

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE MINAS,
METALÚRGICA E MATERIAIS

Luiz Tiarajú dos Reis Loureiro

UM ESTUDO SOBRE A MÁQUINA TORUS

Porto Alegre

2008

LUIZ TIARAJÚ DOS REIS LOUREIRO

UM ESTUDO SOBRE A MÁQUINA TORUS

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais.

Área de concentração: Processos de fabricação

ORIENTADOR: Prof.Ály Ferreira Flores Filho

Porto Alegre

2008

Luiz Tiarajú dos Reis Loureiro

UM ESTUDO SOBRE A MÁQUINA TORUS

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de doutor em Engenharia de Minas, Metalúrgica e Materiais e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. Ály Ferreira Flores Filho, UFRGS
Doutor pela University of Wales College of
Cardiff, País de Gales, Reino Unido

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Pedro Assumpção Bastos, UFSC
Doutor pela Université de Paris VI – Paris, França

Prof. Dr. Jorge Rodolfo da Silva Zabadal, UFRGS
Doutor pela UFRGS – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Renato Machado Brito, UFRGS
Doutor pela UFRGS – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Roberto Petry Homrich, UFRGS
Doutor pela UNICAMP – Campinas, Brasil

Coordenador do PPGEM:

Prof. Dr. Carlos Perez Bergmann

Porto Alegre, abril de 2008.

AGRADECIMENTOS

A minha família e a todas as pessoas de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Senhor que permitiu sua realização e conclusão.

RESUMO

Este trabalho apresenta as características básicas de uma máquina elétrica com fluxo axial, ímãs permanentes, rotor duplo e estator com enrolamentos toroidais montado entre os rotores. A máquina foi construída no Laboratório de Máquinas Elétricas, Acionamentos e Energia da Escola de Engenharia da UFRGS. O trabalho contém modelos analíticos para as induções magnéticas dos ímãs permanentes e dos enrolamentos de armadura. A partir dos modelos foram desenvolvidas expressões para o cálculo de forças eletromotrizes e de conjugados, sendo utilizado um software de matemática simbólica para realização dos cálculos. É apresentada uma comparação entre os resultados obtidos através do modelo analítico e os resultados obtidos por simulação numérica. Alguns resultados são comparados também com valores experimentais. As expressões para o cálculo de conjugado desenvolvido pela máquina serão detalhadas em uma etapa posterior. Foi obtida uma razoável coerência entre os dados comparados.

Palavras chave: Máquina elétrica. Máquina Torus. Ímã permanente. Motor elétrico. Gerador elétrico. Modelagem analítica. Modelagem numérica. Medição de indução magnética. Medição de conjugado. Aquisição de dados. Simetrias de Lie.

ABSTRACT

This work presents the basic features of an axial flux, permanent magnet, double rotor and toroidal windings mounted between the rotors. The machine was built in the Laboratory of Electrical Machines, Drives and energy of the School of Engineering of the Federal University of Rio Grande do Sul. The work contains analytical models of permanent magnets and armature windings magnetic inductions. Based in models, expressions of electromotive forces and torques were derived. The calculations were performed with a symbolical mathematical software. It is presented a comparison between results obtained with analytical model and results of the numerical simulation. Some comparisons include experimental results. The expressions of machine torque will be detailed in a next phase. The compared results present an acceptable conformity.

Key words: Electrical machine. Torus machine. Permanent magnet. Electrical motor. Electrical generator. Analytical modeling. Numerical modeling. Magnetic induction measurement. Torque measurement. Data acquisition. Lie's symmetries.

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----|
| 1 | Introdução | 13 |
| 2 | Máquinas Elétricas com Fluxo Axial | 14 |
| 3 | Estrutura da Máquina Torus Estudada | 21 |
| 3.1 | Descrição e aspectos diferenciados | 21 |
| 3.2 | Detalhamento da máquina Torus | 21 |
| 3.3 | Detalhamento do acionamento da máquina Torus | 25 |
| 4 | Modelo Analítico | 28 |
| 4.1 | Vetor potencial magnético na região dos enrolamentos | 28 |
| 4.2 | Vetor potencial magnético na região do entreferro sem enrolamento | 37 |
| 4.3 | Condições de contorno | 39 |
| 4.4 | Determinação das constantes | 42 |
| 4.5 | Indução Magnética dos Ímãs Permanentes | 46 |
| 4.6 | Força Eletromotriz | 51 |
| 4.7 | Conjugado | 58 |
| 5 | Modelo Numérico | 63 |
| 5.1 | Método dos Elementos Finitos | 63 |
| 5.2 | Implementação de modelos de elementos finitos da máquina Torus | 65 |
| 5.3 | Simulação da Máquina Torus por Elementos Finitos | 65 |
| 5.3.1 | Indução magnética produzida pelos ímãs permanentes | 66 |
| 5.3.2 | Força eletromotriz | 68 |
| 5.3.3 | Conjugado estático | 69 |
| 6 | Resultados Experimentais | 70 |
| 6.1 | Indução Magnética | 73 |
| 6.2 | Forças Eletromotrizes | 70 |
| 6.3 | Conjugado Estático | 76 |
| 7 | Comparação de Resultados | 78 |
| 7.1 | Indução dos Enrolamentos | 78 |
| 7.2 | Indução dos Ímãs | 80 |
| 7.3 | Força Eletromotriz | 82 |
| 7.4 | Conjugado Estático | 83 |
| 8 | Conclusões e Trabalhos Futuros | 84 |
| 9 | Referências | 85 |
| Apêndice 1 | Dimensionamento Preliminar da Máquina Torus | 89 |
| Apêndice 2 | Ímãs Permanentes | 97 |
| Apêndice 3 | Simetrias Admitidas por Equações Diferenciais | 100 |
| Apêndice 4 | Densidade de potência e de conjugado | 105 |

LISTA DE FIGURAS

| Número | Título | Pá- gina |
|--------|--|-------------|
| 1 | Formas construtivas de Máquinas de Fluxo Axial | 14 |
| 2 | Representação de Máquina de Fluxo Axial | 15 |
| 3 | Construção Seccionada de Estator | 15 |
| 4 | Corte de uma Máquina Torus com duplo estator | 16 |
| 5 | Cortes da Máquina Construída por Mandrela [13] | 17 |
| 6 | Representação do Núcleo do Estator da Máquina de Cirani [14] | 17 |
| 7 | Topologia das máquinas estudadas por S. Huang | 18 |
| 8 | Representação da máquina com fluxo controlado | 19 |
| 9 | Dimensões dos ímãs | 22 |
| 10 | Projeção da trajetória do fluxo | 22 |
| 11 | Dimensões da máquina | 23 |
| 12 | Perspectiva | 23 |
| 13 | Vista lateral | 23 |
| 14 | Vista frontal | 24 |
| 15 | Perspectiva | 24 |
| 16 | Vista frontal com bobinas | 24 |
| 17 | Perspectiva com bobinas | 24 |
| 18 | Vista frontal com ligações | 24 |
| 19 | Perspectiva com ligações | 24 |
| 20 | Distribuição das bobinas | 25 |
| 21 | Diagrama de ligações das bobinas | 25 |
| 22 | Diagrama de blocos do acionamento | 26 |
| 23 | Fonte e acionamento | 26 |
| 24 | Perspectiva do acionamento | 27 |
| 25 | Vista superior do acionamento | 27 |
| 26 | Diagrama de acionamento das bobinas | 27 |
| 27 | Representação de Sistema de Coordenadas Cilíndricas | 28 |
| 28 | Representação esquemática de uma seção da máquina Torus | 39 |
| 29 | Indução produzida pelos enrolamentos | 46 |
| 30 | Representação de funções gaussianas | 47 |
| 31 | Indução magnética na superfície de um ímã | 50 |
| 32 | Valores calculados da força eletromotriz induzida em um condutor | 57 |
| 33 | Valores calculados da força eletromotriz induzida em uma bobina | 57 |
| 34 | Conjugado calculado | 61 |
| 35 | Aplicação do método de elementos finitos | 64 |
| 36 | Perspectiva da máquina completa | 66 |
| 37 | Perspectiva da máquina com remoção dos rotores | 66 |
| 38 | Indicação colorida dos valores de indução | 66 |
| 39 | Indicação dos valores de indução com escala de cores (T) | 66 |
| 40 | Valores de indução (mT) a 0,5 mm da superfície do ímã | 67 |
| 41 | Valores de indução (mT) na região do entreferro a 1mm do ímã | 67 |
| 42 | Força Eletromotriz de um Condutor | 68 |
| 43 | Força Eletromotriz de uma Bobina | 68 |
| 44 | Conjugado obtido por Simulação | 69 |
| 45 | Gabaritos de posicionamento de ponteiras de efeito Hall | 70 |
| 46 | Teslímetro, ponteira transversa e gabaritos de posicionamento | 70 |

| | | |
|-----|---|----|
| 47 | Corte da máquina com indicação do esquema da montagem para medição da indução magnética | 71 |
| 48 | Valores de indução (mT) medidos a 0,5mm da superfície dos ímãs | 71 |
| 49 | Valores de indução (mT) medidos no entreferro a 1mm da superfície dos ímãs | 72 |
| 50 | Valores de indução medidos na direção radial a 0,5 mm da superfície dos ímãs | 72 |
| 51 | Valores de indução medidos na direção tangencial a 0,5 mm da superfície dos ímãs | 73 |
| 52 | Corte da máquina com indicação do esquema para aquisição de força eletromotriz | 73 |
| 53 | Acionamento da máquina com velocidade variável | 74 |
| 54 | Aquisição da força eletromotriz | 74 |
| 55 | Forças eletromotrizes de um condutor com diversas rotações | 74 |
| 56 | Variação da força eletromotriz com a rotação | 75 |
| 57 | Forças eletromotrizes de um condutor convertidas para 20 Hz | 75 |
| 58 | Força eletromotriz de uma bobina adquirida a 450 RPM | 76 |
| 59 | Esquema da montagem para medição de conjugado | 76 |
| 60 | Montagem para medição de conjugado | 77 |
| 61 | Dispositivo para medição da posição do rotor | 77 |
| 62 | Conjugado medido com 2,5 A de corrente | 77 |
| 63 | Induções obtidas por simulação e calculadas analiticamente | 78 |
| 64 | Induções obtidas por simulação e calculadas para ângulo de -10° | 79 |
| 65 | Induções obtidas por simulação e calculadas para ângulo de 0° | 79 |
| 66 | Induções obtidas por simulação e calculadas para ângulo de 10° | 80 |
| 67 | Comparação de induções na direção radial | 81 |
| 68 | Comparação de induções na direção tangencial | 81 |
| 69 | Forças eletromotrizes em um condutor | 82 |
| 70 | Forças eletromotrizes de uma bobina | 83 |
| 71 | Conjugado estático | 83 |
| A.1 | Valores característicos do ponto de produto energético máximo | 89 |
| A.2 | Corte da máquina com trajetória do fluxo | 90 |
| A.3 | Posição de um ímã em relação ao estator | 92 |
| A.4 | Corte da máquina | 93 |
| A.5 | Indicação das bobinas sob a projeção de um ímã | 95 |
| B.1 | Curva de Histerese | 97 |
| B.2 | Curva de Desmagnetização | 97 |
| B.3 | Curva de produto Energético | 97 |

LISTA DE QUADROS

| Número | Título | Página |
|--------|----------------------------------|--------|
| 1 | Dados dos ímãs permanentes | 22 |
| 2 | Características da máquina | 23 |
| A.1 | Dados da Máquina Torus | 96 |
| B.1 | Propriedades de Ímãs Permanentes | 98 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| Símbolo | Significado | Página |
|-------------------------------|---|--------|
| Br | indução magnética remanente | 16 |
| Hc | força coercitiva | 16 |
| 3D | tridimensional | 16 |
| Nm | Newton multiplicado por metro | 17 |
| Nm/kg | Newton multiplicado por metro e dividido por quilograma | 17 |
| mm | milímetro | 17 |
| T | Tesla | 17 |
| CC | corrente contínua | 19 |
| B | indução magnética | 22 |
| kJ/m^3 | quiloJoule dividido por metro cúbico | 22 |
| kAesp/m | quiloAmpère multiplicado por espira dividido por metro | 22 |
| m^3 | metro cúbico | 23 |
| RPM | rotação por minuto | 23 |
| x,y,z | coordenadas retangulares | 28 |
| R, θ ,z | coordenadas cilíndricas | 28 |
| ∇ | operador nabla | 28 |
| A | vetor potencial magnético | 28 |
| μ | permeabilidade magnética | 29 |
| H | intensidade de campo magnético | 29 |
| J | densidade de corrente elétrica | 29 |
| ∇^2 | operador laplaciano | 29 |
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | símbolo de derivada parcial | 30 |
| ln() | logaritmo neperiano | 32 |
| $\int()$ | símbolo de integral | 33 |
| k | constante | 35 |
| λ | constante | 35 |
| Γ | constante | 38 |
| N | número de espiras | 42 |
| I | unidade imaginária | 42 |
| i | corrente elétrica | 42 |
| A | ampère | 42 |
| h_b | espessura das bobinas | 42 |
| rad | radiano | 42 |
| Ψ | potencial escalar magnético | 46 |
| k1 | constante | 47 |
| e | base neperiana | 47 |
| a | variável auxiliar | 48 |
| τ | parâmetro referente à estrutura magnética | 48 |
| a_1, a_2 | fatores de escala | 48 |
| x_0 | deslocamento na coordenada x | 49 |
| y_0, y_1 | deslocamentos na variável y | 49 |
| e | força eletromotriz | 50 |

| | | |
|------------|---|----|
| S | superfície | 50 |
| erf() | função erro | 51 |
| r | raio | 53 |
| ω | freqüência angular | 53 |
| r_1, r_2 | raios externo e interno da máquina | 53 |
| t | tempo | 53 |
| d() | símbolo de diferencial | 57 |
| F | força | 57 |
| i | corrente | 57 |
| V | volume | 58 |
| C | conjugado | 58 |
| u | variável | 63 |
| Ψ | função de interpolação | 63 |
| K | coeficiente | 64 |
| F | fonte | 64 |
| P | potência | 89 |
| Q | produto energético | 89 |
| Φ | fluxo magnético | 90 |
| C_f | relação de superfícies | 90 |
| l | comprimento | 91 |
| L | relação de induções | 91 |
| N | número de ímãs permanentes | 92 |
| N_i | força magnetomotriz | 93 |
| larg | largura interna das bobinas | 94 |
| Ocup | densidade de espiras | 94 |
| Nespc | número de espiras calculado | 94 |
| Npip | número de espiras situadas na projeção de um ímã permanente | 95 |

Nota: devido a dificuldades com o editor de equações algumas variáveis apresentam tamanhos de fonte diferentes ao longo do trabalho.

1 INTRODUÇÃO

A necessidade de otimizar aplicações e satisfazer especificações severas juntamente com disponibilidade de ferramentas de simulação e novos materiais, estimulam a pesquisa e o desenvolvimento de máquinas elétricas com melhor desempenho.

O desempenho pode ser melhorado pelo aumento de rendimento, redução de volume ou ainda, pela obtenção de alguma característica que torne o dispositivo diferenciado dos demais.

A disponibilidade de ímãs permanentes de elevado produto energético possibilita a utilização de configurações não adequadas a outras alternativas de excitação. No sistema de excitação a inexistência de enrolamentos, bem como perdas Joule associadas, é um dos fatores de melhoria no desempenho.

Esse trabalho visa:

Apresentar uma máquina compacta, que satisfaça requisitos de rendimento elevado e desempenho otimizado chamada Torus;

Apresentar os modelos numérico e analítico desenvolvidos para a máquina Torus;

Apresentar os ensaios realizados com o protótipo;

Comparar os resultados obtidos.

A máquina Torus é uma máquina de ímãs permanentes, com fluxo axial, enrolamentos toroidais, comprimento axial menor que o diâmetro, o que a torna interessante para algumas aplicações industriais.

A seguir serão apresentados a revisão bibliográfica, a construção, modelos analíticos desenvolvidos, a simulação, os ensaios do protótipo da máquina Torus. O dimensionamento preliminar da máquina está apresentado no Apêndice A. No Apêndice B são apresentadas as características principais de ímãs permanentes, no Apêndice C são apresentadas simetrias admitidas por equações diferenciais e no Apêndice D são apresentadas propostas para o cálculo de densidade de potência e densidade de conjugado.

Ao longo do trabalho serão apresentadas algumas características que tornam este desenvolvimento único, como a utilização de núcleos maciços e modelo analítico com utilização de simetrias de Lie [42][43][44]. A utilização de simetrias de Lie permite evitar a utilização do método de separação de variáveis que resulta em funções de Bessel, constituídas por séries com um número muito elevado de termos.

2 MÁQUINAS ELÉTRICAS COM FLUXO MAGNÉTICO AXIAL

O primeiro registro de máquina elétrica com fluxo magnético axial foi do disco de Faraday, que é uma máquina homopolar cuja documentação remonta a 1831 [1] [2].

Em contraposição às máquinas elétricas com fluxo magnético axial, as máquinas elétricas com fluxo radial foram inventadas em 1837 [3], sendo usadas quase que exclusivamente desde sua invenção.

A partir do desenvolvimento de ímãs permanentes com maior produto energético, a competitividade das máquinas elétricas com fluxo axial aumentou e elas tornaram-se preferíveis às máquinas de fluxo radial em algumas aplicações [4].

As máquinas de fluxo axial podem apresentar diversas formas construtivas, conforme se verifica na figura 1.

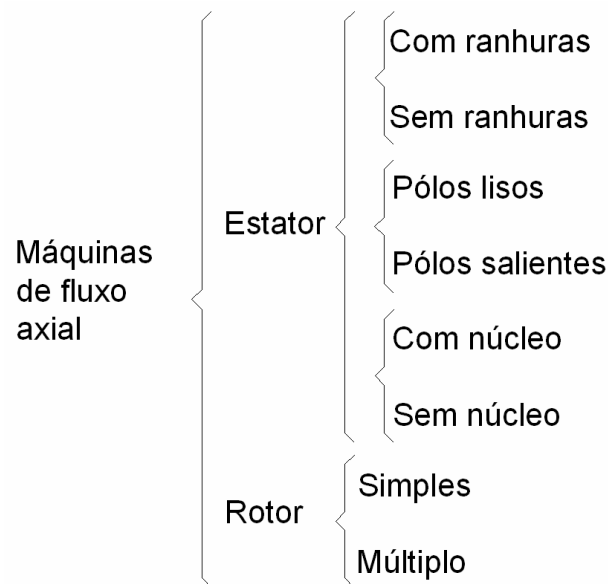


Figura 1 Formas construtivas de Máquinas de Fluxo Axial

Peter Campbell aplicou a teoria de máquinas de corrente contínua em uma máquina de corrente contínua com fluxo axial, cuja excitação é realizada por ímãs permanentes e cuja armadura é do tipo disco. Essa máquina apresenta comutador e o núcleo da armadura é constituído por ar, tornando o entreferro longo. Campbell desenvolveu uma formulação para o cálculo da indução no entreferro, analisada a influência da relação pólo/passo polar e do raio na distribuição da indução [4].

Campbell ainda desenvolveu uma máquina de fluxo axial com ímãs permanentes no estator e armadura em disco com núcleo de pó de ferro aglutinado com resina epóxi. Essa máquina foi comparada com outra máquina similar com núcleo de aço. Os valores de indução medidos em ambos os casos foram próximos, comprovando a viabilidade de utilização de pó de ferro aglutinado como núcleo magnético. Adicionalmente, Campbell analisou a distribuição de

fluxo no entreferro, concluindo que é necessário realizar a modelagem tridimensional do circuito magnético [5].

C. Chan apresentou diversas configurações de máquinas com fluxo axial e enrolamento de excitação, entre elas: estator simples e rotor simples; estator duplo e rotor simples; estator simples e rotor duplo; e estator múltiplo e rotor múltiplo. Desenvolveu um equacionamento para projeto de algumas configurações e destacou o potencial de aplicações de máquinas de fluxo axial [3].

Spooner et al apresentaram uma máquina com fluxo axial com pequeno comprimento axial, constituída por estator simples e rotor duplo. A máquina foi chamada de Torus. A utilização de ímãs permanentes de terras raras na referida máquina possibilitou a obtenção de uma relação conjugado/massa relativamente elevada. A disposição dos rotores proporciona uma boa ventilação para os enrolamentos do estator. O grupo considerou satisfatórios os resultados dos ensaios e bom o desempenho apresentado pela máquina [6].

Em trabalho posterior, Spooner et al caracterizaram como simples e barata a construção das máquinas Torus. Os enrolamentos são constituídos por bobinas montadas em torno do núcleo do estator que é toroidal. O núcleo é construído sem ranhuras, contribuindo para reduzir as indutâncias próprias e mútuas das bobinas. A utilização de ímãs permanentes de neodímio-ferro-boro possibilitou a redução de volume e de massa, e a obtenção de carregamento elétrico elevado. O carregamento magnético elevado possibilita a obtenção de forças eletromotrizes especificadas com pequeno número de espiras, e resistências e indutâncias reduzidas. O estator da máquina foi construído com uma fita enrolada formando um toróide, sobre o qual é montado o enrolamento. Os rotores são dois discos com ímãs polarizados axialmente. As perdas na máquina foram analisadas em detalhe. Foram estudadas diferentes formas de montagem dos ímãs permanentes, bem como o desempenho térmico dos protótipos construídos [7].

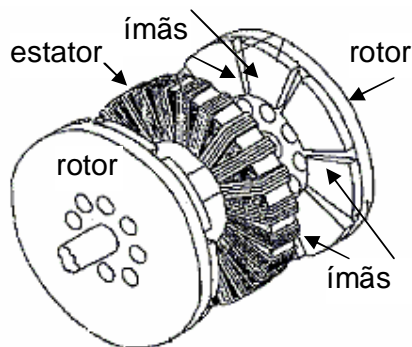


Figura 2 Representação de máquina de fluxo axial

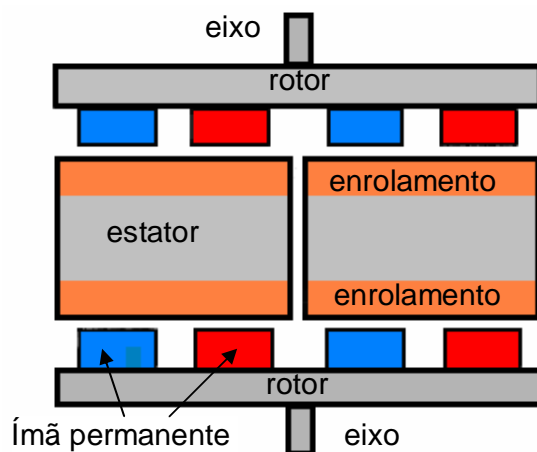


Figura 3 Construção seccionada do estator

Caricchi construiu uma máquina com estator toroidal, constituído por lâmina de ferro enrolada e rotores com ímãs permanentes, representada na figura

2. Sobre o núcleo foi montado um enrolamento trifásico com bobinas toroidais concentradas. Os ímãs direcionam o fluxo do entreferro para o estator. A corrente que circula pelas bobinas interage com o fluxo dos ímãs permanentes produzindo uma força tangencial, e o conjugado da máquina resulta da contribuição de todas as forças que atuam em ambos rotores. A ligação das bobinas é tal que os rotores, que acionam eixos concêntricos, giram em sentidos opostos e há regiões de fluxo zero no estator, permitindo sua construção seja seccionada, como é visto na figura 3 [8].

Pan utilizou um campo de seqüência zero para magnetizar o estator, e verificou que a força magnetomotriz dos ímãs permanentes produz uma intensidade de campo relativamente pequena nessa situação, devido à saturação do circuito. Dessa forma, o controle da curva velocidade-conjugado pode ser realizado pela variação da corrente de seqüência zero [9].

Caricchi, visando obter uma máquina de fluxo axial com ímãs permanentes com custos competitivos com os custos de motores de indução, construiu uma máquina com ímãs de ferrite com 3 Nm a 2800 rpm. Os ímãs apresentam $B_r = 0,35$ T e $H_c = -280$ kA/m. O estator é composto por uma fita enrolada sobre a qual são montadas as bobinas. O estator pode ser dividido em duas metades para facilitar a construção e a montagem das bobinas. Um valor normal para a densidade de conjugado é 0,5-1 Nm/kg para máquina com potência até poucos kilowatts.[10].

Profumo desenvolveu uma máquina de fluxo axial provida de estatores duplos com ranhuras radiais e um rotor com ímãs permanentes, utilizando compósitos magnéticos macios no anel externo do rotor. Um corte da máquina é mostrado na figura 4. Devido à baixa indução nos estatores, em sua construção foi utilizado aço [11].

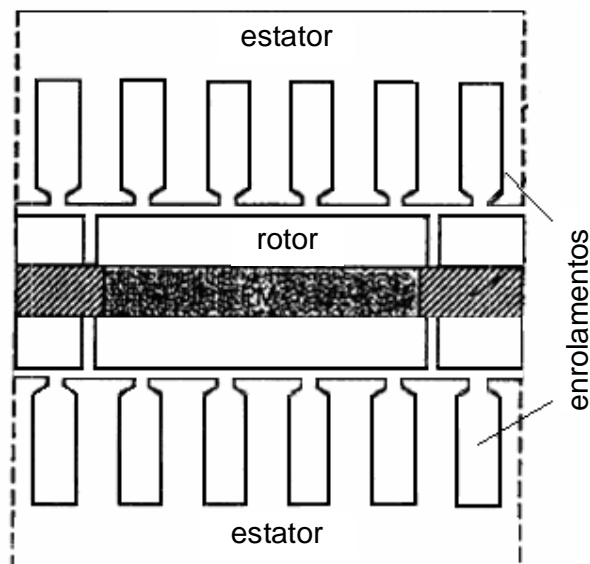


Figura 4 Corte de uma máquina Torus com duplo estator

Mendrela projetou e construiu uma máquina de fluxo axial cujo estator consiste de núcleos ferromagnéticos em torno dos quais são enroladas as bobinas, cujo esquema está representado na figura 5. Os núcleos são axiais dispostos circunferencialmente em torno do eixo e fixados por resina. Nas extremidades do estator estão localizados os rotores, constituídos por discos de aço sobre os quais são fixados ímãs. O número de ímãs é diferente do número de bobinas, para evitar regiões de conjugado de partida nulo. A máquina construída apresenta conjugado de relutância de 2,1 Nm e relação conjugado-massa ativa (pólos, rotores, ímãs e enrolamentos) de 10,4 Nm/kg. Comparando a máquina com um motor derivação convencional, apresenta maior rendimento maior conjugado específico e menor manutenção no comutador[13].

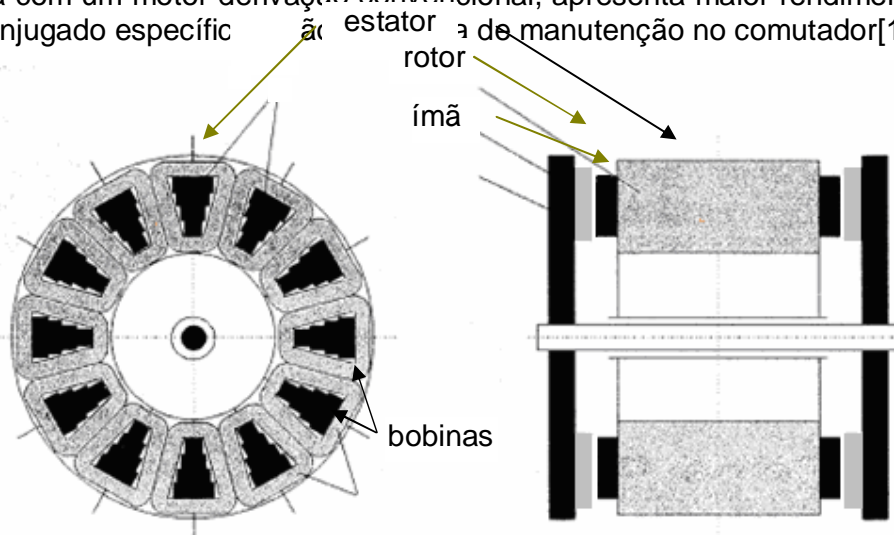


Figura 5 Cortes da máquina construída por Mendrela [13]

Cirani, com o objetivo de possibilitar o controle de fluxo, construiu uma máquina de ímãs permanentes com fluxo axial. Devido à pequena variação de fluxo nos discos dos rotores, os mesmos foram construídos com aço. O estator, representado na figura 6, foi construído com fita de aço laminado enrolado em espiral e após usinado para conformar as ranhuras. O entreferro é de 2mm e o valor máximo de indução no entreferro é 0,65 T. Os valores de indução, conjugado e indutância medidos e simulados apresentaram discrepâncias atribuíveis à diferença de temperaturas consideradas nos ímãs permanentes, às perdas na máquina e à instrumentação. O conjugado de relutância calculado é dependente do tipo e da espessura da malha, variando de 1,1 a 2 Nm [14].

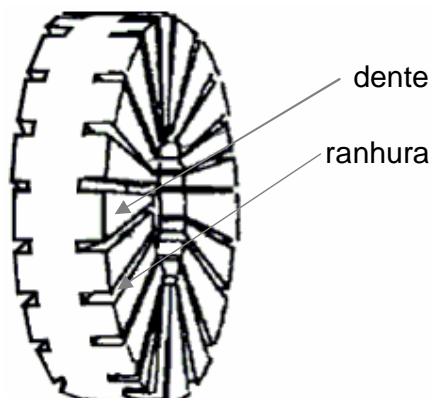


Figura 6 Representação do núcleo do estator da máquina de Cirani [14]

Huang estudou duas topologias de máquinas: um tipo apresenta ímãs permanentes com mesma polaridade em ambos rotores em uma determinada posição angular e outro apresenta ímãs permanentes com polaridade oposta em ambos rotores em uma posição angular determinada, como mostrado na figura 7. Na primeira configuração o fluxo que penetra no estator e segue uma trajetória axial e na segunda, o fluxo penetra no estator e segue uma trajetória circunferencial. Huang desenvolveu um conjunto de equações para o projeto das máquinas, realizou simulações, e comparou os resultados obtidos. Nas máquinas estudadas a indução máxima no entreferro foi 1 T e a indução média foi 0,75 T. A inclinação dos ímãs permanentes reduziu a oscilação de conjugado[15].

Aydin comparou os desempenhos de máquinas Torus com ranhuras e sem ranhuras, tanto em simulações como em ensaios, e demonstrou que o conjugado de relutância é desprezível em máquinas sem ranhuras. Além disso, os resultados indicaram que as ondulações de conjugado são influenciadas pela escolha da relação pólo-arco, pela inclinação dos ímãs permanentes e pela distribuição do enrolamento. As máquinas consideradas apresentam ímãs permanentes de mesma polaridade em ambos rotores em posições angulares correspondentes. Nas máquinas não ranhuradas a indução média foi 0,36 T e a indução máxima foi 0,45 T no entreferro. Nas máquinas ranhuradas a indução média foi 0,75 T e a indução máxima foi 1,0 T no entreferro [16].

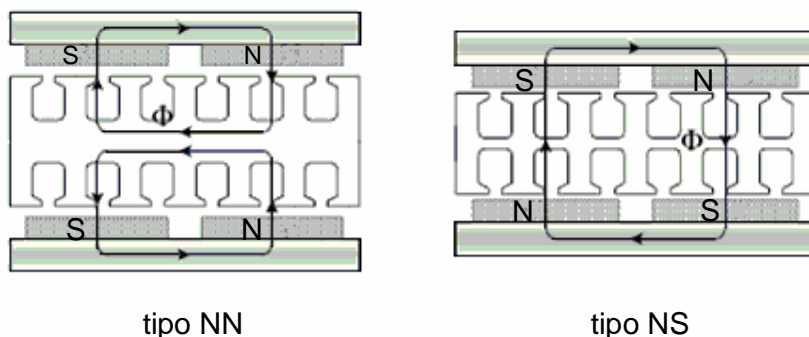


Figura 7 Topologia das máquinas estudadas por S. Huang

Aydin, para controlar o fluxo, construiu uma máquina de ímãs permanentes com fluxo axial provida de dois estatores e duas circunferências de ímãs permanentes concêntricas, representada na figura 8. Entre os estatores foi construído um enrolamento CC para produzir fluxo para interagir com o fluxo dos ímãs permanentes. Dependendo do sentido da corrente no enrolamento CC, o fluxo no entreferro pode ser enfraquecido ou reforçado [17].

Parviainen criou um programa “quasi-3-D” para calcular o desempenho de máquinas de fluxo axial, no qual as máquinas são consideradas compostas por diversas máquinas lineares. O desempenho da máquina é obtido pela soma

dos desempenhos das máquinas individuais. Os resultados do programa comparados a resultados de simulações numéricas e de ensaios apresentaram diferenças aceitáveis [19].

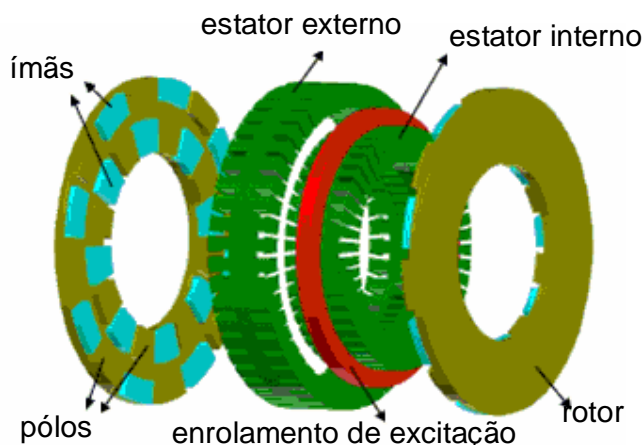


Figura 8 Representação da máquina com fluxo controlado

Zhilichev criou um modelo analítico para máquinas de ímãs permanentes de fluxo axial com solução 3D que combina o método da transformada integral de Hankel e o método discreto de Fourier em sub-regiões elementares com a rotina iterativa de Schwartz para juntar as seções da solução. No modelo, Zhilichev admitiu que o campo magnético no entreferro seja produzido exclusivamente pelos ímãs. Devido às condições de simetria, o problema pode ser resolvido em um único semi-espaco [12].

Bumby utilizou um modelo analítico baseado em lâminas de corrente para descrever um gerador de fluxo axial com ímãs permanentes sem ranhuras. Os resultados obtidos por simulação numérica e em ensaios foram semelhantes [18].

Gieras destacou que o projeto e a análise de motores de fluxo axial é dificultado pela presença de dois entreferros, elevada forças de atração axial, variação de dimensões com o raio e a produção de conjugado em uma faixa contínua de raios, e não em um raio determinado como em motores de fluxo radial [20]. Em obra posterior, *Axial Flux Permanent Magnet Brushless Machines* [52], Gieras apresentou diversas configurações de máquinas de fluxo axial. Nesta obra são abordados princípios, circuitos magnéticos, conjugado, fluxo, perdas, dimensionamento, reação de armadura, materiais, fabricação, controle, resfriamento e aplicações.

Edward Furlani na obra *Permanent Magnet and Electromechanical Devices* apresenta materiais magnéticos de maneira abrangente: métodos numéricos e analíticos para análise de circuitos magnéticos, análise de dispositivos eletromecânicos, atuadores e motores de ímãs permanentes. Além dos métodos tradicionais, apresenta os métodos de corrente e de carga para análise de ímãs permanentes. Analisa a aplicação de ímãs de terras raras (samário-cobalto e neodímio-ferro-boro) em dispositivos eletromecânicos [21].

S.A. Nasar, I. Boldea e L.E.Unnewehr na obra “Permanent Magnet, Reluctance, and Self-Synchronous Motors” apresentam uma aprofundada introdução a máquinas de ímãs permanentes, bem como suas aplicações. Fazem uma revisão sobre materiais magnéticos e análise dos mesmos. Analisam máquinas de corrente contínua e máquinas síncronas com ímãs permanentes, bem como diversas topologias de máquinas de relutância. A aplicação do método de elementos finitos em máquinas elétricas é abordada. Na obra, ainda é abordado o projeto e o controle de máquinas síncronas com acionamentos de velocidade variável [22].

3 ESTRUTURA DA MÁQUINA TORUS ESTUDADA

3.1 Descrição e aspectos diferenciados

A máquina Torus estudada neste trabalho é uma máquina de fluxo axial, tipo disco, com um estator montado entre dois rotores externos. A construção é relativamente simples, compacta e com o comprimento axial reduzido. Esta característica torna a máquina interessante para aplicações onde haja restrições de espaço.

A topologia da máquina exigiu o desenvolvimento de um modelo analítico apresentado no capítulo 4, que se constitui em uma abordagem diferenciada [59], não havendo sido localizada abordagem semelhante.

3.2 Detalhamento da máquina Torus

O estator é um toróide maciço de aço 1010 sobre o qual são montadas bobinas toroidais. Os rotores são constituídos por discos de aço 1010, em cujas superfícies internas são montados ímãs permanentes de elevado produto energético de neodímio-ferro-boro [22] com magnetização paralela ao eixo de rotação da máquina.

Com o movimento dos rotores, o ar que é aspirado pelo centro da máquina, se desloca radialmente pelo entreferro, refrigerando a superfície dos enrolamentos [18].

A variação de fluxo causada pelo movimento relativo entre estator e rotores induz correntes parasitas no núcleo do estator, que causam perdas. Para minimizar essas perdas, em diversos protótipos os núcleos dos estatores foram construídos com fitas de aço enroladas em espiral [6][7][8][9][10][11][14][15][16][18]. Alternativamente, os estatores podem ser construídos com fitas de materiais amorfos [23] ou ainda com compósitos metálicos [24][25].

A máquina foi projetada e construída com um estator que contém dezoito bobinas para serem energizadas em grupos de seis ligadas em série. Cada um dos rotores contém seis ímãs permanentes que interagem com as bobinas do estator. A excitação dos grupos de bobinas é realizada através de um conversor que energizando de forma sincronizada as bobinas, faz o campo magnético do estator acompanhar os campos magnéticos dos ímãs e interagir com os mesmos, gerando conjugado. Cada ímã permanente situado em um dos rotores apresenta um pólo voltado ao estator idêntico ao pólo voltado ao estator do ímã permanente de posição correspondente no outro rotor.

Considerando uma seção da máquina, as linhas de fluxo magnético partem de um pólo norte, se estabelecem através do entreferro (que nesse caso inclui os enrolamentos), chegam ao núcleo do estator, onde percorrem um passo polar, saem do estator, atravessam o entreferro em sentido oposto, entram em um ímã adjacente pelo pólo sul, saem do ímã pelo pólo norte, entram no núcleo do rotor, percorrem um passo polar saem do núcleo do rotor, entram no ímã de origem pelo pólo sul.

Os ímãs permanentes utilizados na máquina Torus apresentam dimensões externas 25 x 25 x 8 mm, como se verifica na figura 9, a seguir.

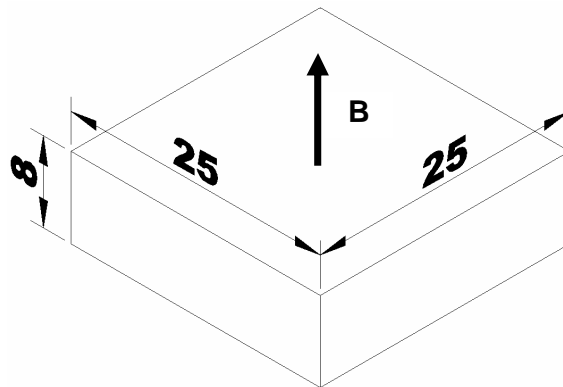


Figura 9 Dimensões externas (mm) dos ímãs permanentes

O quadro 1 apresenta os dados fornecidos pelo fabricante dos ímãs permanentes, bem como o volume dos mesmos.

| | | |
|---|--------------------|------------------|
| Produto energético máximo | 243,5±10% | kJ/m^3 |
| Força coercitiva mínima | 867,4 | kAesp/m |
| Força coercitiva máxima | 955 | kAesp/m |
| Indução remanente | 1,21±10% | T |
| Indução associada ao máximo produto energético | 0,605 | T |
| Intensidade de campo magnético associada ao máximo produto energético | -433,7 | kAesp/m |
| Volume | 5×10^{-6} | m^3 |

Quadro 1 Dados dos ímãs permanentes

A figura 10 apresenta uma projeção da trajetória do fluxo no circuito magnético da máquina.

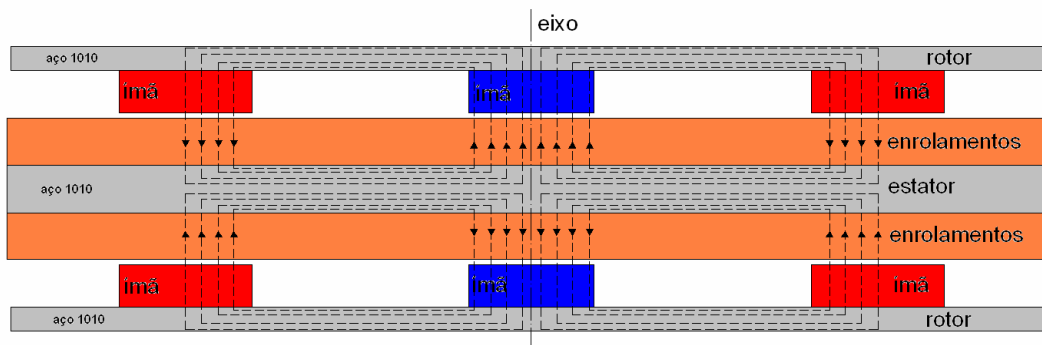


Figura 10 – Projeção da trajetória do fluxo

A figura 11 mostra uma vista lateral da máquina, e suas dimensões.

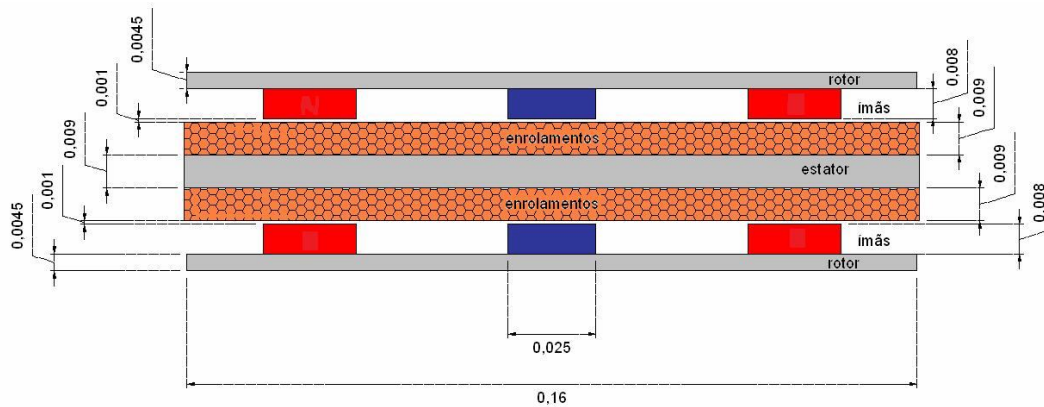


Figura 11 Dimensões da máquina (m)

O quadro 2 apresenta as principais características da máquina Torus analisada, em função do acionamento aplicado ao estator, figura 26.

| | | | |
|-------------------|----------|----------------------------|----|
| rotação | 450 RPM | número de pólos | 6 |
| conjugado | 3 Nm | número de fases | 3 |
| diâmetro externo | 0,16 m | número de bobinas | 18 |
| comprimento axial | 0,0545 m | número de bobinas por fase | 6 |

Quadro 2 – Características da máquina

As fotos das figuras 12 a 15 mostram a montagem da máquina sem os enrolamentos:

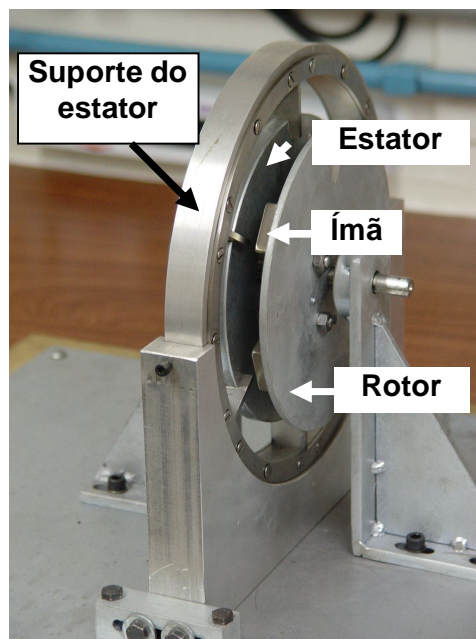


Figura 12 Perspectiva

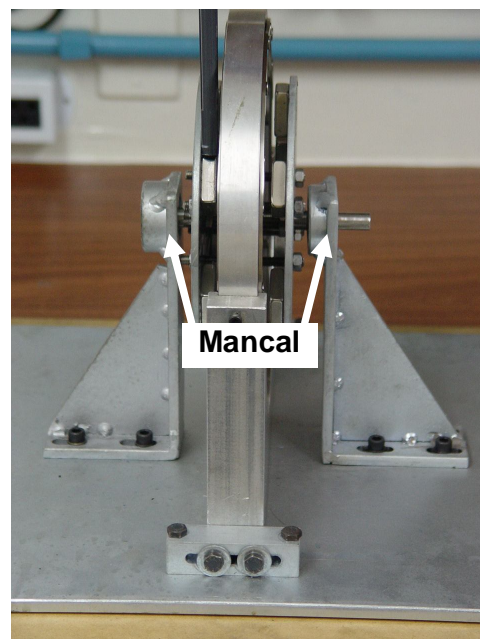


Figura 13 Vista Lateral

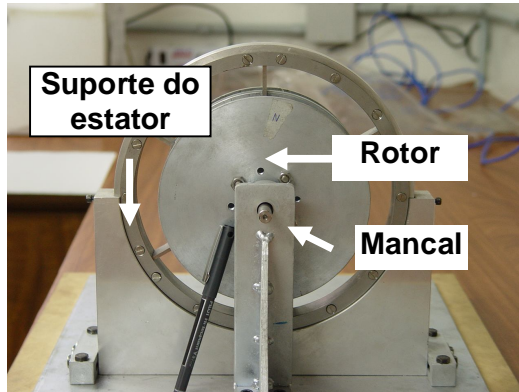


Figura 14 Vista frontal

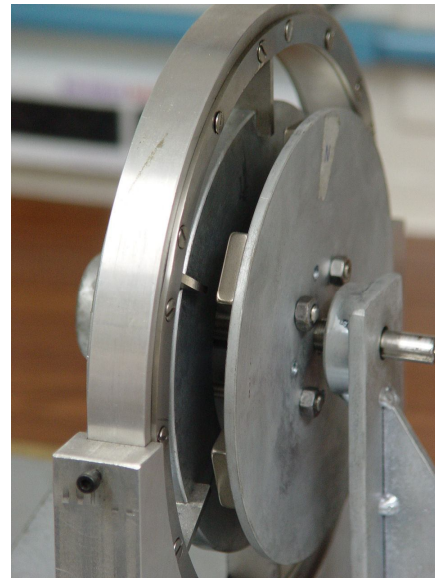


Figura 15 Perspectiva

As próximas figuras 16 a 19 mostram a máquina com os enrolamentos:

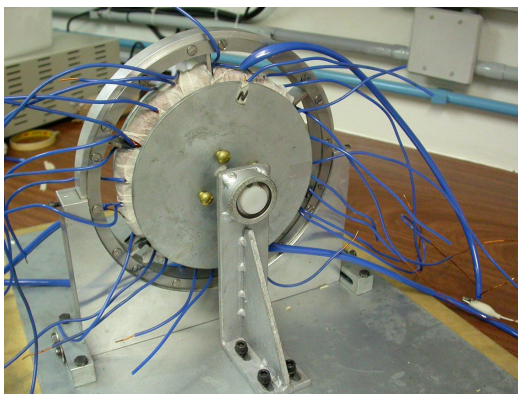


Figura 16 Vista frontal com bobinas

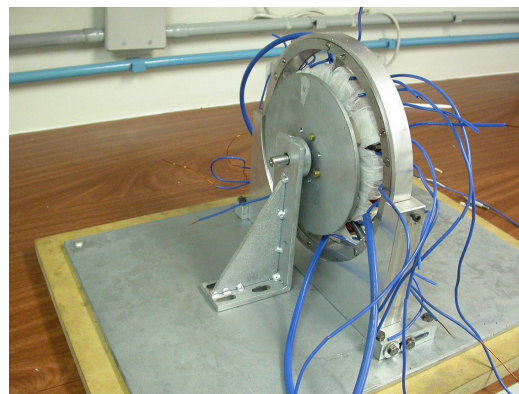


Figura 17 Perspectiva com bobinas

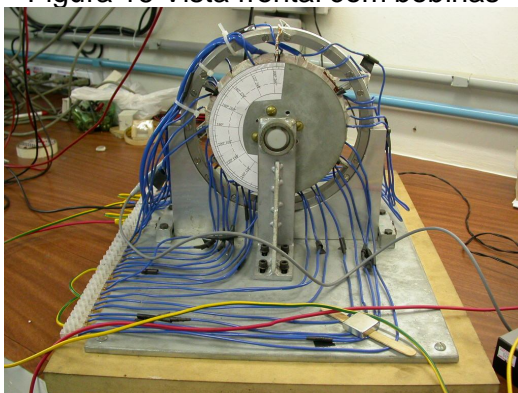


Figura 18 Vista frontal com ligações

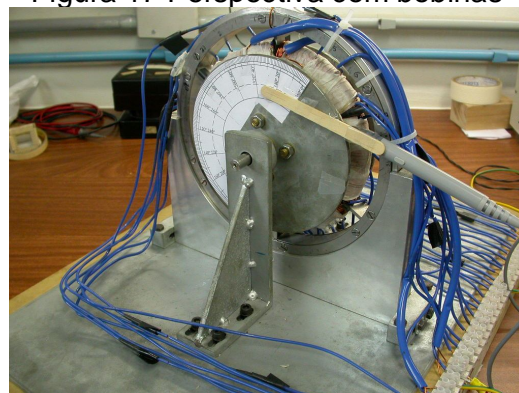


Figura 19 Perspectiva com ligações

3.3 Detalhamento do acionamento da máquina Torus

As dezoito bobinas foram distribuídas uniformemente em torno do estator, conforme se observa na figura 20.

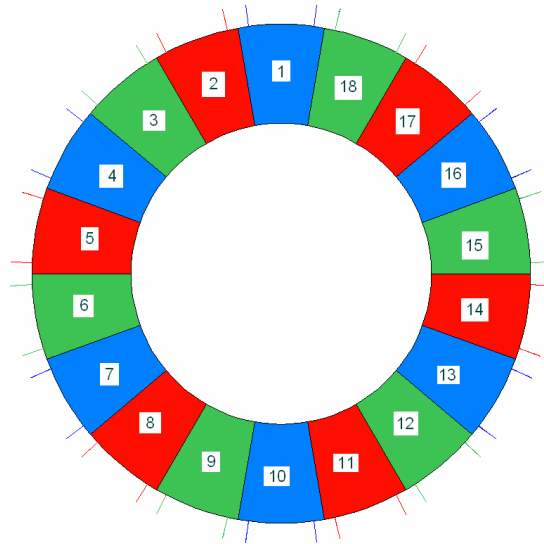


Figura 20 Distribuição das bobinas no estator

A ligação das bobinas das três fases está mostrado no diagrama da figura 21.

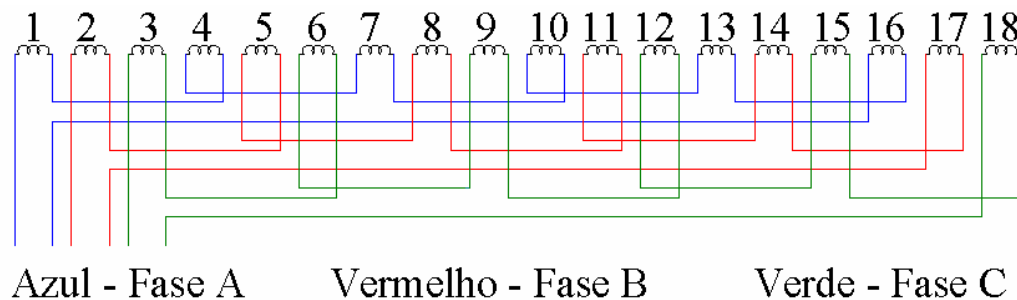


Figura 21 Diagrama de ligações das bobinas

Em cada ciclo de acionamento são energizadas duas fases, sendo em seguida desenergizada a primeira fase localizada na direção do movimento e energizada a fase que até então estava desenergizada.

O acionamento da máquina pode ser dividida em 3 grandes áreas: circuito de controle, circuitos de interface de potência e circuito de potência.

O circuito de controle contém o microcontrolador, que executa os ciclos de acionamento. Os circuitos de interface de potência isolam o chip de controle dos transistores de potência (MOSFET's).

O circuito de potência realiza a energização de cada fase.

A figura 22 mostra do diagrama de blocos do acionamento:

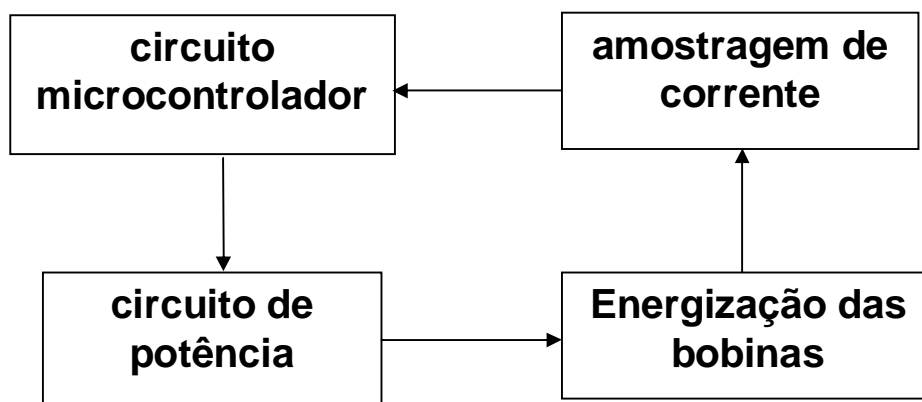


Figura 22 Diagrama de blocos do acionamento

A figura 23 a fonte utilizada para alimentação e o acionamento da máquina ainda em fase preliminar.

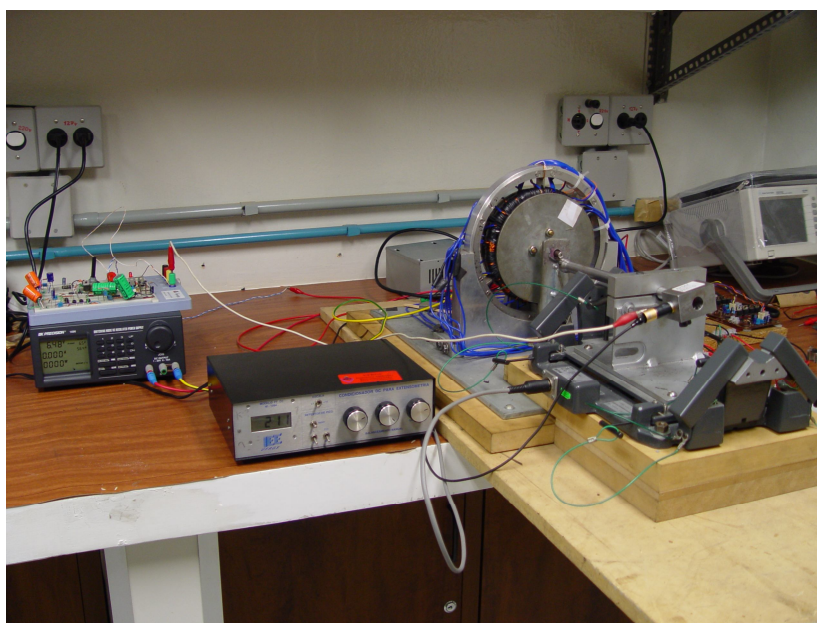


Figura 23 Fonte e acionamento em fase preliminar

As figuras 24 e 25 mostram a versão definitiva do acionamento utilizado pela máquina Torus.

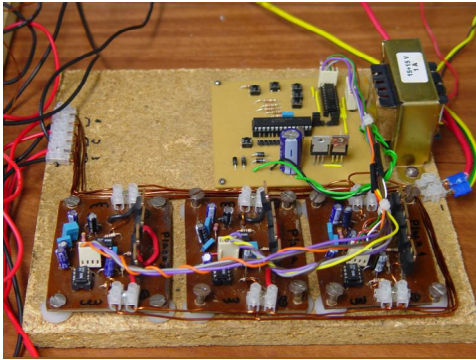


Figura 24 Perspectiva do acionamento

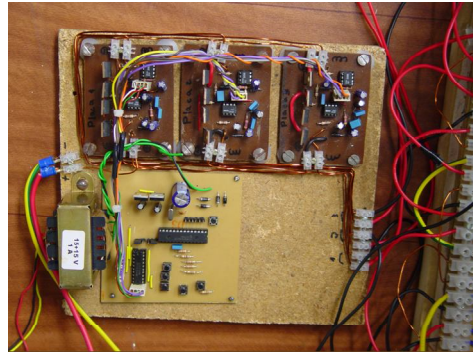


Figura 25 Vista superior do acionamento

A figura 26 mostra o diagrama de acionamento das bobinas.

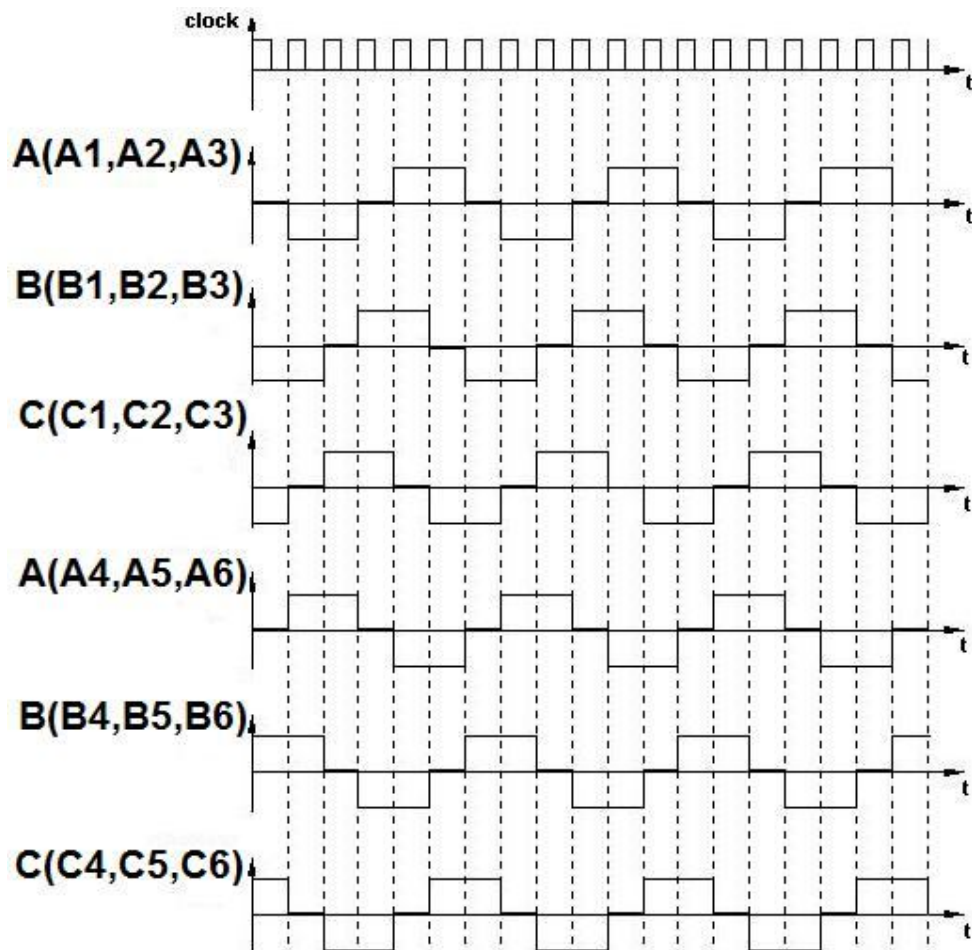


Figura 26 Diagrama de acionamento das bobinas

4 MODELO ANALÍTICO

O modelo analítico da máquina Torus foi subdividido em modelo da indução magnética produzida pelos enrolamentos e em modelo da indução produzida pelos ímãs permanentes; foi desenvolvido modelo para a força eletromotriz dos enrolamentos e um modelo para a força de Laplace para o cálculo do conjugado da máquina. Nesses modelos foram utilizadas simetrias de Lie, que constituem um conjunto de simetrias contínuas admitidas por equações diferenciais.

As simetrias admitidas por equações diferenciais são quaisquer mudanças de variáveis que mapeiam soluções exatas dessas equações em novas soluções exatas das mesmas.

Para que uma mudança de variável seja uma simetria admitida por uma equação diferencial é necessário que tal mudança de variável obedeça ao critério de invariância, descrito no Apêndice 3.

4.1 Indução Magnética produzida pelos Enrolamentos

O modelo para determinar a indução magnética produzida pelos enrolamentos será desenvolvido em coordenadas cilíndricas, devido ao formato do estator da máquina Torus.

A relação de um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) com um sistema de coordenadas retangulares (x, y, z) está mostrada na figura 27.

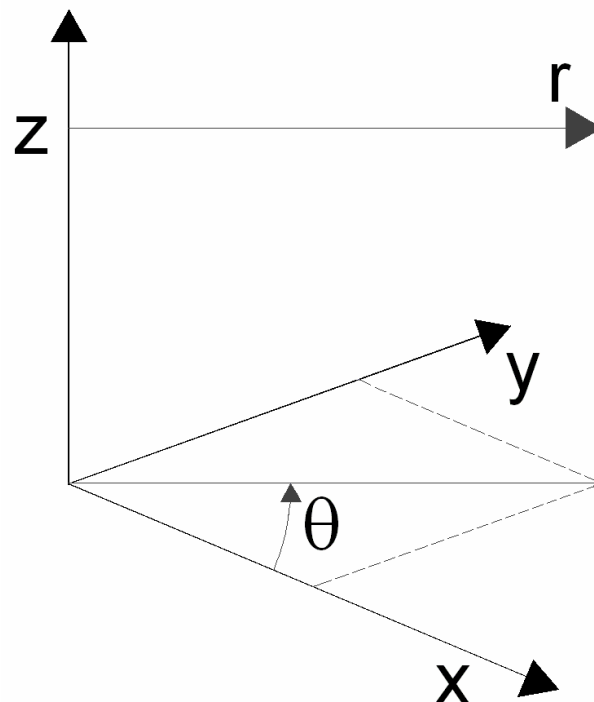


Figura 27 Representação de Sistema de Coordenadas Cilíndricas

Como na região dos enrolamentos há circulação de corrente elétrica, a determinação da indução magnética é realizada através do vetor potencial magnético [24], que é definido pela expressão:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (4.1)$$

Onde:

\vec{B} é o vetor indução magnética [T];

\vec{A} é o vetor potencial magnético [Wb/m].

Aplicando o operador rotacional à expressão acima obtém-se:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (4.2)$$

Como o material que constitui o núcleo é isotrópico, a permeabilidade não depende da direção considerada. Portanto, o lado esquerdo da expressão anterior pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\mu \vec{H}) = \mu \nabla \times \vec{H} \quad (4.3)$$

Onde:

\vec{H} é o vetor intensidade de campo magnético [A.esp/m];

μ é o tensor permeabilidade magnética [H/m]

Como as frequências de utilização de máquina são baixas (muito inferiores a 100 kHz) [26], a expressão (4.3) pode ser simplificada:

$$\mu \nabla \times \vec{H} = \mu \vec{J} \quad (4.4)$$

Onde:

\vec{J} é o vetor densidade de corrente [A/m²]

O lado direito da expressão (4.2) pode ser reescrito da forma a seguir:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (4.5)$$

Devido à arbitrariedade de potenciais [49], para determinar completamente a expressão do vetor potencial magnético, pode-se introduzir o calibre ou a condição de Coulomb. Com isto, o primeiro termo do lado direito da expressão (4.5) se torna nulo [29] [50]. A partir das equações (4.4) e (4.5) pode-se escrever:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (4.6)$$

Desenvolvendo a equação acima em coordenadas cilíndricas [38] [39], obtém-se:

$$\vec{u}_r \nabla^2 A_r + \vec{u}_\theta \nabla^2 A_\theta + \vec{u}_z \nabla^2 A_z = -\mu \vec{u}_r J_r + \vec{u}_\theta J_\theta + \vec{u}_z J_z \quad (4.7)$$

Onde

A_r, A_θ, A_z são as componentes do vetor potencial magnético em coordenadas cilíndricas;

J_r, J_θ, J_z são as componentes do vetor densidade de corrente em coordenadas cilíndricas;

$\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$, são os vetores unitários do sistema de coordenadas cilíndricas.

Através da técnica de separação de variáveis aplicada à equação (4.7) obtém-se funções de Bessel para o raio [24] [41]. Essa solução é oscilante e requer um número muito elevado de termos para convergir. Por esse motivo, foi adotada uma outra forma para resolver as equações de Laplace e Poisson em coordenadas cilíndricas.

Na máquina Torus, as bobinas se apresentam em forma de setor de toróide, cujo eixo coincide com o eixo da máquina e a distribuição de correntes é radial junto aos entreferros. Dessa forma, a distribuição do vetor potencial magnético também é radial [29].

Portanto:

$$\vec{J} = J_r \vec{u}_r \quad (4.8)$$

e,

$$\vec{A} = A_r \vec{u}_r \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (4.5) obtem-se

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = & -\frac{\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}}{r^2} \vec{u}_r + \frac{\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + r \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r} \right)}{r^2} \vec{u}_\theta + \\ & + \frac{\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + r \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r} \right)}{r^2} \vec{u}_z \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como \vec{J} apresenta somente a componente radial, pode-se escrever

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 J_r \vec{u}_r \quad (4.11)$$

Igualando as componentes da dimensão \vec{r} das equações (4.10) e (4.11), obtém-se

$$-\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} u_{\vec{r}} = \mu_0 J_r \vec{u}_r \quad (4.12)$$

As componentes θ e z da expressão (4.10) podem ser escritas conforme está mostrado a seguir

$$\frac{-\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r} \right) r}{r^2} \vec{u}_\theta = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\frac{\partial A_r}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} \right) r}{r} \vec{u}_z = 0 \quad (4.14)$$

A equação (4.14) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} = -r \frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} \quad (4.15)$$

Fazendo

$$f = \frac{\partial A_r}{\partial z} \quad (4.16)$$

e substituindo f na equação (4.15), obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{f}{r} \quad (4.17)$$

Portanto

$$\ln f = -\ln r + \ln(f_0(\theta, z)) \quad (4.18)$$

Onde

$f_0(\theta, z)$ é uma função de θ e z .

Rearranjando:

$$\ln f = \ln \left(\frac{f_0(\theta, z)}{r} \right) \quad (4.19)$$

E assim:

$$f = \frac{f_0(\theta, z)}{r} \quad (4.20)$$

Substituindo a equação (4.16):

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} = \frac{f_0(\theta, z)}{r} \quad (4.21)$$

Integrando:

$$A_r = \frac{1}{r} \int f_0(\theta, z) dz + f_1(r, \theta) \quad (4.22)$$

Onde:

$f_1(r, \theta)$ é uma função arbitrária de r e θ .

A equação (4.13) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = r \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r} \quad (4.23)$$

Fazendo

$$f_2 = \frac{\partial A_r}{\partial \theta}, \quad (4.24)$$

e substituindo em (4.23), obtém-se

$$f_2 = r \frac{\partial f_2}{\partial r} \quad (4.25)$$

Dividindo por r , a equação anterior se torna

$$\frac{f_2}{r} = \frac{\partial f_2}{\partial r} \quad (4.26)$$

Integrando:

$$\ln f_2 = \ln r + \ln (f_3(\theta, z)) = \ln (r f_3(\theta, z)) \quad (4.27)$$

Onde:

$f_3(\theta, z)$ é uma função arbitrária de z e θ .

Dessa expressão obtém-se:

$$f_2 = r f_3(\theta, z) \quad (4.28)$$

Substituindo a equação anterior na equação (4.24)

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = r f_3(\theta, z) \quad (4.29)$$

Integrando:

$$A_r = \int r f_3(\theta, z) d\theta + r f_4(r, z) \quad (4.30)$$

Substituindo a equação (4.20) na equação (4.16):

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} = \frac{f_0(\theta, z)}{r} \quad (4.31)$$

Derivando em relação a θ

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial f_0(\theta, z)}{\partial \theta} \quad (4.32)$$

Derivando a equação (4.29) em relação a z

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial z} = r \frac{\partial f_3(\theta, z)}{\partial z} \quad (4.33)$$

Igualando os lados direitos das equações (4.32) e (4.33)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f_0(\theta, z)}{\partial \theta} = r \frac{\partial f_3(\theta, z)}{\partial z} \quad (4.34)$$

Multiplicando por r a equação anterior

$$\frac{\partial f_0(\theta, z)}{\partial \theta} = r^2 \frac{\partial f_3(\theta, z)}{\partial z} \quad (4.35)$$

A equação anterior somente será verificada se as derivadas forem nulas

$$\frac{\partial f_0(z, \theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow f_0 = f_0(z) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial f_3(\theta, z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow f_3 = f_3(\theta) \quad (4.37)$$

Substituindo a equação (4.36) na equação (4.22) e integrando em z

$$A_r = \frac{1}{r} f_5(z) + f_1(r, \theta) \quad (4.38)$$

Substituindo a equação (4.37) na equação (4.30) e integrando em θ

$$A_r = r f_6(\theta) + f_4(r, z) \quad (4.39)$$

Igualando as equações (4.38) e (4.39)

$$\frac{1}{r} f_5(z) + f_1(r, \theta) = r f_6(\theta) + f_4(r, z) \quad (4.40)$$

Da equação anterior pode-se concluir

$$f_1(r, \theta) = r f_6(\theta) \quad (4.41)$$

$$f_4(r, z) = \frac{1}{r} f_5(z) \quad (4.42)$$

Substituindo a equação (4.42) na equação (4.39), obtém-se

$$A_r = \frac{1}{r} f_5(z) + r f_6(\theta) \quad (4.43)$$

Uma vez que $f_5(z)$ é uma função exclusiva de z e que $f_6(\theta)$ é uma função exclusiva de θ , a substituição da equação (4.43) na equação (4.12) produz

$$-\frac{1}{r} \frac{d^2 f_5}{dz^2} - \frac{1}{r} \frac{d^2 f_6}{d\theta^2} = \mu_0 J_r \quad (4.44)$$

Como as bobinas apresentam a forma de setores de toróide, a densidade de corrente é mínima na seção externa e máxima na seção interna de cada bobina. A expressão da densidade de corrente é:

$$J_r = \frac{Ni}{\theta_b h_b} \frac{1}{r} \quad (4.45)$$

Onde:

J_r é a densidade de corrente (A/m^2);

N é o número de espiras em cada bobina;

i é a corrente em cada espira (A);

θ_b é o ângulo que define o setor ocupado por uma bobina;

h_b é a altura da bobina (m);

r é o raio da circunferência que contém um ponto determinado (m).

Substituindo a expressão de J_r na equação (4.44), obtém-se

$$-\frac{1}{r} \frac{d^2 f_5}{dz^2} - \frac{1}{r} \frac{d^2 f_6}{d\theta^2} = \mu_0 \frac{Ni}{\theta_b h_b} \frac{1}{r} = \frac{k}{r} \quad (4.46)$$

Onde k é uma constante.

Multiplicando a equação (4.46) por r , obtém-se

$$-\frac{d^2 f_5}{dz^2} - \frac{d^2 f_6}{d\theta^2} = k \quad (4.47)$$

Como não há interdependência entre as derivadas da equação (4.47), pode-se escrever:

$$-\frac{d^2 f_5}{dz^2} = k + \frac{d^2 f_6}{d\theta^2} = \lambda \quad (4.48)$$

$$\frac{d^2 f_5}{dz^2} = -\lambda \quad (4.49)$$

Integrando a equação anterior:

$$f_5(z) = -\lambda \frac{z^2}{2} + C_0 z + C_1 \quad (4.50)$$

A partir da equação (4.48) pode-se escrever ainda

$$\frac{d^2 f_6}{d\theta^2} = \lambda - k \quad (4.51)$$

Integrando a equação (4.51)

$$f_6(\theta) = (\lambda - k) \frac{\theta^2}{2} + C_2 \theta + C_3 \quad (4.52)$$

Substituindo as equações (4.50) e (4.52) na equação (4.43), obtém-se a expressão do potencial vetor magnético na região dos enrolamentos:

$$A_r = \frac{1}{r} \left(-\lambda \frac{z^2}{2} + C_0 z + C_1 \right) + r \left((\lambda - k) \frac{\theta^2}{2} + C_2 \theta + C_3 \right) \quad (4.53)$$

4.2 Vetor Potencial Magnético na Região do Entreferro sem Enrolamentos

A região do entreferro em que não há enrolamentos conseqüentemente não apresenta corrente. Verifica-se então, que $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = 0$, pois a densidade de corrente é nula.

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = & -\frac{\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}}{r^2} \vec{u}_r + \frac{\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + r \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r} \right)}{r^2} \vec{u}_\theta + \\ & + \frac{\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + r \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r} \right)}{r^2} \vec{u}_z = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Para que $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = 0$ suas três componentes devem ser nulas.

A componente \vec{r} do potencial vetor magnético é:

$$-\frac{\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}}{r^2} \vec{u}_r = 0 \quad (4.55)$$

A componente $\vec{\theta}$ potencial vetor magnético é:

$$\frac{-\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta \partial r} \right) r}{r^2} \vec{u}_\theta = 0 \quad (4.56)$$

A componente \vec{z} potencial vetor magnético é:

$$\frac{\frac{\partial A_r}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 A_r}{\partial z \partial r} \right) r}{r} \vec{u}_z = 0 \quad (4.57)$$

Por similaridade com a equação (4.13) da região dos enrolamentos, a solução da equação (4.56) pode ser expressa como:

$$A_{\text{ref}} = \frac{1}{r} g_5(z) + r g_6(\theta) \quad (4.58)$$

Onde:

A_{ref} é a componente radial do potencial vetor magnético no entreferro.

Multiplicando a equação (4.55) por r^2 , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 A_{\text{ref}}}{\partial \theta^2} + r^2 \frac{\partial^2 A_{\text{ref}}}{\partial z^2} = 0 \quad (4.59)$$

Como as funções $g_5(z)$ e $g_6(\theta)$ não apresentam interdependência, a substituição da equação (4.58) na equação (4.59) produz:

$$r \frac{d^2 g_5}{dz^2} + r \frac{d^2 g_6}{d\theta^2} = 0 \quad (4.60)$$

Dividindo por r , obtém-se:

$$\frac{d^2 g_5}{dz^2} + \frac{d^2 g_6}{d\theta^2} = 0 \quad (4.61)$$

Como as duas parcelas da equação anterior são independentes entre si, ambas devem ser iguais a uma constante:

$$\frac{d^2 g_5}{dz^2} = - \frac{d^2 g_6}{d\theta^2} = \Gamma \quad (4.62)$$

Desmembrando a equação (4.62), pode-se escrever:

$$\frac{d^2 g_5}{dz^2} = \Gamma \quad (4.63)$$

Integrando a equação anterior, obtém-se:

$$g_5(z) = \Gamma \frac{z^2}{2} + C_4 z + C_5 \quad (4.64)$$

A partir da equação (4.62), pode-se escrever:

$$\frac{d^2 g_6}{d\theta^2} = -\Gamma \quad (4.65)$$

Integrando a equação (4.65), obtém-se:

$$g_6(\theta) = -\Gamma \frac{\theta^2}{2} + C_6 \theta + C_7 \quad (4.66)$$

A componente radial do potencial vetor magnético no entreferro é obtida substituindo as equações (4.64) e (4.66) na equação (4.58).

$$A_{\text{ref}} = \frac{1}{r} \left(\Gamma \frac{z^2}{2} + C_4 z + C_5 \right) + r \left(-\Gamma \frac{\theta^2}{2} + C_6 \theta + C_7 \right) \quad (4.67)$$

4.3 Condições de Contorno

A figura a seguir mostra a representação esquemática de um corte da máquina Torus, onde estão definidas as cotas das interfaces entre o núcleo do estator e os enrolamentos, entre os enrolamentos e o entreferro e entre o entreferro e o núcleo de um dos rotores. Os ímãs foram considerados como entreferro devido à semelhança entre os valores de permeabilidade magnética relativa dos ímãs permanentes e do ar (1 e 1,1).

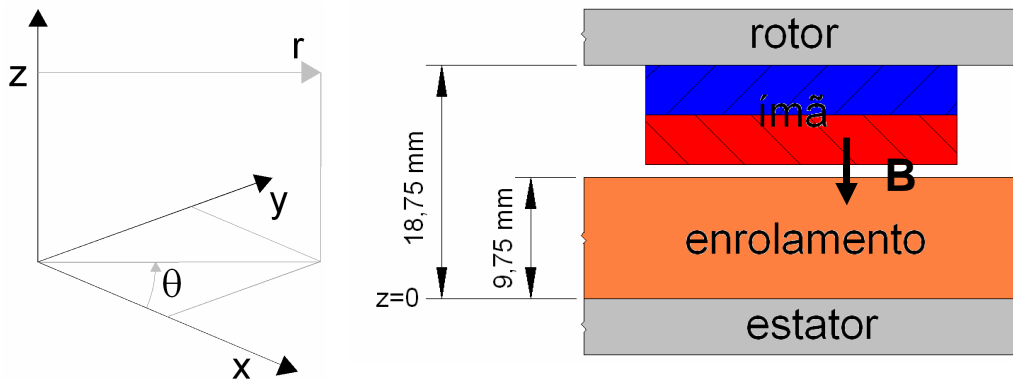


Figura 28 Representação esquemática de uma seção da máquina Torus

Na região dos enrolamentos, o vetor potencial magnético apresenta somente componente radial.

$$\vec{A} = A_r \vec{u}_r \quad (4.68)$$

A expressão da componente radial do vetor potencial magnético é definida pela equação (4.69).

$$A_r = \frac{1}{r} \left(-\lambda \frac{z^2}{2} + C_0 z + C_1 \right) + r \left((\lambda - k) \frac{\theta^2}{2} + C_2 \theta + C_3 \right) \quad (4.69)$$

O vetor indução magnética é obtido pela aplicação do operador rotacional no vetor potencial magnético:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \vec{u}_z \quad (4.70)$$

$$\vec{B}_r = \frac{1}{r} (-\lambda z + C_0) \vec{u}_\theta - \frac{1}{r} r ((\lambda - k) \theta + C_2) \vec{u}_z \quad (4.71)$$

$$\vec{B}_r = \frac{1}{r} (-\lambda z + C_0) \vec{u}_\theta - ((\lambda - k) \theta + C_2) \vec{u}_z \quad (4.72)$$

Na região do entreferro, a expressão do vetor potencial magnético é:

$$A_{\text{ref}} = \frac{1}{r} \left(\Gamma \frac{z^2}{2} + C_4 z + C_5 \right) + r \left(-\Gamma \frac{\theta^2}{2} + C_6 \theta + C_7 \right) \quad (4.73)$$

O vetor indução magnética na região do entreferro é obtido pela aplicação do operador rotacional na expressão do vetor potencial magnético da mesma região:

$$\vec{B}_{\text{ef}} = \nabla \times \vec{A}_{\text{ref}} = \frac{\partial A_{\text{ref}}}{\partial z} \vec{u}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\text{ref}}}{\partial \theta} \vec{u}_z \quad (4.74)$$

$$\vec{B}_{\text{ef}} = \frac{1}{r} (\Gamma z + C_4) \vec{u}_\theta - \frac{1}{r} r (-\Gamma \theta + C_6) \vec{u}_z \quad (4.75)$$

$$\vec{B}_{\text{ef}} = \frac{1}{r} (\Gamma z + C_4) \vec{u}_\theta - (-\Gamma \theta + C_6) \vec{u}_z \quad (4.76)$$

Na máquina Torus há três interfaces que podem ser utilizadas para determinação das constantes presentes nas soluções obtidas:

- Interface núcleo do estator-enrolamentos ($z=z_0$);
- Interface enrolamentos-entreferro ($z=z_1$);
- Interface entreferro-núcleo do rotor ($z=z_2$).

Na interface núcleo do estator-enrolamentos, a componente tangencial do vetor indução magnética é nula:

$$B_{\theta} = 0 \quad (4.77)$$

A componente tangencial do vetor indução magnética é o coeficiente do vetor unitário θ na equação (4.72):

$$\frac{1}{r} (-\lambda z + C_0) \Big|_{z=z_0} = 0 \quad (4.78)$$

Na interface enrolamentos-entreferro podem ser estabelecidas três condições de contorno, que envolvem as componentes do vetor indução magnética e o vetor potencial magnético.

A primeira condição é a igualdade das componentes tangenciais do vetor indução magnética na interface:

$$B_{\theta} = B_{\text{ef}\theta} \Big|_{z=z_1} \quad (4.79)$$

As componentes tangenciais do vetor indução magnética são os coeficientes do vetor unitário θ nas equações (4.72) e (4.76), cujas substituições em (4.79) resultam em:

$$\frac{1}{r} (-\lambda z + C_0) = \frac{1}{r} (\Gamma z + C_4) \Big|_{z=z_1} \quad (4.80)$$

A segunda condição é a igualdade das componentes normais do vetor indução magnética na interface:

$$B_z = B_{\text{ef}z} \Big|_{z=z_1} \quad (4.81)$$

As componentes normais do vetor indução magnética são os coeficientes do vetor unitário \bar{z} nas equações (4.72) e (4.76), cujas substituições em (4.81) resultam em:

$$((k-\lambda)\theta - C_2) = (\Gamma\theta - C_6) \quad (4.82)$$

A terceira condição é a continuidade do vetor potencial magnético, permitindo que seja escrita a igualdade:

$$A_r = A_{\text{ref}} \Big|_{Z=Z_1} \quad (4.83)$$

A substituição das equações (4.69) e (4.73) na equação (4.83) resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left(-\lambda \frac{z^2}{2} + C_0 z + C_1 \right) + r \left((\lambda - k) \frac{\theta^2}{2} + C_2 \theta + C_3 \right) = \\ & = \frac{1}{r} \left(\Gamma \frac{z^2}{2} + C_4 z + C_5 \right) + r \left(-\Gamma \frac{\theta^2}{2} + C_6 \theta + C_7 \right) \Big|_{Z=Z_1} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Na interface entreferro-núcleo do rotor, a componente tangencial do vetor indução magnética é nula:

$$B_{\text{ef}\theta} = 0 \quad (4.85)$$

A componente tangencial do vetor indução magnética é o coeficiente do vetor unitário $\tilde{\theta}$ na equação (4.76):

$$\frac{1}{r} \left(\Gamma z + C_4 \right) \Big|_{Z=Z_2} = 0 \quad (4.86)$$

4.4 Determinação das Constantes

O objetivo de desenvolver o modelo analítico é a obtenção de uma expressão que descreva a indução magnética no entreferro da máquina. Para isto é necessário determinar os valores das constantes das equações (4.72) e (4.76).

O valor de k definido em (4.46) é obtido pela substituição de valores na expressão:

$$k = \mu_0 \frac{Ni}{\theta_b h_m} \quad (4.87)$$

Onde:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m};$$

N é o número de espiras = 78;

h_b é a espessura das bobinas = 0,00975 m;

θ_b é o ângulo formado pelos lados radiais das bobinas = $20^\circ = 0,349$ rad;
 i – corrente de cada bobina = 2,5 A.

$$k = 0,072 \frac{HA}{\text{rad m}^2} \quad (4.88)$$

As equações obtidas possibilitam estabelecer seis relações entre as dez constantes. A análise das equações do vetor potencial magnético mostra que duas constantes são nulas (C_3 e C_7).

Como a comparação dos valores medidos e obtidos por simulações 3D pode ser realizada de forma imediata com vetor indução magnética na região do entreferro, as constantes que serão determinadas são aquelas que compõem as expressões (4.72) e (4.76).

Da expressão (4.78) pode-se concluir

$$C_0 = \lambda Z_0 \quad (4.89)$$

A expressão (4.80) pode ser reescrita da seguinte forma

$$-\lambda Z_1 + C_0 = \Gamma Z_1 + C_4 \quad (4.90)$$

A equação (4.82) pode ser decomposta em duas equações

$$k - \lambda = \Gamma \quad (4.91)$$

$$C_2 = C_6 \quad (4.92)$$

A equação (4.86) pode ser reescrita assumindo a forma

$$C_4 = -\Gamma Z_2 \quad (4.93)$$

Substituindo a equação (4.89) na equação (4.90)

$$\lambda Z_0 - \lambda Z_1 = \Gamma Z_1 + C_4 \quad (4.94)$$

Isolando λ

$$\lambda = \frac{\Gamma Z_1 + C_4}{Z_0 - Z_1} \quad (4.95)$$

Substituindo a equação (4.93) na equação (4.95)

$$\lambda = \Gamma \frac{Z_1 - Z_2}{Z_0 - Z_1} \quad (4.96)$$

Substituindo a equação (4.96) na equação (4.91)

$$\Gamma = k - \Gamma \frac{Z_1 - Z_2}{Z_0 - Z_1} \quad (4.97)$$

Isolando Γ

$$\Gamma = k \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 - Z_2} \quad (4.98)$$

Substituindo a equação (4.98) na equação (4.96)

$$\lambda = k \frac{Z_1 - Z_2}{Z_0 - Z_2} \quad (4.99)$$

Substituindo a equação (4.98) na equação (4.93)

$$C_4 = -k Z_2 \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0 - Z_2} \quad (4.100)$$

As condições de contorno de interface são insuficientes para determinar as constantes C_2 e C_6 da expressão analítica do vetor indução magnética. Para determiná-las a condição de contorno poderia ser obtida por medições no protótipo ou a partir das simulações. Por dificuldades de medição do valor nulo, foi introduzida uma condição de contorno obtida com uma simulação (modelo MCMQTR08). A escolha foi de um valor nulo de indução no entreferro, para tornar a expressão mais genérica do que se fosse escolhido um valor não nulo associado aos ímãs utilizados.

$$\begin{aligned} Z &= Z_2 \\ \theta &= -10^\circ = -0,1745 \text{ rad} \\ B_{efz} &= 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Substituindo na expressão (4.76), obtém-se

$$B_{efz} = -\Gamma \theta + C_6 = 0 \quad (4.102)$$

Substituindo a equação (4.98) na equação anterior

$$C_6 = k \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} \theta \quad (4.103)$$

Substituindo os valores de z_0 , z_1 , z_2 , k e θ , obtém-se os valores das constantes.

$$\Gamma = 0,03744 T \quad (4.104)$$

$$\lambda = 0,03456 T \quad (4.105)$$

$$C_2 = C_6 = -0,006533 T / m \quad (4.106)$$

$$C_4 = -0,000702 T \quad (4.107)$$

O procedimento adotado pode eventualmente resultar na obtenção de uma solução particular e a indução produzida pelos enrolamentos deve apresentar valores simétricos em relação aos eixos das bobinas. Para satisfazer a condição real foi utilizada uma simetria de Lie admitida pela equação original [42][43][44]. As simetrias de Lie são substituições de variáveis que transformam a solução exata de uma equação diferencial em outra solução exata com maior número de elementos arbitrários. A aplicação de uma simetria de translação na função incógnita acrescentou uma constante arbitrária na solução, que assume a forma:

$$\vec{B}_{ef} = \frac{1}{r} (\Gamma z + C_4) u_{\vec{\theta}} + (\Gamma \theta - C_6) u_{\vec{z}} + C_8. \quad (4.108)$$

Substituindo as constantes na equação (4.108), obtém-se a expressão da indução magnética.

$$\begin{aligned} \vec{B}_{ef} = & \frac{1}{r} (0,03744z - 0,000702) u_{\vec{\theta}} + \\ & + (0,03744\theta + 0,006533) u_{\vec{z}} - 0,006533 \end{aligned} \quad (4.109)$$

Uma representação da componente normal da indução magnética produzida pelos enrolamentos na cota da interface entre os ímãs permanentes e o entreferro está mostrada na figura 29.

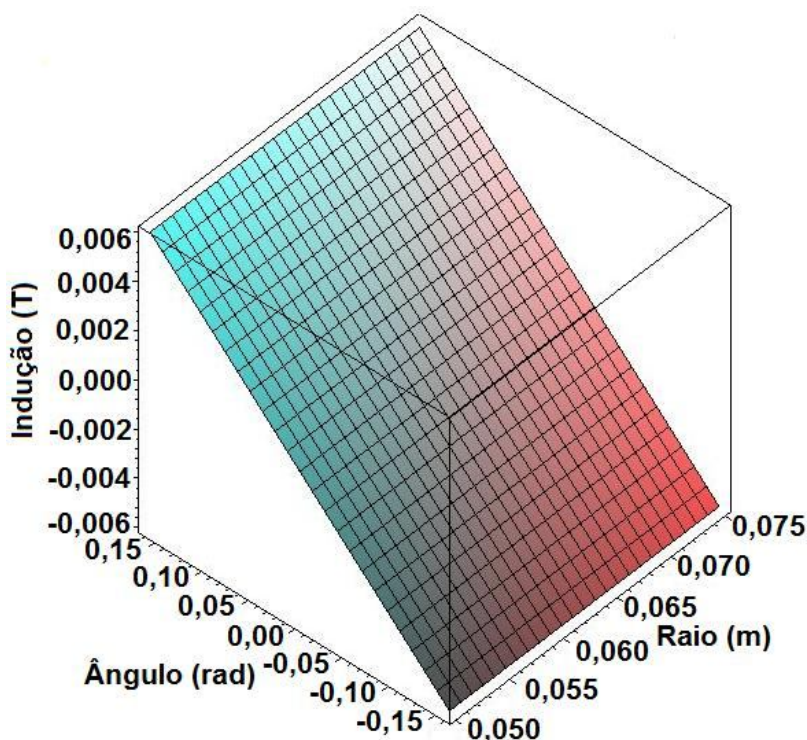


Figura 29 Componente normal (z) da indução produzida pelos enrolamentos

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação e através de método analítico.

4.5 Indução Magnética produzida pelos Ímãs Permanentes

O modelo da indução magnética dos ímãs permanentes foi desenvolvido em coordenadas retangulares e para o cálculo da força eletromotriz foi convertido em coordenadas polares.

A intensidade de campo magnético apresenta a seguinte relação com o potencial escalar magnético:

$$\vec{H} = -\nabla \Psi \quad (4.110)$$

Onde:

\vec{H} – intensidade de campo magnético [A/m];

Ψ - potencial escalar magnético [A].

A relação da indução magnética com a intensidade campo magnético está apresentada a seguir:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4.111)$$

Onde:

\vec{B} – indução magnética [T]

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ - permeabilidade magnética no vácuo [H/m]

Substituindo-se a equação (4.110) na equação (4.111), obtém-se:

$$\vec{B} = -\mu_0 \nabla \Psi \quad (4.112)$$

A origem do sistema de referência está localizada sobre o eixo geométrico da máquina e a direção axial é a direção do eixo z.

A indução magnética produzida pelos ímãs permanentes utilizados na máquina Torus apresenta valor de cerca de 0,5 T sobre a superfície dos mesmos voltada para o entreferro, isto é, na direção z.

Para representar o potencial escalar magnético foi desenvolvida uma função que resulta em uma distribuição da densidade de fluxo coerente com a verificada na máquina [21] [31] [37]. Essa função baseia-se em curvas gaussianas cujos pontos máximos são bem definidos e cujas equações genéricas são definidas pelas expressões (4.113) e (4.114).

$$f1 = \frac{1}{2} e^{\left(-\frac{x^2}{4k_1t} \right)} \quad (4.113)$$

$$f2 = \frac{1}{2} e^{\left(-\frac{y^2}{4k_1t} \right)} \quad (4.114)$$

Como exemplo de funções gaussianas, a representação gráfica de duas curvas funções da variável x está apresentada na figura 30.

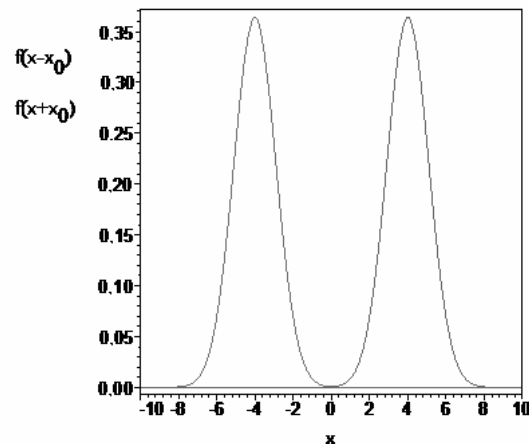


Figura 30 Representação de funções gaussianas

O operador A, apresentado na equação (4.115), é o operador laplaciano bidimensional subtraído da derivada em relação ao tempo.

$$A = k_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.115)$$

A aplicação do operador A na soma das funções f1 e f2 resulta em identidade. Como o transitório magnético da estrutura da máquina Torus é extremamente pequeno, pode-se considerar que a equação (4.115) seja o laplaciano da soma das funções f1 e f2.

Fazendo uma substituição de variáveis, a equação (4.113) se transforma na equação (4.116).

$$f_{aux01} = \frac{1}{2} \frac{e^{\left(-\frac{a}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} \quad (4.116)$$

Onde:

a é uma variável auxiliar;

τ é um parâmetro relativo à estrutura, medido em segundos.

A variável a pode ser substituída pelas variáveis x e y, incluindo seus respectivos deslocamentos $\pm x_0$, $\pm y_0$ e y_1 , multiplicadas por uma constante a1. Os deslocamentos x_0 e y_0 estão associados aos máximos locais das funções e o deslocamento y_1 ao centro do domínio no sistema de coordenadas utilizado.

Assim são geradas quatro curvas cuja composição resulta na equação (4.117), que é função das variáveis x e y.

$$f_{aux02} = a_2 \left[\frac{e^{\left(\frac{a_1(x+x_0)^2}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{e^{\left(\frac{a_1(y-y_1+y_0)^2}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{e^{\left(\frac{a_1(x-x_0)^2}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{e^{\left(\frac{a_1(y-y_1-y_0)^2}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} \right] \quad (4.117)$$

A dependência na variável z da função definida na equação (4.117) pode ser obtida pelas substituições das variáveis complexas

$$x = x + lz \quad (4.118)$$

$$y = y + lz \quad (4.119)$$

onde l é a unidade dos números complexos, ou seja $\sqrt{-1}$.

A equação (4.120) apresenta as variáveis substituídas. A função resultante continua a ser solução da equação de Laplace.

$$f_{aux02} = a_2 \left[\frac{e^{\left(\frac{a_1(x+zI+x_0)^2}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{e^{\left(\frac{a_1(y+zI-y_1+y_0)^2}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{e^{\left(\frac{a_1(x+zI-x_0)^2}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} + \frac{e^{\left(\frac{a_1(y+zI-y_1-y_0)^2}{\tau} \right)}}{\sqrt{\tau}} \right] \quad (4.120)$$

A indução magnética é uma função real. Para obtê-la é substituído o parâmetro $\tau=0,9$ s na equação (4.120). Com isto pode-se utilizar um software para extrair a parte real da equação resultante, e aplicar no resultado obtido na equação (4.112), obtendo-se a expressão da indução magnética no entreferro.

$$\begin{aligned} B = & \mu_0 a_2 (-2,342 a_1 z \left(e^{(1,111 a_1 (x^2 + 2xx_0 - z^2 + x_0^2))} \right) \cos(1,111 a_1 (2xz + 2zx_0)) + \\ & -2,342 a_1 (x + x_0) \left(e^{(1,111 a_1 (x^2 + 2xx_0 - z^2 + x_0^2))} \right) \text{sen}(1,111 a_1 (2xz + 2zx_0)) + \\ & -2,342 a_1 z \left(e^{(1,111 a_1 (y^2 - 2yy_1 + 2yy_0 - z^2 + y_1^2 - 2y_1 y_0 + y_0^2))} \right) \\ & \cos(1,111 a_1 (2yz - 2zy_1 + 2zy_0)) - 2,342 a_1 (y - y_1 + y_0) \\ & \left(e^{(1,111 a_1 (y^2 - 2yy_1 + 2yy_0 - z^2 + y_1^2 - 2y_1 y_0 + y_0^2))} \right) \text{sen}(1,111 a_1 (2yz - 2zy_1 + 2zy_0)) + \\ & -2,342 a_1 z \left(e^{(1,111 a_1 (x^2 - 2xx_0 - z^2 + x_0^2))} \right) \cos(1,111 a_1 (2xz - 2zx_0)) + \\ & -2,342 a_1 (x - x_0) \left(e^{(1,111 a_1 (x^2 - 2xx_0 - z^2 + x_0^2))} \right) \text{sen}(1,111 a_1 (2xz - 2zx_0)) + \\ & -2,342 a_1 z \left(e^{(1,111 a_1 (y^2 - 2yy_1 - 2yy_0 - z^2 + y_1^2 + 2y_1 y_0 + y_0^2))} \right) \\ & \cos(1,111 a_1 (2yz - 2zy_1 - 2zy_0)) - 2,342 a_1 (y - y_1 - y_0) \\ & \left(e^{(1,111 a_1 (y^2 - 2yy_1 - 2yy_0 - z^2 + y_1^2 + 2y_1 y_0 + y_0^2))} \right) \text{sen}(1,111 a_1 (2yz - 2zy_1 - 2zy_0)) \end{aligned} \quad (4.121)$$

Onde:

a_1 é o fator de escala das variáveis x e y ;
 a_2 é um fator de escala da variável dependente;
 X_0 é o deslocamento em x ;
 y_0 é o deslocamento em y ;
 y_1 é o segundo deslocamento em y .
 μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo = $4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

A seguir foram substituídos os valores das constantes

$a_1 = -10 \text{ m}^{-2}$;
 $a_2 = -0,05 \text{ A}$;
 $X_0 = y_0 = 0,01 \text{ m}$;
 $y_1 = 0,0625 \text{ m}$.

A função obtida com a substituição das constantes satisfaz à equação de Laplace, mas não está definida completamente. Para descrever o problema em uma cota determinada foi aplicada uma simetria de Lie, do tipo escala [42] [43][44].

A figura 31 representa a indução magnética na superfície de um ímã permanente da máquina Torus.

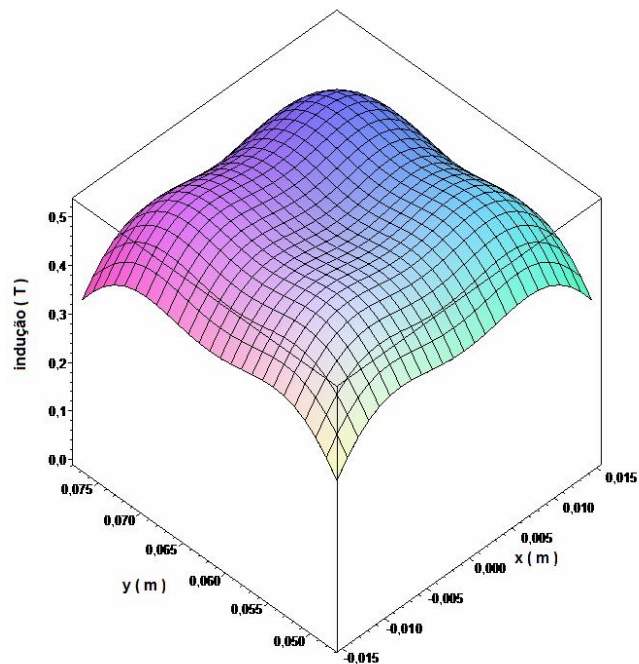


Figura 31 Indução magnética na superfície de um ímã

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

4.6 Força Eletromotriz

O cálculo da força eletromotriz induzida em um condutor é realizado através da lei de Faraday [26][32]:

$$e = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.122)$$

Onde:

S é a área variável delimitada pelo deslocamento da projeção condutor sobre o ímã [m²]

Na máquina Torus a indução é uma função suave e continuamente derivável. A direção do vetor indução é paralela à direção dos vetores normais aos planos que contêm os condutores ativos da máquina. A expressão anterior pode ser escrita da seguinte maneira:

$$e = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \quad (4.123)$$

Como a indução magnética apresenta somente a componente axial, perpendicular ao plano dos condutores, esta grandeza pode ser obtida pela derivação do potencial magnético escalar em relação a Z. Substituindo a indução magnética na equação (4.123), obtém-se

$$e = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_S \mu_0 \frac{d\psi}{dz} dS \right) \quad (4.124)$$

Como dS independe de z na equação (4.124) a ordem de integração pode ser invertida.

$$e = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{d}{dz} \left(\int_S \mu_0 \psi dS \right) \quad (4.125)$$

A equação (4.125) pode ser reescrita.

$$e = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{d}{dz} \left(\iint \mu_0 \psi dx dy \right) \quad (4.126)$$

A integração do potencial escalar magnético em relação a X e em relação a Y resulta na equação (4.127).

$$f_{aux03} = \frac{a_2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-a_1}} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{a_1(x+x_0)}{\sqrt{-a_1\tau}}\right) y + \operatorname{erf}\left(\frac{a_1(y-y_1+y_0)}{\sqrt{-a_1\tau}}\right) x + \right. \\ \left. + \operatorname{erf}\left(\frac{a_1(x-x_0)}{\sqrt{-a_1\tau}}\right) y + \operatorname{erf}\left(\frac{a_1(y-y_1-y_0)}{\sqrt{-a_1\tau}}\right) x \right) \quad (4.127)$$

Onde $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Substituindo (4.118) e (4.119) na equação (4.127), é obtida uma função com dependência em z sem alteração de forma. A função é composta por diversas funções erf com argumento complexo.

$$f_{aux04} = \frac{a_2\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-a_1}} \left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-a_1}{\tau}}(x+zl) - \frac{a_1x_0}{\sqrt{-a_1\tau}}\right)(x+zl) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\tau}}(x+zl)e^{\left(\frac{a_1(-y_1+y_0)^2}{\tau} - \frac{a_1(-2y_1+2y_0)^2}{4\tau}\right)} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-a_1}{\tau}}(y+zl) - \frac{a_1(-2y_1+2y_0)}{2\sqrt{-a_1\tau}}\right) + \right. \\ \left. \frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-a_1}{\tau}}(x+zl) + \frac{a_1x_0}{\sqrt{-a_1\tau}}\right)(y+zl)}{\sqrt{\tau}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\tau}}(x+zl)e^{\left(\frac{a_1(-y_1-y_0)^2}{\tau} - \frac{a_1(-2y_1-2y_0)^2}{4\tau}\right)} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-a_1}{\tau}}(y+zl) - \frac{a_1(-2y_1-2y_0)}{2\sqrt{-a_1\tau}}\right) \right) \quad (4.128)$$

O software utilizado no desenvolvimento não extrai a parte real da função obtida. Em função desta limitação, foram substituídos os valores das constantes e as funções erf foram substituídas por seus respectivos desenvolvimentos em séries e então extraída a parte real. Assim foi obtida a função

$$f_{aux05} = -\frac{45\sqrt{2600}\pi}{52} \left((-\operatorname{erf}(53,7484x + 0,5375) + \right. \\ \left. -3259,7620e^{-(53,7484x + 0,5375)^2}(53,7484x + 0,5374)z^2)y + \right. \\ \left. + e^{-(53,7484x + 0,5374)^2}z^2(60,6486 + 20,2162(1219,7531 - 0,1669 \cdot 10^8x^2 + \right. \\ \left. -33827,1605x)z^2) - x(\operatorname{erf}(53,7484y - 2,8218) - 3259,7620e^{-(53,7484y - 2,8218)^2} \right. \\ \left. (53,7484x + 2,8218z^2) + z^2e^{-(53,7484y - 2,8218)^2}(60,6486 + 20,2162 + \right. \\ \left. + (-43116,6667 - 0,1669108y^2 + 0,1753 \cdot 10^7y)z^2) - y\operatorname{erf}(53,7484x - 0,5375) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& -3259,7620e^{-(53,7484x-0,5375)^2}(53,7484x-0,5375)z^2y+z^2e^{-(53,7484x+0,5375)^2} \\
& (-60,6486-20,2162(1219,7531-0,166910^8x^2+333827,16x)z^2)+ \\
& -x\operatorname{erf}(53,7484y-3,8968)-3259,7620e^{-(53,7484x-3,8968)^2}(53,7484y-3,8968)z^2x+ \\
& z^2e^{-(53,7484x-3,8968)^2}(60,6486+20,2062(-84845,0618-0,166910^8y^2+0,242010^7y)z^2)
\end{aligned} \tag{4.129}$$

Derivando a equação (4.129) em relação a z obtem-se

$$\begin{aligned}
f_{\text{aux}06} &= \frac{45}{52} e^{-2888,88} \sqrt{2600} \left(-0,3105 x e^{(x+0,01)^2} \right. \\
& \left. (x+0,01) y + 0,0001 x e^{(x+0,01)^2} + 0,5751 \times 10^{-13} \right. \\
& \left. e^{(x+0,01)^2} (0,38-5200x^2-104x) + 0,0001 \right. \\
& \left. e^{(y-0,0525)^2} + 0,5751 \times 10^{-13} e^{(y-0,0525)^2} \right. \\
& \left. (-13,4325-5200y^2+546y) - 0,3105 e^{(y-0,01)^2} x \right. \\
& \left. (y-0,0525) - \frac{0,3105}{\sqrt{\pi}} e^{-2888,88(x+0,01)^2} (x+0,01) y + \frac{0,0001}{\sqrt{\pi}} \right. \\
& \left. e^{-2888,88(x+0,01)^2} + \frac{0,5751 \times 10^{-13}}{\sqrt{\pi}} e^{-2888,88(x+0,01)^2} \right. \\
& \left. (0,38-5200x^2-104x) + \frac{0,0001}{\sqrt{\pi}} e^{-2888,88(y-0,01)^2} + \right. \\
& \left. 0,5751 \times 10^{-13} e^{(y-0,0525)^2} (-26,4325-5200y^2+754y) + \right. \\
& \left. -0,3105 e^{(y+0,0725)^2} (y-0,0525)^2 \right) \tag{4.130}
\end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.130), $x = r \cos(\omega t)$ e $y = r \sin(\omega t)$, onde r é o raio, ω é a frequência angular e t é o tempo, aplicando os limites r_1 e r_2 para o raio r na equação resultante, multiplicando pela permeabilidade magnética do vácuo e derivando em relação ao tempo, obtém-se a expressão da força eletromotriz.

$$\begin{aligned}
e &= -\mu_0 \frac{45}{52} \sqrt{2600} e^{-2888,88} \left((-1794,27(r_1 \cos(\omega t) + 0,01))^2 \right. \\
& r_1^2 \sin(\omega t)^2 \omega e^{(r_1 \cos(\omega t) + 0,01)^2} + 0,3105 e^{(r_1 \cos(\omega t) + 0,01)^2} \\
& r_1^2 \sin(\omega t)^2 \omega - 0,3105 e^{(r_1 \cos(\omega t) + 0,01)^2} (r_1 \cos(\omega t) + 0,01) \\
& r_1 \cos(\omega t) \omega + 0,6211(r_1 \cos(\omega t) + 0,01) r_1 \sin(\omega t) \omega \\
& e^{(r_1 \cos(\omega t) + 0,01)^2} + 0,3323 \times 10^{-9} (r_1 \cos(\omega t) + 0,01) r_1 \sin(\omega t) \omega \\
& e^{(r_1 \cos(\omega t) + 0,01)^2} (0,38 - 5200 r_1^2 \cos(\omega t)^2 - 104 r_1 \cos(\omega t)) + \\
& + 0,5751 \times 10^{-13} e^{(r_1 \cos(\omega t) + 0,01)^2} (10400 r_1^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega + \\
& + 104 r_1 \sin(\omega t) \omega) - 0,6211(r_1 \sin(\omega t) - 0,0525) r_1 \cos(\omega t) \\
& \omega e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} - 0,3323 \times 10^{-9} (r_1 \sin(\omega t) + 0,0525) r_1 \\
& \cos(\omega t) \omega e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} (-13,43 - 5200 r_1^2 \sin(\omega t)^2 + \\
& + 546 r_1 \sin(\omega t)) + 0,5751 \times 10^{-13} e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} (-10400 r_1^2 \\
& \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega + 546 r_1 \cos(\omega t) \omega) + 0,3105 r_1 \sin(\omega t) \omega \\
& e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} (r_1 \sin(\omega t) - 0,0525) + 1794,27 r_1^2 \cos(\omega t)^2 \\
& (r_1 \sin(\omega t) - 0,0525)^2 \omega e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} - 0,3105 r_1^2 \\
& \cos(\omega t)^2 e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} \omega - 1794,27 (r_1 \cos(\omega t) - 0,01)^2 \\
& r_1^2 \sin(\omega t)^2 \omega e^{(r_1 \cos(\omega t) - 0,01)^2} + 0,3105 e^{(r_1 \cos(\omega t) - 0,01)^2} r_1^2 \\
& \sin(\omega t)^2 \omega - 0,3105 e^{(r_1 \cos(\omega t) - 0,01)^2} (r_1 \cos(\omega t) - 0,01) r_1 \cos(\omega t) \omega + \\
& + 0,6211 (r_1 \cos(\omega t) - 0,01) r_1 \sin(\omega t) \omega e^{(r_1 \cos(\omega t) - 0,01)^2} + \\
& + 0,3323 \times 10^{-9} (r_1 \cos(\omega t) - 0,01) r_1 \sin(\omega t) \omega e^{(r_1 \cos(\omega t) - 0,01)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (0,38 - 5200r_1^2 \cos(\omega t)^2 + 104r_1 \cos(\omega t)) + 0,5751 \times 10^{-13} \\
& e^{(r_1 \cos(\omega t) - 0,01)^2} (10400r_1^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega - 104r_1 \sin(\omega t) \omega) - \\
& -0,6211(r_1 \sin(\omega t) - 0,0725) r_1 \cos(\omega t) \omega e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} - \\
& -0,3323 \times 10^{-9} (r_1 \sin(\omega t) - 0,0725) r_1 \cos(\omega t) \omega e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} \\
& (-26,43 - 5200r_1^2 \sin(\omega t)^2 + 754r_1 \sin(\omega t)) + 0,5751 \times 10^{-13} \\
& e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} (-10400r_1^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega + 754r_1 \cos(\omega t) \omega) + \\
& + 0,3105r_1 \sin(\omega t) \omega e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} (r_1 \sin(\omega t) - 0,0725) + \\
& + 1794,27 r_1^2 \cos(\omega t)^2 (r_1 \sin(\omega t) - 0,0725)^2 \omega e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} - \\
& - 0,3105r_1^2 \cos(\omega t)^2 e^{(r_1 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} \omega) - (-1794,27 \\
& (r_2 \cos(\omega t) + 0,01)^2 r_2^2 \sin(\omega t)^2 \omega e^{(r_2 \cos(\omega t) + 0,01)^2} + 0,3105 \\
& e^{(r_2 \cos(\omega t) + 0,01)^2} r_2^2 \sin(\omega t)^2 \omega - 0,3105 e^{(r_2 \cos(\omega t) + 0,01)^2} \\
& (r_2 \cos(\omega t) + 0,01) r_2 \cos(\omega t) \omega + 0,6211(r_2 \cos(\omega t) + 0,01) \\
& r_2 \sin(\omega t) \omega e^{(r_2 \cos(\omega t) + 0,01)^2} + 0,3323 \times 10^{-9} (r_2 \cos(\omega t) + 0,01) \times \\
& r_2 \sin(\omega t) \omega e^{(r_2 \cos(\omega t) + 0,01)^2} (0,38 - 5200r_2^2 \cos(\omega t)^2 - \\
& - 104r_2 \cos(\omega t)) + 0,5751 \times 10^{-13} e^{(r_2 \cos(\omega t) + 0,01)^2} (10400r_2^2 \\
& \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega + 104r_2 \sin(\omega t) \omega) - 0,6211(r_2 \sin(\omega t) - 0,0525) \\
& r_2 \cos(\omega t) \omega e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} - 0,3323 \times 10^{-9} (r_2 \sin(\omega t) - 0,0525) \\
& r_2 \cos(\omega t) \omega e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} (-13,43 - 5200r_2^2 \sin(\omega t)^2 + 546r_2 \\
& \sin(\omega t)) + 0,5751 \times 10^{-13} e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} (-10400r_2^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega + \\
& + 546r_2 \cos(\omega t) \omega) + 0,3105 r_2 \sin(\omega t) \omega e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} (r_2 \sin(\omega t) - 0,0525) + \\
& + 1794,27 r_2^2 \cos(\omega t)^2 (r_2 \sin(\omega t) - 0,0525)^2 \omega e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0,3105 r_2^2 \cos(\omega t)^2 e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0525)^2} \omega - 1794,27 (r_2 \cos(\omega t) - 0,01)^2 \\
& r_2^2 \sin(\omega t)^2 \omega e^{(r_2 \cos(\omega t) - 0,01)^2} + 0,3105 e^{(r_2 \cos(\omega t) - 0,01)^2} r_2^2 \sin(\omega t)^2 \omega - \\
& - 0,3105 e^{(r_2 \cos(\omega t) - 0,01)^2} (r_2 \cos(\omega t) - 0,01) r_2 \cos(\omega t) \omega + \\
& + 0,6211 (r_2 \cos(\omega t) - 0,01) r_2 \sin(\omega t) \omega e^{(r_2 \cos(\omega t) - 0,01)^2} + 0,3323 \times 10^{-9} \\
& (r_2 \cos(\omega t) - 0,01) r_2 \sin(\omega t) \omega e^{(r_2 \cos(\omega t) - 0,01)^2} (0,38 - 5200 r_2^2 \cos(\omega t)^2 + \\
& + 104 r_2 \cos(\omega t)) + 0,5751 \times 10^{-13} e^{(r_2 \cos(\omega t) - 0,01)^2} (10400 r_2^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega - \\
& - 104 r_2 \sin(\omega t) \omega) - 0,6211 (r_2 \sin(\omega t) - 0,0725) r_2 \cos(\omega t) \omega \\
& e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} - 0,3323 \times 10^{-9} (r_2 \sin(\omega t) - 0,0725) r_2 \cos(\omega t) \omega \\
& e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} (-26,43 - 5200 r_2^2 \sin(\omega t)^2 + 754 r_2 \sin(\omega t)) + 0,5751 \times 10^{-13} \\
& e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} (-10400 r_2^2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \omega + 754 r_2 \cos(\omega t) \omega) + \\
& + 0,3105 r_2 \sin(\omega t) \omega e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} (r_2 \sin(\omega t) - 0,0725) + \\
& + 1794,27 r_2^2 \cos(\omega t)^2 (r_2 \sin(\omega t) - 0,0725)^2 \omega e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} - \\
& - 0,3105 r_2^2 \cos(\omega t)^2 e^{(r_2 \sin(\omega t) - 0,0725)^2} \omega) \quad (4.131)
\end{aligned}$$

Para calcular a força eletromotriz foram substituídos os valores das constantes. Após, como não estava definida a amplitude da solução foi aplicada a simetria de Lie, do tipo escala, na variável dependente. A seguir foi aplicada uma simetria de escala na variável independente [42][43][44].

A figura 32 mostra o gráfico dos valores calculados da força eletromotriz induzida em um condutor ativo.

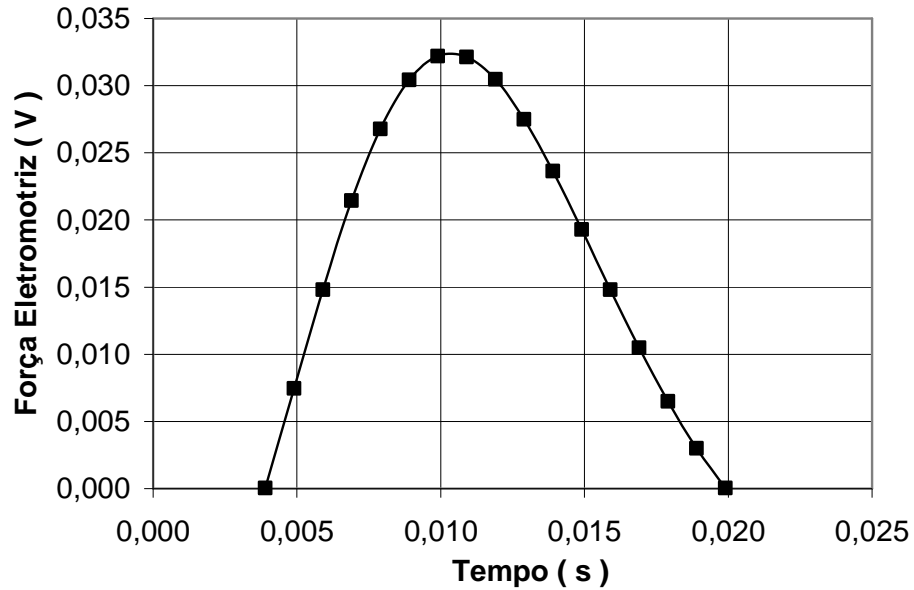


Figura 32 Valores calculados da força eletromotriz induzida em um condutor

A figura 33 mostra o gráfico dos valores calculados da força eletromotriz induzida em uma bobina, composta por 6 grupos de 13 espiras.

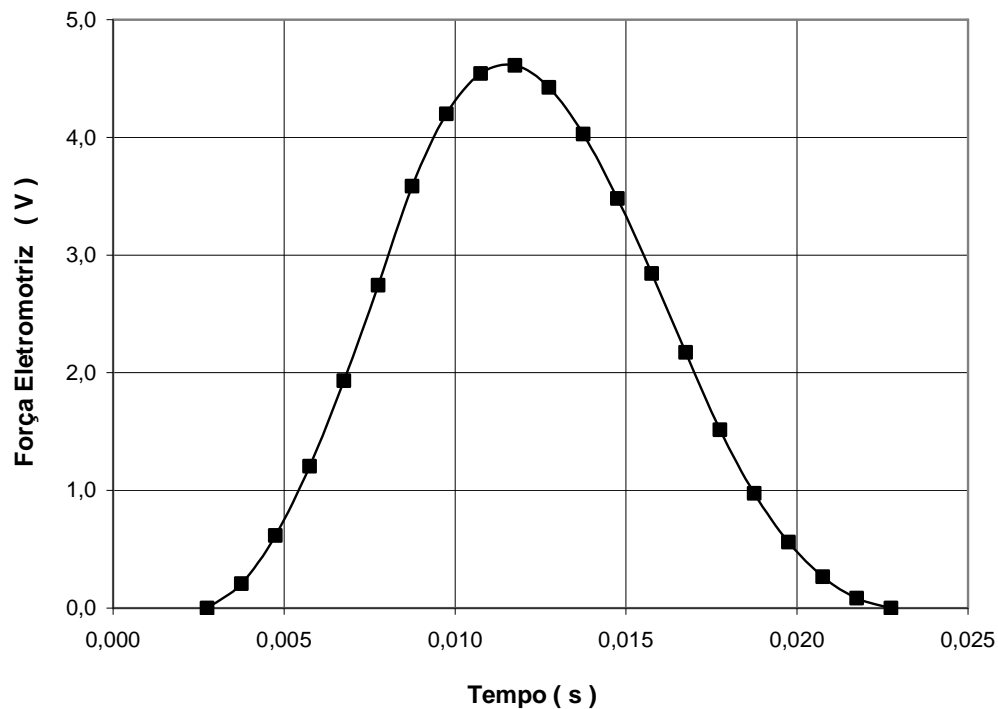


Figura 33 Valores calculados da força eletromotriz induzida em uma bobina

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

4.7 Conjugado

A força desenvolvida pela interação da indução magnética de cada ímã com a corrente das bobinas que se encontram em sua projeção no sentido do estator, pode ser calculada pela lei de Laplace:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.132)$$

Onde:

$$\begin{aligned} d\vec{F} & \text{ – diferencial de força [N]} \\ i & \text{ – corrente elétrica [A]} \\ d\vec{l} & \text{ – diferencial de comprimento} \\ \vec{B} & \text{ – indução magnética [T]} \end{aligned}$$

A expressão anterior pode ser modificada para:

$$d\vec{F} = i \frac{S_c}{S_c} d\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.133)$$

Onde:

$$S_c \text{ – seção do condutor [m}^2 \text{]}$$

A expressão (4.133) pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$d\vec{F} = \frac{i}{S_c} s_c d\vec{l} \times \vec{B} \quad (4.134)$$

O termo que multiplica vetorialmente a indução magnética pode ser alterado para [30] [31] :

$$\frac{i}{S_c} s_c d\vec{l} = \vec{J} dV \quad (4.135)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \vec{J} & \text{ – densidade de corrente [A/m}^2 \text{]} \\ dV & \text{ – diferencial de volume} \end{aligned}$$

Substituindo a expressão (4.135) na expressão (4.134), esta se torna:

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} dV \quad (4.136)$$

Como a corrente flui radialmente nos condutores das bobinas, a densidade de corrente pode ser expressa como:

$$J = \frac{Ni}{\theta_b h_b} \frac{1}{r} \quad (4.137)$$

Onde:

J - densidade de corrente (A/m^2)

N - número de espiras em cada bobina

i - corrente em cada espira (A)

θ_b - ângulo que define o setor ocupado por uma bobina

h_b - espessura da bobina (m)

r - raio da circunferência que contém um ponto determinado (m)

Os valores dos parâmetros que definem o vetor densidade de corrente na máquina Torus são:

$$N = 78;$$

$$i = 2,5 \text{ A};$$

$$\theta_b = 0,35 \text{ rad};$$

$$h_b = 0,00975 \text{ m}.$$

Substituindo os parâmetros na expressão do módulo do vetor densidade de corrente, obtém-se:

$$J = \frac{57100}{r} \quad (4.138)$$

A substituição da equação (4.138) na equação (4.136) resulta:

$$d\vec{F} = \frac{57100}{r} u_{\vec{r}} \times \vec{B} dV \quad (4.139)$$

Onde:

$u_{\vec{r}}$ - vetor unitário na direção radial

Como os vetores densidade de corrente e indução magnética apresentam somente uma componente, o produto vetorial se torna um produto simples:

$$dF = \frac{57100}{r} B dV \quad (4.140)$$

A diferencial de conjugado pode ser obtido pela multiplicação da equação (4.140) pelo raio r .

$$dC = r \frac{57100}{r} B dV = 57100 B dV \quad (4.141)$$

O conjugado devido a um dos ímãs será obtido pela integração da equação (4.141) no domínio, na seqüência deste trabalho.

$$C = 57100 \int \int \int B dx dy dz \quad (4.142)$$

A equação (4.142) pode ser reescrita em função do potencial magnético escalar.

$$C = 57100 \int \int \int \mu_0 \frac{d\Psi}{dz} dx dy dz \quad (4.143)$$

Como os operadores são comutativos, a equação (4.143) se torna:

$$C = 57100 \int \int \mu_0 \Psi dx dy \quad (4.144)$$

Substituindo a equação (4.129) obtém-se

$$\begin{aligned} C = & -2,519 \cdot 10^6 \sqrt{\pi} \left((-\operatorname{erf}(53,7484x + 0,5375) + \right. \\ & -3259,7620 e^{-(53,7484x + 0,5375)^2} (53,7484x + 0,5374) z^2) y + \\ & + e^{-(53,7484x + 0,5374)^2} z^2 (60,6486 + 20,2162(1219,7531 - 0,1669 \cdot 10^8 x^2 + \\ & -33827,1605x) z^2) + x (\operatorname{erf}(53,7484y - 2,8218) - 3259,7620 e^{-(53,7484y - 2,8218)^2} \\ & (53,7484x + 2,8218z^2) + z^2 e^{-(53,7484y - 2,8218)^2} (60,6486 + 20,2162 + \\ & + (-43116,6667 - 0,1669108y^2 + 0,1753 \cdot 10^7 y) z^2) - y \operatorname{erf}(53,7484x - 0,5375) + \\ & -3259,7620 e^{-(53,7484x - 0,5375)^2} (53,7484x - 0,5375) z^2 y + z^2 e^{-(53,7484x + 0,5375)^2} \\ & (-60,6486 - 20,2162(1219,7531 - 0,1669 \cdot 10^8 x^2 + 333827,16x) z^2) + \\ & -x \operatorname{erf}(53,7484y - 3,8968) - 3259,7620 e^{-(53,7484x - 3,8968)^2} (53,7484y - 3,8968) z^2 x + \\ & \left. z^2 e^{-(53,7484x - 3,8968)^2} (60,6486 + 20,2062(-84845,0618 - 0,1669 \cdot 10^8 y^2 + 0,242010^7 y) z^2) \right) \end{aligned} \quad (4.145)$$

Substituindo as equações (4.118) e (4.119) na equação (4.145), a expressão do conjugado se transforma

$$\begin{aligned} C = & 44,1261 \sqrt{\pi} \left(-\operatorname{erf}(53,7484r \cos(\theta) + 0,5375) - 3259,7620 e^{-(53,7484r \cos(\theta) + 0,5375)^2} \right. \\ & (53,7484r \cos(\theta) + 0,5375) z^2) r \operatorname{sen}(\theta) + (e^{-(53,7484r \cos(\theta) + 0,5375)^2} (60,6486z + 20,2162 \\ & (1219,7531 - 0,1669 \cdot 10^8 r^2 \cos^2(\theta) - 3,3383 \cdot 10^5 r \cos(\theta)) z^3) z + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -r\cos(\theta)(\operatorname{erf}(53,7484r\operatorname{sen}(\theta) - 2,8218) + 3259,7620e^{-(53,7484r\operatorname{sen}(\theta) - 2,8218)^2} \\
& (53,7484r\operatorname{sen}(\theta) - 2,8218)z^2) + z(60,6486e^{-(53,7484r\operatorname{sen}(\theta) - 2,8218)^2}z + 20,2162 \\
& e^{-(53,7484r\operatorname{sen}(\theta) - 2,8218)^2}(-4,3117 \cdot 10^4 - 0,1669 \cdot 10^8 r^2 \operatorname{sen}(\theta)^2 + 0,1753 \cdot 10^7 r \operatorname{sen}(\theta))z^3) + \\
& (-\operatorname{erf}(53,7484r\cos(\theta) - 0,5375) - 3259,7620e^{-(53,7484r\cos(\theta) - 0,5375)^2}(53,7484r\cos(\theta) + \\
& -0,5375)z^2) r \operatorname{sen}(\theta) - (e^{-(53,7484r\cos(\theta) - 0,5375)^2}(-60,6486z - 20,2162(1219,7531 + \\
& -0,1669 \cdot 10^8 r^2 \cos(\theta)^2 + 3,3383 \cdot 10^5 r \cos(\theta))z^3)z - r \cos(\theta) \\
& (\operatorname{erf}(53,7484r\operatorname{sen}(\theta) - 3,8968) + 3259,7620e^{-(53,7484r\operatorname{sen}(\theta) - 3,8968)^2}(53,7484r\operatorname{sen}(\theta) + \\
& -3,8968)z^2) + z^2 e^{-(53,7484r\operatorname{sen}(\theta) - 3,8968)^2}(60,6486 + 20,2162(-8,4845 \cdot 10^4 + \\
& -0,1669 \cdot 10^8 r^2 \operatorname{sen}(\theta)^2 + 0,2420 \cdot 10^7 r \operatorname{sen}(\theta))z^2)) \quad (4.146)
\end{aligned}$$

Para calcular conjugado foram substituídos os limites do domínio. A seguir para determinar a amplitude do conjugado foi aplicada uma simetria de Lie tipo escala na variável dependente. A seguir foi aplicada uma simetria de escala na variável independente [42][43][44].

A figura 34 mostra o gráfico dos valores calculados de conjugado para o conjunto de 12 ímãs permanentes da máquina. A posição 0° corresponde à posição de equilíbrio da máquina com a linha de centro dos ímãs sobre o plano que divide duas bobinas energizadas.

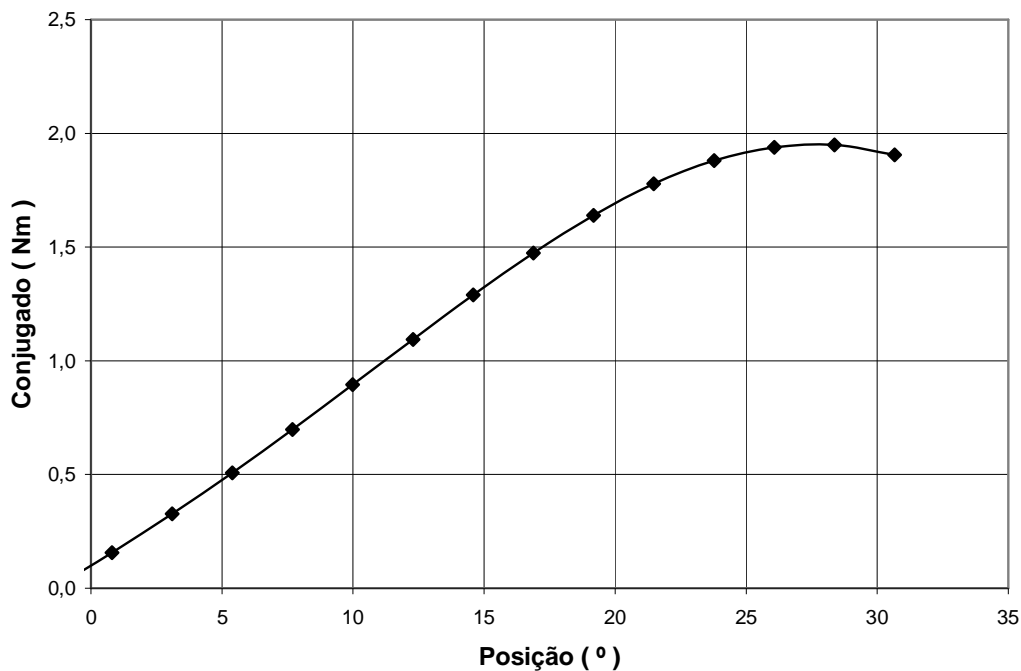


Figura 34 Conjugado calculado

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

Dividindo o conjugado máximo pelo volume da máquina, obtem-se a densidade de conjugado máximo.

$$d_{\text{conjmáx}} = \frac{C_{\text{máx}}}{V_{\text{máq}}} = \frac{C_{\text{máx}}}{\pi R_1^2 l_{\text{axial}}} = 1825 \text{ N/m}^3 \quad (4.147)$$

onde $C_{\text{máx}}$ é conjugado máximo produzido pela máquina;

R_1 é o raio externo da máquina;

l_{axial} é o comprimento axial da máquina.

5 MODELO NUMÉRICO

5.1 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos se destina à obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais em domínios definidos. Normalmente este método é utilizado para obter soluções de sistemas físicos cujos comportamentos são descritos por equações diferenciais como estabilidade de estruturas, transmissão de calor, escoamento de fluidos, campos eletromagnéticos, etc.

Nesse método o domínio contínuo é discretizado em subdomínios, denominados elementos, cujo comportamento é modelado através de um número limitado de graus de liberdade.

A premissa do método é admitir que o comportamento do sistema possa ser aproximado por uma função com n parâmetros determinados através de n equações que descrevam o sistema. Tais equações podem ser obtidas através da soma dos termos introduzidos por todos subdomínios cujo conjunto constitui o domínio considerado [45].

O método dos elementos finitos deriva de uma formulação variacional denominada método dos resíduos ponderados.

A partir da malha formada pelos subdomínios, é obtido um sistema de equações, o qual resolvido, fornece as soluções locais válidas para cada domínio [29][33][34][35][46][47].

A análise de um problema de contorno por elementos finitos envolve as seguintes etapas [48]:

- Discretização do domínio;
- Construção da malha
- Numeração dos nós
- Definição das propriedades

Obtenção das equações para cada elemento

- Formulação variacional ou de resíduos ponderados da equação diferencial que descreve o fenômeno em cada elemento;

- Expressão da variável dependente na forma

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i \quad (5.1)$$

onde u_i são os coeficientes a determinar;
 ψ_i são as funções a arbitrar.

Obtenção das equações que definem os coeficientes u_i de cada elemento

$$\mathbf{u}^{(e)} = [\mathbf{K}_i^{(e)}] (\mathbf{u}_i^{(e)}) = (\mathbf{F}_i) \quad (5.2)$$

Cálculo dos elementos das matrizes através do sistema de equações obtido.

Montagem das equações dos elementos para obtenção de equações para o problema completo

Identificação das condições de continuidade na função e na derivada de primeira ordem

Solução das equações resultando na obtenção dos coeficientes $\mathbf{U}_i^{(e)}$

Cálculo dos coeficientes da matriz K

Imposição das condições de contorno

Solução das equações

A figura 35 mostra um fluxograma para aplicação do método:

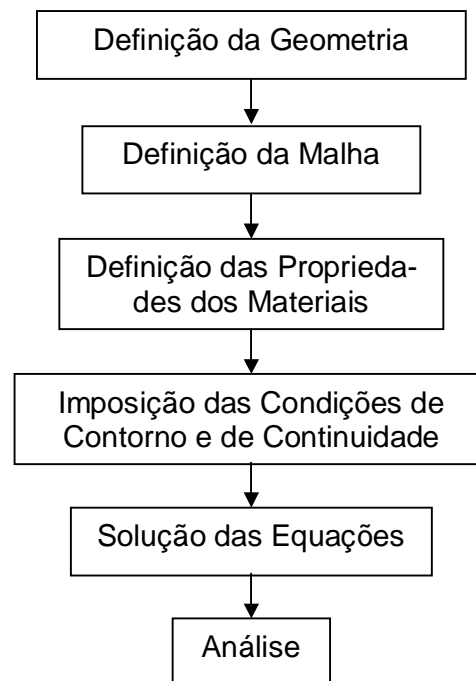


Figura 35 Aplicação do método de elementos finitos [29][35]

5.2 Implementação de modelos de elementos finitos da máquina Torus

Para simular a máquina Torus foi utilizado um software chamado Mega, que utiliza o método elementos finitos.

Os softwares comerciais apresentam etapas com nomenclatura distinta da nomenclatura utilizada na seção anterior, sendo comum a divisão do processo em três etapas:

- Pré-processamento
- Processamento
- Pós-processamento

A primeira etapa compreende a construção de um modelo geométrico que represente o objeto que deva ser estudado, com um nível de detalhamento adequado através de uma ferramenta de auxílio a projeto, estabelecimento de condições de contorno, especificação de características de materiais e de valores de excitação.

A segunda etapa compreende a montagem e a solução do sistema de equações que descreve o comportamento do domínio de interesse.

A terceira etapa consiste na apresentação dos resultados (indução, tensões, correntes) obtidos de uma forma configurável conforme as necessidades.

O software Mega apresenta dois componentes: o Megaview para realizar o pré e o pós-processamento, e o Megasolve para realizar o processamento.

O modelo tridimensional é construído por extrusão de um modelo bidimensional, chamado plano base. Qualquer corte perpendicular à direção de extrusão do modelo tridimensional apresenta disposição idêntica à disposição de elementos do plano base. Aos elementos tridimensionais podem ser associadas propriedades, sendo formadas regiões distintas, por exemplo: núcleos, entreferros, etc. Devem ser especificadas as condições de contorno, as características de bobinas e de eventuais elementos a elas conectados, como elementos passivos e fontes [36].

5.3 Simulação da Máquina Torus por Elementos Finitos

Para a simulação da máquina Torus foram construídos diversos modelos completos e modelos com aplicação de simetrias da máquina. Em função da limitação do número de elementos por modelo, os modelos setoriais permitiram a validação dos modelos completos.

A figura 36 mostra uma perspectiva completa do modelo da máquina Torus gerada no software Mega. A figura 37 mostra a perspectiva da máquina com a retirada dos discos do rotor.

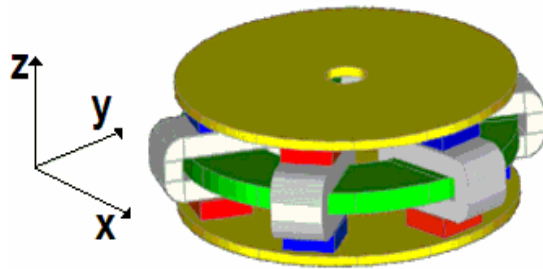


Figura 36 Perspectiva da máquina completa

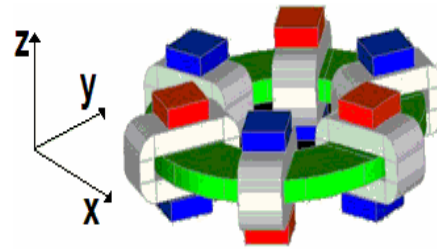


Figura 37 Perspectiva da máquina com remoção dos rotores

As figuras 38 e 39 mostram resultados de simulação com indicação colorida dos valores de indução magnética. O software permite a determinação de valores em cada vértice(nó) do modelo.

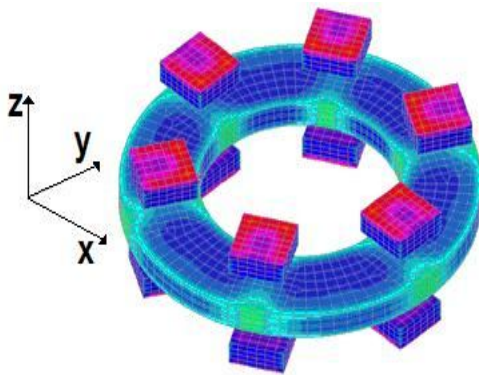


Figura 38 Indicação colorida dos valores de indução do estator

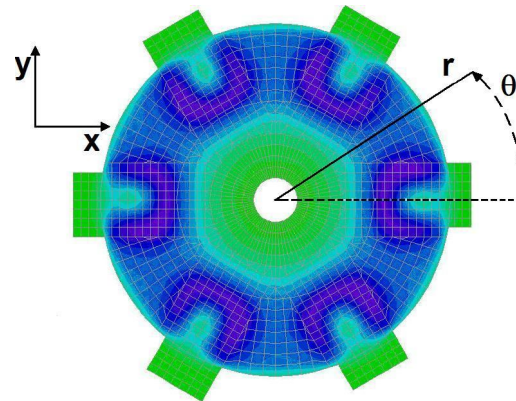


Figura 39 Indicação colorida dos valores de indução de um rotor

5.3.1 Indução magnética produzida pelos ímãs

Para a simulação da indução magnética produzida pelos ímãs foi elaborado um modelo da máquina em que as bobinas foram mantidas em circuito aberto. A partir deste modelo foram realizados levantamentos dos valores de indução magnética nas proximidades da superfície dos ímãs, como mostrado na figura 40.

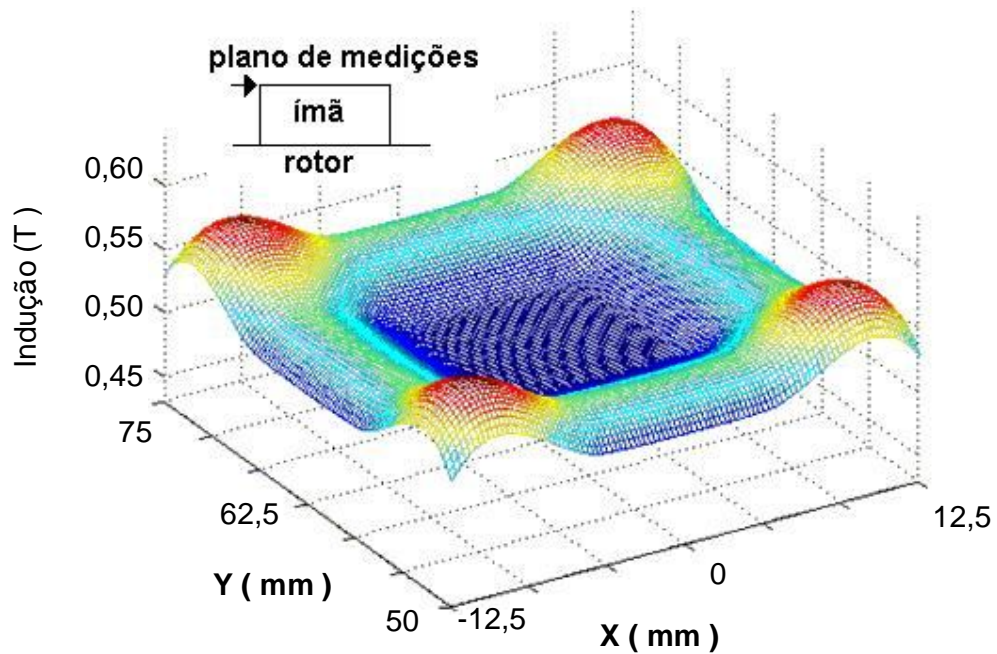


Figura 40 Valores de indução em um plano a 0,5 mm da superfície do ímã

Na figura 41 estão mostrados valores obtidos por simulação na região do entreferro em um plano a 1 mm da superfície do ímã.

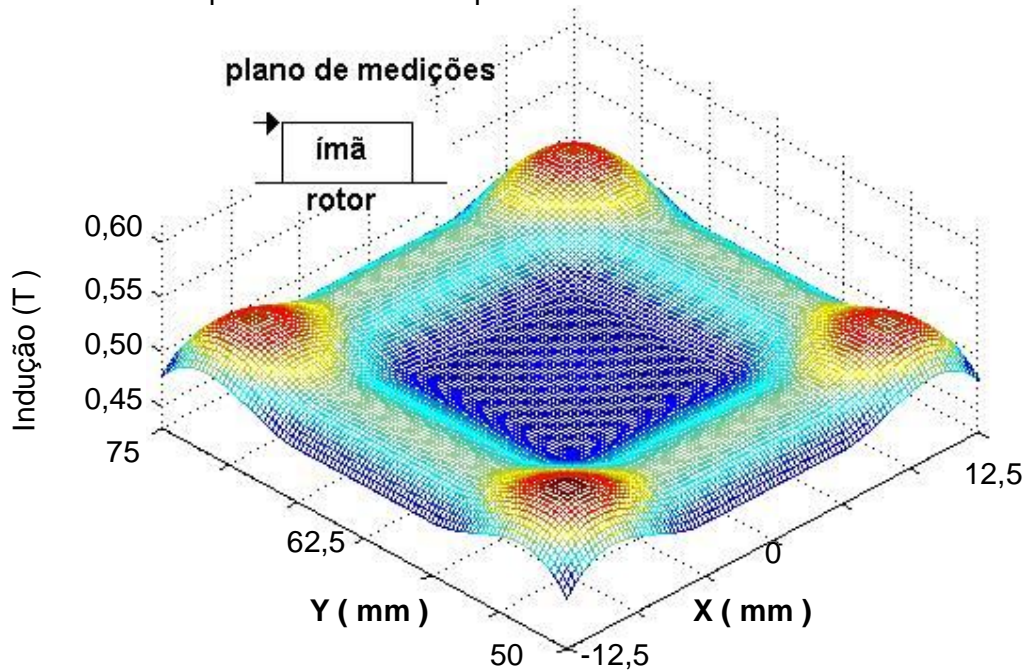


Figura 41 Valores de indução em um plano a 1 mm da superfície do ímã

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

5.3.2 Força Eletromotriz

A simulação de força eletromotriz foi realizada com a utilização de um modelo composto por dois submodelos, um que representa o estator e o outro que representa um rotor. Foi considerado um plano de simetria perpendicular ao eixo geométrico da máquina que divide o estator em duas metades.

A figura 42 mostra a força eletromotriz induzida obtida por simulação, em um condutor ativo, estando a máquina com rotação de 450 RPM.

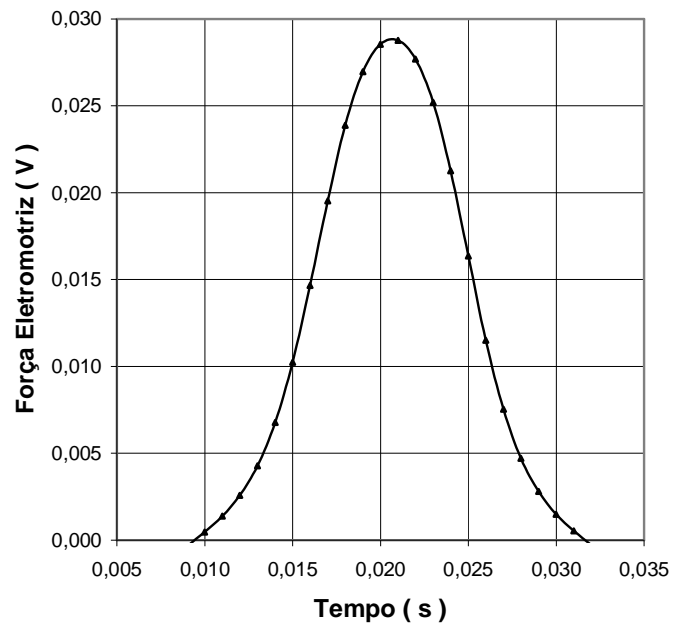


Figura 42 Força eletromotriz de um condutor ativo

A figura 43 mostra a força eletromotriz induzida em uma bobina, obtida por simulação, estando a máquina com rotação de 450 RPM.

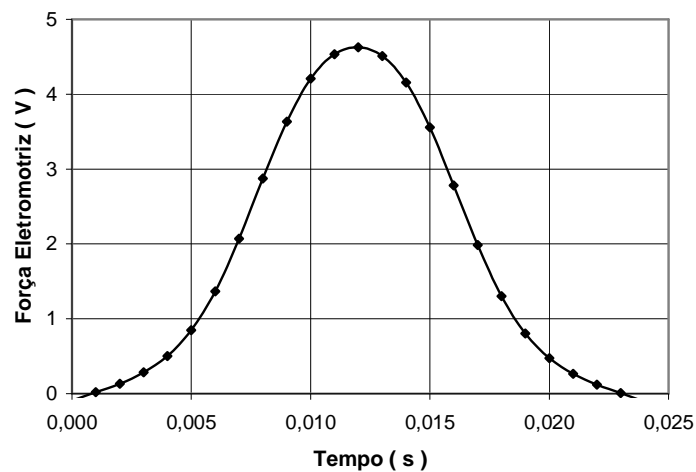


Figura 43 Força eletromotriz de uma bobina

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

5.3.3 Conjugado Estático

A simulação para cálculo do conjugado foi realizada com a utilização de um modelo composto por dois submodelos, um que representa o estator e o outro que representa um rotor. Foi considerado um plano de simetria perpendicular ao eixo geométrico da máquina que divide o estator em duas metades. Os submodelos apresentam uma superfície comum, sobre a qual o software realiza a integração do tensor de Maxwell. O resultado desta integração é a força que produz o conjugado.

O conjugado foi simulado em posições estáticas, sendo excitadas duas bobinas adjacentes com 2,5 A e a bobina seguinte mantida desenergizada. Os resultados obtidos estão mostrados na figura 44. A posição 0° corresponde à posição de equilíbrio da máquina com a linha de centro dos ímãs sobre o plano que divide duas bobinas energizadas.

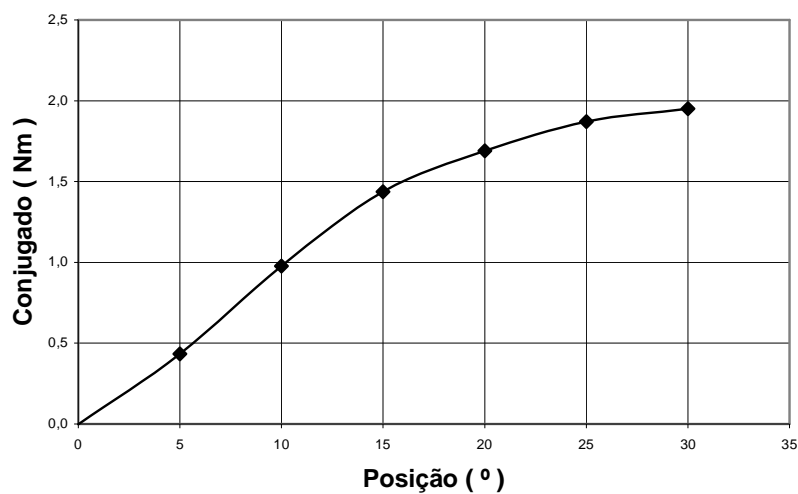


Figura 44 Conjugado obtido por simulação

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

6.1 Indução magnética

A partir da montagem do núcleo da máquina Torus, os ímãs foram colocados nos rotores. Foram confeccionados gabaritos para fixação de ponteiras de efeito Hall na projeção dos ímãs junto à superfície dos mesmos, na cota de separação entre bobinas e entreferro e junto ao estator.

Na figura 45 podem ser observados gabaritos utilizados para o posicionamento de ponteiras Hall na projeção dos ímãs.

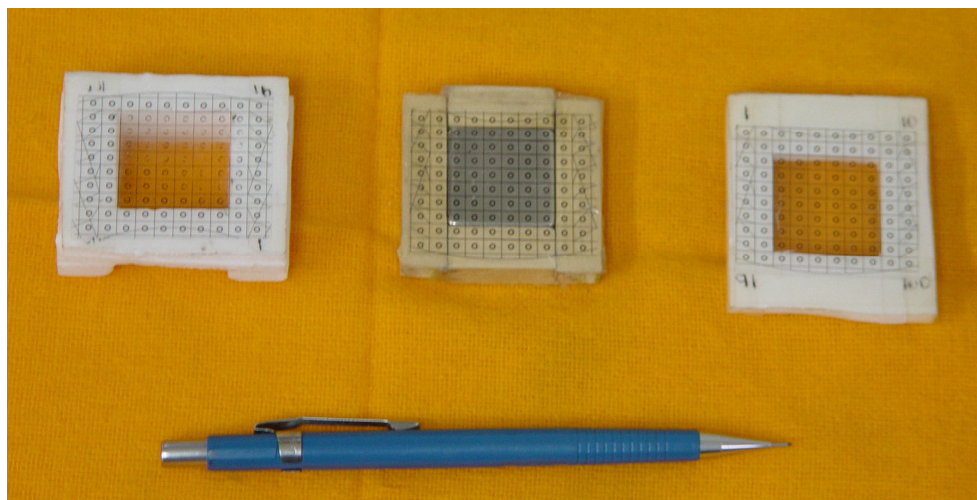


Figura 45 Gabaritos de posicionamento de ponteiras de efeito Hall

Na figura 46 estão mostrados o teslímetro utilizado, uma ponteira transversa e um gabarito de posicionamento.



Figura 46 Teslímetro, ponteira transversa e gabaritos de posicionamento

A figura 47 mostra a montagem realizada para a medição da indução magnética.

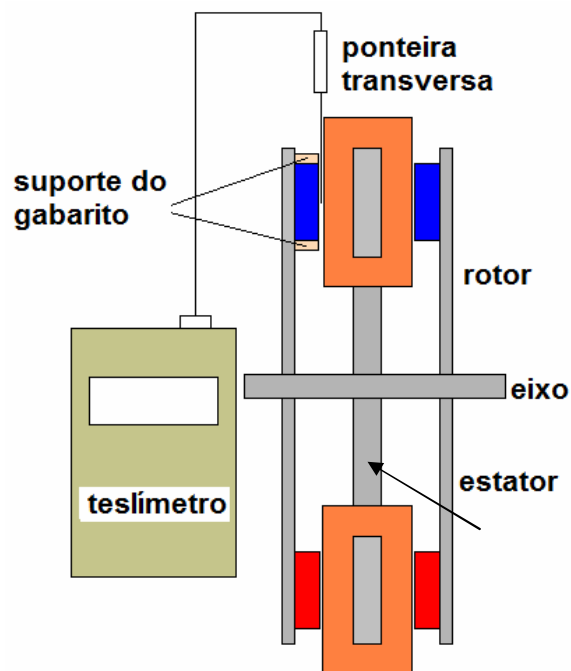


Figura 47 Corte da máquina com indicação do esquema da montagem para medição da indução magnética

Os valores de indução magnética medidos a 0,5 mm da superfície dos ímãs estão mostrados na figura 48.

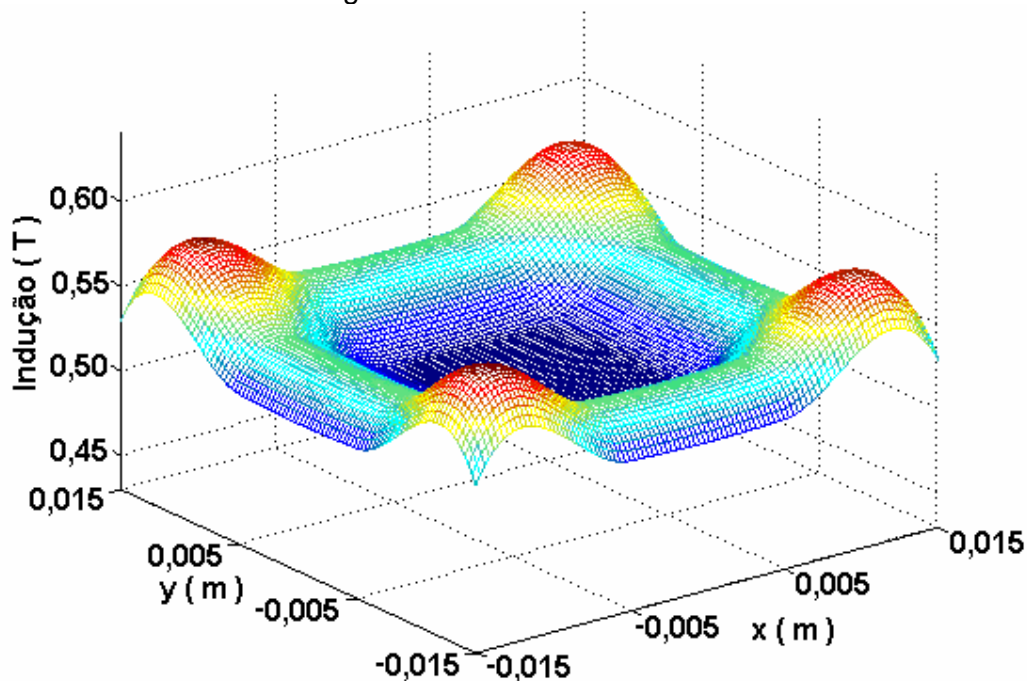


Figura 48 Valores de indução medidos a 0,5mm da superfície dos ímãs

Os valores de indução magnética medidos na região do entreferro estão mostrados na figura 49.

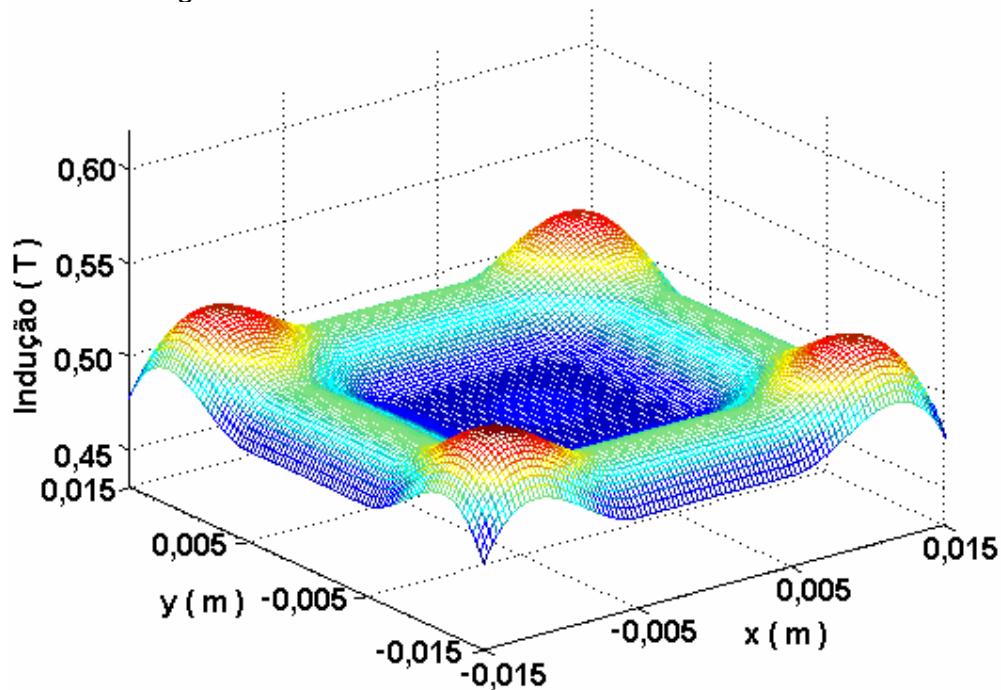


Figura 49 Valores de indução medidos na região do entreferro a 1mm da superfície dos ímãs

Após a montagem das bobinas no estator, foram realizadas medidas de indução com corrente nas bobinas, somente nas linhas centrais dos ímãs para evitar um período prolongado de circulação de corrente, tendo como consequência aquecimento excessivo dos enrolamentos.

Os valores medidos na direção radial estão apresentados na figura 50.

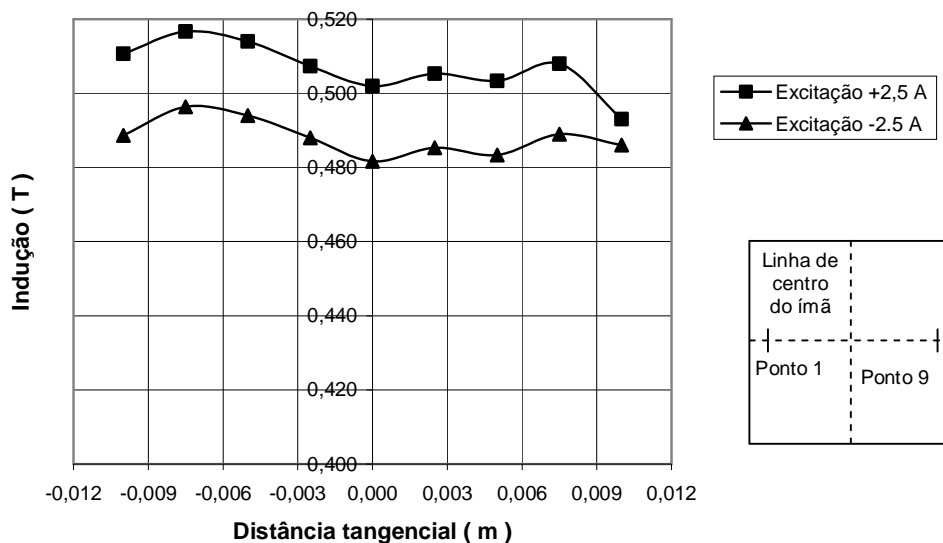


Figura 50 Indução na direção radial a 0,5 mm da superfície dos ímãs

Os valores medidos na direção tangencial estão apresentados na figura 51.

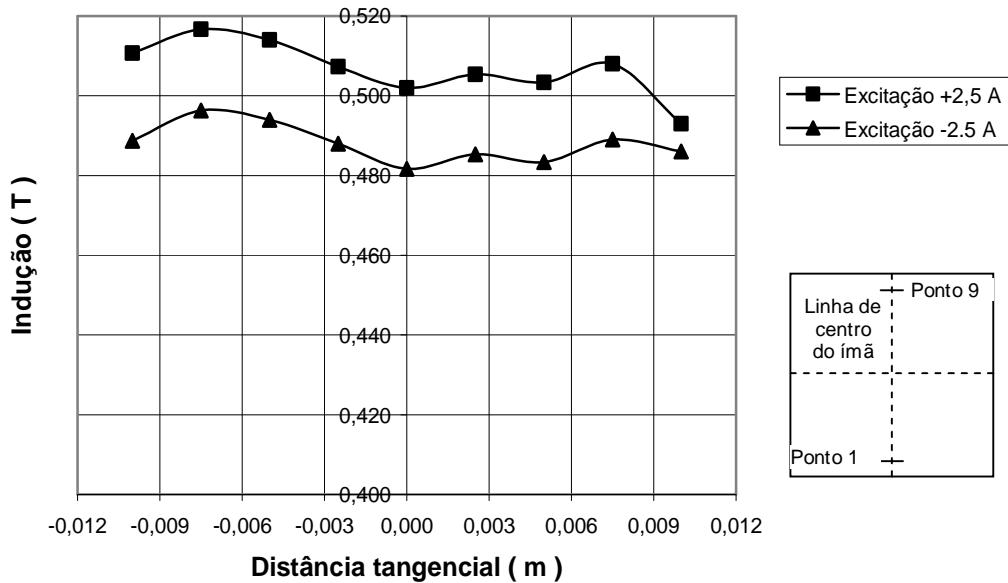


Figura 51 Valores de indução medidos na direção tangencial a 0,5 mm da superfície dos ímãs

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

6.2 Forças Eletromotrizas

Para adquirir a força eletromotriz induzida, a máquina foi acionada com velocidade variável e sem excitação externa, como se fosse um gerador a vazio. O esquema do ensaio está representado na figura 52.

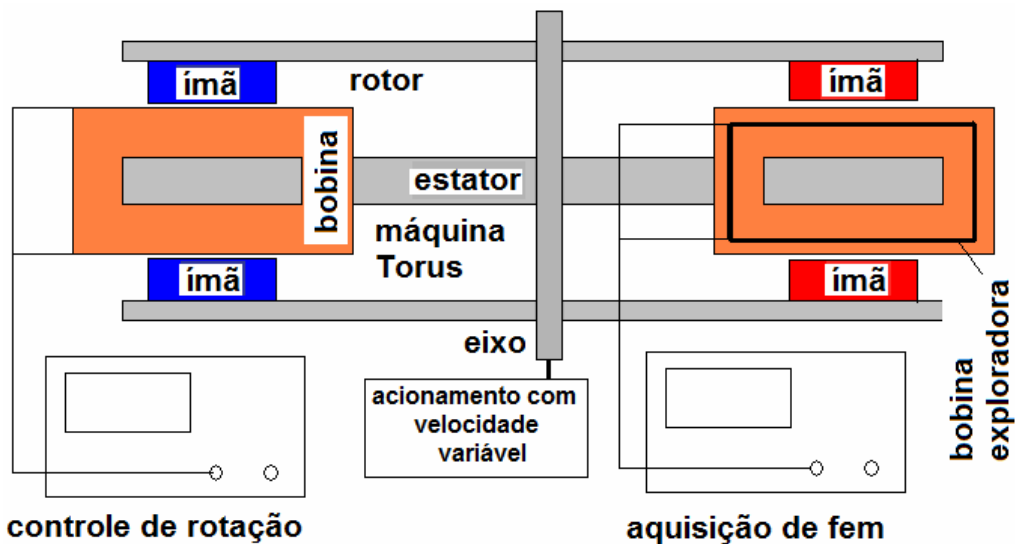


Figura 52 Corte da máquina com indicação do esquema para aquisição de força eletromotriz

O controle de velocidade foi realizado pela frequência da tensão induzida em uma das bobinas da máquina Torus. A figura 53 mostra a montagem utilizada para realizar o ensaio. A figura 54 mostra a instrumentação utilizada para adquirir a forma de onda da força eletromotriz. O osciloscópio superior foi utilizado para monitorar a rotação e no osciloscópio inferior realizou-se a aquisição da força eletromotriz.

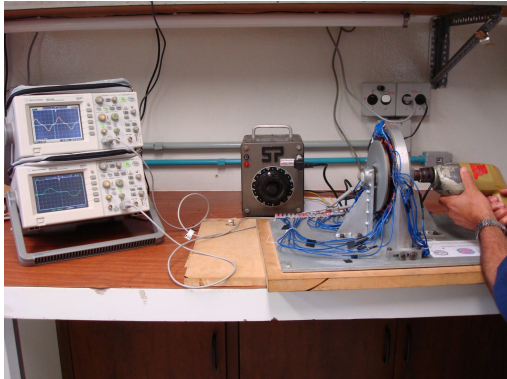


Figura 53 Acionamento da máquina com velocidade variável

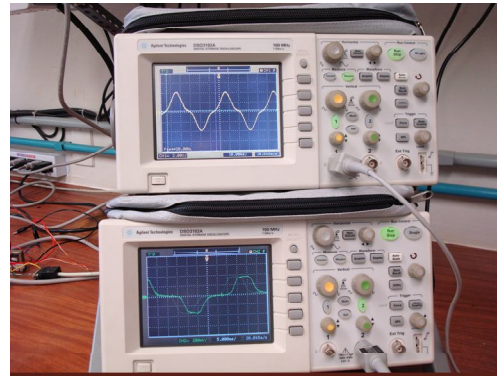


Figura 54 Aquisição da força eletromotriz

A figura 55 mostra uma onda adquirida correspondente a um condutor com diversas rotações. As aquisições destas ondas foram realizadas com o auxílio de uma bobina exploradora constituída por seis espiras de fio de pequeno diâmetro para que as espiras estivessem muito próximas e praticamente não houvesse defasagem entre as forças eletromotrizes induzidas em cada espira.

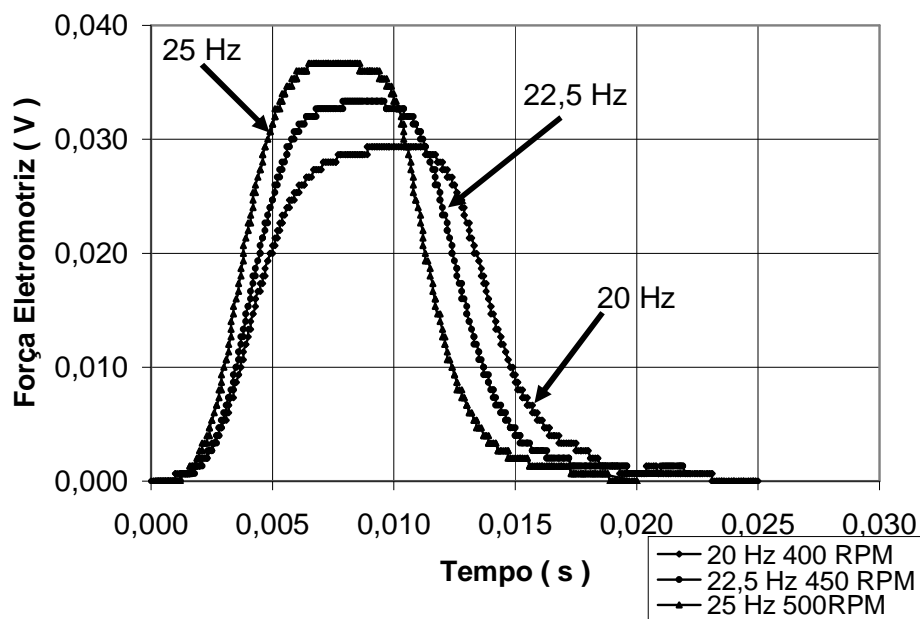


Figura 55 Forças eletromotrizes de um condutor ativo com diversas rotações

Na figura 56 estão mostrados os valores máximos das forças eletromotrizs induzidas em um condutor com variação de rotação.

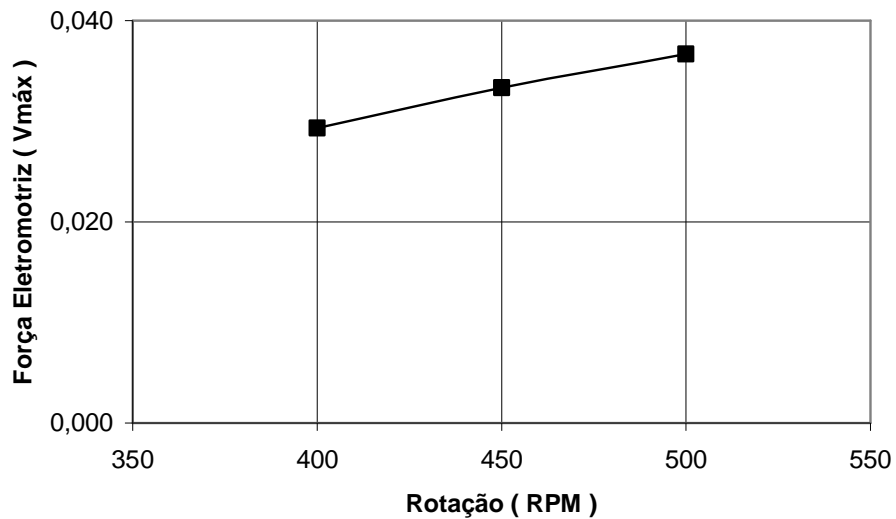


Figura 56 Variação da força eletromotriz com a rotação

Para verificar a influência de correntes parasitas na força eletromotriz induzida, as três ondas adquiridas foram convertidas para 20 Hz, frequência na qual tal influência seria a mais reduzida. Os resultados obtidos estão apresentados na figura 57.

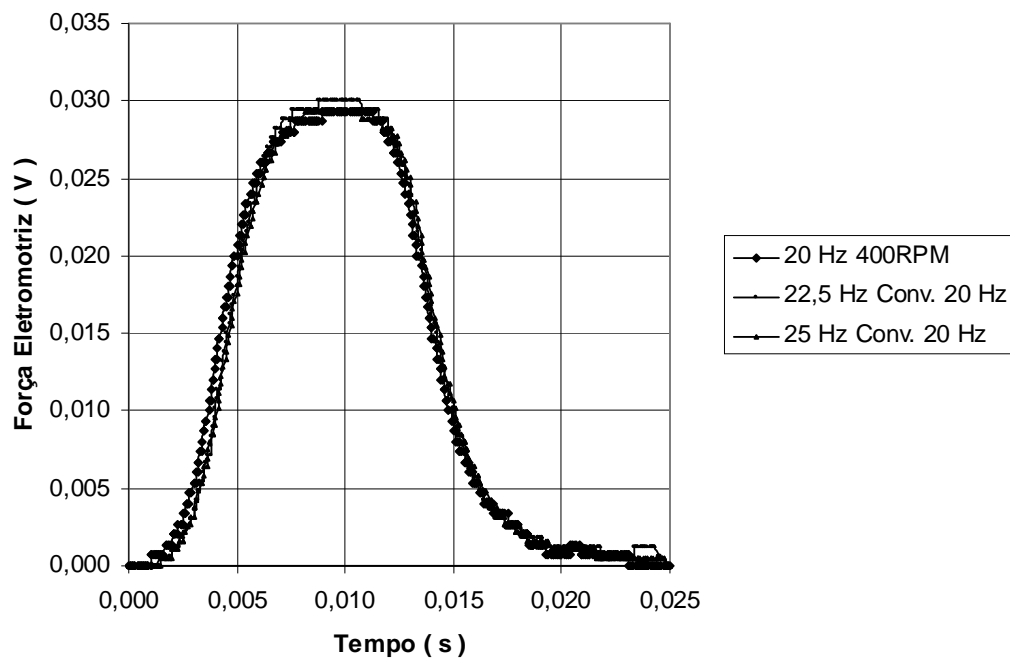


Figura 57 Forças eletromotrizs de um condutor convertidas para 20 Hz

A análise da figura 57 mostra que se existe influência de correntes parasitas na força eletromotriz induzida nos condutores da máquina Torus, tal influência é reduzida.

Foi adquirida também a força eletromotriz induzida em uma bobina da máquina, cuja forma de onda está mostrada na figura 58.

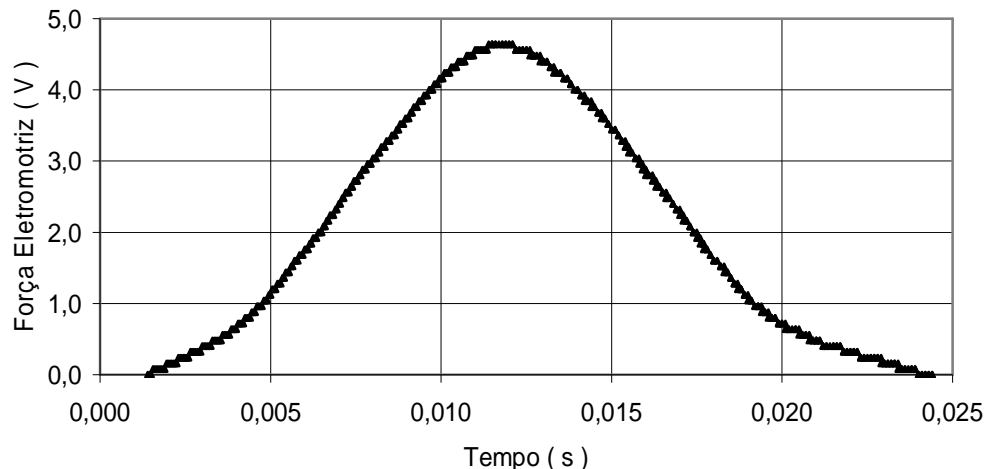


Figura 58 Força eletromotriz de uma bobina adquirida a 450 RPM

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

6.3 Conjugado Estático

Para medir o conjugado foi utilizado um transdutor tipo mesa constituído por extensômetros ligados em ponte completa e um condicionador de sinais. A montagem para medição está representada na figura 59. A máquina foi travada em posições determinadas, excitada com 2,5 A e medido o conjugado desenvolvido.

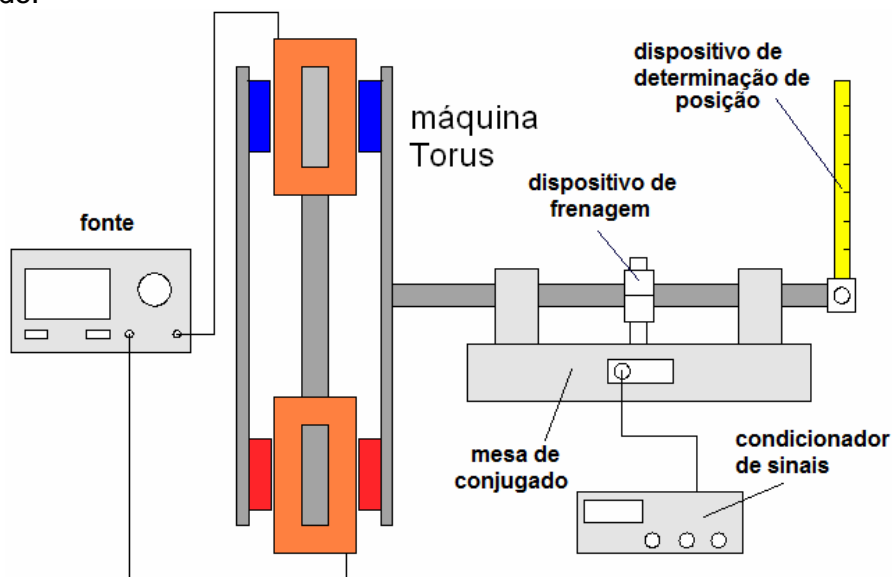


Figura 59 Esquema da montagem para medição de conjugado

A figura 59 mostra a montagem para medição de conjugado. A figura 60 mostra o dispositivo para medição de posição do rotor.

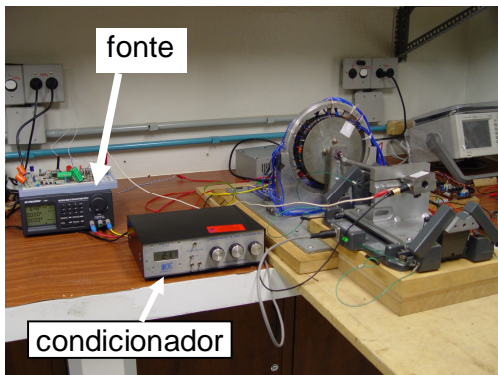


Figura 60 Montagem para medição de conjugado

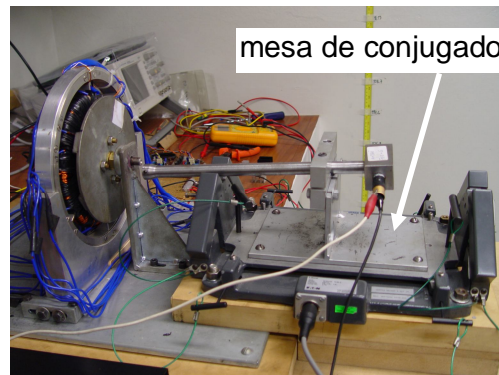


Figura 61 Dispositivo para medição da posição do rotor

Os valores obtidos na medição de conjugado estático estão apresentados na figura 62. A posição 0° corresponde à posição de equilíbrio da máquina com a linha de centro dos ímãs sobre o plano que divide duas bobinas energizadas.

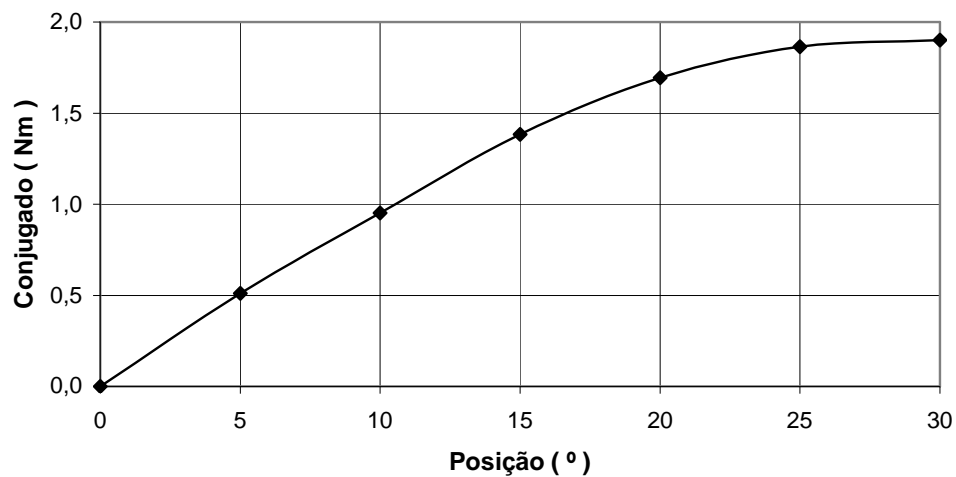


Figura 62 Conjugado medido com 2,5 A de corrente

No capítulo 7 está apresentada a comparação entre os valores obtidos por simulação, medição e através de método analítico.

7 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

7.1 Indução dos enrolamentos

Os resultados de induções produzidas pelos enrolamentos quando excitados por corrente e sem a presença dos ímãs não apresentaram repetibilidade provavelmente devido à intensidade de ruído ambiente. Por esse motivo pelo qual não foram comparados com os resultados do modelo analítico com os resultados de simulação numérica.

Para comparar os resultados obtidos por simulação com os obtidos pela aplicação do modelo analítico foram consideradas duas situações: ângulo constante com variação de raio e raio constante com variação de ângulo.

A indução produzida pelos enrolamentos quando excitados com corrente na ausência de magnetização dos ímãs foi calculada pela expressão obtida 4.109:

$$\vec{B}_{ef} = \frac{1}{r} (\Gamma z + C_4) \vec{\theta} + (\Gamma \theta - C_6) \vec{z} + C_8 \quad (7.1)$$

Onde:

$$\Gamma = 0,03744 \text{ T}$$

$$C_4 = -0,000702 \text{ T}$$

$$C_6 = C_8 = -0,006533 \text{ T/m}$$

Os resultados de indução na direção normal obtidos por simulação e os resultados calculados com a expressão acima, correspondentes a raios constantes com variação de ângulo, i. é, deslocamento tangencial, para raios de 0,050, 0,062 e 0,074 m, estão mostrados na Figura 63.

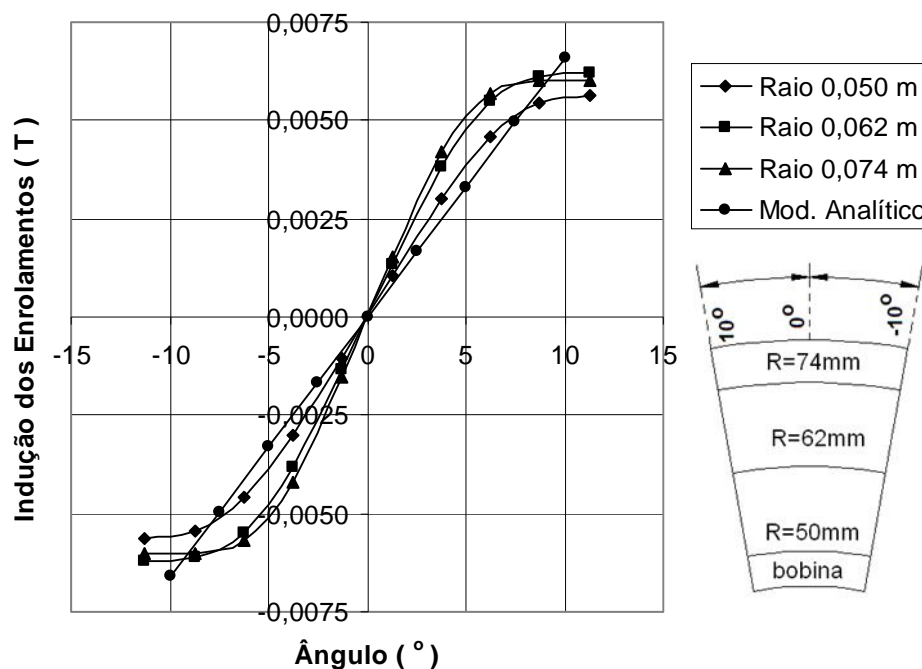


Figura 63 Induções na direção z obtidas por simulação e por cálculo

Verifica-se uma diferença crescente até os extremos das bobinas. Provavelmente esta diferença é oriunda dos formatos das bobinas, retangular na simulação e trapezoidal no modelo analítico.

Os valores de indução na direção normal obtidos por simulação e os resultados calculados correspondentes ao ângulo de -10° estão apresentados na figuras 64.

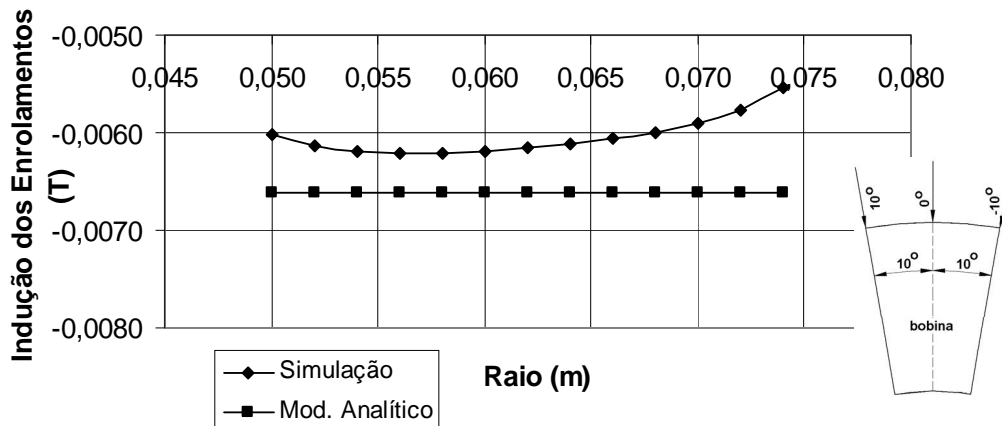


Figura 64 Induções na direção z obtidas por simulação e calculadas para ângulo de -10°

Os valores de indução na direção normal obtidos por simulação e os resultados calculados correspondentes ao ângulo de 0° estão apresentados na figuras 65.

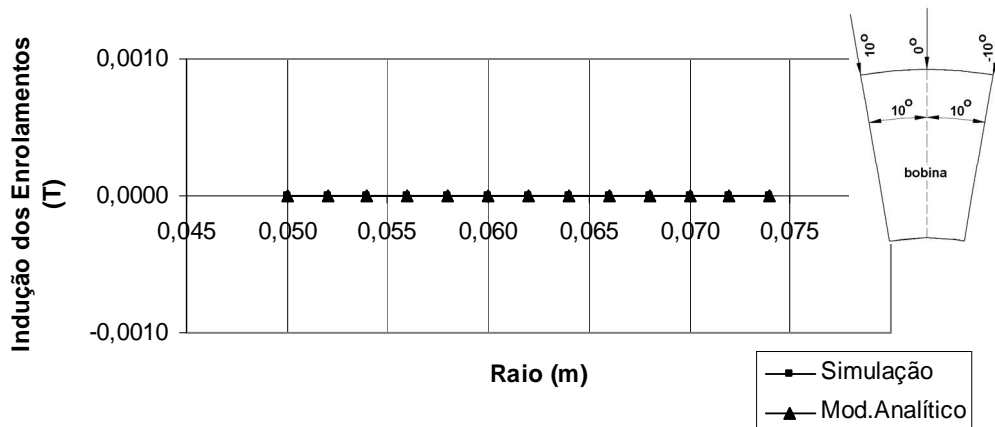


Figura 65 Induções na direção z obtidas por simulação e calculadas para ângulo de 0°

Os valores de indução na direção normal obtidos por simulação e os resultados calculados correspondentes ao ângulo de 10° estão apresentados na figuras 66.

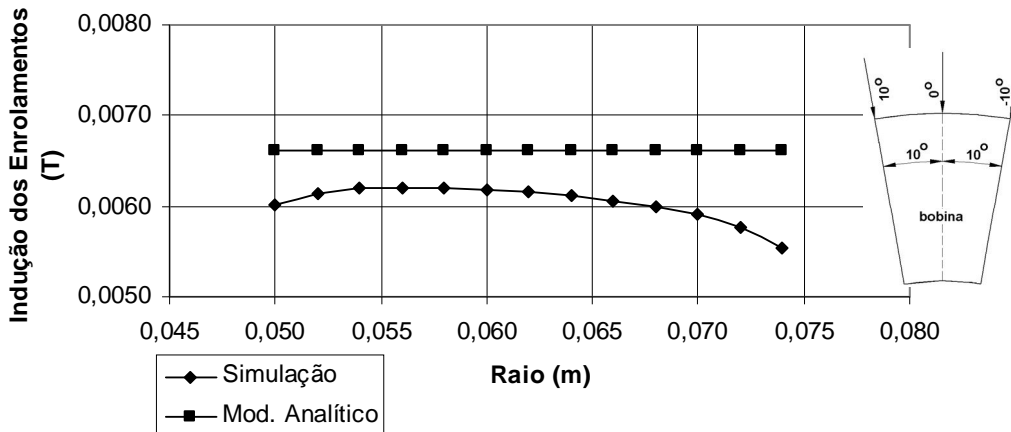


Figura 66 Induções na direção z obtidas por simulação e calculadas para ângulo de 10°

As diferenças entre os valores obtidos por simulação e os valores calculados se manifesta progressivamente com o afastamento do plano de RZ de simetria da bobina. Conforme pode ser observado, os valores destas diferenças são relativamente reduzidos.

7.2 Indução dos ímãs permanentes

A comparação dos valores de indução dos ímãs permanentes foi realizada sobre a linha de centro dos ímãs na direção radial e também sobre a linha de centro na direção tangencial, para evitar as dificuldades de comparação de gráficos tridimensionais.

O cálculo dos valores de indução produzida pelos ímãs permanentes foi realizado utilizando a expressão (4.119).

A figura 67 mostra os conjuntos de valores de indução calculados, medidos e obtidos por simulação na direção radial. Cada conjunto é composto por onze pontos nos quais o valor de indução é obtido.

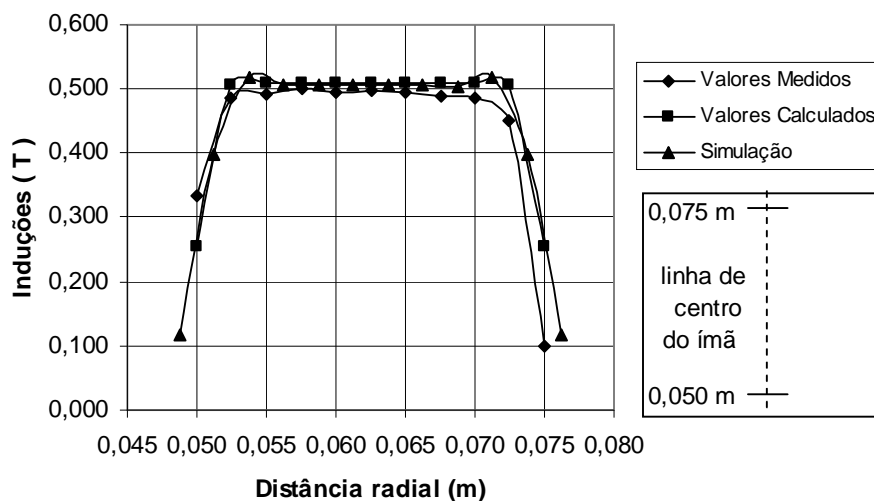


Figura 67 Comparação de induções na direção radial

A figura 68 mostra os conjuntos de valores de indução calculados, medidos e obtidos por simulação na direção tangencial. De forma análoga à situação anterior, cada conjunto é composto por onze pontos nos quais é obtido o valor de indução.

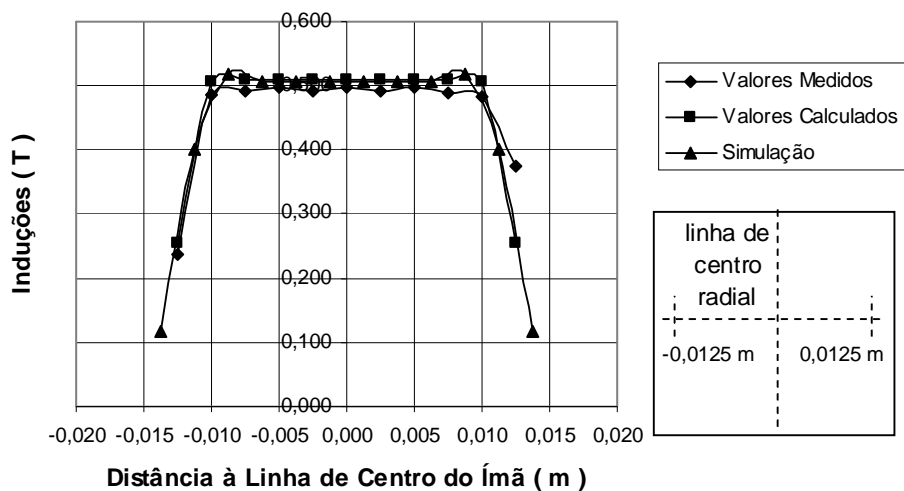


Figura 68 Comparação de induções na direção tangencial

A análise das figuras 67 e 68 mostra que os resultados obtidos são coerentes e que as diferenças são reduzidas.

7.3 Força Eletromotriz

Os valores de força eletromotriz foram calculados para um condutor ativo, medidos em uma bobina exploradora e simulados. Para permitir a comparação os valores medidos foram divididos por 2. Como foi utilizado um modelo de para simulação com um plano de simetria que divide as bobinas em duas metades, não foi necessário dividir o valor simulado por 2. A figura 69 mostra as forças eletromotrizes.

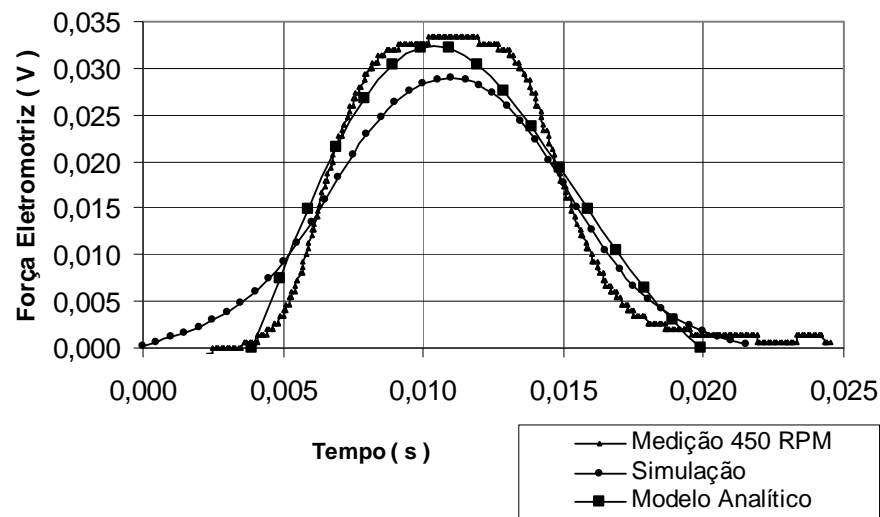


Figura 69 Forças eletromotrizes em um condutor

A análise dos resultados mostra que há uma diferença na amplitude e nos pontos extremos. A diferença dos extremos pode ser atribuída à diferença de formato da bobina modelada para simulação e ainda ao ruído presente durante a aquisição.

Os valores de força eletromotriz de uma bobina completa estão mostrados na figura 70.

A análise dos valores obtidos mostra que as diferenças em amplitude se tornaram muito pequenas, havendo diferenças ainda nos extremos, provavelmente devido à dificuldade de modelar com exatidão a distribuição de espiras no enrolamento.

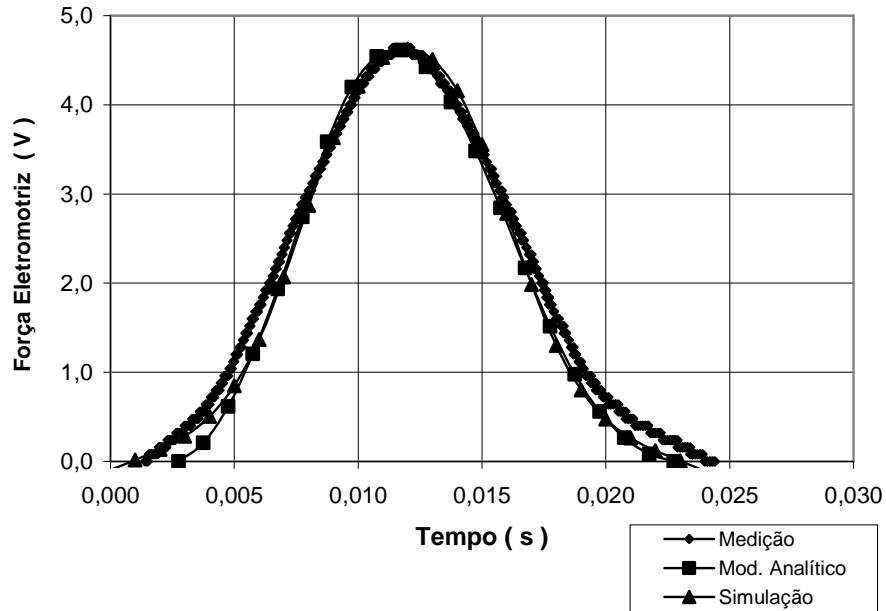


Figura 70 Forças eletromotrizes de uma bobina

7.4 Conjugado estático

Os resultados obtidos de conjugado da máquina Torus por cálculo, por medição e por simulação estão apresentados na figura 71. Como no modelo de simulação numérica foi utilizado um plano de simetria perpendicular ao eixo Z, e considerado somente um rotor, os resultados de conjugado obtidos com o modelo citado foram multiplicados por 2. A posição 0° corresponde à posição de equilíbrio da máquina com a linha de centro dos ímãs sobre o plano que divide duas bobinas energizadas.

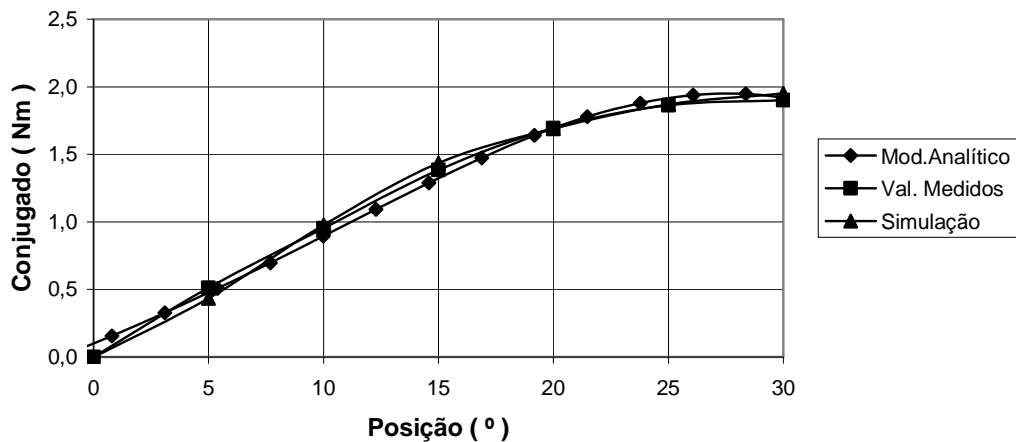


Figura 71 Conjugado estático

A análise dos resultados indica que as diferenças entre os valores calculados, medidos e obtidos por simulação são pequenos.

8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A máquina Torus apresenta volume compacto e comprimento axial reduzido. O protótipo construído possibilitou a realização de medições de indução magnética, de força eletromotriz e de conjugado.

O modelo analítico desenvolvido para a indução magnética produzida pelos enrolamentos resultou em uma solução sem o uso de séries, tornando o processamento mais rápido. Neste modelo foram utilizadas simetrias de Lie.

A exemplo do método analítico utilizado para a indução dos enrolamentos, o método analítico desenvolvido para a indução magnética dos ímãs permanentes resultou em uma solução sem a utilização de séries e permitiu a obtenção de expressões para a força eletromotriz e para o conjugado, com tempo de processamento reduzido. Neste modelo também foram utilizadas simetrias de Lie.

A comparação entre resultados obtidos nas medições realizadas, nas simulações e com os métodos analíticos mostra uma razoável coerência entre os mesmos. As maiores diferenças decorrem de diferenças nas geometrias consideradas.

Foram observadas diferenças significativas nos tempos de processamento. O método numérico demanda cerca de 23 horas para o cálculo do conjugado, 29 horas para o cálculo das induções magnéticas, 11 horas para o cálculo da força eletromotriz e 11 minutos para o cálculo da indução produzida pelos enrolamentos. O método analítico demanda cerca de 30 segundos para o processamento completo em um computador com processador mais lento e com memória menor.

A utilização de simetrias de Lie se mostrou um método poderoso, que evita a utilização de séries nas soluções.

Para continuação do trabalho sugere-se:

A utilização de compósitos, materiais paramagnéticos ou diamagnéticos no núcleo do estator;

O estudo de conjugado dinâmico;

O estudo de correntes parasitas com variação de frequência e de velocidade;

A aplicação de simetrias de Lie e transformações de Bäcklund [55] em outros problemas de eletromagnetismo;

O estudo visando à padronização de cálculos de densidade de potência e de densidade de conjugado.

REFERÊNCIAS

- [1] SKILLING, H. H. **Electromechanics**. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1962.
- [2] KOSOW, I. L. **Máquinas Elétricas e Transformadores**. Porto Alegre: Editora Globo. 1977.
- [3] CHAN, C. C. Axial-field electrical machines – design and applications. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, New York, v. EC-2, No. 2, p.294-300, Jun. 1987.
- [4] CAMPBELL, P. Principles of permanent-magnet axial field d.c. machine. **Proceedings of The Institution of Electrical Engineers - Power**, v. 121, No. 12, p.1489-1494, Dec. 1974.
- [5] CAMPBELL, P. The magnetic circuit of an axial field d.c. electrical machine. **IEEE Transactions on Magnetics**, New York, v. Mag-11, No. 5, p.1541-1543 Sept. 1975.
- [6] SPOONER, E. et al. Motoring performance of the toroidal permanent-magnet machine 'Torus'. In: International Conference on Electrical Machines and Drives, 5. 1991. London, **Conference Publication No. 341**, 1991, p. 36-40.
- [7] SPOONER, E.; CHALMERS, B. J. TORUS: a slotless, toroidal-stator, permanent-magnet generator. **Proceedings of The Institution of Electrical Engineers – Electric Power Applications**, v. 139, No. 6 , Pages:497 – 506, Nov. 1992.
- [8] CARICCHI, F.; CRESCIMBINI, F.; SANTINI, E. Basic principle and design criteria of axial-flux PM machines having counterrotating rotors **IEEE Transactions on Industry Applications**, New York, v. 31 No. 5 ,p.1062 – 1068, Sept.-Oct. 1995.
- [9] PAN, H.; RENFREW, A. C. Research into wide speed range control of a TORUS motor. In: International Conference on Energy Management and Power Delivery, 1995, Singapore. **Proceedings...** New York: IEEE, 21-23 Nov. 1995. p. 640 – 644.
- [10] CARICCHI, F.; CRESCIMBINI, F.; HONORATI, O. Low-cost compact permanent magnet machine for adjustable-speed pump application. **IEEE Transactions on Industry Applications**, New York, v. 34, No. 1 , p. 109-116, Jan.-Feb. 1998.
- [11] PROFUMO, F. et al. Novel axial flux interior PM synchronous motor realized with powdered soft magnetic materials. In: IAS Annual Meeting Industry Applications Conference, 33. 1998. St. Louis, **Proceedings...** New York: IEEE 12-15 Oct. 1998, p. 152 – 158, vol.1.
- [12] ZHILICHEV, YU. N. Three-dimensional analytic model of permanent magnet axial flux machine. **IEEE Transactions on Magnetics**, New York, v. 34, No. 6 , p. 3897 – 3901, Nov. 1998.
- [13] MENDRELA, E. A.; DRZEWSKI, R. Performance of stator salient pole disc brushless DC motor for EV In: International Conference on Power

Electronics and Variable Speed Drives, 2000, 8., 2000, London. **IEE Conference Publication No. 475**, London, 18-19 Sept. 2000. p. 489 – 492.

[14] CIRANI, M.; SARARANGANI, C.; THELIN, P. Analysis of an innovative design of an axial flux Torus machine In: International Conference on Electrical Machines 2002, Brugge. **Proceedings ...**, Brugge, 2002.

[15] HUANG S.; AYDIN, M.; LIPO, T. A. TORUS concept machines: pre-prototyping design assessment for two major topologies In: Industry Applications Conference, 36, 2001, Chicago. **Conference Record of the 2001 Volume: 3**, New York: IEEE, 2001. p.1619 - 1625 vol.3.

[16] AYDIN, M.; HUANG S.; LIPO, T. A. Design and 3D electromagnetic field analysis of non-slotted and slotted TORUS type axial flux surface mounted permanent magnet disc machines. In: Electric Machines and Drives Conference, 2001, Cambridge. **Conference Record**. New York: IEEE, 2001. p. 645 – 651.

[17] AYDIN, M.; HUANG S.; LIPO, T. A. A new axial flux surface mounted permanent magnet machine capable of field control. In: IAS Annual Meeting Industry Applications Conference, 37. 2002.. **Conference Record Volume: 2**, New York: IEEE, 2002. p.1250 – 1257 v.2.

[18] BUMBY, J. R. et al. Electromagnetic design of axial-flux permanent magnet **IEE Proceedings Electric Power Applications**, London, v. 151, No. 2, p. 151 – 160, March 2004

[19] PARVIAINEN, A.; NIEMELÄ, M.; PYRHÖNEN, J. Modeling of axial flux permanent-magnet machines **IEEE Transactions on Industry Applications**, New York, v. 40, No. 5, p.1333 – 1340, Sept.-Oct. 2004

[20] GIERAS, J. F. Wing, M. **Permanent Magnet Motor Technology**. New York. Marcel Dekker, Inc. 1997.

[21] FURLANI, E. P. **Permanent Magnet and Electromechanical Devices**. San Diego. Academic Press. 2001.

[22] NASAR, S. A., BOLDEA, I., UNNEWEHER, L. E. **Permanent Magnet, Reluctance and Self-Synchronous Motors**. Boca Raton. CRC Press. 1993.

[23] JENSEN, C. C.; PROFUMO, F.; LIPO, T. A. A low-loss permanent-magnet brushless DC motor utilizing tape wound amorphous iron. **IEEE Transactions on Industry Applications**, New York, v. 28, No. 3, p. 646 - 651, Sept.-Oct. 2004, May-June 1992.

[24] JANSSON, P. Soft Magnetic Composites– A Rapidly Expanding Materials Group. In: International Conference on Powder Metallurgy & Particulate Materials 1999 **Proceedings...** Vancouver: Höganäs. 1999 Separata [s.n.]

[25] RUTZ, H. G.; HANEJKO, F. G.; ELLIS, G. W. The Manufacture of Electromagnetic Components by Powder Metallurgy Process. In: International Conference on Powder Metallurgy & Particulate Materials. 1997. **Proceedings...** Chicago: Hoeganaes, 1997 [s.n.]

[26] BASTOS, J. P. A. **Eletromagnetismo para Engenharia**. Florianópolis, SC: Editora da UFSC, 2004.

- [27] FLORES F^o, A. F. **Ímãs Permanentes de terras Raras: Utilização Industrial**. Porto Alegre: Escola de Engenharia. UFRGS.1998.
- [28] WANGSNESS, R. K. **Electromagnetic Fields**. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 1986.
- [29] BINNS, K. J.; LAWRENSON, P. J.;TROWBRIDGE, C. W. **Electric and Magnetic Fields**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1992.
- [30] MARTINS, N. **Introdução à teoria da eletricidade e do magnetismo**. São Paulo: Edgard Blücher, 1975.
- [31] SILVEIRA, M. A. **Estudo de um Atuador Planar**. Porto Alegre. 2003. Tese de Doutorado. UFRGS.
- [32] BASTOS, J. P. A. **Eletromagnetismo e cálculo de campos**. 3^a. Ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 1996.
- [33] CARDOSO, J. R. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. S.L.: S.N., 199?.
- [34] FLORES F^o, A. F. **Aplicação do Método dos Elementos Finitos à Análise de Dispositivos Eletromagnéticos** . Porto Alegre: Escola de Engenharia. UFRGS. 2003.
- [35] SABONNADIÈRE, J. C.; COULOMB, J. L. **Elementos Finitos e CAE**. Tradução J.R. Cardoso. São Paulo: Aleph. 1993.
- [36] **MEGA V6.24 USER MANUAL**. Bath, UK: Applied Electromagnetic Research Centre, Bath University,. 1997.
- [37] FERREIRA, D. M. **Motor Brushless com Ímãs Permanentes com fluxo Axial – Torus**. Porto Alegre: UFRGS 2005
- [38] KRAUS, J. D. **Electromagnetics**. 4th. Ed. New York. Mc Graw Hill, Inc. 1992.
- [39] HAYT, W. H. **Engineering Electromagnetics**. 5th. Ed. New York. Mc Graw Hill, Inc. 1989.
- [40] CAMPBELL, P. **Permanent Magnet Materials and their Application**. New York. Cambridge University Press. 1994.
- [41] ÖZİŞİK, M. N. **Heat Conduction**. New York. John Wiley & Sons. 1980.
- [42] OLVER, P. J. **Applications of Lie Groups to Differential Equations**. 2nd Ed. New York. Springer-Verlag. 2000.
- [43] BLUMAN, G.W. , KUMEI, S. **Symmetries and Differential Equations**. New York. Springer-Verlag.1989.
- [44] IBRAGINOV, N. H. et al. **Lie Groups Analysis off Differential Equations**. Boca Raton. CRC Press. 1995.
- [45] ZIENKIEWICZ, O. C. Finite Elements-The Basic concepts and Application to 3-d Magnetostatic Problems In: Chari, M.V.K.; Silvester P.P.(Org) **Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems**. Chichester. John Wiley & Sons. 1980. chapt. 1,p. 11-31.

- [46] BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N. **Electromagnetic Modeling by Finite Elements Methods**. New York. Marcel Dekker, Inc. 2003.
- [47] SALON, S. J. **Finite Element Analysis of Electric Machines**. Boston. Kluwer Academic Publishers. 1995.
- [48] REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. New York. McGraw Hill Book Company. 1984.
- [49] MACEDO, A. **Eletromagnetismo**. Rio de Janeiro. Guanabara. 1988.
- [50] SILVESTER, P. P.; FERRARI, R. L. **Finite Element for Electrical Engineers**. Cambridge. Cambridge University Press. 1990.
- [51] IDA, N.; BASTOS, J. P.A. **Electromagnetics And Calculation Of Fields**. 2nd. Ed. New York. Springer-Verlag. 1997.
- [52] GIERAS, J. F.; WANG, R.J.; KAMPER, M. J. **Axial Flux Permanent Magnet Brushless Machines**. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. 2004.
- [53] Jilles, D. **Introduction to Magnetism and Magnetic Materials**. 1st.Ed. Reprinted London. Chapman & Hall. 1996.
- [54] McCURRIE, R. A. **Ferromagnetic Materials Structure and Properties**. London. Academic Press. 1994.
- [55] SPEROTTO, F.A. **Soluções de Equações Advectivo-Difusivas utilizando Split, Série Geométrica e Transformações de Bäcklund**. Porto Alegre. 2007. Tese de Doutorado. UFRGS.
- [56] HUANG S. et al. A comparison of power density of axial flux machines based on general purpose sizing equations. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, New York, Vol. 14,, No. 2, p.185-191, Jun. 1999.
- [57] CHAN, C. C. et al. A novel high power density permanent magnet variable-speed motor. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, New York, Vol. 8,, No. 2, p.297-303, Jun. 1987.
- [58] GIERAS, J.; GIERAS, I. Performance analysis of a coreless permanent magnet brushless motor. In: IAS Annual Meeting Industry Applications Conference, 37. 2002.. **Conference Record Volume: 4** , New York: IEEE, 2002. p.2477 – 2482 v.4.
- [59] Loureiro, L.T.R., Zabadal, J.R.S., Flores F^o.,A.F.F., and Homrich,R.P. "Modeling permanent magnet axial flux machine with lie symmetries." aceito para apresentação na INTERMAG2008, IEEE International Magnetic Conference, sessão DU-04, Madrid Espanha, 4-8 de maio de 2008.

APÊNDICE A

DIMENSIONAMENTO PRELIMINAR DA MÁQUINA TORUS

A máquina Torus foi concebida para ser uma máquina de fluxo axial com ímãs permanentes que pudesse ser utilizada em uma aplicação acionada por um motor comercial com fluxo radial com redução, sendo os valores nominais apresentados abaixo.

0

Rotação: 450 RPM
 Conjugado: 3 Nm

A potência da máquina foi calculada através do produto do conjugado pela velocidade angular.

$$P = C \times \omega \cong 141 W \quad (A.1)$$

Onde:

C é o conjugado [Nm];

ω é a velocidade angular [rad/s].

O dimensionamento do entreferro determina o ponto de operação dos ímãs permanentes. É conveniente que o ponto de operação dos ímãs permanentes seja próximo do ponto de máximo produto energético, para que a energia fornecida armazenada no entreferro seja maximizada [21].

$$Q_{(B,H)} = Q \Big|_{BH_{\max}} = \left(\frac{H_c}{2}, \frac{B_r}{2} \right) \quad (A.2)$$

Onde:

H_c é a força coercitiva [A.esp/m];

B_r é a indução remanente [T].

O gráfico da figura A1.1 mostra os valores do ponto de produto energético máximo.

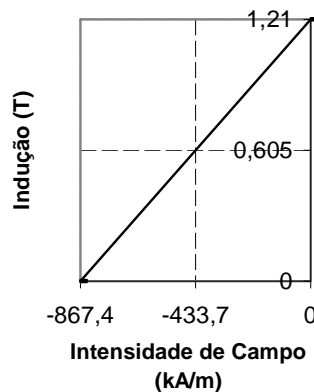


Figura A.1 Valores característicos do ponto de produto energético máximo

Considerando que em dispositivo com geometria similar [31] a relação considerada entre o fluxo dos ímãs e o fluxo que atravessa o entreferro foi 1,2 e que tal relação varia tipicamente entre 2 e 3 [27] e que seja desprezado o franjeamento:

$$\frac{\phi_m}{\phi_{ef}} = \frac{3}{2} \quad (\text{A.3})$$

Onde:

Φ_m é fluxo dos ímãs;

Φ_{ef} é fluxo que atravessa o entreferro.

A figura A.2 a seguir representa a trajetória do fluxo de um ímã ao estator em um corte da máquina.

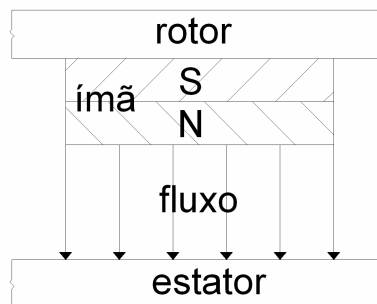


Figura A.2 Corte da máquina com trajetória do fluxo

Como franjeamento foi desprezado

$$S_m = S_{ef} \quad (\text{A.4})$$

Onde :

S_m é a seção polar dos ímãs;

S_{ef} é a seção magnética do entreferro.

A relação entre a indução magnética e a intensidade do campo magnético do ímã permanente pode ser determinada pela expressão que consta da apostila "Ímãs Permanentes de Terras Raras" de autoria de A. F. Flores F^{o.}, publicada em 1998 [27]:

$$\frac{B_m}{H_m} = -\mu_0 \frac{l_m}{l_{ef}} L_f C_f \quad (\text{A.5})$$

Onde:

B_m é a indução magnética correspondente ao ponto de operação do ímã [T];

H_m é a intensidade de campo magnético correspondente ao ponto de operação do ímã [Aesp/m];

μ_0 é a permeabilidade do vácuo $4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

l_m é a comprimento do ímã [m];

l_{ef} é a comprimento do entreferro [m];

L_f é a relação entre o fluxo total e o fluxo concatenado;

C_f é a relação entre a área da seção magnética do entreferro e a área da seção polar do ímã permanente;

Isolando l_{ef} :

$$l_{ef} = -\mu_0 \frac{H_m}{B_m} l_m L_f C_f \quad (A.6)$$

Substituindo valores na expressão (A.6) obtém-se:

$$l_{ef} = 4\pi \times 10^{-7} \times \left(-\frac{433700}{0,605} \right) \times 0,008 \times 1,5 \times 1 = 10,81 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (A.7)$$

O valor da indução magnética no entreferro (B_{ef}) pode ser determinado pela relação L_f , que cujo valor escolhido foi 1,5, conforme visto anteriormente.

$$L_f = \frac{B_m}{B_{ef}} = 1,5 \quad (A.8)$$

Isolando B_{ef} e substituindo valores, obtém-se:

$$B_{ef} = \frac{B_m}{L_f} = \frac{0,605}{1,5} = 0,4 \text{ T} \quad (A.9)$$

A determinação da força desenvolvida pelos ímãs permanentes foi realizada através do conjugado nominal. O raio externo dos rotores é igual a 80 mm. Como o centro da aresta externa dos ímãs foi posicionado a 5 mm da periferia do rotor, os centros geométricos dos ímãs permanentes estão situados a 62,5 mm do eixo de rotação, conforme se verifica na figura A.3.

O número escolhido de ímãs permanentes foi 6 em cada rotor, para evitar excesso de afastamento ou de proximidade, que poderia resultar em considerável dispersão. Com 6 ímãs em cada rotor, o passo polar é de 60° .

O conjugado da máquina é produzido pela interação dos ímãs permanentes com a corrente que circula nos enrolamentos. Assim pode-se escrever:

$$C = F_{ip} R N_{ip} \quad (A.10)$$

Onde:

C é o conjugado [Nm];

F_{ip} é a força de cada ímã permanente [N];

R é o raio [m];

N_{ip} é o número de ímãs permanentes.

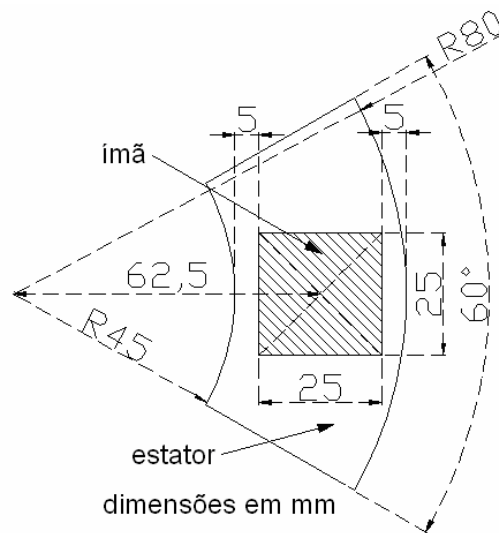


Figura A.3 Posição de um ímã em relação ao estator

Substituindo valores e isolando F_{ip} , obtém-se:

$$F_{ip} = \frac{3}{12 \times 0,0625} = 4N \quad (A.11)$$

A determinação da força magnetomotriz foi realizada considerando a interação da corrente dos condutores de cada bobina com a densidade de fluxo magnético produzida pelos ímãs e desprezando a relutância dos núcleos.

A figura A1.4 representa um corte da máquina, com ímãs permanentes e enrolamentos:

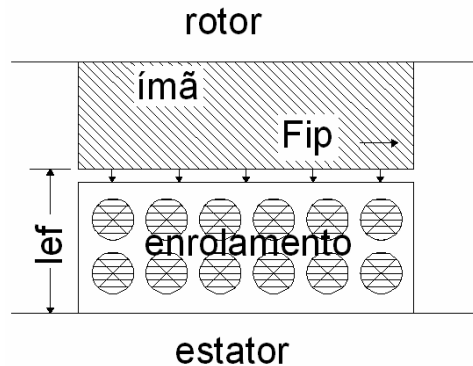


Figura A.4 Corte da máquina

A força produzida por cada um dos ímãs permanentes pode ser calculada pela expressão:

$$F_{ip} = B_{ef} Ni l_c = 4N \quad (A.12)$$

Onde:

$B_{ef} = 0,4$ T, obtido em (A.9);

$l_c = 0,025$ m;

Ni – força magnetomotriz.

Isolando a força magnetomotriz, obtem-se:

$$Ni = \frac{F_{ip}}{B_{ef} l_c} = 400 \text{ Aesp} \quad (A.13)$$

A partir da força magnetomotriz, o enrolamento pode ser calculado.

O comprimento do entreferro calculado na equação (A.7) é $10,81 \cdot 10^{-3}$ m. Após a montagem foi conseguido montar o entreferro com $10,75 \cdot 10^{-3}$ m.

A dimensão radial do estator foi determinada pela soma da dimensão lateral dos ímãs permanentes mais duas vezes 5 mm, para minimizar a dispersão de fluxo.

O raio interno do estator é calculado pela expressão:

$$R_{int} = R_{ext} - l_{rad} \quad (A.14)$$

Onde:

R_{int} é o raio interno do estator [m];

R_{ext} é o raio externo do estator [m];

l_{rad} é a diferença entre o raio externo e o raio interno do estator [m].

O espaço disponível para os enrolamentos é limitado pelo arco correspondente a um passo polar. O comprimento do arco é dado pela expressão:

$$l_{\text{arco}} = R_{\text{int}} \times \theta \quad (\text{A.15})$$

Onde:

l_{arco} é o comprimento do arco polar [m];
 θ é o ângulo geométrico correspondente a um passo polar [rad].

Considerando um acionamento com três fases, a largura interna das bobinas em um passo polar é obtida pela equação (A.16).

$$\text{larg}_{\text{bob}} = \frac{l_{\text{arco}}}{3} \quad (\text{A.16})$$

Onde:

larg_{bob} é a largura interna das bobinas [m].

A altura das bobinas foi calculada considerando o comprimento do entreferro igual a 10,75 mm e estabelecendo 1 mm a distância axial entre os ímãs permanentes e enrolamentos, sendo igual a 9,75 mm.

A seção interna de cada bobina é obtida pela equação (A.17).

$$S_{\text{int}} = \text{larg}_{\text{bob}} \times h_{\text{bob}} \quad (\text{A.17})$$

Onde:

S_{int} é a seção interna da bobina [m²];
 H_{bob} é a altura a bobina [m].

O condutor selecionado para construção das bobinas foi o condutor 18 AWG esmaltado, que apresenta as seguintes características, conforme tabelas práticas:

- Corrente máxima – 2,45 A.
- Seção – 0,8235 mm².
- Ocupação de área – 64,8 espiras/cm².

O número de espiras calculado para cada bobina foi obtido pela multiplicação da ocupação de área do condutor pela seção interna das bobinas.

$$N_{\text{espc}} = O_{\text{cup}} \times S_{\text{int}} \quad (\text{A.18})$$

Onde:

N_{espc} é o número calculado de espiras;
 O_{cup} é a densidade espiras do condutor 18 AWG [esp / m²]

A figura A1.5 mostra o posicionamento das bobinas.

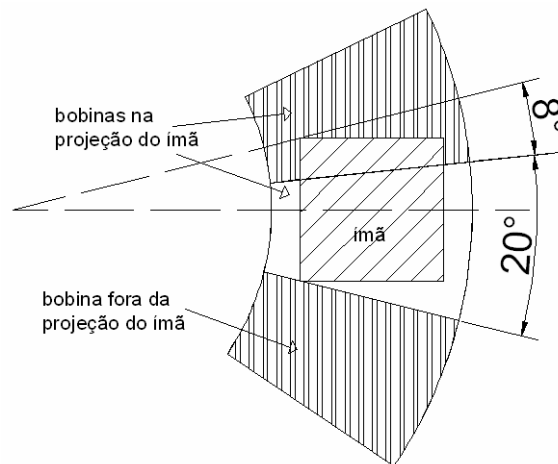


Figura A.5 Indicação das bobinas sob a projeção de um ímã

O número de espiras localizadas na projeção de cada ímã permanente pode ser calculado através do produto do arco associado aos vértices internos subtraído de um espaço entre bobinas pela altura das mesmas multiplicado pela densidade de espiras do condutor. A expressão do número de espiras está apresentada na equação (A.19).

$$N_{pip} = (\theta_{ip} R_{int} - E_b) h_{bob} O_{cup} \quad (A.19)$$

Onde θ_{ip} é o ângulo definido pelos vértices internos do ímã permanente e o centro da máquina;

E_b é o espaçamento entre bobinas

A determinação da corrente em cada bobina é realizada pelo quociente da força magnetomotriz pelo número de espiras situadas na projeção de um ímã permanente.

$$i = \frac{Ni}{N_{pip}} \quad (A.20)$$

Os valores de corrente admissível para condutores apresentados em tabelas práticas, consideram que haja circulação contínua de corrente. No caso da máquina Torus os enrolamentos são energizados seqüencialmente e devido à disposição das bobinas e dos ímãs há circulação forçada de ar. A refrigeração dos enrolamentos nessa situação é eficiente.

Em função das considerações anteriores, foi admitido que os valores de corrente utilizados podem ser superiores aos valores tabelados sem que sejam previstos danos à máquina.

O quadro A.1 contém os dados calculados para a máquina.

| | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| Raio externo | 0,080 m |
| Raio interno | 0,045 m |
| Arco interno de bobina | 0,015 m |
| Altura da bobina | 0,00975 m |
| Seção interna de bobina | $1,46 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ |
| Condutor | 18 AWG |
| Número calculado de espiras | 133 |
| Corrente calculada | 3 A |
| Número efetivo de espiras | 78 |
| Corrente efetiva | 3,7 A |

Quadro A.1 Dados da Máquina Torus

Como os enrolamentos não são energizados continuamente e a máquina é bem refrigerada, foi considerado o valor de corrente efetiva utilizado não produziria danos.

APÊNDICE B

ÍMÃS PERMANENTES

Os ímãs permanentes são elementos passivos que produzem fluxo magnético sem enrolamentos de excitação e sem potência elétrica e são constituídos por materiais chamados magneticamente duros devido à dificuldade de alteração da magnetização apresentada [53].

Entre as características importantes dos ímãs permanentes, estão a densidade de fluxo e a estabilidade magnética. Estas características dependem das condições de magnetização cíclica, que definem o laço histerese do material, representado na figura A2.1.

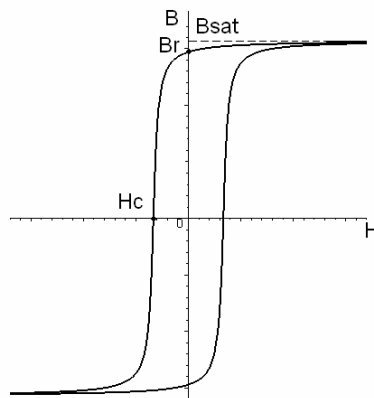


Figura B.1 Curva de histerese

O segundo quadrante da curva de histerese descreve as condições de utilização dos ímãs permanentes, chamado de curva de desmagnetização, cujos limites são $(0, Br)$ e $(Hc, 0)$. A figura A2 2 mostra uma curva de desmagnetização.

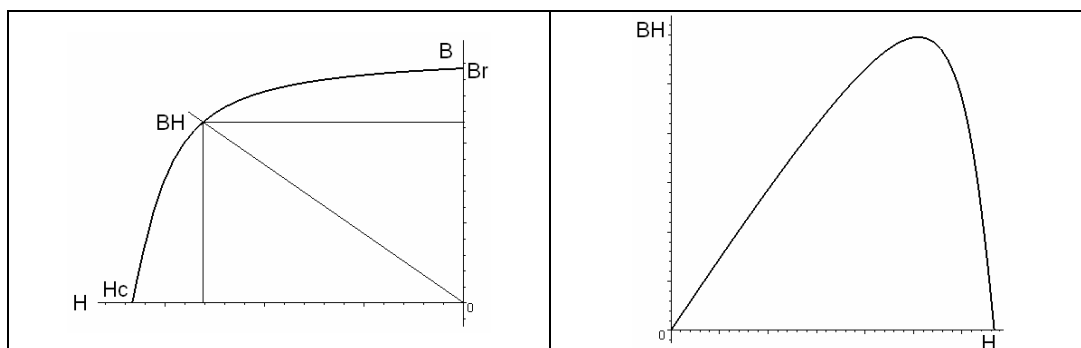


Figura B.2 Curva de desmagnetização

Figura B.3 Curva do produto energético

O produto das coordenadas B e H da curva de desmagnetização gera a curva de produto energético, mostrada na figura A2.3.

Há três pontos importantes da curva de desmagnetização são os pontos de interseção com o eixo vertical (ponto Br), ponto de interseção com o eixo horizontal (ponto Hc) e o ponto de produto energético máximo.

O ponto Br, que corresponde à indução magnética quando a intensidade de campo é nula, é denominado densidade de fluxo magnético remanente, remanência ou indução magnética remanente [51] [52].

O ponto Hc corresponde ao ponto de desmagnetização do ímã sob efeito de um campo magnético externo. É denominado intensidade de campo magnético coercitiva, coercitividade ou força coercitiva.

O ponto de produto energético máximo corresponde ao ponto máximo da curva obtida pelo produto das coordenadas B e H da curva de desmagnetização. Caso o circuito magnético funcione no ponto de produto energético máximo, o volume do ímã permanente é minimizado da mesma forma como o seu custo [54].

Os materiais magneticamente apresentam baixa permeabilidade e coercitividade maior que 10 kA/m [21] [53].

O quadro A2.1 apresenta propriedades dos principais materiais utilizados como ímãs permanentes.

| Material | Br (T) | Hc (kA/m) | (BH)máx kJ/m ³ | Permeabilidade relativa | Temperatura de trabalho (°C) |
|---------------------|-----------|--------------|------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| Alnico | 0,71-1,31 | 43,8-160 | 11,9-82 | 2,1-6,4 | 520 |
| Ferrite | 0,23-0,42 | 180-280 | 25-31,8 | 1,04-1,2 | 400 |
| Samário-Cobalto | 0,83-1,18 | 480-800 | 128-240 | 1,03-1,05 | 250 |
| Neodímio-Ferro-Boro | 1,2-1,3 | 350-1120 | 280-350 | 1,03-1,065 | 150 |

Quadro B.1 Propriedades de Ímãs Permanentes [21] [26] [51] [53]

As propriedades dos ímãs permanentes dependem de fatores externos como temperatura, pressão e intensidade de campo magnético. A alteração de algum desses fatores pode ocasionar variações nas propriedades, que podem ser reversíveis, irreversíveis ou estruturais.

As variações reversíveis desaparecem quando o fator determinante retorna ao valor original. Um exemplo são as variações causadas pela alteração de temperatura abaixo do ponto Curie na curva de histerese e na indução remanente.

As variações irreversíveis permanecem após o retorno ao valor original do fator determinante da mesma. Um exemplo é a perda das características magnéticas de um ímã permanente após a elevação de temperatura acima do ponto Curie. O estado inicial do ímã pode ser atingido através de uma remagnetização.

As variações estruturais modificam a estrutura metalúrgica do ímã permanente e não podem ser revertidas através de remagnetização. Um exemplo de variação estrutural é a corrosão, à qual os ímãs de terras raras são suscetíveis. Devido à corrosão, os ímãs permanentes de terras raras necessitam de revestimentos protetivos de zinco, níquel, alumínio ou resina [21].

APÊNDICE C

SIMETRIAS ADMITIDAS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Simetrias admitidas por equações diferenciais são quaisquer mudanças de variáveis que mapeiam soluções exatas dessas equações em novas soluções exatas das mesmas.

Para que uma mudança de variável seja uma simetria admitida por uma equação diferencial é necessário que tal mudança de variável obedeça ao critério de invariância, descrito a seguir.

Dada uma equação diferencial expressa em termos das variáveis x , y , z , ... as substituições dadas por

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x^*(x, y, z, \dots) \\y &\rightarrow y^*(x, y, z, \dots) \\z &\rightarrow z^*(x, y, z, \dots)\end{aligned}$$

não alteram o formato da equação diferencial resultante, i. é, ao substituir x por x^* , y por y^* e z por z^* em uma dada equação diferencial, utilizando a regra de derivação em cadeia, deverá ser obtida uma equação diferencial idêntica à original, exceto pela troca de variáveis.

Como por exemplo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{C.1})$$

pode ser expressa através das variáveis:

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x^*(x, y, z) \\y &\rightarrow y^*(x, y, z) \\z &\rightarrow z^*(x, y, z)\end{aligned}$$

desde que para tanto seja empregada a regra de derivação em cadeia a fim de eliminar as derivadas em relação às variáveis originais.

Inicialmente são calculadas as derivadas parciais de primeira ordem em relação às variáveis originais

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial z}$$

A seguir são calculadas as derivadas parciais de segunda ordem em relação às variáveis originais

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 x^*}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x^*} + \frac{\partial x^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} \frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial x^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x} + \frac{\partial x^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial y^*} + \frac{\partial y^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}} \frac{\partial y^*}{\partial x} + \frac{\partial y^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^* \partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial y^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^* \partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial z^*} + \frac{\partial z^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial z^{*2}} \frac{\partial z^*}{\partial x} + \frac{\partial z^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial z^* \partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} + \frac{\partial z^*}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial z^* \partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 x^*}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial x^*} + \frac{\partial x^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} \frac{\partial x^*}{\partial y} + \frac{\partial x^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} + \frac{\partial x^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial^2 y^*}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial y^*} + \frac{\partial y^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y^* \partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial y} + \frac{\partial y^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}} \frac{\partial y^*}{\partial y} + \frac{\partial y^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial y^* \partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial^2 z^*}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial z^*} + \frac{\partial z^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial z^* \partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial y} + \frac{\partial z^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial z^* \partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y} + \frac{\partial z^*}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial z^{*2}} \frac{\partial z^*}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 x^*}{\partial z^2} \frac{\partial f}{\partial x^*} + \frac{\partial x^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} \frac{\partial x^*}{\partial z} + \frac{\partial x^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial z} + \frac{\partial x^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial^2 y^*}{\partial z^2} \frac{\partial f}{\partial y^*} + \frac{\partial y^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial y^* \partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial z} + \frac{\partial y^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}} \frac{\partial y^*}{\partial z} + \frac{\partial y^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial y^* \partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial^2 z^*}{\partial z^2} \frac{\partial f}{\partial z^*} + \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^* \partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial z} + \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^* \partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial z} + \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^{*2}} \frac{\partial z^*}{\partial z} \end{aligned}$$

A equação original pode ser re-escrita em função das expressões das derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial x^*}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} + \left(\left(\frac{\partial y^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}} + \left(\left(\frac{\partial z^*}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{\partial y^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial z^{*2}}
\end{aligned}$$

A fim de obedecer ao critério de invariância os coeficientes das derivadas de segunda ordem em relação às variáveis x^* , y^* e z^* devem ser unitários, enquanto os demais devem ser nulos. Portanto:

$$\frac{\partial^2 x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial x} \frac{\partial y^*}{\partial x} + \frac{\partial x^*}{\partial y} \frac{\partial y^*}{\partial y} + \frac{\partial x^*}{\partial z} \frac{\partial y^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial x} \frac{\partial z^*}{\partial x} + \frac{\partial x^*}{\partial y} \frac{\partial z^*}{\partial y} + \frac{\partial x^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial x} \frac{\partial z^*}{\partial x} + \frac{\partial y^*}{\partial y} \frac{\partial z^*}{\partial y} + \frac{\partial y^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^*}{\partial z} \right)^2 = 1 \quad (\text{C.8})$$

$$\left(\frac{\partial y^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial z} \right)^2 = 1 \quad (\text{C.9})$$

$$\left(\frac{\partial z^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial z} \right)^2 = 1 \quad (\text{C.10})$$

A equação original (C.1), em função das variáveis x^* , y^* e z^* , assume o aspecto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^{*2}} = 0$$

As funções x^* , y^* e z^* são definidas através do sistema de equações diferenciais parciais auxiliares (C.2) a (C.10), que é gerado pelas restrições decorrentes do critério de invariância.

Conseqüentemente, dada uma solução exata da equação original $f(x,y,z)$, a função $f(x^*,y^*,z^*)$ também resultará em uma solução.

As simetrias podem ser discretas ou contínuas. As simetrias contínuas são denominadas simetrias de Lie.

APÊNDICE D

DENSIDADE DE POTÊNCIA E DE CONJUGADO

A comparação entre máquinas de diferentes tipos é complexa, devido às variáveis envolvidas [56]. A densidade de potência e a densidade de conjugado são dois parâmetros de avaliação de máquinas elétricas.

Para que esses parâmetros possam ser utilizados para avaliação, é necessário estabelecer bases comuns. Entre as grandezas utilizadas estão o volume e a massa da máquina. No volume há variações entre usar o volume do entreferro e o volume total, na massa há variações em usar a massa de cobre [57] e a massa dos elementos ativos [58].

A rotação da máquina influencia também qualquer comparação. Para evitar distorções uma maneira seria dividir a potência pela velocidade angular e o conjugado pelo quadrado da velocidade angular.

Considerando que para instalação de uma máquina deve ser considerado seu volume total, na comparação também deveria ser utilizado esse valor. Como normalmente não há informação sobre a classe de temperatura do isolamento dos condutores do enrolamento, a divisão pela massa de condutores ativos possibilita analisar a utilização desses condutores.

Uma proposta para cálculo de densidade de potência contemplando o volume total, a velocidade e a quantidade de condutores está sintetizada na expressão

$$dPot = \frac{4 Pot}{\pi L_{ext} D_{ext}^2 m_{ca} \omega}$$

onde Pot é a potência nominal da máquina [W];
 L_{ext} é o comprimento externo da máquina [m];
 D_{ext} é o diâmetro externo da máquina [m];
 m_{ca} é a massa de condutores ativos [g];
 ω é a velocidade angular [rad/s]

Uma proposta para determinação da densidade de conjugado, considerando o volume, a velocidade e a massa de condutores ativos, que poderia ser utilizada é

$$dConj = \frac{4 Conj}{\pi L_{ext} D_{ext}^2 m_{ca} \omega}$$

onde Conj é conjugado nominal da máquina [Nm];
 L_{ext} é o comprimento externo da máquina [m];
 D_{ext} é o diâmetro externo da máquina [m];
 m_{ca} é a massa de condutores ativos [g];

ω é a velocidade angular [rad/s]

As expressões propostas para o cálculo da densidade de potência e da densidade de conjugado nivelam as comparações e evitam que o superdimensionamento de algum parâmetro possa distorcer comparações.

Os valores dos parâmetros da máquina Torus utilizados nas expressões propostas para as densidades de potência e de conjugado são:

$$L_{\text{ext}} = 0,060 \text{ m}$$

$$D_{\text{ext}} = 0,170 \text{ m}$$

$$\text{Pot} = 141,4 \text{ W}$$

$$\text{Conj} = 3 \text{ Nm}$$

$$m_{\text{ca}} = 1310 \text{ g}$$

$$\omega = 47,1 \text{ rad/s}$$

Substituindo os valores dos parâmetros, obtém-se $d\text{Pot}=1,68 \text{ W s/ m}^3 \text{ g}$ rad e $d\text{Conj}= 0,0357 \text{ N m s / m}^3 \text{ g rad}$.