

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE DE ESTRUTURAS USANDO OTIMIZAÇÃO
TOPOLOGICA E CRITÉRIO DE ÓTIMO

por

Carlos Henrique Possebon

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, novembro de 2020

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO

Possebon, Carlos Henrique
DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL
PARA MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE DE ESTRUTURAS USANDO
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E CRITÉRIO DE ÓTIMO / Carlos
Henrique Possebon. -- 2020.

32 f.

Orientador: Daniel Milbrath De Leon.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2020.

1. Otimização Topológica. 2. Otimização Estrutural.
3. Método OC. 4. SIMP. 5. Filtro de Densidade. I.
Milbrath De Leon, Daniel, orient. II. Título.

Carlos Henrique Possebon

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL PARA
MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE DE ESTRUTURAS USANDO OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA E CRITÉRIO DE ÓTIMO

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Mario Roland Sobczyk Sobrinho
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Mecânica dos Sólidos**

Orientador: Prof. Dr. Daniel Milbrath De Leon

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Daniel Milbrath De Leon

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler

Prof. Dr. Edson Hikaro Aseka

Porto Alegre, novembro de 2020

DEDICATÓRIA

Dedicado ao meu pai e minha mãe, pelo apoio incondicional e pelo exemplo de dedicação que me trouxe até aqui.

AGRADECIMENTOS

Aos colegas e professores da UFRGS e LTH, pelos ensinamentos que tornam a apresentação deste trabalho possível.

A RS Racing UFRGS e OTMZA, pela oportunidade de aplicar meus conhecimentos na prática.

A Braskem S.A. e Stihl Ferramentas Motorizadas Ltda., pela experiência profissional e ensinamentos da indústria.

“A arte da estrutura é onde colocar os buracos”

Robert Le Ricolais (1884 – 1977)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO – 2020

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL
PARA MINIMIZAÇÃO DA FLEXIBILIDADE DE ESTRUTURAS USANDO
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA E CRITÉRIO DE ÓTIMO

Possebon, Carlos Henrique
chpossebon01@gmail.com

Resumo. Este trabalho mostra o equacionamento e teste de uma ferramenta de otimização topológica baseada no método Critério de Ótimo (OC) para minimização de flexibilidade em estruturas bidimensionais isotrópicas e sujeitas a uma restrição de volume. A ferramenta é construída no software MATLAB (versão estudantil) e emprega o método de Material Sólido Isotrópico com Penalização (SIMP) para penalizar densidades intermediárias, além de utilizar o clássico filtro de densidades básico para tratar instabilidades numéricas inerentes ao método OC. Para validação do algoritmo, é utilizado o problema clássico da viga biapoada, que já foi extensivamente coberto pela literatura e tem solução conhecida. O trabalho realiza a análise de convergência da malha e verifica a influência da variação de parâmetros como grau de penalização do método SIMP, raio do filtro de densidades e parâmetro α da variável auxiliar utilizada na linearização do método OC. Por fim, a ferramenta é validada com outras estruturas cuja topologia ótima é conhecida, como o problema clássico da viga engastada e uma estrutura ótima do tipo Michell. Em todos os casos, a ferramenta mostrou-se capaz de aproximar a topologia otimizada esperada.

Palavras-chave: Otimização Topológica, Otimização Estrutural, Método OC, SIMP, Filtro de Densidade

DEVELOPMENT OF A COMPUTACIONAL TOOL FOR TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR COMPLIANCE MINIMIZATION ON STRUCTURES THROUGH TOPOLOGY OPTIMIZATION AND THE OPTIMALITY CRITERIA METHOD

Abstract. This paper shows the equations and tests for a topology optimization tool based on the Optimality Criteria Method (OC) for compliance minimization on 2D isotropic structures subject to a volume constraint. The tool is built in the software MATLAB (student version) and employs the Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) method for penalizing intermediate densities, in addition to using the classic basic density filter to treat numerical instabilities inherent to the OC method. To validate the algorithm, the classic simply supported beam problem is used due to its extensive coverage by literature and its solution being already known. This paper performs the mesh convergence analysis and verifies the influence of the variation of parameters such as the degree of penalization used on the SIMP method, density filter radius and auxiliary variable α parameter used for linearization in the OC method. Finally, the tool is validated with other structures whose optimal topology is already known, such as the classic cantilever problem and an optimal Michell type structure. In all cases, the tool proved to be capable of approximating the expected optimal topology.

Keywords: Topology Optimization, Structural Optimization, OC Method, SIMP, Density Filtering

NOMEMCLATURA

Símbolos

\mathbf{a}	Vetor contendo a área de todos os elementos da malha	$[m^2]$
a	Área de um elemento qualquer	$[m^2]$
b_j^k	Agregado da aproximação da função objetivo para cada elemento	
\mathbf{D}	Matriz constitutiva da viga	$[N m^{-2}]$
E	Módulo de Elasticidade do material	$[N m^{-2}]$
\mathbf{e}	Coordenada espacial de um elemento qualquer	$[m]$
\mathbf{F}	Vetor de forças em cada grau de liberdade da malha de elementos finitos	$[N]$
f	Função qualquer	
$g_0(\mathbf{x})$	Função objetivo para uma dada variável de projeto \mathbf{x}	$[N m]$
$g_1(\mathbf{x})$	Função de restrição de volume para uma dada variável de projeto \mathbf{x}	
$g_m(\mathbf{x})$	Função de restrição qualquer para uma dada variável de projeto \mathbf{x}	
i	Subscrito que indica número do elemento vizinho ao elemento j	
j	Subscrito que indica número do elemento considerado	
k	Sobrescrito que indica número da iteração	
l	Quantidade de funções de restrição em um problema de otimização	
\mathbf{k}_j^0	Matriz de rigidez do elemento sem influência da densidade	$[N m^{-2}]$
n	Número de elementos da malha	
q	Fator de penalização do método SIMP	
R	Raio do filtro de densidades	
S	Conjunto de valores	
t	Espessura de um elemento qualquer	$[m]$
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	Vetor de deslocamentos para todos os graus de liberdade para uma dada variável de projeto \mathbf{x}	$[m]$
V_{max}	Volume máximo permitido para a topologia final	$[m^3]$
$w(\mathbf{e}_i)$	Peso do elemento i no filtro de densidade do elemento j	
\mathbf{x}	Variável de projeto (densidade) para todos os elementos	
x	Variável de projeto (densidade) para um elemento qualquer	
\tilde{x}	Variável de projeto (densidade) filtrada para um elemento qualquer	
x^{min}	Limite inferior para a variável de projeto (densidade) de um elemento qualquer	
x^{max}	Limite superior para a variável de projeto (densidade) de um elemento qualquer	
\mathcal{X}	Espaço de variáveis de projeto	
y_j	Variável auxiliar no método OC aplicada ao elemento j	

Símbolos gregos

α	Parâmetro do método OC
γ	Qualquer número entre 0 e 1
$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$	Função Lagrangiana para uma dada variável de projeto \mathbf{x} e λ
λ	Parâmetro da função Lagrangiana
ν	Coefficiente de Poisson do material
$\varphi(\lambda)$	Função para aproximação do problema de otimização sem restrições

Abreviaturas e Acrônimos

CONLIN	Metódo de Linearização Convexa (do inglês, <i>Convex Linearization Method</i>)
MMA	Método das Assíntotas Móveis (do inglês, <i>Method of Moving Asymptotes</i>)
OC	Critério de Ótimo (do inglês, <i>Optimality Criteria</i>)
s.a.	Sujeito a
SIMP	Material Sólido Isotrópico com Penalização (do inglês, <i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>)
SLP	Programação Linear Sequencial (do inglês, <i>Sequential Linear Programming</i>)
SQP	Programação Quadrática Sequencial (do inglês, <i>Sequential Quadratic Programming</i>)

Sumário

NOMEMCLATURA	viii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
3. FUNDAMENTAÇÃO	2
3.1 Métodos para Aproximação da Solução	3
3.2 Instabilidade Numérica, Dependência de Malha e Penalização	6
4. METODOLOGIA	8
4.1 Equacionamento do Problema para Método OC e Penalização de Material (SIMP) ..	8
4.2 Geometria, Condições de Contorno e Malha	9
5. CASOS NUMÉRICOS	10
5.1 Análise de Dependência de Malha	10
5.2 Influência do Raio do Filtro de Densidade	11
5.3 Influência da Penalização de Densidades Intermediárias	12
5.4 Influência do parâmetro α no OC	13
5.5 Aplicação de Outras Condições de Contorno	13
6. CONCLUSÃO	15
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	16
APÊNDICE A	18
APÊNDICE B	19
APÊNDICE C	20
APÊNDICE D	22

1. INTRODUÇÃO

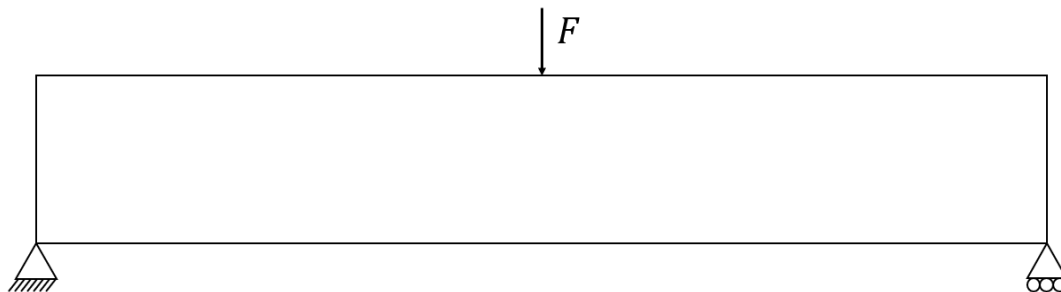
Uma prática bastante comum, tanto na indústria como em projetos de extensão acadêmica dentro da universidade, é o sobre dimensionamento de componentes devido a falta de conhecimento, ou recursos, por parte de seus projetistas para melhorar seus conceitos iniciais. Mesmo depois que o investimento em um software comercial de simulação em elementos finitos é feito, suas ferramentas de otimização topológica podem ter resultados inconsistentes ou inadequados perante o esperado. Estudar os parâmetros envolvidos no desenvolvimento de novas ferramentas que permitem a otimização de geometrias mantendo sua capacidade de fabricação torna-se de suma importância para melhorar a qualidade destes resultados.

A análise de tensão e deformação através do método de elementos finitos trouxe grandes avanços no projeto de componentes de geometrias complexas pois permitiu um melhor dimensionamento de projetos mecânicos. Ainda assim, utilizando apenas este método, não existe nenhuma garantia de que os parâmetros definidos pelo projetista são “ótimos” para as condições de contorno aplicadas. Para tal, foram desenvolvidos métodos que utilizam técnicas matemáticas de minimização de funções cujo objetivo é encontrar estes parâmetros ideais.

1.1 Objetivos

Neste trabalho, desenvolve-se o conhecimento do estudante em otimização topológica para minimização de flexibilidade em vigas (problema bidimensional), como a mostrada na Figura 1, através do desenvolvimento de um código para tal.

Figura 1 – Exemplo do tipo de problema de otimização que pode ser aproximado pelo método a ser desenvolvido.



A ferramenta deve ser capaz de responder, para quaisquer condições de contorno fornecidas a uma geometria que respeite as restrições citadas, a seguinte pergunta: Qual é a topologia ideal para minimizar a flexibilidade do domínio dada uma porção máxima de volume a ser ocupado?

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Bendsøe e Kikuchi (1988) desenvolveram um dos primeiros trabalhos voltados para otimização topológica. O trabalho destes autores disserta sobre como a otimização de forma geralmente leva a geometrias finais com topologias equivalentes àquelas da condição inicial e sobre como o método até então tradicional de otimização, em vários casos, demandava reconstruções da malha para poder realizar a análise de elementos finitos. Isso trouxe a motivação para o algoritmo alternativo aos existentes para forma e dimensão, que foi desenvolvido pelos autores.

Concomitantemente, foram desenvolvidos trabalhos que trouxeram outras formas de otimização além do método OC (*Optimality Criteria*, na sigla em inglês), desenvolvido por Prager (1968) e utilizado no trabalho de Bendsøe e Kikuchi (1988). Um destes métodos foi o

CONLIN (*CONvex LINearization method*, na sigla em inglês), desenvolvido por Fleury (1989), que aproxima a solução de um problema não convexo através de aproximações convexas e de primeira ordem da função objetivo e das restrições do problema. Outro trabalho, publicado na mesma época por Svanberg (1987), sugeriu o uso do MMA (*Method of Moving Asymptotes*, na sigla em inglês) que gera aproximações convexas do problema, assim como o CONLIN, em conjunto com assíntotas móveis para estabilizar ou acelerar a convergência da solução aproximada.

Outros métodos também citados na literatura, porém pouco utilizados, são o SLP (*Sequential Linear Programming*, na sigla em inglês) e o SQP (*Sequential Quadratic Programming*, na sigla em inglês) (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

Trabalhos posteriores foram focados na construção de algoritmos utilizando os métodos citados. Sigmund (2001) desenvolveu uma implementação de um algoritmo para otimização topológica em um código de MATLAB com 99 linhas para fins educacionais. Este trabalho utilizou o método OC junto de um filtro de sensibilidades para impedir a formação de elementos com valores de densidade intermediários. Apesar de ser um bom exemplo de implementação do método, este código pode ser utilizado apenas para casos com uma única restrição e tem espaço para aceleração.

Outra solução que também utiliza o método OC, porém substitui o filtro de sensibilidades pelo filtro de densidades básico proposto por Bruns e Tortorelli (2001), foi desenvolvida por Liu e Tovar (2014). Diferentemente de Sigmund (2001), esta implementação teve o objetivo de criar um código eficiente para geometrias tridimensionais. Os autores também mostram as alterações necessárias para resolver o problema de um mecanismo flexível conforme proposto por Sigmund (1997), e problemas relativos à condução de calor conforme adaptação de metodologia bidimensional proposta Bendsøe e Sigmund (2004). Apesar da implementação ser consideravelmente mais rápida do que soluções equivalentes por outros autores, ela é limitada a problemas lineares e com restrições lineares.

De Leon (2015) descreveu a construção de um algoritmo de otimização topológica focado em mecanismos flexíveis. Foi descrita a utilização do método MMA, que geralmente é necessário para problemas com mais de uma função de restrição, junto do mesmo filtro de densidades básico utilizado por Liu e Tovar (2014) e de um método de penalização de densidades intermediárias conhecido por SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*, na sigla em inglês). Este método de penalização ajuda a evitar a presença de elementos com valores de densidade intermediários entre 0 e 1, que prejudicam a capacidade de manufatura da topologia final. O autor concluiu que a consideração da resistência do material utilizado é de suma importância no projeto deste tipo de mecanismo e propôs um algoritmo que trata de tal.

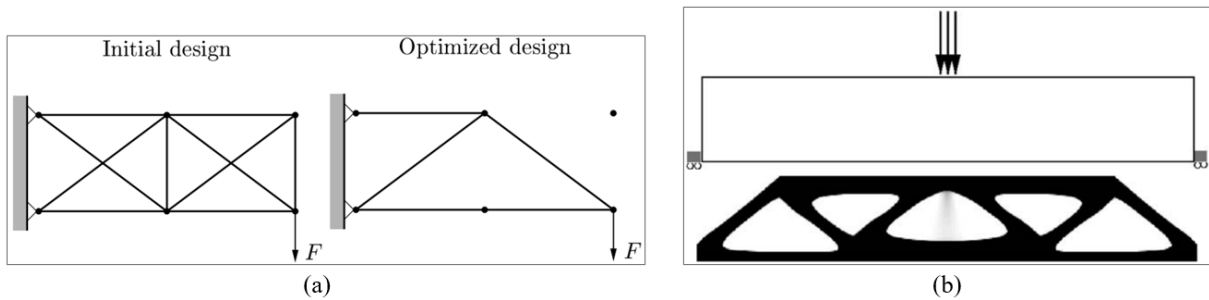
Devido a praticidade da implementação do método OC para casos simples (onde existe apenas uma restrição) e a versatilidade e eficiência do MMA, estes costumam figurar entre os métodos mais comuns para solução de problemas de otimização estrutural tanto topológica, como dimensional e de forma. Também podem ser encontrados alguns exemplos onde SLP apresenta bons resultados e até converge mais rapidamente que o MMA (GOMES; SENNE, 2011).

3. FUNDAMENTAÇÃO

Otimização topológica é a forma mais genérica de otimização estrutural pois permite que os elementos adquiram valor nulo para suas variáveis de projeto e, por consequência, que a conectividade dos nós da malha de elementos finitos seja variável. Essa característica permite que a topologia da estrutura seja alterada, ao passo que as otimizações de forma e dimensão devem manter a conectividade de todos os seus elementos e, portanto, se tornam menos versáteis (BENDSØE; KIKUCHI, 1988; CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

No caso da treliça, uma possível variável de projeto seria a área de seção dos membros que compõe a estrutura. Já, para corpos sujeitos a teoria do contínuo como as estruturas bidimensionais que são tratadas neste trabalho, torna-se interessante o uso de uma variável de densidade para cada elemento da malha de elementos finitos. Casos de otimização para ambos os tipos de estruturas podem ser visualizados na Figura 1.

Figura 1 – (a) Otimização topológica de uma treliça; (b) Otimização topológica de uma estrutural bidimensional contínua. Adaptado de Christensen e Klarbring (2009).



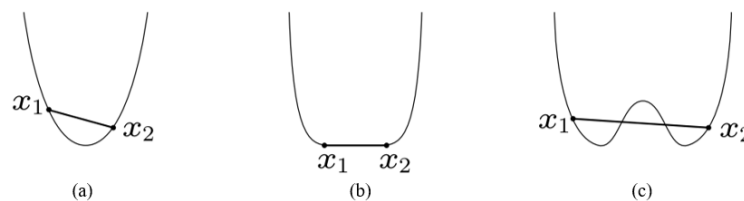
3.1 Métodos para Aproximação da Solução

A maioria dos problemas de otimização topológica são de natureza não-convexa e, devido as dificuldades intrínsecas associadas a solução deste tipo de problema, o melhor caminho é utilizar aproximações convexas destes (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser dita convexa se, para todo \mathbf{x}_1 e $\mathbf{x}_2 \in S$ onde $S \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ e com $\gamma \in (0,1)$, a Equação 1 é aplicável.

$$f(\gamma\mathbf{x}_1 + (1 - \gamma)\mathbf{x}_2) \leq \gamma f(\mathbf{x}_1) + (1 - \gamma)f(\mathbf{x}_2) \quad (1)$$

A condição de convexidade garante que qualquer mínimo local da função será, também, o mínimo global como ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Função (a) estritamente convexa, (b) convexa e (c) não-convexa. Adaptado de Christensen e Klarbring (2009).



Antes de descrever os diferentes métodos para aproximação de funções, deve ser discutida a formulação do problema de otimização topológica. No contexto de estruturas rígidas onde o objetivo é minimizar flexibilidade, a topologia ótima pode ser definida como aquela que minimiza uma função objetivo $g_0(\mathbf{x})$ da forma apresentada na Equação 2 ou análoga.

$$g_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

onde \mathbf{F}^T é o vetor de forças em cada grau de liberdade da malha de elementos finitos, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ é o vetor contendo a deformação dos mesmos graus de liberdade para uma dada variável de projeto \mathbf{x} . Neste caso, \mathbf{x} será a densidade de cada elemento. Pode-se perceber que o resultado da função

objetivo $g_0(\mathbf{x})$, como descrita, será sempre um valor escalar igual ao produto da força e do deslocamento no nó onde ela é aplicada. A minimização dessa função, na maioria dos casos não-convexa, resulta em uma estrutura onde o deslocamento neste nó específico é minimizado, visto que a força é uma condição de contorno constante.

Além de uma função objetivo, para descrever um problema de otimização estrutural, é necessário expressar todas as restrições aplicadas. Uma restrição necessária para os tipos de problemas de mecânica dos sólidos que este trabalho busca resolver é relacionada a fração máxima do volume disponível que a topologia pode utilizar. Essa restrição pode ser descrita através da função $g_1(\mathbf{x})$ e deve ser aplicada conforme descreve a desigualdade da Equação 3.

$$g_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j t_j x_j}{V_{max}} - 1 \leq 0 \quad (3)$$

onde n é o número de elementos da malha, a_e é a área de cada elemento medida em m^2 , t_e é a espessura de cada elemento medida em m e V_{max} é o volume máximo da topologia final medido em m^3 . Dependendo do problema em questão, mais funções de restrição podem ser necessárias e devem ser adicionadas ao problema conforme caso geral para minimização de um funcional descrito na Equação 4.

$$(\mathbb{P}) \quad \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} g_0(\mathbf{x}) \\ \text{s. a. } g_m(\mathbf{x}) \leq 0, \quad m = 1, \dots, l \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, \quad j = 1, \dots, n\} \end{cases} \quad (4)$$

onde s.a. denota “sujeito a”, $g_m(\mathbf{x})$ são todas as l funções de restrição aplicadas ao problema de minimização e x_j^{min} e x_j^{max} são os limites inferior e superior, respectivamente, para a densidade de cada elemento.

Depois de definida a função objetivo e todas as funções de restrição, deve-se partir para a escolha do método de aproximação convexa da solução. As derivadas de primeira ordem da função objetivo e das funções de restrição com respeito a variável de projeto em cada elemento são necessárias para todos os métodos de aproximação abordados na seção de revisão bibliográfica deste texto e o processo de cálculo destas é conhecido como análise de sensibilidades.

Como o objetivo deste trabalho é construir uma ferramenta para otimização topológica, julgou-se mais interessante fazer o desenvolvimento completo do código, incluindo o otimizador, e comparar seus resultados com os mesmos estudos de caso por outros autores. O problema a ser tratado é a minimização da flexibilidade de uma viga através da distribuição ótima de densidades entre seus elementos e, tendo que o material que compõe a peça é isotrópico e elástico, sabe-se que o método OC é bastante eficiente e compete com as outras aproximações descritas neste trabalho (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009), além disso, o OC é de aplicação mais simples que os outros.

O método OC consiste em, como os outros métodos de aproximação citados neste trabalho, utilizar uma variável auxiliar para linearizar a função objetivo $g_0(\mathbf{x})$. A função é linearizada no valor das variáveis de projeto na iteração atual \mathbf{x}^k (indicado pelo sobrescrito k) através da variável auxiliar y_j que assume a forma descrita na Equação 5.

$$y_j = x_j^{-\alpha} \quad (5)$$

onde α é um número real maior que zero. Neste caso, a função objetivo $g_0(\mathbf{x})$ pode ser aproximada pela forma mostrada na Equação 6 junto da variável auxiliar definida para o OC na Equação 5.

$$g_0(\mathbf{x}) \approx g_0(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_0(\mathbf{x}^k)}{\partial y_j} (y_j(x_j) - y_j(x_j^k)) \quad (6)$$

onde a derivada da função objetivo $g_0(\mathbf{x})$ com respeito a variável auxiliar y_j é dada pela Equação 7.

$$\frac{\partial g_0}{\partial y_j} = \frac{\partial g_0}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_j} = \frac{\partial g_0}{\partial y_j} \frac{1}{\frac{dx_j^{-\alpha}}{dx_j}} = -\frac{x_j^{\alpha+1}}{\alpha} \frac{\partial g_0}{\partial x_j} \quad (7)$$

Quando a derivada que foi calculada na Equação 7 é substituída na Equação 6, é obtida a Equação 8.

$$g_0(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}^k) + \sum_{j=1}^n b_j^k x_j^{-\alpha} \quad (8)$$

onde $g_0(\mathbf{x}^k)$ é um termo constante e, por este motivo, não será incluído na aproximação do problema. O termo b_j^k é dado pela Equação 9.

$$b_j^k = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial g_0}{\partial x_j} (x_j^k)^{1+\alpha} \quad (9)$$

Dessa forma, a aproximação do problema de otimização (P) é descrita na Equação 10.

$$(\mathbb{P}) \begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^n b_j^k x_j^{-\alpha} \\ \text{s. a. } \mathbf{x}^T \mathbf{a} = V_{max} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = 1, \dots, n\} \end{cases} \quad (10)$$

onde \mathbf{a} é o vetor contendo a área de todos os elementos da malha.

O problema da Equação 10 pode ser tratado e resolvido com o uso da dualidade de Lagrange. A Equação 11 mostra a função Lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$ para a função objetivo e função de restrição mostradas na Equação 10 conforme Christensen e Klarbring (2009).

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{j=1}^n b_j^k x_j^{-\alpha} + \lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{a} - V_{max}) \quad (11)$$

logo, o problema de otimização sem restrições $\varphi(\lambda)$ toma a forma da Equação 12.

$$\varphi(\lambda) = \min_{x^{min} \leq x_j \leq x^{max}} \mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n \min_{x^{min} \leq x_j \leq x^{max}} [b_j^k x_j^{-\alpha} + \lambda a_j x_j] - \lambda V_{max} \quad (12)$$

onde x^{min} e x^{max} são os limites inferior e superior na variável de projeto para todos os elementos da malha. O problema de otimização sem restrições $\varphi(\lambda)$ pode ser separado em n funções $\varphi_j(x_j, \lambda)$ como mostrado na Equação 13.

$$\varphi_j(x_j, \lambda) = b_j^k x_j^{-\alpha} + \lambda a_j x_j \quad (13)$$

para a qual é possível encontrar o valor mínimo calculando a derivada de primeira ordem da função com respeito a variável de projeto do elemento correspondente e tornando-a zero conforme a Equação 14.

$$\frac{\partial \varphi_j(x_j, \lambda)}{\partial x_j} = -\alpha b_j^k x_j^{-\alpha-1} + \lambda a_j = 0 \quad (14)$$

Quando os termos da Equação 14 são rearranjados, obtém-se uma forma de calcular um novo valor para a variável de projeto que será utilizado na próxima iteração. Caso o valor obtido esteja fora do intervalo de projeto definido por x^{min} e x^{max} , x_j irá ser corrigido conforme mostra a Equação 15.

$$x_j(\lambda) = \begin{cases} x^{min} & \text{quando } \left(\frac{\alpha b_j^k}{\lambda a_j}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq x^{min} \\ \left(\frac{\alpha b_j^k}{\lambda a_j}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} & \text{quando } x^{max} \leq \left(\frac{\alpha b_j^k}{\lambda a_j}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq x^{min} \\ x^{max} & \text{quando } x^{max} \leq \left(\frac{\alpha b_j^k}{\lambda a_j}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \end{cases} \quad (15)$$

Para evitar problemas de singularidade na matriz de rigidez, recomenda-se sempre utilizar $x^{min} > 0$. Agora, para poder resolver o problema, é necessária uma função para auxiliar no cálculo de λ . Esta será a derivada de primeira ordem da função $\varphi(\lambda)$ com respeito a λ mostrada na Equação 16.

$$\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \lambda} \right) - V = \sum_{j=1}^n a_j x_j(\lambda) - V_{max} = 0 \quad (16)$$

Assim, para cada nova iteração $k + 1$, o novo valor de x_j será calculado através da Equação 15 sendo que o termo λ será obtido utilizando a Equação 16. Este procedimento deverá ser repetido até que o critério para convergência seja atingido.

3.2 Instabilidade Numérica, Dependência de Malha e Penalização

Uma formulação clássica do problema de otimização estrutural, para geometrias contínuas, é encontrar uma distribuição de material e espaços vazios (“preto e branco”, respectivamente)

que possa minimizar o trabalho realizado por forças sujeitas a uma restrição de volume (LIU; TOVAR, 2014). Este tipo de formulação é propenso a apresentar uma instabilidade conhecida como “tabuleiro de xadrez” que resulta em uma geometria de difícil manufatura e dependente da malha de elementos finitos utilizada (SIGMUND, Ole, 2007). A Figura 3 mostra um exemplo de topologia que apresenta o padrão tabuleiro de xadrez.

Figura 3 – Topologia sujeita a instabilidade numérica que resulta no padrão de tabuleiro. Adaptado de De Leon (2015).



Segundo De Leon (2015), quando o número de elementos da malha começa a aumentar, este problema é agravado pois, ao invés de gerar imagens da mesma topologia com maior resolução, o algoritmo passa a inserir pequenos espaços vazios alternados por espaços de densidade máxima e gera topologias diferentes das obtidas para outros níveis de refino de malha. Para sanar este problema, diversos tipos de ferramentas matemáticas foram desenvolvidas, entre as mais comuns estão os filtros de densidade e de sensibilidade (SIGMUND, Ole, 2007).

Um filtro de densidade básica foi introduzido por Bruns e Tortorelli (2001) em que cada elemento tem sua densidade ponderada por elementos vizinhos e, assim, evita a formação de do padrão tabuleiro de xadrez. A densidade filtrada de um elemento \tilde{x}_j , segundo este método, é dada pela Equação 17.

$$\tilde{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^n w(\mathbf{e}_i) a_i t_i x_i}{\sum_{i=1}^n w(\mathbf{e}_i) a_i t_i} \quad (17)$$

onde a_i , t_i e x_i são a área, espessura e densidade do elemento i , e $w(\mathbf{e}_i)$ é a influência deste elemento i que é definida através da distância dele até o elemento analisado, quando comparada com um raio R medido do centro deste elemento conforme mostrado na Equação 18.

$$w(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} R - \|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\| & \text{quando } R - \|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\| \geq 0 \\ 0 & \text{quando } R - \|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\| \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

onde \mathbf{e}_i é a localização espacial do elemento vizinho e \mathbf{e}_j é a localização espacial do elemento sendo analisado.

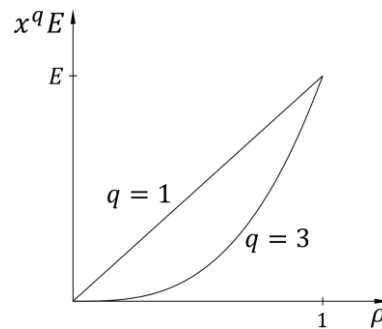
Os métodos de otimização topológica descritos na seção de revisão bibliográfica irão fornecer, na maior parte dos casos, resultados contendo diversos elementos com densidades intermediárias, quando o objetivo do problema é obter valores mais próximos de 0 ou 1 para a densidade de cada elemento (BENDSØE; SIGMUND, 2004). Uma solução proposta por diversos autores (BENDSØE; SIGMUND, 2004; CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009; DE LEON *et al.*, 2015; LIU; TOVAR, 2014) para este problema é o uso do método de penalização SIMP que torna valores de densidade intermediária mais “caros” para a solução final. Essa penalização acontece através da alteração do módulo de elasticidade “efetivo” com o uso de

uma constante q , como mostra a Equação 19, no cálculo da matriz constitutiva \mathbf{D} da viga para o caso em que a variável de projeto é a densidade x da viga.

$$\mathbf{D} = \frac{x^q E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

onde ν é o módulo de Poisson e E é o módulo de elasticidade do material. Nessa equação, o módulo de elasticidade “efetivo” se torna $x^q E$ de forma que, para qualquer valor de q maior que 1, densidades intermediárias acabam tendo uma rigidez menor que o esperado em uma otimização sem o uso do SIMP. Como consequência, o algoritmo passa a evitar o uso destas densidades intermediárias e dar preferência por valores mais próximos de 0 ou 1. A Figura 4 ajuda a ilustrar a influência deste método.

Figura 4 – Módulo de elasticidade “efetivo” $x^q E$ como função da densidade da viga x para diferentes valores de q . Adaptado de Christensen e Klarbring (2009).



4. METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho consiste na definição da função objetivo e funções de restrição mais adequadas para a solução do problema proposto. Depois de sua definição estas equações são inseridas no equacionamento do método OC já descrito e, por fim, é feita a adaptação do SIMP e do filtro de densidades para uso na aproximação do problema. Dessa forma, o algoritmo fica pronto para receber os dados do problema (malha, condições de contorno, cargas...).

4.1 Equacionamento do Problema para Método OC e Penalização de Material (SIMP)

Para minimização de flexibilidade de uma estrutura como aquela mostrada na Figura 1 é tipicamente utilizada a Equação 2 como função a ser minimizada. Outro exemplo de função objetivo que pode ser utilizada é o módulo do vetor de deslocamentos \mathbf{u} que, quando minimizado, irá resultar na estrutura com menor energia de deformação. A forma mostrada na Equação 2 será utilizada por ser mais comum e, geralmente, apresentar melhores resultados (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Além disso, a única restrição necessária para este estudo de caso é a restrição de volume da Equação 3.

Para utilizar as equações propostas no método OC é necessário utilizar a derivada de primeira ordem da função objetivo com respeito a variável de projeto x_j mostrada na Equação 20.

$$\frac{\partial g_0}{\partial x_j} = -\mathbf{u}_j(\mathbf{x})^T \mathbf{k}_j^0 \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) \quad (20)$$

onde $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ é o vetor de deslocamentos em cada grau de liberdade do elemento e \mathbf{k}_j^0 é matriz de rigidez do elemento sem a influência da densidade. O desenvolvimento que resultou na Equação 20 é descrito no APÊNDICE A.

A Equação 20 deve, então, ser substituída dentro do elemento b_j^k da Equação 9. Depois de aplicado o método SIMP, b_j^k toma a forma da Equação 21.

$$b_j^k = \frac{1}{\alpha} \left\{ \mathbf{u}_j^k(\mathbf{x})^T \left[q(x_j^k)^{q-1} \mathbf{k}_j^0 \right] \mathbf{u}_j^k(\mathbf{x}) \right\} (x_j^k)^{1+\alpha} \quad (21)$$

A Equação 15 também deve ser atualizada para a forma que será transcrita no código em MATLAB com a aplicação do SIMP. Adicionando os índices k para indicar o número da iteração e, para simplicidade, mostrando apenas o termo do meio, é obtida a Equação 22.

$$x_j^{k+1} = \left\{ \frac{\mathbf{u}_j^k(\mathbf{x})^T \left[q(x_j^k)^{q-1} \mathbf{k}_j^0 \right] \mathbf{u}_j^k(\mathbf{x})}{\lambda a_j} \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}} x_j^k \quad (22)$$

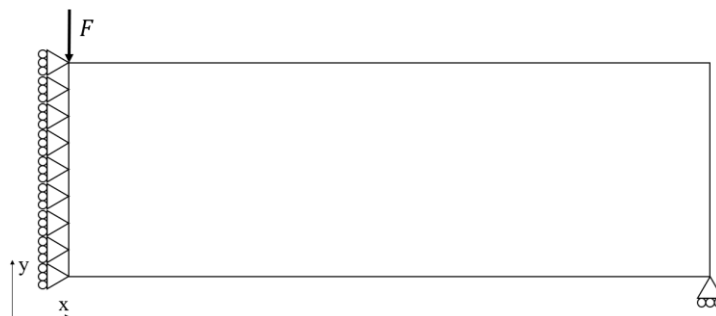
O filtro de densidade é criado na parte inicial do código, antes da primeira iteração, e é aplicado ao vetor de densidades \mathbf{x} no início de cada iteração a fim de que a otimização ocorra sob os valores filtrados da variável de projeto. A implementação em MATLAB das Equações 16 e 22 é descrita no APÊNDICE B, enquanto o filtro de densidade aparece no APÊNDICE C.

Por fim, a Equação 15 requer a definição de x^{min} e de x^{max} para poder ser resolvida. Para evitar os problemas de singularidade de malha inerentes a solução de problemas otimização topológica, será utilizado $x^{min} = 0,0001$ e $x^{max} = 1$. Um fluxograma explicando todo o algoritmo pode ser encontrado no APÊNDICE D.

4.2 Geometria, Condições de Contorno e Malha

O estudo de caso para validação da ferramenta construída será feito com base no que foi mostrado na Figura 1. Será definido que a geometria do problema original possui 10 cm de altura e 60 cm de comprimento e, para fins de redução do custo computacional na solução do problema, será utilizada uma simetria ao lado esquerdo da geometria. Assim, a geometria com simetria aplicada, para a qual será gerada a malha de elementos finitos, é mostrada na Figura 5.

Figura 5 – Geometria a ser simulada no estudo de caso para validação da ferramenta de otimização topológica. A forma possui 10 cm de altura e 30 cm de comprimento



Como pode ser observado na Figura 5, as condições de contorno serão um apoio simples no canto direito inferior para restringir apenas o deslocamento vertical e apoios simples ao longo

da face esquerda da geometria para restringir deslocamentos horizontais. Por fim, uma força concentrada em um único grau de liberdade é aplicada verticalmente ao nó do canto esquerdo superior da geometria.

A malha de elementos finitos utilizada possui apenas elementos quadriláteros e bidimensionais, ou seja, com 4 nós por elemento e 2 graus de liberdade por nó. Além disso, os elementos têm a mesma dimensão em todos os seus 4 lados, o que facilita a criação da malha. O grau de refino da malha necessário para atingir a solução será determinado no capítulo seguinte.

5. CASOS NUMÉRICOS

De acordo com a metodologia apresentada, algumas das métricas que devem ser avaliadas neste código são o nível de dependência de malha da solução de elementos finitos, influência de diferentes raios sob o filtro de densidade, influência do grau de penalização de soluções intermediárias e alteração de outros coeficientes.

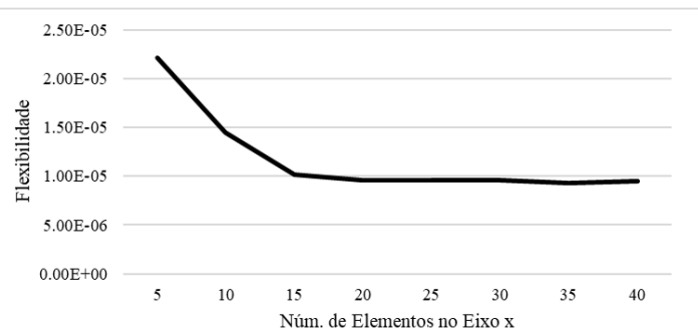
5.1 Análise de Dependência de Malha

Uma verificação sempre necessária quando um novo problema de elementos finitos é resolvido, é a influência que o refino da malha tem na solução. Neste caso, foram utilizados incrementos de 5 e 15 elementos nos sentidos vertical e horizontal da malha, respectivamente. Como medida de convergência, foi utilizada a função objetivo do problema descrita na Equação 2, que deve estabilizar-se em um valor mínimo após um determinado nível de refino. O problema converge para uma solução com pequenas variações a partir do tamanho da malha de 20 elementos verticais por 60 horizontais como mostra a Figura 6.

Figura 6 – (a) Valores calculados para a flexibilidade da solução alcançada pelo algoritmo com diferentes níveis de refino de malha e (b) gráfico mostrando convergência

Núm. de Elementos		Flexibilidade	Variação
Eixo x	Eixo y		
5	15	2.21E-05	N/A
10	30	1.44E-05	-34.7%
15	45	1.02E-05	-29.4%
20	60	9.63E-06	-5.4%
25	75	9.57E-06	-0.6%
30	90	9.61E-06	0.4%
35	105	9.32E-06	-3.0%
40	120	9.46E-06	1.6%

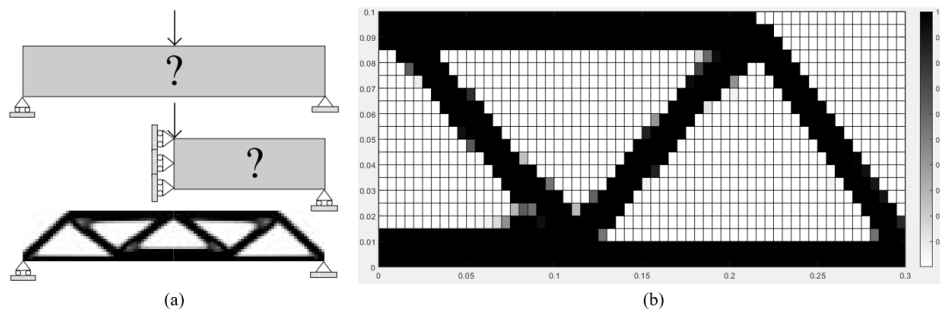
(a)



(b)

Além disso, é necessário verificar se a solução aproximada obtida apresenta a mesma topologia encontrada por outros autores quando aplicadas as mesmas condições de contorno. Essa concordância irá servir para validar o algoritmo e solução matemática proposta nas seções anteriores do texto. Sigmund (2001) mostrou uma solução para a aproximação do problema de otimização topológica utilizando as mesmas condições de contorno propostas pela Figura 5. A Figura 7 compara estes resultados.

Figura 7 – Solução obtida por (a) Sigmund (2001) e (b) pela ferramenta desenvolvida

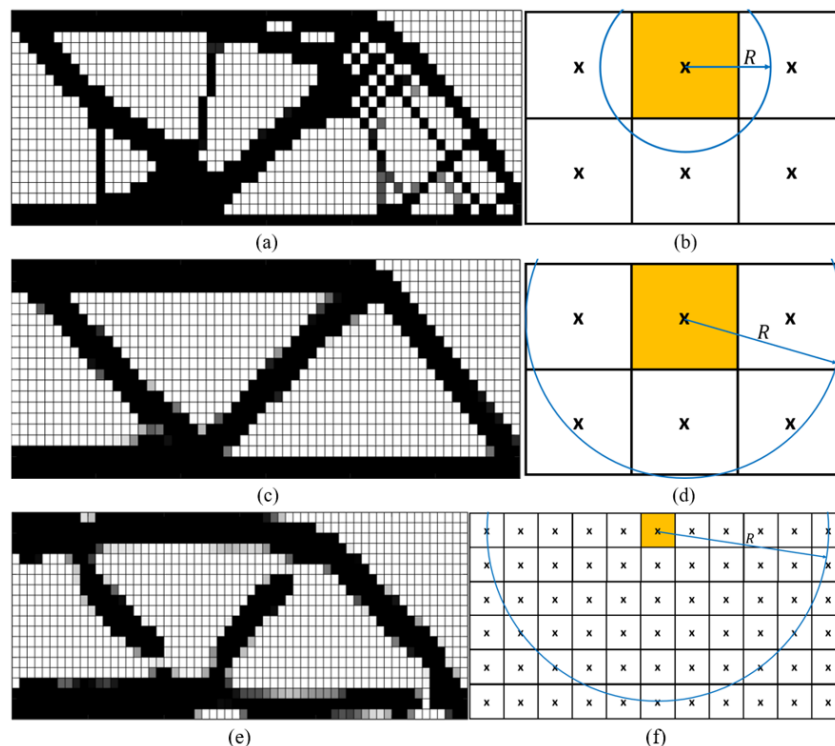


Pode-se verificar que, visualmente, existe grande semelhança entre o resultado publicado por Sigmund (2001) e aquele encontrado pelo código desenvolvido neste trabalho, quando as mesmas condições de contorno são aplicadas.

5.2 Influência do Raio do Filtro de Densidade

Um parâmetro essencial para a geração de uma solução estável é uso de algum tipo de filtro para evitar o efeito tabuleiro de xadrez mostrado na Figura 3. A Equação 18 utiliza o parâmetro R para definir o quão próximo um elemento deve estar de outro para que possa afetar o valor de sua densidade. Utilizando uma malha com 20 elementos na coordenada x e 60 elementos na coordenada y , pode-se obter que a dimensão do lado de cada elemento quadrilátero será 0,005 m. A Figura 8 mostra alguns exemplos de solução do problema com diferentes raios do filtro de densidade.

Figura 8 – (a) Distribuição de densidades resultante para $R = 0,004\text{ m}$ e (b) representação ilustrativa da malha com a circunferência contendo os elementos que irão influenciar a densidade do elemento marcado em amarelo. Mesmo (c) resultado e representação (d) para $R = 0,008$ e para (e) (f) $R = 0,025$



Quando é utilizado um raio com dimensão inferior à distância entre o centro de dois elementos adjacentes, que neste caso é de $0,005\text{ m}$, o filtro de densidade deixa de surtir qualquer efeito sob a distribuição de densidades e a instabilidade numérica, evidenciada pelo padrão tabuleiro de xadrez na Figura 8(a), aparece.

No entanto, se a densidade de um elemento dentro do tabuleiro de xadrez passa a ser influenciada por seus vizinhos, como no caso do raio utilizado nas Figuras 8(c) e 8(d), a tendência é de que toda a área passe a ter uma grande quantidade de elementos com densidades intermediárias. Devido ao uso do SIMP neste algoritmo, estes elementos são forçados a tomar um valor entre 0 (ou um valor muito próximo disto) e 1, resultando em uma topologia com a ausência desta instabilidade.

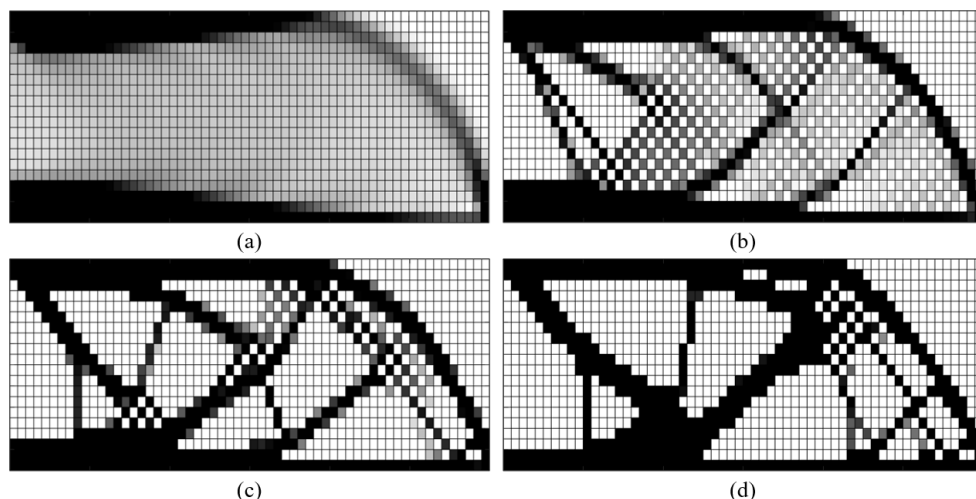
Porém, quando um elemento passa a ser influenciado por uma grande quantidade de seus vizinhos, como nas Figuras 8(e) e 8(f), pode-se perceber uma tendência de aumento na quantidade de densidades intermediárias na solução mesmo com o uso do SIMP, chegando a descaracterizar treliça esperada da solução.

5.3 Influência da Penalização de Densidades Intermediárias

Deve-se definir um valor para a variável q do filtro de densidade a fim de que seja possível utilizar a Equação 22 para aproximar o valor da variável de projeto para iterações subsequentes. O estudo de caso realizado nas seções anteriores utilizou $q = 3$ por ser o mesmo valor empregado por Christensen e Klarbring (2009), porém é interessante verificar a influência de diferentes valores para este parâmetro na solução aproximada.

Para a definição do valor de q a ser utilizado, o filtro de densidade foi desconsiderado no algoritmo a fim de eliminar sua influência na presença de elementos com densidades intermediárias. A Figura 9 mostra a distribuição de densidades resultante para diferentes valores de q .

Figura 9 – Diferentes distribuições de densidade alterando o parâmetro q . (a) $q = 1$, (b) $q = 1,5$, (c) $q = 2$, (d) $q = 3$



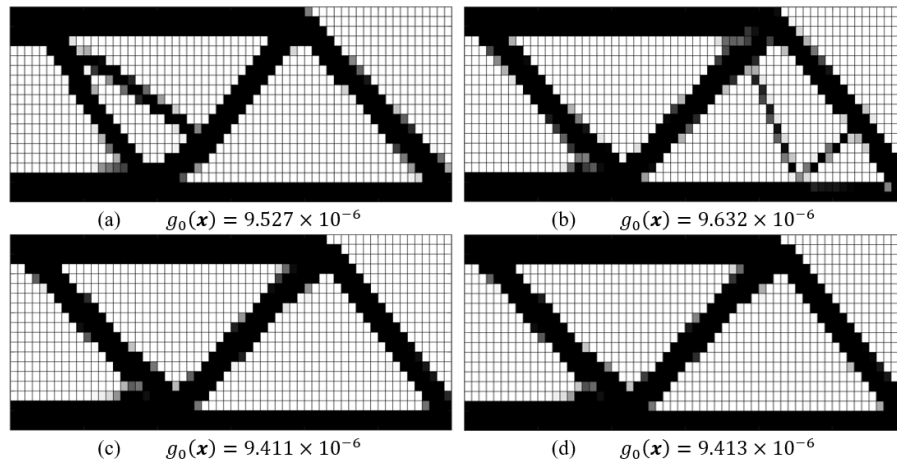
Para valores de q superiores aos analisados, o algoritmo passou a apresentar problemas de singularidade na matriz de rigidez. A partir de $q = 2$, a topologia final passa a exibir uma quantidade consideravelmente menor de elementos de densidade intermediária quando comparado com a topologia sem nenhuma penalização ($q = 1$). Quando $q = 3$, pode-se identificar apenas alguns elementos com densidades intermediárias próximos de locais com instabilidades numéricas comumente tratadas através do filtro de densidades.

5.4 Influência do parâmetro α no OC

Dentre os métodos de aproximação para problemas de otimização topológica citados neste texto, o método OC é o único a utilizar o parâmetro α na linearização da função objetivo. A bibliografia consultada sobre o método não apresenta valores tipicamente utilizados para esta variável e, por este motivo, é importante avaliar a influência de α na topologia da estrutura e encontrar o valor ideal para cada problema.

A Figura 10 mostra a solução gerada pelo algoritmo com uso de diferentes valores para α .

Figura 10 – Diferentes distribuições de densidade alterando o parâmetro α . (a) $\alpha = 0,5$, (b) $\alpha = 1$, (c) $\alpha = 2$, (d) $\alpha = 3$



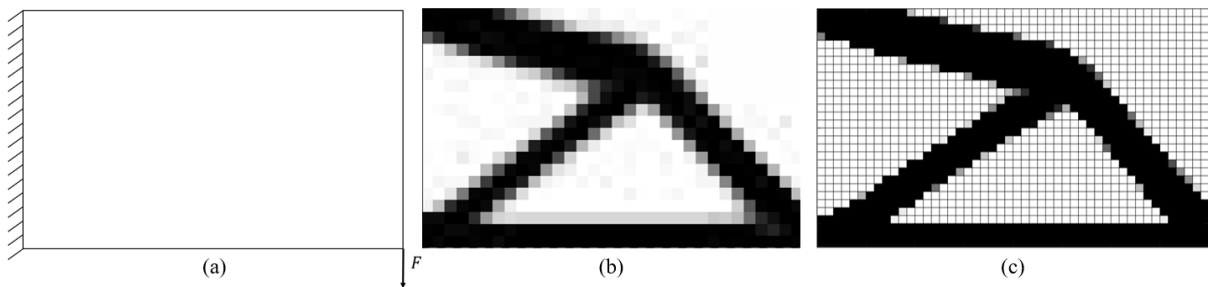
A avaliação das topologias geradas mostra que, para os valores de $\alpha = 0,5$ ou $\alpha = 1$, existe uma tendência maior da presença de mínimos locais na solução. Este tipo de problema poderia ser tratado com o uso de um filtro de densidades maior, porém isso acarreta um aumento na quantidade de elementos de densidade intermediária.

Com o aumento nos valores de α , o algoritmo passa a apresentar menos instabilidades, porém a quantidade de interações necessárias para que seja atingida a mesma topologia passa a aumentar rapidamente. As topologias mostradas nas Figuras 10(c) e 10(d) são quase idênticas, porém, quando $\alpha = 3$, a quantidade de iterações necessárias para atingir esse resultado foi 38% maior que a quantidade necessária para $\alpha = 2$, causando um aumento substancial no custo computacional.

5.5 Aplicação de Outras Condições de Contorno

Para validação final da ferramenta de otimização topológica desenvolvida, é interessante aplicar diferentes condições de contorno para o mesmo problema e verificar a solução junto da bibliografia. A Figura 11 mostra a topologia original e otimizada para o problema clássico da viga engastada.

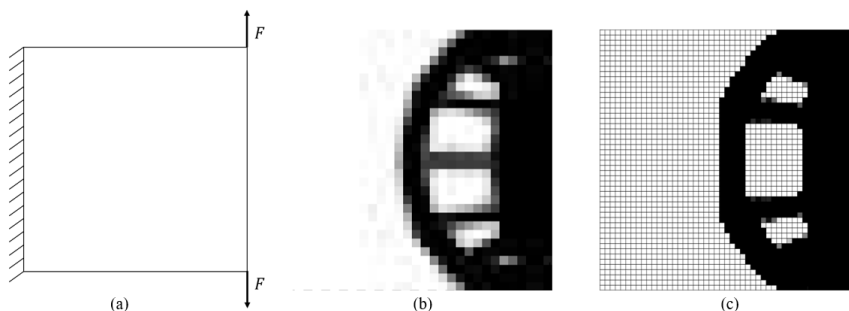
Figura 11 – (a) Topologia original com mesma densidade em todos os elementos. (b) Solução encontrada por Sigmund (2001). (c) Topologia resultante com o uso da ferramenta criada



Utilizando os mesmos parâmetros definidos para a viga biapoiada nas seções anteriores, o algoritmo gerou uma topologia com distribuição de densidades bem próxima daquela encontrada por Sigmund (2001).

Uma variação que pode ser introduzida na geometria mostrada pela Figura 11a é a adição de uma segunda força concentrada. Quando uma força de igual intensidade, porém com sentido oposto é adicionada, esperasse que a condição de equilíbrio seja satisfeita apenas com estas forças e que a topologia deixe de conectar-se com o engaste. Uma aplicação deste conceito e a comparação com a bibliografia podem ser vistas na Figura 12.

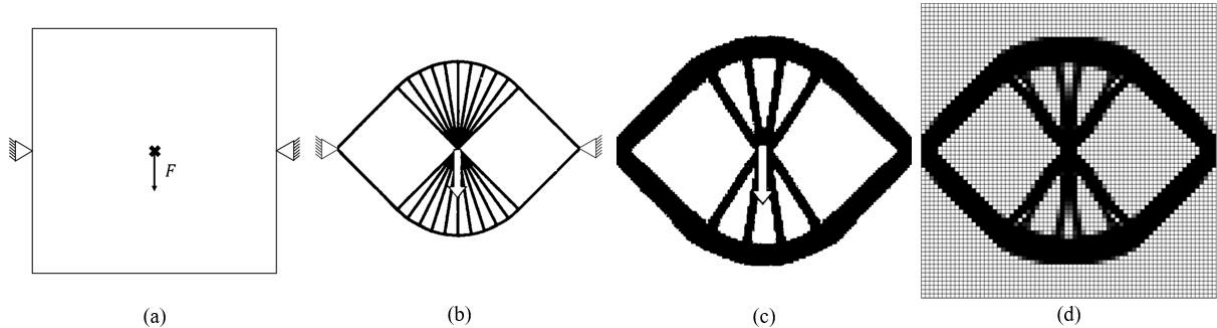
Figura 12 – (a) Topologia original com mesma densidade em todos os elementos. (b) Solução encontrada por Sigmund (2001). (c) Topologia resultante com o uso da ferramenta criada



A topologia apresentada pela solução de Sigmund (2001) e aquela gerada pelo algoritmo deste trabalho não apresentam conexão com o engaste a esquerda do domínio, conforme esperado, porém diferem na topologia dos membros menores que conectam o bloco do material mais à direita da geometria com o arco. Essa diferença pode ser atribuída a alguns parâmetros como nível de refino da malha, diferença no grau de penalização de densidades intermediárias e ao fato de que Sigmund (2001) utilizou um filtro de sensibilidades em seu algoritmo.

Por fim, também foi analisada a proximidade da solução gerada no algoritmo de otimização com um exemplo de estrutura ótima do tipo Michell. Bendsøe e Sigmund (2004) replicaram as condições de contorno para atingir a estrutura ótima proposta por Michell (1904) em um problema de otimização topológica para minimização de flexibilidade. Os resultados obtidos por estes autores são comparados com a ferramenta proposta por este texto na Figura 13.

Figura 13 – (a) Topologia original e condições de contorno para uma das estruturas ótimas de Michell (1904). (b) Estrutura ótima do tipo Michell. Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2004). (c) Resultado do algoritmo de otimização topológica de Bendsøe e Sigmund (2004). (d) Resultado da ferramenta de otimização topológica proposta pelo trabalho.



As soluções mostradas tanto na Figura 13(c), quanto na Figura 13(d), apresentam uma topologia bastante parecida com àquela mostrada pela Figura 13(b). A principal diferença entre os resultados está na quantidade de membros conectando o ponto de aplicação da força aos arcos superiores e inferiores. Essa diferença pode ser atribuída ao fato da topologia da Figura 13(b) ter sido obtida analiticamente (MICHELL, 1904) e aquelas das Figuras 13(c) e 13(d) terem sido obtidas computacionalmente e solucionando o problema de minimização da flexibilidade (SIGMUND, Ole, 2000).

6. CONCLUSÃO

Pelos resultados apresentados, é possível concluir que, para os estudos de caso citados, a ferramenta de otimização topológica criada é capaz de atingir o seu objetivo de mostrar uma topologia otimizada dentro de um domínio bidimensional sujeito a uma condição de volume máximo. Desde que ajustados os parâmetros para as condições de contorno utilizadas, o método OC provou ser uma ferramenta bastante poderosa na aproximação de soluções para o tipo de problema tratado neste trabalho.

Foi evidenciada a importância do uso adequado de filtros para reduzir a ocorrência de instabilidades numéricas na distribuição de densidades dentro do domínio através de testes com diferentes parâmetros. Da mesma forma, a necessidade do uso de um método de penalização de densidades intermediárias mostrou-se essencial para minimizar a presença de elementos com densidades diferentes da mínima e máxima e para garantir a capacidade de fabricação das topologias.

Como próximo passo na linha de desenvolvimento deste trabalho, é recomendado o uso de funções objetivo que visem resolver outros problemas de otimização topológica além da minimização de flexibilidade. Problemas tipicamente resolvidos utilizando o método OC são aqueles relacionados a mecanismos flexíveis e condução de calor.

Outra adição que pode enriquecer essa ferramenta seria a comparação das soluções obtidas com àquelas de outros métodos de otimização matemática no lugar do OC, como o MMA e SLP. Essa comparação iria analisar diferenças na velocidade do código e capacidade de resolver problemas fisicamente mais complexos, como aqueles que envolvem tensão mecânica, fenômenos piezoelétricos etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENDSØE, Martin P.; KIKUCHI, Noboru. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 71, p. 197–224, 1988.

BENDSØE, Martin P.; SIGMUND, Ole. **Topology Optimization**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6>

BRUNS, Tyler E.; TORTORELLI, Daniel A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 190, n. 26–27, p. 3443–3459, 2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00278-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00278-4)

CHRISTENSEN, Peter; KLARBRING, Anders. **An Introduction to Structural Optimization**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009. ISSN 0925-0042.(Solid Mechanics and Its Applications).v. 153 Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8666-3>

DANTZIG, G.B. **Linear Programming and Extensions**. Princeton, NJ, EUA: Princeton University Press, 1963.

DE LEON, Daniel M. *et al.* Stress-constrained topology optimization for compliant mechanism design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 52, n. 5, p. 929–943, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1279-z>

FLEURY, C. CONLIN: An efficient dual optimizer based on convex approximation concepts. **Structural Optimization**, [s. l.], v. 1, n. 2, p. 81–89, 1989. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01637664>

GOMES, Francisco A.M.; SENNE, Thadeu a. An SLP algorithm for topology optimization. **Computational & Applied Mathematics**, [s. l.], v. 30, n. 1, p. 53–89, 2011. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_pdf&pid=S1807-03022011000100004&lng=en&nrm=iso&tlng=en

LIU, Kai; TOVAR, Andrés. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 50, n. 6, p. 1175–1196, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-014-1107-x>

MICHELL, A.G.M. LVIII. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, [s. l.], v. 8, n. 47, p. 589–597, 1904. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/14786440409463229>

PRAGER, W. OPTIMALITY CRITERIA IN STRUCTURAL DESIGN. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, [s. l.], v. 61, n. 3, p. 794–796, 1968. Disponível em: <https://doi.org/10.1073/pnas.61.3.794>

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 21, n. 2, p. 120–127, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s001580050176>

SIGMUND, Ole. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 33, n. 4–5, p. 401–424, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x>

SIGMUND, Ole. Topology optimization: A tool for the tailoring of structures and materials. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, [s. l.], v. 358, n. 1765, p. 211–227, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rsta.2000.0528>

SVANBERG, Krister. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 24, n. 2, p. 359–373, 1987. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620240207>

APÊNDICE A

Este apêndice descreve a obtenção da Equação 20 a partir da Equação 2 deste texto utilizando a metodologia descrita por Christensen e Klarbring (2009). Parte-se da Equação 2.

$$g_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

A derivada da Equação 2 com respeito a variável de projeto x_j pode ser escrita da forma mostrada na Equação A.1.

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = (\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \quad (\text{A.1})$$

Para encontrar $\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})/\partial x_j$ é possível utilizar a derivada da equação $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}$ com respeito a mesma variável de projeto. Utilizando a regra do produto, encontra-se a Equação A.2.

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

Quando os termos da Equação A.2 são rearranjados, $\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})/\partial x_j$ pode ser isolado como mostra a Equação A.3.

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.3})$$

Para a matriz de rigidez global $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ sem aplicação do método SIMP, sua derivada com relação a variável de projeto x_j retira a influência dessa densidade no cálculo da rigidez. Assim, a Equação A.3 pode ser reescrita como a Equação A.4.

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\mathbf{K}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{K}_j^0 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

onde \mathbf{K}_j^0 é a matriz de rigidez do elemento j em coordenadas globais e sem a influência da densidade. Agora, a Equação A.4 pode ser substituída na Equação A.1, resultando na Equação A.5.

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\mathbf{u}(\mathbf{x})^T \mathbf{K}_j^0 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

Alterando a Equação A.5 para notação local, dado que todos os valores da matriz de rigidez para outros elementos além do j são nulos, resulta na Equação 20.

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\mathbf{u}_j(\mathbf{x})^T \mathbf{k}_j^0 \mathbf{u}_j(\mathbf{x}) \quad (20)$$

APÊNDICE B

Este apêndice mostra os comandos e funções executados no MATLAB para solução das Equações 16 e 22. A solução dessas equações irá atualizar a iteração anterior até que um critério de convergência seja atingido e uma aproximação da topologia ideal da geometria, através do método OC, seja obtida.

Trecho do código dentro do programa principal:

```
lambda_min=0.0000001; %Valor mínimo para lambda
lambda_max=1000000; %Valor máximo para lambda
dgdrho=zeros(nel,1); %Sensibilidade da função objetivo (Equação 2)
% Cálculo da parte em chaves da Equação 21
for i=1:nel
    ke0(:, :)=ke1(i, :, :);
    dgdrho(i)=- (ed(i, :)*q*((rho_tilda(i))^(q-1))*ke0*ed(i, :));
end
% Cálculo da Equação 21
B=(dgdrho'*W)' .* (- (1/alpha)*(rho).^(1+alpha));
% Cálculo de lambda para solução da Equação 16
lambdastar=fzero(@(lambda)
dphi_dlambda_project(lambda,alpha,B,ae,Vmax,nel,thicc), [lambda_min
lambda_max]);
% Cálculo da Equação 22
for i=1:nel
    rho(i)=xstar_project(lambdastar,alpha,B(i),ae(i),thicc);
end
```

Funções utilizadas dentro do programa principal:

```
% Cálculo da Equação 16
function out=dphi_dlambda_project(lambda,alpha,bk,ae,Vmax,nel,thicc)

out=-Vmax;

for j=1:nel
    out=out+ae(j)*thicc*xstar_project(lambda,alpha,bk(j),ae(j),thicc);
end

% Cálculo da Equação 22
function xstar=xstar_project(lambda,alpha,be,ae,thicc)

tmp=((alpha*be)/(lambda*ae*thicc)).^(1/(1+alpha));

if tmp<0.0001
    xstar=0.0001;
elseif tmp>1
    xstar=1;
else
    xstar=tmp;
end
end
```

APÊNDICE C

Este apêndice mostra os comandos executados no MATLAB para uso do filtro de densidade descrito pelas Equações 17 e 18.

Primeiro trecho do código mostrando a criação do filtro para uma malha dentro do programa principal:

```
%Geração da matriz de coordenadas dos elementos
contx=1;
conty=1;
for i=1:nel
    if contx==(nx+1)
        contx=1;
        conty=conty+1;
    end
    if conty==1
        if contx==1
            coordel(i,:)=[0.5*elsizex 0.5*elsizey];
            contx=contx+1;
        else
            coordel(i,1)=coordel(i-1,1)+elsizex;
            coordel(i,2)=coordel(i-1,2);
            contx=contx+1;
        end
    else
        if contx==1
            coordel(i,1)=0.5*elsizex;
            coordel(i,2)=coordel(i-1,2)+elsizey;
            contx=contx+1;
        else
            coordel(i,1)=coordel(i-1,1)+elsizex;
            coordel(i,2)=coordel(i-1,2);
            contx=contx+1;
        end
    end
end

% Cálculo da Equação 18 para cada elemento

contn=1;
for y=1:nel
    for x=1:nel
        if sqrt(((coordel(x,1)-coordel(y,1))^2)+((coordel(x,2)-
coordel(y,2))^2))<=R
            w(x,y)=R-sqrt(((coordel(x,1)-coordel(y,1))^2)+((coordel(x,2)-
coordel(y,2))^2));
        else
            w(x,y)=0;
        end
    end
end
contn=1;
end

% Junção de todos os w da Equação 18 em uma única matriz W para facilitar
uso

W=zeros(nel,nel);
for element=1:nel
```

```
for neighbour=1:nel
    for neighbour2=1:nel
        W(element,neighbour)=W(element,neighbour)+w(neighbour2,element);
    end
    sumw(element)=W(element,neighbour);
    W(element,neighbour)=w(neighbour,element)/W(element,neighbour);
end
end
```

Segundo trecho do código mostrando a aplicação do filtro de densidade dentro do programa principal:

```
% Cálculo da Equação 17
rho_tilda=W*rho;
```

APÊNDICE D

Este apêndice mostra um fluxograma com todo o algoritmo seguido pelo código implementado neste trabalho.

