

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
Programa de Pós-Graduação em Física



# Interação Méson-Bárion no Formalismo de Fock-Tani\*

**Bruna Cesira Folador**

Tese realizada sob orientação do Professor Dr. Dimiter Hadjimichef e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Física

Porto Alegre  
Outubro de 2020.

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*À memória de meu avô Nilo Berto*  
*- exemplo de caráter e de bondade.*  
*(04/08/1927 - 09/05/2019)*

# Agradecimentos

★ À minha família: obrigada pelo apoio incondicional, pelo carinho e pela compreensão que me dedicaram neste longo percurso.

★ Ao meu orientador, Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef: obrigada pela orientação dedicada nos últimos 8 anos, por acreditar em mim, pela compreensão e apoio nos momentos de exaustão .

★ Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de doutorado.

★ Às minhas amigas Patrícia, Larissa, Sara, Natália, Bibi, Laura e Suellen: obrigada por todo apoio, incentivo, conversas e risos que me proporcionaram ao longo dos anos.

★ A todos que de alguma maneira contribuíram nessa jornada ao tão esperado título de Doutora em Física:

*Muito Obrigada!*

# Resumo

O formalismo de Fock-Tani é um métodos de primeiros princípios para obtenção de interações hádron-hádron efetivas a partir do Hamiltoniano microscópico, tendo sido usado no estudo de interações méson-méson, bárion-bárion e decaimentos de mésons. Neste trabalho estendemos o formalismo de Fock-Tani, originalmente desenvolvido para mapear estados de partícula-única de mésons ou de bárions compostos em estados de partículas ideais, para incluir o mapeamento de um sistema misto méson-bárion com troca de constituintes. Como uma aplicação do novo formalismo estudaremos os processos Káon-Núcleon, que no contexto do Hamiltoniano microscópico de quarks com troca de um glúon, terá uma contribuição de espalhamento e outra de aniquilação de quarks. Será mostrada a validade da aproximação de Born para o presente estudo e serão calculadas as seções de choque total dos sistemas.

# Abstract

The Fock-Tani formalism is a first principle method to obtain effective hadron-hadron interactions from microscopic Hamiltonians, derived for meson-meson or baryon-baryon scattering and mesons decays. In this study we extend the traditional Fock-Tani formalism, originally developed to map composite meson or baryon single-particle states on ideal particle states, to include a mixed composite meson-baryon system onto system of ideal particles. From this calculation we obtain an effective meson-baryon interaction with constituent interchange. As an exemple of the new formalism we shall study the Kaon-Nucleon process, which in the context of the microscopic quark one-gluon exchange Hamiltonian, will have a quark scattering contribution and a quark annihilation term. We will show the validation of Born approximation for the present study and shall calculate the total cross-sections of this system.

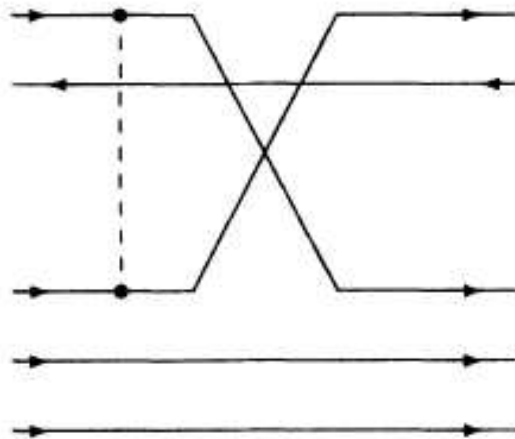
## Publicações

1. *Low-energy interaction in the Fock–Tani formalism*,  
B. C. Folador, D. Hadjimichef,  
Astron. Nachr. **338**, 1156 (2017)
2. *Low Energy KN Interaction in the Fock-Tani Formalism*,  
B. C. Folador, D. Hadjimichef,  
Int. J. Mod. Phys. **45**, 1760067 (2017)
3.  *$K^-N$  interaction in the quark interchange framework*,  
B. C. Folador, D. Hadjimichef,  
Nucl. Phys A, em preparação

## Comunicado à Imprensa

O átomo é uma estrutura que forma a matéria, composto por três partículas subatômicas principais: elétrons, prótons e nêutrons. Na década de 1960 se entendeu que os prótons e os nêutrons não eram partículas fundamentais e sim constituídos por outras partículas ainda menores, denominados de quarks pelo físico Murray Gell-Mann. Na física de partículas, em especial no *Modelo de Quarks*, considera-se que há seis quarks: up(u), down(d), strange(s), charm(c), bottom(b) e top (t) e grande parte das partículas observadas fisicamente até agora são combinações de três quarks (bárions) ou um par quark-antiquark (mésons), mais um número arbitrário de par quark-antiquark e glúons, que são as partículas intermediadoras das forças fortes.

Neste trabalho será mostrado a interação de um méson com um bárion através da troca de um quark, resultando em outro par méson-bárion, como mostra a figura. Em especial, falaremos dos canais  $K^- + N$ , mostrando a construção do Hamiltoniano que representa esse sistema, as contribuições relevantes dos potenciais de troca e de aniquilação e a validade da aproximação de Born para a Matriz-T.



**Fig. 0.1:** Interação  $K^- + N \rightarrow meson + barion$  com a emissão de um glúon

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama: loop para a autoenergia . . . . .	18
2.2	Diagrama: loop no fantasma . . . . .	18
3.1	Espalhamento de uma onda plana . . . . .	29
3.2	Variáveis de Mandelstam . . . . .	37
5.1	Diagramas de espalhamento . . . . .	63
5.2	Diagramas de aniquilação . . . . .	64
6.1	Validade da Aproximação de Born . . . . .	70
6.2	Seção de choque: $K^- + p \rightarrow KN$ . . . . .	77
6.3	Seção de choque: $K^- + p \rightarrow \pi\Sigma$ . . . . .	78
6.4	Seção de choque: $K^- + p \rightarrow \pi\Lambda$ . . . . .	79
6.5	Seção de choque: $K^- + p \rightarrow K^0\Xi^0$ . . . . .	80
6.6	Seção de choque: $K^- + p \rightarrow K^+\Xi^-$ . . . . .	81
6.7	Seção de choque: $K^- + p \rightarrow \eta\Lambda$ . . . . .	82



# Lista de Tabelas

4.1	Operadores de mésons nos espaços de Fock e de Fock-Tani . . . . .	42
4.2	Operadores de bárions nos espaços de Fock e de Fock-Tani . . . . .	43
6.1	Seções de choque elásticas parciais e total . . . . .	69
6.2	Massas em (GeV) . . . . .	71
6.3	Parâmetros das funções de onda . . . . .	71
6.4	Parâmetros spin-sabor-cor pra troca de um glúon; todos $\omega_i^{dir} = 0$ . . . . .	72
6.5	Parâmetros spin-sabor-cor para troca de um méson. . . . .	73

# Conteúdo

<b>1. Introdução</b>	5
<b>2. Revisão da literatura: A QCD e a Física de Hádrons</b>	9
2.1 Eletrodinâmica Quântica: exemplo de teoria de calibre	9
2.1.1 A teoria clássica e quântica	9
2.1.2 O calibre de Coulomb	13
2.2 Cromodinâmica Quântica	16
2.2.1 O calibre de Coulomb de cor	19
2.3 O Potencial de Fermi-Breit	23
<b>3. Revisão da literatura: Teoria de Espalhamento</b>	28
3.1 A Equação de Lippmann-Schwinger	28
3.2 A matriz- $T$ de transição	30
3.3 Expansão em Ondas Parciais	32
3.4 A Aproximação de Born	35
3.4.1 Variáveis de Mandelstam	36
3.4.2 Seção de choque na Aproximação de Born	37
<b>4. Revisão da literatura: O formalismo de Fock-Tani</b>	39
4.1 A representação de Fock-Tani	39
4.2 A Transformação de Fock-Tani para Mésons	45
4.3 A Transformação de Fock-Tani para Bárions	51
<b>5. A nova transformação e o Hamiltoniano de Fock-Tani</b>	57
5.1 O Potencial Méson-Bárion	61
<b>6. O Sistema Káon-Núcleon</b>	66
6.1 Validade da Aproximação de Born	67
6.2 A seção de choque	69
6.3 Modelo de Canal Acoplado do JPAC (Jefferson Lab)	74
6.4 Resultados	76
<b>7. Conclusões</b>	83

---

<b>A. Termos de Aniquilação</b> . . . . .	85
<b>B. Determinação de <math>O_\alpha</math></b> . . . . .	92
<b>C. Funções de Onda</b> . . . . .	94
C.1 Função de Onda do Méson . . . . .	94
C.1.1 Espaço . . . . .	94
C.1.2 Spin-Sabor . . . . .	94
C.2 Função de Onda do Bárion . . . . .	95
C.2.1 Espaço . . . . .	95
C.2.2 Spin-Sabor . . . . .	99
<b>D. Parte espacial de <math>V_{mb}</math></b> . . . . .	100
<b>E. Parte spin-sabor-cor de <math>V_{mb}</math></b> . . . . .	103
<b>Bibliografia</b> . . . . .	105

## Introdução

A física de mésons e o estudo da interação forte estão profundamente conectados desde o advento do méson  $\pi$ , introduzido teoricamente por Yukawa (1935)[1] e detectado experimentalmente por Lattes, Occhialini e Powell (1947) [2].

A teoria fundamental das interações fortes é a Cromodinâmica Quântica, uma teoria de campos de calibre, não-abeliana e que descreve as interações entre quarks e glúons. É tradicional, inclusive na comunidade brasileira de Física Hadrônica, Partículas Elementares e Teoria Quântica de Campos, referir-se a esta teoria pela sigla inglesa *QCD* associada à expressão *Quantum Chromodynamics*. O mesmo ocorre para a Eletrodinâmica Quântica, cuja a sigla em inglês é *QED* (Quantum Electrodynamics). Nesta tese adotaremos estas convenções.

Murray Gell-Mann, George Zweig e Yuval Ne'eman [3],[4] propuseram em 1964 um esquema de classificação e ordenamento da, já então extraordinária, quantidade de bárions e mésons conhecidos na natureza, denominado de Método dos Octetos (Eightfold Way). Este método, baseado na teoria matemática do grupo de simetria  $SU(3)$  (o S significa *Special*, o U significa *Unitary* e o três designando a quantidade de elementos básicos da teoria), tinha como propósito descrever a estrutura intrínseca das partículas fortemente interagentes em termos de entidades fundamentais, os blocos elementares de construção de mésons e bárions.

A cor, como uma carga possuindo três valores possíveis foi proposta em 1964 por O. W. Greenberg [5] e como uma simetria de calibre em 1965 por Moo-Young Han e Yoichiro Nambu [6]. Os quarks poderiam possuir uma das três cores fundamentais, vermelho, verde e azul e as suas antipartículas, os antiquarks, as anticolors antivermelha (ou ciano), antiverde (ou magenta) e antiazul (ou amarelo). Estas designações são utilizadas para caracterizar o fato de que, devido ao confinamento, a propriedade da cor não é observada quando mésons e bárions são tratados como partículas elementares. Similarmente à cor branca, formada pelas três cores fundamentais do espectro eletromagnético, as cores de três quarks, formando um bárion elementar, ou de um par quark-antiquark, formando um méson elementar, se recombinaariam originando uma cor neutra para os bárions e os mésons.

Desta forma, no chamado *Modelo de Quarks*, considera-se que há seis quarks, também chamados de sabores de quarks: up(u), down(d), strange(s), charm(c), bottom(b) e top

(t). Os quarks leves ( $u, d, s$ ) podem ser identificados como os três estados fundamentais na representação de  $SU(3)$ . O sabor  $SU(3)$  pode ser interpretado como um grupo de simetria de interações fundamentais. Grande parte das partículas observadas fisicamente até agora são combinações de três quarks (bárions) ou um par quark-antiquark (mésons), mais um número arbitrário de par quark-antiquark e glúons. As simetrias dos hádrons são ligadas à conservação dos números quânticos, como número bariônico, isospin, hipercarga, carga, entre outros. Isso significa que é impossível destruir ou criar um quark simples, mas podemos aniquiliar ou criar um par quark-antiquark [7].

A QCD é a teoria fundamental da interação forte. A interação forte em nível subnuclear, envolvendo portanto cargas de cor, é uma das quatro interações fundamentais encontradas na natureza juntamente com as interações gravitacional, fraca e eletromagnética. A QCD prediz que a interação forte apresenta, adicionalmente ao confinamento, uma característica única na natureza, a chamada *liberdade assintótica*. Esta predição da QCD, experimentalmente confirmada, indica que os quarks são assintoticamente livres (para grandes valores de momentum transferidos ou, equivalentemente, quando muito próximos uns dos outros). Este fato permitiu o uso de técnicas perturbativas para testar a teoria neste limite [7].

Na literatura, há uma grande variedade de técnicas de mapeamento usadas na física nuclear para tratar oscilações coletivas do núcleo. Apesar de existirem há muito tempo, apenas no final da década de 1980 essas técnicas começaram a ser usadas na física hadrônica, em particular nos modelos constituintes de quarks. Os primeiros a aplicarem essas técnicas na física hadrônica foram Zhu et. al. [8] e Pittel et. al. [9]. Zhu et. al. utilizaram a Representação de Partículas Compostas (do inglês *Composite Particle Representation - CPR*), desenvolvida no contexto da física nuclear por Wu, Feng e colaboradores [10], para estudar o espectro do bárion no Modelo de Quark Não-Relativístico. Já Pittel et. al. utilizaram o mapeamento Dyson [11] a fim de obter uma interação hádron-hádron efetiva a partir de um Modelo de Quark esquemático.

O estudo teórico da interação hádron-hádron, em termos dos graus de liberdade dos quarks, constitui um problema de muitos corpos extremamente complicado, no qual partículas compostas (hádrons) e constituintes (quarks e glúons) estão simultaneamente presentes.

A fim de obter uma representação na qual partículas compostas sejam descritas por operadores de aniquilação e criação que satisfaçam as relações de Bose ou Fermi (comutação ou anticomutação) muitos métodos diferentes [12]-[16] foram desenvolvidos dentre os quais podemos citar

1. Diagramas de troca de linha de quarks (Quark Born Diagram Formalism - QBD)[17]-[19],
2. Método do Grupo Ressonante (Resonating Group Method- RGM) [20],
3. Formalismo de Fock-Tani [21].

Desses métodos, Fock-Tani mostrou-se o mais simples e mais facilmente generalizado [22]. A ideia básica desse método é uma mudança de representação entre o espaço de

Fock e um espaço ideal e remonta de uma publicação de S. Tani de 1960 [23], mas abordagens semelhantes para diferentes problemas haviam sido desenvolvidas anteriormente por Bohm e Pines [24], Dysor, e outros [25].

Desenvolvido independentemente por Girardeau e Vorob'ev e Khomkin e continuamente melhorado por décadas, a representação de Fock-Tani - nomeado assim por Girardeau - tem sido usado em diversas áreas da física atômica e foi particularmente relevante para a construção de Hamiltonianos hadrônicos eficazes no contexto de teorias de campo efetivas, uma vez que implementa em certo sentido o método “quasipartículas” de Weinberg. [26]

Na abordagem de quase-partículas de Weinberg, os estados ligados são redescritos por partículas elementares e, para não mudar a física do problema, o potencial é modificado de tal forma que não pode mais produzir esses estados ligados. Na representação de Fock-Tani, como resultado da transformação do Hamiltoniano, as interações quark-quark se tornam “mais fracas”, no sentido de que descrevem apenas processos de dispersão de quarks-quarks e não podem produzir os hádrons como estados ligados. A característica interessante da representação de Fock-Tani é que a mudança do potencial é o resultado da transformação unitária que implementa o mapeamento de hádrons compostos em hádrons elementares, enquanto na abordagem de Weinberg há alguma liberdade em como o potencial é modificado.

Das vantagens de se usar Fock-Tani podemos citar que [21]:

1. Pode ser naturalmente estendido a sistemas compostos com qualquer número de constituintes, não apenas pares ou triplas de férmions,
2. Sistemas contendo simultaneamente mésons e bárions, podem ser naturalmente tratados de forma unificada.

Por muito tempo, os káons atraíram a atenção de físicos nucleares devido a sua estranheza - um número quântico conservado em interações fortes. Para entender bem o papel dos káons na estrutura nuclear é necessário conhecer o seu mecanismo de interação com o núcleo. Cada incerteza na descrição teórica implica em incertezas na interpretação dos resultados. Visto que cada modelo teórico para interações káon-núcleon parte de interações livres e depois adicionam-se correções, um conhecimento preciso da interação livre é essencial [27]. O espalhamento káon-núcleon (KN) despertou particular interesse no passado, de forma que muitos trabalhos foram dedicados a esse estudo [28] - [35]. Barnes e Swanson [29] usaram o diagrama de Quark-Born (QBD) para obter as amplitudes de espalhamento KN. Posteriormente, Black [31] utilizou a aproximação de Born para investigar o espalhamento KN mais extensamente.

O espalhamento KN em baixas energias (abaixo de 300 MeV/c) pode ser descrito satisfatoriamente porque, nessa região de energia, a seção de choque do KN não é dominado por ressonâncias (como  $\Lambda(1405)$  e  $\Lambda(1670)$ ), porém isso muda ao aumentarmos a energia de espalhamento [27].

Nesse trabalho introduziremos um potencial méson-bárion utilizando o formalismo de Fock-Tani adaptado [30], [36]-[38]. No capítulo 2, faremos uma breve revisão sobre a Eletrodinâmica Quântica, a Cromodinâmica Quântica no Calibre de Coulomb e o Potencial

---

de Fermi-Breit. No capítulo 3, faremos uma revisão sobre a Equação de Lippmann-Schwinger, a Matriz-T de Transição, Expansão em Ondas Parciais e a Aproximação de Born. No capítulo 4 faremos uma revisão sobre o formalismo de Fock-Tani e, em seguida, mostraremos a transformação de Fock-Tani para mésons e para bárions. No capítulo 5 construiremos o Hamiltoniano de Fock-Tani para o sistema misto através do Potencial Méson - Bárion de Troca e de Aniquilação. O capítulo 6 será destinado ao cálculo da seção de choque total, aplicado ao sistema Káon-Núcleon, e a validade da Aproximação de Born. O capítulo 7 será de conclusões e perspectivas futuras. Esse trabalho também conta com 5 apêndices. No apêndice A mostraremos o cálculo detalhado para a obtenção dos termos de corrente de aniquilação, essenciais para o desenvolvimento do nosso potencial. No apêndice B mostraremos o cálculo do operador  $O_\alpha$ . No apêndice C são mostradas em detalhes as funções de onda dos mésons e dos bárions. No apêndice D são mostrados os detalhes para o cálculo da parte espacial do potencial  $V_{mb}$ . No apêndice E, o cálculo da parte de spin-sabor-cor do potencial  $V_{mb}$ .

# Revisão da literatura: A QCD e a Física de Hádrons

## 2.1 Eletrodinâmica Quântica: exemplo de teoria de calibre

### 2.1.1 A teoria clássica e quântica

A teoria eletromagnética clássica de Maxwell unifica os fenômenos elétricos e magnéticos num conjunto sintético de quatro equações fundamentais. Estas equações denominadas de *equações de Maxwell* são representadas, na literatura, em diferentes sistemas de unidades. No sistema de unidades de Heaviside-Lorentz, por exemplo, elas são dadas pelas seguintes equações:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \tag{2.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{J} \tag{2.2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.4}$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são os campos elétrico e magnético,  $\vec{J}$  a densidade de corrente elétrica e  $\rho$  a densidade de carga elétrica. As equações (2.1) e (2.2) constituem o par não-homogêneo das equações de Maxwell e refletem a conservação da carga elétrica. Se tomarmos a derivada temporal da equação (2.1), o divergente da equação (2.2) e somar os dois resultados chegaremos em

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.5}$$



que é nada mais do que a equação da continuidade. As equações de Maxwell podem ser escritas na forma covariante, (tomando  $c = 1$ ) como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (2.6)$$

$$\partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \quad (2.7)$$

onde  $j^\nu = (\rho, \vec{J})$ ;  $F^{\mu\nu}$  o tensor de campo eletromagnético

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

e  ${}^*F^{\mu\nu}$  o dual a  $F^{\mu\nu}$  definido por

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\sigma\rho}. \quad (2.9)$$

Os campos elétrico e magnético são definidos de maneira formal a partir de (2.8)

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -E^i \\ F^{ij} &= -\epsilon^{ijk}B_k, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  é totalmente antissimétrico com  $\epsilon^{0123} = 1$ . O tensor de campo  $F^{\mu\nu}$  pode ser relacionado com um quadrivetor potencial  $A^\mu$  por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.11)$$

Assim vemos que combinando as equações (2.10) e (2.11), o campo elétrico fica

$$E^i = -F^{0i} = -[\partial^0 A^i - \partial^i A^0] = -\partial^0 A^i + \partial^i A^0, \quad (2.12)$$

ou seja, em termos vetoriais<sup>1</sup>

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi. \quad (2.13)$$

A partir do tensor de campo eletromagnético, (2.11) pode-se também obter

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2.14)$$

<sup>1</sup> Lembrando a notação relativística usual:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) \quad ; \quad x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{x}) \\ \partial_\mu &= \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \\ \partial^\mu &= \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \end{aligned}$$

Se forem realizadas as seguintes mudanças

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad ; \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \theta, \quad (2.15)$$

os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  definidos em (2.13) e (2.14) permanecem invariantes. Esta mudança é chamada de *transformação de calibre* e uma teoria com esta característica é denominada de *teoria de calibre* (gauge theory, em inglês). Portanto, as chamadas teorias de campo de calibre são um tipo particular das teorias de campo baseadas no princípio de invariância de calibre.

A versão quântica do eletromagnetismo é conhecida como a *Eletrodinâmica Quântica* (QED) e de acordo com o princípio da variacional, as equações de campo são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange, através de uma densidade lagrangiana adequada dada por

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{em}} + \mathcal{L}_{\text{mat}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (2.16)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad ; \quad \mathcal{L}_{\text{mat}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad ; \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = -j^\mu A_\mu \quad (2.17)$$

com

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.18)$$

Vemos que essa lagrangiana é invariante frente a uma mudança de fase do campo  $\psi$  do tipo

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{i\theta} \bar{\psi} \quad (2.19)$$

onde  $\theta$  é uma constante real. Essa mudança é chamada de *transformação de calibre abeliana global*, desde que o parâmetro  $\theta$  permaneça constante. Esta invariância assegura a conservação da corrente, isto é, (2.18) satisfaz

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.20)$$

tal que a carga

$$Q = e \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x) \quad (2.21)$$

seja conservada. A densidade lagrangiana (2.16) pode ser reescrita introduzindo o conceito de derivada covariante, por através do chamado *acoplamento mínimo*, isto é,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i e A_\mu. \quad (2.22)$$

Assim (2.16) fica

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi. \quad (2.23)$$

Agora, se o parâmetro  $\theta$  for função de  $x$ , (2.23) ainda será invariante frente a mudança de fase local

$$\psi \rightarrow e^{-i\theta(x)} \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{i\theta(x)} \bar{\psi} \quad (2.24)$$

se  $A^\mu$  for transformado ao mesmo tempo de uma maneira apropriada:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta \quad (2.25)$$

o que implica

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{-i\theta(x)} D_\mu \psi(x). \quad (2.26)$$

Assim, esta transformação com  $\theta(x)$  é chamada de *transformação de calibre abeliana local* e a densidade lagrangiana da QED dada por (2.23) é invariante frente à esta transformação.

Podemos, a partir da densidade lagrangiana (2.16), obter uma respectiva densidade hamiltoniana, lembrando que

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_0 A^\mu)} = F_{\mu 0} \quad (2.27)$$

chamado de “momento canonicamente conjugado”, assim a parte eletromagnética fica

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = \Pi_\mu \partial_0 A^\mu - \mathcal{L}_{\text{em}} = F_{\mu 0} \partial_0 A^\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\vec{E} \cdot \partial^0 \vec{A} - \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \quad (2.28)$$

mas por (2.12)

$$\partial^0 \vec{A} = -\vec{E} - \vec{\nabla} A^0 \quad (2.29)$$

a (2.28) pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = -\vec{E} \cdot \left( -\vec{E} - \vec{\nabla} A^0 \right) - \frac{1}{2} (E^2 - B^2) = \vec{E} \cdot \vec{\nabla} A^0 + \frac{1}{2} (E^2 + B^2). \quad (2.30)$$

A expressão (2.30) é uma densidade hamiltoniana que será integrada em todo o espaço, portanto pode-se realizar uma integração por partes no primeiro termo, resultando em  $-A^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ . Usando a Lei de Gauss (2.1) obtemos

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \rho A^0. \quad (2.31)$$

A parte de interação é  $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$ , o que resulta numa densidade hamiltoniana total dada por

$$\mathcal{H}_{\text{QED}} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \rho A^0 + j_\mu A^\mu + \mathcal{H}_{\text{mat}} \quad (2.32)$$

mas  $j_\mu A^\mu = \rho A^0 - \vec{J} \cdot \vec{A}$ , ou seja,

$$H_{\text{QED}} = \int d^3x \mathcal{H}_{\text{QED}} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (E^2 + B^2) - \vec{J} \cdot \vec{A} + \mathcal{H}_{\text{mat}} \right]. \quad (2.33)$$

### 2.1.2 O calibre de Coulomb

A invariância de calibre introduz uma complicação para se quantizar a teoria. A tentativa mais ingênua de conciliar a invariância de calibre e a quantização da teoria de Maxwell acaba falhando: partindo do comutador

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi_\nu(\vec{y}, t)] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.34)$$

no caso  $\mu = \nu = 0$  obtemos

$$[A_0(\vec{x}, t), \Pi_0(\vec{y}, t)] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.35)$$

no entanto, da equação (2.27), vemos que

$$\Pi_0(\vec{y}, t) = F_{00} = 0 \quad (2.36)$$

o que é inconsistente com a relação de comutação (2.34). Devido à arbitrariedade do potencial  $A_\mu(\vec{x}, t)$ , que se reflete na forma de escrever  $\mathcal{L}_{\text{em}}$  em (2.17), não é possível aplicar o procedimento de quantização canônica diretamente a  $A_\mu$ . Por outro lado, o que pode ser feito é escolher um determinado calibre, de tal forma a impor uma condição sobre  $A_\mu$  e então usar os métodos de quantização canônica neste calibre específico. Em princípio uma densidade lagrangiana modificada poderia resolver este problema, fixando o calibre da seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2. \quad (2.37)$$

Pelo fato do calibre estar fixado, a teoria não é mais invariante de calibre. Entretanto, as predições da teoria não deveriam depender deste parâmetro  $\xi$  e portanto o valor assumido é irrelevante, por exemplo poderia ser fixado em  $\xi = 1$  (calibre de Feynman) ou  $\xi \rightarrow 0$  (calibre de Landau). Desta forma o problema descrito em (2.36) desaparece

$$\Pi_\mu = F_{\mu 0} - \frac{1}{\xi} g_{\mu 0} (\partial^\nu A_\nu). \quad (2.38)$$

Nesta tese vamos trabalhar no calibre de Coulomb:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.39)$$

Da equação (2.6) temos para  $\nu = 0$

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = j^0, \quad (2.40)$$

ou seja,

$$-\nabla^2 A^0 - \partial_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \rho. \quad (2.41)$$

Agora usando a condição de Coulomb, eq. (2.39), a equação anterior se reduz a

$$\nabla^2 A^0 = -\rho, \quad (2.42)$$

é uma equação de Poisson com solução geral dada por

$$A^0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.43)$$

Este é o potencial instantâneo de Coulomb, fornecendo o valor de  $A^0$  num tempo  $t$  para uma determinada distribuição de carga  $\rho$ . Os graus de liberdade restantes  $A^i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , estão sujeitos a condição (2.39). Podemos escrever (2.43) como uma integral no espaço de momento, lembrando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{q^2} \\ \rho(\vec{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' \rho(\vec{p}', \vec{p}) e^{i\vec{y} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

A escolha de  $\rho$  ser não-local no espaço de momento é para uma necessidade futura. Substituindo as definições de (2.44) em (2.43), obtemos

$$A^0(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q d^3p \frac{\rho(\vec{p} - \vec{q}, \vec{p})}{q^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}}. \quad (2.45)$$

No calibre de Coulomb separamos os campos em suas componentes transversais ( $\perp$ ) e longitudinais ( $\parallel$ ) da seguinte forma

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel \quad (2.46)$$

onde  $\vec{E}_\perp$  e  $\vec{E}_\parallel$  satisfazem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\perp = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\parallel = \rho \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_\parallel = 0. \quad (2.47)$$

Destas condições obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} A^0 - \partial_0 \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times (\partial_0 \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} A^0 - \partial_0 \vec{A}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A^0) \end{aligned} \quad (2.48)$$

mas o lado esquerdo de (2.48) fornece  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}_\perp$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\parallel$  de onde concluímos que

$$\vec{E}_\parallel = -\vec{\nabla} A^0 \quad ; \quad \vec{E}_\perp = -\partial_0 \vec{A}_\perp. \quad (2.49)$$

A integral espacial em (2.33) do campo elétrico pode ser reescrito

$$\begin{aligned} \int d^3x E^2 &= \int d^3x [E_\perp^2 + E_\parallel^2] = \int d^3x [E_\perp^2 + (\vec{\nabla} A^0) \cdot (\vec{\nabla} A^0)] \\ &= \int d^3x [E_\perp^2 - (\nabla^2 A^0) A^0] = \int d^3x [E_\perp^2 + \rho A^0]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Portanto,

$$H_{\text{QED}} = \frac{1}{2} \int d^3x [B^2 + E_{\perp}^2] + \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \rho A^0 - \vec{J} \cdot \vec{A}_{\perp} \right] + H_{\text{mat}}, \quad (2.51)$$

onde vemos, em (2.51), o aparecimento do termo envolvendo  $\vec{A}_{\perp}$ , pela razão mostrada na condição (2.49). Agora, o termo  $\frac{1}{2} \rho A^0$  pode ser escrito de outra forma usando as definições (2.44) e (2.45)

$$\frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) A^0(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\rho(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \rho(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2}. \quad (2.52)$$

O termo  $\vec{J} \cdot \vec{A}_{\perp}$  de (2.51) pode também ser reescrito, lembrando a definição de  $\vec{A}_{\perp}$

$$\vec{A}_{\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\vec{J}_{\perp}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.53)$$

Assim, considerando  $\vec{J} = \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_{\perp}$

$$\int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y \frac{\vec{J}_{\perp}(\vec{x}) \cdot \vec{J}_{\perp}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.54)$$

Semelhante à definição usada para  $\rho$  em (2.44) podemos escrever  $\vec{J}_{\perp}$  como

$$\vec{J}_{\perp}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' \vec{J}_{\perp}(\vec{p}', \vec{p}) e^{i\vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')}, \quad (2.55)$$

resultando em

$$\int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_{\perp}(\vec{x}) = \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\vec{J}_{\perp}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}_{\perp}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2}. \quad (2.56)$$

Agora, podemos deduzir uma identidade vetorial que será usada para reescrever (2.56). Sejam dois vetores genéricos  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  e  $\vec{v}' = v'_x \hat{i} + v'_y \hat{j} + v'_z \hat{k}$ . Considerando as direções  $(x, y)$  como transversais e a direção  $z$  como longitudinal, podemos definir

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\perp} &= v_x \hat{i} + v_y \hat{j} & ; & & \vec{v}_{\parallel} &= v_z \hat{k} \\ \vec{v}'_{\perp} &= v'_x \hat{i} + v'_y \hat{j} & ; & & \vec{v}'_{\parallel} &= v'_z \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Desta forma o produto escalar entre os vetores de (2.57), fica

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{v}'_{\perp} + v_{\parallel} v'_{\parallel}, \quad (2.58)$$

mas podemos escrever  $v_{\parallel} = \vec{v} \cdot \hat{k}$  e  $v'_{\parallel} = \vec{v}' \cdot \hat{k}$ , obtendo assim a identidade na sua forma final

$$\vec{v}_{\perp} \cdot \vec{v}'_{\perp} = \vec{v} \cdot \vec{v}' - (\vec{v} \cdot \hat{k})(\vec{v}' \cdot \hat{k}). \quad (2.59)$$

Usando a identidade (2.59) em (2.56), obtemos

$$\begin{aligned} \int d^3x \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}_\perp(\vec{x}) &= \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\vec{J}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2} \\ &= - \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{[\vec{J}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \hat{q}][\vec{J}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \cdot \hat{q}]}{q^2} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Substituindo (2.52) e (2.60) em (2.51), encontramos o  $H_{\text{QED}}$  na sua forma final [39]

$$\begin{aligned} H_{\text{QED}} &= \frac{1}{2} \int d^3x [B^2 + E_\perp^2] + H_{\text{mat}} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\rho(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \rho(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2} \\ &\quad - \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\vec{J}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')}{q^2} \\ &\quad + \int \frac{d^3q d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{[\vec{J}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{q}][\vec{J}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \cdot \vec{q}]}{q^4}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

O termo Coulombiano de (2.61) pode ser estudado usando uma forma conhecida para  $\rho$

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i e_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i), \quad (2.62)$$

assim, encontramos

$$\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} = \sum_{i>j} \frac{e_i e_j}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{e_i^2}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_i|}. \quad (2.63)$$

O último termo é infinito e representa a interação de uma partícula carregada com ela mesma. Normalmente este termo é desprezado, pelo fato de se considerar a interação entre partículas distintas situadas em pontos diferentes.

## 2.2 Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (QCD) baseia-se no postulado de simetria local (invariância de calibre)  $SU(3)$  associada à carga de cor; a sua densidade lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}_\xi (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi_\xi \quad (2.64)$$

onde há soma sobre índice repetido,  $\psi_\xi(x)$  é o campo de quarks,  $\xi \equiv (f, s, c)$  é uma notação compacta que representa um índice coletivo de sabor, spin e cor respectivamente;  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac e  $m$  a matriz de massa dos quarks. O tensor de campo  $F_{\mu\nu}^a$  e a derivada covariante  $D_\mu$  são dados por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.65)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a. \quad (2.66)$$

Esta é uma teoria de Yang-Mills (TYM), também chamada de teoria de calibre não-abeliana e que estende a álgebra do grupo  $U(1)$  da teoria eletromagnética (TEM). Na TEM as cargas elétricas  $Q$  obedecem uma álgebra comutativa, característica do grupo  $U(1)$  que as descreve. A extensão realizada pela TYM adota uma álgebra não-comutativa do grupo de simetria. Neste sentido, um campo de Yang-Mills  $A_\mu^a(x)$  e um campo espinorial  $\psi(x)$  se transformam usualmente sob uma representação irredutível do grupo  $SU(2)$  ou do  $SU(3)$ . Pode-se, como ocorre na eletrodinâmica, definir um “momento canonicamente conjugado”  $\Pi_\mu^a$  dado por

$$\Pi_\mu^a \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_0 A^{a\mu})} = F_{\mu 0}^a \quad (2.67)$$

e proceder numa tentativa de conciliar a invariância de calibre e a quantização da teoria partindo novamente do comutador

$$[A_\mu^a(\vec{x}, t), \Pi_\nu^b(\vec{y}, t)] = i \delta^{ab} g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.68)$$

no caso  $\mu = \nu = 0$  obtemos

$$[A_0^a(\vec{x}, t), \Pi_0^b(\vec{y}, t)] = i \delta^{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.69)$$

no entanto, da equação (2.67), vemos que

$$\Pi_0^b(\vec{y}, t) = F_{00}^b = 0 \quad (2.70)$$

o que é inconsistente com a relação de comutação (2.69). Novamente podemos definir, como na QED, uma densidade lagrangiana modificada para resolver este problema, fixando o calibre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (2.71)$$

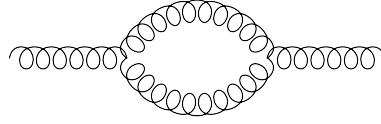
Como foi discutido na eletrodinâmica quântica, pelo fato do calibre estar fixado, a teoria não é mais invariante de calibre e aqui também as predições da teoria não deveriam depender deste parâmetro  $\xi$  e portanto o valor assumido é irrelevante, por exemplo poderia ser fixado em  $\xi = 1$  (calibre de Feynman) ou  $\xi \rightarrow 0$  (calibre de Landau). Desta forma o problema descrito em (2.70) desaparece

$$\Pi_\mu^a = F_{\mu 0}^a - \frac{1}{\xi} g_{\mu 0} (\partial^\nu A_\nu^a). \quad (2.72)$$

Em teorias abelianas como a QED este procedimento permite uma quantização consistente. No entanto, em teorias não-abelianas como a QCD outro problema aparece, ao realizar cálculos perturbativos de um loop para a autoenergia  $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)$  do glúon, como da figura (2.1). Utilizando uma lagrangiana como a descrita em (2.71), é possível mostrar que  $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)$  não satisfaz a condição de invariância de calibre

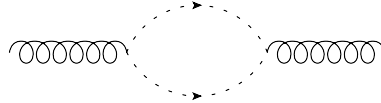
$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{ab}(q) = 0. \quad (2.73)$$





**Fig. 2.1:** Diagrama: loop para a autoenergia

Este problema nas teorias não-abelianas foi primeiro notado por Feynman no contexto da quantização do campo gravitacional. Um método “heurístico” para resolver essa dificuldade foi sugerido por Feynman e posteriormente desenvolvido por DeWitt [40]. Depois este método foi reformulado por Faddeev e Popov de uma maneira unificada, quantizando o sistema por integrais de caminho. O método consiste na introdução de novos campos fictícios chamados de “Fantasma de Faddeev-Popov”. O campo fantasma é um campo escalar com uma propriedade fermiônica, isto é, ele se constitui num campo escalar com uma álgebra anticomutante. A regra para a inclusão da contribuição do fantasma é adicioná-lo a todo diagrama de loop do campo de calibre. Como é visto na figura (2.2), a linha pontilhada denota o loop no fantasma [7].



**Fig. 2.2:** Diagrama: loop no fantasma

A descrição da física de hádrons a partir da QCD não é trivial, pois no regime de energia onde existem os estados ligados de hádrons a QCD é não-perturbativa. Portanto, há uma necessidade de se procurar por outras simetrias ou outros aspectos não necessariamente ligados à expansão de uma série perturbativa. Por exemplo, pode-se mostrar que a densidade lagrangiana da QCD de 3 sabores (2.64) no chamado *limite quiral*, isto é,  $m_u = m_d = m_s = 0$ , possui uma invariância global do tipo  $U(3)_L \otimes U(3)_R$ , onde  $L$  representa esquerdo (left) e  $R$  direito (right). Este grupo de simetria pode ser decomposto em componentes vetoriais e axiais obtendo

$$U(3)_L \otimes U(3)_R \equiv SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A. \quad (2.74)$$

A simetria  $U(1)_A$  é quebrada no processo de quantização, não sendo portanto uma simetria da respectiva teoria quântica [41], [42]. Acredita-se que a simetria quiral é espontaneamente quebrada como

$$U(3)_L \otimes U(3)_R / U(1)_A \longrightarrow SU(3)_V \otimes U(1)_V \quad (2.75)$$

com o aparecimento de oito bósons de Goldstone, sem massa, que formam o octeto pseudoescalar de mésons:  $\pi^0, \pi^\pm, \eta, K^0, \bar{K}^0, K^\pm$ . A simetria  $SU(3)_V$  corresponde à conservação do isospin e da estranheza, nas interações fortes, enquanto que a simetria  $U(1)_V$  está relacionada com a conservação do número bariônico. Entre as propriedades mais importantes da QCD de baixa energia estão a quebra dinâmica da simetria quiral e o confinamento da cor.

### 2.2.1 O calibre de Coulomb de cor

Os êxitos do modelo de quarks da década de 1960 levou diretamente para o desenvolvimento da QCD no início de 1970. A característica central das primeiras versões do modelo de quarks foi a utilização de quarks constituintes como os graus de liberdade relevantes dos campos de matéria. Embora o advento da QCD tem desfiado os detalhes do modelo, os quarks constituintes leves têm se tornado um padrão e a troca de um glúon é normalmente usada para descrever a dinâmica de curto alcance.

A QCD também indica onde o modelo de quarks pode falhar. A versão canônica não-relativística, depende de um potencial para a descrição da dinâmica de quarks e, portanto, negligencia o efeito de muitos corpos da QCD. Relacionado a estes aspectos está a questão da confiabilidade das aproximações não-relativísticas, a importância dos decaimentos hadrônicos, e a natureza quiral do pión, sendo que estes dois últimos dependem do comportamento não-perturbativo do glúon e são cruciais para o desenvolvimento de modelos robustos de QCD.

Para entender o espectro de massa hadrônico a partir da QCD bem como as propriedades de interação entre os hádrons, é necessário saber algo sobre a força de longo alcance responsável pelo confinamento dos quarks nos mésons e bárions. No entanto, não existe nenhuma descrição completamente satisfatória para esta região da QCD. Algumas informações podem ser extraídas diretamente da formulação da QCD na rede. Nesta formulação, os quarks estão localizados nos sítios de uma rede do espaço-tempo, e os campos de calibre são associados às ligações entre sítios vizinhos. As simetrias de calibre do modelo são as rotações independentes do  $SU(3)$  nos sítios da rede. Apesar de em princípio não haver dificuldade em calcular qualquer propriedade hadrônica usando esta técnica, a limitação é de ordem computacional que impõe restrições ao uso de redes de tamanhos realistas.

A abordagem hamiltoniana no calibre de Coulomb é apropriada para um exame do problema de estado ligado, porque os métodos familiares da Mecânica Quântica podem ser empregados e porque todos os graus de liberdade são físicos. Além disso, um potencial independente do tempo existe e que permite a construção de estados ligados em um espaço de Fock fixo.

Uma forma de verificar que a QCD generaliza a teoria eletromagnética é obter as respectivas equações de Maxwell de cor. Para tanto, podemos calcular as equações de movimento para os campos, a partir de (2.64), usando a equação de Euler-Lagrange, obtendo

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} - g f^{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu} = g J^{a\mu}, \quad (2.76)$$

onde foi definida a corrente fermiônica como

$$J^{a\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi. \quad (2.77)$$

A eq. (2.76) pode ser escrita de outra forma (trocando os índices mudos  $b \leftrightarrow c$ )

$$\delta^{ab} \partial_\mu F^{b\mu\nu} + g f^{abc} A_\mu^c F^{b\mu\nu} = g J^{a\mu}, \quad (2.78)$$

ou seja

$$[\delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c] F^{b\mu\nu} = g J^{a\nu}. \quad (2.79)$$

Podemos definir a seguinte derivada

$$D_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab} \partial_\mu + g f^{abc} A_\mu^c \quad (2.80)$$

Assim (2.76) fica

$$D_\mu^{ab} F^{b\mu\nu} = g J^{a\nu} \quad (2.81)$$

que é a forma covariante da equação de Maxwell de cor. Partindo da definição de  $F_{\mu\nu}^a$  em (2.65) vamos encontrar uma expressão para os campos cromoeletrico  $\vec{E}^a$  e cromomagnético  $\vec{B}^a$ , lembrando que

$$A^{a\mu} = (A^{0a}, \vec{A}^a) \quad ; \quad J^{a\mu} = (\rho_g^a, \vec{J}^a). \quad (2.82)$$

Podemos fazer a identificação dos campos  $\vec{E}^a$  e  $\vec{B}^a$  com o tensor  $F_{\mu\nu}^a$  de forma similar ao eletromagnetismo.

$$\begin{aligned} E^{ai} &= -F^{a0i} \\ B^{ai} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}^a \quad \text{ou} \quad F^{aij} = -\epsilon^{ijk} B_k^a \end{aligned} \quad (2.83)$$

assim

$$E^{ai} = - \left[ \partial^0 A^{ai} - \partial^i A^{a0} - g f^{abc} A^{b0} A^{ci} \right] = - \left[ \frac{\partial A^{ai}}{\partial t} - \frac{\partial A^{0a}}{\partial x_i} - g f^{abc} A^{0b} A^{ci} \right] \quad (2.84)$$

ou na forma vetorial

$$\vec{E}^a = -\frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} - \vec{\nabla} A^{0a} + g f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c \quad (2.85)$$

Para o campo magnético de cor  $B_\mu^a$  temos

$$\begin{aligned} B^{ai} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}^a = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} [\partial_j A_k^a - \partial_k A_j^a - g f^{abc} A_j^b A_k^c] \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_k A_j^a + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} g f^{abc} A_j^b A_k^c \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2} \epsilon^{ikj} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} g f^{abc} A_j^b A_k^c \\ &= -\epsilon^{ijk} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon^{ijk} A_j^b A_k^c \end{aligned} \quad (2.86)$$

ou na forma vetorial

$$\vec{B}^a = \vec{\nabla} \times \vec{A}^a + \frac{1}{2} g f^{abc} \vec{A}^b \times \vec{A}^c \quad (2.87)$$

Podemos reescrever a derivada  $D_\mu^{ab}$  de (2.80) na forma não-covariante

$$D_0^{ab} \implies \partial_t^{ab} = \delta^{ab} \frac{\partial}{\partial t} + g f^{abc} A^{0c} \quad (2.88)$$

$$D_j^{ab} \implies \vec{D}^{ab} = \delta^{ab} \vec{\nabla} - g f^{abc} \vec{A}^c. \quad (2.89)$$

Voltando à eq. de Maxwell de cor (2.76), vamos abrir esta expressão: considerando  $\nu = 0$

$$D_\mu^{ab} F^{b\mu 0} = D_0^{ab} \underbrace{F^{b00}}_{=0} + D_j^{ab} F^{bj0} = g J^a \quad (2.90)$$

ou ainda, a "Lei de Gauss" para o campo elétrico de cor fica

$$\vec{D}^{ab} \cdot \vec{E}^b = g \rho_q^a. \quad (2.91)$$

Muitas vezes é conveniente isolar a derivada usual  $\vec{\nabla}$  na lei de Gauss, obtendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a = g \rho_q^a + g f^{abc} \vec{E}^b \cdot \vec{A}^c. \quad (2.92)$$

Assim como no caso eletromagnético, no calibre de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a = 0 \quad (2.93)$$

e separamos o campo  $\vec{E}^a$  em suas componentes transversais ( $\perp$ ) e longitudinais ( $\parallel$ ) de forma análoga

$$\vec{E}^a = \left( 1 - \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a + \left( \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a \quad (2.94)$$

onde

$$\vec{E}_\perp^a = \left( 1 - \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a \quad ; \quad \vec{E}_\parallel^a = \left( \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a = -\vec{\nabla} \phi^a. \quad (2.95)$$

Pelas definições (2.95) é trivial verificar que as componentes  $\vec{E}_\perp^a$  e  $\vec{E}_\parallel^a$  satisfazem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\perp^a = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_\parallel^a = 0. \quad (2.96)$$

A lei de Gauss em (2.91) pode ser reescrita

$$\vec{D}^{ab} \cdot \vec{E}_\perp^b - \left( \vec{D}^{ab} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi^b = g \rho_q^a, \quad (2.97)$$

mas

$$\vec{D}^{ab} \cdot \vec{E}_\perp^b = \left( \delta^{ab} \vec{\nabla} - g f^{abc} \vec{A}^c \right) \cdot \vec{E}_\perp^b = -g f^{abc} \vec{E}_\perp^b \cdot \vec{A}^c \equiv -g \rho_g^a \quad (2.98)$$

onde foi usado a condição  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_\perp^a = 0$  e

$$\rho_g^a = f^{abc} \vec{E}_\perp^b \cdot \vec{A}^c, \quad (2.99)$$

assim (2.97) fica

$$-\left(\vec{D}^{ab} \cdot \vec{\nabla}\right) \phi^b = g \rho^a, \quad (2.100)$$

com  $\rho^a = \rho_q^a + \rho_g^a$  é a densidade total de carga de cor e  $\rho_g^a$  de (2.99) é a densidade de carga de cor dos glúons transversos. A equação de movimento para a componente longitudinal do campo elétrico é

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\parallel}^a \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E}^a \right] = \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) \cdot \left( -\frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} - \vec{\nabla} A^{0a} + g f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c \right) \right] \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left( \delta^{ab} \vec{\nabla} - g f^{abc} \vec{A}^c \right) A^{0b} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{D}^{ab} A^{0b}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

mas sabemos por (2.95) que  $\vec{E}_{\parallel}^a = -\vec{\nabla} \phi^a$ , assim comparando com (2.101) encontramos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}^{ab} A^{0b} = \nabla^2 \phi^a. \quad (2.102)$$

Combinando as equações (2.100) e (2.102), podemos obter uma solução formal para  $A^{0b}$

$$A^{0b} = \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} (-\nabla^2) \frac{1}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} g \rho^a, \quad (2.103)$$

De uma forma similar o campo transverso pode ser escrito

$$\vec{\Pi}^a \equiv \vec{E}_{\perp}^a = \partial_0 \vec{A} + g \left( 1 - \vec{\nabla} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \right) f^{abc} A^{0b} \vec{A}^c. \quad (2.104)$$

Após a quantização canônica, o campo transverso  $\vec{\Pi}^a$  se torna o momento canonicamente conjugado ao vetor potencial  $\vec{A}$  transverso. A formulação Hamiltoniana no calibre de Coulomb foi amplamente estudada na literatura e a obtenção do respectivo Hamiltoniano é conhecido e bastante elaborado [43]. A seguir vamos apenas escrever estas expressões. A interação não-abeliana instantânea de Coulomb é

$$H_C = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \rho^a(\vec{x}) K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \rho^b(\vec{y}), \quad (2.105)$$

onde

$$K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \equiv \langle \vec{x}, a | \frac{g}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} (-\nabla^2) \frac{g}{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}} | \vec{y}, b \rangle, \quad (2.106)$$

e a densidade total de carga de cor é

$$\rho^a(\vec{x}) = \rho_g^a(\vec{x}) + \rho_q^a(\vec{x}) = f^{abc} \vec{A}^b(\vec{x}) \cdot \vec{\Pi}^c(\vec{x}) + \psi^\dagger(\vec{x}) \frac{\lambda^a}{2} \psi(\vec{x}). \quad (2.107)$$

A forma final para o Hamiltoniano da QCD fica

$$H = H_q + H_g + H_{qg} + H_C, \quad (2.108)$$

onde

$$\begin{aligned}
 H_q &= \int d^3x \psi^\dagger \left( -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi, \\
 H_g &= \frac{1}{2} \int d^3x \left( \mathcal{J}^{-1/2} \vec{\Pi} \mathcal{J} \cdot \vec{\Pi} \mathcal{J}^{-1/2} + \vec{B} \cdot \vec{B} \right), \\
 H_{qg} &= -g \int d^3x \psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{A} \psi, \\
 H_C &= \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \mathcal{J}^{-1/2} \rho^a(x) \mathcal{J}^{1/2} K_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; \vec{A}) \mathcal{J}^{1/2} \rho^b(y) \mathcal{J}^{-1/2}, \quad (2.109)
 \end{aligned}$$

com  $\mathcal{J}$  sendo o determinante de Faddeev-Popov dado por

$$\mathcal{J} = \det(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}). \quad (2.110)$$

Uma dedução rigorosa do Hamiltoniano quântico não-abeliano no calibre de Coulomb foi dada por Schwinger [44] e Christ e Lee [45], enquanto Zwanziger mostrou como obter o este Hamiltoniano com a regularização na rede [46]. O Hamiltoniano quântico pode ser obtido transformando o Hamiltoniano canônico no calibre  $A^0 = 0$  para o calibre de Coulomb.

## 2.3 O Potencial de Fermi-Breit

Como foi discutido nas seções anteriores, do ponto de vista histórico, o modelo de quarks precedeu ao desenvolvimento da QCD e da ideia de glúons. A descoberta da simetria  $SU(3)$  dos bárions e mésons abriu o caminho para criar o modelo de quarks, cuja versão mais simples foi a de um modelo não relativístico (sem cor) introduzido para explicar os números quânticos do espectro bariônico e mesônico de baixa energia [3], [4]. Este modelo foi estendido para tratar de todas as possíveis propriedades dos hádrons utilizando-se das hipóteses dinâmicas mais simples [47]. Os resultados obtidos para a aniquilação núcleon-antinúcleon, *splittings* de massa dos hádrons, propriedades eletromagnéticas e etc estavam, surpreendentemente, em boa concordância com os resultados da espectroscopia hadrônica. O grau de liberdade de cor foi introduzido em modelos de quarks fenomenológicos em 1973 [48].

Após a introdução dos conceitos de liberdade assintótica e confinamento nas teorias de calibre não-abelianas, A. De Rújula, H. Georgi e S. L. Glashow (DGG) propuseram [49] introduzir ideias da QCD no modelo de quarks. Eles atribuíram a dependência em spin da interação de dois corpos à parte dependente de spin da interação de troca de um glúon. Isto explicou pela primeira vez o sinal do splitting hiperfino, isto é, porque a  $\Delta$  é mais pesada que o núcleon e relacionou as respectivas magnitudes do splitting hiperfino às massas dos quarks.

As principais hipóteses deste modelo são:

1. Numa primeira aproximação, os hádrons podem ser classificados em multipletos de  $SU(6)$ .

2. Os quarks são confinados por forças de longo alcance invariantes por  $SU(3) \otimes SU(2)$ , sendo que a simetria  $SU(3)$  é quebrada via  $m_u = m_d \neq m_s$ .
3. Liberdade assintótica na QCD para obtenção de potencial dependente de spin através da redução não relativística do diagrama correspondente à troca de um glúon, analogamente à obtenção do potencial de Fermi-Breit, no caso Coulombiano.

O Hamiltoniano do modelo de quarks neste contexto pode ser descrito por duas partes: uma que usualmente é chamada de *hiperfina* e a outra responsável pelo confinamento

$$H = H_{\text{hip}} + H_{\text{conf}}. \quad (2.111)$$

A partir da parte hiperfina vamos obter o potencial de Fermi-Breit de interação entre quarks, inspirado no Hamiltoniano da QED no calibre de Coulomb (2.61):

$$H_{\text{hip}} = T_{\text{qq}} + V_{\text{qq}} \quad (2.112)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\text{qq}} &= \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \left[ -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right] \psi(\vec{x}) \\ V_{\text{qq}} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3x d^3y J^\mu(\vec{x}) D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) J^\nu(\vec{y}) \end{aligned} \quad (2.113)$$

onde  $\mathcal{F}^a \equiv \lambda^a/2$ ,  $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ ,  $D_{\mu\nu}$  é o potencial de troca de um glúon e  $\psi(x)$  é o campo de Dirac para os quarks. Para  $H_{\text{hip}}$  ser o análogo ao calibre de Coulomb de (2.61), escreveremos o potencial de troca de um glúon da seguinte forma

$$D_{00}(\vec{q}) = -\frac{4\pi\alpha_s}{q^2} \quad ; \quad D_{0i}(\vec{q}) = 0 \quad ; \quad D_{ij}(\vec{q}) = \frac{4\pi\alpha_s}{q^2} \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right). \quad (2.114)$$

O campo de quarks pode ser expandido por

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \sum_s [u_s(\vec{p})q_s(\vec{p}) + v_s(-\vec{p})\bar{q}_s^\dagger(-\vec{p})] \quad (2.115)$$

onde apenas o índice de spin é mostrado explicitamente;  $q^\dagger$ ,  $q$  são os operadores de criação e destruição de quarks e  $\bar{q}^\dagger$ ,  $\bar{q}$  são os operadores de criação e destruição de anti-quarks respectivamente, obedecendo às seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{q_{fsc}(\vec{p}), q_{f's'c'}(\vec{p}')\} &= \{\bar{q}_{fsc}(\vec{p}), \bar{q}_{f's'c'}(\vec{p}')\} = 0, \\ \{q_{fsc}(\vec{p}), q_{f's'c'}^\dagger(\vec{p}')\} &= \{\bar{q}_{fsc}(\vec{p}), \bar{q}_{f's'c'}^\dagger(\vec{p}')\} = \delta_{ff'} \delta_{ss'} \delta_{cc'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Os espinores de (2.115) são

$$u_s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} f(\vec{p}) \chi_s \\ g(\vec{p}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_s \end{pmatrix} \quad ; \quad v_s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} g(\vec{p}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_s^c \\ f(\vec{p}) \chi_s^c \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

com

$$f(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \quad ; \quad g(\vec{p}) = \frac{1}{E_p + m} \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \quad (2.118)$$

e  $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$  e o espinor de Pauli definido por  $\chi_s^c = -i\sigma^2\chi_s^*$ , sendo normalizado da seguinte forma

$$\chi_s^*\chi_{s'} = \chi_s^{c*}\chi_{s'}^c = \delta_{ss'}. \quad (2.119)$$

A densidade de corrente de (2.113) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} J^\mu(\vec{x}) &= \psi^\dagger(\vec{x})\gamma^0\gamma^\mu\psi(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \sum_{ss'} \left[ u_{s'}^\dagger(\vec{p}')\gamma^0\gamma^\mu u_s(\vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}')q_s(\vec{p}) \right. \\ &\quad + u_{s'}^\dagger(\vec{p}')\gamma^0\gamma^\mu v_s(-\vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}')\bar{q}_s^\dagger(-\vec{p}) \\ &\quad + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}')\gamma^0\gamma^\mu u_s(\vec{p}) \bar{q}_{s'}(-\vec{p}')q_s(\vec{p}) \\ &\quad \left. + v_{s'}^\dagger(-\vec{p}')\gamma^0\gamma^\mu v_s(-\vec{p}) \bar{q}_{s'}(-\vec{p}')\bar{q}_s^\dagger(-\vec{p}) \right]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Vamos nos concentrar, momentaneamente, apenas na parte que envolve quarks em (2.120), pelo fato da parte de antiquarks ter um resultado similar, isto é,

$$\begin{aligned} J^\mu(\vec{x}) &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \sum_{ss'} u_{s'}^\dagger(\vec{p}')\gamma^0\gamma^\mu u_s(\vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}')q_s(\vec{p}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3p' e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} \sum_{ss'} J_{ss'}^\mu(\vec{p}', \vec{p}) q_{s'}^\dagger(\vec{p}')q_s(\vec{p}) \end{aligned} \quad (2.121)$$

e também

$$D_{\mu\nu}(\vec{x} - \vec{y}) = \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} D_{\mu\nu}(\vec{p}). \quad (2.122)$$

O potencial de interação de (2.113), considerando apenas a interação quark-quark e o fato  $D_{0i}(\vec{p}) = 0$  em (2.114), resulta em

$$\begin{aligned} V_{\text{qq}} &= \frac{1}{2} \sum_a \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \sum_{s_n, i_m} \int d^3p_1 \dots d^3p_4 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\ &\quad \times [J_{I_1 I_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{00}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \\ &\quad + J_{I_1 I_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{ij}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^j(\vec{p}_3, \vec{p}_4)] q_{I_1}^\dagger(\vec{p}_1) q_{I_2}(\vec{p}_2) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}_3) q_{I_4}(\vec{p}_4) \end{aligned} \quad (2.123)$$

com  $I \equiv (f, s)$  ou escrevendo (2.123) em *ordenamento normal*:

$$\begin{aligned} V_{\text{qq}} &= -\frac{1}{2} \sum_{a, s_n, i_m} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3p_1 \dots d^3p_4 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\ &\quad \times [J_{I_1 I_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{00}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \\ &\quad + J_{I_1 I_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{ij}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) J_{I_3 I_4}^j(\vec{p}_3, \vec{p}_4)] q_{I_1}^\dagger(\vec{p}_1) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}_3) q_{I_2}(\vec{p}_2) q_{I_4}(\vec{p}_4) \end{aligned} \quad (2.124)$$



A expressão (2.124) pode ser reescrita fazendo  $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ ,  $\vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}$ ,  $\vec{p}_4 \rightarrow \vec{p}'$  e integrando em  $\vec{p}_3$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}} &= -\frac{1}{2} \sum_{a, s_n, i_m} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3q d^3p d^3p' \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\
 &\quad \times [J_{I_1 I_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) D_{00}(\vec{q}) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') + J_{I_1 I_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) D_{ij}(\vec{q}) J_{I_3 I_4}^j(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}')] \\
 &\quad \times q_{I_1}^\dagger(\vec{p} + \vec{q}) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}' - \vec{q}) q_{I_2}(\vec{p}) q_{I_4}(\vec{p}'). \quad (2.125)
 \end{aligned}$$

Usando o restante da definição do potencial  $D_{00}$  e  $D_{ij}$  de (2.114) em (2.125) obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}} &= -\frac{1}{2} \sum_{a, s_n, i_m} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a \int d^3q d^3p d^3p' \delta_{f_1 f_2} \delta_{f_3 f_4} \\
 &\quad \times \left[ -\frac{4\pi \alpha_s}{q^2} J_{I_1 I_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) J_{I_3 I_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') + \frac{4\pi \alpha_s}{q^2} \vec{J}_{I_1 I_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{J}_{I_3 I_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4\pi \alpha_s}{q^4} [\vec{J}_{I_1 I_2}(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) \cdot \vec{q}] [\vec{J}_{I_3 I_4}(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') \cdot \vec{q}] \right] \\
 &\quad \times q_{I_1}^\dagger(\vec{p} + \vec{q}) q_{I_3}^\dagger(\vec{p}' - \vec{q}) q_{I_2}(\vec{p}) q_{I_4}(\vec{p}'). \quad (2.126)
 \end{aligned}$$

Vamos introduzir a seguinte notação

$$f_1 = f(\vec{p}_1) \quad ; \quad g_1 = g(\vec{p}_1) \quad ; \quad \text{etc...} \quad (2.127)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^0 u_{s_2}(\vec{p}_2) = f_1 f_2 \delta_{s_1 s_2} + g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2} \\
 J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^i u_{s_2}(\vec{p}_2) = f_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2} + f_2 g_1 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \sigma^i \chi_{s_2}. \quad (2.128)
 \end{aligned}$$

Para obter o respectivo Hamiltoniano não-relativístico o operador de quarks  $\psi(\vec{x})$  precisa ser escrito em termos de uma expansão em potências do momento  $\vec{p}$ :

$$f(\vec{p}) \simeq 1 - \frac{p^2}{8m} \quad ; \quad g(\vec{p}) \simeq \frac{1}{2m}. \quad (2.129)$$

Após as respectivas substituições e algumas manipulações algébricas, obtemos o potencial de Fermi-Breit de troca de um glúon que escreveremos na notação usual

$$\begin{aligned}
 V_{\text{qq}}^{\text{OGEP}} &= \frac{\alpha_s}{r} - \frac{\alpha_s}{2m_i m_j} \left( \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{r} + \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{p}_i) \vec{p}_j}{r^3} \right) - \frac{\pi \alpha_s}{2} \delta^3(\vec{r}) \left( \frac{1}{m_i^2} + \frac{1}{m_j^2} \right) \\
 &\quad - \frac{\alpha_s}{2r^3} \left\{ \frac{1}{m_i^2} \vec{L}_i \cdot \vec{S}_i - \frac{1}{m_j^2} \vec{L}_j \cdot \vec{S}_j + \frac{1}{m_i m_j} [2 \vec{L}_i \cdot \vec{S}_j - 2 \vec{L}_j \cdot \vec{S}_i] \right\} \\
 &\quad - \frac{\alpha_s}{m_i m_j} \left\{ \frac{8\pi}{3} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \delta(\vec{r}) + \frac{1}{r^3} \left[ \frac{3(\vec{S}_i \cdot \vec{r})(\vec{S}_j \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \right] \right\} \quad (2.130)
 \end{aligned}$$

onde  $r_i$ ,  $p_i$ ,  $m_i$ , são a posição, momento e massa do  $i$ -ésimo quark,  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$  e  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  é o momento angular. No potencial de Fermi-Breit destacamos alguns pontos importantes. A força spin-spin

$$V_{ss}(\vec{r}) = -\frac{8\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \delta(\vec{r}) \quad (2.131)$$

que é responsável por uma categoria muito importante de *splittings* como, por exemplo, o splitting de massa  $\Delta - N$  nos bárions e  $\rho - \pi$  e  $K^* - K$  nos mésons. A força da forma

$$V_{SO}(\vec{r}) \sim \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (2.132)$$

é chamada de spin-órbita e descreve, no modelo de quarks, o splitting  $L - S$ . O espaçamento não-uniforme dos níveis  $L = 1$  e  $S = 1$  pode ser compreendido se pensarmos em termos de um potencial tensorial do tipo

$$V_T(\vec{r}) \sim \frac{3(\vec{S}_i \cdot \vec{r})(\vec{S}_j \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j. \quad (2.133)$$

Para propósitos futuros, pode-se utilizar a convenção de soma, agora incluindo índices contínuos, na expressão para  $V_{qq}$  de (2.124) para escrever

$$V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \equiv -\delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\rho - \vec{p}_\sigma) \delta_{f_\mu f_\rho} \delta_{f_\nu f_\sigma} \mathcal{F}^a \cdot \mathcal{F}^a V_{qq}^{\text{OGEP}}(\mu\nu; \sigma\rho) \quad (2.134)$$

onde o termo  $V_{qq}^{\text{OGEP}}$  é de troca de um glúon dado por

$$V_{qq}^{\text{OGEP}}(\mu\nu; \sigma\rho) \equiv \left[ J_{I_\mu I_\rho}^0(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\rho) D_{00}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\rho) J_{I_\nu I_\sigma}^0(\vec{p}_\nu, \vec{p}_\sigma) \right. \\ \left. + J_{I_\mu I_\rho}^i(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\rho) D_{ij}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\rho) J_{I_\nu I_\sigma}^j(\vec{p}_\nu, \vec{p}_\sigma) \right]. \quad (2.135)$$

Podemos escrever,  $V$  em (2.124), numa forma simples e compacta

$$V_{qq} = \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \quad (2.136)$$

onde os índices  $\mu, \nu, \dots$  representam momento, spin, sabor e cor. Assim, o Hamiltoniano  $H_{\text{hip}}$  completo do modelo escrito em segunda quantização fica

$$H_{\text{hip}} = T(\mu) q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu) \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma \\ + \frac{1}{2} V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma. \quad (2.137)$$

# Capítulo 3

## Revisão da literatura: Teoria de Espalhamento

Neste capítulo faremos uma breve revisão da teoria formal de espalhamento, seguindo o texto e a notação de [50]. Este assunto será central no estudo a ser desenvolvido nesta tese. Na dedução a ser apresentada vamos manter o  $\hbar$ , sendo que no restante da tese usamos a convenção das unidades naturais:  $\hbar = c = 1$ .

### 3.1 A Equação de Lippmann-Schwinger

A teoria de espalhamento, que será revisada nesta seção, tem como ponto de partida o operador Hamiltoniano  $H$  definido por

$$H = H_0 + V(R) \quad (3.1)$$

onde a parte livre é  $H_0 = P^2/2m$  e  $V(R)$  é o potencial, função do operador de posição  $R$ . As forças se anulam para  $r \rightarrow \infty$ , ficando excluídos potenciais tais como o potencial periódico, sujeito à condição

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

O problema que queremos estudar está brevemente resumido na figura (3.1) e consiste em resolver a seguinte equação de Schrödinger

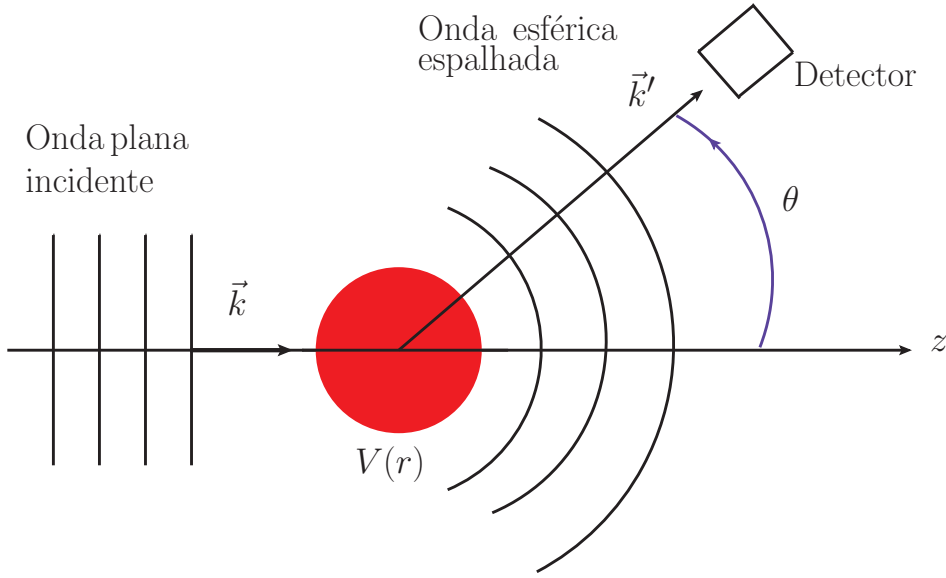
$$(E - H_0) |\vec{k}+\rangle = V |\vec{k}+\rangle, \quad (3.3)$$

o ket  $|\vec{k}+\rangle$  corresponde a uma solução de espalhamento de onda emergente (“outgoing scattered waves”). A solução formal de (3.3) pode ser escrita como

$$|\vec{k}+\rangle = |\vec{k}\rangle + \frac{1}{E - H_0} V |\vec{k}+\rangle \quad (3.4)$$

onde  $|\vec{k}\rangle$  corresponde à onda incidente e satisfaz a equação livre

$$(E - H_0) |\vec{k}\rangle = 0. \quad (3.5)$$



**Fig. 3.1:** Espalhamento de uma onda plana

Pelo fato do espectro de  $H_0$  ser contínuo a equação (3.4) diverge quando  $H_0 = E$ . Uma forma de tratar este problema consiste em definir um *resolvente*  $G_0(E)$  no plano complexo

$$G_0^\pm(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} G_0(E \pm i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (E - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}. \quad (3.6)$$

Quando a integração, no plano complexo, fecha o contorno pela parte positiva (negativa) do eixo imaginário isto corresponde a uma onda espalhada emergente (imergente), assim obtemos

$$|\vec{k}\pm\rangle = |\vec{k}\rangle + G_0^\pm(E) V |\vec{k}\pm\rangle \quad (3.7)$$

que é a *equação de Lippmann-Schwinger* (LS). Esta equação pode ser projetada no estado de posição  $|\vec{r}\rangle$ . Vamos trabalhar com a solução  $|\vec{k}+\rangle$

$$\langle \vec{r} | \vec{k}+\rangle = \langle \vec{r} | \vec{k}\rangle + \int d\vec{r}' \langle \vec{r} | G_0^+(E) | \vec{r}'\rangle \langle \vec{r}' | V(R) | \vec{k}+\rangle. \quad (3.8)$$

Definindo

$$\psi_k^+(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \vec{k}+\rangle \quad ; \quad \phi_{\vec{k}}(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | \vec{k}\rangle = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (3.9)$$

e também

$$G_k^\pm(\vec{r}, \vec{r}') \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \langle \vec{r} | G_0^\pm(E) | \vec{r}'\rangle = -\frac{e^{\pm i k |\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.10)$$

com  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ . Esta última expressão em (3.10) é obtida após a integração no plano complexo. Assim a solução de espalhamento de onda emergente resulta

$$\psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{1}{4\pi} \int d\vec{r}' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} U(r') \psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}') \quad (3.11)$$

onde  $U(r) = (2m/\hbar^2)V(r)$ . A forma assintótica de (3.11), quando  $r \gg r'$ , fica

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}) &\sim \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d\vec{r}' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} U(r') \psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{(2\pi)^{3/2}}{4\pi} \int d\vec{r}' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} U(r') \psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}') \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

com  $k' = k \hat{r}$  e  $|\vec{k}'| = |\vec{k}'|$ . A equação (3.12) pode ser reescrita como

$$\psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}) \sim \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\vec{k}', \vec{k}) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad (3.13)$$

onde  $f(\vec{k}', \vec{k})$  é chamada de *amplitude de espalhamento*, dada por

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \int d\vec{r}' \phi_{\vec{k}'}(\vec{r}') V(r') \psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}'). \quad (3.14)$$

Na obtenção de (3.14) foi usada a definição de  $\phi_{\vec{k}}(\vec{r})$  e  $\psi_{\vec{k}}^+(\vec{r}')$  de (3.9) e pode ser escrita como

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | V | \vec{k} + \rangle. \quad (3.15)$$

## 3.2 A matriz- $T$ de transição

Voltamos para a equação de Lippmann-Schwinger (3.7), desta vez sendo escrita da seguinte forma

$$|\vec{k}\pm\rangle = \Omega^\pm(E)|\vec{k}\rangle \quad (3.16)$$

onde  $\Omega^\pm(E)$ , chamado de *operador de onda de Möller*, é dado por

$$\Omega^\pm(E) = [I - G_0^\pm(E)V]^{-1}. \quad (3.17)$$

Este operador pode ser escrito de uma forma alternativa, introduzindo a função de Green total, isto é, envolvendo o Hamiltoniano completo  $H$

$$G^\pm(E) = (E - H \pm i\epsilon)^{-1}. \quad (3.18)$$

Dois operadores arbitrários e não singulares,  $A$  e  $B$ , podem ser invertidos obtendo as seguintes identidades relacionadas às diferenças dos inversos

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \begin{cases} \frac{1}{A}(B-A)\frac{1}{B} & , \text{ (forma 1)} \\ \frac{1}{B}(B-A)\frac{1}{A} & , \text{ (forma 2)}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Assim usando as identidades enunciadas em (3.19) e também as definições (3.6) e (3.18) para  $G_0^\pm(E)$  e  $G^\pm(E)$ , respectivamente, obtemos duas formas equivalentes para  $G^\pm(E)$ ,

$$G^\pm(E) = G_0^\pm(E) + G^\pm(E) V G_0^\pm(E) \quad (3.20a)$$

$$G^\pm(E) = G_0^\pm(E) + G_0^\pm(E) V G^\pm(E). \quad (3.20b)$$

Uma relação fácil de provar como verdadeira, usando (3.20a), é a seguinte equação

$$[I + G^\pm(E) V] [I - G_0^\pm(E) V] = I. \quad (3.21)$$

Esta equação podemos multiplicar à direita pela definição de  $\Omega^\pm(E)$ , dada em (3.17) e obter a sua representação alternativa em termo da função de Green completa  $G^\pm(E)$

$$\Omega^\pm(E) = I + G^\pm(E) V. \quad (3.22)$$

Pode-se definir o *operador de transição*  $T$  como

$$T(E) \equiv V \Omega^+(E). \quad (3.23)$$

Esta definição pode ser combinada com o resultado (3.22) para obter o operador  $T$  em termos do potencial

$$T(E) = V + V G^+(E) V. \quad (3.24)$$

A chamada matriz- $T$  é obtida pelo sanduíche do operador  $T$  entre estados do momento  $\vec{k}$ , ou seja,

$$T_E(\vec{k}', \vec{k}) = \langle \vec{k}' | T(E) | \vec{k} \rangle, \quad (3.25)$$

mas pela definição (3.23), temos

$$T_E(\vec{k}', \vec{k}) = \langle \vec{k}' | V \Omega^+(E) | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}' | V | \vec{k}^+ \rangle \quad (3.26)$$

onde foi usado a equação (3.16). Na seção anterior foi mostrado a relação (3.15) que envolvia a amplitude de espalhamento  $f(\vec{k}', \vec{k})$ . Este resultado pode agora ser combinada com  $T_E(\vec{k}', \vec{k})$  fornecendo uma expressão central para a teoria de espalhamento

$$T_E(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{\hbar^2}{4\pi^2 m} f(\vec{k}', \vec{k}). \quad (3.27)$$

O passo seguinte, muito importante, consiste em encontrar uma equação integral que permite calcular diretamente  $T(E)$ , sem ter que passar primeiro pela determinação do estado  $|\vec{k}^+\rangle$ . Isto significa ter uma forma equivalente da equação de LS, sem referência ao estado  $|\vec{k}^+\rangle$ , para tanto pode-se substituir as Eqs. (3.20a) e (3.20b) em (3.24) e após alguma manipulação encontramos

$$T(E) = V + T(E) G_0^+(E) V \quad (3.28a)$$

$$T(E) = V + V G_0^+(E) T(E). \quad (3.28b)$$

A respectiva matriz- $T$  resulta do sanduíche em estados de momento  $|\vec{k}\rangle$  de (3.28a) ou (3.28b). Por exemplo, se a opção for a Eq. (3.28b), então temos

$$T_E(\vec{k}, \vec{k}') = V(\vec{k}, \vec{k}') + \int d\vec{k}'' V(\vec{k}, \vec{k}'') \frac{1}{E - H_0(k'') + i\epsilon} T_E(\vec{k}'', \vec{k}'). \quad (3.29)$$

Podemos agora definir o operador de espalhamento  $S$ , cujos elementos de matriz entre estados de partícula livre definem a chamada *matriz- $S$* , ou seja,

$$S(\vec{k}, \vec{k}') = \langle \vec{k} | S | \vec{k}' \rangle \equiv \langle \vec{k} - | \vec{k}' + \rangle. \quad (3.30)$$

A relação entre a matriz- $S$  e a matriz- $T$  pode ser estabelecida partindo da própria equação LS (3.16), para inicialmente mostrar

$$\langle \vec{k} - | = \langle \vec{k} + | + \langle \vec{k} | V [G^+(E) - G^-(E)] , \quad (3.31)$$

aqui foi usado o fato de  $[G^\pm(E)]^\dagger = G^\mp(E)$ . Multiplicando a Eq. (3.31) à direita por  $|\vec{k}' + \rangle$ , temos

$$\langle \vec{k} - | \vec{k}' + \rangle = \langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle + \langle \vec{k} | V [G^+(E) - G^-(E)] | \vec{k}' + \rangle. \quad (3.32)$$

Considerando  $H|\vec{k}' + \rangle = E'|\vec{k}' + \rangle$ , podemos avaliar o segundo termo de (3.32):

$$[G^+(E) - G^-(E)] |\vec{k}' + \rangle = \left[ \frac{1}{E - E' + i\epsilon} - \frac{1}{E - E' - i\epsilon} \right] |\vec{k}' + \rangle, \quad (3.33)$$

mas sabemos

$$\frac{1}{E - E' + i\epsilon} = \mathcal{P} \left( \frac{1}{E - E'} \right) - i\pi\delta(E - E') \quad (3.34)$$

onde  $\mathcal{P}(\dots)$  é o valor principal da expressão, observando que  $\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}')$  e usando (3.26), obtemos

$$\langle \vec{k} | S | \vec{k}' \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}') - 2\pi i \delta(E - E') \langle \vec{k} | T(E) | \vec{k}' \rangle. \quad (3.35)$$

Como um último resultado, das definições (3.16) e (3.30), encontramos uma forma para o operador  $S$  em termos dos operadores de onda de Möller

$$S = \Omega^{-\dagger}(E) \Omega^+(E). \quad (3.36)$$

### 3.3 Expansão em Ondas Parciais

A corrente de probabilidade é dada pela definição usual da Mecânica Quântica

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left[ \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left[ \psi^* \vec{\nabla} \psi \right]. \quad (3.37)$$

A partir desta definição, uma onda plana na região assintótica dada por (3.13) que se propaga com velocidade  $v$ , por exemplo na direção  $z$ , tem como corrente incidente  $j_{inc}$  e corrente espalhada  $j_{esp}$  dadas por

$$j_{inc} = v \quad ; \quad j_{esp} = \frac{v}{r^2} |f|^2. \quad (3.38)$$

Como é visto na figura (3.1), se a partícula espalhada for medida, num ângulo  $\theta$  em relação à direção do feixe incidente, por um detector de área diferencial  $da$  e colocado a uma distância  $r$ , o ângulo sólido subtendido é  $d\Omega = da/r^2$ . O número de partículas detectadas por unidade de tempo fica

$$\frac{dN_{eps}}{dt} = j_{esp} da = j_{esp} r^2 d\Omega. \quad (3.39)$$

O número de partículas espalhadas no ângulo sólido  $d\Omega$  no ângulo  $\theta$ , dividido pelo fluxo incidente define a chamada seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_{ins}} \frac{dN_{eps}}{dt}, \quad (3.40)$$

ou seja

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2. \quad (3.41)$$

Podemos escrever a função de onda como a soma sobre as componentes de momento angular  $l$ , ou seja, sobre as respectivas *ondas parciais*

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{u_l(r)}{r} Y_{l0}(\theta), \quad (3.42)$$

onde  $Y_{l0}(\theta)$  é o harmônico esférico  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  que independe de  $\phi$  e está relacionado com o polinômio de Legendre

$$Y_{l0}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (3.43)$$

Assintoticamente o potencial induz um deslocamento de fase  $\delta_l$  na função de onda radial  $u_l(r)$

$$u_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} c_l \operatorname{sen} \left( k r - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right) \quad (3.44)$$

e resulta numa função de onda total

$$\psi(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} a'_l Y_{l0}(\theta) \frac{\operatorname{sen} \left( k r - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right)}{kr}. \quad (3.45)$$



Esta função de onda pode ser comparada à função de onda assintótica (3.13) resultando

$$e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} a'_l Y_{l0}(\theta) \frac{\text{sen} \left( kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right)}{kr}, \quad (3.46)$$

onde após várias manipulações encontramos a amplitude de espalhamento em termos do deslocamento de fase

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{4\pi}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} e^{i\delta_l} \text{sen} \delta_l Y_{l0}(\theta) \quad (3.47)$$

ou ainda

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta) \quad (3.48)$$

com

$$f_l = \frac{e^{i\delta_l}}{k} \text{sen} \delta_l. \quad (3.49)$$

Usando (3.47) na expressão para a seção de choque diferencial (3.41) obtemos, após a integração, a seção de choque elástica

$$\sigma^{el} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{sen}^2 \delta_l = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |f_l|^2. \quad (3.50)$$

Agora, a matriz- $S$  decomposta em ondas parciais está relacionada com a amplitude de espalhamento  $f_l$  por

$$S_l = 1 + 2ik f_l \quad (3.51)$$

e com o deslocamento de fase por

$$S_l = e^{2i\delta_l}. \quad (3.52)$$

A relação entre as matrizes  $S$  e  $T$  dadas em (3.35) pode também ser representada em ondas parciais

$$S_l = 1 - 2\pi i T_l. \quad (3.53)$$

Combinando (3.51) e (3.53) encontramos uma relação, na expansão em ondas parciais, entre a amplitude de espalhamento  $f_l$  e a matriz- $T$

$$f_l = -\frac{\pi}{k} T_l. \quad (3.54)$$

Em muitas situações práticas de cálculos se faz necessária uma relação entre o deslocamento de fase  $\delta_l$  e a matriz- $T$ . A equação (3.52) pode ser escrita como

$$S_l = \cos 2\delta_l + i \text{sen} 2\delta_l \quad (3.55)$$

e da mesma forma  $T_l = T_l^R + iT_l^I$ . Colocando esta expressão para  $T_l$  e (3.55) em (3.53) é possível separar a parte real e imaginária, obtendo

$$1 - \cos 2\delta_l = -2\pi T_l^I \quad ; \quad \sin 2\delta_l = -2\pi T_l^R. \quad (3.56)$$

Usando identidades trigonométricas podemos reescrever o lado esquerdo de (3.56)

$$2 \sin^2 \delta_l = -2\pi T_l^I \quad ; \quad 2 \cos \delta_l \sin \delta_l = -2\pi T_l^R. \quad (3.57)$$

Fazendo a razão destas expressões encontramos

$$\tan \delta_l = \frac{T_l^I}{T_l^R}. \quad (3.58)$$

Resumindo, a estratégia de cálculo consiste na seguinte sequência de passos

1. Primeiro é definido o potencial  $V$  do respectivo problema.
2. Usando a Eq. (3.29) determina-se a matriz- $T$ . Este é um problema delicado, pois esta é uma equação integral onde  $T$  aparece em ambos os lados da equação. Esta situação pode ser contornada se olharmos para a Eq. (3.28b), vemos que ela pode ser escrita numa forma alternativa:  $T(E) = [1 - V G_0^+(E)]^{-1} V$ . Esta equação, então é avaliada entre os estados de momento  $\vec{k}$  e  $\vec{k}'$ . Existem vários métodos conhecidos na literatura para tratar este problema [51].
3. Com a matriz- $T$  determinada, calcula-se  $\delta_l$  usando a Eq. (3.58).
4. O conhecimento do deslocamento de fase  $\delta_l$  permite obter a seção de choque usando a equação (3.50).

### 3.4 A Aproximação de Born

Como foi apresentado na seção anterior, na equação de Lippmann-Schwinger aparece, no lado direito, o ket  $|\vec{k}+\rangle$  desconhecido:

$$|\vec{k}+\rangle = |\vec{k}\rangle + G_0^+(E) V(R) |\vec{k}+\rangle \quad (3.59)$$

o que resulta num aspecto não-trivial no momento de integrar esta equação. Uma aproximação muito usada, porém mais grosseira para  $|\vec{k}+\rangle$  consiste em escrever

$$|\vec{k}+\rangle \approx |\vec{k}\rangle. \quad (3.60)$$

Esta aproximação é razoável quando o potencial é pequeno, desta forma a matriz- $T$  fica

$$T_E(\vec{k}', \vec{k}) = \langle \vec{k}' | T(E) | \vec{k} \rangle = \langle \vec{k}' | V | \vec{k} + \rangle \approx \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle. \quad (3.61)$$

A equação (3.60) ou (3.61) é chamada de *aproximação de Born* (de primeira ordem). A validade desta aproximação reside na equação (3.60), ou seja, no quanto  $|\vec{k}+\rangle$  não difere de  $|\vec{k}\rangle$ . Em outras palavras a distorção da onda incidente deve ser pequena. Muitas vezes a qualidade da aproximação é testada avaliando uma equação que envolve o potencial, do tipo

$$\left| \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d\vec{x} \frac{e^{i\vec{k}r}}{r} V(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right| \ll 1. \quad (3.62)$$

### 3.4.1 Variáveis de Mandelstam

Nesta seção vamos trabalhar em unidades naturais, isto é,  $\hbar = c = 1$ . Vamos considerar o seguinte processo de espalhamento, que pode ser visto na figura (3.2),

$$A + B \rightarrow C + D,$$

descritos pelos seguintes quadrivetores de momento

$$p_i = (E_i, \vec{p}_i) \quad ; \quad \text{com } i = A, B, C, D. \quad (3.63)$$

As variáveis de Mandelstam são definidas pelas seguintes quantidades invariantes

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 \\ t &= (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2 \\ u &= (p_A - p_D)^2 = (p_B - p_C)^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

ou de forma aberta

$$\begin{aligned} s &= (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 = (E_C + E_D)^2 - (\vec{p}_C + \vec{p}_D)^2 \\ t &= (E_A - E_C)^2 - (\vec{p}_A - \vec{p}_C)^2 = (E_B - E_D)^2 - (\vec{p}_B - \vec{p}_D)^2 \\ u &= (E_A - E_D)^2 - (\vec{p}_A - \vec{p}_D)^2 = (E_B - E_C)^2 - (\vec{p}_B - \vec{p}_C)^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Quando avaliadas no centro de massa, a parte espacial de (3.63) fica

$$\vec{p}_A = -\vec{p}_B = \vec{p} \quad ; \quad \vec{p}_C = -\vec{p}_D = \vec{p}'. \quad (3.66)$$

Encontramos para a variável  $s$ :

$$s = (E_C + E_D)^2 = (E_A + E_B)^2 \quad (3.67)$$

com  $E_{A(B)}^2 = p^2 + m_{A(B)}^2$  e  $E_{C(D)}^2 = p'^2 + m_{C(D)}^2$ . Resolvendo a expressão de  $s$  para  $p^2$  ou  $p'^2$ , obtemos

$$p^2(s) = \frac{f(s, m_A, m_B)}{4s} \quad ; \quad p'^2(s) = \frac{f(s, m_C, m_D)}{4s}, \quad (3.68)$$

onde

$$f(s, m_i, m_j) = (s - m_i^2 - m_j^2)^2 - 4m_i^2 m_j^2. \quad (3.69)$$

Definindo  $z = \cos \theta$ , podemos escrever o produto escalar entre os vetores  $\vec{p}$  e  $\vec{p}'$

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = |\vec{p}| |\vec{p}'| \cos \theta = |\vec{p}| |\vec{p}'| z. \quad (3.70)$$

Combinando (3.68) e (3.69) em (3.70), encontramos

$$\vec{p} \cdot \vec{p}' = \frac{z}{4s} \sqrt{f(s, m_A, m_B) f(s, m_C, m_D)}. \quad (3.71)$$

A relação entre o  $p_{\text{lab}}$  e  $p$  do centro de massa é

$$p_{\text{lab}} = p(s) \frac{\sqrt{s}}{m_B} \quad (3.72)$$

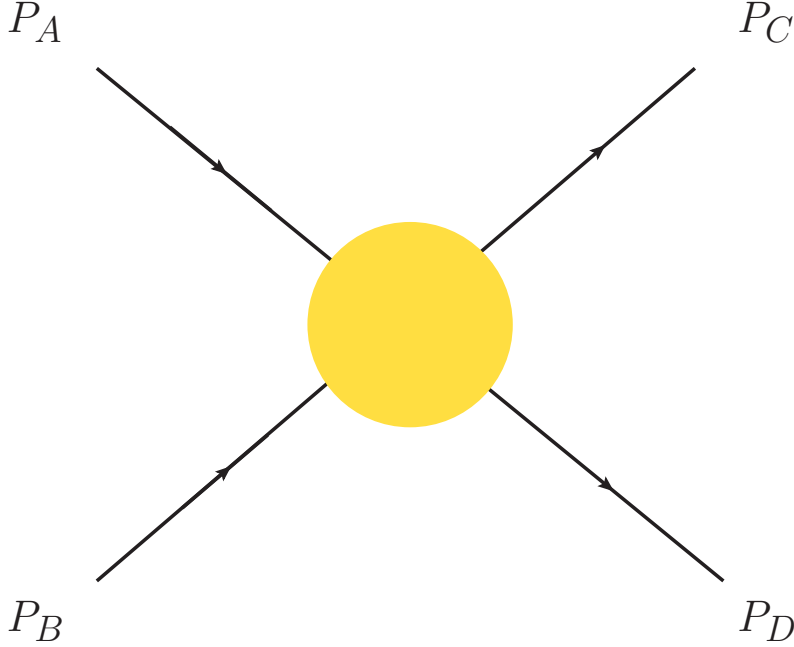


Fig. 3.2: Variáveis de Mandelstam

### 3.4.2 Seção de choque na Aproximação de Born

Na aproximação de Born o elemento de matriz (3.35) entre os estados iniciais e finais resulta na seguinte matriz- $S$

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) V_{fi}, \quad (3.73)$$

com  $V_{fi} = \langle f|V|i\rangle$ . Se o potencial apresentar invariância translacional podemos escrever  $V_{fi}$  em (3.73) como

$$V_{fi} = \delta(\vec{P}_f - \vec{P}_i) h_{fi} \quad (3.74)$$

onde  $h_{fi}$  é a nova amplitude de espalhamento. Esta amplitude pode ser relacionada com a seção de choque no referencial do centro de massa. Partindo da definição apresentada no Particle Data Group [52]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} |\mathcal{M}|^2 \quad (3.75)$$

onde  $\mathcal{M}$  é amplitude invariante de Feynman,  $|\vec{p}|$  e  $|\vec{p}'|$  são os módulos dos momentos do estado inicial e final. Agora, se definirmos  $z = \cos\theta$ , podemos então escrever  $d\Omega = 2\pi d\theta \sin\theta = -2\pi dz$ , após a integração de (3.75) em  $z$ :

$$\sigma(s) = \frac{1}{32\pi s} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \int_{-1}^{+1} dz |\mathcal{M}|^2. \quad (3.76)$$

A amplitude invariante  $\mathcal{M}$  está relacionada à amplitude  $h_{fi}$  por (ver [18]):

$$\mathcal{M} = 4(2\pi)^3 \sqrt{E_A E_B E_C E_D} h_{fi}. \quad (3.77)$$

Inserindo (3.77) em (3.76) obtemos

$$\sigma(s) = 32\pi^5 \mu_{AB} \mu_{CD} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \int_{-1}^{+1} dz |h_{fi}|^2 \quad (3.78)$$

onde  $\mu_{AB} = E_A E_B (E_A + E_B)^{-1}$ ,  $|\vec{p}'| = p'(s)$ ,  $|\vec{p}| = p(s)$ , definido em (3.68)-(3.69) e  $h_{fi} = h_{fi}(s, z)$ . Caso seja necessário estudar o problema no referencial do laboratório, pode-se parametrizar a seção de choque com a relação (3.72).

## Revisão da literatura: O formalismo de Fock-Tani

Neste capítulo iremos descrever o formalismo de Fock-Tani, cuja ideia consiste em efetuar uma troca de representação tal que os operadores associados às partículas compostas sejam reescritos em termos de operadores que satisfazem relações de anticomutação canônicas.

Partindo da representação do sistema no espaço de Fock, usando operadores de criação e aniquilação para as partículas constituintes elementares, consideramos um sistema contendo quarks e antiquarks que podem formar estados ligados (mésons e bárions compostos). Nesta representação, os estados de um méson (bárion) podem ser construídos a partir de operadores de criação de mésons (bárions), os quais podem ser definidos em termos de combinações lineares de produtos de operadores de criação de quarks e antiquarks. Vamos usar a argumentação apresentada nas teses de estudo de mésons e de bárions nos trabalhos de doutorado de Sérgio Szpigel (USP/1995) [53] e Dimiter Hadjimichief (IFT/1995) [54], respectivamente e a notação apresentada na dissertação de estudo de mésons-bárions no trabalho de mestrado de Bruna C. Folador [55](UFRGS/2015).

### 4.1 A representação de Fock-Tani

Vamos considerar o estado de um méson composto por um quark e um antiquark. O vetor de estado  $|\alpha\rangle$  no espaço de Fock,  $\mathcal{F}$ , que descreve esse méson pode ser escrito como [55]:

$$|\alpha\rangle = M_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (4.1)$$

onde  $M_\alpha^\dagger$  é o operador de criação de um méson composto no estado  $\alpha$  e  $|0\rangle$  é o estado de vácuo, definido por:

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = 0, \quad (4.2)$$

e o operador  $M_\alpha^\dagger$ :

$$M_\alpha^\dagger = \Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger, \quad (4.3)$$

onde  $\Phi_\alpha^{\mu\nu}$  é a função de onda do méson. O índice  $\alpha$  representa de uma maneira compacta os números quânticos do méson:  $\alpha = \{\text{espacial, spin, isospin}\}$ . Os índices  $\mu$  e  $\nu$  identificam os números quânticos dos quarks e antiquarks:  $\mu, \nu = \{\text{espacial, spin, sabor, cor}\}$ . Usamos a convenção de soma implícita nos índices repetidos. É conveniente trabalhar com funções de onda ortonormalizadas:

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} . \quad (4.4)$$

Os operadores de quark e antiquark satisfazem relações de anticomutação canônicas,

$$\begin{aligned} \{q_\mu, q_\nu\} &= \{q_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu\} = \{q_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = 0 , \\ \{q_\mu, q_\nu^\dagger\} &= \{\bar{q}_\mu, \bar{q}_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Utilizando estas relações de anticomutação, juntamente com a condição de ortonormalização apresentada na equação (4.4), obtemos as relações de comutação para os operadores de mésons compostos

$$[M_\alpha, M_\beta] = 0 \quad , \quad [M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta} , \quad (4.6)$$

onde

$$D_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\mu\sigma} \bar{q}_\sigma^\dagger \bar{q}_\nu + \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\beta^{\rho\nu} q_\rho^\dagger q_\mu . \quad (4.7)$$

Adicionalmente, temos

$$\begin{aligned} [q_\mu, M_\alpha] &= [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0 , \\ [q_\mu, M_\alpha^\dagger] &= \Phi_\alpha^{\mu\nu} \bar{q}_\nu^\dagger , \\ [\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] &= -\Phi_\alpha^{\mu\nu} q_\mu^\dagger . \end{aligned} \quad (4.8)$$

O termo  $D_{\alpha\beta}$  apresentado em (4.7) e que aparece na relação não canônica (4.6) é uma manifestação da natureza composta e da estrutura interna dos mésons. A presença deste termo é indicativo do alto nível de complexidade que surge no tratamento de problemas em que os graus de liberdade internos dos mésons não podem ser desprezados, pois as técnicas usuais da teoria de campos, tais como a utilização de funções de Green, do teorema de Wick, entre outros, aplicam-se a operadores que satisfazem relações de comutação (ou anticomutação) canônicas. Analogamente, o fato de que os comutadores  $[q_\mu, M_\alpha^\dagger]$  e  $[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger]$  não se anulam, expressa a dependência cinemática entre o operador de méson e os operadores de quark e antiquark. Assim, os operadores de méson,  $M_\alpha$  e  $M_\alpha^\dagger$ , não são variáveis dinâmicas convenientes.

A ideia do método Fock-Tani é fazer uma mudança de representação, de forma que os operadores das partículas compostas sejam redescritos por operadores que satisfazem relações de comutação canônicas. Naturalmente, as complicações da natureza composta dos mésons aparecerão em algum outro ponto do formalismo. A mudança de representação é realizada por meio de um operador unitário,  $U$ , de modo que os estados de um méson composto sejam redescritos por estados de um méson ideal, descritos por operadores de partículas “ideais”,  $m_\alpha$  e  $m_\alpha^\dagger$  [53].

Seja  $|\Omega\rangle$  um vetor de estado arbitrário e  $O$  um operador arbitrário, ambos expressos em termos dos operadores de quark e antiquark,  $q, q^\dagger, \bar{q}, \bar{q}^\dagger$ , da representação de Fock original e  $|\Omega\rangle$  e  $O_{\text{FT}}$  as quantidades correspondentes na nova representação:

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &\longrightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle, \\ O &\longrightarrow O_{\text{FT}} = U^{-1}OU. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Uma vez que o operador  $U$  é unitário, os produtos escalares e os elementos de matriz são preservados sob a mudança de representação:

$$\begin{aligned} \langle \Omega|\Omega\rangle &= (\Omega|\Omega), \\ \langle \Omega|O|\Omega\rangle &= (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Note-se que na nova representação os estados são representados por “bras” e “kets” circulares ao invés de angulares.

Dessa forma, se  $|\alpha\rangle$  é um estado de um méson, ele será redescrito por um méson elementar (“ideal”) sob a transformação

$$|\alpha\rangle \longrightarrow U^{-1}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle = m_\alpha^\dagger|0\rangle, \quad (4.11)$$

onde os operadores de méson “ideal”,  $m_\alpha^\dagger$  e  $m_\alpha$ , satisfazem, por definição, relações de comutação canônicas

$$\begin{aligned} [m_\alpha, m_\beta] &= 0, \\ [m_\alpha, m_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

e são cinematicamente independentes dos operadores de quark e antiquark

$$[q_\mu, m_\alpha] = [q_\mu, m_\alpha^\dagger] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha^\dagger] = 0. \quad (4.13)$$

O estado  $|0\rangle$  é o vácuo para os graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons “ideais” na nova representação.

De forma análoga aos mésons, a forma explícita do operador de criação de bárions  $B_\alpha^\dagger$  é dada por [55]

$$B_\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{6}} \Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3} q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger, \quad (4.14)$$

com a normalização da função de onda dada por

$$\langle \alpha|\beta\rangle = \Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.15)$$

E o vetor de estado que descreve esse bárion

$$|\alpha\rangle = B_\alpha^\dagger|0\rangle \quad (4.16)$$



onde  $|0\rangle$  é o estado de vácuo (sem quarks). Usando as relações de anticomutação entre os quarks (4.5) pode-se mostrar que o operador  $B_\alpha$  obedece as seguintes relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{B_\alpha, B_\beta\} &= 0 \\ \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde

$$\Delta_{\alpha\beta} = 3\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3}q_{\nu_3}^\dagger q_{\mu_3} - \frac{3}{2}\Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\nu_3}q_{\nu_3}^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2}q_{\mu_3} . \quad (4.18)$$

A presença do operador  $\Delta_{\alpha\beta}$  na relação de anticomutação revela a natureza composta dos operadores de bárions. Outras relações importantes são as seguintes

$$\begin{aligned} \{q_\mu, B_\alpha\} &= 0 \\ \{q_\mu, B_\alpha^\dagger\} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Em  $\{q_\mu, B_\alpha^\dagger\}$  também vemos a interferência da estrutura interna do bárion, revelando a falta de independência cinemática entre o operador de bárion e o de quarks.

Podemos ver a troca de representação de Fock para Fock-Tani, dos mésons e dos bárions nas tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente, onde a representação da manifestação da natureza composta e da estrutura dos mésons é dado por  $D_{\alpha\beta}$  e a dos bárions por  $\Delta_{\alpha\beta}$ .

Fock	Fock-Tani
$ \alpha\rangle = M_\alpha^\dagger 0\rangle$	$ \alpha\rangle = m_\alpha^\dagger 0\rangle$
$[M_\alpha, M_\beta] = 0$	$[m_\alpha, m_\beta] = 0$
$[M_\alpha, M_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta}$	$[m_\alpha, m_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}$
$[q_\mu, M_\alpha] = [\bar{q}_\nu, M_\alpha] = 0$	$[q_\mu, m_\alpha] = [\bar{q}_\nu, m_\alpha] = 0$
$[q_\mu, M_\alpha^\dagger] = \Phi_\alpha^{\mu\nu}\bar{q}_\nu^\dagger$	$[q_\mu, m_\alpha^\dagger] = 0$
$[\bar{q}_\nu, M_\alpha^\dagger] = -\Phi_\alpha^{\mu\nu}q_\mu^\dagger$	$[\bar{q}_\nu, m_\alpha^\dagger] = 0$

**Tab. 4.1:** Representação dos operadores de mésons no espaço de Fock e no espaço de Fock-Tani.

O operador unitário  $U$  é construído expandindo-se o espaço de Fock original de modo que os estados de méson “ideal” sejam incluídos. Consideremos o espaço de Fock físico, indicado por  $\mathcal{F}$ . Esse é o espaço de estados gerado por todas as combinações lineares de estados construídos de operadores de quark e antiquark,

$$q_{\mu_1}^\dagger \cdots q_{\mu_l}^\dagger \bar{q}_{\nu_1}^\dagger \cdots \bar{q}_{\nu_m}^\dagger |0\rangle , \quad (4.20)$$

Fock	Fock-Tani
$ \alpha\rangle = B_\alpha^\dagger 0\rangle$	$ \alpha\rangle = b_\alpha^\dagger 0\rangle$
$\{B_\alpha, B_\beta\} = 0$	$\{b_\alpha, b_\beta\} = 0$
$\{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}$	$\{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}$
$\{q_\mu, B_\alpha\} = 0$	$\{q_\mu, b_\alpha\} = 0$
$\{q_\mu, B_\alpha^\dagger\} = \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger$	$\{q_\mu, b_\alpha^\dagger\} = 0$

**Tab. 4.2:** Representação dos operadores de bárions no espaço de Fock e no espaço de Fock-Tani.

com  $l$  e  $m$  arbitrários. Definimos um espaço de Hilbert  $\mathcal{M}$ , o espaço de mésons ideais, independente do espaço de Fock físico  $\mathcal{F}$ , como o espaço gerado por todas as combinações lineares de estados construídos de operadores de méson “ideal”,

$$m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle_{\mathcal{M}}, \quad (4.21)$$

onde  $|0\rangle_{\mathcal{M}}$  é o vácuo de  $\mathcal{M}$ , definido por

$$m_\alpha |0\rangle_{\mathcal{M}} = 0. \quad (4.22)$$

Agora, define-se um novo espaço de Hilbert, chamado “espaço de estados ideais”, como o produto direto dos espaços de Fock físico  $\mathcal{F}$  e de mésons ideais  $\mathcal{M}$ ,

$$\mathcal{I} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{M}. \quad (4.23)$$

As relações de comutação (4.6)-(4.8), inicialmente definidas em  $\mathcal{F}$ , e de (4.12), inicialmente definidas em  $\mathcal{M}$ , são válidas também em  $\mathcal{I}$ . Por definição, os operadores de quark e de méson ideal são cinematicamente independentes e, portanto, também satisfazem a equação (4.13) em  $\mathcal{I}$ .

O vácuo de  $\mathcal{I}$  é dado pelo produto direto dos vácuos de  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{F}$ ,

$$|0\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle_{\mathcal{M}}. \quad (4.24)$$

Dessa forma,  $|0\rangle$  é o vácuo dos graus de liberdade de quarks, antiquarks e mésons ideais:

$$q_\mu |0\rangle = \bar{q}_\nu |0\rangle = m_\alpha |0\rangle = 0. \quad (4.25)$$

Os operadores de quarks atuam em  $|0\rangle$  e os operadores de mésons ideais atuam em  $|0\rangle_{\mathcal{M}}$  na equação (4.24).

Estabelecemos, então, uma correspondência um-para-um entre os estados do espaço de Fock físico  $\mathcal{F}$  e os estados de um sub-espaço de  $\mathcal{I}$ . Em  $\mathcal{I}$ , existe um sub-espaço  $\mathcal{I}_0$  que

é isomórfico ao espaço de Fock original  $\mathcal{F}$  e consiste dos estados  $|\Omega\rangle \in \mathcal{F}$  sem mésons ideais,

$$m_\alpha |\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha, \quad \text{ou} \quad N_m |\Omega\rangle = 0, \quad (4.26)$$

onde  $N_m$  é o operador número total de mésons ideais

$$N_m = \sum_{\alpha} m_{\alpha}^{\dagger} m_{\alpha}. \quad (4.27)$$

A equação (4.26) passa a ser um vínculo a ser satisfeito pelos estados permitidos em  $\mathcal{I}$ .

A equação de vínculo, ou condição subsidiária, exige que em  $\mathcal{I}_0$  os mésons ideais sejam modos redundantes, ou seja, correspondam a estados totalmente desocupados. Essa condição é necessária para evitar múltipla contagem de graus de liberdade.

O operador  $U$ , que realiza a transformação (4.9), é dado explicitamente por [56]:

$$U = \exp\left(-\frac{\pi}{2}F\right), \quad (4.28)$$

onde  $F$ , o gerador da transformação, é dado por:

$$F = \sum_{\alpha} (m_{\alpha}^{\dagger} M_{\alpha} - M_{\alpha}^{\dagger} m_{\alpha}). \quad (4.29)$$

Fazendo uso da definição da exponencial de um operador como uma série de potências e aplicando o gerador da transformação sucessivamente em  $M_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle$ , podemos verificar que:

$$\begin{aligned} U^{-1}M_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle &= \cos\frac{\pi}{2}M_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle + \sin\frac{\pi}{2}m_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle \\ &= m_{\alpha}^{\dagger}|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.30)$$

O operador unitário  $U$  atua sobre estados de  $\mathcal{I}$  e não pode ser definido em  $\mathcal{F}$ . Contudo,  $U$  está definido em  $\mathcal{I}_0$ , que é isomórfico a  $\mathcal{F}$ . Definimos, então, o espaço de Fock-Tani  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  como o espaço imagem de  $\mathcal{I}_0$ :

$$\mathcal{F}_{\text{FT}} = U^{-1}\mathcal{I}_0. \quad (4.31)$$

Assim, o espaço  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  é o sub-espaço de  $\mathcal{I}$  cujos vetores de estado  $|\Omega\rangle$  na nova representação estão relacionados aos vetores de estado de  $\mathcal{I}_0$  por

$$|\Omega\rangle = U|\Omega\rangle \Rightarrow |\Omega\rangle = U^{-1}|\Omega\rangle. \quad (4.32)$$

Qualquer cálculo efetuado no espaço físico  $\mathcal{F}$  é equivalente ao cálculo no espaço de Fock-Tani. Para dois estados quaisquer,  $|\Omega\rangle$  e  $|\Omega'\rangle$  e qualquer observável  $O$  em  $\mathcal{F}$ , temos

$$\langle \Omega|O|\Omega'\rangle = (\Omega|U^{-1}OU|\Omega') = (\Omega|O_{\text{FT}}|\Omega'). \quad (4.33)$$

É claro que em  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  a condição que garante que não há dupla contagem:

$$U^{-1}m_{\alpha}U|\Omega\rangle = 0, \quad (4.34)$$

deve sempre ser satisfeita.

A vantagem de trabalhar em  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  é que neste espaço todos os operadores de criação e aniquilação satisfazem relações de (anti)comutação canônicas. No entanto, a natureza composta dos mésons aparecerá em outro lugar. Os operadores transformados,

$$O_{\text{FT}} = U^{-1}OU, \quad (4.35)$$

dão origem a séries infinitas que fisicamente representam, de algum modo, uma expansão na densidade do sistema. O método será eficiente para cálculos práticos se forem necessários poucos termos da série para descrever as interações entre os mésons e os quarks. A obtenção de forças efetivas de muitos corpos entre os mésons requer uma expansão até altas ordens na função de onda do méson. No entanto, interações efetivas entre dois mésons podem ser obtidas em ordem relativamente baixa.

Outra complicação potencial relaciona-se com a condição subsidiária. Em problemas envolvendo muitos mésons deve-se tomar cuidado para não violar esse vínculo. Para um estado contendo vários mésons compostos,  $|\alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = M_{\alpha_1}^\dagger \cdots M_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$ , a transformação através do operador  $U$  não resulta, em geral, em um estado produto de mésons ideais, pois  $U^{-1}M_\alpha^\dagger U$  difere de  $m_\alpha^\dagger$  por uma série infinita contendo operadores de quarks. No entanto, é possível mostrar que um estado em  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  da forma  $|\alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle$  satisfaz a condição subsidiária Eq. (4.34) e, portanto, é um estado físico. A imagem deste estado em  $\mathcal{I}_0$  é um estado complicado contendo quarks, antiquarks e mésons. Para processos de espalhamento, a matriz- $S$  é definida em termos de estados assintóticos, os quais, por definição, não se superpõem, de forma que podemos escrever:

$$\begin{aligned} |\alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \rightarrow U^{-1}|\alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle &= |\alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \\ &= m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Portanto, para estados assintóticos, a condição subsidiária é trivialmente satisfeita.

## 4.2 A Transformação de Fock-Tani para Mésons

Os operadores básicos de um determinado modelo, tais como o operador Hamiltoniano e correntes eletromagnéticas, são expressos em termos de operadores de quark e antiquark. Dessa forma, para obtermos os operadores do modelo na nova representação, necessitamos dos operadores de quark e antiquark transformados [53]:

$$\begin{aligned} q_{\text{FT}} &= U^{-1}qU \\ \bar{q}_{\text{FT}} &= U^{-1}\bar{q}U. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Os operadores de criação são obtidos de forma análoga, tomando o conjugado Hermitiano de (4.37) e lembrando que  $U^{-1} = U^\dagger$ .

Os cálculos dessas expressões, pelo método de multicomutadores, são bastante complicado, envolvendo séries infinitas e não podem, em geral, ser expressos numa forma fechada. No entanto, as transformações podem ser obtidas iterativamente através do

método de “equações de movimento”, sugerido por Girardeau [56]. Para qualquer operador  $O$ , define-se:

$$O(\theta) = \exp(-\theta F) O \exp(\theta F) , \quad (4.38)$$

onde  $\theta$  é um parâmetro real e representa um ângulo de rotação no espaço de Hilbert (como será visto a seguir).

Diferenciando a expressão acima com relação a  $\theta$ , obtemos a equação de movimento para o operador  $O$ :

$$\frac{dO(\theta)}{d\theta} = [O(\theta), F] , \quad (4.39)$$

com a “condição inicial”:

$$O(\theta = 0) = O . \quad (4.40)$$

Os operadores transformados de Fock-Tani são obtidos das soluções das equações (4.39-4.40) para  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ :

$$O_{\text{FT}} = U^{-1} O U = O(-\pi/2) . \quad (4.41)$$

Deste modo, usando (4.39) e o gerador da transformação dado em (4.29), obtemos as equações de movimento para os operadores de quarks e antiquarks:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu(\theta)}{d\theta} &= [q_\mu(\theta), F] \\ &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu} \bar{q}_\nu^\dagger(\theta) m_\alpha(\theta) , \end{aligned} \quad (4.42)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{q}_\nu(\theta)}{d\theta} &= [\bar{q}_\nu(\theta), F] \\ &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\nu\nu_1} q_\mu^\dagger(\theta) m_\alpha(\theta) . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Uma vez que as equações de movimento para  $q$  e  $\bar{q}$  envolvem  $m_\alpha(\theta)$ , é necessário obter a equação de movimento para  $m_\alpha(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha(\theta)}{d\theta} &= [m_\alpha(\theta), F] \\ &= M_\alpha(\theta) . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \frac{dM_\alpha(\theta)}{d\theta} &= [M_\alpha(\theta), F] \\ &= -[\delta_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta}(\theta)] m_\beta(\theta) . \end{aligned} \quad (4.45)$$

As equações (4.42)-(4.45), juntamente com suas Hermitianas conjugadas, formam um conjunto de equações diferenciais não-lineares acopladas, tão difíceis de resolver quanto as expressões obtidas pela técnica de multicomutadores. No entanto essas equações podem ser resolvidas de maneira direta por iteração.

Partindo de uma aproximação de ordem zero, onde é desprezada a superposição dos mésons, coletamos os termos de mesma ordem na função de onda do estado ligado,  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ . Dessa forma, escrevemos os operadores como uma expansão

$$\begin{aligned} q_\mu(\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} q_\mu^{(i)}(\theta), & \bar{q}_\mu(\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{q}_\mu^{(i)}(\theta), \\ m_\alpha(\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_\alpha^{(i)}(\theta), & M_\alpha(\theta) &= \sum_{i=0}^{\infty} M_\alpha^{(i)}(\theta), \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde  $(i)$  indica a ordem nas funções de onda. Para que se tenha uma contagem de potências consistente, as funções de onda implícitas nos operadores  $M_\alpha$  e  $M_\alpha^\dagger$  via (4.3), não devem entrar na contagem. Desta forma, a expansão de (4.46) pode ser entendida como uma expansão na densidade do sistema.

Assim, as equações de movimento em ordem zero nas funções de onda são obtidas desprezando-se os termos  $D_{\alpha\beta}(\theta)$  e  $\Phi_\alpha$  nas equações (4.42)-(4.45):

$$\begin{aligned} \frac{dq_\mu^{(0)}(\theta)}{d\theta} &= 0, \\ \frac{d\bar{q}_\nu^{(0)}(\theta)}{d\theta} &= 0, \\ \frac{dM_\alpha^{(0)}(\theta)}{d\theta} &= -m_\alpha^{(0)}(\theta), \\ \frac{dm_\alpha^{(0)}(\theta)}{d\theta} &= M_\alpha^{(0)}(\theta). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Usando as condições iniciais (4.40), as soluções resultam em

$$\begin{aligned} q_\mu^{(0)}(\theta) &= q_\mu, \\ \bar{q}_\nu^{(0)}(\theta) &= \bar{q}_\nu, \\ m_\alpha^{(0)}(\theta) &= m_\alpha \cos \theta + M_\alpha \sin \theta, \\ M_\alpha^{(0)}(\theta) &= M_\alpha \cos \theta - m_\alpha \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Deve-se notar que as condições iniciais foram impostas sobre o termo de ordem zero na expansão de (4.46). Assim, para que esta expansão seja consistente com (4.40), devemos ter como condições iniciais para os termos de ordem  $\geq 1$  que:

$$q_\mu^{(i)}(\theta = 0) = \bar{q}_\mu^{(i)}(\theta = 0) = m_\alpha^{(i)}(\theta = 0) = M_\alpha^{(i)}(\theta = 0) = 0, \quad \text{para } i \geq 1. \quad (4.49)$$

Uma vez que o termo  $D_{\alpha\beta}$  não contribui para as equações de movimento de primeira

ordem, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_\mu^{(1)}(\theta)}{d\theta} &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(\theta) m_\alpha^{(0)}(\theta) , \\
 \frac{d\bar{q}_\nu^{(1)}(\theta)}{d\theta} &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^\dagger(\theta) m_\alpha^{(0)}(\theta) , \\
 \frac{dM_\alpha^{(1)}(\theta)}{d\theta} &= -m_\alpha^{(1)}(\theta) , \\
 \frac{dm_\alpha^{(1)}(\theta)}{d\theta} &= M_\alpha^{(1)}(\theta) .
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Com as condições iniciais da equação (4.49) e a condição em  $\theta = -\pi/2$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(1)}(\theta) &= -\delta_{\mu\mu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger [m_\alpha \sin \theta + M_\alpha (1 - \cos \theta)] , \\
 \bar{q}_\nu^{(1)}(\theta) &= \delta_{\nu\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^\dagger [m_\alpha \sin \theta + M_\alpha (1 - \cos \theta)] , \\
 m_\alpha^{(1)}(\theta) &= 0 , \\
 M_\alpha^{(1)}(\theta) &= 0 .
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Esse processo iterativo pode ser estendido diretamente até ordens mais altas. No entanto, as soluções de segunda ordem em diante darão origem a termos seculares, isto é, termos que envolvem polinômios em  $\theta$ , além de funções trigonométricas em  $\theta$ . Entre outros problemas, os termos seculares introduzem as familiares discrepâncias “post-prior” [57], [58] na análise de processos de espalhamento e processos reativos. A origem dos termos seculares está na assimetria das equações de movimento para  $m_\alpha$  e  $M_\alpha$ , (4.44) e (4.45), e a simetria é quebrada pelo termo  $D_{\alpha\beta}$ .

Este problema foi resolvido por Girardeau e Straton [59]. A solução consiste em adicionar a  $F$  um termo dependente de  $D_{\alpha\beta}$  de modo que as equações tornem-se simétricas. Seguimos, aqui, o procedimento de Lo e Girardeau [58], que embora seja equivalente ao procedimento de Girardeau e Straton, é mais elegante e sistemático. O gerador da transformação é definido como

$$F = \sum_\alpha (m_\alpha^\dagger O_\alpha - O_\alpha^\dagger m_\alpha) , \tag{4.52}$$

onde o operador  $O_\alpha$  é uma função somente dos operadores de quark e antiquark, escolhido de tal forma que satisfaça relações de comutação canônicas, ou seja:

$$\begin{aligned}
 [O_\alpha, O_\beta] &= 0 , \\
 [O_\alpha, O_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} .
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Isto leva a equações de movimento simétricas para  $m_\alpha$  e  $O_\alpha$  em todas as ordens nas funções de onda de estado ligado  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dm_\alpha(\theta)}{d\theta} &= [m_\alpha(\theta), F] = O_\alpha(\theta) , \\
 \frac{dO_\alpha(\theta)}{d\theta} &= [O_\alpha(\theta), F] = -m_\alpha(\theta) .
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

As soluções destas equações

$$\begin{aligned} m_\alpha(\theta) &= O_\alpha \sin \theta + m_\alpha \cos \theta , \\ O_\alpha(\theta) &= O_\alpha \cos \theta - m_\alpha \sin \theta , \end{aligned} \quad (4.55)$$

contêm somente funções trigonométricas de  $\theta$ . Não é difícil mostrar que isto elimina também os termos seculares dos operadores de quark e antiquark.

O operador  $O_\alpha$  também é determinado iterativamente, ou seja, ordem a ordem em  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ , de modo que  $O_\alpha$  pode ser expandido como

$$O_\alpha(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} O_\alpha^{(i)}(\theta) , \quad (4.56)$$

onde, novamente,  $(i)$  indica a ordem considerada em  $\Phi_\alpha$  e  $\Phi_\alpha^*$ . O termo de ordem zero é trivialmente dado por:

$$O_\alpha^{(0)} = M_\alpha , \quad (4.57)$$

que certamente satisfaz a Eq. (4.53), em ordem zero, e reproduz os resultados originais para primeira e segunda ordem. O termo seguinte é o de segunda ordem:

$$O_\alpha = M_\alpha + O_\alpha^{(2)} , \quad (4.58)$$

onde  $O_\alpha^{(2)}$  deve ser escolhido de forma que

$$[O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3) . \quad (4.59)$$

A escolha apropriada é:

$$O_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta . \quad (4.60)$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos o operador de terceira ordem,

$$O_\alpha^{(3)} = -\frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma . \quad (4.61)$$

Assim, até terceira ordem, verifica-se que o operador  $O_\alpha$  é dado por:

$$O_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta + \frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma . \quad (4.62)$$

É fácil mostrar usando estas relações que:

$$\begin{aligned} [O_\alpha, O_\beta] &= \mathcal{O}(\Phi^4) \\ [O_\alpha, O_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4) , \end{aligned} \quad (4.63)$$

O cálculo detalhado do operador  $O_\alpha$  é descrito no Apêndice B.

É importante observar que a equação de vínculo para a transformação de Fock-Tani com o novo gerador resulta em

$$O_\alpha |\Omega\rangle = 0 \quad , \forall \alpha . \quad (4.64)$$



Dessa forma, para estados no sub-espço  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$  do tipo:

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle = m_{\alpha_1}^\dagger \cdots m_{\alpha_n}^\dagger |0\rangle, \quad (4.65)$$

a condição subsidiária (4.34) é trivialmente satisfeita, uma vez que  $O_\alpha$  é função somente de operadores de quark e antiquark e, portanto, comuta com  $m_\alpha^\dagger$ . Também, temos que impor que  $O_\alpha$  aniquila o vácuo:

$$O_\alpha |0\rangle = 0, \quad \forall \alpha \quad (4.66)$$

Esta é uma condição necessária a ser imposta sobre  $O_\alpha$  para que o vácuo permaneça invariante sob a transformação Fock-Tani, pois somente assim teremos:

$$F|0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad U|0\rangle = |0\rangle, \quad (4.67)$$

Esta é uma propriedade extremamente importante para que possamos realizar os cálculos no espaço  $\mathcal{F}_{\text{FT}}$ . Assim, supõe-se que  $O_\alpha^{(i)}$ ,  $i > 0$ , possa sempre ser construído como um produto ordenado normalmente contendo sempre um operador de aniquilação na direita.

Além disso, pode-se notar que

$$M_\alpha^\dagger |0\rangle = O_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (4.68)$$

o que até terceira ordem segue imediatamente de (4.64). De acordo com as observações acima, espera-se que esse resultado mantenha-se em qualquer ordem. Assim, a transformação Fock-Tani sobre um estado contendo um único méson composto pode ser escrita como

$$\begin{aligned} U^{-1} M_\alpha^\dagger |0\rangle &= U^{-1} O_\alpha^\dagger |0\rangle = U^{-1} O_\alpha^\dagger U |0\rangle \\ &= m_\alpha^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (4.69)$$

de modo que a transformação de Fock-Tani com o novo gerador mantém o significado físico da transformação original, dada pelo gerador definido em (4.29).

As equações de movimento de segunda ordem para  $m_\alpha$  e  $O_\alpha$  com a transformação de Fock-Tani generalizada são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{dm_\alpha^{(2)}(\theta)}{d\theta} &= O_\alpha^{(2)}(\theta), \\ \frac{dO_\alpha^{(2)}(\theta)}{d\theta} &= -m_\alpha^{(2)}(\theta). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Ao considerarmos as equações de movimento para os operadores  $q$  e  $\bar{q}$ , temos que incluir as contribuições adicionais que resultam da mudança do gerador da transformação.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_\mu^{(2)}(\theta)}{d\theta} &= -\delta_{\mu\mu_1} \left[ \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} \bar{q}_{\nu_1}^\dagger(1)(\theta) m_\alpha^{(0)}(\theta) + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^\dagger(0)(\theta) q_{\mu_2}^{(0)}(\theta) M_\gamma^{(0)}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \Phi_\gamma^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\alpha^{\mu\nu_1} M_\gamma^\dagger(0)(\theta) q_{\mu_2}^{(0)}(\theta) m_\alpha^{(0)}(\theta) \right], \\
 \frac{d\bar{q}_\nu^{(2)}(\theta)}{d\theta} &= \delta_{\nu\nu_1} \left[ \Phi_\alpha^{\mu_1\nu_1} q_{\mu_1}^\dagger(1)(\theta) m_\alpha^{(0)}(\theta) + \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} m_\alpha^\dagger(0)(\theta) M_\gamma^{(0)}(\theta) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_1} M_\alpha^\dagger(0)(\theta) m_\alpha^{(0)}(\theta) \bar{q}_{\nu_2}^{(0)}(\theta) \right]. \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

As condições iniciais para  $O_\alpha^{(i)}(\theta)$  são dadas por

$$O_\alpha^{(i)}(\theta = 0) = O_\alpha^{(i)} \quad \forall i \tag{4.72}$$

Assim, temos  $O_\alpha^{(2)}(\theta = 0) = \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta$  e, integrando as equações (4.70)-(4.71) obtemos

$$\begin{aligned}
 m_\alpha^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \sin \theta, \\
 O_\alpha^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta \cos \theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(2)}(\theta) &= \delta_{\mu\mu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_2\nu_1} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_1} \left[ m_\alpha^\dagger M_\beta \sin \theta \cos \theta - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 \theta - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos \theta) \right. \\
 &\quad \left. - \sin^2 \theta - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) \right] q_{\mu_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{q}_\nu^{(2)}(\theta) &= \delta_{\nu\nu_1} \frac{1}{2} \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_2} \Phi_\beta^{\mu_1\nu_1} \left[ m_\alpha^\dagger M_\beta \sin \theta \cos \theta - m_\alpha^\dagger m_\beta \sin^2 \theta - M_\alpha^\dagger M_\beta (2 - 2 \cos \theta) \right. \\
 &\quad \left. - \sin^2 \theta - M_\alpha^\dagger m_\beta (2 \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) \right] \bar{q}_{\nu_2}. \tag{4.73}
 \end{aligned}$$

### 4.3 A Transformação de Fock-Tani para Bárions

Utilizando novamente o método de “equações de movimento” de Girardeau [56], obtemos a equação de movimento de quarks dos bárions [54]:

$$\frac{dq_\mu(\theta)}{d\theta} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\alpha^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger(\theta) q_{\mu_3}^\dagger(\theta) b_\alpha(\theta) \tag{4.74}$$

Como a equação de movimento para  $q$  envolve  $b_\alpha(\theta)$ , precisamos obter a equação de movimento para  $b_\alpha(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{db_\alpha(\theta)}{d\theta} &= B_\alpha(\theta) \\
 \frac{dB_\alpha(\theta)}{d\theta} &= -[\delta_{\alpha\beta} + \Delta_{\alpha\beta}(\theta)] b_\beta(\theta)
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

As equações (4.75) constituem um sistema de equações diferenciais não - lineares acopladas. Uma forma sistemática de efetuar a sua resolução consiste em fazer uma expansão dos operadores transformados em potências da função de onda, isto é,

$$\begin{aligned} B_\alpha(\theta) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_\alpha^{(i)}(\theta) \\ b_\alpha(\theta) &= \sum_{i=1}^{\infty} b_\alpha^{(i)}(\theta) \\ q_\mu(\theta) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_\mu^{(i)}(\theta). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Estas expansões não são de potências do parâmetro  $\theta$ , que assume o valor  $\theta = -\pi/2$ , mas de potências da densidade do sistema. Desta forma as equações de ordem zero são

$$\frac{dB_\alpha^{(0)}(\theta)}{d\theta} = -b_\alpha^{(0)}(\theta), \quad (4.77)$$

$$\frac{db_\alpha^{(0)}(\theta)}{d\theta} = B_\alpha^{(0)}(\theta), \quad (4.78)$$

$$\frac{dq_\mu^{(0)}(\theta)}{d\theta} = 0. \quad (4.79)$$

O termo proporcional a  $\Delta_{\alpha\beta}$  foi desprezado em (4.77) por ser de segunda ordem em  $\Psi$  e portanto não contribuir. Também na equação (4.79) o lado direito foi tomado igual a zero porque no lado direito de (4.74) temos uma função de onda multiplicando os operadores. A solução de (4.79) é trivial

$$q_\mu^{(0)}(\theta) = \text{cte}, \quad (4.80)$$

e pela condição “inicial” (4.40) encontramos

$$\begin{aligned} q_\mu^{(0)}(\theta) &= q_\mu \\ b_\alpha^{(0)}(\theta) &= B_\alpha \sin \theta + b_\alpha \cos \theta \\ B_\alpha^{(0)}(\theta) &= B_\alpha \cos \theta - b_\alpha \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.81)$$

As equações de primeira ordem, isto é, aquelas equações que contêm potências da função de onda até a primeira ordem, são dadas por

$$\frac{dB_\alpha^{(1)}(\theta)}{d\theta} = -b_\alpha^{(1)}(\theta) \quad (4.82)$$

$$\frac{db_\alpha^{(1)}(\theta)}{d\theta} = B_\alpha^{(1)}(\theta) \quad (4.83)$$

$$\frac{dq_\mu^{(1)}(\theta)}{d\theta} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger(\theta) q_{\mu_3}^\dagger(\theta) b_\beta^{(0)}(\theta). \quad (4.84)$$

Novamente o termo proporcional a  $\Delta_{\alpha\beta}$  foi desprezado em (4.82) por ser de segunda ordem em  $\Psi$  e portanto não contribuir. Desta vez, no entanto, o lado direito de (4.84) não foi tomado igual a zero por ser efetivamente de primeira ordem.

Como as condições “iniciais” já foram usadas nas soluções de ordem zero devemos, então ter que

$$B_\alpha^{(i)}(0) = b_\alpha^{(i)}(0) = q_\mu^{(i)}(0) = 0 \quad \text{para } i \geq 1. \quad (4.85)$$

Assim encontramos que

$$B_\alpha^{(1)}(\theta) = 0 \quad (4.86)$$

$$b_\alpha^{(1)}(\theta) = 0 \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} q_\mu^{(1)}(\theta) &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger \int_0^\theta d\theta' b_\beta^{(0)}(\theta') \\ &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger [b_\beta \sin \theta + B_\beta(1 - \cos \theta)]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

A obtenção dos operadores de segunda ordem segue o mesmo procedimento na contagem de potências nas equações de movimento e, assim como para os mésons, dá origem a termos seculares. Nesse caso, também adicionaremos a  $F$  um termo dependente de  $\Delta_{\alpha\beta}$  de modo que as equações tornem-se simétricas, de forma que o novo gerador fica formalmente igual ao antigo apenas com a substituição de  $B_\alpha$  por  $O_\alpha$ , ou seja,

$$F = b_\alpha^\dagger O_\alpha - O_\alpha^\dagger b_\alpha, \quad (4.89)$$

tal que

$$O_\alpha^{(0)} \equiv B_\alpha. \quad (4.90)$$

Impomos que o novo operador  $O_\alpha$ , que substitui ao operador de bárions composto, deva obedecer relações canônicas de anticomutação

$$\{O_\alpha, O_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.91)$$

A construção deste anticomutador é feita de maneira iterativa. Em ordem mais baixa a anticomutação de  $O_\alpha$  resulta em

$$\{O_\alpha^{(0)}, O_\beta^{\dagger(0)}\} = \{B_\alpha, B_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta}. \quad (4.92)$$

Para cancelar o termo operatorial  $\Delta_{\alpha\beta}$  e garantir que o anticomutador seja canônico até segunda ordem, soma-se a  $O_\alpha^{(0)}$  um termo com uma estrutura adequada, isto é,

$$O_\alpha \equiv B_\alpha + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} B_\beta. \quad (4.93)$$

Vemos que, até terceira ordem, o operador  $O_\alpha$  é dado por:

$$O_\alpha \equiv B_\alpha + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} B_\beta + a_2 B_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, B_\alpha] B_\gamma \quad (4.94)$$

A nova transformação de Fock-Tani fica

$$U(\theta) = \exp(tF) \quad (4.95)$$

de tal maneira que as respectivas equações de movimento resultam em

$$\frac{dO_\alpha(\theta)}{d\theta} = [O_\alpha(\theta), F(\theta)] \quad (4.96)$$

$$\frac{db_\alpha(\theta)}{d\theta} = [b_\alpha(\theta), F(\theta)] \quad (4.97)$$

$$\frac{dq_\mu(\theta)}{d\theta} = [q_\mu(\theta), F(\theta)] \quad (4.98)$$

Uma das grandes vantagens da formulação generalizada começa a aparecer na resolução destas equações de movimento. As equações (4.96) e (4.97) são

$$\frac{dO_\alpha(\theta)}{d\theta} = -b_\alpha(\theta) \quad (4.99)$$

$$\frac{db_\alpha(\theta)}{d\theta} = O_\alpha(\theta) \quad (4.100)$$

que podem ser integradas sem problemas resultando em

$$O_\alpha(\theta) = O_\alpha \cos \theta - b_\alpha \sin \theta \quad (4.101)$$

$$b_\alpha(\theta) = O_\alpha \sin \theta + b_\alpha \cos \theta. \quad (4.102)$$

Nesta formulação generalizada vemos que operadores transformados possuem a propriedade de uma rotação no espaço dos operadores. Na formulação “restrita”, isto é, com o gerador igual a  $F_0$  são apenas os operadores de ordem zero que constituem uma rotação. Estas equações podem ser escritas ordem a ordem

$$\begin{aligned} O_\alpha^{(0)}(\theta) &= B_\alpha \cos \theta - b_\alpha \sin \theta \\ O_\alpha^{(1)}(\theta) &= 0 \\ O_\alpha^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\gamma} B_\gamma \cos \theta \\ O_\alpha^{(3)}(\theta) &= -\frac{1}{2} B_\gamma^\dagger [\Delta_{\gamma\rho}, B_\alpha] B_\rho \cos \theta \end{aligned} \quad (4.103)$$

e

$$\begin{aligned} b_\alpha^{(0)}(\theta) &= B_\alpha \sin \theta + b_\alpha \cos \theta \\ b_\alpha^{(1)}(\theta) &= 0 \\ b_\alpha^{(2)}(\theta) &= \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\gamma} B_\gamma \sin \theta \\ b_\alpha^{(3)}(\theta) &= -\frac{1}{2} B_\gamma^\dagger [\Delta_{\gamma\rho}, B_\alpha] B_\rho \sin \theta \end{aligned} \quad (4.104)$$

A simplicidade das equações para  $O_\alpha$  e  $b_\alpha$  não se reflete na equação para o operador de quarks. A sua equação de movimento até terceira ordem é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_\mu(\theta)}{d\theta} = & -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger(\theta)q_{\mu_3}^\dagger(\theta)b_\beta(\theta) \\
 & -\frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} [b_\gamma^\dagger(\theta)q_{\mu_3}(\theta)B_\beta(\theta) - B_\gamma^\dagger(\theta)q_{\mu_3}(\theta)b_\beta(\theta)] \\
 & +\frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\mu} [b_\gamma^\dagger(\theta)q_{\nu_2}^\dagger(\theta)q_{\mu_2}(\theta)q_{\mu_3}(\theta)B_\beta(\theta) - B_\gamma^\dagger(\theta)q_{\nu_2}^\dagger(\theta)q_{\mu_2}(\theta)q_{\mu_3}(\theta)b_\beta(\theta)] \\
 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\gamma^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger(\theta)q_{\mu_3}^\dagger(\theta)D_{\gamma\beta}(\theta)b_\beta(\theta) \\
 & +\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\rho^{*\nu_1\nu_2\nu_3}\Psi_\beta^{\nu_1\mu\mu_3}b_\gamma^\dagger(\theta)B_\rho^\dagger(\theta)q_{\mu_1}(\theta)q_{\mu_2}(\theta)q_{\nu_2}(\theta)q_{\nu_3}(\theta)B_\beta(\theta) \\
 & -3\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\rho^{\mu_1\mu_2\nu_3}\Psi_\beta^{\mu\nu_2\mu_3} + \frac{1}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\rho^{\mu\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\nu_3} \right. \\
 & \left. -\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\rho^{\mu\mu_2\nu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\mu_3} - \frac{1}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\rho^{\mu_1\nu_2\nu_3}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}\right] B_\gamma^\dagger(\theta)q_{\nu_3}^\dagger(\theta)q_{\nu_2}^\dagger(\theta)q_{\nu_1}^\dagger(\theta)B_\rho(\theta)b_\beta(\theta) \\
 & +3\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\rho^{\mu_1\nu_2\nu_3}\Psi_\beta^{\nu_1\mu\mu_3} - \Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\rho^{\mu_1\mu\nu_3}\Psi_\beta^{\nu_1\nu_2\mu_3}\right] \\
 & \times B_\gamma^\dagger(\theta)q_{\nu_3}^\dagger(\theta)q_{\nu_2}^\dagger(\theta)q_{\nu_1}^\dagger(\theta)q_{\mu_2}(\theta)B_\rho(\theta)b_\beta(\theta). \tag{4.105}
 \end{aligned}$$

Uma equação de primeira ordem pode ser obtida de (4.105), desprezando os termos que possuem potências mais altas da função de onda

$$\frac{dq_\mu^{(1)}(\theta)}{d\theta} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^{\dagger(0)}(\theta)q_{\mu_3}^{\dagger(0)}(\theta)b_\beta^{(0)}(\theta). \tag{4.106}$$

A resolução de (4.106) é igual a (4.84), no entanto neste ponto podemos apresentar uma maneira alternativa de resolver esta equação. Substituímos (4.81) e (4.100) em (4.106), obtendo

$$\frac{dq_\mu^{(1)}(\theta)}{d\theta} = \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger \frac{dO_\beta^{(0)}(\theta)}{d\theta}. \tag{4.107}$$

No lado direito de (4.107) vemos a presença de uma derivada total que por sua vez possui uma solução simples

$$\begin{aligned}
 q_\mu^{(1)}(\theta) & = \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger \left[ O_\beta^{(0)}(\theta) - O_\beta^{(0)}(0) \right] \\
 & = -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3}q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger \left[ b_\beta \sin \theta + B_\beta(1 - \cos \theta) \right] \tag{4.108}
 \end{aligned}$$

Esta propriedade, a de sempre encontrar uma derivada total no lado direito das equações de movimento, constituiu um aspecto novo do formalismo de Fock-Tani descoberto por D. Hadjimichief [54]. Ela auxiliou na resolução das equações de movimento para os operadores de quarks de ordens mais altas.

A equação em segunda ordem é

$$\begin{aligned}
\frac{dq_\mu^{(2)}(\theta)}{d\theta} = & -\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_\beta^{\mu\mu_2\mu_3} [q_{\mu_2}^\dagger(0)(\theta)q_{\mu_3}^\dagger(1)(\theta) + q_{\mu_2}^\dagger(1)(\theta)q_{\mu_3}^\dagger(0)(\theta)] b_\beta^{(0)}(\theta) \\
& - \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \left[ b_\gamma^\dagger(0)(\theta)q_{\mu_3}^{(0)}(\theta)B_\beta^{(0)}(\theta) - B_\gamma^\dagger(0)(\theta)q_{\mu_3}^{(0)}(\theta)b_\beta^{(0)}(\theta) \right] \\
& + \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\mu} \left[ b_\gamma^\dagger(0)(\theta)q_{\nu_2}^\dagger(0)(\theta)q_{\mu_2}^{(0)}(\theta)q_{\mu_3}^{(0)}(\theta)B_\beta^{(0)}(\theta) \right. \\
& \left. - B_\gamma^\dagger(0)(\theta)q_{\nu_2}^\dagger(0)(\theta)q_{\mu_2}^{(0)}(\theta)q_{\mu_3}^{(0)}(\theta)b_\beta^{(0)}(\theta) \right] \tag{4.109}
\end{aligned}$$

A integração de (4.109) resulta em

$$\begin{aligned}
q_\mu^{(2)}(\theta) = & \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu} \left[ -b_\gamma^\dagger q_{\mu_3} B_\beta \sin \theta \cos \theta + b_\gamma^\dagger q_{\mu_3} b_\beta \sin^2 \theta \right. \\
& \left. + 2B_\gamma^\dagger q_{\mu_3} B_\beta \left(1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) + 2B_\gamma^\dagger q_{\mu_3} b_\beta \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta\right) \right] \\
& - \frac{3}{2}\Psi_\gamma^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\nu_2\mu} \left[ -b_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} B_\beta \sin \theta \cos \theta + b_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} b_\beta \sin^2 \theta \right. \\
& \left. + 2B_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} B_\beta \left(1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) + 2B_\gamma^\dagger q_{\nu_2}^\dagger q_{\mu_2} q_{\mu_3} b_\beta \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta\right) \right], \tag{4.110}
\end{aligned}$$

onde vemos que esta transformação generalizada efetivamente cancela os termos seculares.

# Capítulo 5

## A nova transformação e o Hamiltoniano de Fock-Tani

Neste capítulo introduziremos o Hamiltoniano de Fock-Tani, obtido através dos potenciais de troca e de aniquilação de quarks com emissão de um glúon. No capítulo 2 vimos como a QED e a QCD se assemelham matematicamente. Uma alternativa a essas duas representações é o Modelo de Quarks o qual retém os detalhes da QCD porém é mais simples e rápido e cuja interação dos hádrons se dá na forma de um potencial. Mas as energias utilizadas em nosso estudo estão na escala não-perturbativa, e dessa forma a QCD torna-se complexa pois necessitaríamos utilizar QCD na rede. Assim, dos métodos existentes para interações hádron-hádron, Fock-Tani se mostrou o melhor devido a sua ideia básica de mudança de representação.

Através do Modelo de Quarks, obtivemos o Hamiltoniano Microscópico, a partir do qual estenderemos as transformações de Fock-Tani para mésons e bárions que, separadamente, descrevem com êxito as interações méson-méson e bárion-bárion, como mostrado no Capítulo 4, a fim de obtermos o Hamiltoniano de Fock-Tani, que será primordial para encontrarmos o Potencial de Interação Méson-Bárion  $V_{mb}$ .

Para definir a nova transformação  $\mathcal{U}$ , aplicada a méson-bárion, as condições (4.9) e (4.10) devem ser satisfeitas.

O operador unitário méson-bárion é definido por

$$\mathcal{U}(\theta, \theta') = U_M(\theta) U_B(\theta'), \quad (5.1)$$

de forma que os operadores transformados sejam

$$O_\alpha(\theta, \theta') = \mathcal{U}^{-1}(\theta, \theta') O_\alpha \mathcal{U}(\theta, \theta'). \quad (5.2)$$

Usando a técnica das equações de movimento, o operador  $O_\alpha$  em (5.2) resulta na expansão em potências das funções de onda

$$O_\alpha(\theta, \theta') = \sum_{ij} O^{(i,j)}(\theta, \theta'), \quad (5.3)$$

Onde  $i$  e  $j$  são relacionados às ordens do méson e do bárion, em potências das funções de onda, respectivamente. Por exemplo, o operador  $O^{(2,1)}$  é de segunda ordem na função



de onda do méson e de primeira ordem na função de onda do bárion. Para obter os operadores transformados, vamos usar  $\theta = \theta' = -\pi/2$ . Nesse novo mapeamento, devemos apresentar os operadores quark e antiquarks transformados, mantendo apenas os termos  $m_\alpha$  e  $b_\alpha$  que são relevantes para nossos operadores ideais.

A partir de agora usaremos a notação  $q^{(a,b)}$  na qual “a” representa os mésons e “b” os bárions. Em ordem zero  $q_\mu^{(0,0)} = q_\mu$  e  $\bar{q}_\nu^{(0,0)} = q_\nu$ . Em primeira ordem temos

$$\begin{aligned} q_\mu^{(1,0)} &= q_\mu^{(1)}; \\ \bar{q}_\nu^{(1,0)} &= \bar{q}_\nu^{(1)}; \\ q_\mu^{(0,1)} &= q_\mu^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Os operadores de segunda ordem, como o  $\bar{q}_\nu^{(1,1)}$ , são obtidos pela simples substituição do bárion transformado  $q_\mu^{(1)}$  dado por (4.108) no méson transformado  $\bar{q}_\nu^{(1)}$  dado por (4.51), resultando em

$$\bar{q}_\nu^{(1,1)} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Phi_\alpha^{\mu'\nu} \Psi_\beta^{*\mu'\mu_2\mu_3} b_\beta^\dagger m_\alpha q_{\mu_3} q_{\mu_2} \quad (5.5)$$

enquanto que  $\bar{q}_\nu^{(1,2)}$  pode ser obtido pela substituição do bárion transformado  $q_\mu^{(2)}$ , obtido em (4.110), no méson transformado  $\bar{q}_\nu^{(1)}$  de (4.51), resultando em

$$\bar{q}_\nu^{(1,2)} = -\frac{3}{2} \Phi_\alpha^{\mu'\nu} \Psi_\beta^{*\mu'\mu_2\mu_3} \Psi_\gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3} b_\beta^\dagger q_{\mu_1}^\dagger b_\gamma m_\alpha. \quad (5.6)$$

Pelo mesmo procedimento, obtemos

$$q_\mu^{(2,1)} = -\sqrt{\frac{3}{8}} \Phi_\alpha^{\mu\nu'} \Phi_\beta^{*\mu'\nu'} \Psi_\gamma^{\mu'\mu_2\mu_3} q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger m_\beta^\dagger b_\gamma m_\alpha \quad (5.7)$$

e

$$q_\mu^{(2,2)} = -\frac{3}{4} \Phi_\alpha^{\mu\nu'} \Phi_\beta^{*\mu'\nu'} \Psi_\gamma^{\mu\mu_2\mu_3} \Psi_\delta^{*\mu_1\mu_2\mu_3} b_\delta^\dagger m_\beta^\dagger b_\gamma m_\alpha q_{\mu_1} \quad (5.8)$$

O Hamiltoniano transformado de Fock-Tani  $\mathcal{H}$  descreve todos os possíveis processos físicos envolvendo mésons, bárions e quarks, cuja estrutura geral é

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_q + \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{mq} + \mathcal{H}_{bq} + \mathcal{H}_{mb}, \quad (5.9)$$

onde o primeiro termo envolve apenas operadores de quarks, o segundo e terceiro termos envolvem apenas operadores de mésons e bárions ideais, o termo  $\mathcal{H}_{mq}$  envolve operadores de mésons e quarks, enquanto  $\mathcal{H}_{bq}$  envolve operadores de bárions e quarks, o último termo  $\mathcal{H}_{mb}$  representa a interação méson-bárion.

Na estrutura de  $\mathcal{H}$  há termos de ordem mais alta, em função das funções de onda, que fornecem correções do estado-fundamental em ordem mais baixa. As quantidades básicas para essas correções são chamadas de *kerneis de estados ligados* e definidas como

$$\begin{aligned} \Delta_M(\rho\tau; \lambda\nu) &= \Phi_\alpha^{\rho\tau} \Phi_\alpha^{*\lambda\nu}, \\ \Delta_B(\mu_1\mu_2\mu_3; \nu_1\nu_2\nu_3) &= \Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3} \Psi_\alpha^{*\nu_1\nu_2\nu_3} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Uma propriedade importante do kernel do estado fundamental é

$$\begin{aligned}\Delta_M(\mu\nu; \sigma\rho)\Phi_\alpha^{\sigma\rho} &= \Phi_\alpha^{\mu\nu}, \\ \Delta_B(\mu_1\mu_2\mu_3; \nu_1\nu_2\nu_3)\Psi_\alpha^{\nu_1\nu_2\nu_3} &= \Psi_\alpha^{\mu_1\mu_2\mu_3}\end{aligned}\quad (5.11)$$

que está de acordo com a ortonormalização das funções de onda, dadas por

$$\Phi_\alpha^{*\mu\nu}\Phi_\beta^{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \Psi_\alpha^{*\mu_1\mu_2\mu_3}\Psi_\beta^{\mu_1\mu_2\mu_3} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.12)$$

O significado físico das correções dos estados ligados é modificar a interação fundamental dos quarks. Considere, por exemplo, o Hamiltoniano microscópico quark-antiquark da equação (2.137)

$$\begin{aligned}H_{2q} &= T(\mu)q_\mu^\dagger q_\mu + T(\nu)\bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\nu + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma \\ &\quad + \frac{1}{2}V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho)q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma + \frac{1}{2}V_{\bar{q}\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)\bar{q}_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho \bar{q}_\sigma.\end{aligned}\quad (5.13)$$

Na presente formulação os únicos estados ligados são  $q\bar{q}$  para os mésons e o estado de três quarks  $qqq$  para os bárions, o que implica que o termo  $V_{q\bar{q}}$  de (5.13) é responsável pela ligação dos mésons enquanto que o termo  $V_{qq}$  é diretamente relacionado com o estado ligado dos bárions.

A transformação do Hamiltoniano (5.13),  $\mathcal{H} = \mathcal{U}^{-1} H_{2q} \mathcal{U}$ , é implementada pela transformação dos operadores de quark e antiquark da equação (5.13), onde uma estrutura similar a da equação (5.9) é obtida. No espaço livre, a função de onda  $\Phi$  do méson da equação (4.3) satisfaz a seguinte equação de Schrödinger

$$H_M(\mu\nu; \sigma\rho)\Phi_\alpha^{\sigma\rho} = \epsilon_{[\alpha]}^M \Phi_{[\alpha]}^{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

onde  $H_M(\mu\nu; \sigma\rho)$  é a matriz Hamiltoniana

$$H_M(\mu\nu; \sigma\rho) = \delta_{\mu[\sigma]\delta_{\nu[\rho]} [T([\sigma]) + T([\rho])] + V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho),$$

$\epsilon_{[\alpha]}^M$  é a energia total do méson. Não há soma sobre índices repetidos dentro dos colchetes. A equação de autovalores equivalentes para a função de onda  $\Psi$  do bárion é

$$H_B(\mu\nu; \sigma\rho)\Psi_\alpha^{\sigma\rho\lambda} = \epsilon_{[\alpha]}^B \Psi_{[\alpha]}^{\mu\nu\lambda}, \quad (5.15)$$

onde a matriz Hamiltoniana  $H_B(\mu\nu; \sigma\rho)$  é dada por

$$H_B(\mu\nu, \sigma\rho) = 3 [\delta_{[\mu]\sigma}\delta_{\nu\rho} T([\mu]) + V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho)],$$

$\epsilon_\alpha^B$  é a energia total do bárion.

Em ordem mais baixa, o Hamiltoniano efetivo de quark  $\mathcal{H}_q$  tem a estrutura idêntica do Hamiltoniano microscópico de quark, (5.13), exceto que os termos correspondentes as interações quark-antiquark e quark-quark são modificados como mostraremos a seguir.

Coletando o termo

$$q_\mu^\dagger{}^{(0,0)} \bar{q}_\nu^\dagger{}^{(0,0)} \bar{q}_\rho{}^{(0,0)} q_\sigma{}^{(0,0)}$$

com os termos apropriados da expansão das partes cinéticas de primeira ordem do méson

$$q_\mu^\dagger(1,0) q_\mu^{(0,0)} \quad ; \quad \bar{q}_\nu^\dagger(1,0) \bar{q}_\nu^{(0,0)}$$

combinados com

$$q_\mu^\dagger(1,0) \bar{q}_\nu^\dagger(0,0) \bar{q}_\rho^{(0,0)} q_\sigma^{(0,0)}$$

e seus hermitianos conjugados, juntamente com os termos de segunda ordem

$$q_\mu^\dagger(1,0) q_\mu^{(1,0)} \quad ; \quad \bar{q}_\nu^\dagger(1,0) \bar{q}_\nu^{(1,0)} \quad ; \quad q_\mu^\dagger(1,0) \bar{q}_\nu^\dagger(0,0) \bar{q}_\rho^{(0,0)} q_\sigma^{(1,0)},$$

obtemos o kernel do quark-antiquark dado por

$$\mathcal{V}_{q\bar{q}} = [V_{q\bar{q}} - H_M \Delta_M - \Delta_M H_M + \Delta_M H_M \Delta_M],$$

onde  $V_{q\bar{q}} \equiv V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho)$  e a contração (nos índices de quark e antiquark)

$$H_M \Delta_M \equiv H_M(\mu\nu; \tau\xi) \Delta_M(\tau\xi; \sigma\rho). \quad (5.16)$$

No caso em que  $\Phi$  é solução da equação (5.14), o novo termo de interação quark-antiquark fica

$$\mathcal{V}_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) = V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) - \sum_\alpha \epsilon_\alpha^M \Phi_\alpha^{*\mu\nu} \Phi_\alpha^{\sigma\rho}. \quad (5.17)$$

O processo para a interação quark-quark na nova representação é análogo. Coletamos os termos de ordem um da transformação de energia cinética do bárion

$$q_\mu^\dagger(0,0) q_\mu^{(0,1)} \quad ; \quad q_\mu^\dagger(0,1) q_\mu^{(0,1)},$$

e

$$q_\mu^\dagger(0,1) q_\nu^\dagger(0,0) q_\rho^{(0,0)} q_\sigma^{(0,0)} \quad ; \quad q_\mu^\dagger(0,1) q_\nu^\dagger(0,0) q_\rho^{(0,0)} q_\sigma^{(0,1)},$$

da transformação do potencial. Isso nos leva a nova interação quark-quark

$$\mathcal{V}_{qq} = \frac{1}{2} V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma - \sum_\alpha \epsilon_\alpha^B B_\alpha^\dagger B_\alpha. \quad (5.18)$$

Os novos  $\mathcal{V}_{q\bar{q}}$  e  $\mathcal{V}_{qq}$  são potenciais fracos, modificados de forma que nenhum estado-ligado seja formado. Esse resultado é exatamente o mesmo do método de quasipartículas de Weinberg [60], onde os estados ligados são descritos por partículas ideais. Coletando outro conjunto de termos, dentre o Hamiltoniano bárion-quark de  $\mathcal{H}_{bq}$  em (5.9), um termo único de separação de bárions aparece

$$\mathcal{H}_{b \rightarrow qq} = V(\mu_1 \mu_2 \mu_3; \alpha) q_{\mu_1}^\dagger q_{\mu_2}^\dagger q_{\mu_3}^\dagger b_\beta, \quad (5.19)$$

onde

$$V(\mu_1 \mu_2 \mu_3; \alpha) = \frac{1}{\sqrt{6}} [H_B(\mu_1 \mu_2; \sigma\rho) \Psi_\beta^{\sigma\rho\mu_3} - H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\beta^{\sigma\rho\tau_3} \Delta_B(\mu_1 \mu_2 \mu_3; \mu\nu\tau_3)].$$

Usando o fato de que  $\Psi$  é autovalor de  $H_B$ , pode-se demonstrar que o kernel  $V(\mu_1 \mu_2 \mu_3; \alpha) = 0$  em (5.19), de forma que a quebra espontânea no espaço livre não é possível. No setor  $\mathcal{H}_{mq}$  quark-méson da equação (5.9) um termo similar  $\mathcal{H}_{m \rightarrow q\bar{q}}$  aparece relacionado com a quebra do méson. Novamente, se  $\Phi$  é a solução da equação (5.14),  $\mathcal{H}_{m \rightarrow q\bar{q}} = 0$ , assegura a estabilidade do méson contra a quebra espontânea.

## 5.1 O Potencial Méson-Bárion

Nosso objetivo principal é a interação efetiva méson-bárion  $\mathcal{H}_{\text{mb}}$  composta pelos seguintes termos

$$\mathcal{H}_{\text{mb}} = T^{\text{intra}} + V^{\text{intra}} + V^{\text{dir}} + V^{\text{inter}} \quad (5.20)$$

onde os termos  $V^{\text{inter}}$ ,  $V^{\text{intra}}$  e  $V^{\text{dir}}$  representam as trocas de glúons com troca quarks (os dois primeiros) e sem troca de quarks (direto). As contribuições relevantes para os termos com troca de glúons são dadas por  $V_{qq}$  e  $V_{q\bar{q}}$  da equação (5.13) e são combinações das funções de onda até quarta ordem. É preciso transformar  $\frac{1}{2}q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma$  e  $q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma$  em termos da estrutura do operador. Após realizar o ordenamento normal dos operadores de quarks e antiquarks, os operadores ideais de cada termo  $m_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger m_\gamma b_\delta$  foram omitidos, e as possíveis combinações estão listadas a seguir. A primeira combinação possível é

$$\begin{aligned} V_1 + V'_1 &= \frac{1}{2} \left[ q_\mu^\dagger(1,0) q_\nu^\dagger(0,1) q_\rho(1,0) q_\sigma(0,1) + q_\mu^\dagger(0,1) q_\nu^\dagger(1,0) q_\rho(0,1) q_\sigma(1,0) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ q_\mu^\dagger(1,0) q_\nu^\dagger(0,1) q_\rho(0,1) q_\sigma(1,0) + q_\mu^\dagger(0,1) q_\nu^\dagger(1,0) q_\rho(1,0) q_\sigma(0,1) \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

com

$$V_1 = -3 \Phi_\alpha^{*\mu\nu 2} \Psi_\beta^{*\mu 2 \mu 3} \Phi_\gamma^{\rho\nu 2} \Psi_\delta^{\sigma\mu 2 \mu 3} \quad ; \quad V'_1 = +3 \Phi_\alpha^{*\mu\nu 2} \Psi_\beta^{*\mu 2 \mu 3} \Phi_\gamma^{\rho\nu 2} \Psi_\delta^{\sigma\mu 2 \mu 3} \quad (5.22)$$

onde  $V_1$  é o termo de troca de quarks, enquanto que  $V'_1$  é o termo direto de quarks.

A próxima contribuição é

$$V_3 + V'_3 = \frac{1}{2} q_\mu^\dagger(2,1) q_\nu^\dagger(0,0) q_\rho(0,0) q_\sigma(0,1) + \frac{1}{2} q_\mu^\dagger(0,1) q_\nu^\dagger(0,0) q_\rho(0,0) q_\sigma(2,1) \quad (5.23)$$

com

$$V_3 = -3 \Phi_\alpha^{*\mu\nu 2} \Psi_\beta^{*\mu 1 \nu 3} \Phi_\gamma^{\mu 1 \nu 2} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu 3} \quad ; \quad V'_3 = -3 \Phi_\alpha^{*\mu 1 \nu 1} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu 3} \Phi_\gamma^{\sigma\nu 1} \Psi_\delta^{\mu 1 \rho\mu 3} \quad (5.24)$$

Novamente, o termo  $V_3$  é o termo de troca de quarks, enquanto que  $V'_3$  representa o termo de troca de glúon em um hádron.

A transformação do termo  $q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma$  tem como primeira possibilidade

$$V_4 + V'_4 = q_\mu^\dagger(0,1) \bar{q}_\nu^\dagger(1,0) \bar{q}_\rho(1,0) q_\sigma(0,1) \quad (5.25)$$

com

$$V_4 = -6 \Phi_\alpha^{*\nu 1 \nu} \Psi_\beta^{*\mu 1 \mu 3} \Phi_\gamma^{\mu 1 \rho} \Psi_\delta^{\nu 1 \sigma\mu 3} \quad ; \quad V'_4 = 3 \Phi_\alpha^{*\mu 1 \nu} \Psi_\beta^{*\mu 2 \mu 3} \Phi_\gamma^{\mu 1 \rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu 2 \mu 3} \quad (5.26)$$

onde  $V'_4$  é o termo direto de quark-antiquark enquanto que  $V_4$  é o termo de troca de quarks.

E, finalmente

$$V_2 + V'_2 = q_\mu^\dagger(0,1) \bar{q}_\nu^\dagger(1,1) \bar{q}_\rho(0,0) q_\sigma(1,0) + q_\mu^\dagger(1,0) \bar{q}_\nu^\dagger(0,0) \bar{q}_\rho(1,1) q_\sigma(0,1) \quad (5.27)$$

com

$$V_2 = -3 \Phi_\alpha^{*\mu\nu 2} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \quad ; \quad V_2' = -3 \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu_1} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\sigma\nu_1} \Psi_\delta^{\mu_1\rho\mu_3} \quad (5.28)$$

onde  $V_2$  é o termo de troca de quarks e  $V_2'$  representa o termo de troca de glúon em um hádron.

Assim, podemos escrever [61]

$$V^{inter} = V^{inter}(\alpha\beta; \delta\gamma) m_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger m_\gamma b_\delta \quad (5.29)$$

Onde o kernel de (5.29) tem a seguinte forma

$$V^{inter}(\alpha\beta; \delta\gamma) = \sum_{i=1}^4 V_i(\alpha\beta; \delta\gamma) \quad (5.30)$$

E cada termo de (5.30) é dado por

$$\begin{aligned} V_1(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\nu 2} \Psi_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\ V_2(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\ V_3(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\nu 2} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \\ V_4(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -6V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\nu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3}. \end{aligned}$$

A representação das amplitudes de (5.30) pode ser vista na Figura 5.1.

A troca de glúon em um hádron aparece em  $V^{intra}$ ,

$$\begin{aligned} V^{intra} &= - \left[ 3H_M(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} + H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_3\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\sigma\rho} \right. \\ &\quad \left. + H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\tau} \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} - H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\tau} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\tau} \Psi_\delta^{\mu_1\sigma\mu_3} \right] m_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger m_\gamma b_\delta. \end{aligned} \quad (5.31)$$

E o termo direto sem troca de quarks  $V^{dir}$

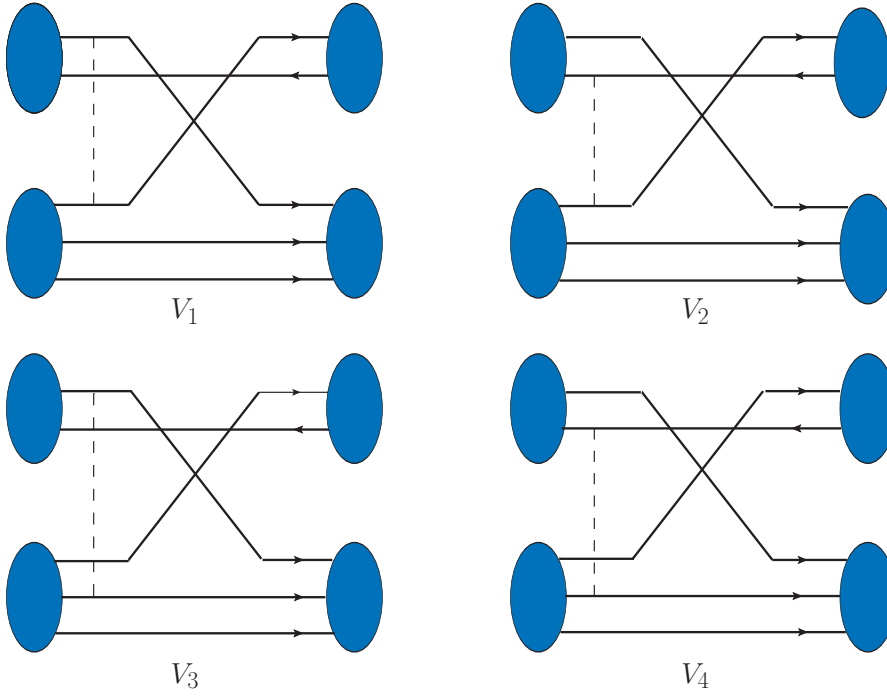
$$V^{dir} = \left[ 3V_{qq}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\nu\nu_2} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} + 3V_{q\bar{q}}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \right] m_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger m_\gamma b_\delta. \quad (5.32)$$

A parte cinética efetiva  $T^{intra}$  é dada por

$$T^{intra} = \left[ \delta_{\beta\delta} \Phi_\alpha^{*\mu\nu} H_M(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\gamma^{\sigma\rho} + \delta_{\alpha\gamma} \Psi_\beta^{*\mu\nu\mu_3} H_B(\mu\nu; \sigma\rho) \Psi_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \right] m_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger m_\gamma b_\delta. \quad (5.33)$$

Agora, considerando (5.14) e (5.15), os kernels  $T^{intra}$  e  $V^{intra}$  se reduzem a

$$T^{intra} + V^{intra} = \left( \epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B \right) N(\alpha\beta; \gamma\delta), \quad (5.34)$$



**Fig. 5.1:** Diagramas de espalhamento  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  e  $V_4$  respectivamente

onde  $N(\alpha\beta; \gamma\delta)$  é dado por

$$N(\alpha\beta; \gamma\delta) = \delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\gamma} - N_E(\alpha\beta; \gamma\delta) \quad (5.35)$$

com  $N_E(\alpha\beta; \gamma\delta) = 3 \Phi_\alpha^{*\mu\tau} \Psi_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\tau} \Psi_\delta^{\mu\nu\mu_3}$ . A interação efetiva méson-báron (5.20) torna-se,

$$\mathcal{H}_{\text{mb}} = V_{\text{mb}} + (\epsilon_{[\gamma]}^M + \epsilon_{[\delta]}^B) N \quad (5.36)$$

onde  $V_{\text{mb}} = V^{\text{dir}} + V^{\text{inter}}$ .

Inspirados inicialmente nos trabalhos de Barnes e Swanson [18], [19], nossos cálculos levavam em consideração apenas a parte de troca de quarks. Após algumas simulações percebemos que, para interações de curto alcance, como a de nosso estudo, a aniquilação deveria ser incluída.

Assim, a partir da equação (5.20), vemos que as contribuições relevantes para os termos de aniquilação são dadas por  $V_{q\bar{q}}$  da equação (5.13) e são combinações das funções de onda até quarta ordem. Após transformar  $\frac{1}{2} q_\mu^\dagger q_\nu^\dagger q_\rho q_\sigma$  e  $q_\mu^\dagger \bar{q}_\nu^\dagger \bar{q}_\rho q_\sigma$  em termos da estrutura do operador e realizar o ordenamento normal dos operadores de quarks e antiquarks, obtivemos as possíveis combinações [62]:

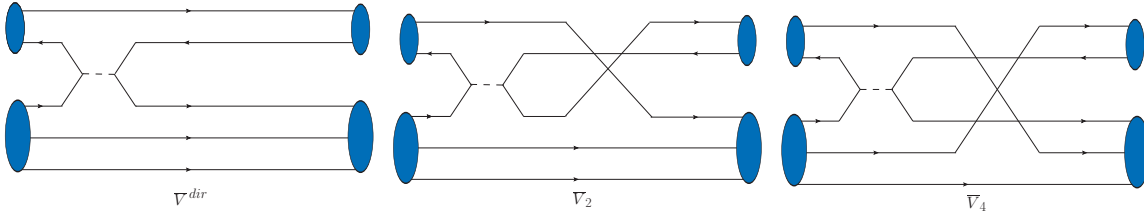


Fig. 5.2: Diagramas de aniquilação  $V_{direct}$ ,  $\bar{V}_2$  e  $\bar{V}_4$  respectivamente

$$\begin{aligned}
 V_{dir_1}(\alpha\beta; \delta\gamma) &= +3V_{q\bar{q}}^{Ann}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\nu\nu_2} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\rho\nu_2} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 V_{direct}(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{q\bar{q}}^{Ann}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\nu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\nu_1\rho} \Psi_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 \bar{V}_2(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -3V_{q\bar{q}}^{Ann}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\mu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \Phi_\gamma^{\sigma\rho} \Psi_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\
 \bar{V}_4(\alpha\beta; \delta\gamma) &= -6V_{q\bar{q}}^{Ann}(\mu\nu; \sigma\rho) \Phi_\alpha^{*\nu_1\nu} \Psi_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \Phi_\gamma^{\mu_1\rho} \Psi_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3}.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Ao analisar as equações de aniquilação acima, vimos que a parte de cor do termo  $V_{dir_1}$  é nula, utilizaremos portanto apenas as demais equações, cuja representação das amplitudes de aniquilação pode ser vista na figura 5.2.

Dessa forma, a interação microscópica de nosso estudo resulta em dois potenciais de interação: espalhamento e aniquilação. O potencial quark-quark é definido por

$$V_{qq} = \sum_{aij} \left[ V_{ij}^{hyper} + V_{ij}^{conf} \right] (T_i^a \cdot T_j^a) \tag{5.38}$$

E o potencial entre um quark e um antiquark é dado por

$$V_{q\bar{q}} = \sum_{aij} \left[ V_{ij}^{hyper} + V_{ij}^{conf} \right] (T_i^a \cdot \hat{T}_j^a) \quad ; \quad \bar{V}_{q\bar{q}} = \sum_{aij} \left[ V_{ij}^{ann} + V_{ij}^{conf} \right] (T_i^a \cdot \hat{T}_j^a) \tag{5.39}$$

onde  $T^a \equiv \lambda^a/2$  é a matriz de cor para quarks e  $\hat{T}^a \equiv -(\lambda^T)^a/2$  é a matriz de antiquarks.

$$\begin{aligned}
 V_{ij}^{hyper} &= \frac{\alpha_s}{r_{ij}} - \frac{8\alpha_s}{3\sqrt{\pi} m_i m_j} a_{ss}^3 e^{-a_{ss}^2 r_{ij}^2} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) \quad ; \quad V_{ij}^{conf} = -\frac{3}{4} b r_{ij} \\
 V_{ij}^{ann} &= \left[ -\frac{4\alpha_s}{r_{ij}} + \frac{4\pi\alpha_s}{m_i m_j} \delta(r_{ij}) \right] \vec{S}_i^{c\dagger} \cdot \vec{S}_j^c.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

O potencial de aniquilação  $V_{ij}^{ann}$  é a parte inédita do nosso estudo e os detalhes de sua obtenção estão no Apêndice A. A interação hiperfina  $V_{ij}^{hyper}$  contém os termos de cor de Coulomb e o Spin-Spin com um fator gaussiano parametrizado por  $a_{ss}$ . Os operadores de spin são definidos como  $\vec{S}_{ij} = \chi_{s_i}^\dagger \vec{\sigma}/2 \chi_{s_j}$  onde  $\vec{S}_{ij}^c = \chi_{s_i}^{c\dagger} \vec{\sigma}/2 \chi_{s_j}$ ;  $\chi_s$  é o spinor de Pauli e  $\chi_s^c = \sigma_1 \chi_s$ .

A troca de um méson é a parte de longo alcance da interação e será descrita pelo potencial microscópico de Yukawa tanto para quark-quark quanto para quark-antiquark [63]-[65]

$$V_{ij} = \frac{g_{mq}^2}{3} \frac{e^{-\mu r_{ij}}}{r_{ij}}. \quad (5.41)$$

Esse potencial possui ainda um acoplamento méson quark  $g_{mq}^2$  e um fator global  $\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}$  que substitui o fator de cor do glúon  $\vec{T}_i \cdot \vec{T}_j$ .



# Capítulo 6

## O Sistema Káon-Núcleon

Neste capítulo vamos apresentar a outra parte inédita do nosso trabalho: utilizando como descrição microscópica o potencial de interação entre quarks e antiquarks obtido em capítulos anteriores, ele será introduzido no Hamiltoniano de Fock-Tani obtido no Capítulo 5, deduzido a partir da nova transformação de Fock-Tani composta para um sistema méson-báron. Como aplicação específica será considerado o sistema káon-núcleon (KN), calculando seção de choque total do espalhamento e comparando com dados experimentais. Em particular estudaremos os seguintes processos

$$\begin{aligned}
 K^- + p &\rightarrow K^- + p && ; && \bar{K}^0 + n \\
 &\rightarrow \pi^- + \Sigma^+ && ; && \pi^+ + \Sigma^- && ; && \pi^0 + \Sigma^0 \\
 &\rightarrow \pi^0 + \Lambda && ; && \pi^0 + \Lambda(1405) \\
 &\rightarrow K^0 + \Xi^0 && ; && K^+ + \Xi^- && ; && K^+ + \Xi^-(1700) \\
 &\rightarrow K^0(890) + \Xi^0 && ; && K^0 + \Xi^0(1700) \\
 &\rightarrow \eta + \Lambda
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Fazendo uma conexão com a discussão desenvolvida no Capítulo 3, podemos considerar o espalhamento genérico de duas partículas como sendo descrito seguinte processo

$$\gamma + \delta \rightarrow \alpha + \beta. \tag{6.2}$$

A amplitude de espalhamento exata para esse processo é dada pelos elementos da matriz-T na representação Fock-Tani [53],

$$T_{fi}(z) = \langle f | T_{FT}(z) | i \rangle, \tag{6.3}$$

onde

$$|f\rangle = |\alpha\beta\rangle = m_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger |0\rangle \quad ; \quad |i\rangle = |\gamma\delta\rangle = m_\gamma^\dagger b_\delta^\dagger |0\rangle \tag{6.4}$$

são, respectivamente, os estados assintóticos final e inicial, que são auto-estados de  $T_m^{(0)}$ , e  $T_{FT}(z)$  é o operador de transição na representação de Fock-Tani. Como visto no Capítulo 3, este operador satisfaz uma equação do tipo Lippmann-Schwinger,

$$T_{FT}(z) = V_{FT} + V_{FT} G_0(z) T_{FT}(z), \tag{6.5}$$

onde  $V_{FT}$  é o termo de interação do Hamiltoniano de Fock-Tani e  $G_0(z)$  é o propagador livre do méson e do bárion, dado por,

$$G_0(z) = (z - T^{(0)})^{-1}. \quad (6.6)$$

onde  $T^{(0)}$  corresponde ao termo de partícula única do Hamiltoniano transformado,

$$T^{(0)} = \sum_{\mu} T(\mu) q_{\mu}^{\dagger} q_{\mu} + \sum_{\nu} T(\nu) \bar{q}_{\nu}^{\dagger} \bar{q}_{\nu} + \sum_{\alpha\beta} T(\alpha; \beta) m_{\alpha}^{\dagger} m_{\beta} + \sum_{\alpha\beta} T(\alpha; \beta) b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}. \quad (6.7)$$

Conhecendo o potencial  $V_{FT}$ , em princípio usando a equação (6.5) determina-se a matriz- $T$ . Como foi comentado no Capítulo 3, este é um problema delicado, pois esta é uma equação integral, que pode ser escrita numa forma alternativa

$$T_{FT} = [1 - V_{FT} G_0^+(E)]^{-1} V_{FT}, \quad (6.8)$$

evidenciando um pólo no denominador, durante a integração complexa. Na aproximação de Born de primeira ordem este problema é evitado, porém surge a dúvida quanto a possível invalidade da própria aproximação. Portanto, é necessário verificar se esta aproximação está correta. No nosso estudo encontraremos processos em canais elásticos e inelásticos. O procedimento que iremos adotar é o de comparar a seção de choque total elástica resolvendo o problema completo com a da aproximação de Born. Vamos mostrar detalhes deste procedimento na próxima seção.

## 6.1 Validade da Aproximação de Born

Nesta seção vamos estudar validade da aproximação de Born. O elemento da matriz- $T$ , na representação Fock-Tani, em primeira ordem na aproximação de Born, é dado por:

$$T_{fi} = V_{mb}(\alpha\beta; \gamma\delta) \equiv (\alpha\beta | V_{mb} | \gamma\delta). \quad (6.9)$$

Devido à invariância translacional do nosso potencial é possível escrever  $V_{mb}$  na forma

$$V_{mb}(\alpha\beta; \delta\gamma) = \delta(P_f - P_i) h_{fi}, \quad (6.10)$$

através da qual, podemos obter a equação (3.78)

$$\sigma(s) = 32\pi^5 \mu_{AB} \mu_{CD} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \int_{-1}^{+1} dz |h_{fi}|^2 \quad (6.11)$$

onde  $\mu_{AB} = E_A E_B (E_A + E_B)^{-1}$ ,  $|\vec{p}'| = p'(s)$ ,  $|\vec{p}| = p(s)$ , definido em (3.68)-(3.69) e  $h_{fi} = h_{fi}(s, z)$ . Estas equações constituem a essência do cálculo que pretendemos realizar, tanto para os canais elásticos quanto para inelásticos. Em resumo o modelo de quarks microscópico tem duas partes (1) parte de troca de um glúon (OGEP) e (2) troca de um méson sigma acoplado aos quarks (“Quark Meson Coupling”)

As contribuições dos termos do potencial de troca de um glúon são :

1. Spin-spin
2. Coulomb
3. Confinamento
4. Aniquilação spin-spin
5. Aniquilação coulomb spin

Onde os termos (1)-(3) contribuem em interações quark-quark e quark-antiquark sem aniquilação e os termos (3)-(6) contribuem para as interações de aniquilação. Para o presente estudo utilizamos interações de contato.

Para testar a validade das equações (6.9)-(6.11), vamos comparar com o resultado exato obtido usando o código “LIPS” cedido pelo prof. Lauro Tomio (IFT-UNESP) que resolve a equação de Lippmann-Schwinger para canais elásticos. O código é baseado num método apresentado na referência [51] e será brevemente revisado a seguir.

De acordo com esta referência, o esquema geral para se construir uma classe de equações auxiliares não-singulares começa introduzindo um função de subtração  $\gamma(k, q)$ , bem comportada na variável  $q$  e parametricamente dependente de um certo ponto  $k \geq 0$  de subtração, satisfazendo a restrição  $\gamma(k, k) = 1$ . Assim a matriz-T, da equação (3.29), pode ser reescrita da seguinte forma (como é demonstrado em detalhe em [51]):

$$T_s(q, q') = V(q, q') + V(q, k) \frac{2}{\pi} \int \frac{dp p^2}{s - p^2} \gamma(k, p) T_s(p, q') + \int dp A_s(q, p; k) T_s(p, q'), \quad (6.12)$$

onde

$$A_s(q, p; k) = \frac{2}{\pi} p^2 [V(q, p) - V(q, k)\gamma(k, p)] \frac{1}{s - p^2}. \quad (6.13)$$

Devido à restrição  $\gamma(k, k) = 1$ , o kernel  $A_s(q, p; k)$  não é singular no ponto  $p = k$  se  $s = k^2$ . O código do prof. Tomio integra a equação (6.12) usando esta estratégia e calcula o deslocamento de fase  $\delta_l$ , usando (3.58), ou seja, a equação

$$\tan \delta_l = \frac{T_l^I}{T_l^R} \quad (6.14)$$

e depois a seção de choque elástica total da  $l$ -ésima onda parcial, usando (3.50), ou seja,

$$\sigma_l^{el} = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \sin^2 \delta_l. \quad (6.15)$$

Nós modificamos o código em dois lugares:

1. escrevemos uma subrotina introduzindo o potencial de Fock-Tani para o sistema  $KN$  ;
2. introduzimos uma soma em  $l$ , sobre as ondas parciais, isto é,  $\sigma^{el} = \sum_l \sigma_l^{el}$ .

$P_K$ (GeV)	$\sigma_0^{el}$	$\sigma_1^{el}$	$\sigma_2^{el}$	$\sigma_3^{el}$	$\sigma^{el}$
0.225	48.80603	2.00495	0.02859	0.00023	50.83981
0.280	40.09406	2.94966	0.08950	0.00157	43.13479
0.335	32.20198	3.62862	0.19388	0.00624	36.03072
0.390	25.39086	3.96243	0.32764	0.01705	29.69797
0.445	19.69254	3.98165	0.46539	0.03574	24.17532
0.500	15.03529	3.76800	0.58342	0.06167	19.44837

**Tab. 6.1:** Seções de choque elásticas parciais  $\sigma_l^{el}$ , com  $l$  variando de 0 a 3, e a total  $\sigma^{el}$  da interação  $K^- + p \rightarrow K^- + p$ , em unidades de mb.

Na tabela 6.1 podem ser vistos as contribuições das ondas parciais calculadas pelo “LIPS” para  $K^- + p \rightarrow K^- + p$ . A seção de choque, medida em milibarns (mb), é função do momento do Káon incidente no referencial do laboratório em unidades de GeV. Esta tabela evidencia a rápida convergência da soma em  $l$ , mostrando que as ondas parciais mais baixas são dominantes. Na figura 6.1 realizamos a comparação entre o cálculo completo usando o “LIPS” e o nosso cálculo na aproximação de Born. Verificamos, portanto, a validade desta aproximação.

## 6.2 A seção de choque

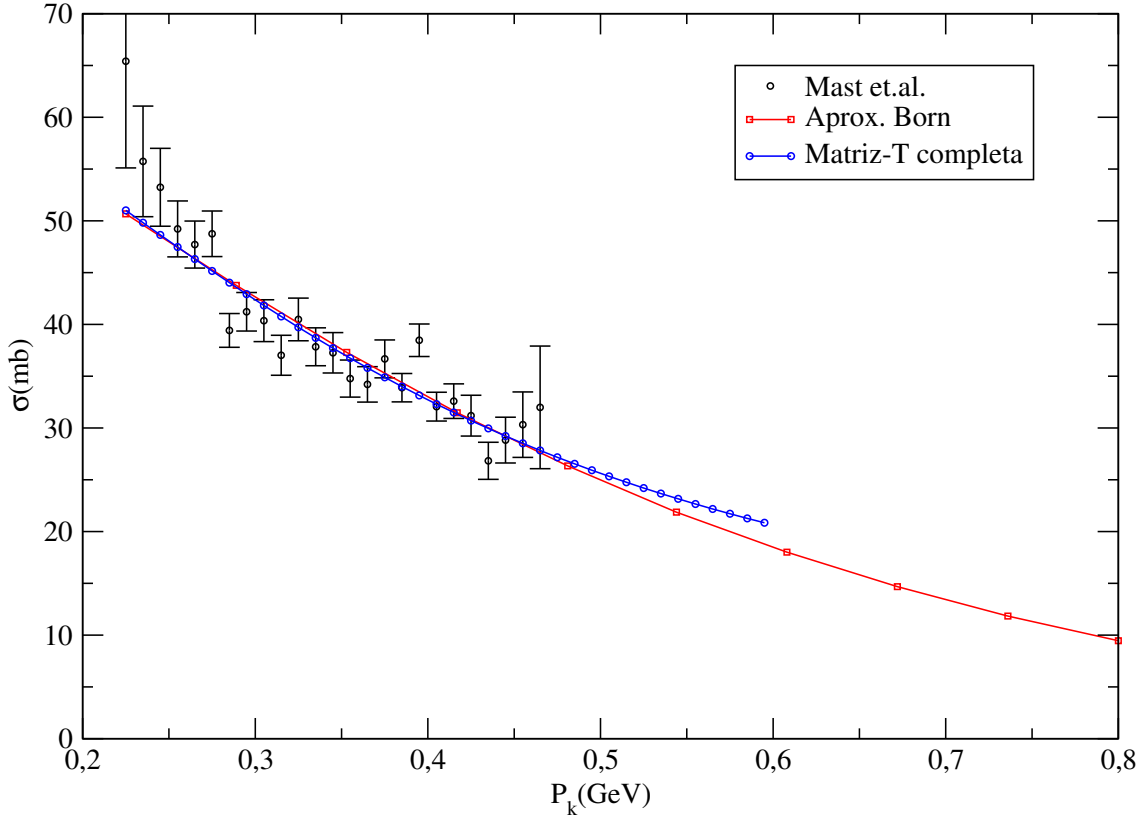
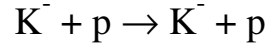
O cálculo da seção de choque total  $\sigma(s)$  dada pela equação (3.78) será obtido numericamente, realizando a integral na variável  $z$  e depois variando a energia  $s$ . Na física hadrônica,  $\alpha_s$  é uma quantidade efetiva e normalmente é tomado como um parâmetro a ser ajustado. Outros parâmetros livres estão relacionados com as funções de onda do méson e do bárion. Para o méson, o parâmetro  $\beta$  define a largura da gaussiana (C.2). No caso do bárion, na função de onda (C.22) há dois parâmetros  $\alpha_\lambda$  e  $\alpha_\rho$ , ou equivalentemente  $\alpha_\lambda$  e  $x = \alpha_\rho/\alpha_\lambda$ .

Na tabela 6.2 estão listadas as massas das partículas envolvidas no estudo que vão ser consideradas fixas. As funções de onda do méson dependem de dois outros parâmetros adimensionais  $m_1$  e  $m_2$ , definidos na equação (C.3). Estes números estão associados às massas dos quarks no méson. De forma similar a função de onda do bárion tem dois parâmetros adimensionais  $M_1$  e  $M_2$ , definidos na equação (C.9).

O valores assumidos por  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $M_1$  e  $M_2$  são fixos e estão listados na tabela (6.3). Os valores de  $\omega_i$  dependem da respectiva reação e os possíveis valores estão apresentados nas tabelas (6.4) e (6.5).

A parte de sabor do méson  $\eta$  é dada por

$$|\eta\rangle = c_1 \left( |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle \right) + c_2 |s\bar{s}\rangle \quad (6.16)$$



**Fig. 6.1:** Seção de choque da interação  $K^- + p \rightarrow K^- + p$  comparada com os dados experimentais [66]. As barras (preta) correspondem aos dados experimentais, a curva com círculos (azul) representa o cálculo com o programa 'LIPS' e a curva com quadrados (vermelho) representa a Aproximação de Born da Matriz-T.

com

$$c_1 = \frac{\cos \theta_P}{\sqrt{6}} - \frac{\sin \theta_P}{\sqrt{3}} ; c_2 = \frac{\cos \theta_P}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta_P$$

onde  $\theta_P$  é o ângulo de mistura pseudoescalar variando entre  $-10^\circ$  e  $-20^\circ$ .

A simulação da “Lattice QCD” reproduziu com êxito as massas do  $\eta$  e do  $\eta'$ , com um ângulo de mistura de  $-14.1^\circ$  [67]. Um excelente ajuste para a largura do decaimento do méson é obtido assumindo a simetria  $SU(3)$  com  $\theta_P = -17.3^\circ$  [68]. No nosso cálculo, adotaremos  $\theta_P = -17.3^\circ$ , resultando em  $c_1 = 0.561469$  em  $c_2 = -0.607869$ .

Após comprovarmos a validade da nossa aproximação, utilizamos o espalhamento elástico  $K^- + p \rightarrow K^- + p$  para ajustar os nossos parâmetros, fixando

$$\alpha_\lambda = 0.4 \text{ GeV} ; x = 0.58 ; \beta = 0.3 \text{ GeV} ; \alpha_s = 0.4 ; g_{mq} = 0.9.$$

$m_s$	$m_{u,d}$	$m_{\text{nucleon}}$	$m_{k^-,k^+}$	$m_{k^{\bar{0}},k^0}$	$m_{k^{0*}}$	$m_{\pi^0}$	$m_{\pi^-,\pi^+}$	$m_\eta$
0.550	0.33	0.938	0.493	0.497	0.892	0.135	0.139	0.548
$m_{\Sigma^+}$	$m_{\Sigma^0}$	$m_{\Sigma^-}$	$m_\Lambda$	$m_{\Lambda(1405)}$	$m_{\Xi^0}$	$m_{\Xi^-}$	$m_{\Xi^0(1700)}$	$m_{\Xi^-(1700)}$
1.189	1.192	1.197	1.115	1.406	1.314	1.321	1.690	1.691

**Tab. 6.2:** Massas em (GeV)

	Kaon	Nucleon	$Meson_{final}$	$Barion_{final}$
$m_1$	0.846	*	1.	*
$m_2$	1.153	*	1.	*
$M_1$	*	$\frac{1}{3}$	*	0.297
$M_2$	*	$\frac{1}{3}$	*	0.405

**Tab. 6.3:** Parâmetros das funções de onda

		$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\bar{\omega}^{dir}$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_4$
$K^- + p \rightarrow K^- + p$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	$-\frac{4}{9}$	0	0
$K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	$-\frac{2}{9}$	0	0
$K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	$-\frac{1}{6}$ $-\frac{2}{9}$ $-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$ $-\frac{2}{9}$ $-\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{13}{27}$
$K^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0	0	$-\frac{1}{27}$
$K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	$\frac{7}{72}$ $\frac{1}{54}$ $\frac{7}{54}$	$\frac{7}{72}$ $-\frac{1}{54}$ $-\frac{7}{54}$	$\frac{11}{216}$ $-\frac{1}{54}$ $-\frac{7}{54}$	$\frac{11}{216}$ $\frac{1}{54}$ $\frac{7}{54}$	0	0	$-\frac{13}{54}$
$K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$ $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$ $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ $\frac{1}{3\sqrt{3}}$	0 $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ $\frac{1}{3\sqrt{3}}$	0 $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{2}{9\sqrt{3}}$
$K^- + p \rightarrow K^0 + \Xi^0$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0	0	$\frac{1}{27}$
$K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^-$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0	0	$-\frac{2}{27}$
$K^- + p \rightarrow \eta + \Lambda$	Spin-spin Coulomb Confinement Annihilation	$\frac{1}{2\sqrt{6}}$ $\sqrt{\frac{2}{27}}$ $\sqrt{\frac{2}{27}}$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}$ $-\sqrt{\frac{2}{27}}$ $-\sqrt{\frac{2}{27}}$	0 $-\sqrt{\frac{2}{27}}$ $-\sqrt{\frac{2}{27}}$	0 $\sqrt{\frac{2}{27}}$ $\sqrt{\frac{2}{27}}$	$-\sqrt{\frac{2}{27}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{27}}$

Para esse processo  $\omega_i$  de  $\eta$  deve ser multiplicado pelo fator de mistura  $c_1$ ; a parte de aniquilação  $\bar{\omega}^{dir}$  deve ser multiplicada por  $c_2$  e  $\bar{\omega}_4$  por  $c_1$ .

**Tab. 6.4:** Parâmetros spin-sabor-cor pra troca de um glúon; todos  $\omega_i^{dir} = 0$ .

	$\omega_1^{dir}$	$\omega_2^{dir}$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\bar{\omega}_1^{dir}$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_4$
$K^- + p \rightarrow K^- + p$	1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$	0	0
$K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{18}$	0	0
$K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$	0	0	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{13}{54}$
$K^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{54}$
$K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$	0	0	$\frac{7}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{7}{108}$	$\frac{7}{108}$	0	0	$-\frac{13}{108}$
$K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda$	0	0	$-\frac{1}{12\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{12\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{6\sqrt{3}}$	0	0	$\frac{1}{9\sqrt{3}}$
$K^- + p \rightarrow K^0 + \Xi^0$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{54}$
$K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^-$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{27}$
$K^- + p \rightarrow \eta + \Lambda$	0	0	$\frac{1}{6\sqrt{6}}$	$\frac{1}{6\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$	$\frac{1}{6\sqrt{6}}$	0	$\frac{1}{3\sqrt{6}}$

Para esse processo  $\omega_i$  de  $\eta$  deve ser multiplicado pelo fator de mistura  $c_1$ ; a parte de aniquilação  $\bar{\omega}^{dir}$  deve ser multiplicada por  $c_2$  e  $\bar{\omega}_4$  por  $c_1$ .

**Tab. 6.5:** Parâmetros spin-sabor-cor para troca de um méson.



### 6.3 Modelo de Canal Acoplado do JPAC (Jefferson Lab)

Nesta seção vamos resumir o modelo de canais acoplados estudado pelo *Joint Physics Analysis Center* (JPAC) do Jefferson Lab da referência [69]. Entre os canais estudados estão

$$\begin{aligned}
 K^- + p &\rightarrow K^- + p \\
 &\rightarrow \bar{K}^0 + n \\
 &\rightarrow \pi^- + \Sigma^+ \\
 &\rightarrow \pi^+ + \Sigma^- \\
 &\rightarrow \pi^0 + \Sigma^0 \\
 &\rightarrow \pi^0 + \Lambda
 \end{aligned}$$

A seção de choque diferencial para os processos relacionados aos estados de méson-báron com  $S = -1$  é dada por [70]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(s, \theta) = \frac{1}{q^2} [ |f(s, \theta)|^2 + |g(s, \theta)|^2 ], \quad (6.17)$$

onde  $q$  é a magnitude do momento no referencial do centro de massa e  $\theta$  é o ângulo de espalhamento. As amplitudes  $f(s, \theta)$  e  $g(s, \theta)$  correspondem às contribuições com *flip* e sem *flip* de spin, respectivamente. Estas amplitudes estão relacionadas às amplitudes de canal- $s$  de isospin  $I = 0$  e  $I = 1$  pela relação geral

$$\begin{aligned}
 f(s, \theta) &= \alpha^0 f_{kj}^0(s, \theta) + \alpha^1 f_{kj}^1(s, \theta), \\
 g(s, \theta) &= \alpha^0 g_{kj}^0(s, \theta) + \alpha^1 g_{kj}^1(s, \theta),
 \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde  $f_{kj}^I(s, \theta)$  e  $g_{kj}^I(s, \theta)$  são as amplitudes de isospin. Aqui  $\alpha^0$  e  $\alpha^1$  são os coeficientes de Clebsch-Gordan para isospin zero e um correspondente. O rótulo  $kj$  indica o estado inicial ( $k$ ) e final ( $j$ ), respectivamente. Em especial temos

$$\begin{aligned}
 f^{K^-p \rightarrow K^-p} &= \frac{1}{2} f_{\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N}^1 + \frac{1}{2} f_{\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N}^0, \\
 f^{K^-p \rightarrow \bar{K}^0 n} &= \frac{1}{2} f_{\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N}^1 - \frac{1}{2} f_{\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N}^0, \\
 f^{K^-p \rightarrow \pi^- \Sigma^+} &= -\frac{1}{2} f_{\bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma}^1 - \frac{1}{\sqrt{6}} f_{\bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma}^0, \\
 f^{K^-p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-} &= \frac{1}{2} f_{\bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma}^1 - \frac{1}{\sqrt{6}} f_{\bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma}^0, \\
 f^{K^-p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0} &= \frac{1}{\sqrt{6}} f_{\bar{K}N \rightarrow \pi\Sigma}^0, \\
 f^{K^-p \rightarrow \pi^0 \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}} f_{\bar{K}N \rightarrow \pi\Lambda}^1,
 \end{aligned} \quad (6.19)$$

e de forma similar para  $g(s, \theta)$ . A expansão em ondas parciais das amplitudes de isospin é dada por

$$\begin{aligned} f_{kj}^I(s, \theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ (\ell + 1) R_{\ell+}^{I,kj}(s) + \ell R_{\ell-}^{I,kj}(s) \right] P_{\ell}(\theta), \\ g_{kj}^I(s, \theta) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[ R_{\ell+}^{I,kj}(s) - R_{\ell-}^{I,kj}(s) \right] P_{\ell}^1(\theta), \end{aligned} \quad (6.20)$$

onde  $P_{\ell}(\theta)$  é o polinômio de Legendre e  $P_{\ell}^1(\theta) = \sin \theta dP_{\ell}(\theta) / d \cos \theta$ . As ondas parciais  $R_{\ell\tau}^{I,kj}(s)$  ( $\tau = \pm$ ) são consideradas como elementos  $kj$  da matriz  $R_{\ell}(s)$  do espaço de canais definida na equação (6.22) a seguir.

Num dado canal méson-bárion  $\ell$  é o rótulo do momento angular relativo e o momento angular total é dado por  $J = \ell + \tau/2$ . O momento angular orbital  $\ell$  coincide com o momento angular orbital do estado inicial  $\bar{K}N$  em  $R_{\ell\tau}^{I,kj}(s)$ , mas não necessariamente o momento angular orbital dos outros estados possíveis. Por exemplo, para a onda parcial com  $I = 1, \ell = 0$  é possível ter  $\bar{K}\Delta(1232)$  num estado de onda  $D$  ( $L = 2$ ). Em termos de ondas parciais a seção de choque total é dada por

$$\sigma(s) = \frac{4\pi}{q^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ (\ell + 1) |R_{\ell+}(s)|^2 + \ell |R_{\ell-}(s)|^2 \right], \quad (6.21)$$

onde  $R_{\ell\tau}(s) = \alpha^0 R_{\ell\tau}^{0,kj}(s) + \alpha^1 R_{\ell\tau}^{1,kj}(s)$ .

Para uma dada onda parcial podemos escrever a amplitude da matriz de espalhamento no espaço de canais

$$S_{\ell} = \mathbb{I} + 2iR_{\ell}(s) = \mathbb{I} + 2i [C_{\ell}(s)]^{1/2} T_{\ell}(s) [C_{\ell}(s)]^{1/2}, \quad (6.22)$$

onde  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade,  $C_{\ell}(s)$  é a matriz diagonal para o espaço de fase e  $T_{\ell}(s)$  é a matriz da amplitude da onda parcial analítica. Escrevemos  $T_{\ell}(s)$  em termos da matriz  $K$  o que garante a unitariedade [71]

$$T_{\ell}(s) = [K(s)^{-1} - i\rho(s, \ell)]^{-1}. \quad (6.23)$$

Para um  $s$  real,  $K(s)$  é uma matriz real simétrica e  $\rho(s, \ell)$  é uma matriz diagonal que pode ser escrita como uma integral dispersiva sobre a matriz  $C_{\ell}(s)$  do espaço de fase, chamada de representação de Chew-Mandelstam,

$$i\rho(s, \ell) = \frac{s - s_k}{\pi} \int_{s_k}^{\infty} \frac{C_{\ell}(s')}{s' - s} \frac{ds'}{s' - s_k}. \quad (6.24)$$

Aqui  $s_k$  é a energia de limiar do centro de massa ao quadrado do  $k$ -ésimo canal e definimos

$$C_{\ell}(s) = \frac{q_k(s)}{q_0} \left[ \frac{r^2 q_k^2(s)}{1 + r^2 q_k^2(s)} \right]^{\ell}. \quad (6.25)$$

O primeiro fator do lado direito da equação (6.25) está relacionado com o momento de *breakup* próximo ao limiar. Para um par de méson-bárion com massas  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente,  $s_k = (m_1 + m_2)^2$ , e

$$q_k(s) = \frac{\sqrt{(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)}}{2\sqrt{s}} \simeq \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{(m_1 + m_2)} \sqrt{s - s_k}, \quad (6.26)$$

onde o parâmetro de alcance efetivo é tomado  $r = 1$  fm e o fator de normalização  $q_0 = 2$  GeV para o momento na região da ressonância. A integral (6.24) resulta

$$\begin{aligned} i\rho(s, \ell) = & \frac{1}{q_0 r} \left[ -\frac{a_k^{\ell+1/2} (s - s_k)^\ell \sqrt{s_k - s}}{[1 + a_k (s - s_k)]^\ell} \right. \\ & + \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\ell + 1)} \left( \left[ 1 + a_k (s - s_k) \right] {}_2F_1 \left[ 1, \ell + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{a_k (s_k - s)} \right] \right. \\ & \left. \left. - \left[ 3 + 2\ell + a_k (s - s_k) \right] {}_2F_1 \left[ 1, \ell + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{a_k (s_k - s)} \right] \right) \right], \quad (6.27) \end{aligned}$$

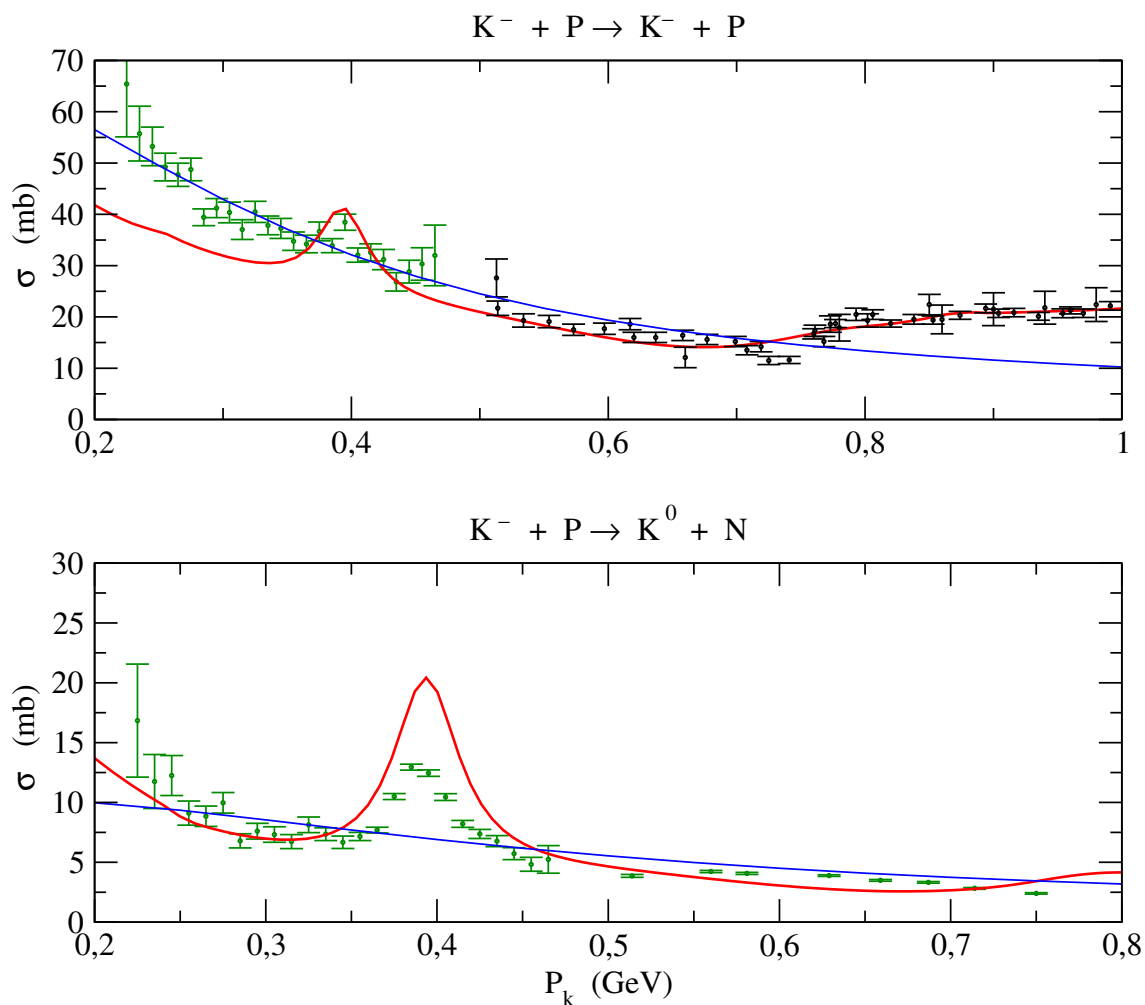
onde  $a_k = m_1 m_2 r^2 / (m_1 + m_2)^2$ .

## 6.4 Resultados

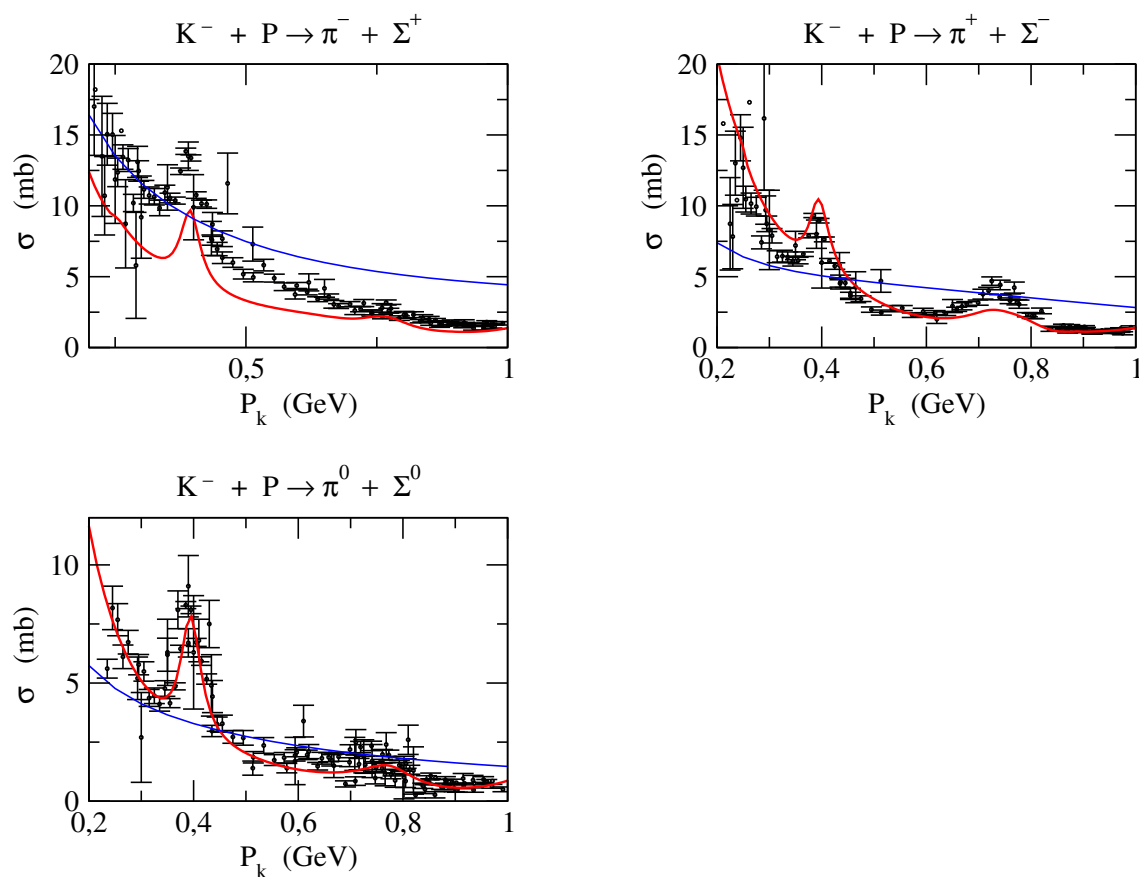
Nas figuras (6.2)-(6.7) estão os resultados do nosso estudo juntamente com dados experimentais do CERN-HERA [72] e com os resultados obtidos pelo estudo de canais acoplados do JLab [69] para os processos

$$\begin{aligned} K^- + p & \rightarrow K^- + p & ; & & \bar{K}^0 + n \\ & \rightarrow \pi^- + \Sigma^+ & ; & & \pi^+ + \Sigma^- & ; & \pi^0 + \Sigma^0 \\ & \rightarrow \pi^0 + \Lambda & ; & & \pi^0 + \Lambda(1405) \\ & \rightarrow K^0 + \Xi^0 & ; & & K^+ + \Xi^- & ; & K^+ + \Xi^-(1700) \\ & \rightarrow K^0(890) + \Xi^0 & ; & & K^0 + \Xi^0(1700) \\ & \rightarrow \eta + \Lambda. \end{aligned} \quad (6.28)$$

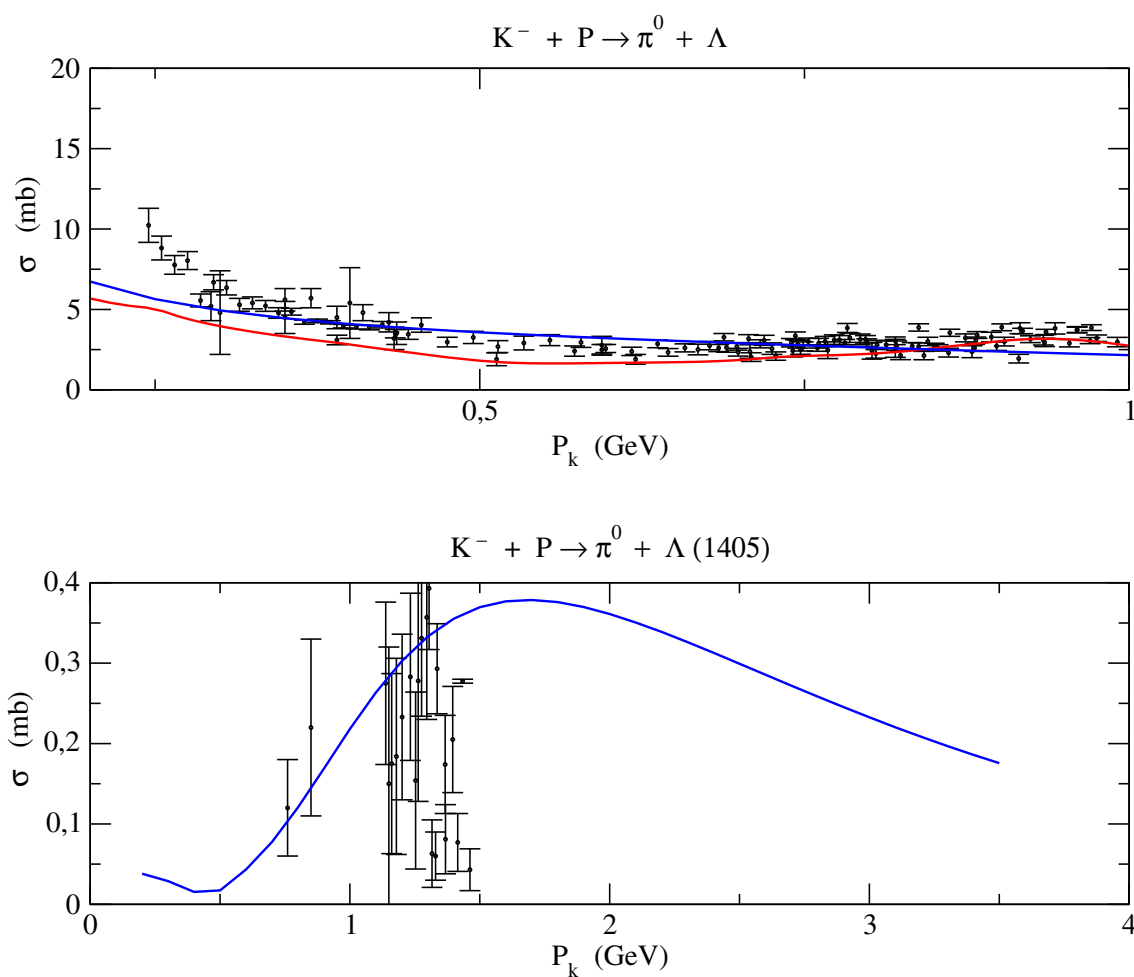
É possível ver que a aproximação de Born para o potencial de Fock-Tani, aplicado ao sistema Cáon-Núcleon, evita os polos de ressonância e mantém-se válida para os processos elásticos e inelásticos.



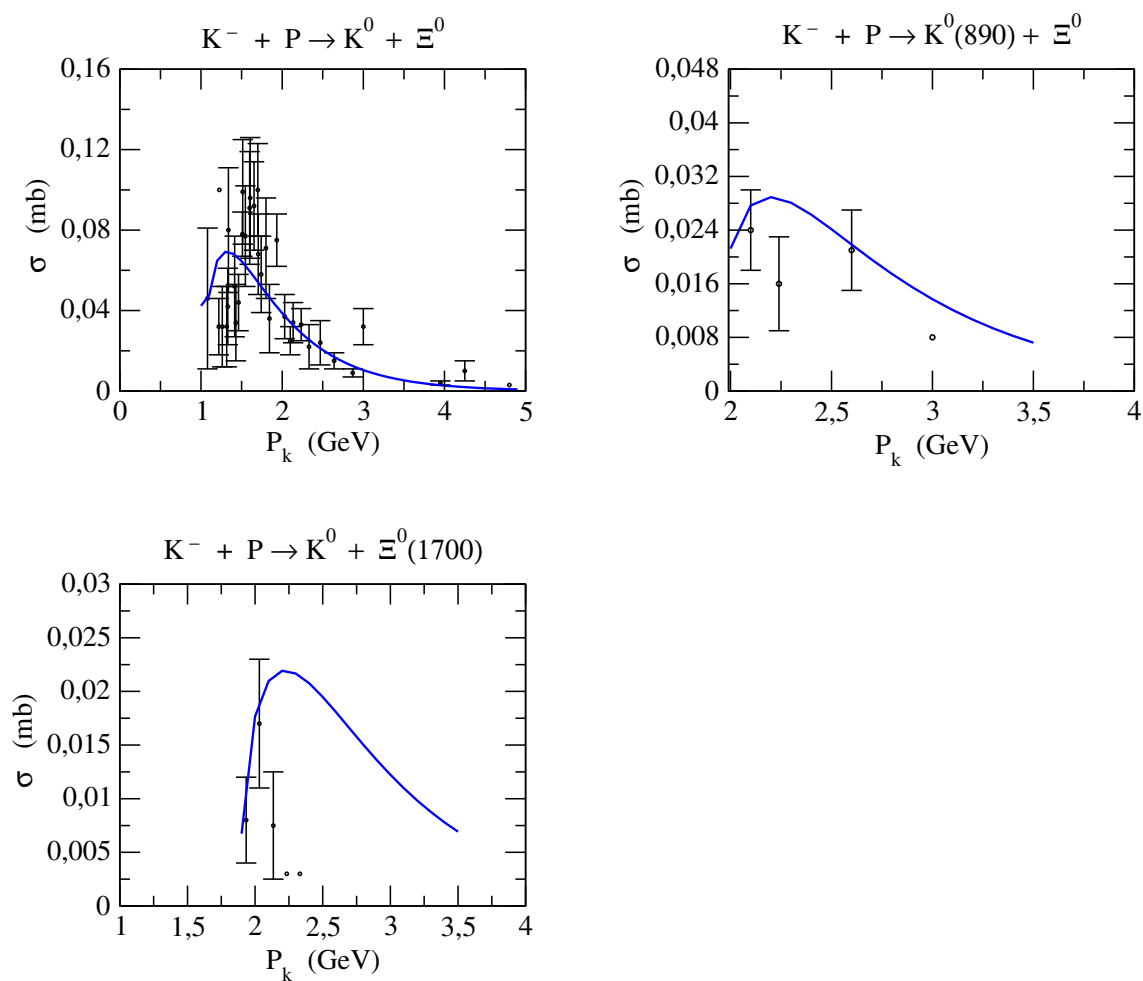
**Fig. 6.2:** Seção de choque das interações  $K^- + p \rightarrow K^- + p$  (superior) e  $K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n$  (inferior). As barras pretas correspondem aos dados experimentais do Cern-Hera, as barras verdes correspondem aos dados experimentais de Mast. et al, a curva vermelha corresponde ao estudo JLab e as curvas em azul representam o nosso estudo.



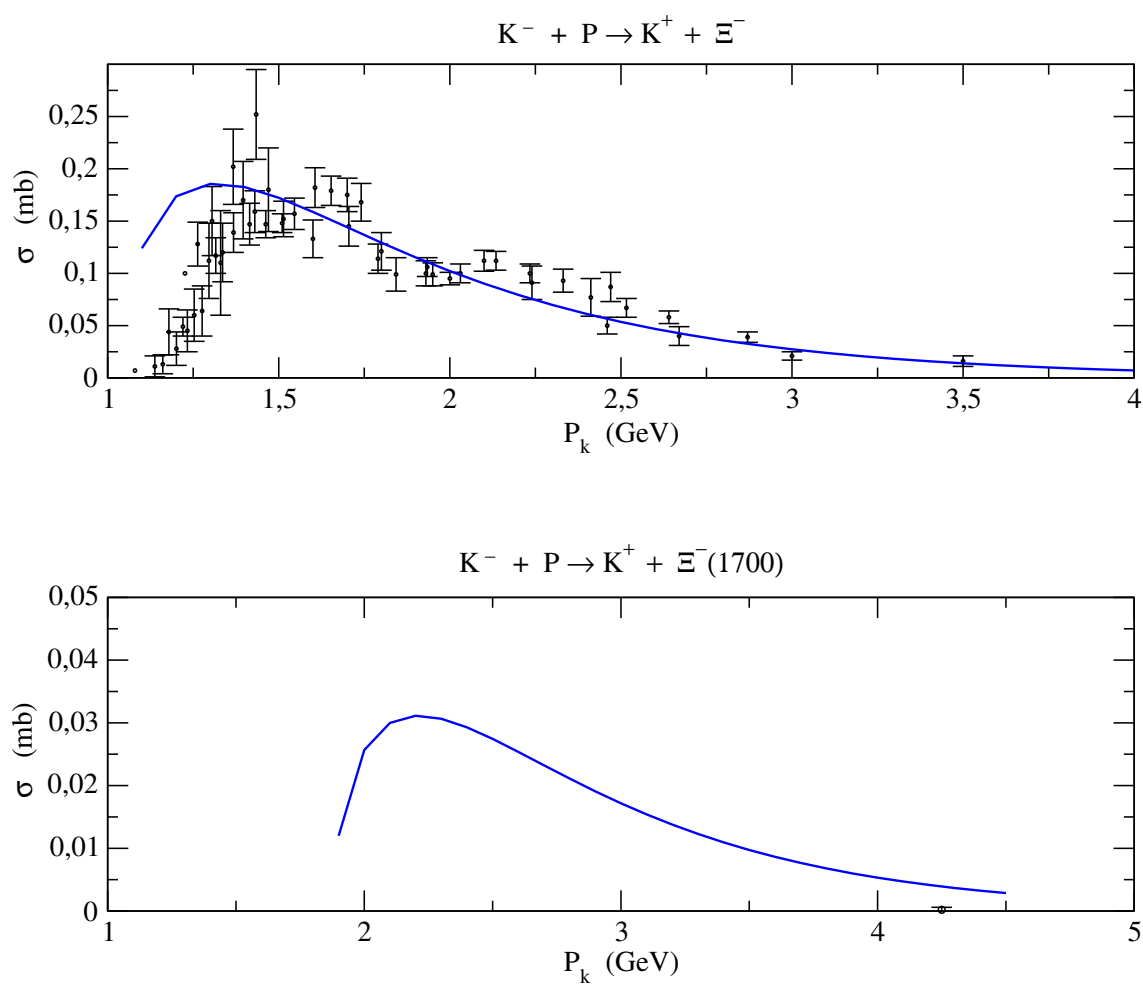
**Fig. 6.3:** Seção de choque das interações  $K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$  (superior-esquerda),  $K^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$  (superior-direita) e  $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$  (inferior). As barras pretas correspondem aos dados experimentais do Cern-Hera, a curva vermelha corresponde ao estudo JLab e as curvas em azul representam o nosso estudo.



**Fig. 6.4:** Seção de choque das interações  $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda$  (superior) e  $K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda(1405)$  (inferior). As barras pretas correspondem aos dados experimentais do Cern-Hera, a curva vermelha corresponde ao estudo JLab e as curvas em azul representam o nosso estudo.

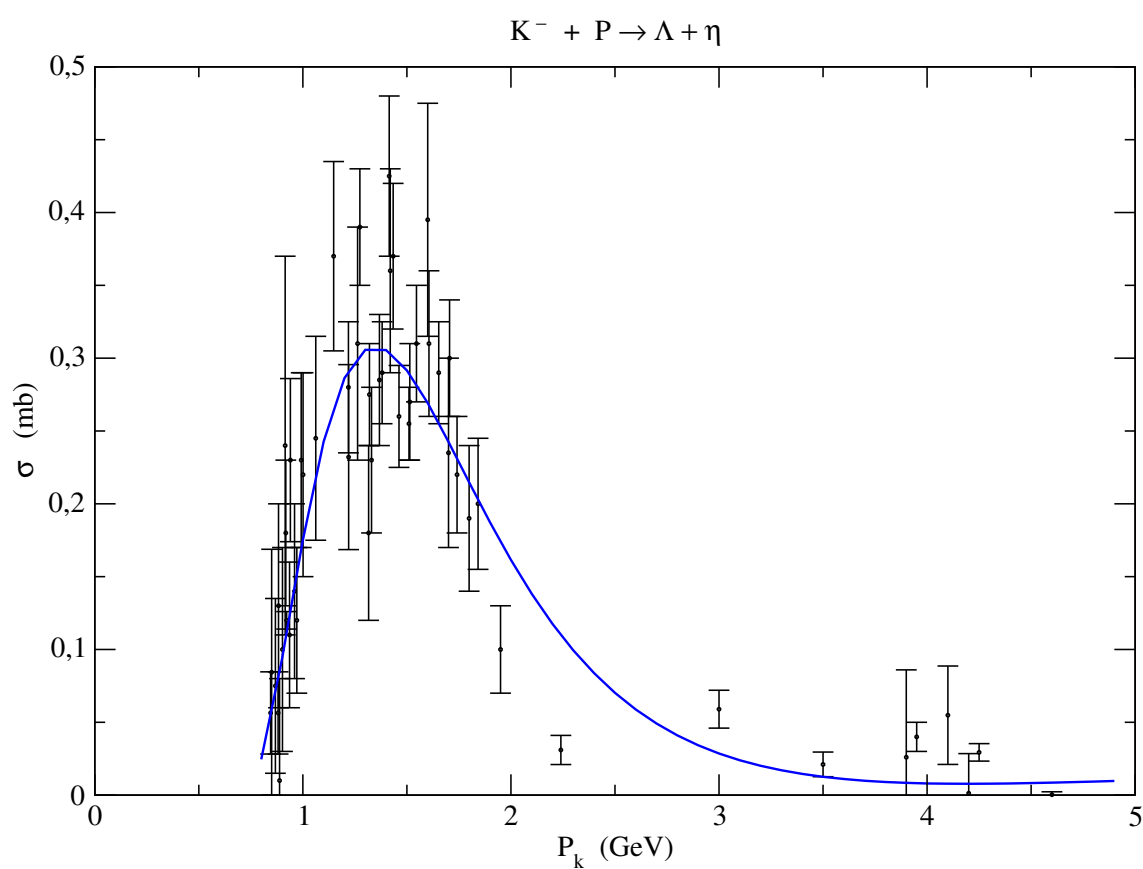


**Fig. 6.5:** Seção de choque das interações  $K^- + p \rightarrow K^0 + \Xi^0$  (superior-esquerda),  $K^- + p \rightarrow K^0(890) + \Xi^-$  (superior-direita) e  $K^- + p \rightarrow K^0 + \Xi^0(1700)$  (inferior). As barras pretas correspondem aos dados experimentais do Cern-Hera e as curvas em azul representam o nosso estudo.



**Fig. 6.6:** Seção de choque das interações  $K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^-$  (superior) e  $K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^-(1700)$  (inferior). As barras pretas correspondem aos dados experimentais do Cern-Hera e as curvas em azul representam o nosso estudo.





**Fig. 6.7:** Seção de choque das interações  $K^- + p \rightarrow \eta + \Lambda$ . As barras pretas correspondem aos dados experimentais do Cern-Hera e as curvas em azul representam o nosso estudo.

## Conclusões

O objetivo deste tese foi generalizar a transformação unitária que define o formalismo de Fock-Tani. Originalmente este formalismo foi deduzido para sistemas que tinham a interação méson-méson ou bárion-bárion. Havia uma lacuna neste estudo que consistia na representação, dentro do formalismo, da transformação que misturava bósons com férmions, ou seja, a interação méson-bárion para a física hadrônica. Descobrimos que era necessário escrever uma transformação dupla, que consistia em obter as equações de movimento para os mésons e depois transformar estas equações usando a transformação para o bárion. Isto implicava em obter equações de movimento mistas do tipo méson-bárion.

Estudamos, como exemplo, o complexo sistema do káon-núcleon, onde incluímos no modelo de quarks microscópico os termos de interação quark-quark, quark-antiquark e as respectivas contribuições de aniquilação, listados a seguir:

$$V_{qq \text{ ou } q\bar{q}} = \sum_{aij} \left[ V_{ij}^{hyper} + V_{ij}^{conf} \right] (T_i^a \cdot T_j^a) \quad (7.1)$$

$$\bar{V}_{q\bar{q}} = \sum_{aij} \left[ V_{ij}^{ann} + V_{ij}^{conf} \right] (T_i^a \hat{T}_j^a) \quad (7.2)$$

onde  $T^a \equiv \lambda^a/2$  é a matriz de cor para quarks,  $\bar{T}^a \equiv -(\lambda^T)^a/2$  é a matriz de antiquarks e

$$\begin{aligned} V_{ij}^{hyper} &= \frac{\alpha_s}{r_{ij}} - \frac{8\alpha_s}{3\sqrt{\pi} m_i m_j} a_{ss}^3 e^{-a_{ss}^2 r_{ij}^2} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) \quad ; \quad V_{ij}^{conf} = -\frac{3}{4} b r_{ij} \\ V_{ij}^{ann} &= \left[ -\frac{4\alpha_s}{r_{ij}} + \frac{4\pi\alpha_s}{m_i m_j} \delta(\vec{r}_{ij}) \right] \vec{S}_i^{c\dagger} \cdot \vec{S}_j^c \end{aligned} \quad (7.3)$$

Para calcularmos as seções de choque total, utilizamos a amplitude de espalhamento dada pela matriz-T, que satisfaz uma equação do tipo Lippmann-Schwinger, na representação de Fock-Tani

$$T_{FT}(z) = V_{FT} + V_{FT} G_0(z) T_{FT}(z). \quad (7.4)$$

Porém a utilização da Matriz-T nessa forma nos levaria à um polo no denominador, o qual poderia ser evitado utilizando-se a Aproximação de Born em primeira ordem. Para ratificar essa aproximação, utilizamos o canal elástico  $K^- + p \rightarrow K^- + p$  e comparamos os resultados da Matriz-T completa e da aproximação de Born, obtendo um resultado favorável, validando assim nossa teoria (figura 6.1).

Nosso modelo de quarks microscópico é dividido em duas partes: (1) troca de um glúon (OGEP) e (2) troca de um méson sigma acoplado aos quarks. Pudemos identificar então os termos de OGEP que contribuem para o presente estudo:

1. Spin-spin
2. Coulomb
3. Confinamento
4. Aniquilação spin-spin
5. Aniquilação coulomb spin

As análises das nossas curvas teóricas em comparação com os dados experimentais do CERN-HERA e com o modelo do JLab, foram satisfatórias e comprovaram que os termos de aniquilação, juntamente com a aproximação de Born em primeira ordem da Matriz-T, modelam de forma eficaz as seções de choque dos processos Káon-Núcleon, tanto elásticos quanto inelásticos.

Para o futuro, alguns ajustes precisam ser feitos para contornar o problema das ressonâncias que dominam os espalhamentos  $KN$ , em especial o  $\Lambda(1405)$ , em energias maiores que 300 MeV, e que tem intrigado teóricos há décadas. A proximidade de sua massa nominal [73] com a massa de limiar da interação  $\bar{K}N$  (aproximadamente 1435 MeV) permite pressupor que essa ressonância é, na verdade, um estado quasi-ligado e não um estado de três quarks como se supunha [74]. Investigações posteriores [75]-[78] apoiaram a existência de dois polos na região de energia da ressonância  $\Lambda(1405)$ .

## Termos de Aniquilação

No Capítulo 2 mostramos os termos de corrente quark-quark e antiquark-antiquark. Vamos agora calcular os termos de corrente de aniquilação. Para simplificar a notação utilizaremos apenas o índice de spin. Como visto na eq. 2.113, temos

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^\mu(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{\mu\nu}(\vec{q}) J_{s_3 s_4}^\nu(\vec{p}_3, \vec{p}_4) &= J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{00}(\vec{q}) J_{s_3 s_4}^0(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \\
 &+ J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{0j}(\vec{q}) J_{s_3 s_4}^j(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \\
 &+ J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{i0}(\vec{q}) J_{s_3 s_4}^0(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \\
 &+ J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) D_{ij}(\vec{q}) J_{s_3 s_4}^j(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \quad (\text{A.1})
 \end{aligned}$$

onde as possibilidades para  $J^\mu$  são

$$J^\mu = u_I^\dagger(\vec{p}) \vec{\gamma}^0 \Gamma^\mu v_{I'}(\vec{p}') \quad \text{ou} \quad J^\mu = v_I^\dagger(\vec{p}) \vec{\gamma}^0 \Gamma^\mu u_{I'}(\vec{p}') \quad (\text{A.2})$$

com  $\Gamma^0 = \gamma^0$ ;  $\Gamma^i = \gamma^i$  e cujos espinores são

$$u_s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} f(\vec{p}) \chi_s \\ g(\vec{p}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_s \end{pmatrix} \quad v_s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} g(\vec{p}) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi_s^c \\ f(\vec{p}) \chi_s^c \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\begin{aligned}
 f(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \quad ; \quad g(\vec{p}) = \frac{1}{E_p + m} \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}} \\
 E_p &= \sqrt{p^2 + m^2} \\
 \chi_1 &= \chi_2^c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \chi_2 = \chi_1^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A fim de simplificar, vamos definir

$$f_1 = f(\vec{p}_1) \quad ; \quad g_1 = g(\vec{p}_1) \quad ; \quad \text{etc...} \quad (\text{A.4})$$

Estudando os casos:

$$1. u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) * v_{s_2}(\vec{p}_2)$$

$$\begin{aligned} J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^0 v_{s_2}(\vec{p}_2) = \begin{pmatrix} f_1 \chi_{s_1}^\dagger & g_1 \chi_{s_1}^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2 \chi_{s_2}^c \\ f_2 \chi_{s_2}^c \end{pmatrix} \\ &= f_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2}^c + g_1 f_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \chi_{s_2}^{c\dagger} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^i v_{s_2}(\vec{p}_2) = u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \alpha^i v_{s_2}(\vec{p}_2) \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \chi_{s_1}^\dagger & g_1 \chi_{s_1}^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2 \chi_{s_2}^c \\ f_2 \chi_{s_2}^c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \chi_{s_1}^\dagger & g_1 \chi_{s_1}^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \sigma^i \chi_{s_2}^c \\ g_2 \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2}^c \end{pmatrix} \\ &= f_1 f_2 \chi_{s_1}^\dagger \sigma^i \chi_{s_2}^c + g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2}^c \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$2. v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) * u_{s_2}(\vec{p}_2)$$

$$\begin{aligned} J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^0 u_{s_2}(\vec{p}_2) = \begin{pmatrix} g_1 \chi_{s_1}^{c\dagger} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 & f_1 \chi_{s_1}^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \chi_{s_2} \\ g_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2 \chi_{s_2} \end{pmatrix} \\ &= g_1 f_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \chi_{s_2}^\dagger + f_1 g_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2}^c \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \gamma^0 \gamma^i u_{s_2}(\vec{p}_2) = v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) \alpha^i u_{s_2}(\vec{p}_2) \\ &= \begin{pmatrix} g_1 \chi_{s_1}^{c\dagger} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 & f_1 \chi_{s_1}^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \chi_{s_2} \\ g_2 \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2 \chi_{s_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_1 \chi_{s_1}^{c\dagger} \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1 & f_1 \chi_{s_1}^{c\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2} \\ f_2 \sigma^i \chi_{s_2} \end{pmatrix} \\ &= g_1 g_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2} + f_1 f_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} \sigma^i \chi_{s_2} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Sabendo que

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k = \delta^{ij} + i \sum_k \epsilon^{ijk} \sigma^k$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \chi_{s_i}^\dagger \vec{\sigma} \chi_{s_j}^c$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^c = \chi_{s_i}^{c\dagger} \vec{\sigma} \chi_{s_j}$$

Obtemos

$$\begin{aligned}\sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) &= \sum_j \sigma^i \sigma^j p^j = \sum_j \left[ \delta^{ij} + i \sum_k \epsilon^{ijk} \sigma^k \right] p^j = p^i - i (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') \sigma^i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) &= (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') (p^i - i (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i) = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') p^i - i (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever [A.5](#) e [A.6](#)

$$\begin{aligned}J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= f_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2}^c + g_1 f_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \chi_{s_2}^{c\dagger} \\ &= f_1 g_2 (\hat{\sigma}_{12} \cdot \vec{p}_2) + g_1 f_2 (\hat{\sigma}_{12} \cdot \vec{p}_1)\end{aligned}\tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= f_1 f_2 \chi_{s_1}^\dagger \sigma^i \chi_{s_2}^c + g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) p_2^i \chi_{s_2}^c - i g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) (\vec{\sigma} \times \vec{p}_2)^i \chi_{s_2}^c \\ &= f_1 f_2 \hat{\sigma}_{12}^i + g_1 g_2 (\hat{\sigma}_{12} \cdot \vec{p}_1) p_2^i - i g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) (\vec{\sigma} \times \vec{p}_2)^i \chi_{s_2}^c\end{aligned}\tag{A.10}$$

E [A.7](#) e [A.8](#)

$$\begin{aligned}J_{s_1 s_2}^0(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= g_1 f_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) \chi_{s_2}^\dagger + f_1 g_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_2) \chi_{s_2}^c \\ &= g_1 f_2 (\hat{\sigma}_{12}^c \cdot \vec{p}_1) + f_1 g_2 (\hat{\sigma}_{12}^c \cdot \vec{p}_2)\end{aligned}\tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}J_{s_1 s_2}^i(\vec{p}_1, \vec{p}_2) &= f_1 f_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} \sigma^i \chi_{s_2}^\dagger + g_1 g_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) p_2^i \chi_{s_2}^\dagger - i g_1 g_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) (\vec{\sigma} \times \vec{p}_2)^i \chi_{s_2}^\dagger \\ &= f_1 f_2 \hat{\sigma}_{12}^{ci} + g_1 g_2 (\hat{\sigma}_{12}^c \cdot \vec{p}_1) p_2^i - i g_1 g_2 \chi_{s_1}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_1) (\vec{\sigma} \times \vec{p}_2)^i \chi_{s_2}^\dagger\end{aligned}\tag{A.12}$$

Vamos chamar

$$\hat{\sigma}_{12} \equiv \hat{\sigma} \quad ; \quad \hat{\sigma}_{34} \equiv \hat{\sigma}'$$

Definindo a conservação de momento por

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \vec{p} + \vec{q} \\ \vec{p}_2 &= \vec{p} \\ \vec{p}_3 &= \vec{p}' - \vec{q} \\ \vec{p}_4 &= \vec{p}'\end{aligned}$$

podemos reescrever as correntes [A.9-A.12](#) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) &= f_1 g_2 (\hat{\sigma} \cdot \vec{p}) + g_1 f_2 (\hat{\sigma} \cdot \vec{p}) + g_1 f_2 (\hat{\sigma} \cdot \vec{q}) \\
 &= 2f_1 g_2 (\hat{\sigma} \cdot \vec{p}) + g_1 f_2 (\hat{\sigma} \cdot \vec{q})
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) &= f_1 f_2 \hat{\sigma}^i + g_1 g_2 (\hat{\sigma} \cdot \vec{p}) p^i + g_1 g_2 (\hat{\sigma} \cdot \vec{q}) p^i - i g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i \chi_{s_2}^c \\
 &\quad - i g_1 g_2 \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i \chi_{s_2}^c
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
 J_{s_3 s_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= f_3 g_4 (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}') + g_3 f_4 (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}') - g_3 f_4 (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q}) \\
 &= 2f_3 g_4 (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}') - g_3 f_4 (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q})
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
 J_{s_3 s_4}^i(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= f_3 f_4 \hat{\sigma}'^{ci} + g_3 g_4 (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}') p'^i - g_3 g_4 (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q}) p'^i - i g_3 g_4 \chi_{s_3}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') (\vec{\sigma} \times \vec{p}')^i \chi_{s_4} \\
 &\quad + i g_3 g_4 \chi_{s_3}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma} \times \vec{p}')^i \chi_{s_4}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Para obter o Hamiltoniano não-relativístico, o operador de quarks  $\psi(\vec{x})$  precisa ser escrito em termos de uma expansão em potências do momento  $\vec{p}$ : Com

$$f(\vec{p}) \simeq 1 - \frac{p^2}{8m} \quad ; \quad g(\vec{p}) \simeq \frac{1}{2m}. \tag{A.17}$$

Reescrevemos então as equações A.13 - A.16 em segunda ordem de momento

$$J_{s_1 s_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) = 2 \left[ \frac{1}{2m} - \frac{p^2}{16m^3} - \frac{pq}{8m^3} - \frac{q^2}{16m^3} \right] (\hat{\sigma} \cdot \vec{p}) + \left[ \frac{1}{2m} - \frac{p^2}{16m^3} \right] (\hat{\sigma} \cdot \vec{q}) \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) &= \left[ 1 - \frac{p^2}{4m^2} - \frac{pq}{4m^2} - \frac{q^2}{8m^2} \right] \hat{\sigma}^i + \frac{1}{4m^2} (\hat{\sigma} \cdot \vec{p}) p^i + \frac{1}{4m^2} (\hat{\sigma} \cdot \vec{q}) p^i \\
 &\quad - i \frac{1}{4m^2} \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i \chi_{s_2}^c - i \frac{1}{4m^2} \chi_{s_1}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma} \times \vec{p})^i \chi_{s_2}^c
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$J_{s_3 s_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') = 2 \left[ \frac{1}{2m} - \frac{p'^2}{16m^3} + \frac{p'q}{8m^3} - \frac{q^2}{16m^3} \right] (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}') - \frac{1}{2m} - \frac{p'^2}{16m^3} (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q}) \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
 J_{s_3 s_4}^i(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= \left[ 1 - \frac{p'^2}{4m^2} + \frac{p'q}{4m^2} - \frac{q^2}{8m^2} \right] \hat{\sigma}'^{ci} + \frac{1}{4m^2} (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}') p'^i - \frac{1}{4m^2} (\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q}) p'^i \\
 &\quad - i \frac{1}{4m^2} \chi_{s_3}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}') (\vec{\sigma} \times \vec{p}')^i \chi_{s_4} + i \frac{1}{4m^2} \chi_{s_3}^{c\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) (\vec{\sigma} \times \vec{p}')^i \chi_{s_4}
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
 (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \times \vec{p})^i &= \sum_j \sigma_j p_j \sum_{lm} \epsilon_{ilm} \sigma_l p_m = \sum_{jlm} \epsilon_{ilm} p_j p_m \sigma_j \sigma_l = \sum_{jlm} \epsilon_{ilm} p_j p_m (\delta_{jl} + i \sum_n \epsilon_{jln} \sigma_n) \\
 &= \sum_{jlm} \epsilon_{ilm} \delta_{jl} p_j p_m + i \sum_{jlmn} \epsilon_{jln} \epsilon_{ilm} p_j p_m \sigma_n = \sum_{jlm} \epsilon_{ijm} p_j p_m + i \sum_{jlmn} \epsilon_{lim} \epsilon_{ljn} p_j p_m \sigma_n \\
 &= i \sum_{jmn} \sum_l \epsilon_{lim} \epsilon_{ljn} p_j p_m \sigma_n = i \sum_{jmn} (\delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{in} \delta_{mj}) p_j p_m \sigma_n \\
 &= i \sum_n p_i p_n \sigma_n - i \sum_{jmn} \delta_{in} \delta_{mj} p_j p_m \sigma_n = i p_i (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) - i \sum_{jn} \delta_{in} p_j p_j \sigma_n \\
 &= i p_i (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) - i p^2 \sigma_i
 \end{aligned}$$

E

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma} \times \vec{p})^i = i(\vec{q} \times \vec{p})^i \sigma_i + i q_i (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) - i(\vec{q} \cdot \vec{p}) \sigma_i$$

Então A.19 e A.21 ficam

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) &= [1 - \frac{p^2}{4m^2} - \frac{pq}{4m^2} - \frac{q^2}{8m^2}] \hat{\sigma}^i + \frac{1}{4m^2} (\hat{\sigma} \cdot \vec{p}) p^i + \frac{1}{4m^2} (\hat{\sigma} \cdot \vec{q}) q^i \\
 &+ \frac{1}{4m^2} p_i (\vec{p} \cdot \hat{\sigma}) - \frac{1}{4m^2} p^2 \hat{\sigma}_i + \frac{1}{4m^2} q_i (\vec{p} \cdot \hat{\sigma}) - \frac{1}{4m^2} pq \hat{\sigma}_i + \frac{1}{4m^2} (\vec{q} \times \vec{p})^i \hat{\sigma}^i \\
 J_{s_3 s_4}^i(\vec{p}' - \vec{q}', \vec{p}') &= [1 - \frac{p'^2}{4m^2} + \frac{p'q'}{4m^2} - \frac{q'^2}{8m^2}] \hat{\sigma}'^i + \frac{1}{4m^2} (\hat{\sigma}' \cdot \vec{p}') p'^i - \frac{1}{4m^2} (\hat{\sigma}' \cdot \vec{q}') q'^i \\
 &+ \frac{1}{4m^2} p'_i (\vec{p}' \cdot \hat{\sigma}') - \frac{1}{4m^2} p'^2 \hat{\sigma}'_i - \frac{1}{4m^2} q'_i (\vec{p}' \cdot \hat{\sigma}') + \frac{1}{4m^2} p'q' \hat{\sigma}'_i - \frac{1}{4m^2} (\vec{q}' \times \vec{p}')^i \hat{\sigma}'^i
 \end{aligned}$$

Voltando a equação A.1, vamos escolher o propagador no gauge de Coulomb

$$\begin{aligned}
 D_{00}(\vec{q}) &= -\frac{D_0}{q^2} \quad ; \quad D_{0j}(\vec{q}) = D_{i0}(\vec{q}) = 0 \\
 D_{ij}(\vec{q}) &= \frac{D_0}{q^2 - \omega^2/c^2} \left( \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right)
 \end{aligned}$$

e usaremos  $\omega = 0$  (energia inicial = energia final) e  $D_0 = 4\pi \alpha_s$ . A partir de agora tomaremos  $c = 1$ . Assim temos

$$J^\mu D_{\mu\nu}(\vec{q}) J^\nu = -\frac{D_0}{q^2} J^0 J^0 + \frac{D_0}{q^2} \vec{J} \cdot \vec{J} - \frac{D_0}{q^4} (\vec{J} \cdot \vec{q})(\vec{J} \cdot \vec{q}) \quad (\text{A.22})$$

Utilizando os casos 1 e 2, podemos calcular agora  $u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) v_{s_2}(\vec{p}_2) * v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_3) u_{s_2}(\vec{p}_4)$



$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) * J_{s_3 s_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})}{m} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})p^2}{8m^3} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})pq}{4m^3} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})q^2}{8m^3} + \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{q})}{2m} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{q})p^2}{16m^3} \\
 &\times \left[ \frac{(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')}{m} - \frac{(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')p'^2}{8m^3} + \frac{(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')p'q}{4m^3} - \frac{(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')q^2}{8m^3} \right. \\
 &\left. - \frac{(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q})}{2m} - \frac{(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q})p'^2}{16m^3} \right] \\
 J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) * J_{s_3 s_4}^i(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= [\hat{\sigma}^i - \frac{\hat{\sigma}^i p^2}{4m^2} - \frac{\hat{\sigma}^i pq}{4m^2} - \frac{\hat{\sigma}^i q^2}{8m^2} + \frac{1}{4m^2}(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})p^i + \frac{1}{4m^2}(\hat{\sigma} \cdot \vec{q})p^i \\
 &+ \frac{1}{4m^2}p^i(\vec{p} \cdot \hat{\sigma}) - \frac{1}{4m^2}p^2\hat{\sigma}^i + \frac{1}{4m^2}q^i(\vec{p} \cdot \hat{\sigma}) - \frac{1}{4m^2}pq\hat{\sigma}^i \\
 &+ \frac{1}{4m^2}(\vec{q} \times \vec{p})\hat{\sigma}] \times [\hat{\sigma}'^{ci} - \frac{\hat{\sigma}'^{ci} p'^2}{4m^2} + \frac{\hat{\sigma}'^{ci} p'q}{4m^2} - \frac{\hat{\sigma}'^{ci} q^2}{8m^2} + \frac{1}{4m^2}(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')p'^i \\
 &- \frac{1}{4m^2}(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q})p'^i + \frac{1}{4m^2}p'^i(\vec{p}' \cdot \hat{\sigma}'^c) - \frac{1}{4m^2}p'^2\hat{\sigma}'^{ci} - \frac{1}{4m^2}q^i(\vec{p}' \cdot \hat{\sigma}'^c) \\
 &+ \frac{1}{4m^2}p'q\hat{\sigma}'^{ci} - \frac{1}{4m^2}(\vec{q} \times \vec{p}')\hat{\sigma}'^c]
 \end{aligned}$$

Mas apenas nos interessam os termos até segunda ordem, portanto

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) * J_{s_3 s_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')}{m^2} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q})}{2m^2} + \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{q})(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')}{2m^2} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{q})(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q})}{4m^2} \\
 &\quad (A.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) * J_{s_3 s_4}^i(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= \hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c)p^2}{2m^2} + \frac{(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c)(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{2m^2} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c)q^2}{4m^2} \\
 &+ \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p}')(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')}{2m^2} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p}')(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q})}{4m^2} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{q})(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p}')}{4m^2} \\
 &- \frac{(\vec{q} \times \vec{p})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c)}{4m^2} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c)p^2}{2m^2} - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c)(\vec{p} \cdot \vec{q})}{2m^2} + \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p})}{2m^2} \\
 &+ \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{q})(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{p})}{4m^2} + \frac{(\hat{\sigma} \cdot \vec{p})(\hat{\sigma}'^c \cdot \vec{q})}{4m^2} + \frac{(\vec{q} \times \vec{p})(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c)}{4m^2} \\
 &\quad (A.24)
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, calculando as correntes  $v_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1)u_{s_2}(\vec{p}_2) * u_{s_1}^\dagger(\vec{p}_3)v_{s_2}(\vec{p}_4)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^0(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) * J_{s_3 s_4}^0(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{p})(\hat{\sigma}' \cdot \vec{p}')}{m^2} - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{p})(\hat{\sigma}' \cdot \vec{q})}{2m^2} + \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{q})(\hat{\sigma}' \cdot \vec{p}')}{2m^2} - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{q})(\hat{\sigma}' \cdot \vec{q})}{4m^2} \\
 &\quad (A.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{s_1 s_2}^i(\vec{p} + \vec{q}, \vec{p}) * J_{s_3 s_4}^i(\vec{p}' - \vec{q}, \vec{p}') &= \hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}' - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}')p^2}{2m^2} + \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}')(\vec{p}' \cdot \vec{q})}{2m^2} - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}')q^2}{4m^2} \\
 &+ \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{p}')(\hat{\sigma}' \cdot \vec{p}')}{2m^2} - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{p}')(\hat{\sigma}' \cdot \vec{q})}{4m^2} - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{q})(\hat{\sigma}' \cdot \vec{p}')}{4m^2} \\
 &- \frac{(\vec{q} \times \vec{p})(\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}')}{4m^2} - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}')p^2}{2m^2} - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}')(\vec{p} \cdot \vec{q})}{2m^2} + \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{p})(\hat{\sigma}' \cdot \vec{p})}{2m^2} \\
 &+ \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{q})(\hat{\sigma}' \cdot \vec{p})}{4m^2} + \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \vec{p})(\hat{\sigma}' \cdot \vec{q})}{4m^2} + \frac{(\vec{q} \times \vec{p})(\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}')}{4m^2} \\
 &\quad (A.26)
 \end{aligned}$$

Os termos  $(\vec{J}_i \cdot \vec{q}) * (\vec{J}_j \cdot \vec{q})$  da equação A.22 não contribuem para o presente estudo, pois estamos interessados apenas nos termos de Coulomb e spin-spin puro. Portanto, os termos que nos interessam das A.23-A.26 são:

$$\frac{D_0}{q^2} \left[ \hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c - \frac{(\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c)q^2}{4m^2} \right] = \frac{4\pi\alpha_s}{q^2} (\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c) - \frac{\pi\alpha_s}{m^2} (\hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma}'^c) \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{D_0}{q^2} \left[ \hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}' - \frac{(\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}')q^2}{4m^2} \right] = \frac{4\pi\alpha_s}{q^2} (\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}') - \frac{\pi\alpha_s}{m^2} (\hat{\sigma}^c \cdot \hat{\sigma}') \quad (\text{A.28})$$

# Apêndice B

## Determinação de $O_\alpha$ .

O gerador da transformação Fock-Tani é dado por:

$$F = \sum_{\alpha} (m_{\alpha}^{\dagger} O_{\alpha} - O_{\alpha}^{\dagger} m_{\alpha}) , \quad (\text{B.1})$$

onde o operador  $O_{\alpha}$  satisfaz relações de comutação canônicas,

$$[O_{\alpha}, O_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} . \quad (\text{B.2})$$

O processo iterativo de construção de  $O_{\alpha}$  envolve a adição de uma série de contra-termos que cancelam os termos indesejáveis do comutador. Assim, escrevemos:

$$O_{\alpha}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} O_{\alpha}^{(i)}(t) . \quad (\text{B.3})$$

Na aproximação de ordem zero, tomamos

$$O_{\alpha}^{(0)} = M_{\alpha} , \quad (\text{B.4})$$

Com esta escolha, temos

$$[O_{\alpha}, O_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^2) , \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{O}(\Phi^2) = -\Delta_{\alpha\beta} , \quad (\text{B.6})$$

de modo que a Eq. (B.2) é satisfeita em ordem zero, restando um termo indesejável de ordem dois.

Adicionamos um contratermo de ordem dois, dado por

$$O_{\alpha}^{(2)} = a\Delta_{\alpha\beta}M_{\beta} . \quad (\text{B.7})$$

Com esse contratermo, obtemos

$$[O_{\alpha}, O_{\beta}^{\dagger}] = \delta_{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha\beta} + 2a\Delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}_{\alpha}^{(3)} + \dots . \quad (\text{B.8})$$

Para  $a = \frac{1}{2}$ , o termo indesejável  $\mathcal{O}(\Phi^2)$  é cancelado, de forma que a Eq. (B.2) é satisfeita até segunda ordem, restando termos indesejáveis de ordem maior ou igual a três:

$$[O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^3) + \dots, \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{O}(\Phi^3) = \frac{1}{2} \sum_\gamma \left( [\Delta_{\alpha\gamma}, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] \right). \quad (\text{B.10})$$

Adicionamos, então, um contratermo de ordem três, dado por

$$O_\alpha^{(3)} = b \sum_{\gamma\delta} M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\delta}] M_\delta. \quad (\text{B.11})$$

Com esse contratermo, obtemos

$$\begin{aligned} [O_\alpha, O_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_\gamma \left( [\Delta_{\alpha\gamma}, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] \right) \\ &+ b \sum_\gamma \left( [\Delta_{\alpha\gamma}, M_\beta^\dagger] M_\gamma + M_\gamma^\dagger [M_\alpha, \Delta_{\gamma\beta}] \right) + \mathcal{O}_\alpha^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Para  $b = -\frac{1}{2}$ , o termo indesejável  $\mathcal{O}(\Phi^3)$  é cancelado, de forma que a Eq. (B.2) é satisfeita até terceira ordem, restando termos indesejáveis de ordem maior ou igual a quatro:

$$[O_\alpha, O_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\Phi^4) + \dots, \quad (\text{B.13})$$

Assim, obtemos o operador  $O_\alpha$  que satisfaz a Eq. (B.2), até terceira ordem:

$$O_\alpha = M_\alpha + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\beta} M_\beta + \frac{1}{2} M_\beta^\dagger [\Delta_{\beta\gamma}, M_\alpha] M_\gamma. \quad (\text{B.14})$$

Esse processo pode ser estendido sequencialmente até qualquer ordem, multiplicando-se os termos indesejados, ordem a ordem, por  $M_\gamma$  para gerar os contratermos adequados.

## Funções de Onda

As funções de onda do méson e do bárion podem ser escritas como um produto das funções de onda dos quarks de cor ( $\delta^{c_\mu c_\nu}$  ou  $\varepsilon^{c_1 c_2 c_3}$ ), spin-sabor ( $\xi_\alpha^{f_\mu f_\nu}$  ou  $\zeta_\alpha^{f_1 f_2 f_3}$ ) e espaço.

### C.1 Função de Onda do Méson

#### C.1.1 Espaço

Para o méson temos

$$\Phi_\alpha^{\mu\nu} = \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\nu) \frac{\delta^{c_\mu c_\nu}}{\sqrt{3}} \frac{\xi_\alpha^{f_\mu f_\nu}}{\sqrt{2}} \varphi(\vec{p}_\mu, \vec{p}_\nu) \quad (\text{C.1})$$

A parte espacial da função de onda do méson é tomada como sendo uma gaussiana

$$\varphi(\vec{p}_q, \vec{p}_{\bar{q}}) = (\pi\beta^2)^{-\frac{3}{4}} \exp \left[ -\frac{(m_1 \vec{p}_q - m_2 \vec{p}_{\bar{q}})^2}{8\beta^2} \right] \quad (\text{C.2})$$

com

$$m_1 = \frac{2m_{\bar{q}}}{m_q + m_{\bar{q}}} \quad ; \quad m_2 = \frac{2m_q}{m_q + m_{\bar{q}}}, \quad (\text{C.3})$$

onde é fácil verificar

$$m_1 + m_2 = 2. \quad (\text{C.4})$$

#### C.1.2 Spin-Sabor

$$|K^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |s_\uparrow \bar{u}_\downarrow\rangle - |s_\downarrow \bar{u}_\uparrow\rangle \right) \quad (\text{C.5})$$

$$|\eta\rangle = \frac{c_1}{\sqrt{2}} \left( |u_\uparrow \bar{u}_\downarrow\rangle - |u_\downarrow \bar{u}_\uparrow\rangle + |d_\uparrow \bar{d}_\downarrow\rangle - |d_\downarrow \bar{d}_\uparrow\rangle \right) + \frac{c_2}{\sqrt{2}} \left( |s_\uparrow \bar{s}_\downarrow\rangle - |s_\downarrow \bar{s}_\uparrow\rangle \right) \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Função de Onda do Bárion

A função de onda do bárion pode ser escrita como

$$\Psi_{\alpha}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \frac{\varepsilon^{c_1 c_2 c_3} \zeta_{\alpha}^{f_1 f_2 f_3}}{\sqrt{6} \sqrt{18}} \Psi_{\vec{P}}^{p_1 p_2 p_3} \quad (\text{C.7})$$

### C.2.1 Espaço

Para obter  $\Psi_{\vec{P}}^{p_1 p_2 p_3}$  vamos considerar um bárion constituído por dois quarks leves de massa  $m_l$  e uma quark pesado de massa  $m_p$ , isto é,

$$\text{quarks } (u, d) \quad \longrightarrow \quad m_l \quad ; \quad \text{quark } s \quad \longrightarrow \quad m_p$$

e definir a coordenada do centro de massa  $\vec{R}$  e relativas  $\vec{\rho}$  e  $\vec{\lambda}$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= M_1 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + M_2 \vec{r}_3 \quad \longrightarrow \quad \text{Centro de massa} \\ \vec{\rho} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad ; \quad \vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

onde

$$M_1 = \frac{m_l}{2m_l + m_p} \quad ; \quad M_2 = \frac{m_p}{2m_l + m_p}. \quad (\text{C.9})$$

Desta definição (C.9) é fácil ver que

$$2M_1 + M_2 = 1 \quad (\text{C.10})$$

A função de onda total definida por Isgur e Karl [79, 80]

$$\Psi_{\vec{P}}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{R}) = \frac{e^{i\vec{P} \cdot \vec{R}}}{(2\pi)^{3/2}} \psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) \quad (\text{C.11})$$

sendo  $\vec{P}$  o momento do centro de massa e a função de onda relativa  $\psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$  é dada por

$$\psi(\vec{\rho}, \vec{\lambda}) = \frac{\alpha_{\rho}^{3/2}}{\pi^{3/4}} \frac{\alpha_{\lambda}^{3/2}}{\pi^{3/4}} e^{-\alpha_{\rho}^2 \rho^2 / 2} e^{-\alpha_{\lambda}^2 \lambda^2 / 2} \quad (\text{C.12})$$

É fácil verificar que a função de onda (C.11) é normalizada:

$$\begin{aligned} &\int d\vec{R} d\vec{\rho} d\vec{\lambda} \Psi_{\vec{P}}^*(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{R}) \Psi_{\vec{P}'}(\vec{\rho}, \vec{\lambda}, \vec{R}) = \int d\vec{R} \frac{e^{-i\vec{R} \cdot (\vec{P} - \vec{P}')}}{(2\pi)^3} \int d\vec{\rho} \frac{\alpha_{\rho}^3}{\pi^{3/2}} e^{-\alpha_{\rho}^2 \rho^2} \int d\vec{\lambda} \frac{\alpha_{\lambda}^3}{\pi^{3/2}} e^{-\alpha_{\lambda}^2 \lambda^2} \\ &= \delta(\vec{P} - \vec{P}') \frac{\alpha_{\rho}^3}{\pi^{3/2}} \left( \frac{\pi}{\alpha_{\rho}^2} \right)^{3/2} \frac{\alpha_{\lambda}^3}{\pi^{3/2}} \left( \frac{\pi}{\alpha_{\lambda}^2} \right)^{3/2} = \delta(\vec{P} - \vec{P}') \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

A norma de  $\Psi$  nas variáveis  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  tem que ser a mesma que nas variáveis  $\vec{R}, \vec{\rho}, \vec{\lambda}$ . Para verificar este fato precisamos realizar a integral da norma nas variáveis  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ , ou seja,

$$\int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \Psi_{\vec{P}}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \Psi_{\vec{P}'}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (\text{C.14})$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) &= \left( \frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2} \right)^{3/2} \exp \left[ i\vec{P} \cdot (M_1(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + M_2 \vec{r}_3) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{4} \alpha_\rho^2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \frac{1}{12} \alpha_\lambda^2 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Realizando esta integral, encontramos

$$\int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \Psi_{\vec{P}}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \Psi_{\vec{P}'}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = 3\sqrt{3} \delta(\vec{P} - \vec{P}') \quad (\text{C.16})$$

Desta forma para garantir a normalização basta substituir

$$\Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \longrightarrow \frac{1}{3^{3/4}} \Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (\text{C.17})$$

ou seja

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) &= \left( \frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \exp \left[ i\vec{P} \cdot (M_1(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + M_2 \vec{r}_3) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{4} \alpha_\rho^2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \frac{1}{12} \alpha_\lambda^2 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

A transformada de Fourier de (C.18) é definida por

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \int \frac{d\vec{r}_1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d\vec{r}_2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d\vec{r}_3}{(2\pi)^{3/2}} \Psi_{\vec{P}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) e^{-i(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2 + \vec{p}_3 \cdot \vec{r}_3)}. \quad (\text{C.19})$$

Agora

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{2\pi^2 \sqrt{3}} \right)^{3/2} = \left( \frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2}$$

Substituindo (C.18) em (C.19)

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \left( \frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \exp \left[ i\vec{P} \cdot (M_1(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + M_2 \vec{r}_3) \right] \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{4} \alpha_\rho^2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \frac{1}{12} \alpha_\lambda^2 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)^2 \right] \\ &\times \exp \left[ -i(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2 + \vec{p}_3 \cdot \vec{r}_3) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Integrando em  $\vec{r}_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \left( \frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \left( \frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}} \right)^3 \\ &\times \int d\vec{r}_3 \exp \left[ \frac{i\vec{r}_3 \cdot \left( \alpha_\lambda^2 (2M_1 \vec{P} + M_2 \vec{P} - 2\vec{p}_1 - \vec{p}_3) + 3\alpha_\rho^2 (M_2 \vec{P} - \vec{p}_3) \right) - \alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2 \vec{r}_3^2 - 3(\vec{p}_1 - M_1 \vec{P})^2}{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2} \right] \\ &\times \int d\vec{r}_2 \exp \left[ -\frac{\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2}{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2} r_2^2 + \vec{r}_2 \cdot \frac{\left( \alpha_\rho^2 (2\alpha_\lambda^2 \vec{r}_3 + 6iM_1 \vec{P} - 3i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)) + i\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \right)}{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2} \right] \end{aligned}$$

Integrando em  $\vec{r}_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \left( \frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \left( \frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}} \right)^3 \left( \frac{\sqrt{\pi\alpha_\lambda^2 + 3\pi\alpha_\rho^2}}{\alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^3 \\ &\times \exp \left[ -\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{P})^2}{4\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right] \\ &\times \int d\vec{r}_3 \exp \left[ i\vec{r}_3 \cdot \left( \underbrace{\vec{P} (2M_1 + M_2)}_{=1} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 \right) \right] \end{aligned}$$

Integrando em  $\vec{r}_3$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \left( \frac{\alpha_\rho \alpha_\lambda}{16\pi^5 \sqrt{3}} \right)^{3/2} \left( \frac{2\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\alpha_\lambda^2 + 3\alpha_\rho^2}} \right)^3 \left( \frac{\sqrt{\pi\alpha_\lambda^2 + 3\pi\alpha_\rho^2}}{\alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^3 \\ &\times \exp \left[ -\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{P})^2}{4\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right] \\ &\times (2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \end{aligned}$$

ou seja

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{P})^2}{4\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right].$$

Finalmente encontramos a função de onda (substituindo  $\vec{P}$  no expoente)

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} &= \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^{3/2} \\ &\times \exp \left[ -\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 [ (1 - 2M_1) \vec{p}_1 + (1 - 2M_1) \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{p}_3 ]^2}{4\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right], \end{aligned}$$



mas por (C.10) temos que

$$1 - 2M_1 = M_2$$

assim função de onda fica

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi \alpha_\lambda \alpha_\rho} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{\alpha_\lambda^2 (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3\alpha_\rho^2 [M_2 \vec{p}_1 + M_2 \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{p}_3]^2}{4\alpha_\lambda^2 \alpha_\rho^2} \right] \quad (\text{C.22})$$

ou equivalentemente definindo  $x = \alpha_\rho / \alpha_\lambda$

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi x \alpha_\lambda^2} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3x^2 [M_2 \vec{p}_1 + M_2 \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{p}_3]^2}{4\alpha_\lambda^2 x^2} \right]. \quad (\text{C.23})$$

Uma simplificação que pode ser introduzida é considerar  $x = 1$ ,

$$\alpha_\lambda = \alpha_\rho \equiv \alpha$$

Assim a função de onda (C.21) fica

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi \alpha^2} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 + 3[M_2 \vec{p}_1 + M_2 \vec{p}_2 - 2M_1 \vec{p}_3]^2}{4\alpha^2} \right]. \quad (\text{C.24})$$

No caso particular do núcleon,

$$m_l = m_p \quad \longrightarrow \quad M_1 = M_2 = \frac{1}{3} \quad (\text{C.25})$$

e a função de onda (C.24) se reduz ao resultado conhecido no modelo de quarks

$$\Psi_{\vec{P}}^{\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3} = \delta(\vec{P} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3) \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi \alpha^2} \right)^{3/2} \exp \left[ \frac{-p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 + \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3}{3\alpha^2} \right]. \quad (\text{C.26})$$

### C.2.2 Spin-Sabor

$$\begin{aligned}
 |p_{\uparrow}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{18}} \left[ 2|u_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle + 2|u_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle + 2|d_{\downarrow}u_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle \right. \\
 & - |u_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle \\
 & \left. - |u_{\downarrow}u_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle - |u_{\downarrow}d_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle \right] \quad (C.27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Lambda_{\uparrow}\rangle = & \frac{1}{\sqrt{12}} \left[ |u_{\uparrow}d_{\downarrow}s_{\uparrow}\rangle - |u_{\downarrow}d_{\uparrow}s_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}u_{\downarrow}s_{\uparrow}\rangle \right. \\
 & + |d_{\downarrow}u_{\uparrow}s_{\uparrow}\rangle + |s_{\uparrow}d_{\downarrow}u_{\uparrow}\rangle - |s_{\uparrow}d_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle \\
 & - |s_{\uparrow}u_{\downarrow}d_{\uparrow}\rangle + |s_{\uparrow}u_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle + |u_{\uparrow}s_{\uparrow}d_{\downarrow}\rangle \\
 & \left. - |u_{\downarrow}s_{\uparrow}d_{\uparrow}\rangle - |d_{\uparrow}s_{\uparrow}u_{\downarrow}\rangle + |d_{\downarrow}s_{\uparrow}u_{\uparrow}\rangle \right] \quad (C.28)
 \end{aligned}$$

# Apêndice D

## Parte espacial de $V_{\text{mb}}$

Vamos agora calcular as integrais espaciais dos quatro termos de  $V_{\text{mb}}$ , sendo a primeira contribuição o termo  $V_1$  que iremos mostrar com algum detalhe

$$\begin{aligned}
V_1(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\delta, \vec{p}_\gamma) &= -3 \int d\vec{p}_\mu d\vec{p}_\nu d\vec{p}_\sigma d\vec{p}_\rho d\vec{p}_{\nu_2} d\vec{p}_{\mu_2} d\vec{p}_{\mu_3} \delta(\vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_\rho) v_{qq}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma, \vec{p}_\sigma) \\
&\times \left\{ \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}_\mu - \vec{p}_{\nu_2}) \left( \frac{1}{\pi\beta^2} \right)^{3/4} \exp \left[ -\frac{(m_f \vec{p}_\mu - (2 - m_f) \vec{p}_{\nu_2})^2}{8\beta^2} \right] \right\} \\
&\times \left\{ \delta(\vec{p}_\beta - \vec{p}_\nu - \vec{p}_{\mu_2} - \vec{p}_{\mu_3}) \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \right. \\
&\times \left. \exp \left[ -\frac{(\vec{p}_\nu - \vec{p}_{\mu_2})^2 + 3[(1 - 2M_f) \vec{p}_\nu + (1 - 2M_f) \vec{p}_{\mu_2} - 2M_f \vec{p}_{\mu_3}]^2}{4\alpha^2} \right] \right\} \\
&\times \left\{ \delta(\vec{p}_\gamma - \vec{p}_\rho - \vec{p}_{\nu_2}) \left( \frac{1}{\pi\beta^2} \right)^{3/4} \exp \left[ -\frac{(m_i \vec{p}_\rho - (2 - m_i) \vec{p}_{\nu_2})^2}{8\beta^2} \right] \right\} \\
&\times \left\{ \delta(\vec{p}_\delta - \vec{p}_\sigma - \vec{p}_{\mu_2} - \vec{p}_{\mu_3}) \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi\alpha^2} \right)^{3/2} \right. \\
&\times \left. \exp \left[ -\frac{(\vec{p}_\sigma - \vec{p}_{\mu_2})^2 + 3[(1 - 2M_i) \vec{p}_\sigma + (1 - 2M_i) \vec{p}_{\mu_2} - 2M_i \vec{p}_{\mu_3}]^2}{4\alpha^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

onde  $m_i$ ,  $m_f$ ,  $M_i$  e  $M_f$  são os parâmetros do estado inicial e do estado final do méson e do bárion, respectivamente. Após a integração nas deltas obtemos

$$\begin{aligned}
 V_1(\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\beta, \vec{p}_\delta, \vec{p}_\gamma) &= -3\delta(\vec{p}_\alpha + \vec{p}_\beta - \vec{p}_\gamma - \vec{p}_\delta) \frac{3\sqrt{3}}{\pi^{9/2}\alpha^6\beta^3} \int d\vec{p}_\mu d\vec{p}_\sigma d\vec{p}_{\mu_3} v_{qq}(\vec{p}_\mu - \vec{p}_\sigma, \vec{p}_\sigma) \\
 &\times \exp \left[ -\frac{((m_f - 2)\vec{p}_\alpha + 2\vec{p}_\mu)^2 + (m_i\vec{p}_\gamma - 2\vec{p}_\alpha + 2\vec{p}_\mu)^2}{8\beta^2} \right] \\
 &\times \exp \left[ -\frac{(3(M_i - 1)M_i + 1)p_\delta^2 - \vec{p}_\delta \cdot [(2 - 3M_i)\vec{p}_{\mu_3} + \vec{p}_\sigma] + p_{\mu_3}^2 + \vec{p}_{\mu_3} \cdot \vec{p}_\sigma + p_\sigma^2}{\alpha^2} \right] \\
 &\times \exp \left[ -\frac{(3(M_f - 1)M_f + 1)p_\beta^2 - \vec{p}_\beta \cdot [\vec{p}_\delta - \vec{p}_\sigma + (1 - 3M_f)\vec{p}_{\mu_3}] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{p_\delta^2 - \vec{p}_\delta \cdot (\vec{p}_{\mu_3} + 2\vec{p}_\sigma) + p_{\mu_3}^2 + \vec{p}_{\mu_3} \cdot \vec{p}_\sigma + p_\sigma^2}{\alpha^2} \right]
 \end{aligned}$$

Substituindo  $v_{qq}$  e realizando as integrais restantes, o resultado final pode ser expresso no centro de massa do sistema méson-bárion  $\vec{p}_\alpha = \vec{p}$ ,  $\vec{p}_\beta = -\vec{p}$ ,  $\vec{p}_\gamma = \vec{p}'$  e  $\vec{p}_\delta = -\vec{p}'$ :

$$I_1^e = (\vec{S} \cdot \vec{S}') a_1 \eta_1 \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] \quad (\text{D.1})$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\alpha^2 m_f^2 + 8\beta^2(3(M_f - 1)M_f + 1)}{16\alpha^2\beta^2} \\
 A_2 &= \frac{\alpha^2 m_i^2 + 8\beta^2(3(M_i - 1)M_i + 1)}{16\alpha^2\beta^2} \\
 A_3 &= \frac{2\alpha^2 m_f m_i - 8\beta^2(-6M_f M_i + 3M_f + 3M_i - 2)}{16\alpha^2\beta^2} \\
 a_1 &= -\frac{8\pi\alpha_s}{3m^2} \\
 \eta_1 &= 1
 \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para o termo  $V_2$ , obtendo

$$I_2^e = (\vec{S} \cdot \vec{S}') a_1 \eta_1 \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] \quad (\text{D.3})$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\alpha^2 (3m_f^2 - 6m_f(M_f + 1) + 3M_f(5M_f - 2) + 7) + 12\beta^2(3(M_f - 1)M_f + 1)}{8\alpha^2 (\alpha^2 + 3\beta^2)} \\
 A_2 &= \frac{\alpha^2 (3M_i(5M_i - 2) + 7) + 12\beta^2(3(M_i - 1)M_i + 1)}{8\alpha^2 (\alpha^2 + 3\beta^2)} \\
 A_3 &= \frac{\alpha^2 (3m_f(M_i + 1) + 9(M_f - 1)M_i - 9M_f + 1) + 6\beta^2(M_f(6M_i - 3) - 3M_i + 2)}{4\alpha^2 (\alpha^2 + 3\beta^2)} \\
 a_1 &= -\frac{8\pi\alpha_s}{3m^2} \\
 \eta_1 &= \frac{48\sqrt{6}\beta^3}{(\alpha^2 (3x^2 + 1) + 12\beta^2)^{3/2}}
 \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Da mesma forma o procedimento pode ser realizado para o termo  $V_3$ , obtendo

$$I_3^e = (\vec{S} \cdot \vec{S}') a_1 \eta_1 \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] \quad (\text{D.5})$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{7\alpha^4 m_f^2 + 36\beta^4 (1 - 2M_f)^2 + 12\alpha^2 \beta^2 (4 - m_f + m_f^2 - 2(6 + m_f)M_f + 16M_f^2)}{16\alpha^2 \beta^2 (7\alpha^2 + 6\beta^2)} \\ A_2 &= \frac{(7\alpha^4 m_i^2 + 36\beta^4 (1 - 2M_i)^2 + 12\alpha^2 \beta^2 (8 - 3m_i + m_i^2 - 2(4 + m_i)M_i + 16M_i^2))}{(16\alpha^2 \beta^2 (7\alpha^2 + 6\beta^2))} \\ A_3 &= \frac{7\alpha^4 m_f m_i + 36\beta^4 (2M_f - 1)(2M_i - 1) + A'}{8\alpha^2 \beta^2 (7\alpha^2 + 6\beta^2)} \\ A' &= 6\alpha^2 \beta^2 (4 + 3m_f - 20M_f + m_i + 2M_f m_i + 2(m_f + 12M_f - 8)M_i) \\ a_1 &= -\frac{8\pi\alpha_s}{3m^2} \\ \eta_1 &= \frac{24\sqrt{3}\alpha^3 x^2 \sqrt{3x^4 + x^2}}{\sqrt{3x^2 + 1} (\alpha^2 (6x^2 + 1) + 6\beta^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para o termo  $V_4$ , obtendo

$$I_4^e = (\vec{S} \cdot \vec{S}') a_1 \eta_1 \exp [-A_1 p^2 - A_2 p'^2 + A_3 \vec{p} \cdot \vec{p}'] \quad (\text{D.7})$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3(m_f - 2(M_f + 1))^2}{8(\alpha^2 (3x^2 + 1) + 6\beta^2)} + \frac{(m_f - 1)^2}{8(\alpha^2 x^2 + 2\beta^2)} + \frac{3(1 - 2M_f)^2}{8\alpha^2} \\ A_2 &= \frac{3(m_i - 2(M_i + 1))^2}{8(\alpha^2 (3x^2 + 1) + 6\beta^2)} + \frac{(m_i - 1)^2}{8(\alpha^2 x^2 + 2\beta^2)} + \frac{3(1 - 2M_i)^2}{8\alpha^2} \\ A_3 &= -\frac{3(m_f - 2(M_f + 1))(m_i - 2(M_i + 1))}{4(\alpha^2 (3x^2 + 1) + 6\beta^2)} + \frac{(m_f - 1)(m_i - 1)}{4(\alpha^2 x^2 + 2\beta^2)} + \frac{3(2M_f - 1)(2M_i - 1)}{4\alpha^2} \\ a_1 &= -\frac{8\pi\alpha_s}{3m^2} \\ \eta_1 &= \frac{48\sqrt{6}\alpha^3 \beta^3 x^3}{(\alpha^2 x^2 + 2\beta^2)^{3/2} (\alpha^2 (3x^2 + 1) + 6\beta^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

## Parte spin-sabor-cor de $V_{mb}$

O fator de cor pode ser calculado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_1 &= \left( \frac{\lambda_{\mu\sigma}^a}{2} \frac{\lambda_{\nu\rho}^a}{2} \right) \frac{\delta^{\mu\nu_2}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\nu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{\rho\nu_2}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\sigma\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
 \mathcal{C}_2 &= \left( \frac{\lambda_{\mu\sigma}^a}{2} \frac{\lambda_{\nu\rho}^a}{2} \right) \frac{\delta^{\mu_1\nu}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{\sigma\rho}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
 \mathcal{C}_3 &= \left( \frac{\lambda_{\mu\sigma}^a}{2} \frac{\lambda_{\nu\rho}^a}{2} \right) \frac{\delta^{\mu\nu_2}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu_1\nu\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{\mu_1\nu_2}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\sigma\rho\mu_3}}{\sqrt{6}} \\
 \mathcal{C}_4 &= \left( \frac{\lambda_{\mu\sigma}^a}{2} \frac{\lambda_{\nu\rho}^a}{2} \right) \frac{\delta^{\nu_1\nu}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\mu_1\mu\mu_3}}{\sqrt{6}} \frac{\delta^{\mu_1\rho}}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{\nu_1\sigma\mu_3}}{\sqrt{6}}.
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

O resultado é escrito como  $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4\}$ :

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{9} \right\}. \tag{E.2}$$

É importante observar que pelo fato deste resultado não depender dos índices de méson e/ou bárion, ele vale para qualquer interação méson-bárion descrita dentro do contexto do nosso formalismo. O fator de spin-sabor pode ser calculado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_1(\alpha\beta; \delta\gamma) &= \left( \frac{\sigma_{s_\mu s_\sigma}^i}{2} \frac{\sigma_{s_\nu s_\rho}^i}{2} \right) \left( \delta_{f_\mu f_\sigma} \delta_{f_\nu f_\rho} \right) \xi_\alpha^{*\mu\nu_2} \zeta_\beta^{*\nu\mu_2\mu_3} \xi_\gamma^{\rho\nu_2} \zeta_\delta^{\sigma\mu_2\mu_3} \\
 \mathcal{S}_2(\alpha\beta; \delta\gamma) &= \left( \frac{\sigma_{s_\mu s_\sigma}^i}{2} \frac{\sigma_{s_\nu s_\rho}^i}{2} \right) \left( \delta_{f_\mu f_\sigma} \delta_{f_\nu f_\rho} \right) \xi_\alpha^{*\mu_1\nu} \zeta_\beta^{*\mu\mu_2\mu_3} \xi_\gamma^{\sigma\rho} \zeta_\delta^{\mu_1\mu_2\mu_3} \\
 \mathcal{S}_3(\alpha\beta; \delta\gamma) &= \left( \frac{\sigma_{s_\mu s_\sigma}^i}{2} \frac{\sigma_{s_\nu s_\rho}^i}{2} \right) \left( \delta_{f_\mu f_\sigma} \delta_{f_\nu f_\rho} \right) \xi_\alpha^{*\mu\nu_2} \zeta_\beta^{*\mu_1\nu\mu_3} \xi_\gamma^{\mu_1\nu_2} \zeta_\delta^{\sigma\rho\mu_3} \\
 \mathcal{S}_4(\alpha\beta; \delta\gamma) &= \left( \frac{\sigma_{s_\mu s_\sigma}^i}{2} \frac{\sigma_{s_\nu s_\rho}^i}{2} \right) \left( \delta_{f_\mu f_\sigma} \delta_{f_\nu f_\rho} \right) \xi_\alpha^{*\nu_1\nu} \zeta_\beta^{*\mu_1\mu\mu_3} \xi_\gamma^{\mu_1\rho} \zeta_\delta^{\nu_1\sigma\mu_3}.
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Estes fatores  $\mathcal{S}$  podem ser calculados facilmente, usando a seguinte propriedade das matrizes do  $SU(N)$

$$M_{\mu\sigma}^a M_{\nu\rho}^a = 2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - f \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \quad \text{com} \quad f = \begin{cases} 1, & \text{se } M^a = \sigma^a, (a = 1, 2, 3) \\ \frac{2}{3}, & \text{se } M^a = \lambda^a, (a = 1, \dots, 8) \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Os fatores de spin-sabor-cor  $\omega_i$  são obtidos a partir de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{S}$ :

$$\left\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \right\} = \left\{ 3\mathcal{C}_1 \mathcal{S}_1, 3\mathcal{C}_2 \mathcal{S}_2, 6\mathcal{C}_3 \mathcal{S}_3, 6\mathcal{C}_4 \mathcal{S}_4 \right\}. \quad (\text{E.5})$$

Como foi comentado no Capítulo 4, os índices  $\alpha, \beta, \delta, \gamma$  são os números quânticos de espaço, spin e isospin dos mésons ou dos bárions do problema. Eles vão ser determinados de acordo com o respectivo processo a ser estudado, sendo muitas vezes necessário usar regras de soma de momento angular para representar o estado em questão.

# Bibliografia

- [1] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Jpn **17**, 48 (1935)
- [2] C. M. G. Lattes et al., Nature **159**, 694 (1947).
- [3] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [4] G. Zweig, CERN Rep. **8182/TH**, p. 401; CERN Rep. **8419/TH**, p. 412 (1964).
- [5] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964).
- [6] M. Y. Han, Y. Nambu, Phys. Rev. **139**, B1006 (1965).
- [7] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein, *Quantum Chromodynamics - Third edition* Rev. Mod. Phys. **74** (2002) 875-893.
- [8] Y. Zhu et al., Comm. Theor. Phys. **7** (1987), 149.
- [9] S. Pittel, Phys. Lett. B **247** (1990), 185.
- [10] C. Wu, D.H. Feng, Ann. Phys. **135** (1981), 166; Comm. Theor. Phys. **1** (1982), 705; *ibid* **1** (1982), 811.
- [11] F.J. Dyson, Phys. Rev. **102** (1956), 1217.
- [12] R.H. Stolt and W.E. Brittin, Phys. Rev. Lett. **27**, 616 (1971); Wesley E. Brittin, in Lectures in Theoretical Physics, edited by Wesley E. Brittin (Colorado Associated University Press, Boulder, 1973), Vol. XIVB, pp. 55 ff.
- [13] A. Y. Sakakura, Phys. Rev. Lett. **27**, 822 (1971) and in Lectures in Theoretical Physics, edited by Wesley E. Brittin (Colorado Associated University Press, Boulder, 1973), Vol. XIVB, pp. 483 ff.
- [14] D. Girardeau, in Lectures in Theoretical Physics, edited by Wesley E. Brittin (Colorado Associated University Press, Boulder, 1973), Vol. XIVB, pp. 147 ff., in particular pp. 167 ff.
- [15] M.D. Girardeau, Phys. Rev. Lett. **27**, 1416 (1971).



- 
- [16] W.E. Brittinand, A.Y. Sakakura, in *Physical Reality and Mathematical Description*, edited by C. P. Enz and J. Mehra (Reidel, New York, 1974).
- [17] E. S. Swanson, *Ann. Phys. (NY)*, **220**, 73 (1992).
- [18] T. Barnes, E.S. Swanson, *Phys. Rev. D* **46**, 131 (1992);
- [19] T. Barnes et al., *Phys. Rev. C* **48**, 539 (1993).
- [20] Oka M., Yazaki K., *Phys. Let. B* **90**, 41 (1980).
- [21] D. Hadjimichef et al., *Annals of Physics* **268**, 105-148 (1998)
- [22] M. D. Girardeau, *Journal of Mathematical Physics* **16**, 1901 (1975)
- [23] S. Tani, *Phys. Rev.* **117** (1960), 252.
- [24] D. Bohm, D. Pines, *Phys. Rev.* **92** (1953), 609; *Ann. Phys.* **268**, Nova York, n. 1, p. 105-148, Mar. 1998.
- [25] M.D. Girardeau, J.D. Gilbert; *Physica* **97A** (1979) 42-74
- [26] Para lista de referências veja ref.[21]
- [27] A. Mueller-Groeling, K. Holinde, J. Speth, *Nucl. Phys. A* **513**, 557 (1990).
- [28] R. Buettgen et al., *Nucl. Phys. A* **506**, 586 (1990).
- [29] T. Barnes, E. S. Swanson, *Phys. Rev. C* **49**,1166 (1994).
- [30] D. Hadjimichef, J. Haidenbauer, G. Krein, *Phys. Rev. C* **63**, 035204 (2001).
- [31] N. Black, *J. Phys. G* **28**, 1953 (2002).
- [32] B. Silvestre-Brac, J. Labarsouque, J. Leandri, *Nucl. Phys. A* **613**, 342 (1997).
- [33] S. Lemaire, J. Labarsouque, B. Silvestre-Brac, *Nucl. Phys. A* **700**, 330 (2002).
- [34] S. Lemaire, J. Labarsouque, and B. Silvestre-Brac, *Nucl. Phys. A* **714**, 265 (2003).
- [35] H. J. Wang, H. Yang, J. C. Su, *Phys. Rev. C* **68**, 055204 (2003).
- [36] D. Hadjimichef, J. Haidenbauer, G. Krein, *Phys. Rev. C* **66**, 055214 (2002).
- [37] D.T. da Silva, D. Hadjimichef, *J. Phys. G* **30**, 191 (2004).
- [38] M. L. L. Silva et al. *J. Phys. G* **32**, 475 (2006).
- [39] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Pub. Cia. (1967).

- 
- [40] Muta. T, *Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories* *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, Washington, v. 101, n. 4, p.419-434, July/Aug. 1996.
- [41] S. Adler, *Phys. Rev.* **117**, 2426 (1969).
- [42] J. Bell, R. Jackiw, *Nuov. Cimento* **60** A, 47 (1969).
- [43] A. P. Szczepaniak, E. S. Swanson, *Phys. Rev.* **D65**, 025012 (2001)
- [44] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **127**, 324 (1962).
- [45] N. H. Christ, T.D. Lee, *Phys. Rev. D* **22** , 939 (1980).
- [46] D. Zwanziger, *Nucl. Phys. B* **485**, 185 (1997).
- [47] H. J. Lipkin, *Phys. Rep. C* **8**, 173, (1973).
- [48] H. J. Lipkin, *Phys. Lett. B* **45**, 267, (1973).
- [49] A. De Rújula, G. Howard, S. L. Glashow, *Phys. Rev. D* **12**, 147 (1975).
- [50] D. Hadjimichef, Notas de aula de Mecânica Quântica do Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS. 2020. Porto Alegre.
- [51] S. K. Adhikari, K. L. Kowalski, *Dynamical Collision Theory and Its Applications*, Academic Press Inc. (1991).
- [52] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018) and 2019 update
- [53] S. Szpigel: Interação méson-méson no formalismo Fock-Tani. Tese de doutorado IF-USP, 1995
- [54] D. Hadjimichef. Formalismo de Fock-Tani para a física Hadrônica. 1995. 132f. Tese (Doutorado em Física)- Instituto de Física Teórica UNESP - São Paulo.
- [55] B. C. Folador. Correções relativísticas ao modelo de quarks no espalhamento  $J/\Psi$ -nucleon. 2015. 87f. Dissertação (Mestrado em Física)-Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- [56] M.D. Girardeau, *J. Math. Phys.* **16**, 1901 (1975).
- [57] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1968).
- [58] C. Lo, M.D. Girardeau, *Phys. Rev. A* **41**, 158 (1990).
- [59] J.C. Straton, M.D. Girardeau, *Phys. Rev. A* **40**, 2991 (1989).

- 
- [60] S. Weinberg, Phys. Rev. **130**, 776 (1963); *ibid.* **131**, 440 (1963); M. Scadron and S. Weinberg, Phys. Rev. **133**, B1589 (1964); M. Scadron, S. Weinberg and J. Wright, Phys. Rev. **135** B202 (1964).
- [61] B. C. Folador e D. Hadjimichef. Low energy KN interaction in the Fock-Tani Formalism. International Journal of Modern Physics: Conference Series. v45, 2017.
- [62] B. C. Folador e D. Hadjimichef. Low energy interaction in the Fock-Tani Formalism. Astronomische Nachrichten, v. **338**, p. 1156-1159, 2017.
- [63] K. Bräuer et al., Z. Phys. A **320**, 609 (1985).
- [64] K. Bräuer et al., Nucl. Phys. A **507**, 599 (1990).
- [65] U. Straub et al., Nucl. Phys. A **483**, 686 (1988).
- [66] T. S. Mast et al., Phys. Rev. D **14**, 13 (1976).
- [67] N. H. Christ et al., Phys. Rev. Lett. **105**, 241601 (2010).
- [68] C. Amsler, F. E. Close, Phys. Rev. D **53**, 295 (1996).
- [69] C. Fernández-Ramírez et al., (Joint Physics Analysis Center), Phys. Rev. D **93**, 034029 (2016), arXiv:1510.07065 [hep-ph].
- [70] G. Höhler, *Landolt-Börnstein Elementary Particles – Elastic and Charge Exchange Scattering of Elementary Particles – Pion Nucleon Scattering. Vol. 9 Part 2: Methods and Results of Phenomenological Analyses* (Springer-Verlag, 1983).
- [71] E. P. Wigner, Phys. Rev. **70**, 15 (1946); R. H. Dalitz and S. Tuan, Ann. Phys. (N.Y.) **10**, 307 (1960); A. M. Badalyan, L. P. Kok, and Yu. A. Simonov, Phys. Rep. **82**, 31 (1982).
- [72] V. Flaminio et al., "Compilation of cross-sections II: K<sup>+</sup> and K<sup>-</sup> induced reactions", CERN-HERA 83-02, 13 December 1983
- [73] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G **37**, 075021 (2010).
- [74] K. Miyagawa, J. Haidenbauer, Phys. Rev. C **85**, 065201 (2012).
- [75] C. Garcia-Recio et al., Phys. Rev. D **67**, 076009 (2003).
- [76] J. A. Oller, J. Prades, M. Verbeni, Phys. Rev. Lett. **95**, 172502 (2005).
- [77] B. Borasoy, R. Nißler, W. Weise, Eur. Phys. J. A **25**, 79 (2005).
- [78] B. Borasoy, U.-G. Meißner, R. Nißler, Phys. Rev. C **74**, 055201 (2006).
- [79] N. Isgur, G. Karl, Phys. Rev. D **18**, 4187 (1978).
- [80] D. Faiman, A. W. Hendry, Phys. Rev. **173**, 1720 (1968).