dos dados, tal qual obteve-se no experimento utilizando a tabela de covariância extraída do NN parcial.

4.3 Comparação de desempenhos

A seguir, são apresentadas as comparações dos desempenhos das tabelas de covariância, obtidas via NN parcial e *ensemble*, contrastando-as aos produtos da simulação referência realizadas com variogramas tradicionais. Foi selecionado um cenário de cada experimento, com base na ordenação das realizações, de forma a comparar simulações que compartilham de um mesmo caminho randômico percorrido no processo de simulação. A comparação entre as experimentações e o conjunto de referência foi realizada por intermédio de gráficos de dispersão, avaliando o grau de correlação entre os cenários resultantes.

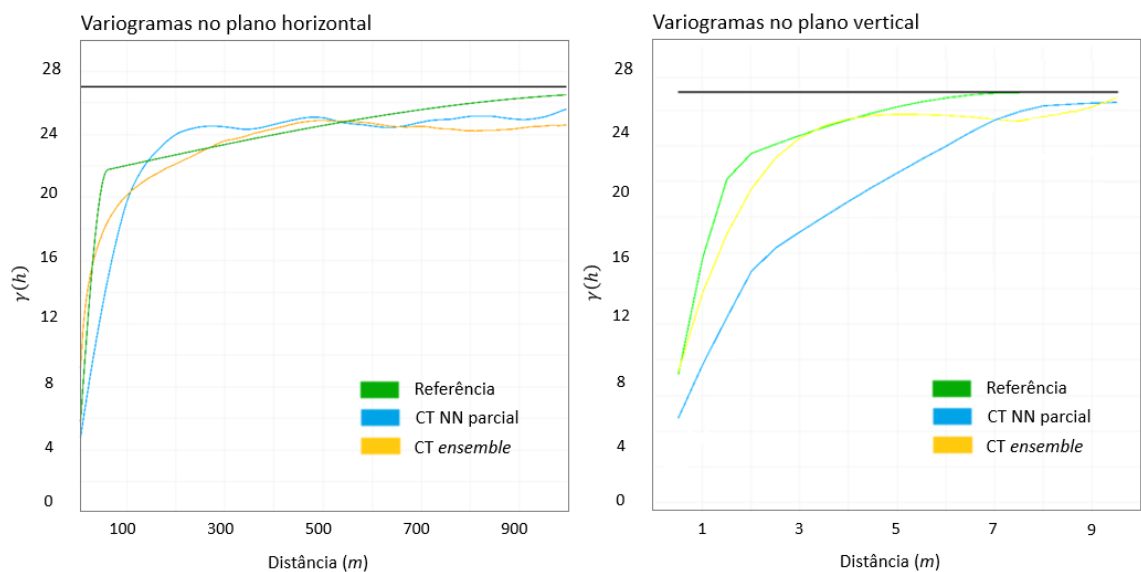


Figura 26. Comparação dos modelos de variogramas expressos pelas tabelas de covariância

Ao observar as realizações obtidas via tabela de covariância sem imputação do efeito pepita, conforme ilustra a Figura 27, apesar das discrepâncias na reprodução dos variogramas, se observa a semelhança das médias e variâncias nos cenários, com um grau de correlação de aproximadamente 82% com o conjunto de referência.

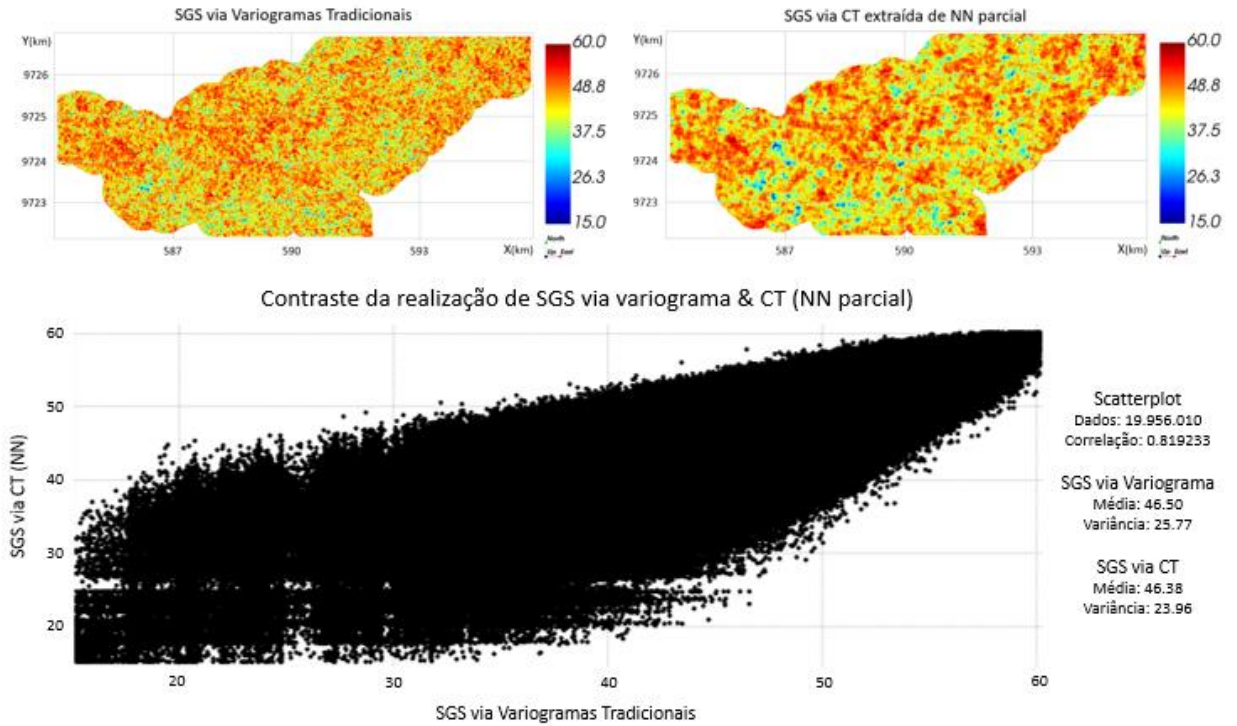


Figura 27. Contraste entre referência e simulação via CT (NN parcial) sem imputação do efeito pepita

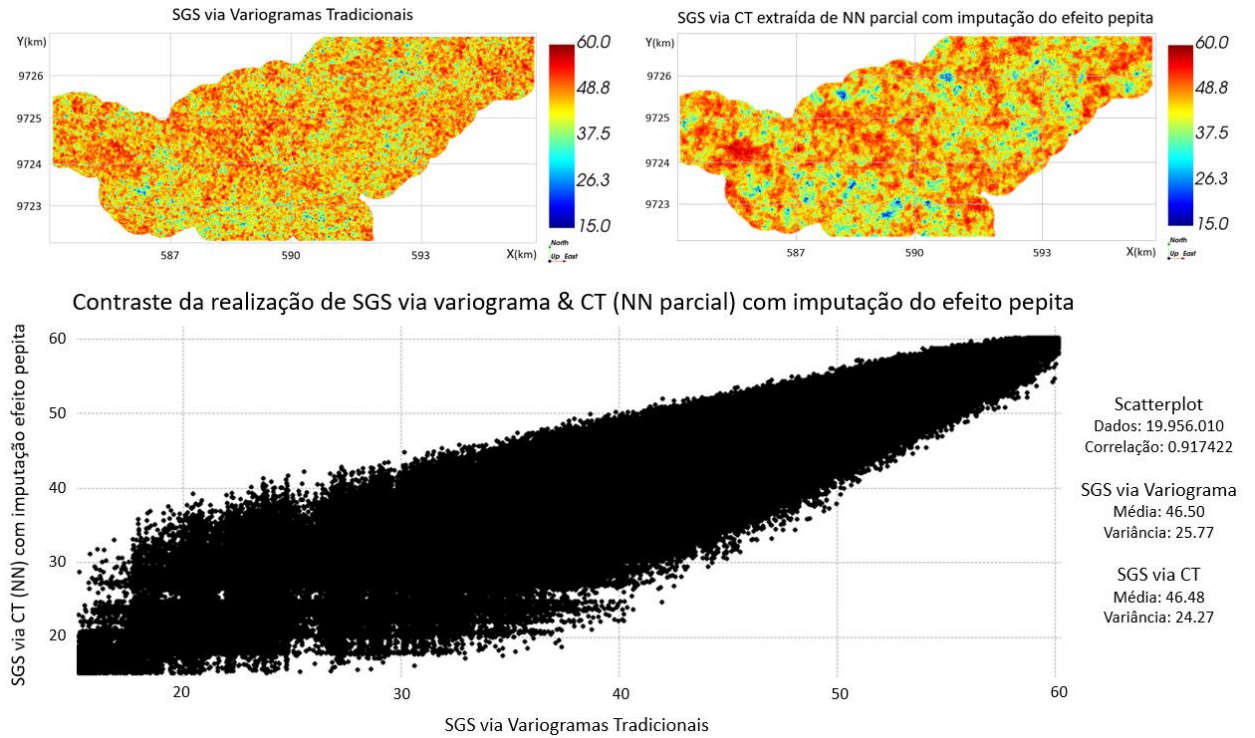


Figura 28. Contraste entre referência e simulação via CT (NN parcial) com imputação do efeito pepita

A imputação do efeito pepita na simulação representou uma melhora expressiva na reprodução dos cenários. O aumento do grau de correlação com o conjunto referência para 92% (+10%) e a correção dos variogramas reproduzidos indicam o ganho na eficiência pela aplicação da metodologia proposta para inclusão das estruturas de curto alcance. A principal desvantagem na utilização de um método simples para construção do BMEC consiste na duplicação excessiva de valores nos nós do *grid* existentes entre as amostras. Como consequência, se observa uma suavização indesejável nos variogramas no que diz respeito aos primeiros 200 *m*, aspecto percebido também na apreciação visual do cenário resultante, ilustrados na Figura 28.

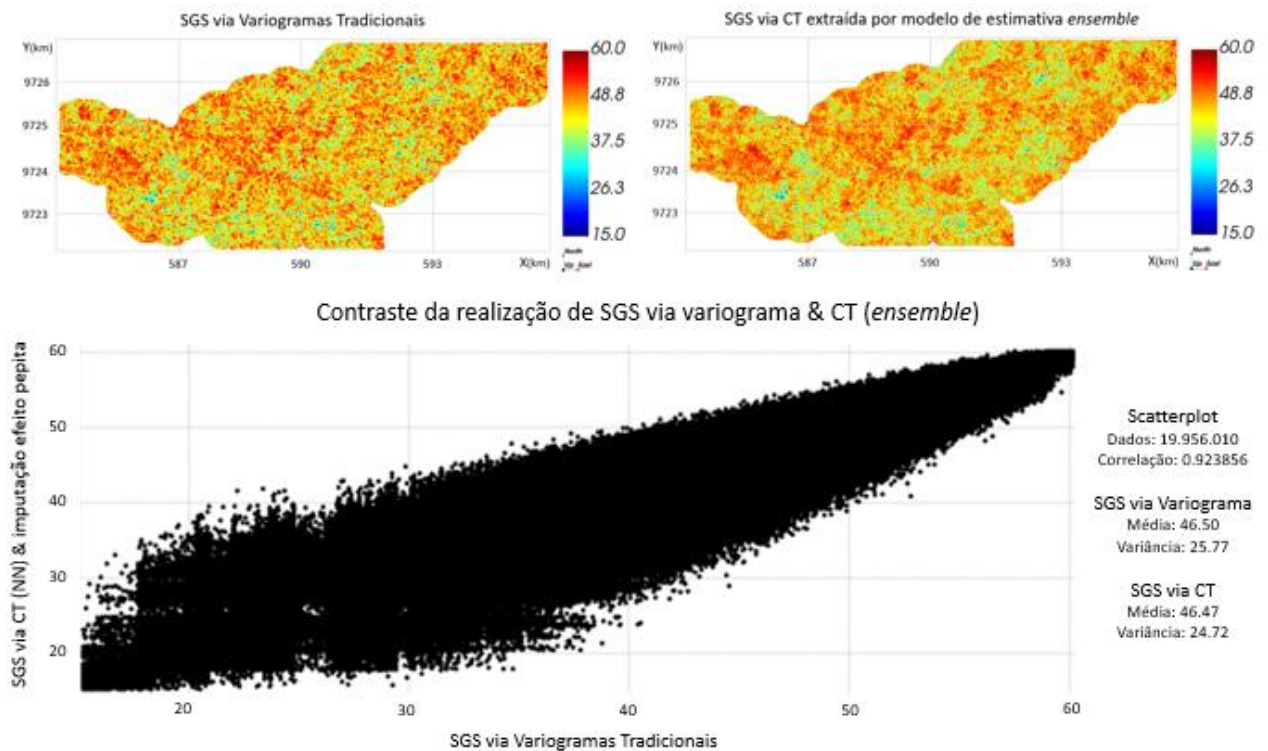


Figura 29. Contraste entre referência e simulação via CT (*ensemble*)

Observando na Figura 30 a comparação do cenário de simulação via tabela de covariância extraída do modelo *ensemble*, nota-se que o grau de similitude dos valores obtidos em relação à simulação referência permanece 92%. Contudo, no aspecto visual percebe-se um comportamento bastante semelhante à realização de referência, retratando de forma clara a redução da suavização dos *lags* iniciais observada nos variogramas. A diferença entre os resultados da aplicação dos modelos *ensemble* e NN parcial com imputação do efeito pepita, apesar de indicar uma melhora na reprodução dos variogramas de referência pela aplicação do *ensemble*, não aparenta representar um ganho de eficiência expressivo a ponto de justificar a complexidade de implementação do estimador.

5 CONCLUSÕES

Essa seção apresenta as considerações finais relacionados ao estudo de caso, de forma a comentar os resultados obtidos a partir dos experimentos e análises comparativas e contrastá-los em relação à meta inicialmente proposta. Para isso, recapitulam-se as principais fundamentações do desenvolvimento dessa dissertação e são apresentados um breve resumo dos resultados mais relevantes ao tópico, além de uma discussão em torno do cumprimento dos objetivos específicos definidos. Ainda, são trazidas recomendações a respeito da aplicação da metodologia e sugestões para trabalhos futuros.

5.1 Considerações finais

Sabe-se que a prática mais comumente utilizada para caracterização de continuidade espacial usadas em estimativas ou simulações geoestatísticas se dá pelo ajuste de funções permissíveis a partir de variogramas experimentais observados em diferentes direções. Ainda que tal abordagem represente um mecanismo eficiente para obtenção dos semivariogramas, não constitui a única abordagem possível e não necessariamente representa a melhor forma de fazê-lo. Significativos avanços referentes à automatização dos procedimentos de modelagem de funções de continuidade espacial vêm sendo alcançados por diferentes autores pela utilização das transformações rápidas de Fourier (FFT) e manipulação dos conjuntos de dados no domínio de frequências, ainda que se trate de um método em evolução. Com a finalidade aprofundar os conhecimentos do mecanismos semiautomáticos de mapeamento de continuidade espacial, essa dissertação se propôs a investigar a metodologia das tabelas de covariância extraídas via FFT de modelos base conceituais, observando seu desempenho em experimentos de simulação geoestatística aplicados a um depósito de bauxita.

5.1.1 Fundamentação do tema de dissertação

A definição de variogramas exige inicialmente a inserção de parâmetros de busca para formação de pares amostrais em diferentes *lags* h e direções. Esses aspectos compõem o variograma experimental e permitem uma apreciação das dissimilaridades dos valores amostrais em função dos valores absolutos de h ao longo das direções observadas. Sua aplicação nos procedimentos de estimativa e simulação se dá pelo ajuste de uma função teórica aos pontos experimentais, de forma a possibilitar a identificação do elipsóide de anisotropia por intermédio das direções principais de continuidade. As informações referentes às estruturas que compõem essa função teórica fornecem os pesos atribuídos às amostras utilizadas na construção dos sistemas de krigagem, presentes em muitos procedimentos de estimativa e simulação.

A principal finalidade da aplicação de tabelas de covariância como modelos de continuidade consiste na simplificação da tarefa de modelagem dos variogramas, dispensando a definição de parâmetros de busca e ajustes de funções. As tabelas de covariância evidenciam valores para todas as distâncias e direções e são passíveis de serem aplicadas diretamente em procedimentos geoestatísticos. A execução da FFT exige apenas um modelo base (BMEC) conceitual representativo do conjunto de dados em estudo, devendo este respeitar as condições de (i) regularidade no formato do *grid* e (ii) preenchimento completo dos nós para realização da transformada.

Esse estudo teve como principal enfoque aprofundar o conhecimento da metodologia quanto à sua eficiência e limitações frente à qualidade do BMEC utilizado na extração da tabela e manipulação das estruturas de curto alcance (efeito pepita), uma vez que se trata de um método em evolução. As investigações foram realizadas através da observação e análise de simulações sequenciais Gaussianas via tabelas de covariância e semivariogramas direcionais. O estudo de caso foi feito através de amostragens referentes a um depósito tabular de bauxita, cujas dimensões são caracterizadas por grandes extensões horizontais e uma inexpressiva amplitude vertical.

5.1.2 Sumário dos resultados

Os resultados das simulações evidenciam a importância do modelo base utilizado na extração da tabela de covariância, deixando claro que a representatividade do modelo em relação ao conjunto de dados do depósito está diretamente relacionado à qualidade dos produtos finais. À vista disso, salienta-se a importância do espaçamento amostral na construção do modelo base, uma vez que a densidade amostral determina o nível de extrapolação de valores para preenchimento do *grid*. Uma vez que a aplicação de métodos simples no procedimento de construção do BMEC compõe um aspecto chave em termos de simplificação do mapeamento de continuidade espacial, se considera indispensável a escolha de um subconjunto representativo da região em estudo, sobretudo em áreas irregularmente amostradas.

A proposta de observação e aproximação da contribuição do efeito pepita para imputação como uma nova estrutura de variograma se mostrou um mecanismo eficiente. A ideia consiste em estimar a contribuição da estrutura de curto alcance *a priori* e adicioná-la junto à tabela de covariância, cuja contribuição é reduzida para que a soma das variâncias explicadas por ambas seja 100%. Dessa forma, se obteve uma melhora expressiva tanto na reprodução dos variogramas pelos cenários simulados quanto no grau de correlação com o cenário de referência.

5.1.3 Cumprimento dos objetivos específicos propostos

Frente aos resultados obtidos através do estudo de caso, acredita-se ter cumprido os objetivos específicos propostos inicialmente no item 1.3, na medida em que:

- i. foi conduzido o estudo de caso em depósito de bauxita, caracterizado por um largo espaçamento entre as amostras, com apreciações dos produtos quanto à qualidade das simulações com a tabela de covariância e contraste com a referência estabelecida via simulação com variogramas direcionais;
- ii. a influência que o modelo base utilizado na extração da covariância exerce na reprodução da continuidade espacial do fenômeno foi observada em grande amplitude, desde a utilização de modelos com alto nível de extrapolação até modelos com elevado nível de detalhe, permitindo uma boa análise de desempenho da metodologia;
- iii. o comportamento das estruturas de curto alcance na metodologia foi investigado e se propôs uma metodologia de imputação do efeito pepita com resultados bastante satisfatórios, permitindo a aplicação da tabela de covariância sem a necessidade de implementação de algoritmos mais complexos para construção do modelo base.

5.2 Recomendações para trabalhos futuros

Conforme apresentado no item 1.2, o desenvolvimento dessa dissertação teve como meta aprofundar os conhecimentos das metodologias semiautomáticas de mapeamento da continuidade espacial pela investigação do desempenho das tabelas de covariância em procedimentos de simulação. Essa seção conclui os estudos com a apresentação de uma linha geral de raciocínio para implementação da tabela de covariância em estudo geoestatísticos, de acordo com os princípios observados nas bibliografias e nos resultados dos experimentos, e lista potenciais estudos a serem desenvolvidos utilizando a tabela de covariância como modelo de continuidade espacial.

5.2.1 Principais aspectos para implementação da tabela de covariância

É válido salientar que, nos estudos geoestatísticos, a utilização da tabela de covariância não isenta a realização dos passos anteriores a modelagem de continuidade espacial, como a revisão e tratamento do banco de dados, identificação de misturas de populações e domínios estacionários e agrupamento de amostragens. A obtenção da tabela de covariância pela execução da FFT aplicada aos modelos base é realizada de forma inteiramente automática. A aplicação da FFT exige modelos construídos em *grids* regulares e completamente preenchidos,

e por isso torna-se indispensável a definição de um BMEC a partir de um subconjunto das amostras representativo da coleção completa de dados.

O modelo base pode ser construído utilizando uma gama de métodos de distintas complexidades. O estudo explicita a possibilidade de se obter resultados satisfatórios pela aplicação de BMECs construídos utilizando metodologias simples, como a estimativa por vizinho mais próximo, desde que não apresente excessivas extrapolações nas bordas do domínio. Todavia, quanto maior o nível de detalhes do modelo base utilizado na extração da tabela de covariância, mais robustos são os modelos gerados nas estimativas ou simulações.

Uma vez extraída a tabela de covariância, é possível inseri-la como uma estrutura de continuidade espacial, de forma que o algoritmo de estimativa ou simulação leia os valores de covariância diretamente da tabela, evidenciados para todas as distâncias e direções. Contudo, deve-se atentar para o efeito pepita, visto que os algoritmos simples empregados na construção do BMEC não levam em consideração a contribuição que as estruturas de curto alcance exercem na variância explicada do fenômeno. Portanto, sugere-se um estudo *a priori* do efeito pepita de forma a aproximar sua contribuição, análise que pode ser realizada via variogramas *down-the-hole*, usando duplicatas dos processos QAQC, comparação com depósitos análogos, ou qualquer outra abordagem preferida pelo geomodelador. O efeito pepita é adicionado ao modelo de continuidade espacial como uma nova estrutura correspondente à proporção da variância observada. A contribuição da tabela de covariância é determinada a partir do conhecimento do efeito pepita, de forma que a soma das duas resulte em 100% da variância do fenômeno.

5.2.2 Potenciais desenvolvimento para trabalhos futuros

À partir dos resultados obtidos e tendo em vista os principais obstáculos enfrentados no desenvolvimento dessa dissertação, são sugeridos alguns aspectos que possam compor trabalhos futuros de forma a contribuir na evolução da metodologia da tabela de covariância e consequentemente na obtenção de resultados mais robustos:

- i. realizar estudos em diferentes tipologias de depósitos, de forma a observar o desempenho do método em ambientes variados diferentes de formações tabulares;
- ii. estudar a utilização direta da densidade espectral em procedimentos de simulação espectral como método integral de Fourier;
- iii. aprofundar os conhecimentos na aplicação da tabela de covariância em ambientes multivariados, estendendo a metodologia para caracterização de covariâncias cruzadas;

- iv. adaptar os procedimentos de geração dos gráficos de acuracidade permitindo a utilização de um procedimento único para análise da qualidade dos modelos simulados.
- v. estudar a eficiência da tabela de covariância como modelo de variograma experimental aplicada à procedimentos de ajuste automático;
- vi. aplicar a metodologia de extração da tabela a partir de diversos modelos base compreendendo diferentes regiões ao longo da área de interesse, corrigindo as porções que se sobrepõem;
- vii. investigar a qualidade de modelos de estimativa de curto prazo obtidos pela aplicação da metodologia;

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARAÚJO, M. B. & NEW, M. 2007. *Ensemble forecasting of species distributions*. Trends in Ecology & Evolution, Call Press, v. 22, p. 42-47.
- DEUTSCH, C.V. & JOURNEL, A.G. 1997. *GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide*, Oxford University Press, New York, USA, 340p.
- DIRICHLET, G. L. 1850. *On the reduction of positive quadratic forms with three indefinite integers*. Journal of Pure and Applied Mathematics, De Gruyter, Berlim, Germany, v. 40, p. 209-227.
- GOOVAERTS, P. 1997. *Geostatistics for Natural Resources Estimation*, Oxford University Press, New York, USA, 455p.
- GOOVAERTS, P. 2001. *Geostatistical modelling of uncertainty in soil science*, Geoderma, Elsevier, v. 103, p. 3-26.
- GOSWAMI, M. & O'CONNOR, M. 2007. *Real-time flow forecasting in the absence of quantitative precipitation forecasts: a multi-model approach*, Journal of Hydrology, Elsevier, v. 334, n. 1-2, p. 125-140.
- ISAAKS, E. H. 1990. *The application of Monte Carlo Methods to the Analysis of Spatially Correlated Data*, PhD Thesis. Department of Applied Earth Sciences, Stanford University, 213p.
- ISAAKS, E. H. & SRIVASTAVA, R. 1989. *Introduction to Applied Geostatistics*, Oxford University Press, New York, USA, 600p.
- JOURNEL, A. G. & HUIJBREGTS, C. J. 1978. *Mining Geostatistics*, Academic Press, London, UK, 600p.
- KLOECKNER, J. 2018. *Tabela de covariância: um mapeamento rápido e automático de continuidade especial*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGE3M), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 70p.
- KLOECKNER, J., MACHADO, P. L., RODRIGUES, A. L. & COSTA, J. F. C. L. 2019. *Covariance table: a fast automatic spatial continuity mapping*. Computers & Geosciences, Elsevier, v.130, p. 94-104.
- MARMION, M., PARVIAINEN, M., LUOTO, M., HEIKKINEN, R. K. & THUILLER, W. 2009. *Evaluation of consensus methods in predictive species distribution modelling*, Diversity and Distributions, Wiley-Blackwell, v.15, n. 1, p. 59-69.
- MARCOTTE, D. 1996. *Fast variogram computation with fft*. Computers & Geosciences, Elsevier, v.22, n.10, p. 1175-1186.
- PYRCS, M. J. & DEUTSCH, C. V. 2006. *Semivariogram models based on geometric offsets*. Mathematical Geology, Springer, v. 38, n. 4, p. 475-488.
- RAFTERY, A. E., GNEITING, T., BALABDAOUI, F. & POLAKOWSKI, M. 2005. *Using Bayesian model averaging to calibrate forecast ensembles*, Monthly Weather Review, American Meteorological Society, v. 133, n. 5, p. 1155-1174.

- SINCLAIR, A.J. & BLACKWELL, G.H. 2004. *Applied Mineral Inventory Estimation*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 346p.
- TADIÉ, J. M., ILIÉ, V. & BIRAUD, S. 2015. *Examination os geostatistical and machine-learning techniques as interpolators in anisotropic atmospheric environments*, Atmospheric Environment, Elsevier, v. 111, p. 28-38.
- WACKERNAGEL, H. 1998. *Multivariate Geostatistics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, USA, 291p.
- YAO, T. 1998. *Automatic covariance modeling and conditional spectral simulation with Fast Fourier Transform*. PhD Thesis. Department of Geological & Environmental Studies, Stanford University. 173p.
- YAO, T. 2000. *Note and corrections to "Automatic modeling of (cross) covariance tables using Fast Fourier Transform"*. Mathematical Geology, Springer, v. 32, n. 1, p. 147-148.
- YAO, T. & JOURNEL, A.G. 1998. *Automatic modeling of (cross) covariance tables using Fast Fourier Transform"*. Mathematical Geology, Springer, v. 30, n. 6, p. 589-615.