

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS
Escola de Engenharia
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil - CPGEC

**Análise da Confiabilidade de
Estruturas de Concreto
Armado usando o Método dos
Elementos Finitos e Processos
de Simulação**

Herbert Martins Gomes

**Dissertação para Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia**

Porto Alegre

Março 1997

Herbert Martins Gomes

**Análise da Confiabilidade de
Estruturas de Concreto
Armado usando o Método dos
Elementos Finitos e Processos
de Simulação**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE em ENGENHARIA.

Orientador :Prof. Dr. Armando Miguel Awruch
Co-orientador :Prof. Dr. Marcelo Maia Rocha

Porto Alegre

Março 1997

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.

Prof. Dr. Armando Miguel Awruch
Orientador

Prof. Dra. Denise C. C. Dal Molin
Coordenadora do CPGEC/UFRGS

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Américo Campos Filho (CPGEC/UFRGS)
Doutor pela Universidade de São Paulo - USP
- Prof. Dr. Sérgio Roberto Maestrini (UFPEL)
Ph.D. pela North Carolina State University - USA
- Prof. Dr. Ruy C. R. Menezes (CPGEC/UFRGS)
Doutor pela Universidade de Innsbruck

Dedico este trabalho aos meus pais e aos meus familiares pelo apoio e estímulo sempre presentes.

Agradecimentos

Ao orientador e, acima de tudo, amigo Prof. Awruch, pelas valiosas sugestões e o inestimável apoio dispensado durante a elaboração da Dissertação.

Ao Co-orientador e também amigo, Prof. Marcelo, pelas sugestões, críticas e opiniões sempre valiosas sobre a Dissertação.

A todos os novos amigos que formei no Curso de Pós-Graduação, quer sejam mestrandos ou doutorandos, pela convivência fraternal durante todos estes anos em Porto Alegre.

A todos aqueles que de certa forma, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste empreendimento.

Ao Centro Nacional de Supercomputação (CESUP/UFRGS).

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Sumário.....	vi
Lista de Tabelas.....	viii
Lista de Figuras.....	ix
Lista de Símbolos.....	xi
Resumo.....	xvii
Abstract.....	xviii
1. Introdução.....	1
1.1 Primeiras Palavras.....	1
1.2 Breve Revisão Bibliográfica.....	4
1.3 Objetivos e Justificativa.....	12
1.4 Organização do Trabalho.....	12
2. Modelo de Elementos Finitos Para Concreto Armado.....	14
2.1 Modelo 3D de Elementos Finitos para Concreto.....	14
2.2 Modelo Para a Armadura.....	16
2.3 Métodos de Solução.....	17
2.3.1 Análise Estática.....	17
2.3.2 Análise Dinâmica.....	21
2.3.3 Critério de Convergência.....	26
2.4 Formação de Fissuras.....	27
2.5 Esmagamento do Concreto.....	28
2.6 Contribuição do Concreto entre Fissuras.....	32
2.7 Modelo de Retenção da Rigidez ao Corte.....	36
2.8 Modelo Constitutivo para Armadura.....	37
2.9 Superfície de Falha / Plastificação de Quatro Parâmetros (Ottosen).....	39
2.10 Modelo Elasto-Viscoplástico Sensível à Taxa de Deformação com Degradação do Concreto.....	42
3. Verificação do Modelo.....	45
3.1 Análise para Carregamentos Estáticos.....	45
3.2 Análise para Carregamentos Dinâmicos.....	57
4. Análise da Confiabilidade de Estruturas.....	66
4.1 Confiabilidade Estrutural.....	66
4.2 Método de 1ª Ordem.....	67
4.3 Simulação Direta de Monte Carlo.....	74
4.3.1 Simulação com Amostragem por Importância.....	76
4.4 Funções de Estado Limite.....	78
4.4.1 Estados Limites de Utilização.....	80
4.4.2 Estados Limites Últimos.....	81
4.5 Método dos Coeficientes Parciais.....	81
5. Estudo de Casos.....	84
5.1 Confiabilidade no Regime Elástico Linear.....	84
5.2 Confiabilidade para Estruturas com Não-Linearidades.....	88
6. Efeitos de Longa Duração.....	94
6.1 Modelo Reológico para o Concreto.....	94
6.1.1 Teoria da Solidificação para Fluência.....	94
6.1.2 Lei de Fluência em Termos de Taxas.....	96
6.1.3 Equação Constitutiva Incremental.....	97
6.2 Fluxograma para Análise de Longa Duração.....	100

6.3 Funções para Avaliação da Fluência, Retração, Temperatura e Tipo de Cimento segundo o CEB-FIP90	103
6.4 Verificação do Modelo para Cargas de Longa Duração.....	107
7. Conclusões e Sugestões.....	110
7.1 Conclusões	110
7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	111
Referências Bibliográficas.....	112
Apêndice I.....	120
1.1 Suavização de Tensões	120
1.1.2 Projeção de Tensões	120
1.1.3 Suavização Global das Tensões	121
Apêndice II.....	123
1.1 Geração de Variáveis Aleatórias	123
Apêndice III.....	125
1.1 Método dos Mínimos Quadrados para Funções Não-Lineares.....	125

Lista de Tabelas

Tab.1.1 Modelos de Elementos Finitos aplicados a C. A.(1985-1991).....	8
Tab.2.1 Funções de Forma para Elem. Isoparamétrico Linear de 8 Nós.....	14
Tab.2.2 Funções de Forma para Elem. Isoparamétrico Quadrático de 20 Nós.....	15
Tab.2.3 Coeficientes a_F para a Estimativa de G_f	34
Tab.3.1 Características das peças Analisadas.	45
Tab.3.2 Características da Peça Analisada.	58
Tab.3.3 Características da Peça Analisada	60
Tab.4.1 Limites de Desconforto para Vibrações	80
Tab.4.2 Índices de Confiabilidade Alvo e Classes de Segurança.....	81
Tab.5.1 Dados Geométricos para os Exemplos Analisados.....	85
Tab.5.2 Variáveis Aleatórias para Exemplo da Viga	85
Tab.5.3 Variáveis Aleatórias para Exemplo da Laje.....	85
Tab.5.4 Função de Densidade de Probabilidade de Amostragem para Viga.	85
Tab.5.5 Função de Densidade de Probabilidade de Amostragem para Laje.....	85
Tab.5.6 Variáveis Aleatórias Básicas para a Análise Não-Linear da Viga	89
Tab.5.7 Função de Dens. de Prob. de Amost. p/ Análise Não-Linear da Viga.....	89
Tab.5.8 Variáveis Aleatórias Básicas para a Análise Não-Linear da Laje.....	90
Tab.5.9 Função de Dens. de Prob. de Amost. p/ Análise Não-Linear da Laje.....	91
Tab.5.10 Variáveis Aleatórias Básicas p/ Análise Não-Linear Dinâmica para a Viga.	91
Tab.5.11 Função de Dens. de Prob. de Amostr. p/ Análise Não-Linear Din. da Viga.	92
Tab.5.12 Variáveis Aleatórias Básicas p/ Análise Não-Linear Din. para a Casca.	92
Tab.5.13 Função de Dens. de Prob. de Amostragem para a Casca.	93
Tab.6.1 Coeficientes s e tipos de cimento.....	103
Tab.6.2 Parâmetros da Cadeia Kelvin de 5 Elem. p/ Função de Fluência do CEB105	
Tab.6.3 Coeficientes b_{sc} e tipos de cimento	106
Tab.6.4 Coeficientes a e tipos de cimento	107
Tab.A.I.1 Sistema de Equações para integração nodal (20 nós)	122

Lista de Figuras

Fig.2.1 Elemento Isoparamétrico Linear de 8 Nós.....	15
Fig.2.2 Elemento Isoparamétrico Quadrático de 20 nós	15
Fig.2.3 Modelo de Armadura Incorporada.....	24
Método de Newton-Raphson Modificado.....	20
Fig.2.5 Esquema da Análise Estática Não-Linear	21
Fig.2.6 Esquema da Análise Dinâmica Não-Linear.....	26
Fig.2.7 Esquema da Formação de Fissuras	30
Fig.2.8 Esquema da formação de Fissuras (cont.).....	31
Fig.2.9 Esquema da formação de Fissuras (cont.).....	32
Fig.2.10 Distribuição de Tensões em um Elem. Fissurado de Concreto Armado.....	33
Fig.2.11 Modelo de Fissura Fictícia	35
Fig.2.12 Amolecimento à tração com Carga-Descarga Secante.....	36
Fig.2.13 Modelo Elasto-Plástico com Encruamento para a Armadura.....	39
Fig.2.14 Esquema da Sup. de Falha de Ottosen no Espaço Tensões Principais.....	41
Fig.2.15 Vista do Plano Desviador em uma Seção Genérica p/ Modelo de Ottosen.....	41
Fig.2.16 Evolução das superfícies de falha e de plastificação.....	44
Fig.3.1 Geometria das Vigas Analisadas V5/V6 e V7/V8.	46
Fig.3.2 Discretização das Vigas Analisadas.	46
Fig.3.3 Flechas no Vão Central das Vigas V7/V8.....	47
Fig.3.4 Flechas no Vão Central das Vigas V5/V6.....	47
Fig.3.5 Tensões s_{11} na Viga V7/V8 para Nível de Carga de 20%.....	48
Fig.3.6 Tensões s_{11} na Viga V7/V8 para Nível de Carga de 40%.....	48
Fig.3.7 Tensões s_{11} na Viga V7/V8 para Nível de Carga de 60%.....	49
Fig.3.8 Tensões s_{11} na Viga V7/V8 para Nível de Carga de 80%.....	49
Fig.3.9 Tensões s_{11} na Viga V7/V8 para Nível de carga de 100%.....	50
Fig.3.10 Deformações ϵ_{11} na Fibra Superior no Vão Central (V7/V8)	50
Fig.3.11 Deformações ϵ_{11} nas Armaduras Inferiores no Vão Central (V7/V8)	51

Fig.3.28b Deslocamentos Magnificados na Casca	62
Fig.3.29 História de Carregamentos para a Casca.....	62
Fig.3.30 Estrutura elástica Linear.	64
Fig.3.31 . Estrutura com $G_f=0.1 \text{ kgf/cm}$	64
Fig.3.32 Estrutura com $G_f=0.2 \text{ kgf/cm}$	65
Fig.3.33 . Estrutura com $G_f=0.05 \text{ kgf/cm}$	65
Fig.4.1 Domínio de falha e Sua Aproximação Linear no Espaço Gaussiano Normal.	69
Fig.4.2 Relação entre a Probabilidade de Falha e o Índice b de Confiabilidade.	70
Fig.4.3 Fluxograma para FORM.	74
Fig.4.4 - Esboço da Técnica “Importance Sampling” para uma Variável Aleatória.	78
Fig.5.1 Probabilidade de Falha p/ Viga Utilizando M.E.F. como F.E.L.	86
Fig.5.2 Probabilidade de Falha p/ a Viga Utilizando Equação da Flecha como F.E.L.....	87
Fig.5.3 Probabilidade de Falha p/ a Laje Utilizando M.E.F. como F.E.L.....	87
Fig.5.4 Probabilidade de Falha p/ a Laje Utilizando Equação da Flecha como F.E.L.	88
Fig.5.5 Probabilidades de Falha para Viga na Análise Não-Linear	90
Fig.6.1 Cadeia de Kelvin com 5 Elementos.	97
Fig.6.2 Fluxograma para Análise Estática Não-Linear de Longa Duração	102
Fig.6.3 Deslocamentos no vão central em 100 dias para a viga analisada.....	108
Fig.6.4 Deslocamentos no Vão Central em 27 anos para a Viga Analisada	109
Fig. A.II.1 Método da Transformação Inversa para Geração de Variáveis Aleatórias.....	124

Lista de Símbolos

Letras Romanas Minúsculas

a_0	Coefficiente do método de integração de Newmark
a_1	Coefficiente do método de integração de Newmark
a_2	Coefficiente do método de integração de Newmark
a_3	Coefficiente do método de integração de Newmark
a_4	Coefficiente do método de integração de Newmark
a	Parâmetro da superfície de Ottosen
b	Parâmetro para a superfície de Ottosen
b_0	Parâmetro para relacionar taxa de deformação elástica com o parâmetro de fluidez
b_1	Parâmetro para relacionar taxa de deformação elástica com parâmetro de fluidez ou parâmetro para comportamento pós-falha do concreto
c	Velocidade de propagação de uma onda no concreto
c_1	Coefficiente no amortecimento de Rayleigh
c_2	Coefficiente no amortecimento de Rayleigh
$\det[J]$	Determinante Jacobiano
$h(y)$	Função de estado limite no espaço Gaussiano normal
$f_{\underline{x}}(\underline{x})$	Densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias básicas
f'_t	Resistência última à tração para o concreto
f_{cm}	Resistência média à compressão do concreto
f_{cm0}	Resistência média base à compressão do concreto
f'_c	Resistência última à compressão do concreto
f_y	Tensão de escoamento do aço
$g(\underline{x})$	Função de estado limite no espaço original das variáveis aleatórias
$l(y)$	hiper-plano
h	Espessura da laje
k	Densidade de trabalho viscoplástico na faixa de deterioração
$l_n(\underline{x})$	Função de densidade de probabilidade de amostragem
l	Comprimento de vão
l_c	Largura equivalente de fissura
$\{p\}$	Vetor de forças internas resistentes
n	Número de variáveis aleatórias básicas
s	Coefficiente que relaciona tipos de cimento
t	Tempo
t_s	Idade de início da retração
t'	Tempo de aplicação do carregamento
t_f	Tempo de início da deterioração
$t_{0,T}$	Idade de carregamento ajustada para levar em conta efeitos da temperatura na maturação do concreto

u	Perímetro da seção de concreto em contato com o ar
$\{u\}$	Vetor de deslocamentos nodais
$\{\dot{u}\}$	Vetor de velocidades nodais
\underline{u}	Vetor de amostras de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas
$\{\ddot{u}\}$	Vetor de acelerações nodais
$\{u\}_{NO}$	Deslocamentos nodais
w_{max}	Flecha máxima
w	Abertura fictícia de fissura
\underline{x}	Amostra das variáveis aleatórias básicas
\underline{x}^*	Amostra das variáveis aleatórias básicas no ponto de projeto
x	Coordenada x
$x_{d,i}$	Variáveis de dimensionamento
y	Coordenada y
\underline{y}	Amostra das variáveis aleatórias básicas no espaço Gaussiano Normal
\underline{y}^*	Amostra das variáveis aleatórias básicas no ponto de projeto no espaço Gaussiano Normal
z	Coordenada z

Letras Romanas Maiúsculas

A_c	Área da seção de concreto
$[B]$	Matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais
$[C]$	Matriz de amortecimento
CA	Concreto armado
$[D]$	Matriz constitutiva
$[D^*]$	Matriz constitutiva isotrópica modificada
E	Módulo de elasticidade
E_o	Módulo de elasticidade tangente do concreto
E_c	Módulo de elasticidade do concreto
$E_c(t)$	Módulo de elasticidade do concreto com o tempo
E_s	Módulo de elasticidade do aço
E^*	Módulo de elasticidade modificado
E_m	Módulo de elasticidade de um elemento da cadeia de Kelvin
F_0	Função de plastificação
F_f	Função de falha
F	Superfície de falha/plastificação
G	Carga permanente
G_f	Energia de fratura
G_0	Módulo de deformação ao corte
G_c	Módulo de deformação ao corte corrigido
H	Encruamento para o aço
I_2	Segundo invariante do tensor de tensões
$I[.]$	Função indicadora

I_1	Primeiro invariante do tensor de tensões
$J(t, t')$	Função de fluência
J_2	Segundo invariante do tensor desviador de tensões
J_3	Terceiro invariante do tensor desviador de tensões
K_0	Parâmetro da superfície de Ottosen
$[K]$	Matriz de rigidez
$[K^*]$	Matriz de rigidez equivalente
K_1	Parâmetro do fator de retenção ao corte, parâmetro da superfície de Ottosen
K_2	Parâmetro da superfície de Ottosen
L	Distância entre nós da malha de elementos finitos
\underline{L}	Matriz de correlação
M_x	Momento aplicado ao eixo x
M_y	Momento aplicado ao eixo y
$[M]$	Matriz de massa
$[M]^{ele}$	Matriz de massa no processo de suavização a nível de elemento
$[M]^G$	Matriz de massa global no processo de suavização
$[N]$	Matriz de funções de interpolação
N	Número de simulações, esforço normal
N_i	Função de forma
$\{P\}$	Vetor de Cargas aplicadas
$\{P^*\}$	Vetor de cargas equivalente
$[P]^G$	Matriz de carga global no processo de suavização
$[P]^{ele}$	Matriz de cargas no processo de suavização a nível do elemento
\hat{P}_f	Estimador da probabilidade de falha
P_f	Probabilidade de falha
P_x	Função de distribuição acumulada da variável aleatória x
Q	Carga variável
RH	Umidade relativa do ar
R	Resistência estrutural
\underline{S}	Transformação mecânica
S_G	Ação estrutural permanente
S_Q	Ação estrutural variável
S_x	Tensão desviadora x
S_y	Tensão desviadora y
S_z	Tensão desviadora z
T	Operador para transformação para o espaço Gaussiano Normal
$V(t)$	Função de envelhecimento
V	Volume de Controle
W_i	Pesos para a integração nodal
W_p	Densidade de energia viscoplástica acumulada
W_p^f	Densidade de energia viscoplástica no momento do início da deterioração

- \underline{X} Vetor de variáveis aleatórias básicas
 \underline{Y} Variáveis aleatórias básicas no espaço Gaussiano Normal

Letras Gregas Minúsculas

- a Parâmetro para amolecimento
 a_c Parâmetro para modelamento da degradação do concreto
 a_F Coeficiente para estimativa da energia de fratura
 \bar{a} Coeficiente que depende do tipo de apoio para laje ou coeficiente representativo do tipo de cimento
 \bar{a} Coseno diretor para índice de confiabilidade
 a_T Coeficiente de dilatação térmica
 $b_E(t)$ Coeficiente de envelhecimento para módulo de elasticidade
 b_{RHT} Coeficiente para retração
 $b_c(t-t')$ Coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo
 b_{sc} Coeficiente representativo do tipo de cimento
 b Coeficiente no método de integração de Newmark, índice de confiabilidade
 b' Fator de retenção da rigidez ao corte
 b_0 Parâmetro para modelamento pós-falha do concreto
 b_1 Parâmetro para modelamento pós-falha do concreto
 $g_{S,G}$ Coeficiente de majoração da ação estrutural
 $g_{S,Q}$ Coeficiente de minoração da resistência da peça
 g_i^* Coeficiente parcial de segurança para variáveis no ponto de projeto
 g_i Coeficiente parcial de segurança para variáveis de dimensionamento
 g_0 Parâmetro de fluidez
 g Coeficiente do método de integração de Newmark
 \dot{g}_m Taxa de deformação de um elemento da cadeia Kelvin
 $\dot{g}(t-t')$ Taxa de deformação viscoelástica do material sem envelhecimento
 d Coeficiente do método de integração de Newmark
 $\hat{d}_{\hat{p}_f}$ Coeficiente de variação da probabilidade de falha
 \dot{e}_e Taxa de deformação elástica
 \dot{e}_{ve} Taxa de deformação viscoelástica
 \dot{e}_T Taxa de deformação devido à variação de temperatura
 \dot{e}_s Taxa de deformação devido à retração no concreto
 \dot{e}_f Taxa de deformação devido à fissuração
 e_{cs0} Coeficiente de retração nominal
 $e_s(t, t_s)$ Deformação devido à retração
 e_{vp} Deformação viscoplástica
 e_{ref} Deformação de referência

e_{ct}	Deformação máxima admissível para o concreto
e	Tolerância
\dot{e}_c	Taxa de deformação fictícia da fissura
$\{\dot{e}_{vp}\}$	Vetor de taxas de deformações viscoplásticas
$\{\dot{e}_e^{eff}\}$	Vetor de taxas de deformações elásticas efetivas
z	Coordenada natural
z_1	Amortecimento de um modo representativo da estrutura
z_2	Amortecimento de um modo representativo da estrutura
h	Coordenada natural, viscosidade
h_m	Viscosidade de um elemento da cadeia de Kelvin
q	Ângulo de similaridade
l	Parâmetro para superfície de Ottosen, multiplicador de Lagrange
l_m	Parâmetro de um elemento da cadeia de Kelvin
m_x	Vetor de médias das variáveis aleatórias básicas
\hat{m}_{p_f}	Estimador da média da probabilidade de falha
x	Coordenada natural
\dot{p}_s	Taxa de dissipação de energia na fissura
\dot{p}_v	Trabalho efetuado pelas tensões na seção
p	Constante “pi”
r	Densidade
r_c	Meridiano de compressão
r_t	Meridiano de tração
$\hat{s}_{\hat{p}_f}$	Estimador do desvio padrão da probabilidade de falha
s_x	Vetor de desvios padrões das variáveis aleatórias básicas
s	Tensão
s_{ref}	Tensão de referência
$\{s\}_{NG}$	Vetor de tensões a nível dos pontos de integração
$\{s\}_{NG}^*$	Tensões nos pontos de integração através de uma projeção
t_m	Tempo de retardamento de um elemento da cadeia de Kelvin
f	Função de fluência, função de densidade de probabilidade normal
$f(t, t')$	Coefficiente de fluência
w_1	Frequência de um modo representativo da estrutura
w_2	Frequência de um modo representativo da estrutura

Letras Gregas Maiúsculas

$\{y\}$	Vetor do resíduo de forças
Δs	Incremento de tensões
ΔT	Incremento de temperatura

Δt Incremento de tempo

Símbolos Especiais

$\langle \rangle$	Função que anula a expressão para valores negativos
$\hat{}$	Estimador
$[]$	Matriz
$\{ \}$	Vetor
∇	Gradiente de uma função
\int	Integral
$\dot{}$	Primeira derivada em relação ao tempo
$\ddot{}$	Segunda derivada em relação ao tempo
∂	Derivada parcial
$*$	Longa duração
$'$	Plica diferencial
$“$	Polegadas

Resumo

Os critérios de projeto de estruturas de concreto armado estão relacionados com uma teoria bem fundamentada. Devido à incerteza presente nas variáveis envolvidas, no modelo matemático empregado, na implementação estrutural, ou mesmo em problemas de caráter fenomenológico, formulações empíricas são também utilizadas, assegurando uma performance estrutural conhecida. Nas estruturas é importante o conhecimento do nível de segurança com o qual se está trabalhando. Modelos experimentais podem ser usados para prever o comportamento estrutural de tais estruturas, porém esta escolha nem sempre é a preferida devido ao seu alto custo. Ainda assim, não se pode ter uma medida do nível de segurança do projeto. Portanto, o principal problema é a necessidade de uma avaliação quantitativa da margem de segurança, a fim de que se tenha um projeto consistente, onde há uma distribuição homogênea do nível de segurança em toda a estrutura.

Neste trabalho é feita a análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado. Ela é feita através de Simulação Direta de Monte Carlo usando a técnica de Amostragem por Importância. Esta abordagem tira vantagem do esforço empregado em trabalhos determinísticos prévios na predição do comportamento de estruturas de concreto armado. Desta forma, importantes efeitos como a não-linearidade do material podem ser levados em conta prontamente, sem maiores dificuldades computacionais. Devido ao custo computacional requerido pela análise determinística, é feita a escolha da técnica de Amostragem por Importância, reduzindo grandemente a quantidade de simulações, ainda assim com soluções numéricas precisas.

São assumidas como variáveis aleatórias básicas as intensidades das cargas permanentes e variáveis, e propriedades do aço e do concreto, tais como a resistência última à compressão do concreto (f_c), seu módulo de elasticidade (E), a tensão de escoamento do aço (f_y) e o coeficiente de Poisson (μ). O concreto armado é modelado com elementos finitos tridimensionais. O aço é modelado com elementos de placa inseridos nos elementos tridimensionais. A formulação adotada fornece a avaliação do comportamento comum observado no concreto armado, como elasto-viscoplasticidade, fissuração e esmagamento. O modelo de Ottosen de quatro parâmetros é empregado como superfície limite para plastificação e falha. Esta aproximação possibilita a avaliação de simples elementos tais como vigas, ou estruturas mais complexas como vasos de contenção de reatores nucleares. Um modelo visco-elástico baseado na cadeia de Kelvin é empregado para a avaliação do comportamento sob cargas de longa duração. O efeito dos fenômenos de longa duração na confiabilidade global é estudado utilizando-se esta aproximação. As recomendações do CEB-FIP/90 são seguidas.

Abstract

The design criteria of reinforced concrete structures are related to a well established theory. Due to uncertainties present in involved variables, in adopted mathematical model, in structural implementation or in problems of phenomenological character, empirical formulation are also used, ensuring a well known structural performance. In structural design, it is important to know the working safety level. Experimental models may be used to forecast the structural behavior of such structures, but this choice is not always preferable due its high cost and even so, there are not measures of the design safety level. Therefore, the main problem is the need of a quantitative evaluation of the safety margin, leading toward a consistent project, with an homogeneous safety level for the whole structure.

A reliability based analysis of reinforced concrete structures is presented in this work. This analysis is performed using the Direct Monte Carlo Simulation Method with the Importance Sampling technique. This approach takes advantage of the effort employed in previous deterministic works in order to predict reinforced concrete structural behavior. In this way, important effects such as material non-linearities, can be taken into account readily, with no computational difficulties. Due to large computational time required by the deterministic analysis, the Importance Sampling technique is used, reducing largely the amount of simulations, but conserving the accuracy of the numerical solutions.

It is assumed as basic random variables the intensities of live and death loads, and properties of steel and concrete such as the concrete compression strength (f_c), the Young's modulus (E), the steel tensile strength (f_y) and the Poisson coefficient (ν). The reinforced concrete is modeled as a three-dimensional finite element. The steel is modeled with shell elements embodied into the brick elements. The adopted formulation provides the evaluation of common behavior observed in concrete, such as elasto-viscoplasticity, cracking and crushing. The Ottosen's model with four parameters is employed as a strength and yield limit surface. This approach allows the evaluation of simple elements, like beams, or more complex structures such as reactor containment vessels. A visco-elastic model based in Kelvin's chain is employed for the evaluation of the behavior under long term loads. The effect of long term phenomena in the global reliability are studied using this approach. The CEB-FIP/90 recommendations are followed.

Capítulo 1

Introdução

*“... a profession that never
has accidents is unlikely to
be serving its country
efficiently.”*

*Pugsley
1966*

Neste Capítulo é dada uma visão geral sobre o tema abordado, dando ênfase à área mais abrangente que ele envolve, bem como uma breve revisão sobre trabalhos publicados na literatura científica sobre o assunto.

1.1 Primeiras Palavras

Mesmo na construção das mais simples estruturas, o engenheiro depara-se sempre com a incapacidade de prever com exatidão o comportamento real da estrutura. É de tal sorte a quantidade de variáveis envolvidas que ele tem que se contentar apenas com algumas delas para assim descrever o seu comportamento. A escolha destas variáveis deve ser criteriosa. Dentre a gama de variáveis disponíveis, o engenheiro ou o projetista escolhe aquelas mais importantes, ou seja, aquelas que, de seu ponto de vista, mais fortemente intervêm no comportamento da estrutura observada. E para tanto se vale de sua intuição e de seu senso crítico para esta escolha.

De nada adianta possuir tais variáveis se não se sabe como elas interagem entre si. Assim, surgem as propostas de modelos, que nada mais são do que abstrações do conhecimento humano que tentam descrever um certo fenômeno. Estes modelos vão dos mais simples, baseados em conhecimentos práticos, até os mais complexos, onde se tenta abordar o problema de uma forma mais exata e abrangente, muito embora algumas vezes de forma dispendiosa.

Ainda que seja necessário um grande número de variáveis para descrever um fenômeno com exatidão, um pequeno número geralmente explica a maior parte dele. As avaliações que se fazem a respeito destas variáveis e de seu comportamento são, a princípio, de caráter aproximado, uma vez que jamais se conseguirá prever com total segurança o comportamento de uma dada estrutura. E foi neste contexto que grande parte da engenharia estrutural se desenvolveu.

Com o objetivo de melhor entender as estruturas, partiu-se para o conceito de análise, ou seja, a decomposição da estrutura em elementos menores. É neste nível que geralmente aplicam-se os modelos elaborados para a análise das estruturas, baseados na compreensão do comportamento de tais partes. E assim, pode-se entender o funcionamento das estrutura como um todo. Nem sempre a compreensão apenas das partes que compõe a estrutura é suficiente, sendo necessário, muitas vezes, o entendimento de seus inter-relacionamentos.

Seguindo este procedimento, os mais variados modelos foram propostos na análise de estruturas de concreto armado, sendo o método dos elementos finitos um dos eleitos na comunidade científica como o que mais vantagens traz. Uma das razões desta escolha está no fato deste método fornecer ao engenheiro a possibilidade de analisar sistemas estruturais muito complexos de uma maneira realística, incluindo geometria e condições de apoio que são muito próximas da realidade. Neste sentido, na última década, o esforço esteve concentrado na incorporação de propriedades realísticas do concreto para a análise (Chen^[26]). Dentre estas características estão a fissuração, a fluência, a retração e outras mais, que anteriormente não se pensava em poder tratar de maneira precisa.

O estabelecimento de regras que permitam a compreensão do real comportamento de estruturas de concreto armado tem sido objeto de intensa atividade nas últimas décadas. Um primeiro passo para um projeto racional é a pré-avaliação do comportamento que a estrutura terá sob determinado carregamento. Muitas das normas atuais de projeto se baseiam em regras empíricas estabelecidas ao longo dos anos na observação e interpretação de resultados experimentais de elementos de concreto isolados. Esta aproximação foi necessária no passado, devido aos limites da tecnologia. Mesmo assim, esta forma de modelo pode ainda ser utilizada para o projeto de estruturas correntes, desde que haja a devida semelhança com os resultados experimentais e que exista um prévia experiência de projeto por parte do profissional. O problema que surge é o de como resolver problemas cujo escopo foge aos limites da base de conhecimento experimental que se possui. Pode-se sugerir a possibilidade de uma extrapolação para o dimensionamento destas novas estruturas. Entretanto, isto pode levar a uma insegurança quanto ao comportamento ou até mesmo a um conservadorismo exagerado.

Uma das questões que se levanta quanto ao emprego do método dos elementos finitos para concreto armado é se este, através de seu procedimento, poderá anteciper a ocorrência de modos de falha diferentes daqueles que se tem conhecimento prévio e que não são previsíveis com certa intuição. De fato, com a crescente complexidade das estruturas, parte da intuição humana já não é mais válida. Novos materiais e formas arquitetônicas arrojadas, requerem, sem sombra de dúvida, uma análise via elementos finitos. Ainda assim, fenômenos como fissuração, que têm um papel importante no comportamento estrutural de uma peça, não são completamente entendidos, sendo motivo para intensas pesquisas nesta área (Nogushi^[63]).

A despeito do grande desenvolvimento do método dos elementos finitos aplicado a estruturas de concreto armado, todos estes avanços foram no campo determinístico, ou seja, as variáveis que definem o modelo são tomadas como não aleatórias. Muito embora a abordagem determinística represente de forma adequada os fenômenos que ocorrem em estruturas de concreto armado, sempre há uma parcela de incerteza quanto ao valor assumido pelas variáveis do modelo e da resposta da estrutura, que certas vezes podem acarretar comportamentos não previsíveis.

Um dos fatos geradores da preocupação com a abordagem não-determinística foi a necessidade da formulação de códigos de projeto para estruturas de concreto armado baseados em métodos probabilísticos que levassem em conta tais efeitos (CEB^[32]).

O conceito de projeto consistente, onde cada parte de uma estrutura recebe igual atenção quanto à precisão dos resultados, é estendido ao campo da confiabilidade, onde então, se deseja que toda a estrutura tenha um nível de segurança mais homogêneo.

Neste contexto, atualmente, a análise de estruturas levando-se em conta a aleatoriedade possui duas vertentes: a resolução analítica e a resolução numérica. Em ambos os casos a aleatoriedade das variáveis são descritas como processos cujas propriedades estatísticas podem ser estimadas de medições (Brenner^[19]).

A resolução analítica está disponível apenas para alguns casos e que ainda assim requerem considerável esforço matemático. Dentro da análise numérica, encontram-se os métodos que utilizam procedimentos de integração numérica, como elementos finitos estocásticos e análise de primeira ordem, os quais não requerem procedimento de amostragem. Todos estes métodos permitem o tratamento da aleatoriedade inerente nas variáveis que modelam a estrutura.

A tendência de se utilizar os métodos numéricos para análise das estruturas tornou-se mais forte com o avanço da tecnologia dos computadores digitais.

Todos os métodos de elementos finitos estocásticos conhecidos têm um severa desvantagem. Apesar da afirmação de diversos autores em contrário, ainda não é possível analisar estruturas realmente complexas usando-se o método dos elementos finitos estocásticos. Isto se deve à extraordinária capacidade computacional que tais sistemas requerem. As mais complicadas estruturas conhecidas para serem analisadas pelo método dos elementos finitos estocásticos são simples pórticos e placas em estados planos de tensão/deformação (Brenner^[19]).

Uma abordagem sistemática de estruturas pelo método dos elementos finitos estocásticos fica prejudicada pelo requerimento de capacidade computacional e quase sempre também pela falta de precisão obtida. Se por um lado os métodos que utilizam simulação também possuem inconvenientes desta natureza, sua maior virtude provém do fato de não serem restritos a modelos particulares de carga ou resistência (Bucher^[20]) e poderem tratar diversos aspectos das propriedades estruturais reais de

maneira direta, aproveitando-se de procedimentos e de formulações determinísticas já existentes.

Da necessidade da avaliação da confiabilidade das estruturas, surgiram as mais variadas propostas para a resolução deste tipo de problema. Entretanto, assim como no tratamento determinístico, ainda trabalha-se com estimativas, tanto das grandezas aleatórias como dos valores da confiabilidade da estrutura, impossibilitando a predição do fenômeno com a necessária exatidão. Como no tratamento das variáveis aleatórias básicas envolvidas e a própria descrição determinística do fenômeno observado já são aproximados, não se pode esperar, de formulações baseadas nestes termos uma boa precisão para situações reais, além do que, para a verificação da validade de tais estimadores torna-se praticamente impossível procedimentos experimentais. Ainda assim, para fins de Engenharia, a utilização destes métodos fornece resultados satisfatórios, de modo que sua utilização é uma ferramenta, se não a única, útil no tratamento de tais problemas.

A utilização de tal aproximação às estruturas de concreto armado não deve reduzir-se somente à observância de seus resultados. Devido a tais métodos serem incipientes, grande parte do projeto estrutural ainda deve ser baseado em observações práticas e na bagagem de experiência que trazem os projetistas. Da mesma forma como ocorreu com os métodos de elementos finitos, quando pouco a pouco foi sendo ampliada a sua utilização para a análise de estruturas, a análise sistemática da confiabilidade no projeto estrutural, principalmente no campo da simulação numérica, estará futuramente sendo largamente empregada no projeto e dimensionamento de estruturas de concreto armado, levando-se a um projeto mais econômico e seguro.

1.2 Breve Revisão Bibliográfica

Neste item será feita uma breve revisão bibliográfica sobre o que se tem feito no ramo de elementos finitos aplicados à estruturas de concreto armado, assim como o uso da confiabilidade no projeto e análise estrutural.

As primeiras aplicações de elementos finitos a concreto armado remontam a quase 30 anos atrás. Um trabalho publicado por Ngo e Scordelis em 1967 tratava de incluir efeitos de fissuração a um modelo de elementos finitos utilizando elementos triangulares planos para o concreto. De lá para cá muito se tem feito para a representação acurada do comportamento não-linear do concreto armado. Foram feitos melhoramentos na representação da fissuração, plastificação do aço, amolecimento à compressão, enrijecimento à tração, aderência concreto-aço, efeitos viscoplásticos, etc. Estas aplicações primeiramente abrangeram a combinação de modelos constitutivos e elementos finitos para a representação da flexão em um plano (barras e pórticos), flexão fora de um plano (placas e cascas) e posteriormente

estenderam-se a estruturas tridimensionais (vasos de contenção). Grande parte dos modelos foram construídos para carregamentos monotônicos, sendo posteriormente estendidos para carregamentos cíclicos.

Interessante estudo levantado por Darwin^[37], traz um resumo dos trabalhos publicados desde 1985 até 1991 em aplicações de elementos finitos a concreto armado nos Estados Unidos. Neste resumo abordam-se temas como: capacidade do modelo, representação do aço, modelo constitutivo do concreto à compressão, modelo de fissuração, modelo para aderência concreto-aço entre outros, e ao final mostra as tendências para futuros trabalhos no campo do modelamento computacional do concreto armado.

Uma das conclusões extraídas do levantamento feito é a de que as técnicas empregadas amadureceram a tal ponto que algumas “verdades” vieram à tona e mostram uma tendência na aplicação e no desenvolvimento de novos modelos para concreto armado. Em suma, estas “verdades” são as seguintes:

- Fissuras distribuídas, corretamente manuseadas, podem representar adequadamente o processo de fissuração no concreto;
- O modelo de fissuração deve levar em consideração a contribuição do concreto entre as fissuras, por exemplo através da representação do enrijecimento à tração quando o ramo descendente da curva tensão-deformação é controlado pela quantidade de armadura (modelo mais rígido que modelos com redução repentina das tensões de tração após fissuração), ou amolecimento à tração quando o ramo descendente da curva tensão-deformação é controlado por considerações da mecânica da fratura;
- O valor do coeficiente de Poisson, atua com papel menor na representação adequada do concreto armado;
- A rigidez ao corte deve ser mantida seguindo-se a propagação das fissuras;
- A habilidade de representar fissuras que possam fechar e/ou abrir em direções diversas e independentes para carregamentos subseqüentes é importante;
- Detalhes na aderência do concreto com o aço é de menor relevância, desde que o deslizamento não seja um modo de falha dominante;
- Há detalhes da dependência da malha que devem ser considerados (tamanho, tipo, etc.);
- Na análise incremental, passos de carga devem ser limitados de forma a não induzir a sobrecarga da estrutura num único incremento de carga, causando predições errôneas, ou seja, é geralmente aconselhável obter

convergência na solução de um passo antes de passar para o seguinte, a fim de não superestimar a capacidade de carga da estrutura.

A seguir traz-se uma tabela extraída da referência mencionada, onde relacionam-se as ocorrências de uso dos diferentes modelos.

Tab.1.1 Modelos de Elementos Finitos aplicados a C.A.(1985-1991)

Tipo de modelo:	
Carregamento monotônico	
Barras e pórticos	5,6
Estruturas bi-dimensionais	1,2,3,4,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,19,20,21,22,23,24
Placas e cascas	3,19,21
Axissimétricos	7
Aplicações especiais	17
Carregamentos cíclicos	nenhum
Formulação constitutiva	
Tangente	1,2,8,10,11,12,15,16,20,21,22
Secante	3,4,5,6,13,14,17,19,23,24
Não utilizado	7,18
Representação do Aço	
Distribuído	2,3,4,8,9,10,13,14,15,19,20,22,23,24
Discreto	5,6,7,10,11,12,16,17,18,22
Incorporado	9
Não Utilizado	1,21
Modelo Constitutivo para o Aço (todos unidimensionais)	
Elastoplástico perfeito	3,4,5,6,7,8,9,12,15,18,19,20,21,22,23
Elastoplástico com encruamento	2,7,15,18,20,22
Não linear	9,11,12,24
Não utilizado	1,17
Representação da aderência	
Aderência perfeita	3,4,5,6,7,8,9,12,15,18,19,20,21,22,23
Modelo de aderência “stress-slip”	2,10,11,13,14,16,17,22,24
Não utilizado	1
Modelos de fissuração do concreto	
Enrijecimento à tração	1,2,4,8,9,10,13,14,15,19,20,21,22,23,24
Não usado	5,6,7,11,12,16,18,21
Não aplicado	17
Amolecimento à tração	1,2,3,4,5,6,9,10,11,12,20
Usado	7,8,13,14,15,16,18,19,21,22,23,24
Não usado	17
Retenção ao corte	
Valor fixo	4,7,10,15,16,18,19
Valor variável	1,2,8,9,11,12,20,22,23
Valores 0.05-1.0	1,2,4
0.1	18
0.1-0.5	7
0.2 ou 0.4	19
0.25	15
Não aplicado	3,5,6,13,14,17,21
Fissuras distribuídas	
Ortogonais Fixas	1,2,5,6,8,19,20
Não ortogonais fixas	3,7,9,10,11,12,16,18,24

Que possam girar	1,2,4,12,13,14,15,20,22,23
Não aplicado	17,21

Tab.1.1 Modelos de Elementos Finitos aplicados a C. A.(1985-1991)

Discreta	-
Modelo constitutivo do concreto à compressão	
Linear elástico	7,13
não-linear elástico	1,2,3,4,5,6,8,11,12,14,15,18,19,20
Elastoplástico	21,22,23
Não utilizado	9,10,16
Outros	
Importância da malha utilizada	2,5,6,7,10,11,18
Importância do passo de carga utilizado	2,7
Critério de convergência utilizado	2,7

1.Balakrisman and Murray (1988)
 2.Balakrisnan et al. (1988)
 3.Barzegas (1988)
 4.Barzegas (1989)
 5.Bazant, Pan, Pijaudierr-Cabot (1987)
 6.Bazant,Pan and Pijaudierr-Cabot(1987)
 7.Bérdad and Kotsovos (1985)
 8.Cervenka (1985)
 9.Chang et. al. (1987)
 10.Channakeshava and Iyengas (1988)
 11.Gajer and Dux (1990)

12.Gajer and Dux (1991)
 13.Gupta and Maestrini (1989a)
 14.Gupta and Maestrini (1989b)
 15.Hu and Schonobrich (1990)
 16.Ignatakis et. al. (q989(
 17.Keuser and Melhorn (1987)
 20.Massicotte et. al (1990)
 21.Murtza and Cope (1985)
 22.Stevens et. al. (1991)
 23.Vecchio (1989)
 24.Wu et al. (1991)

De fato, tem-se pesquisado nos últimos anos seguindo-se estes princípios. A referência Cervera^[24] em um dos capítulos de seu livro traz um modelo para análise não-linear tridimensional de estruturas de concreto armado submetidas a cargas transientes via elementos finitos. Seu modelo segue, em linhas gerais, as características básicas apresentadas pelo trabalho de Darwin^[37]. Uma nova característica de seu modelo é a implementação da dependência de certas propriedades do concreto à taxa de deformação, aproximação esta necessária quando do tratamento de cargas de impacto. Também um modelo de deterioração do concreto, através do movimento da superfície de falha, é empregado, possibilitando assim a inclusão de efeitos de fadiga. Seguindo a mesma linha de pesquisa, há uma série de trabalhos ligados ao comportamento de estruturas de concreto armado pesquisados pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS. Os autores Claire^[27], Cozzano^[35] e Prates Júnior^[69] apresentam trabalhos onde um enfoque via elementos finitos é utilizado para a previsão do comportamento das estruturas de concreto armado. Cozzano^[35] emprega elementos bi-dimensionais de 8 nós para o concreto armado, e um modelo de barras incorporadas para as armaduras. O modelo proposto prevê cargas de curta e

de longa duração. Trabalha-se com estado plano de tensões. Emprega-se o modelo de camadas (“overlay model”) para o modelamento do concreto em cargas de longa duração.

Basicamente a referência Claure^[27], em seu trabalho, sintetiza os trabalhos anteriores fazendo uma análise numérica tridimensional para estruturas de concreto armado, utilizando-se elementos hexaédricos de 8 e de 20 nós e modelamento de armaduras com elementos de barras de 2 e 3 nós. Assim como nos trabalhos anteriores, o modelo foi elaborado para carregamentos de curta e de longa duração, de forma que, caso a estrutura esteja submetida a carregamentos de curta duração, o modelo, quando alcançado o estado estável, fornece a solução elastoplástica e em contrapartida, se a estrutura está submetida a cargas de longa duração, o modelo representa o comportamento viscoelástico com envelhecimento do concreto. Da mesma forma que nos trabalhos anteriores, para o modelo de longa duração, incluíram-se os efeitos do tipo de concreto, retração e temperatura definidos no CEB^[30], fazendo-se uso de uma cadeia de Maxwell com 5 unidades para a formulação com o modelo de camadas.

Para a fissuração empregou-se o modelo de fissuras distribuídas, com a formação de fissuras ortogonais fixas nos pontos de integração, sendo isto uma extensão dos modelos empregados em trabalhos anteriores, alterando-se alguns critérios para o surgimento das fissuras de acordo com o CEB^[30]. Ainda estudou-se efeitos de enrijecimento à tração, utilizando ramos do tipo linear e exponencial, aplicando o conceito de energia de fratura para a definição da curva, de forma a levar em conta a contribuição do concreto entre fissuras.

O seu modelo de armaduras permite a colocação de elementos de barras, representando armaduras reais, em qualquer direção dentro do elemento de concreto, podendo representar as ferragens em posições idênticas às do projeto da estrutura. Para tanto, elaboraram-se subrotinas que avaliam a posição de cada barra em relação a cada elemento, descrevendo quais elementos as armaduras interceptam. O modelo constitutivo para as armaduras é do tipo elasto-viscoplástico com encruamento linear podendo representar aços com ou sem patamar de escoamento. Para as armaduras só prevê-se deformações uniaxiais.

Como superfície de falha/plastificação, estuda-se a utilização de dois tipos: um proposto pela referência Cervera^[24] de dois parâmetros e outro proposto por Ottosen^[65] de quatro parâmetros. Como aplicação para a validação do modelo, traz-se comparações entre ensaios de algumas vigas biapoiadas de concreto armado, descritas em Gobetti^[43], e seu programa. Para a resposta elastoplástica instantânea, o modelo mostra-se com boa precisão em todos os exemplos analisados, apresentando diferenças da ordem de 15% nas flechas finais. Entretanto, para cargas de longa duração, o modelo parece superestimar os valores nas flechas, apresentando valores que diferem em 30% daqueles obtidos de ensaios. Na comparação das deformações das armaduras, não há uma evidente concordância, ora superestimando, ora subestimando as deformações. De uma forma geral o modelo apresentou bons

resultados, a despeito do caráter determinístico do enfoque dado, sendo muito útil na pesquisa do comportamento estrutural de peças de concreto armado, principalmente na predição de flechas, submetidas a este tipo de carregamento.

Todo projeto estrutural envolve compromissos legítimos entre a realidade e a simplicidade, entretanto, com o aperfeiçoamento das ferramentas de projeto, estes compromissos moveram-se firmemente na direção da realidade, ao mesmo tempo que os chamados fatores de segurança, ou “fatores de ignorância”, rapidamente diminuíram, como uma recompensa justificada pelo esforço de uma melhor análise (Gerstle^[41]). Com este fato, tem-se desenvolvido estudos com o objetivo de analisar o comportamento das estruturas segundo um enfoque não determinístico. Todos estes estudos tentam levar em conta os efeitos aleatórios nas variáveis básicas envolvidas.

Em um trabalho publicado no CEB^[33], descrevem-se as principais características na utilização de métodos de elementos finitos, baseados na análise da confiabilidade, para vigas de concreto armado sob cargas de curta duração. A combinação da teoria de elementos finitos juntamente com a de confiabilidade é utilizada como uma ferramenta para a avaliação da confiabilidade estrutural como possível medida de comparação de desempenho entre diversos procedimentos de dimensionamento existentes. A avaliação da confiabilidade é feita através do método de 1ª ordem. Basicamente, o que o método de 1ª ordem propõe é uma aproximação da função de estado limite, ou seja, a função que define as fronteiras entre os domínios de falha e de segurança da estrutura no espaço das variáveis de projeto, a um hiper-plano.

A forma de avaliação de confiabilidade a princípio é feita ao nível das seções. Para a análise do estado limite último, emprega-se um programa de elementos finitos de barras com 3 nós e 3 graus de liberdade por nó para a avaliação dos esforços (M_x , M_y e N) e recorre-se a um modelamento a nível de seção, em termos de capacidade e demanda de esforços, para a verificação do estado limite.

Para o concreto, utilizam-se as recomendações existentes no CEB^[30] para o tratamento das características dos materiais aço e concreto. Para função de estado limite de utilização emprega-se a limitação das tensões nas barras de aço a 80% da tensão última característica e também a largura da abertura das fissuras, através de uma formulação empírica que relaciona abertura de fissuras com o diâmetro médio do agregado, taxa geométrica de aço, efeitos de aderência, deformação na armadura, etc. Para função de estado limite último emprega-se a capacidade última à flexão da seção, ou seja, o somatório das forças atuantes na seção devem ser inferiores ao somatório das forças resistentes da mesma. O concreto também é modelado para efeitos de enrijecimento à tração com o uso de ramos descendentes exponenciais. O aço é modelado como material elastoplástico com encruamento.

Este mesmo trabalho faz referência a uma tabela com as variáveis aleatórias básicas empregadas (carregamentos variáveis e permanentes, dimensões da seção de concreto armado, resistência dos

materiais, posição das armaduras, tipos de distribuição, etc.), derivada de normas Alemãs. As variáveis são tomadas como perfeitamente correlacionadas no sistema (campo aleatório), isto é, não há variabilidade espacial. Excetuando-se os carregamentos variáveis e permanentes, entre cada uma das variáveis aleatórias básicas nenhuma correlação é assumida.

Também naquele trabalho analisa-se a confiabilidade de seções de concreto armado retangulares simetricamente armadas para várias condições de carregamentos MxN , utilizando-se as variáveis aleatórias anteriormente expostas e, como resultado, apresenta-se isolinhas de confiabilidade para diagramas de interação MxN . Verifica-se então a existência de coeficientes parciais de dimensionamento não homogêneos quando do emprego das recomendações de dimensionamento. De forma geral, ao se seguir os procedimentos de dimensionamento, para diversos casos de solicitações MxN haverá diversos valores de índices de confiabilidade. Em geral, nos casos observados, observou-se a validade do emprego do método dos coeficientes parciais para as várias situações de estados limites, ou seja, o uso do método dos coeficientes parciais fornece valores para a confiabilidade altos. Particularmente, percebe-se que um nível de segurança homogêneo pode ser alcançado para estados limites de utilização com o uso de diferentes coeficientes parciais de segurança.

Um estudo semelhante ao feito no CEB^[33] foi elaborado por Gomes^[44], só que empregando recomendações da Norma Brasileira para o dimensionamento de seções de concreto armado. O estudo é feito para estados limites últimos. Conclusões semelhantes às obtidas pelo CEB^[33] são encontradas neste estudo.

No trabalho realizado por Duprat^[40], a confiabilidade de pilares de concreto armado é avaliada com a aplicação da técnica de simulação de Monte Carlo. O critério de falha tomado foi o da ultrapassagem da carga de flambagem, definida através da divergência do processo de solução numérica da verificação de equilíbrio ao nível das seções. A formulação foi apresentada via elementos finitos de barras, com as não-linearidades geométricas e dos materiais sendo levadas em conta. Para o dimensionamento das colunas no estado limite último emprega-se recomendações do Bael^[6] (Regulamento Francês).

Com um programa de elementos finitos de barras, fez-se um estudo paramétrico. Os resultados são apresentados de acordo com vários parâmetros determinísticos, como esbeltez, taxa de aço, razão entre carregamentos variáveis e permanentes, tipo de rigidez nas conexões dos extremos do pilar, etc.

As principais conclusões a que chegou o trabalho foram:

- Levando-se em conta conexões mais rígidas, obtém-se um aumento da segurança, particularmente quando o carregamento dominante é do tipo variável;

- Esbeltez é uma fonte de insegurança, aumentando a sensibilidade à excentricidades de cargas;
- Várias combinações de médias e desvios padrões da resistência do concreto dando o mesmo valor característico, não levam a confiabilidades homogêneas, a qual diminui significativamente quando altos valores do coeficiente de variação são tomados, mostrando a aceitabilidade da hipótese de distribuição normal para a resistência do concreto. A sensibilidade da segurança de projeto praticamente anula-se quando admite-se uma distribuição “lognormal” para este parâmetro;
- A influência do escoamento do aço e dimensões geométricas não são muito importantes;
- Tolerâncias nas dimensões e excentricidades de carga devem ser bem especificadas devido a seus efeitos desfavoráveis na segurança do projeto.

1.3 Objetivos e Justificativa

Dentro do contexto apresentado acima, neste trabalho pretende-se analisar a confiabilidade de estruturas de concreto armado, levando-se em conta efeitos importantes no modelamento estrutural bem como técnicas de simulação eficazes para o tratamento da aleatoriedade. Resumidamente, os objetivos a serem atingidos são:

- Analisar diversos tipos estruturais de concreto armado de forma espacial, para carregamentos estáticos e dinâmicos via formulação de elementos finitos para cargas de curta e longa duração e seus efeitos no valor dos índices de confiabilidade;
- Analisar a confiabilidade através de simulação direta de Monte Carlo com o emprego da técnica de Amostragem por Importância na análise de estruturas com fortes não-linearidades;

Ao final do trabalho espera-se obter uma ferramenta, que seja ao mesmo tempo robusta e precisa para a avaliação da confiabilidade em estruturas de concreto armado.

1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho está dividido em 7 capítulos, cada um tratando de um assunto referente ao trabalho.

No presente capítulo (capítulo 1) é dada uma pequena introdução sobre o assunto abordado, juntamente com uma breve revisão bibliográfica da literatura científica, dando maior ênfase a trabalhos publicados que dissertam sobre o mesmo assunto.

No capítulo 2 é apresentado o modelo determinístico para o modelamento e análise das estruturas de concreto armado. Maior ênfase é dada ao modelamento do material concreto armado.

No capítulo 3 é feita a verificação do modelo proposto, tanto para carregamentos estáticos quanto para carregamentos dinâmicos comparando-se diversos exemplos numéricos com resultados experimentais.

Uma breve introdução sobre a análise de confiabilidade estrutural é dada no capítulo 4. Fala-se sobre os métodos de análise de confiabilidade de 1ª ordem, de Simulação Direta de Monte Carlo e Simulação Direta com Amostragem por Importância. Também define-se as funções de estado limite para estruturas de concreto armado.

No capítulo 5 estuda-se a confiabilidade de estruturas de concreto armado, desde estruturas simples na fase elástica-linear a estruturas com não-linearidades.

No capítulo 6 é discutido os efeitos de longa duração. É mostrado um modelo reológico para o concreto armado e é aplicada a teoria da solidificação juntamente com um modelo de cadeias de Kelvin para a avaliação do comportamento das estruturas sob carregamentos de longa duração. Ao final do capítulo é apresentado um exemplo de análise determinística para efeitos de longa duração para uma peça de concreto armado, juntamente com a análise de confiabilidade para esta mesma estrutura.

Conclusões acerca do trabalho feito e sugestões para futuros trabalhos no campo de pesquisa tratado são feitas no capítulo 7.

No final, encontram-se três apêndices, que tratam respectivamente do método utilizado para a suavização das tensões, geração de variáveis aleatórias e a aproximação pelo método dos mínimos quadrados para funções não-lineares.

Capítulo 2

Modelo de Elementos Finitos Para Concreto Armado

“...The behaviour of concrete under such complex loads depends on the state of stress, relative Poisson’s ratios and Young’s moduli... All these cases at present cannot easily be handled by codes of practice or simplified empirical formulae.”

Bangash, M. Y. H.

1989

Neste capítulo é dada uma visão geral sobre o modelo de Elementos Finitos para Concreto Armado empregado, assim como métodos de resolução usados. Maior atenção é dada ao modelamento do material Concreto Armado.

2.1 Modelo 3D de Elementos Finitos para Concreto

Basicamente, o modelo empregado é o mesmo que o proposto por Cervera^[24]. Nele são empregados elementos finitos hexaédricos isoparamétricos da família Serendipity de 8 e de 20 nós com 3 graus de liberdade por nó. Para o elemento de 8 nós são empregadas funções de interpolação do tipo linear para o campo de deslocamentos e, para o elemento de 20 nós, são empregadas funções de interpolação do tipo quadrática. Assim para o elemento linear da Fig. 2.1, as funções de interpolação são dadas na Tab. 2.1., já para o elemento de 20 nós da Fig. 2.2, as funções de interpolação são dadas na Tab. 2.2. Nas Tab. 2.1 e Tab. 2.2 x, h, z são as respectivas coordenadas naturais do elemento finito.

Tab.2.1 Funções de forma para elemento isoparamétrico de 8 nós.

Nó	Função de Interpolação $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z})$
i	$(1/8) (1 - \mathbf{xx}_i)(1 - \mathbf{hh}_i)(1 - \mathbf{zz}_i)$

Tab.2.2 Funções de forma para elemento isoparamétrico quadrático de 20 nós.

Nó	Função de Interpolação $N_i(\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{z})$
1,3,5,7,13,15,17,19	$(1/8)(1+\mathbf{xx}_i)(1+\mathbf{hh}_i)(1+\mathbf{zz}_i)(\mathbf{xx}_i + \mathbf{hh}_i + \mathbf{zz}_i - 2)$
9,10,11,12	$(1/4)(1-\mathbf{z}^2)(1+\mathbf{hh}_i)(1+\mathbf{zz}_i)$
2,4,6,8,14,16,19,20	$(1/4)(1+\mathbf{h}^2)(1+\mathbf{xx}_i)(1+\mathbf{zz}_i)$

coordenadas naturais do elemento. Para os elementos de 20 nós, prevê-se a integração com 8, 12, 14, 15, 18 ou 27 pontos de integração e para os elementos de 8 nós prevê-se a integração com 6, 12, 18 ou 27 pontos de integração de acordo com Bangash^[7] e Cervera^[24].

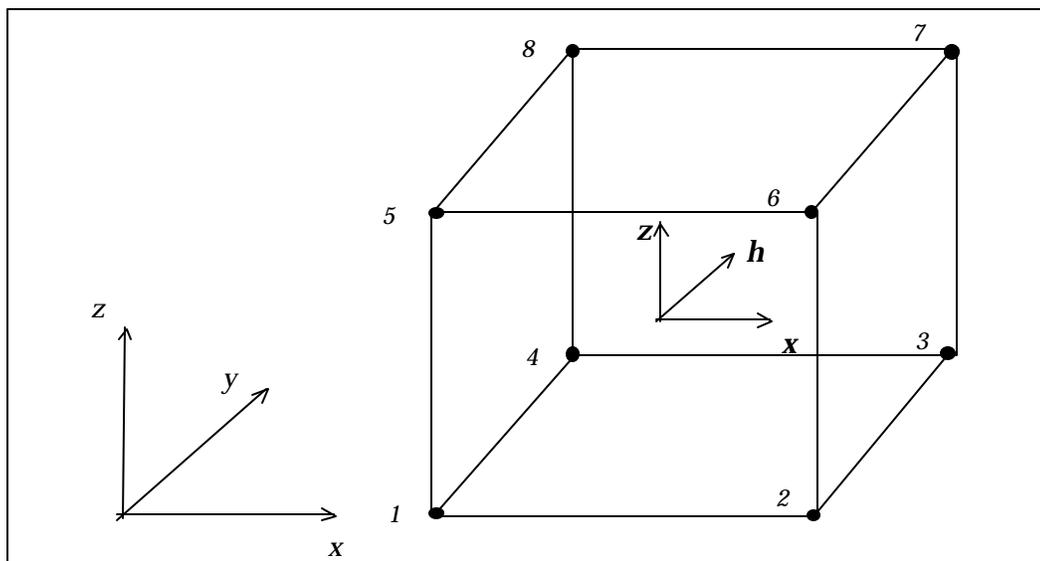


Fig.2.1 Elemento isoparamétrico linear de 8 nós.

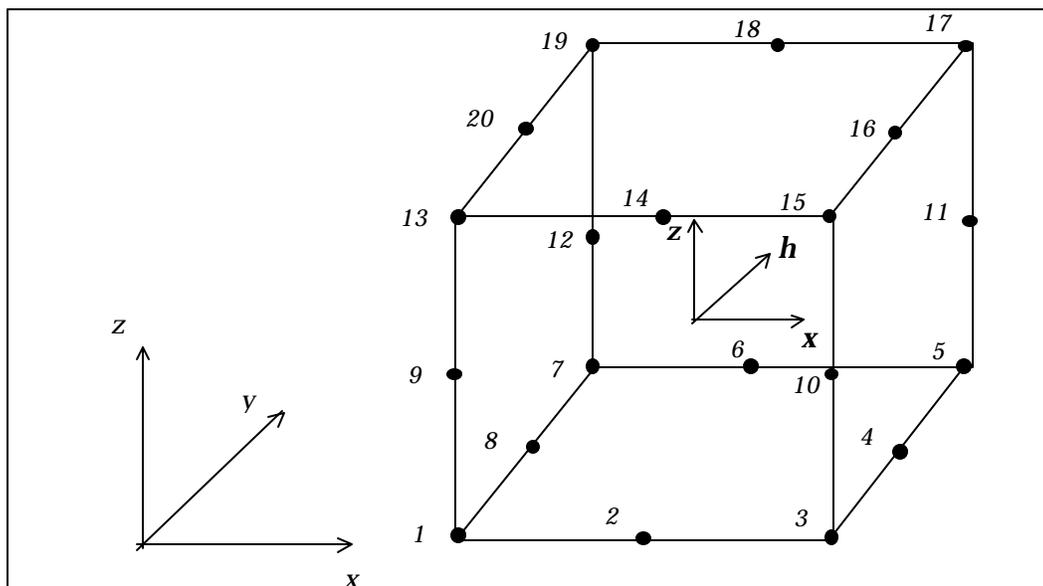


Fig.2.2 Elemento isoparamétrico quadrático de 20 nós.

2.2 Modelo Para a Armadura

Para a armadura emprega-se o modelo incorporado, onde a armadura está inserida no elemento de concreto, formando o elemento composto concreto armado. A formação da matriz de rigidez de uma placa genérica de aço pode ser escrita como:

$$[K]_{aco}^i = E_s t \int_S [B]^T [B] dS \quad (2.1)$$

onde, E_s é o módulo de elasticidade do aço $[B]$ é a matriz que relaciona deformações e deslocamentos no aço e t é a espessura da placa de aço.

Assim, a armadura é representada por uma camada bidimensional de aço, a qual pode localizar-se em qualquer posição perpendicular a uma das coordenadas naturais do elemento. As funções de interpolação para a armadura são as mesmas que para o elemento de concreto, apenas avaliadas na posição em que a mesma se encontra. Assim os deslocamentos na armadura são obtidos através dos deslocamentos nodais do elemento de concreto, fornecendo uma matriz de rigidez da mesma ordem da matriz do elemento de concreto. A matriz de rigidez incorporada é então calculada pela simples soma das matrizes de rigidez calculadas, dada por:

$$[K] = [K]_{concreto} + \sum_{i=1}^{nrein} [K]_{aco}^i \quad (2.2)$$

onde $[K]_{concreto}$ é a matriz de rigidez do concreto e $nrein$ é o número de armaduras inseridas no elemento de concreto.

Assume-se que haja perfeita aderência entre a armadura e o elemento de concreto armado. Considera-se apenas a resistência da armadura para os esforços axiais.

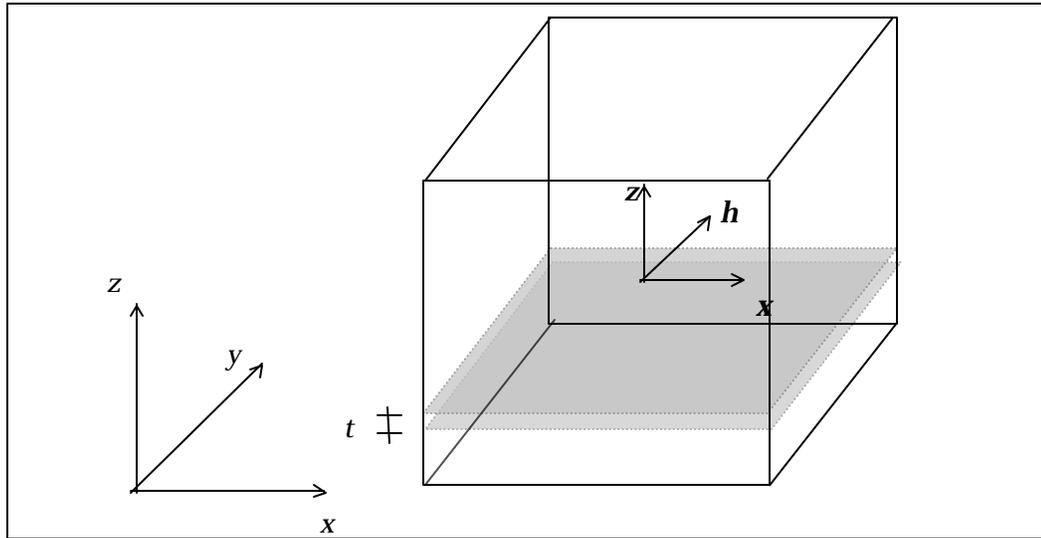


Fig. 2.3 Modelo de Armadura Incorporada.

Independentemente do tipo de função de interpolação empregada para os elementos de concreto, a obtenção dos esforços para armadura é feita através de uma integração bidimensional de 2x2 pontos de Gauss sobre a superfície da mesma. Para cada ponto de integração é ajustado um sistema de referência local mutuamente ortogonal, o qual possui um dos eixos com direção tangente à direção da camada bidimensional. Este sistema de eixos é construído a partir dos termos da matriz Jacobiana do ponto de integração em consideração, através de um procedimento de ortogonalização da matriz, descrito em Cervera^[24], o qual devido ao posicionamento das armaduras, fornece dois dos eixos sempre tangentes à camada bidimensional de aço.

2.3 Métodos de Solução

Adotou-se procedimentos distintos para cada tipo de análise a ser feita.

2.3.1 Análise Estática

Para o estudo de estruturas sem efeitos de inércia e com taxas de deformações desprezíveis, faz-se necessário uma análise estática. A análise estática é feita prevendo-se o comportamento elasto-viscoplástico para o concreto. Este comportamento é levado em conta através de um modelo elasto-viscoplástico que tem sua analogia com um modelo reológico formado

por uma mola em série com um elemento viscoso e um elemento de atrito em paralelo. Desta forma, para se obter a resposta instantânea do modelo, faz-se necessário criar uma variável de tempo, a qual é incrementada até que cessem as deformações viscosas. Este incremento é feito de forma fictícia uma vez que a análise é estática instantânea. Para problemas não-lineares, pode-se expressar a deformação total como a soma das deformações elásticas com as deformações devido à parcela viscoplástica. Assim, pode-se escrever:

$$\{\mathbf{e}\}_t = \{\mathbf{e}\}_e + \{\mathbf{e}\}_{vp} \quad (2.3)$$

onde, $\{\mathbf{e}\}_t$ é o vetor de deformações totais, $\{\mathbf{e}\}_e$ é o vetor de deformações elásticas e $\{\mathbf{e}\}_{vp}$ é o vetor de deformações viscoplásticas, e da mesma forma as tensões elásticas podem ser expressas por:

$$\{\mathbf{s}\}_e = [D]\{\mathbf{e}\}_e \quad (2.4)$$

onde $\{\mathbf{s}\}_e$ é o vetor de tensões, $[D]$ é a matriz que relaciona tensões e deformações. Com o mesmo raciocínio, pode-se estender as expressões anteriores para as taxas de deformações e taxas de tensões elásticas.

Devido à formulação viscoplástica, adotando-se a hipótese análoga à da regra de fluxo convencional de plasticidade associada, as taxas de deformações viscoplásticas podem ser definidas por:

$$\{\dot{\mathbf{e}}\}_{vp} = \mathbf{g}_0 \langle \mathbf{f}(F) \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

onde \mathbf{g}_0 é o parâmetro de fluidez;

$f(\{\mathbf{s}\})$ é a superfície de plastificação;

$\mathbf{f}(F_0) = \frac{f(\{\mathbf{s}\}) - \mathbf{s}_0}{\mathbf{s}_0}$ é a função de plastificação ;

$\begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix}$ é o vetor normal à superfície de plastificação, a qual define a direção do fluxo viscoplástico;

$\langle \rangle$ é a função que anula a expressão para valores negativos de $\mathbf{f}(F_0)$.

A fim de levar em conta os efeitos não-lineares na análise é empregado o método de Newton-Raphson Modificado. O vetor de cargas externas é então aplicado em incrementos discretos. Este método apenas diferencia-se do método original de Newton-Raphson pela possibilidade de reformulação da matriz de rigidez em incrementos de cargas prescritos. A equação de equilíbrio a ser verificada no processo é a equação de equilíbrio estático. Em um instante de tempo t e em certo incremento de carga n , tem-se:

$$\int_V [B]^T \{\mathbf{s}\}_n^t dV - \{P\}_n^t = 0 \quad (2.6)$$

e que assume a seguinte forma em certo incremento de tempo Δt .

$$\int_V [B]^T \{\Delta \mathbf{s}\}_n^t dV - \{\Delta P\}_n^t = 0 \quad (2.7)$$

onde o incremento de tensões elásticas no tempo vem dado por:

$$\Delta \{\mathbf{s}\}_e^t = [D]_n \{\Delta \mathbf{e}\}_e^t = [D]_n \left(\{\Delta \mathbf{e}\}_e^t - \{\Delta \mathbf{e}\}_{vp}^t \right) \quad (2.8)$$

com,

$$\Delta \{\mathbf{e}\}_e^t = [B] \{\Delta d\}^t \quad (2.9)$$

e a equação (2.8), torna-se:

$$\{\Delta \mathbf{s}\}_e^t = [D]_n \left([B] \{\Delta d\}^t - \{\dot{\mathbf{e}}\}_{vp} \Delta t^t \right) \quad (2.10)$$

Usando a equação anterior, o incremento de deslocamentos ocorrido no intervalo de tempo Δt^t vem dado por:

$$\{\Delta d\}^t = [K]^{-1} \{\Delta V\}^t \quad (2.11)$$

onde,

$$\{\Delta V\}^t = \int_V [B]^T [D]_n \{\dot{\mathbf{e}}\}_{vp} \Delta t^t dV + \{\Delta P\}_n^t \quad (2.12)$$

e $[K]$ é a matriz de rigidez tangente, dada por:

$$[K] = \int_V [B]^T [D]_n [B] dV \quad (2.13)$$

com o incremento de deslocamentos dado pela equação (2.11) aplicado à equação (2.10), obtém-se o incremento de tensões e deslocamentos totais, além da taxa de deformação viscoplástica:

$$\{d\}^{t+\Delta t^t} = \{d\}^t + \{\Delta d\}^t \quad (2.14)$$

$$\{\mathbf{s}\}^{t+\Delta t^t} = \{\mathbf{s}\}^t + \{\Delta \mathbf{s}\}^t \quad (2.15)$$

$$\{\mathbf{e}\}_{vp}^{t+\Delta t^t} = \{\mathbf{e}\}_{vp}^t + \{\dot{\mathbf{e}}\}_{vp}^t \Delta t^t \quad (2.16)$$

Devido às não-linearidades decorrentes do comportamento do Concreto Armado, a equação (2.6) é resolvida incrementalmente assegurando-se o equilíbrio para cada etapa de incremento de cargas através do método de Newton-Raphson Modificado. Assim, o vetor de cargas externas é subdividido em incrementos, que são escolhidos de acordo com o conhecimento prévio do comportamento da peça, prevendo grandes incrementos de carga para a fase elástica e pequenos incrementos para a fase não-linear. Devido ao fato do cálculo do incremento de tensões ser baseado numa forma linearizada das equações de equilíbrio e devido às não-linearidades do concreto, as tensões totais obtidas pela soma dos incrementos de tensões não satisfaz estritamente as equações de equilíbrio. Faz-se necessário a correção através do cálculo do resíduo de forças entre iterações sucessivas e aplicá-las como pseudo-cargas ao incrementos seguintes. O resíduo das forças pode ser dado por:

$$\{y\}^{t+\Delta t} = \int_V [B]^T \{s\}_e^{t+\Delta t} dV + \{P\}^{t+\Delta t} \neq 0 \quad (2.17)$$

Na Fig. 2.5 é apresentado um fluxograma simplificado para a estática não-linear, e na Fig. 2.4 é esquematizado uma versão unidimensional da aplicação do método de Newton Raphson .

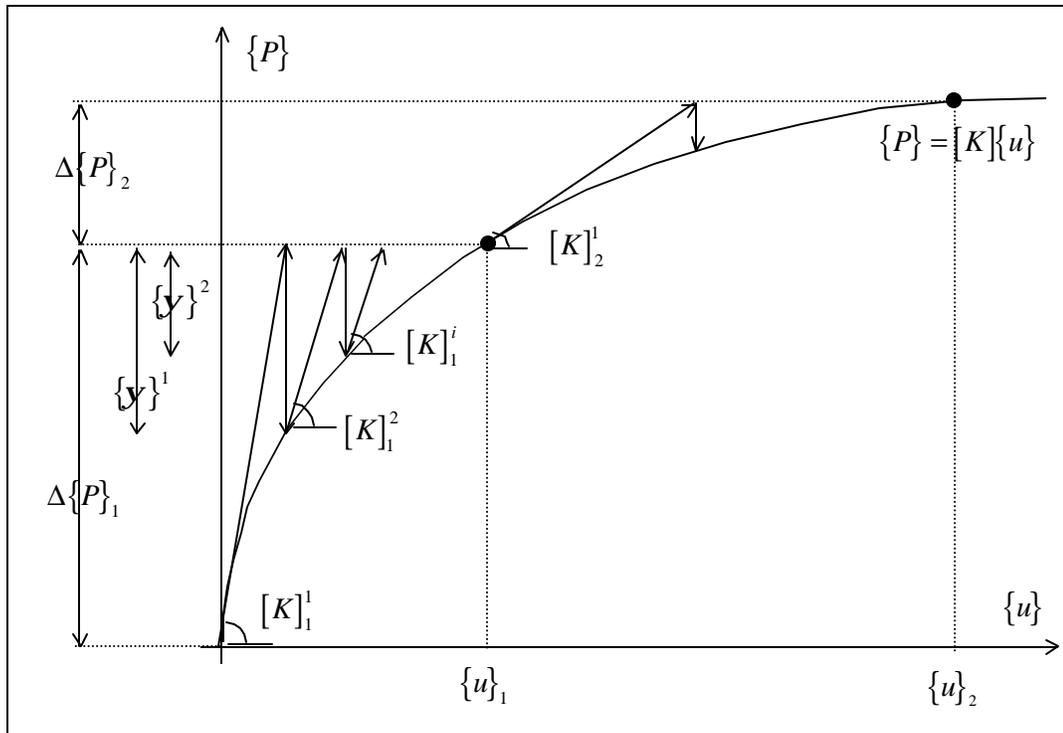


Fig.2.4 Método de NewtonRaphson Modificado

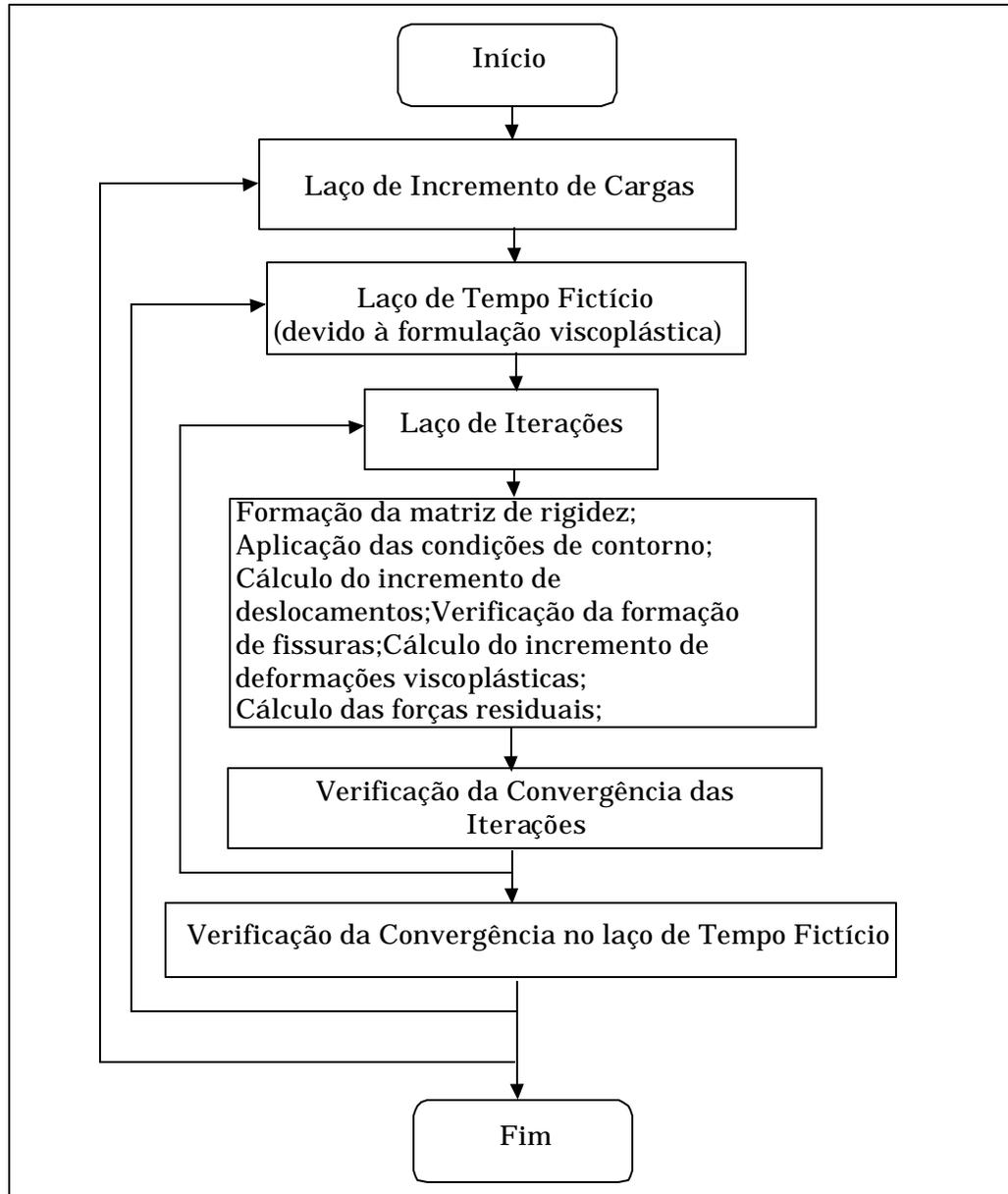


Fig.2.5 Esquema da Análise Estática Não-Linear.

2.3.2 Análise Dinâmica

Para o estudo de estruturas com importantes efeitos de inércia e de carregamentos com características variáveis no tempo, faz-se necessário uma análise dinâmica. O principal objetivo na análise dinâmica é a

integração da equação de equilíbrio dinâmico de uma maneira precisa e ao mesmo tempo econômica. Esta equação vem dada pela seguinte expressão:

$$[M]\{\ddot{u}\}^t + [C]\{\dot{u}\}^t + [K]\{u\}^t = \{P\}^t \quad (2.18)$$

onde o superíndice t indica o tempo, $[M]$ a matriz de massa, $[K]$ a matriz de rigidez da estrutura, $[C]$ a matriz de amortecimento, $\{P\}$ o vetor de cargas para o instante considerado e $\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$, os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos respectivamente.

A precisão e a economia dos vários métodos existentes depende fortemente do tipo de problema a ser resolvido. O fator determinante na escolha de qual tipo de esquema utilizar para a integração da equação dinâmica é a velocidade do carregamento. Para cargas de impacto ou de explosões, com altas taxas de deformações, é mais conveniente analisar-se através de métodos explícitos. Já para casos de carregamentos com velocidades de carregamentos não muito grandes, os métodos implícitos são mais vantajosos, uma vez que podem lidar com incrementos de tempo bem maiores que aqueles utilizados pelos métodos de integração explícito. Dentre os carregamentos que se enquadram neste caso estão aqueles devidos à ação do vento e à terremotos. Nestes casos, a principal desvantagem dos esquemas explícitos está no seu pequeno incremento de tempo necessário para assegurar a estabilidade, o que inviabiliza análises de histórias de tempo mais longas.

Um dos mais populares métodos de integração implícitos é o de Newmark. Um esquema de integração explícito bastante utilizada é o método das diferenças finitas centrais. Há também os algoritmos lineares de múltiplo passo (*LMS-linear multi-step algorithms*), onde um dos mais conhecidos para análise de estruturas não-lineares de concreto armado é o método-a de Hilberg-Hughes-Taylor (Meyer⁶⁰), sendo apenas uma extensão do método de Newmark. O maior inconveniente deste método, diferentemente dos métodos anteriores (de passo unitário), está no tratamento especial requerido para a inicialização do processo de integração.

Neste trabalho é utilizado o método de integração de Newmark. O método de integração de Newmark possui a vantagem de englobar grande parte dos esquemas explícitos, apenas variando-se algumas de suas constantes. A principal hipótese deste método é a de variação linear da aceleração ao longo do passo de tempo. Desta forma, tem-se as seguintes equações, as quais irão linearizar a equação de equilíbrio dinâmico.

$$\{\dot{u}\}^{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}^t + \Delta t \left[(1-g)\{\ddot{u}\}^t + g\{\ddot{u}\}^{t+\Delta t} \right] \quad (2.19)$$

$$\{u\}^{t+\Delta t} = \{u\}^t + \Delta t \{\dot{u}\}^t + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left[(1-2b)\{\ddot{u}\}^t + 2b\{\ddot{u}\}^{t+\Delta t} \right] \quad (2.20)$$

onde os coeficientes g e b são constantes utilizadas na generalização do processo de integração.

Aplicando as equações anteriores à equação de equilíbrio num instante $t + \Delta t$, pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{u}\}^{t+\Delta t} + [C]\{\dot{u}\}^{t+\Delta t} + [K]\{u\}^{t+\Delta t} = \{P\}^{t+\Delta t} \quad (2.21)$$

transformando-se o problema original em um problema estático equivalente, dado por:

$$[K^*]\{u\}^{t+\Delta t} = \{P^*\}^{t+\Delta t} \quad (2.22)$$

$$\text{onde, } [K^*] = [K] + a_0[M] + a_1[C] \quad (2.23)$$

e

$$\begin{aligned} \{P^*\}^{t+\Delta t} = & \{P\}^{t+\Delta t} + (a_0\{u\}^t + a_2\{\dot{u}\}^t + a_3\{\ddot{u}\}^t) [M] + \\ & + (a_1\{u\}^t + a_4\{\dot{u}\}^t + a_5\{\ddot{u}\}^t) [C] \end{aligned} \quad (2.24)$$

sendo os coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, dados por:

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{d\Delta t^2} \quad a_1 = \frac{g}{d\Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{d\Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2d} - 1 \quad a_4 = \frac{g}{d} - 1 \\ a_5 = \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{g}{d} - 2\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde em (2.19) e em (2.20), Δt indica o intervalo de tempo adotado na análise.

A família de métodos de integração de Newmark serão incondicionalmente estáveis, somente para os casos em que:

$$g \geq \frac{1}{2} \quad e \quad d \geq \frac{1}{4}\left(g + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (2.26)$$

Embora a estabilidade do algoritmo esteja assegurada quando se trabalha nos limites referidos, ou seja, os erros não serão amplificados ao longo do tempo, os próprios erros podem ser bastante grandes. Assim, como regra prática para o limite do incremento de tempo é limitá-lo ao menor tempo que uma onda necessita para alcançar de um nó a outro da malha de elementos finitos. Sendo assim, o incremento de tempo será limitado pela condição:

$$\Delta t \leq \frac{L}{c} \quad (2.27)$$

sendo L a menor distância entre dois nós da malha de elementos finitos e c a velocidade de uma onda dilatacional no meio.

Devido à formação de fissuras e não-linearidades do material, Hughes^[49] desenvolveu um algoritmo preditor-corretor para o método de Newmark. As equações que linearizam a equação de equilíbrio dinâmico são escritas da seguintes forma:

$$\{u\}_p^{t+\Delta t} = \{u\}^t + \Delta t \{\dot{u}\}^t + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\mathbf{d}) \{\ddot{u}\}^t \quad (2.28)$$

$$\{\dot{u}\}_p^{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}^t + \Delta t (1 - \mathbf{g}) \{\ddot{u}\}^t \quad (2.29)$$

$$\{\ddot{u}\}_p^{t+\Delta t} = \left[\{u\}_p^{t+\Delta t} - \{u\}^t \right] / \mathbf{d} \Delta t^2 = 0 \quad (2.30)$$

com o sub-índice p representando valores preditores.

Aplicando estes valores na equação de equilíbrio dinâmico, resulta em um problema estático equivalente, onde as não-linearidades foram passadas para o membro direito da equação:

$$[K^*] \{\Delta u\}^{t+\Delta t} = \{Y\} \quad (2.31)$$

com $[K^*]$ da mesma forma que definido anteriormente e o resíduo das forças dado por:

$$\{Y\} = \{P\}^{t+\Delta t} - [M] \{\ddot{u}\}_p^{t+\Delta t} - [C] \{\dot{u}\}_p^{t+\Delta t} - \{p\}(\{u\}_p^{t+\Delta t}), \quad (2.32)$$

sendo $\{p\}(\{u\}_p^{t+\Delta t})$, o vetor de forças internas calculadas considerando-se as não-linearidades surgidas no concreto.

Aplicando-se as equações corretoras para os deslocamentos, acelerações e velocidades, chega-se a:

$$\{u\}_c^{t+\Delta t} = \{u\}_p^{t+\Delta t} + \Delta \{u\}^{t+\Delta t} \quad (2.33)$$

$$\{\ddot{u}\}_c^{t+\Delta t} = \left[\{u\}_c^{t+\Delta t} - \{u\}_p^{t+\Delta t} \right] / \mathbf{b} \Delta t^2 \quad (2.34)$$

$$\{\dot{u}\}_c^{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}^{t+\Delta t} + \Delta t \mathbf{g} \{\ddot{u}\}_p^{t+\Delta t} \quad (2.35)$$

com os índices c representando valores corretores.

Neste trabalho, a matriz de amortecimento é tomada como combinação linear das matrizes de massa e de rigidez (amortecimento de Rayleigh). A vantagem desta abordagem é que a mesma não aumenta o

tempo computacional requerido para a resolução das equações. Por outro lado, modos de freqüências mais altas serão superamortecidos com o emprego deste procedimento. Assim, a matriz de amortecimento será calculada como:

$$[C] = c_1[M] + c_2[K] \quad (2.36)$$

cujos coeficientes c_1 e c_2 podem ser determinados através de:

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2w_1 & w_1/2 \\ 1/2w_2 & w_1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

onde w_1, w_2, z_1, z_2 , são as freqüências e amortecimentos de dois modos representativos da estrutura.

Devido às linearizações feitas na equação de equilíbrio dinâmico e às não-linearidades introduzidas, há a necessidade de correções em $\{\Delta u\}^{t+\Delta t}$ a fim de se atingir o equilíbrio dinâmico em cada passo de tempo.

Para isto, aplica-se o processo iterativo de Newton-Raphson Modificado da mesma forma como explicado na análise estática.

A seguir, na Fig. 2.6, é mostrado um fluxograma básico de funcionamento do programa dinâmico para análise não-linear de estruturas de Concreto Armado. O mesmo modelo reológico para efeitos viscoplásticos utilizado na análise estática é também utilizado na análise dinâmica, havendo apenas diferença no acréscimo do laço de tempo real.

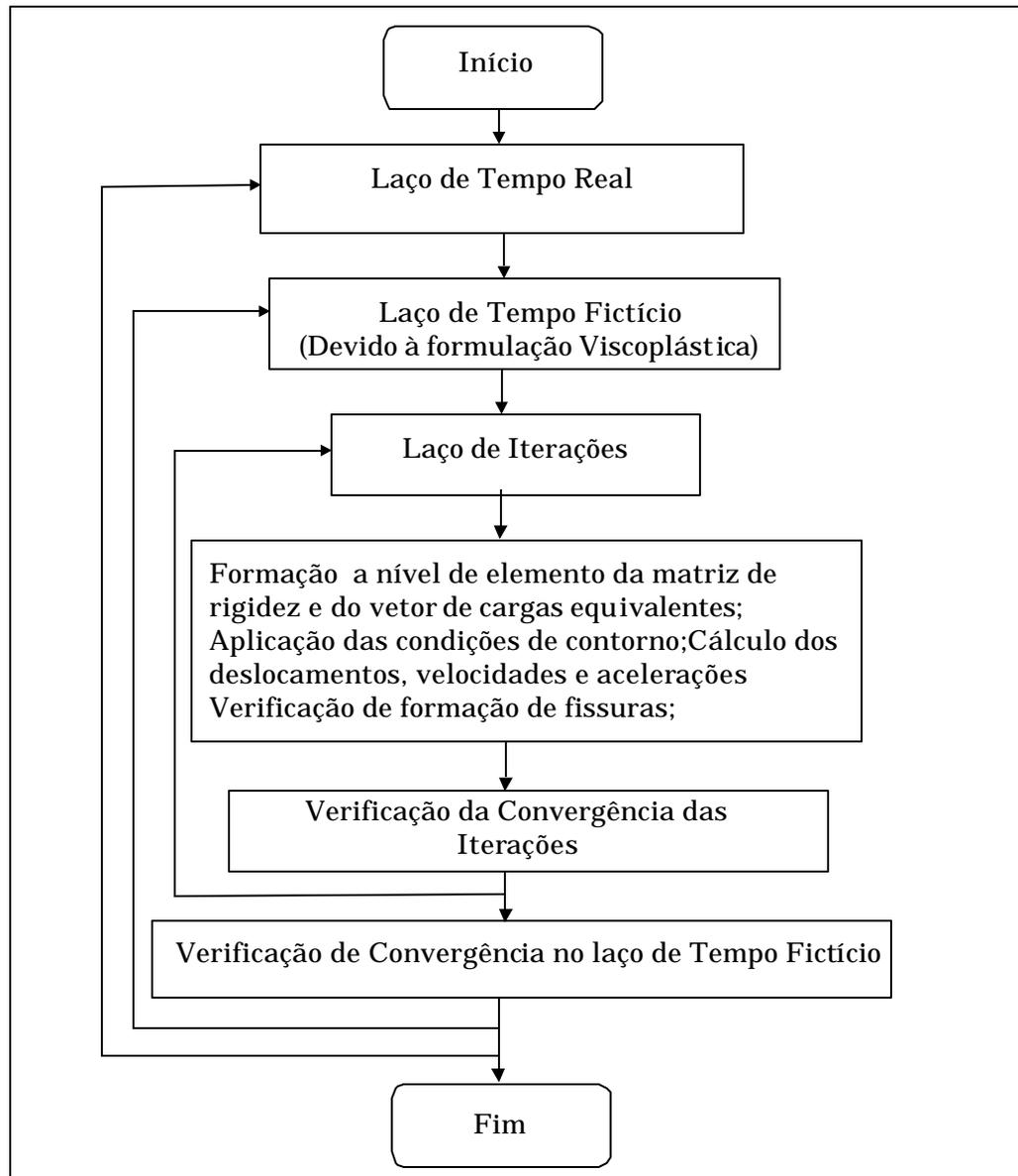


Fig.2.6 Esquema da Análise Dinâmica Não-Linear

2.3.3 Critério de Convergência

Como critério de convergência, nas iterações para o equilíbrio de forças adotou-se:

$$\frac{\|\{y\}_i\|}{\|\{y\}_1\|} \leq e \quad (2.38)$$

sendo $\|\{y\}\|$ a norma euclidiana do resíduo das forças como definido na equação (2.17), e a tolerância adotada, t o tempo fictício, i um certo passo no laço de incremento de tempo fictício e 1 , o primeiro passo no incremento de tempo fictício.

Como critério de convergência para as iterações de tempo fictício na análise viscoplástica, adotou-se :

$$\frac{\|\{e_{vp}^{eff}\}^t\|}{\|\{e_{vp}^{eff}\}^{t_0}\|} \leq e \quad (2.39)$$

onde, $\|\{e_{vp}^{eff}\}\|$ é a norma euclidiana das deformações viscoplásticas efetivas, como definido na equação 2.45, e os índices t_0 e t representam o início das iterações no tempo fictício e um tempo posterior, respectivamente.

2.4 Formação de Fissuras

Neste trabalho emprega-se o modelo de fissuras distribuídas. Assume-se que as fissuras são incorporadas ao elemento de concreto e distribuídas sobre o volume correspondente aos pontos de integração. Assim, o concreto que antes de fissurar era modelado como material isotrópico elástico-linear, após a formação das fissuras, transforma-se em um material ortotrópico, com os eixos principais orientados na direção das fissuras. Uma das vantagens deste modelo em relação ao de fissuras discretas encontra-se na preservação da topologia da malha de elementos finitos, tornando o modelo computacionalmente eficiente. Segundo a Bicanic^[15], este é o principal motivo pelo qual o modelo de fissuras distribuídas está sendo preferido ao modelo de fissuras discretas.

Algumas hipóteses e indicações para a abordagem da formação de fissuras, expostas por Bangash^[7], podem ser resumidas abaixo:

- Quando da formação de uma fissura, o concreto não mais deve suportar tensões de tração na direção normal à da fissura;
- Assume-se que um elemento de concreto paralelo ao plano da fissura consiga suportar tensões e, assim sendo, novas fissuras (a um certo ângulo das fissuras anteriores) podem vir a ocorrer em estados de tensões posteriores;
- As faces da fissura pertencentes a planos paralelos podem se opor ao movimento de deformações que ocorram neste plano, ou seja, pode haver o engrenamento dos agregados do concreto. Este engrenamento é finito e após certo afastamento das fissuras deixa de existir. Haverá tensões de corte nas seções com fissuras, sendo estas inversamente relacionadas com a abertura

da fissura. Caso haja mudanças de carregamento que induzam tensões de compressão normais à fissura, esta se fechará, independente do estado de dano da fissura ou do estágio de engrenamento que se tenha.

Neste modelo para fissuras é permitida a formação de dois conjuntos de fissuras, sendo o segundo conjunto perpendicular ao primeiro conjunto formado. Resumidamente o processo da formação da fissura pode ser descrito da seguinte forma: para cada ponto de integração há um estado triplo de tensões. Calculam-se as tensões principais para este estado de tensões. Caso algumas das tensões principais exceda o limite à tração, há a formação de uma fissura num plano perpendicular àquela tensão principal, e então a matriz constitutiva $[D]$ é alterada a fim de levar em conta os efeitos devidos à fissuração e ao engrenamento na fissura formada. Os eixos ortotrópicos da fissura são fixos. Em carregamentos posteriores, cada ponto de integração fissurado está submetido a um estado plano de tensões. Então, procuram-se as tensões principais neste plano, e verifica-se se alguma delas excede o limite para o material. Caso isto ocorra, um novo conjunto de fissuras é formado perpendicular ao anterior e a um certo ângulo, alterando-se novamente a matriz constitutiva $[D]$ para levar em conta os efeitos da fissuração. Para carregamentos posteriores, nos os pontos de integração com dois conjuntos de fissuras, há um estado unidimensional de tensões. Caso haja a ultrapassagem do limite do material, o ponto é considerado como totalmente fissurado, anulando-se os termos correspondentes da matriz constitutiva $[D]$.

2.5 Esmagamento do Concreto

Para o material concreto armado, utiliza-se o critério da deformação máxima à compressão o qual estabelece como limite para deformação máxima equivalente à compressão o valor de $-3,5 \text{ ‰}$ como descrito em Cervera^[24] e Bangash^[7]. A verificação para o estado de esmagamento é feita ao mesmo tempo da verificação à fissuração. Caso o estado de tensão, naquele ponto, ultrapasse a superfície de falha, assume-se que há a falha do concreto ou por esmagamento ou por fissuração. A diferenciação entre fissuração e esmagamento se dá através da comparação da tensão principal de tração ao valor $f_{cm} / 2$, que caso exceda este valor, define a fissuração, caso contrário define o esmagamento do concreto. Neste último caso, são anulados os termos correspondentes na matriz constitutiva $[D]$ e desprezada a colaboração daquele ponto de integração para o resto da análise. Um modelo de deterioração do concreto como será descrito no item 2.10 é empregado para estados de tensão anteriores ao limite máximo de deformação à compressão mencionado. Este modelo adota como superfície de falha a superfície de quatro parâmetros de Ottosen^[65] ou a de dois parâmetros de Cervera^[24], as quais, uma vez atingidas, inicia o processo de deterioração do concreto através do encolhimento da superfície de plastificação deste. Um

esquema do procedimento descrito anteriormente para a formação das fissuras e para o esmagamento do concreto é apresentado nas Fig.2.7, Fig.2.8 e Fig.2.9.

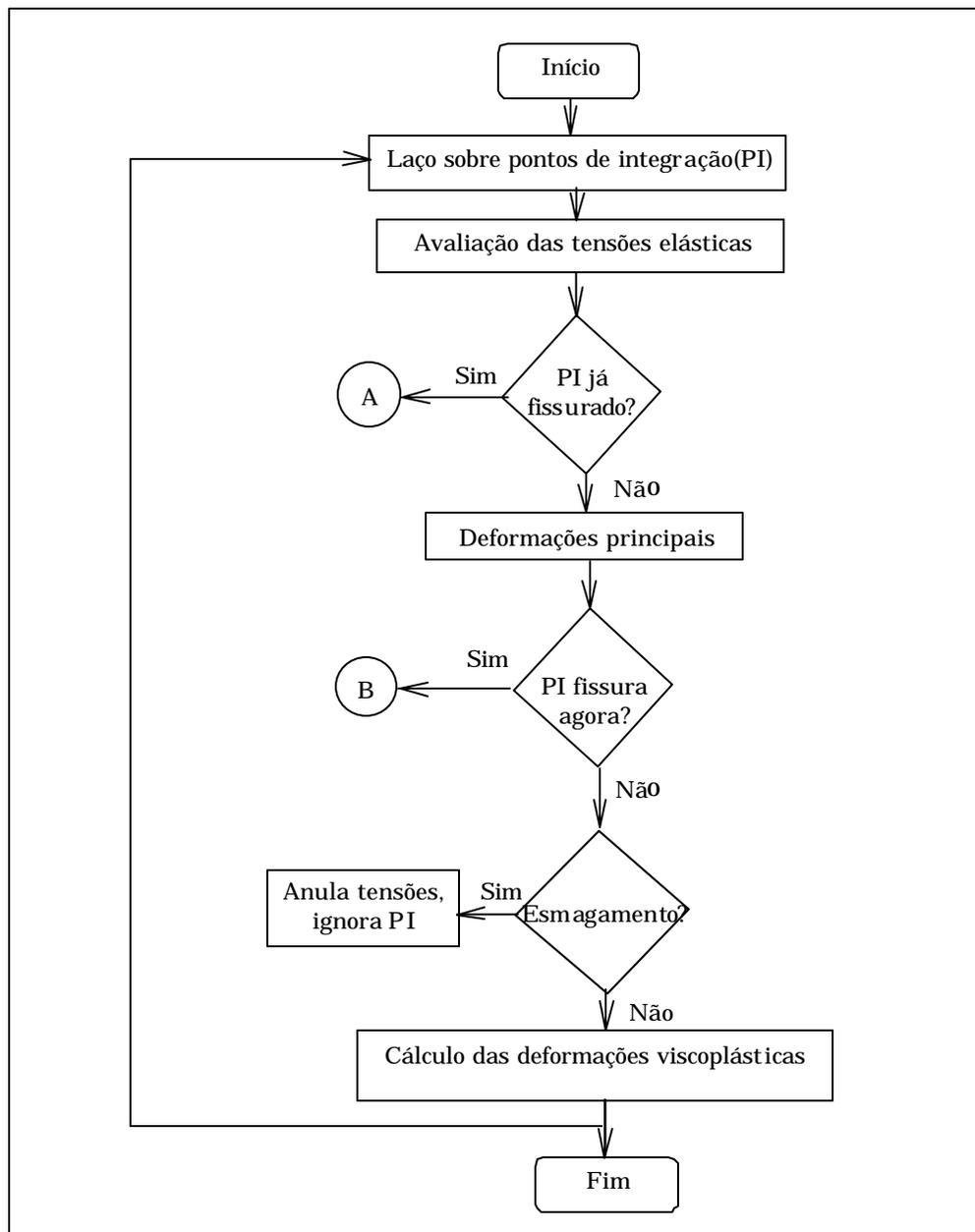


Fig.2.7 Esquema da Formação de Fissuras

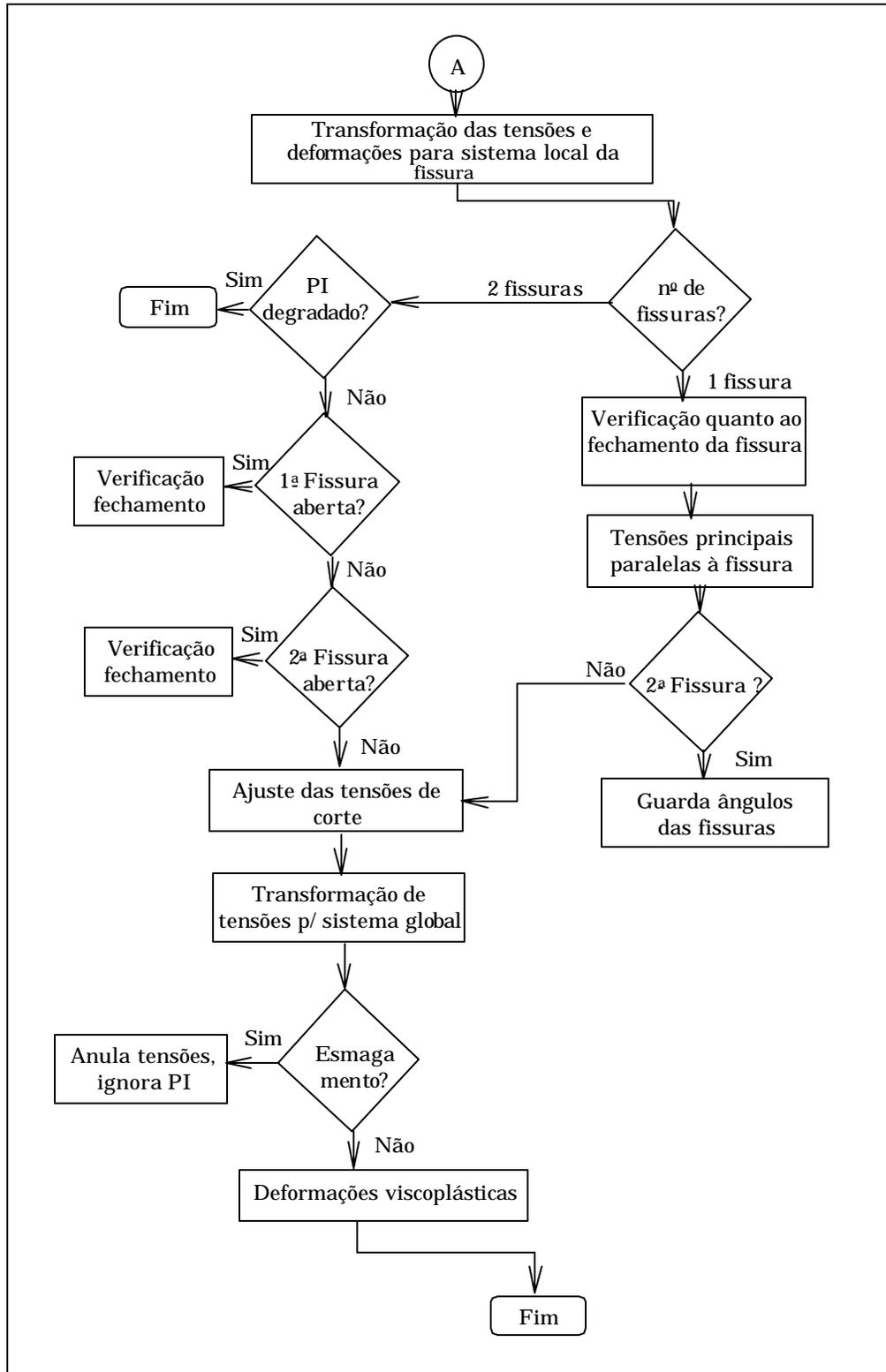


Fig.2.8 Esquema da formação de Fissuras (cont.)

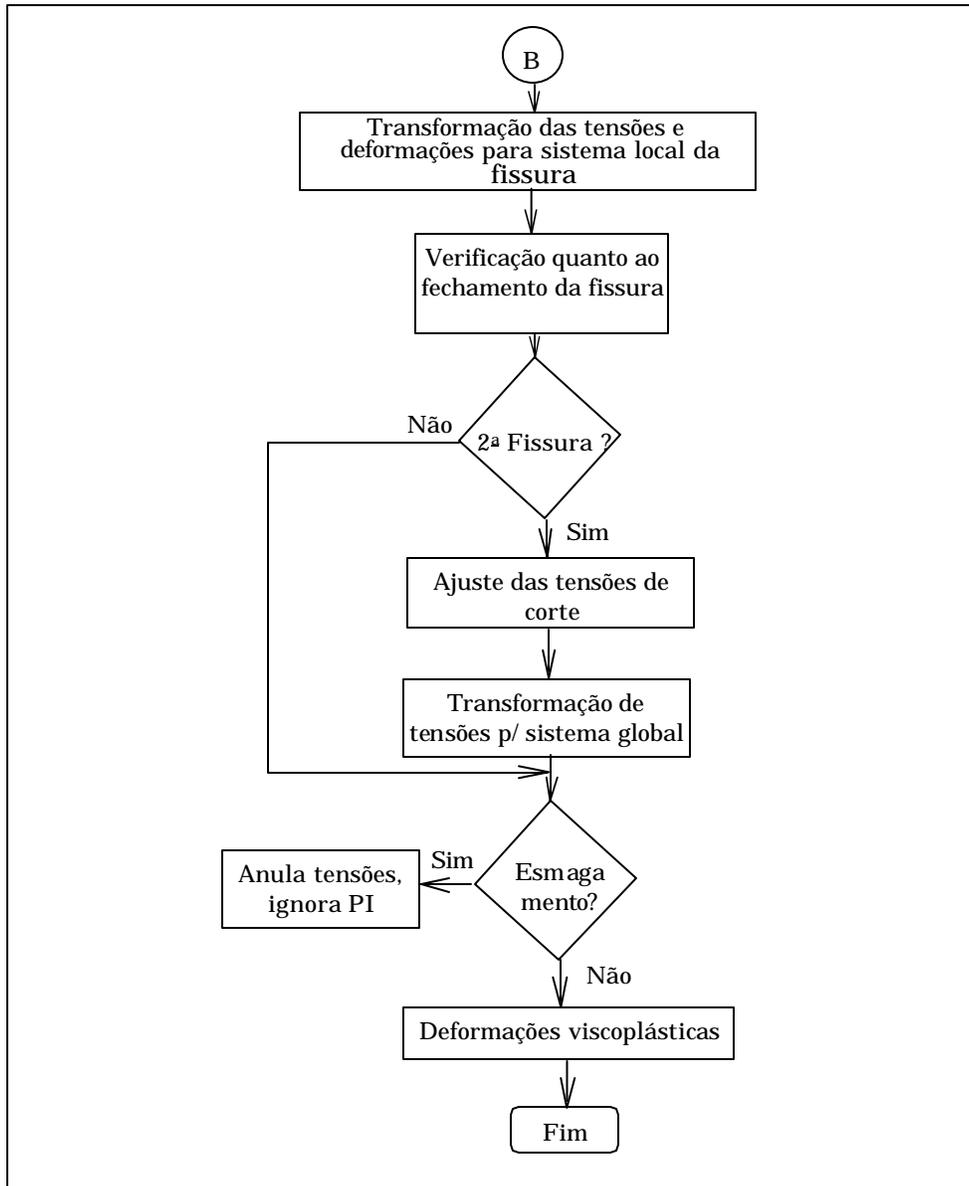


Fig.2.9 Esquema da formação de Fissuras (cont.)

2.6 Contribuição do Concreto entre Fissuras

O concreto armado pode ser modelado como um material elástico e frágil à tração, de forma que, quando da formação das fissuras, as tensões normais à fissura caem a zero imediatamente. Tem-se verificado que este tipo de modelamento traz dificuldades quanto à convergência na análise. Alternativamente, o concreto pode ser considerado como um material com amolecimento à deformação na tração. Com a formação das fissuras, na estrutura de concreto armado, as barras de aço levam para si grande parte dos esforços. Entretanto, ao concreto intacto entre as fissuras ainda é dada uma capacidade de transferência de tensões de tração. Assim, embora as tensões no concreto sejam zero na fissura, a tensão média no concreto sobre um comprimento específico é não nulo, como se mostra indicado esquematicamente na Fig.2.10.

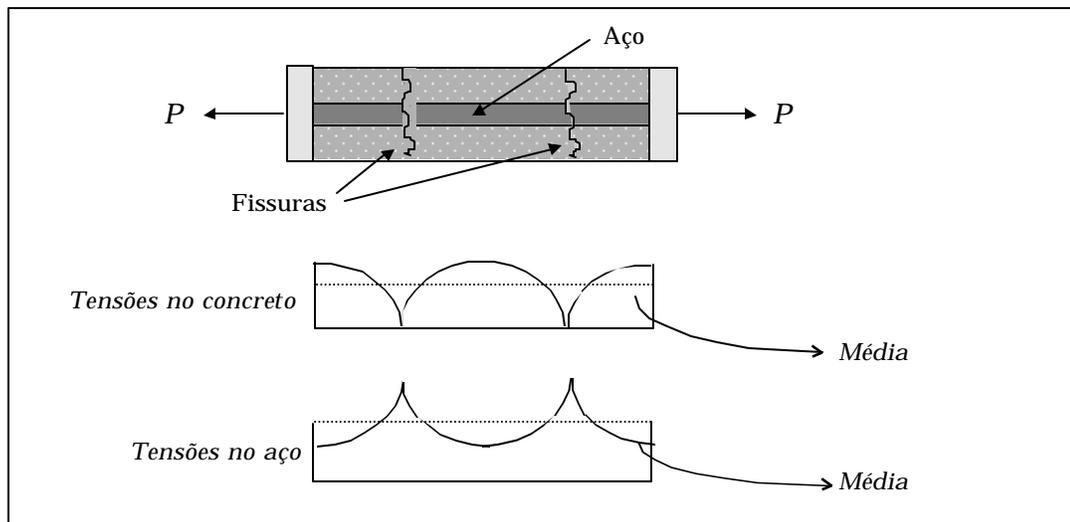


Fig. 2.10 Distribuição de Tensões em um Elemento Fissurado de Concreto Armado.

O modelamento do concreto como material com amolecimento à deformação na tração pode ser feito de duas maneiras: ou altera-se a relação tensão-deformação para o concreto através da introdução de um ramo descendente suave na curva tensão-deformação, ou adota-se uma relação tensão-deformação para o aço modificada. Neste trabalho adota-se a primeira opção. A forma da curva descendente na relação tensão-deformação é menos importante que os parâmetros que a definem. A fim de assegurar a objetividade do modelo constitutivo com respeito ao tamanho da malha de elementos finitos utilizada, esta curva deve ter como parâmetro a energia de fratura do concreto, parâmetro este característico de materiais frágeis. A principal hipótese é que durante o processo da fissuração esta propriedade permaneça constante, ou seja, $G_f = cte$. A energia de fratura é definida da seguinte forma:

$$G_f = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}(w) dw \quad (2.40)$$

sendo $\mathbf{s}(w)$ a tensão ao longo da abertura da fissura, w a largura da fissura e G_f a energia necessária para separar em uma unidade as duas faces da fissura. Valores típicos da energia de fratura para estruturas de concreto armado estão entre 50 e 200 N/m. O CEB-FIP/90 traz uma relação entre a energia de fratura e a resistência à compressão de corpos de prova de concreto armado. Em termos experimentais, G_f pode ser determinado através de ensaios em vigas carregadas à flexão com entalhes (pré-fissuras), sendo representado pela área sobre a curva carga-deformação dividida pela área líquida acima do entalhe. Assim, de acordo com o CEB^[30],

$$G_f = a_F \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0.7} \quad (Nmm/mm^2) \quad (2.41)$$

sendo $f_{cm0} = 10 \text{ MPa}$ e f_{cm} a resistência média à compressão do concreto em MPa. O coeficiente a_F é definido de acordo com o diâmetro máximo do agregado de que é feito o concreto e dado pela tabela abaixo:

Tab.2.3 Coeficientes a_F para a Estimativa de G_f

$d_{max} \text{ (mm)}$	$a_F \text{ (Nmm/mm}^2\text{)}$
8	0.02
16	0.03
32	0.05

Como o modelo de fissuras distribuídas não representa fissuras discretas, faz-se necessário definir um valor médio para a abertura da fissura w , o qual ocorre em todo o volume onde se encontra distribuída a fissura. Tomando-se um volume de controle, como mostrado na Fig.2.11, de volume V contendo uma fissura com área S e igualando-se à taxa de dissipação de energia na fissura o trabalho efetuado pelas tensões na seção da fissura, tem-se:

$$\dot{p}_s = \dot{p}_v \quad \int_S \mathbf{s}(w) w dS = \int_V \mathbf{s}(\mathbf{e}) \dot{\mathbf{e}}_c dV \quad (2.42)$$

onde \dot{p}_s é a taxa de dissipação de energia pela fissura, \dot{p}_v o trabalho efetuado pelas tensões na seção (onde assumiu-se que o volume de controle esteja submetido ao mesmo estado de tensões que o da região fissurada) e $\dot{\mathbf{e}}_c$ é a taxa de deformação fictícia da fissura. Assim, assumindo-se que a tensão, a deformação equivalente da fissura e a largura da fissura sejam constantes no volume de controle, chega-se à seguinte expressão:

$$w = (V/S) \mathbf{e}_c = l_c \mathbf{e}_c \quad (2.43)$$

a qual define a largura equivalente da fissura em função do comprimento característico " l_c " e da deformação fictícia da fissura.

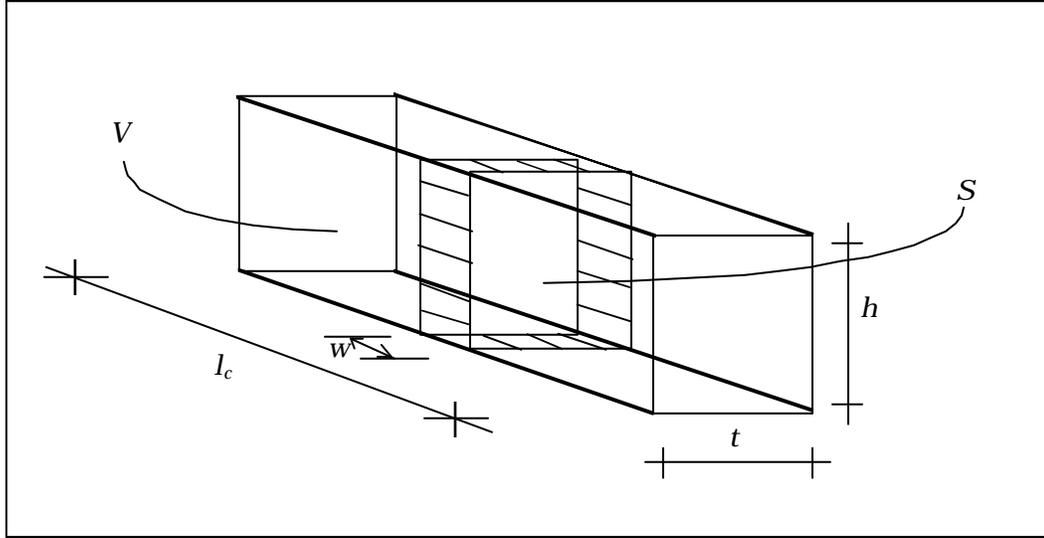


Fig.2.11 Modelo de Fissura Fictícia

Uma função exponencial no ramo descendente da curva tensão-deformação é utilizada para simular o efeito do amolecimento do concreto armado. Esta função está representada na Fig.2.12, e vem dada por:

$$s = E_0 e_{ct} e^{-(e - e_{ct})/a} \quad (2.44)$$

onde, a é o parâmetro de amolecimento, dv é o diferencial de volume, adotado como sendo o volume correspondente ao ponto de integração em questão, e_{ct} é a deformação máxima à tração admissível para o concreto, f'_t é a tensão última à tração para o concreto e $l_c = (dv)^{1/3}$, é o comprimento característico.

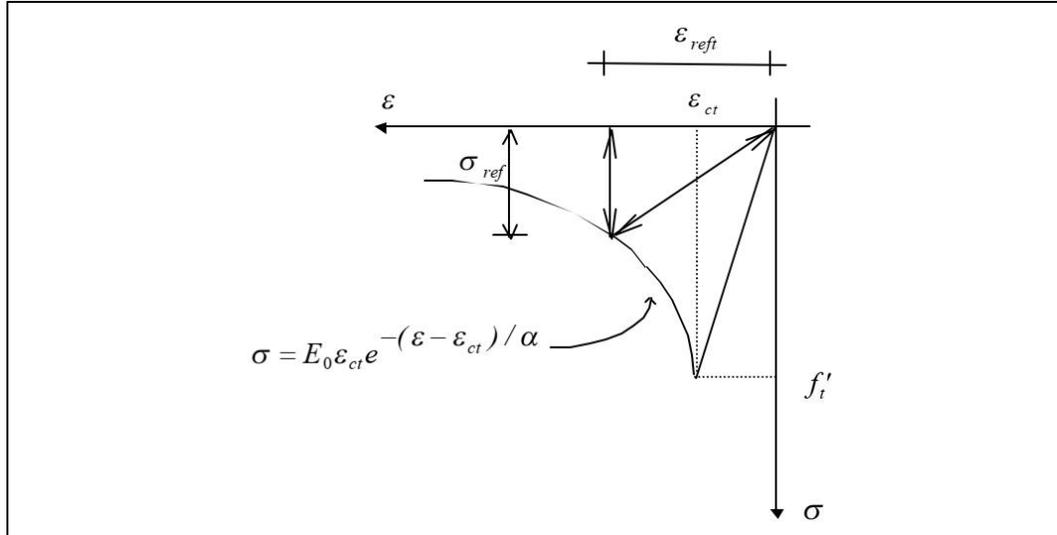


Fig.2.12 Amolecimento à tração com Carga-Descarga Secante.

O parâmetro a pode ser determinado integrando-se a curva com amolecimento dada pela Fig.2.12, sob o domínio da fissura fictícia dada pela

equação (2.44) e igualando a certo valor da energia de fratura, determinada experimentalmente, ou obtida da equação (2.41). Então obtém-se:

$$a = (G_f - \frac{1}{2} E e_{ct}^2 l_c) / E e_{ct} l_c > 0 \quad (2.45)$$

O modelo também permite o fechamento parcial ou completo das fissuras que anteriormente estavam abertas, através das curvas de carga e descarga mostradas na figura 2.12. Se a deformação atual é menor que a deformação de referência, mantida anteriormente com a maior tensão de tração ocorrida na fissura, a tensão é calculada linearmente como:

$$s = \frac{s_{ref}}{e_{ref}} e \quad (2.46)$$

caso contrário, utiliza-se o mesmo caminho da curva anterior, caso este em que a deformação será maior que a deformação de referência, ou seja, calculada como indicado na equação (2.44).

2.7 Modelo de Retenção da Rigidez ao Corte

Para os primeiros testes de modelos para fissuras distribuídas, admitia-se que apenas os esforços perpendiculares à fissura poderiam ser

transmitidos, deixando-se de lado os esforços de corte. Experimentos mostram que uma considerável quantidade de esforço pode ser transmitido através das faces rugosas das fissuras. Esta transmissão se dá pelo efeito de engrenamento dos componentes do concreto armado, como também devido ao efeito pino, gerado pelas barras de reforço que cortam as fissuras.

O emprego do modelo de fissuras distribuídas, na sua versão simplificada, a um grande número de problemas, resultou em dificuldades numéricas e em alguns casos levou a distorções nos mecanismos das fissuras formadas. Investigadores como Yuzugullu e Schonobrich (1973), entre outros, passaram então a empregar o módulo de deformação ao corte minorado por um fator b' . Este fator de retenção ao corte ajudou a suprimir as singularidades que resultavam quando na vizinhança de determinado nó se tinha fissuras nas mesmas direções. Então, de acordo com esta formulação:

$$G_c = b'G_0 \quad (0 \leq b' \leq 1) \quad (2.47)$$

onde G_c e G_0 são respectivamente os módulos de deformação ao corte corrigido e o original.

O emprego desta formulação não só resolveu as dificuldades numéricas, mas também melhorou o realismo na simulação do fenômeno da fissuração, embora esta formulação represente mais aproximadamente uma certa rigidez paralela à fissura do que propriamente o fenômeno do engrenamento. Em modelos recentes, um valor variável para b' tem sido empregado para representar as mudanças na rigidez ao corte, à medida que as tensões principais variam de tração à compressão. Em um destes modelos, descrito em Cervera^[24], tem-se empregado uma relação potencial entre o fator b' e a deformação de tração fictícia normal ao plano da fissura (valor representativo da abertura da fissura). Segundo esta formulação:

$$b' = 1 - \left(\frac{e_t}{0,005} \right)^{K_1} \quad (2.48)$$

onde b' é o fator de retenção ao corte, e_t é a deformação de tração fictícia normal ao plano da fissura e K_1 é um parâmetro que varia entre 0,3 e 1,0. Estudos recentes mostram pequena sensibilidade para a variação do fator b' entre os valores de 0,1 e 0,5.

2.8 Modelo Constitutivo para Armadura

Para a armadura adotou-se o modelo clássico elasto-plástico com encruamento linear. Devido ao fato de só se permitirem deformações uniaxiais nas armaduras o modelo é unidimensional. Para os aços com

patamar de escoamento definido, adotou-se um encruamento nulo. Já para os aços sem patamar de escoamento definido, adotou-se um encruamento linear definido por:

$$H = \frac{0,15f_y}{10^{-3} - f_y / E_s} \quad (2.49)$$

onde, E_s é o módulo de elasticidade secante do aço e f_y a resistência última do aço como representado na Fig. 2.13.

Na Fig. 2.13 é apresentado um esquema para o modelo elasto-plástico unidimensional empregado para a armadura.

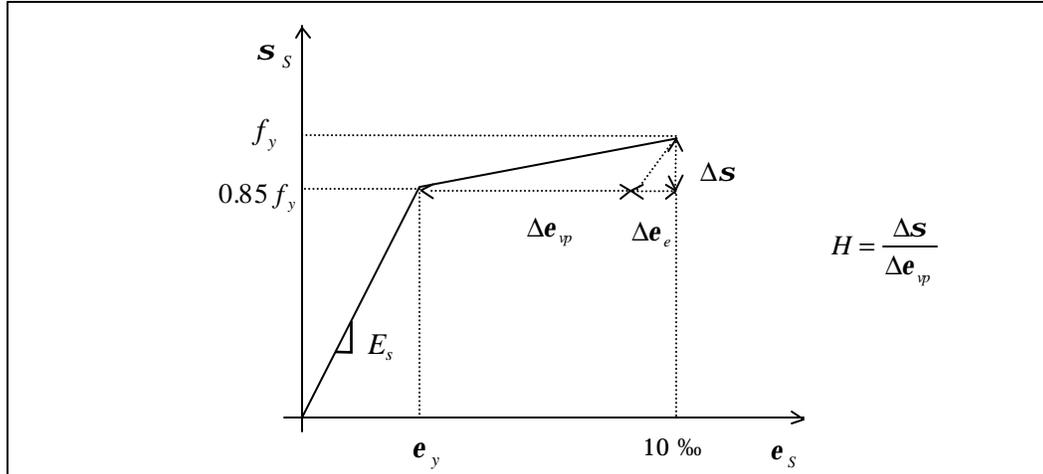


Fig.2.13 Modelo Elasto-Plástico com Encruamento para a Armadura

2.9 Superfície de Falha / Plastificação de Quatro Parâmetros (Ottosen)

Nesta seção a superfície proposta por Ottosen^[65] de 4 parâmetros é analisada. Esta superfície contém três invariantes de tensões e tem as seguintes características(Fig. 2.14 e 2.15):

- A superfície é suave e convexa com meridianos curvos, determinados pelas constantes a e b ;
- É uma superfície aberta na direção negativa do eixo hidrostático;
- A forma da superfície em um corte no plano das tensões desviadoras muda de uma forma quase triangular para uma circular com o aumento da pressão hidrostática, definida por λ no plano desviador;
- A superfície está em boa concordância com resultados experimentais para uma ampla gama de valores de estados de tensões, incluindo aqueles onde as tensões de tração ocorrem.

A superfície de falha analítica contendo as propriedades acima mencionadas foi proposta por Ottosen sendo definida por:

$$F(I_1, J_2, J) = a \frac{J_2}{(f_{cm})^2} + I \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + b \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (2.50)$$

onde,

$I_1 = \mathbf{s}_x + \mathbf{s}_y + \mathbf{s}_z = 1^\circ$ invariante de tensões do tensor de tensões;

$J_2 = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \mathbf{t}_{xy}^2 + \mathbf{t}_{yz}^2 + \mathbf{t}_{zx}^2 = 2^\circ$ invariante de tensões do tensor

desviador de tensões;

$J = \cos(3q) = 1.5\sqrt{3} \frac{J_3}{\sqrt{J_2}}$, sendo q o ângulo de similaridade como indicado na

Fig.2.15;

$J_3 = S_x S_y S_z + 2\mathbf{t}_{xy} \mathbf{t}_{yz} \mathbf{t}_{zx} - S_x \mathbf{t}_{yz}^2 - S_y \mathbf{t}_{xz}^2 - S_z \mathbf{t}_{xy}^2 = 3^\circ$ invariante de tensões do tensor desviador de tensões

$$S_x = \mathbf{s}_x - \frac{1}{3}I_1 \quad (2.51)$$

$$S_y = \mathbf{s}_y - \frac{1}{3}I_1 \quad (2.52)$$

$$S_z = \mathbf{s}_z - \frac{1}{3}I_1 \quad (2.53)$$

$$I = I(\cos 3q) > 0 \quad \begin{cases} = K_1 \cos\left(\frac{1}{3}a \cos(K_2 \cos 3q)\right), & \cos(3q) > 0 \\ = K_1 \cos\left(\frac{p}{3} - \frac{1}{3}a \cos(-K_2 \cos 3q)\right), & \cos(3q) \leq 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

sendo f_{cm} a resistência média à compressão do concreto e a, b, K_1, K_2 , os quatro parâmetros do modelo.

Para $a > 0, b > 0$ os meridianos tornam-se suaves e convexos e a superfície abre-se numa direção negativa do eixo hidrostático. Quando $a = 0, I = cte$, a superfície aproxima-se do critério de Drucker-Prager, e quando $a = 0, b = 0$, a superfície aproxima-se do critério de von-Mises.

Os quatro parâmetros do modelo de Ottosen podem ser determinados através de resultados de testes biaxiais e triaxiais, como por exemplo dos ensaios de Kupfer, Balmer e Richart (citado em Ottosen^[65]). Através do método dos mínimos quadrados pode-se obter uma aproximação para os parâmetros do modelo utilizando-se a relação entre a resistência média à compressão e a resistência média à tração como indicada abaixo:

$$a = \frac{1}{9K_0^{1,4}} \quad (2.55)$$

$$b = \frac{1}{3,7K_0^{1,1}} \quad (2.56)$$

$$K_1 = \frac{1}{0,7K_0^{0,9}} \quad (2.57)$$

$$K_2 = 1 - 6,8(K_0 - 0,07)^2 \quad (2.58)$$

$$K_0 = \frac{f_m}{f_{cm}} \quad (2.59)$$

sendo f_{tm} a resistência média à tração do concreto e f_{cm} a resistência média à compressão.

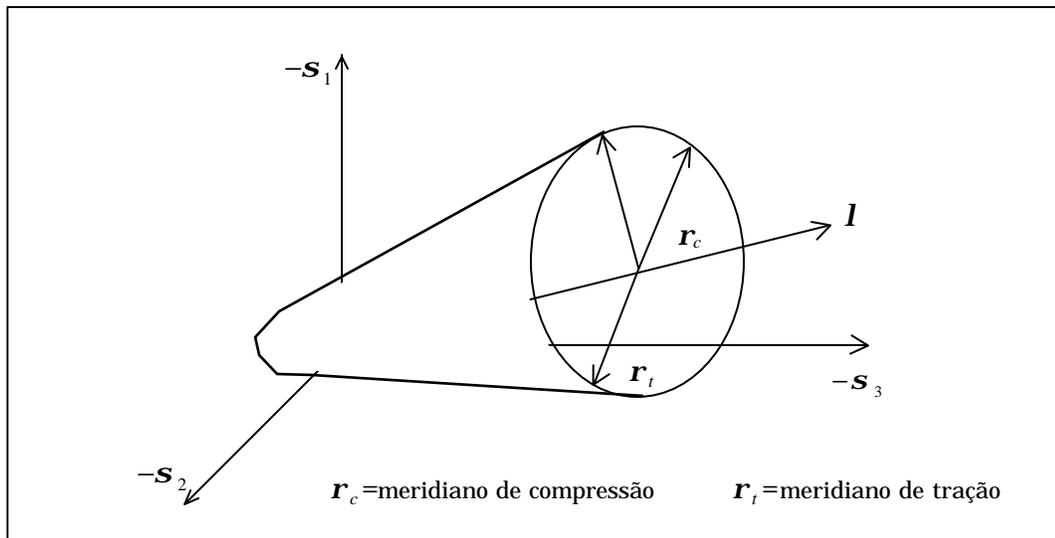


Fig. 2.14 Esquema da Superfície de Falha de Ottosen no Espaço das Tensões Principais.

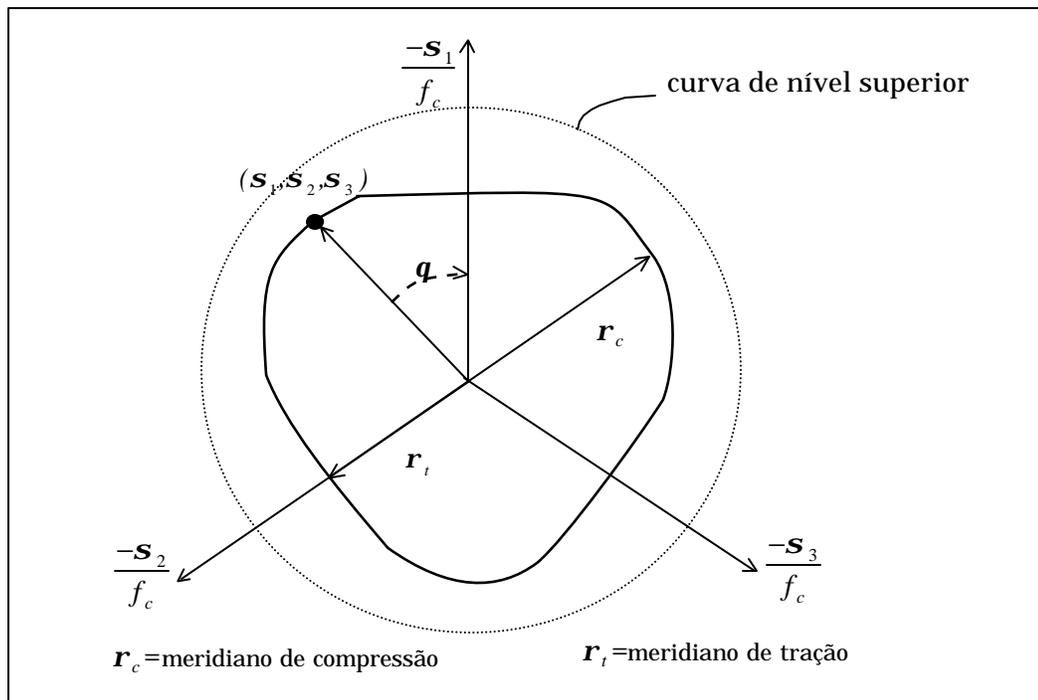


Fig. 2.15 Vista do Plano Desviador em uma Seção Genérica para o Modelo de Ottosen.

2.10 Modelo Elasto-Viscoplástico Sensível à Taxa de Deformação com Degradação do Concreto

É conhecido que o concreto deteriora-se tanto em rigidez quanto em resistência quando submetido a aplicações de carga cíclicas, especialmente se é requerido além da metade de seu limite de compressão uniaxial ou até seu limite de tração. Este comportamento de acumulação de dano até a falha é basicamente um problema de fadiga. No modelo clássico associado viscoplástico, a taxa de deformação viscoplástica é dada por:

$$\{\dot{\mathbf{e}}_{vp}\} = \mathbf{g}_0 \langle \mathbf{f}(F_0) \rangle \left\{ \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}s} \right\} \quad (2.60)$$

Bicanic, Bonet, Hinton e Cervera^[24] utilizam um modelo elasto-viscoplástico sensível à taxa de deformação com degradação progressiva da resistência do concreto. Basicamente este modelo foi empregado para análises transientes de estruturas de concreto armado submetidas a grandes taxas de deformações (explosões e impacto), onde o efeito da velocidade de deformação notadamente afeta a resistência à compressão do concreto. O modelo propõe que o parâmetro de fluidez seja dependente da taxa de deformação elástica efetiva, diferentemente do valor constante adotado na teoria clássica. Esta dependência se dá na seguinte forma:

$$\mathbf{g}_0(\{\dot{\mathbf{e}}_e^{eff}\}) = b_0 (\dot{\mathbf{e}}_e^{eff})^{b_1} \quad (2.61)$$

$$\text{sendo, } \mathbf{e}_e^{eff} = \sqrt{\frac{3(J_2)_e}{(1+n)^2}}$$

com b_0 e b_1 determinados experimentalmente, estando para concretos de resistência entre 25 MPa e 60 MPa entre $0,306 \leq b_0 \leq 0,413$ e $0,747 \leq b_1 \leq 0,831$.

Tanto para a análise estática quanto para a análise dinâmica, adotou-se um modelo elasto-viscoplástico sensível à taxa de deformação.

Este mesmo modelo também utiliza uma superfície de falha limite para monitorar o dano causado pela acumulação de trabalho viscoplástico, de forma que, uma vez atingida a superfície de falha, a degradação do concreto é iniciada. A superfície de falha é do mesmo tipo da superfície de plastificação. Define-se a superfície de plastificação e a superfície de falha, respectivamente, por:

$$F_0(\{\mathbf{s}\}, \mathbf{s}_0(W_p, k)) = 0 \quad (2.62)$$

$$F_f(\{\mathbf{s}\}, \mathbf{s}_f(W_p)) = 0$$

onde:

$\mathbf{s}_0(W_p, k)$ é a função que define a mudança no nível de tensão de falha em compressão uniaxial;

$\mathbf{s}_f(W_p)$ é a função que define a mudança no nível de tensão de plastificação em compressão uniaxial;

$\{\mathbf{s}\}$ define o estado de tensões;

$W_p = \int_0^t \{\mathbf{s}\}^T \{\dot{\mathbf{e}}_{vp}\} dt$ é a densidade de energia viscoplástica acumulada;

$k = W_p - W_p^f = \int_{t_f}^t \{\mathbf{s}\}^T \{\dot{\mathbf{e}}_{vp}\} dt$ é a densidade de trabalho viscoplástico na faixa de deterioração;

W_p^f é a densidade de energia viscoplástica no momento do início da deterioração;

t_f indica o tempo de início da deterioração.

Enquanto o estado de tensões permanece dentro da superfície de plastificação, o comportamento do concreto permanece linear-elástico e as superfícies de falha e plastificação permanecem constantes. Quando se tem um estado de tensões fora da superfície de plastificação, ocorrem deformações viscoplásticas segundo a Equação (2.60). A superfície de falha encolhe com o aumento da densidade de energia viscoplástica desenvolvida. Quando o estado de tensão atinge a superfície de falha então é assumido que o mecanismo de deterioração inicia-se, com o encolhimento, agora, da superfície de plastificação, de acordo com o aumento da densidade de energia viscoplástica e densidade de trabalho viscoplástico desenvolvido. O processo é esquematizado na Fig. 2.16.

O comportamento pós-falha do concreto é descrito através de uma função exponencial. Para a tensão de falha à compressão, a função é definida por:

$$\mathbf{s}_0(W_p, k) = b_1 f'_c \quad W_p \leq W_p^f \quad (2.63)$$

$$\mathbf{s}_0(W_p, k) = b_1 f'_c e^{-a_c k} \quad W_p > W_p^f \quad (2.64)$$

onde,

$0,3 \leq b_1 \leq 0,4$ define o limite do comportamento elástico do concreto;

f'_c é a resistência última à compressão do concreto;

a_c parâmetro para modelamento da degradação após a falha.

Assume-se que a tensão de falha após o início da deterioração do concreto seja uma função linear da densidade de energia viscoplástica e vem definida pela expressão:

$$s_f(W_p) = b_0 f_c' (1 - b_1 W_p) \quad 0 < W_p \leq W_p^f \quad (2.65)$$

onde os parâmetros b_1 e b_0 , são obtidos através de experimentos, estando para concretos de resistência entre 25 MPa e 60 MPa entre $1,836 \leq b_0 \leq 2,291$ e $0,792 \leq b_1 \leq 2,365$.

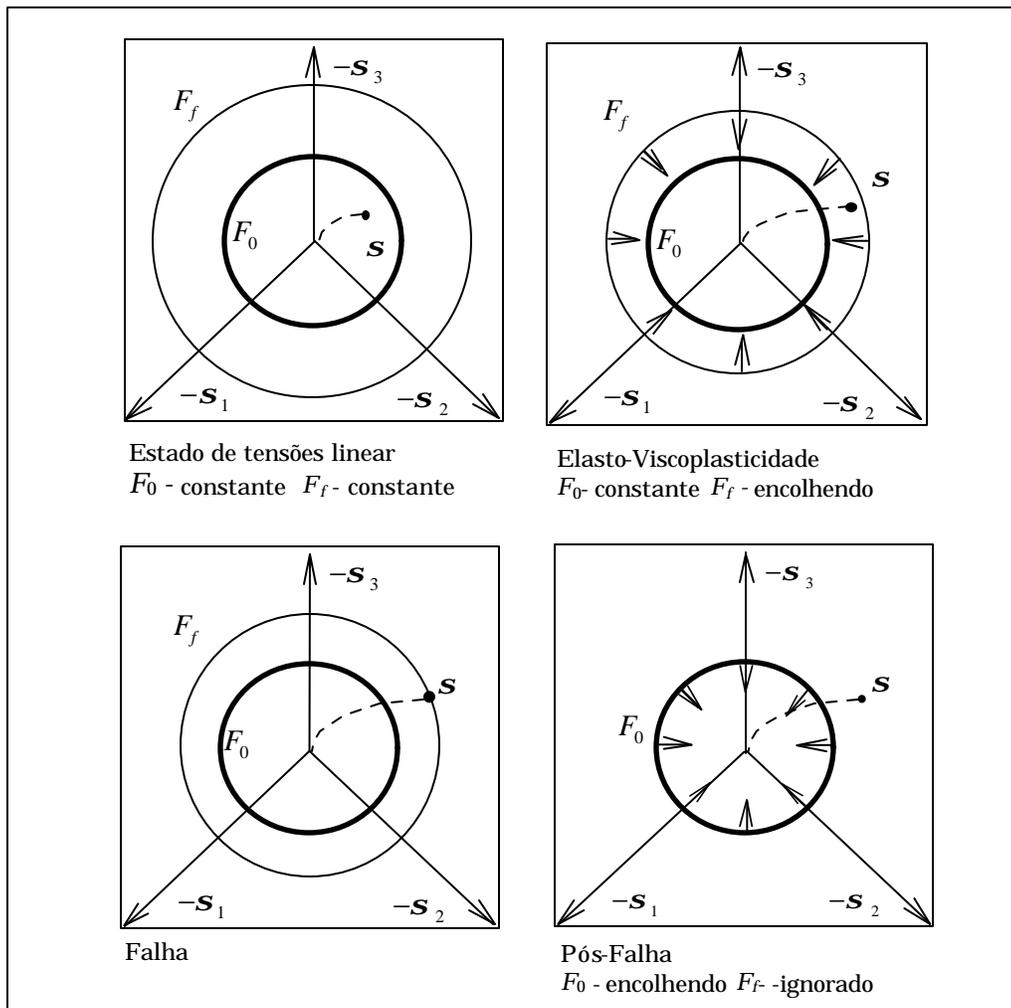


Fig.2.16 Evolução das superfícies de falha e de plastificação

Capítulo 3

Verificação do Modelo

“... um trabalho realizado experimentalmente, que testa as estruturas em seu estado real, reveste-se de uma confiabilidade muito maior que estudos teóricos, por mais sofisticados que sejam, já que estes assumem propriedades estruturais não comprovadas na prática.”

Vladimir A. P.

1996

Neste Capítulo são feitas comparações entre resultados experimentais de estruturas de concreto armado, sob carregamentos estáticos e dinâmicos, e resultados obtidos com o programa numérico de concreto armado.

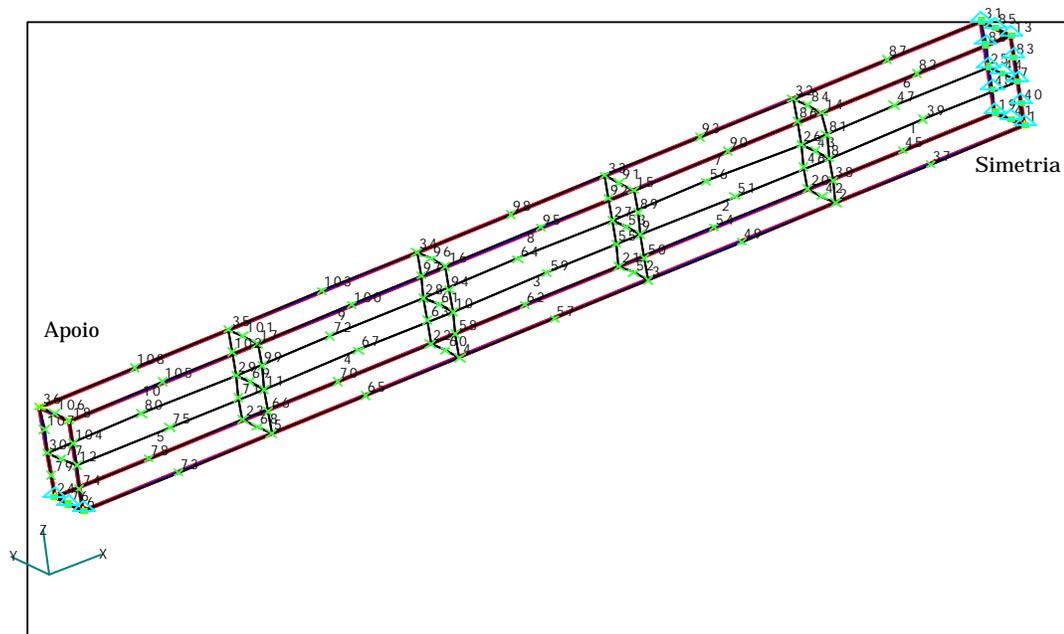
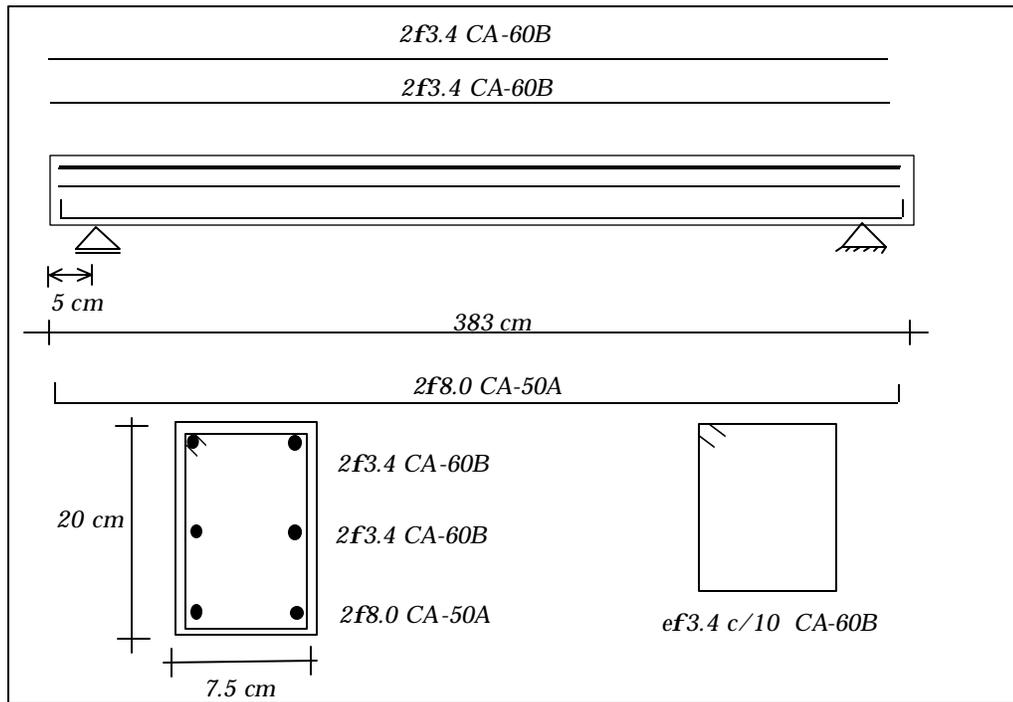
3.1 Análise para Carregamentos Estáticos

Como exemplo de aplicação do programa computacional de análise de estruturas tridimensionais de concreto armado para carregamentos de curta duração, comparam-se os resultados obtidos experimentalmente para uma viga ensaiada por Gobetti^[43] com os resultados obtidos pelo programa numérico. Observa-se a boa precisão do algoritmo, justificando a sua utilização como função de estado limite para predições de flechas. Na Tab. 3.1 são dadas as propriedades dos materiais avaliadas em ensaios. Em todos os exemplos manteve-se os seguintes parâmetros do modelo utilizados constantes: $a_0=0,3055$, $b_1=0,7600$, $a_1=0,45$, $a_c=0,45$, $b_1=1,84$, $b_2=1,09$ para o concreto e $a_0=1,539$, $b_1=0,971$ para o aço.

Tab.3.1 Características das peças Analisadas.

	f_{cm} (MPa)	f_{cm} (MPa)	E_c (MPa)	G_f (MN/m)	E_s (MPa)	f_y^A (MPa)	H'	f_y^B (MPa)	H'
V7/V8	21,14	1,67	27565	$0,506 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^5$	500	0.0	600	12600
V5/V6	18,20	1,42	28257	$0,456 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^5$	500	0.0	600	12600
Abb4	15,62	1,16	23750	$0,401 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^5$	500	0.0	-	-
Abb8	15,62	1,16	23750	$0,401 \times 10^{-4}$	$2,1 \times 10^5$	500	0.0	-	-

Na Fig.3.1 apresenta-se as características das vigas a serem analisadas e na Fig.3.2 a discretização empregada. Nas Fig. 3.3 e 3.4 apresentam-se os resultados para flechas no vão central obtidos numericamente e os resultados experimentais. Nas Fig. 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 apresentam-se diagramas de tensões s_{11} nas vigas V7/V8 para níveis de carga de 20%, 40%, 60% 80% e 100% respectivamente.



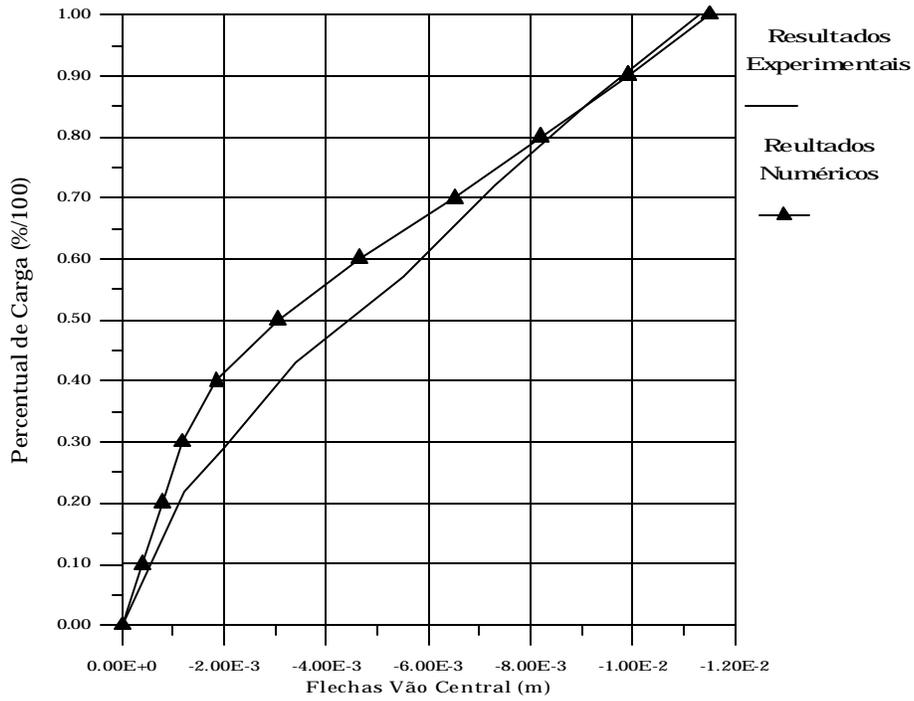


Fig. 3.3 Flechas no Vão Central das Vigas V7/V8.

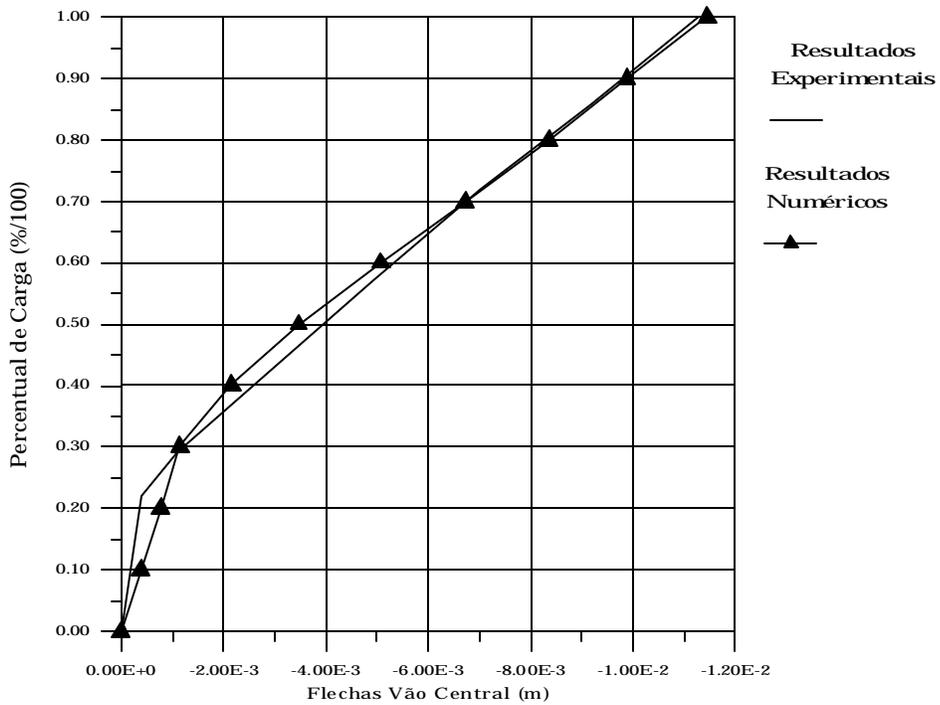
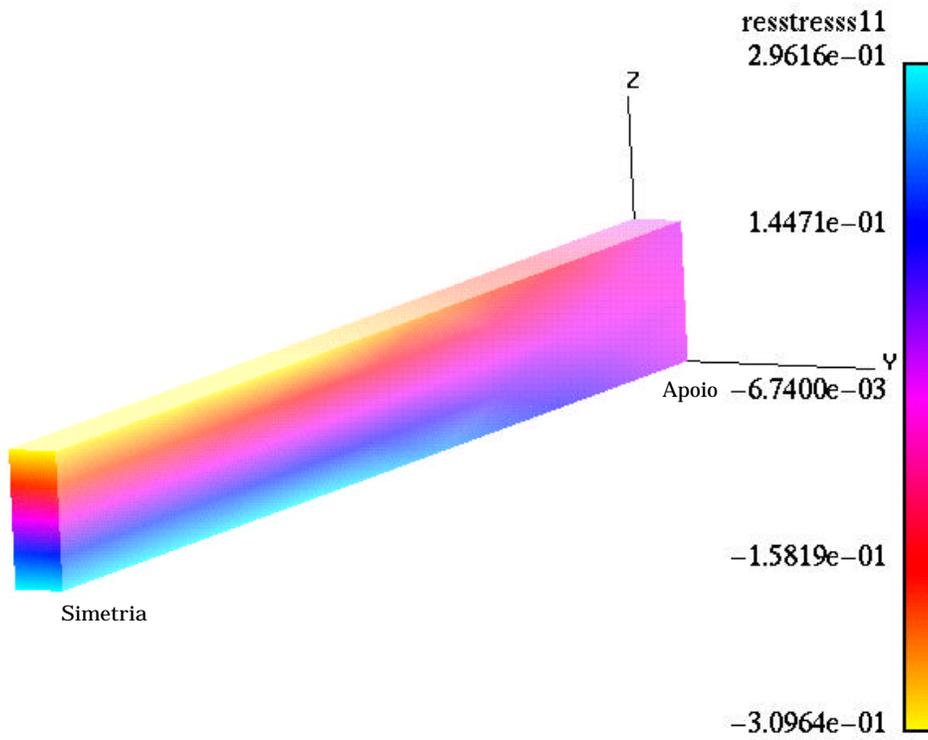
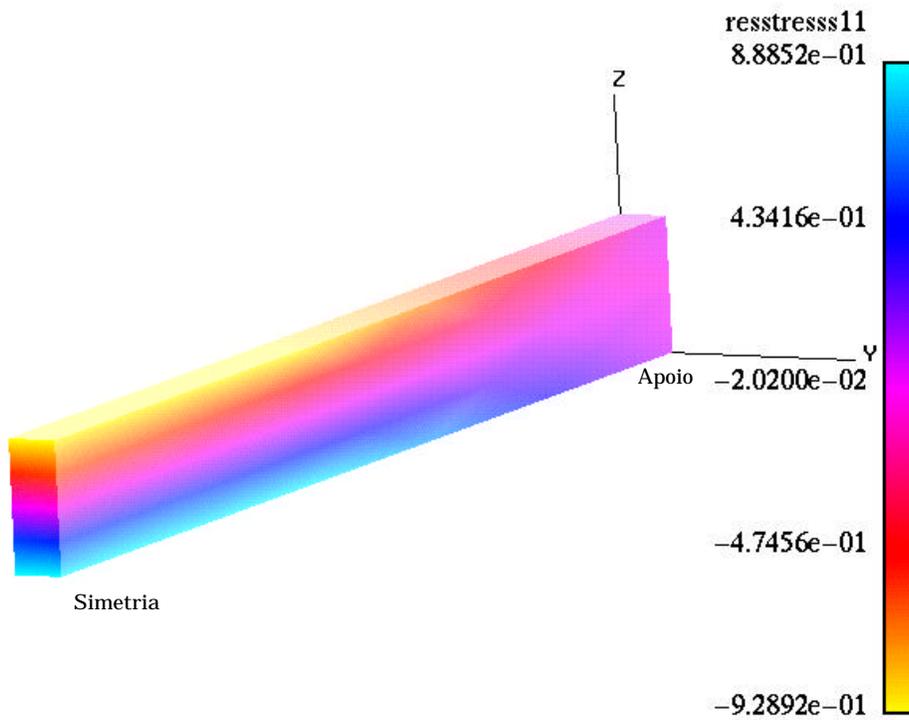
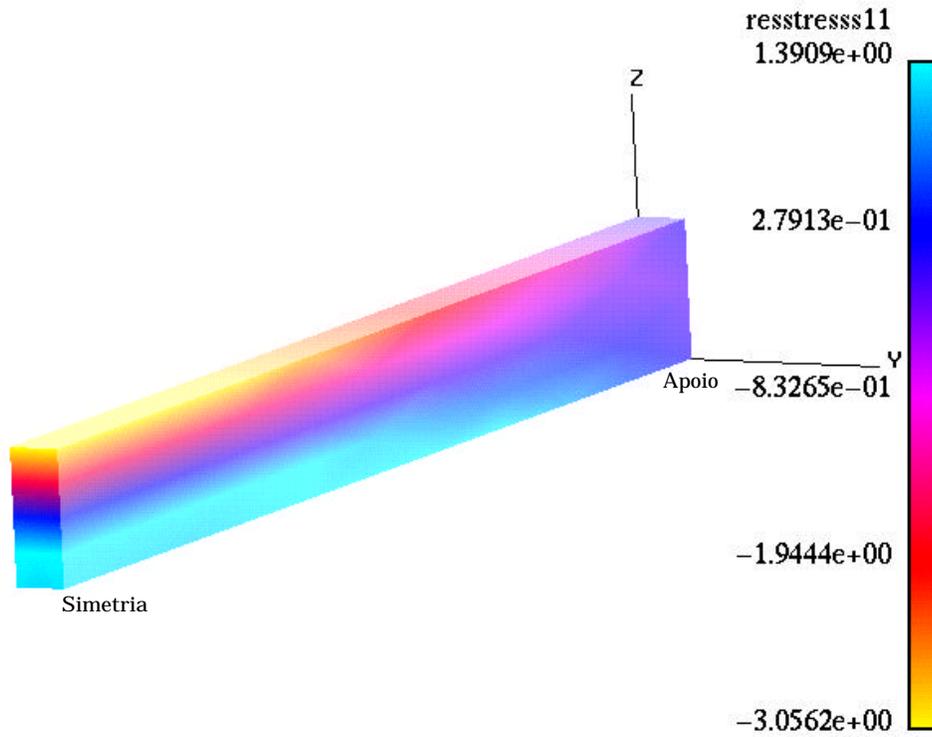
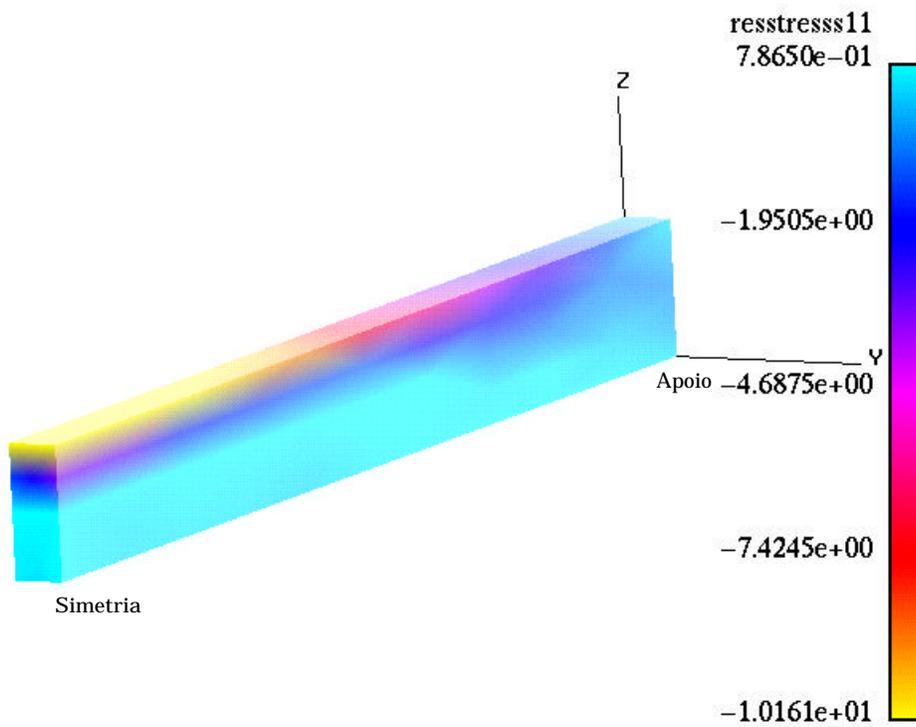


Fig. 3.4 Flechas no Vão Central das Vigas V5/V6.

Fig.3.5 Tensões s_{11} na Viga V7/V8 para Nível de Carga de 20%.Fig.3.6 Tensões s_{11} na Viga V7/V8 para Nível de Carga de 40%.

Fig.3.7 Tensões S_{11} na Viga V7/V8 para Nível de Carga de 60%.Fig.3.8 Tensões S_{11} na Viga V7/V8 para Nível de Carga de 80%.

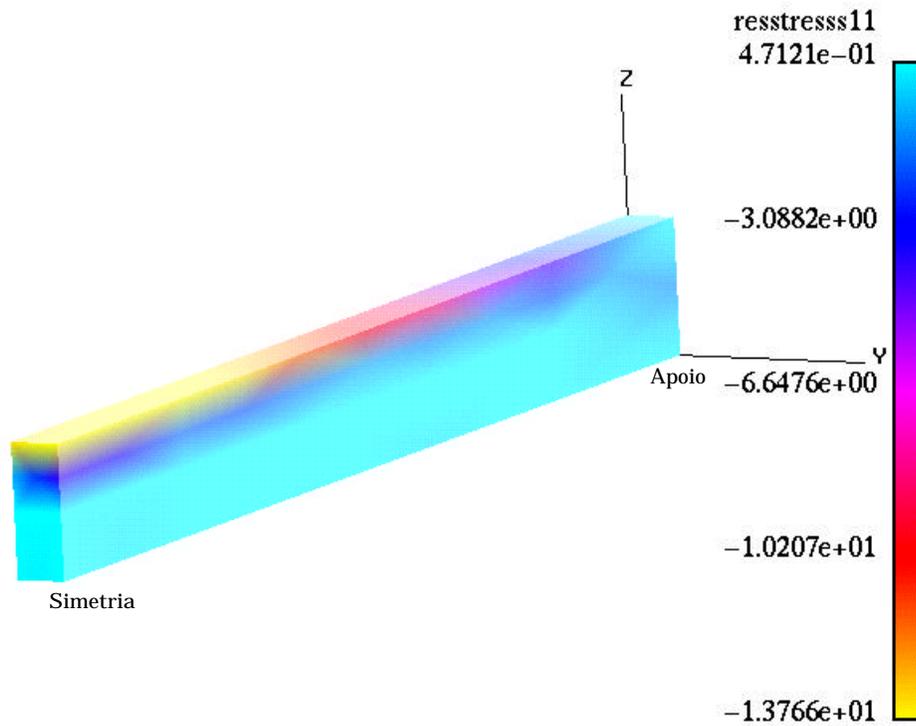


Fig.3.9 Tensões s_{11} na Viga V7/V8 para nível de carga de 100%.

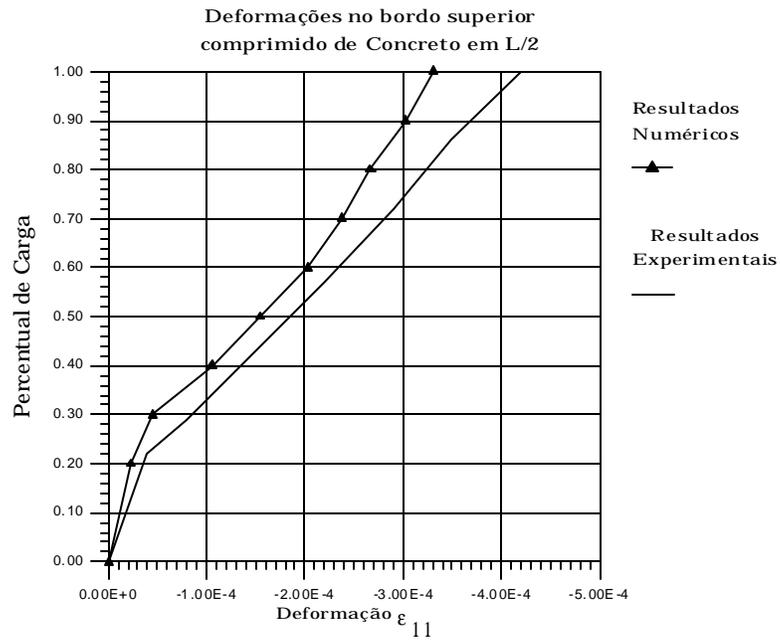


Fig.3.10 Deformações ϵ_{11} na Fibra Superior no Vão Central (V7/V8) .

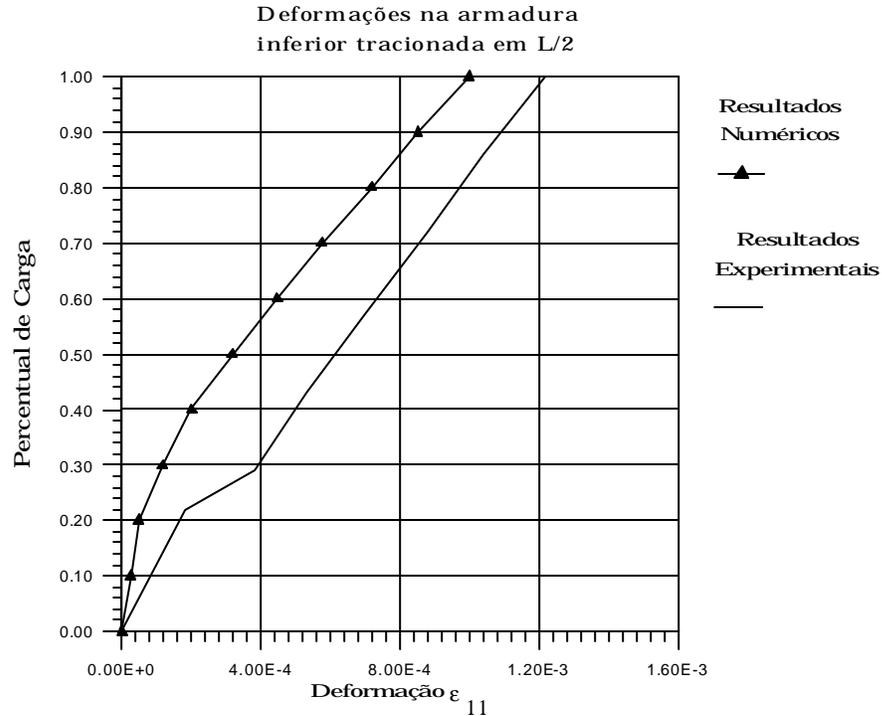


Fig.3.11 Deformações ϵ_{11} nas Armaduras Inferiores no Vão Central (V7/V8) .

A Fig. 3.10 mostra comparações entre resultados experimentais e numéricos para deformações ϵ_{11} em pontos situados no meio do vão e no bordo superior da viga para diversos níveis de carga. Na Fig. 3.11, são feitas comparações entre as deformações ϵ_{11} nas armaduras inferiores situadas no meio do vão para diversos níveis de carga.

Na Fig. 3.12 são apresentadas as características das lajes a serem analisadas, com as diferentes armaduras. Nas Fig. 3.14 e 3.15 mostram-se os resultados de flechas no centro da placa obtidos numericamente e resultados experimentais extraídos do CEB^[34]. A análise é feita para apenas $\frac{1}{4}$ de laje, devido à simetria de carregamento e geometria. Nas Fig. 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21 e 3.22 apresentam-se s_{11} para a laje analisada para os níveis de carga de 20% (face superior e inferior), 40%, 60%, 80% e 100% (face superior e inferior), respectivamente.

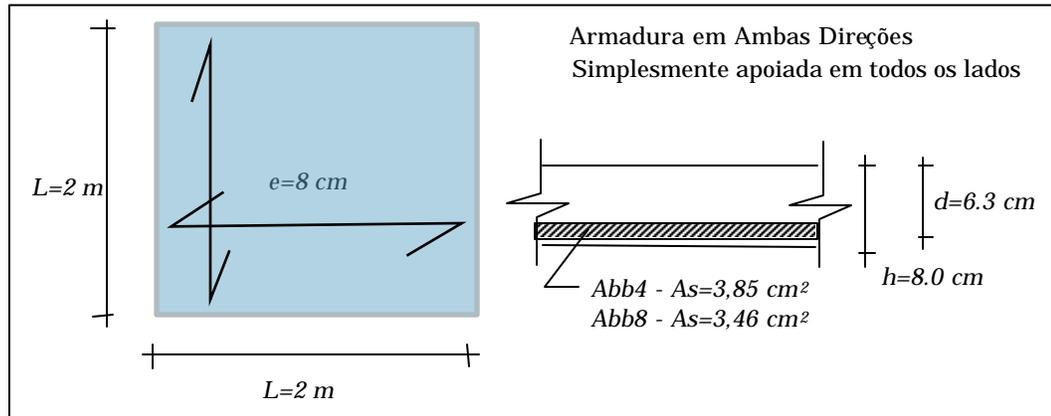


Fig.3.12 Geometria das Lajes Analisadas.

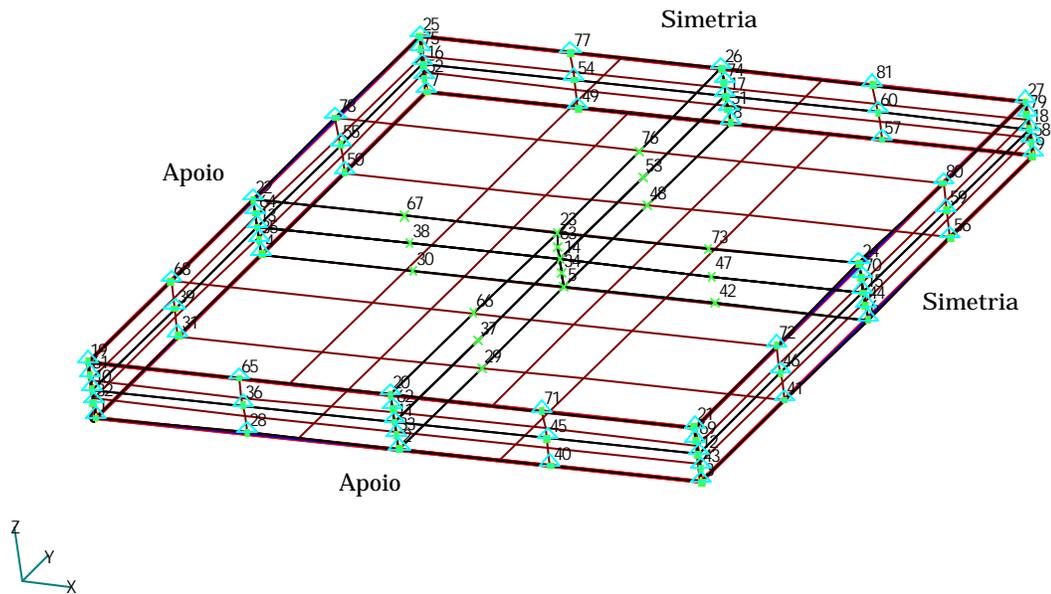


Fig.3.13 Discretização das Lajes Analisadas (1/4).

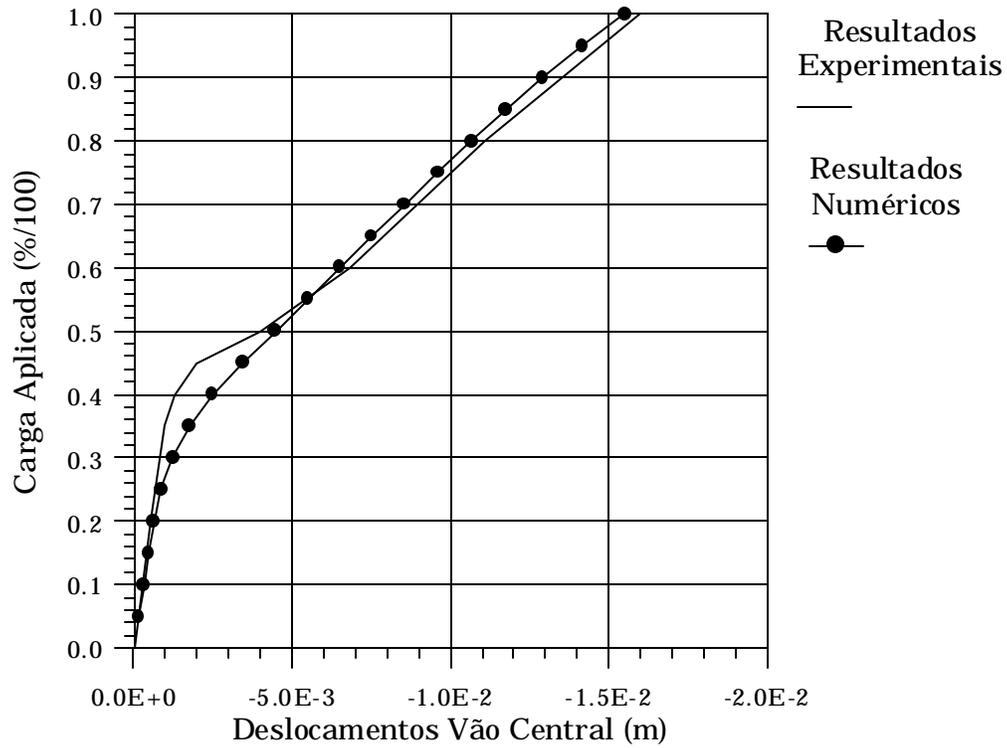


Fig.3.14 Flechas no Vão Central da Laje Abb4.

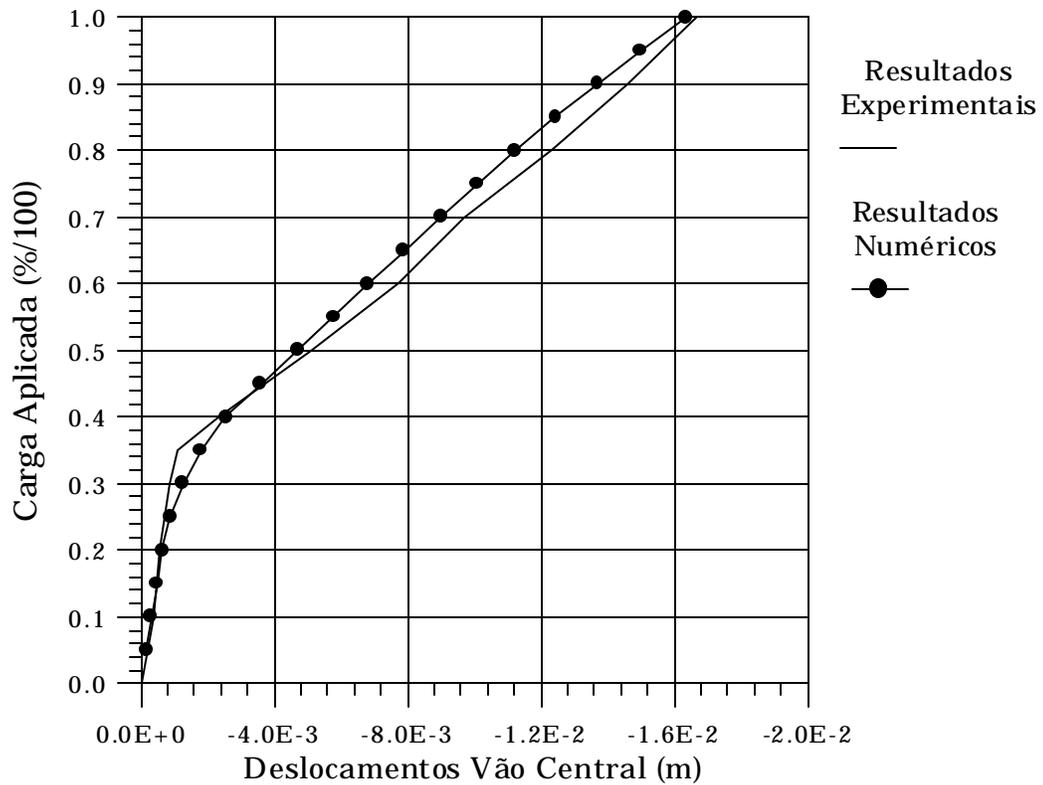


Fig.3.15 Flechas no Vão Central da Laje Abb8.

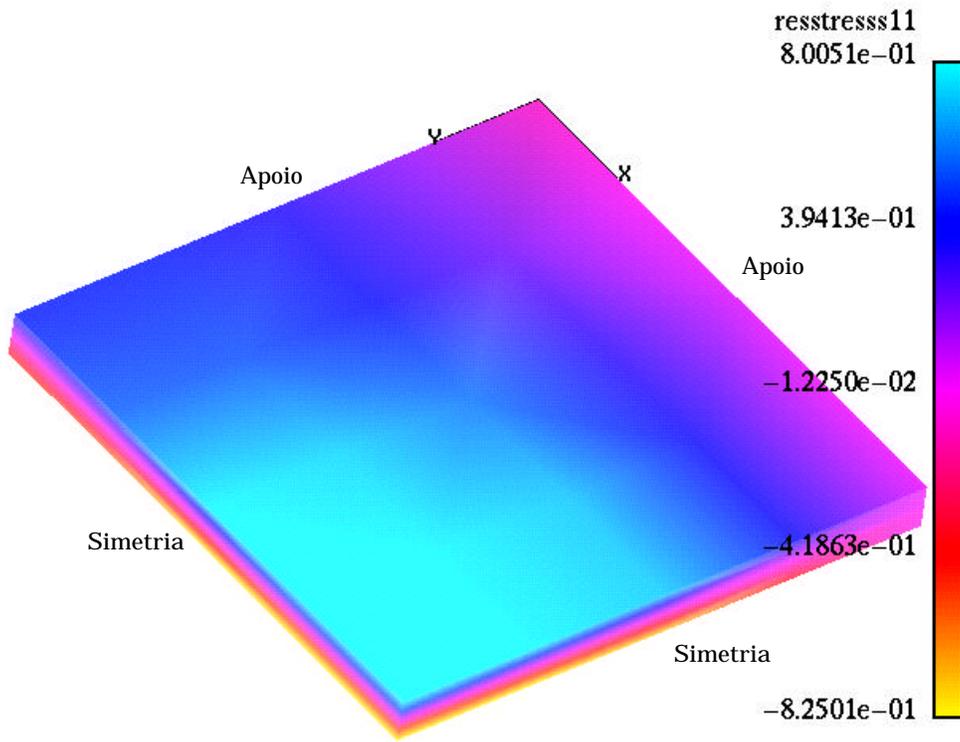


Fig.3.16 Tensões s_{11} na Laje Abb4 para Nível de Carga de 20% (face inferior).

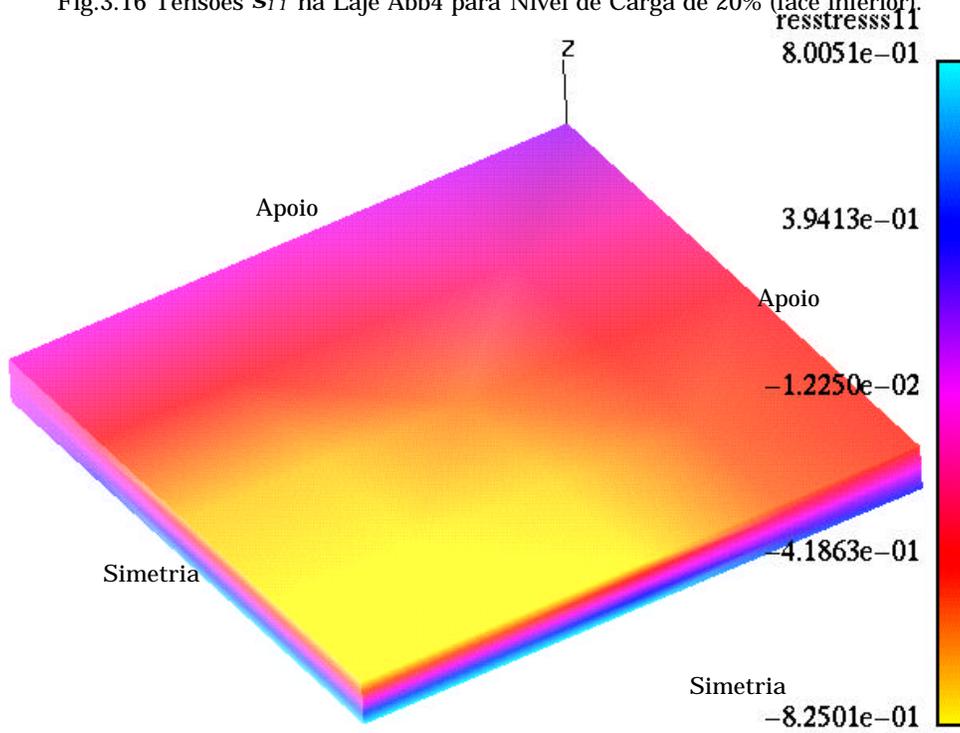
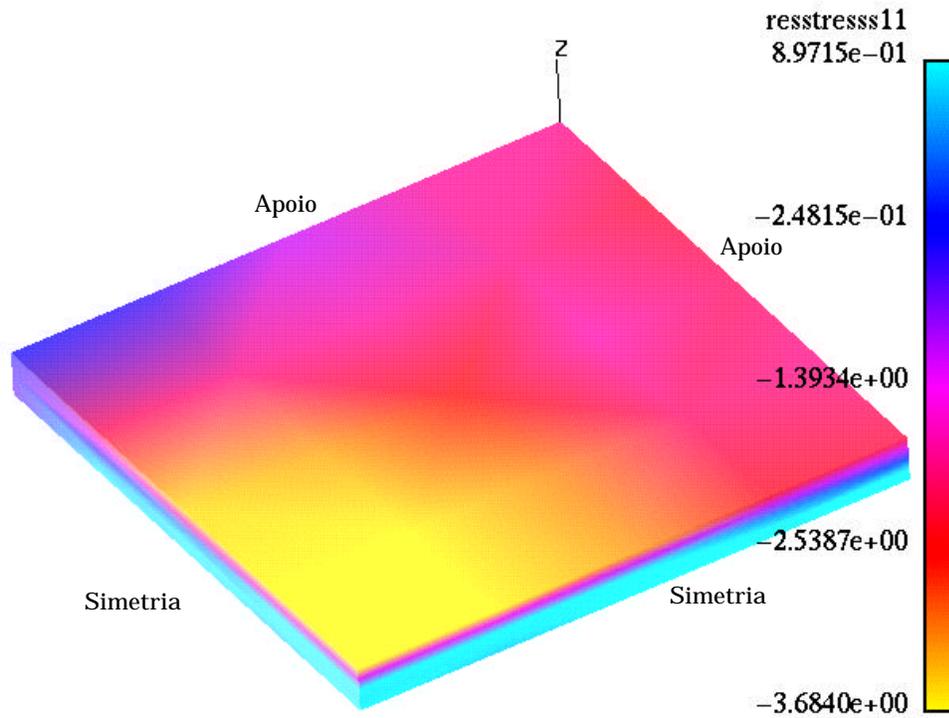
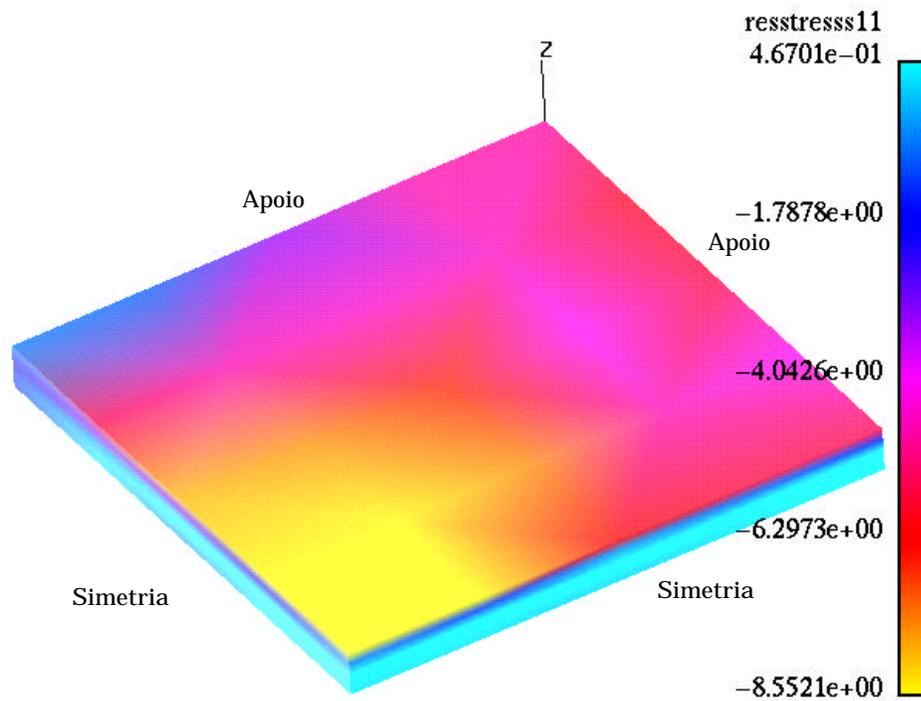
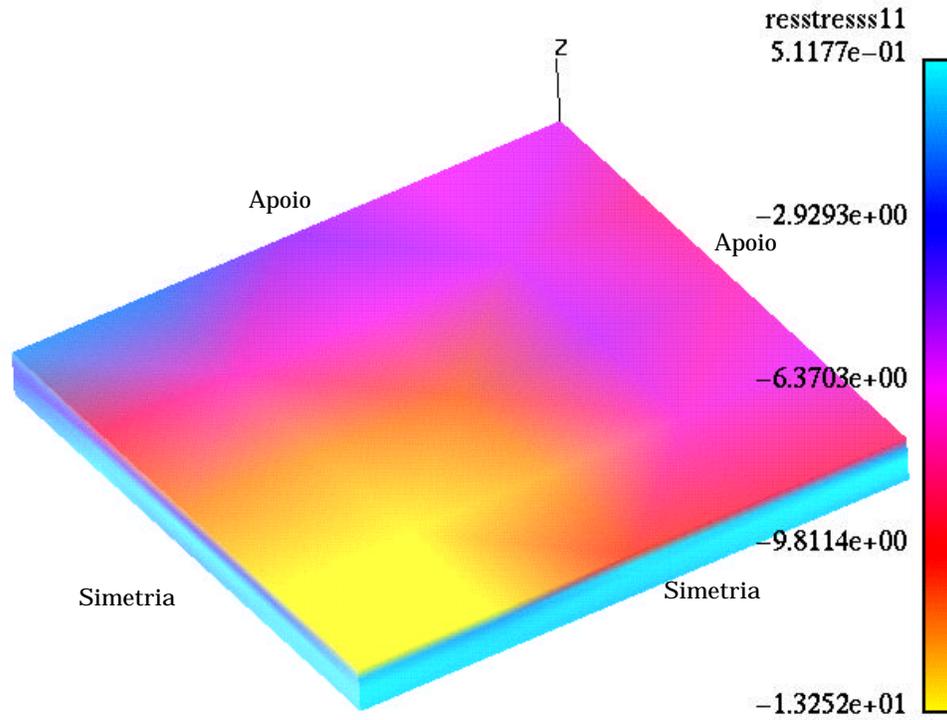
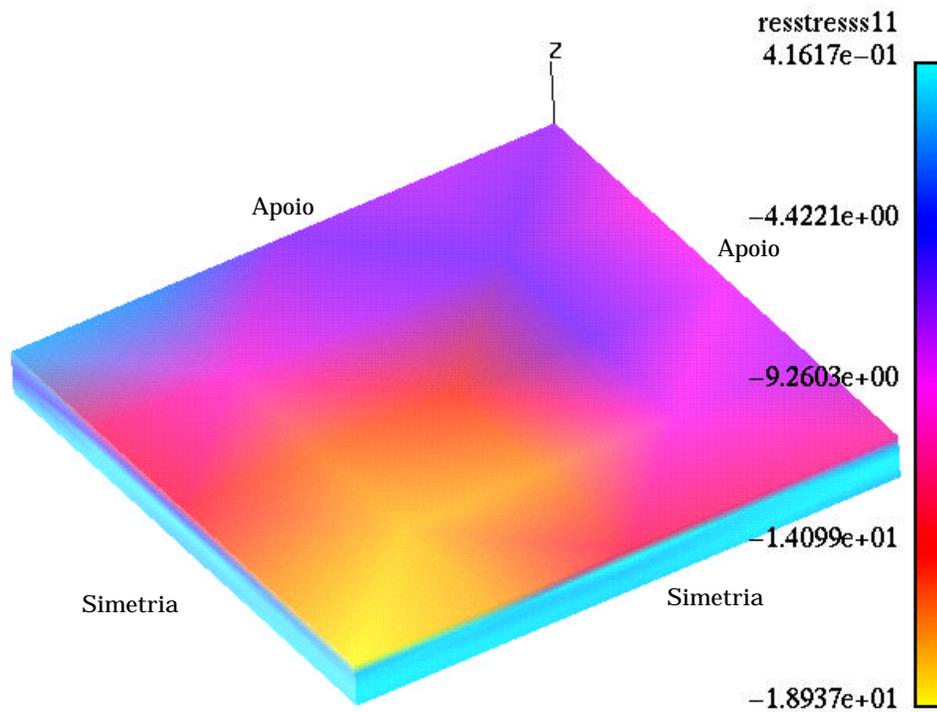


Fig.3.17 Tensões s_{11} na Laje Abb4 para Nível de Carga de 20% (face superior).

Fig.3.18 Tensões s_{11} na Laje Abb4 para Nível de Carga de 40%.Fig.3.19 Tensões s_{11} na Laje Abb4 para Nível de Carga de 60%.

Fig.3.20 Tensões s_{11} na Laje Abb4 para Nível de Carga de 80%.Fig.3.21 Tensões s_{11} na Laje Abb4 para Nível de Carga de 100% (face superior).

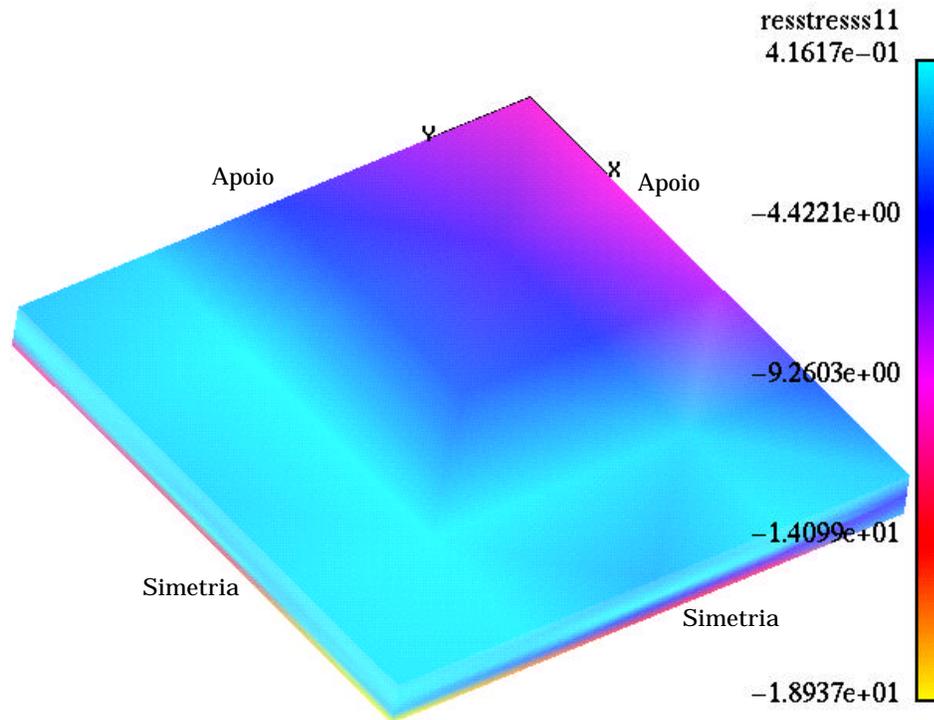


Fig.3.22 Tensões S_{11} na Laje Abb4 para Nível de Carga de 100% (face inferior).

Nos gráficos das tensões para as vigas percebe-se nitidamente a passagem da fase elástica, com tensões de tração e compressão de mesma intensidade nas faces superiores e inferiores da viga, para a fase não-linear, com as tensões de tração desaparecendo para a face inferior, onde então as armaduras passam a trabalhar. Nos gráficos para as tensões na laje, fenômeno semelhante é percebido, com a fissuração do concreto e correspondente diminuição das tensões de tração para zero.

3.2 Análise para Carregamentos Dinâmicos

Para a análise dinâmica de estruturas de concreto armado, traz-se um exemplo, extraído do capítulo de Cervera^[24]. Trata-se de uma viga simplesmente apoiada de concreto armado submetida a duas cargas concentradas do tipo passo unitário. Na Fig. 3.23 apresenta-se a geometria para a viga analisada e na Fig. 3.24 a discretização empregada na análise. Utilizou-se a superfície de falha de Ottosen^[65] e a superfície de falha proposta pela referência citada. Percebe-se a semelhança na resposta dos deslocamentos no vão central da viga para um e outro caso, como se indica na

Fig. 3.25. Fato semelhante percebe-se na Fig. 3.26 onde apresentam-se a história de velocidades para o referido ponto.

Na Tab. 3.2 são apresentadas as características do material do modelo.

Tab.3.2 Características da Peça Analisada.

	f_{cm} (kips/in ²)	f_{cm} (kips/in ²)	E_c (kips/in ²)	G_f (kips/in)	E_s (kips/in ²)	f_y^A (kips/in ²)	H'
Ex1	3,74	0,915	6100	$0,60 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^4$	44	0.0

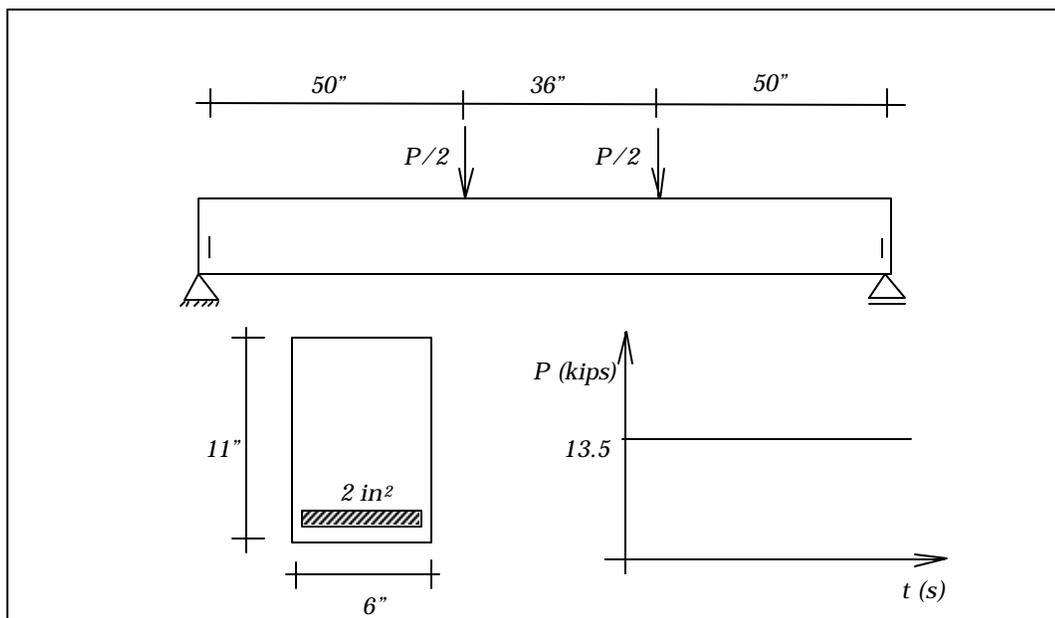


Fig.3.23 Geometria da Viga Analisada

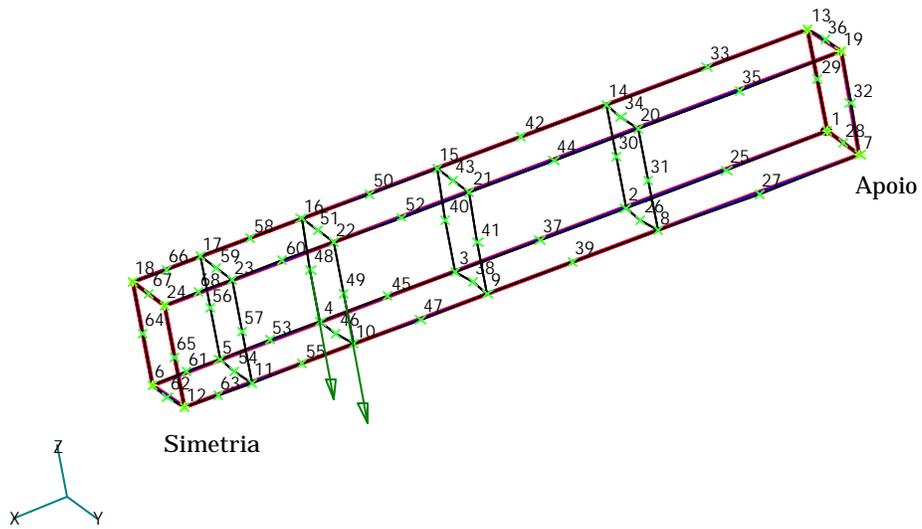


Fig.3.24 Discretização para a Viga Analisada

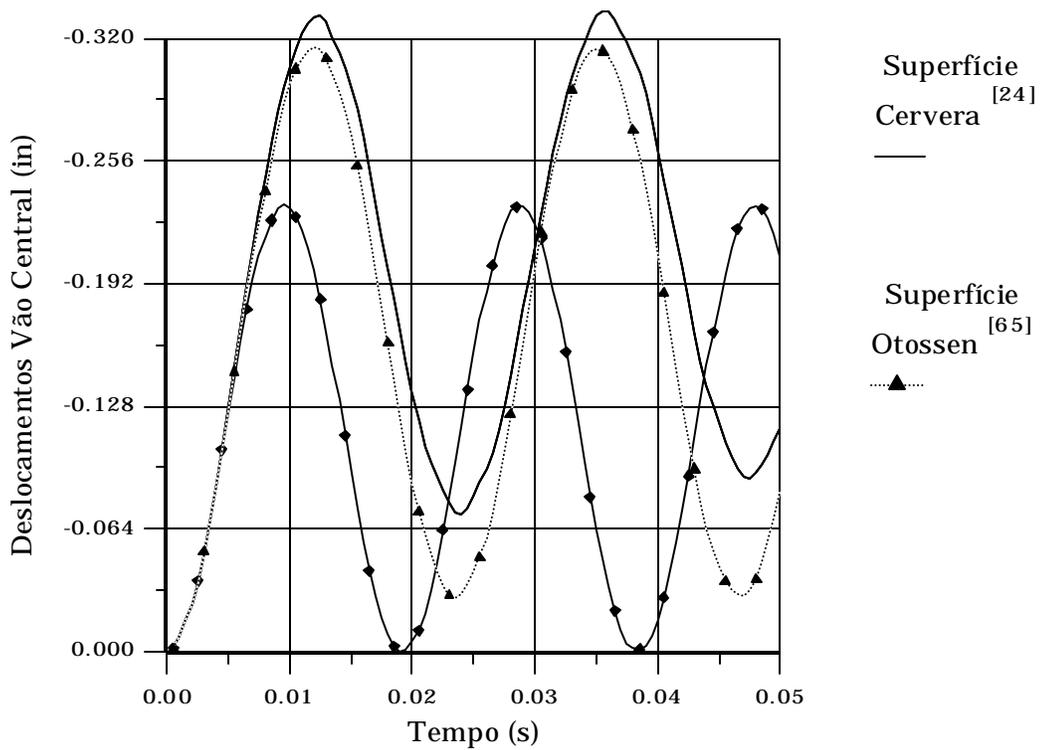


Fig.3.25 Histórico de Deslocamentos no Vão Central.

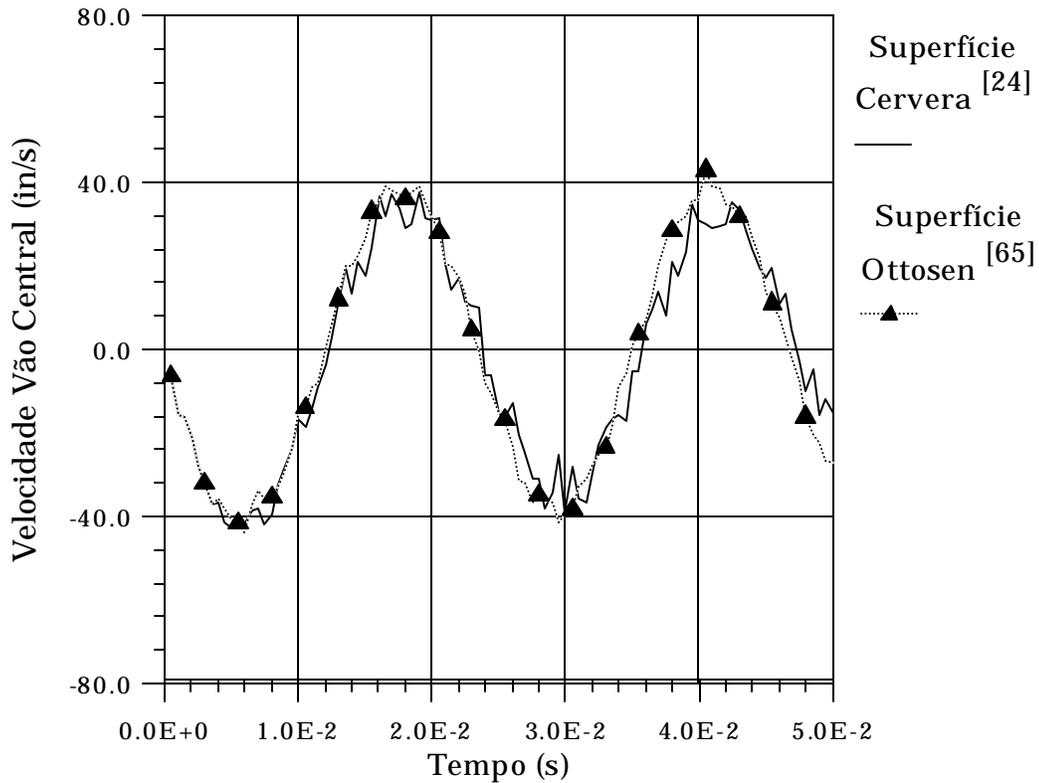


Fig. 3.26 Histórico de Velocidades no Vão Central.

A seguir, é mostrado um exemplo de análise dinâmica para uma casca de uma usina elétrica nuclear (General Electric Mark 3 containment) extraído de Cervera^[24]. A discretização da casca analisada é mostrada na Fig.3.28a e na Fig.3.27 são apresentados os dados geométricos. Como carregamento, utiliza-se a carga de impacto de uma aeronave (Boeing 707-320) horizontalmente sobre uma área de 28 m² de acordo com a história de cargas dada na Fig. 3.29. Na Tab. 3.3 são dadas as características dos materiais empregados. A Fig. 3.28b mostra uma vista deformada (magnificada) para instantes iniciais do impacto.

Tab.3.3 Características da Peça Analisada

	f_{cm} (kgf/cm ²)	f_{ctm} (kgf/cm ²)	E_c (kgf/cm ²)	G_f (kgf/cm)	E_s (kgf/cm ²)	f_y^A (kgf/cm ²)	H'
Ex1	350	40	200000	variável	0,21x10 ⁷	4600	0.0

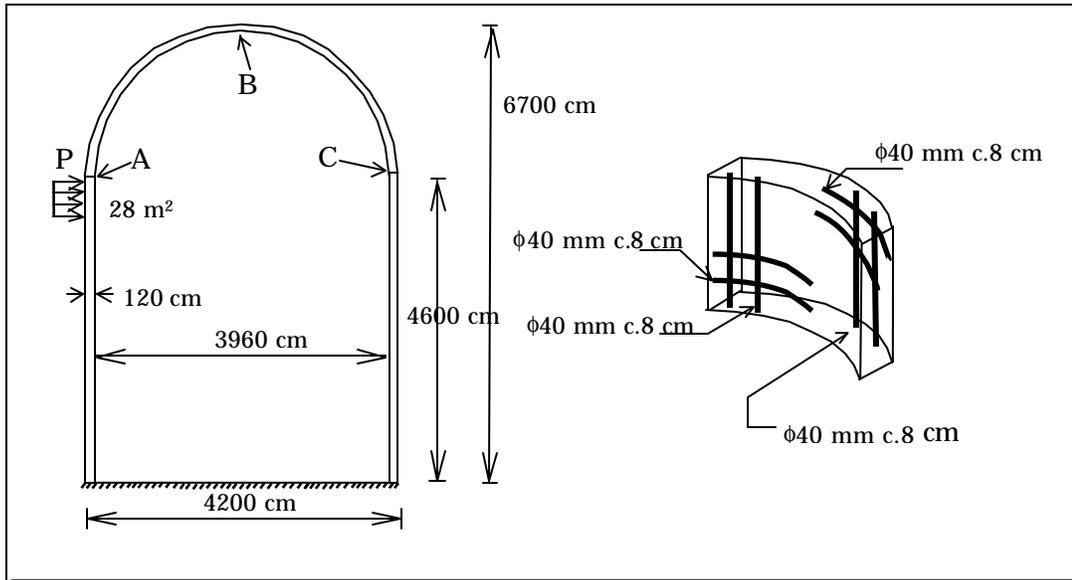


Fig. 3.27 Geometria da Casca analisada.

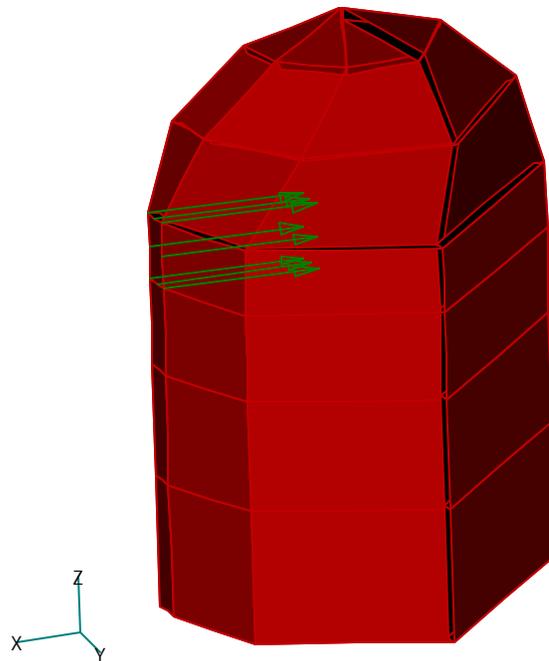


Fig. 3.28a Discretização da casca analisada (1/2).

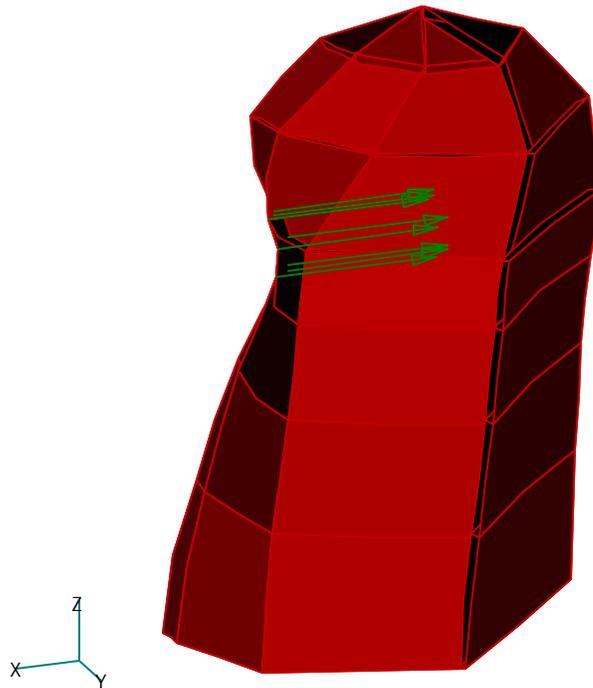


Fig. 3.28b Deslocamentos magnificados na casca.

As Fig. 3.30 a 3.34 apresentam um estudo da variação da resposta da estrutura quando empregam-se diferentes valores para a energia de fratura para a estrutura. Este estudo foi feito utilizando-se uma discretização com 24 elementos. Como observações importantes tiradas deste estudo pode-se citar o claro efeito da não-linearidade no aumento das amplitudes de vibração da estrutura, além da relação que há no aumento da fissuração na região do impacto com a diminuição da energia de fratura.

Os gráficos estão em boa concordância com os resultados apresentados na referência [24], sendo as diferenças provenientes da utilização da superfície de falha/plastificação proposta por Ottosen^[65], integração com 18 pontos e discretização diferente da adotada na citada referência.

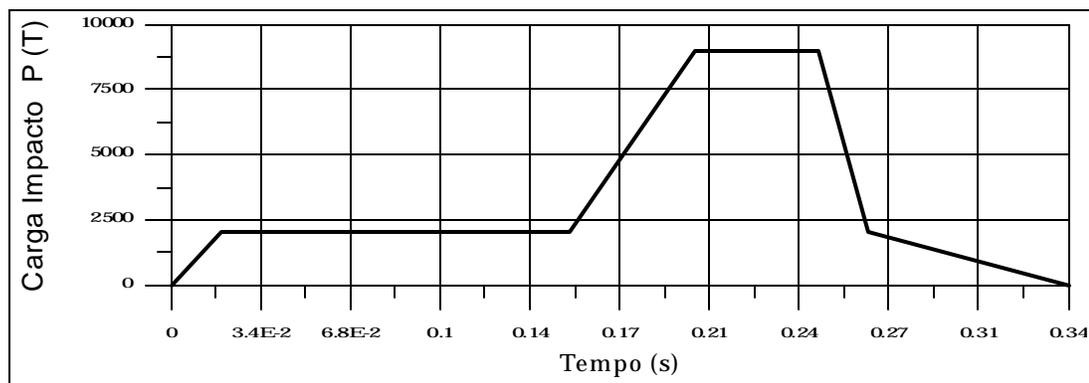
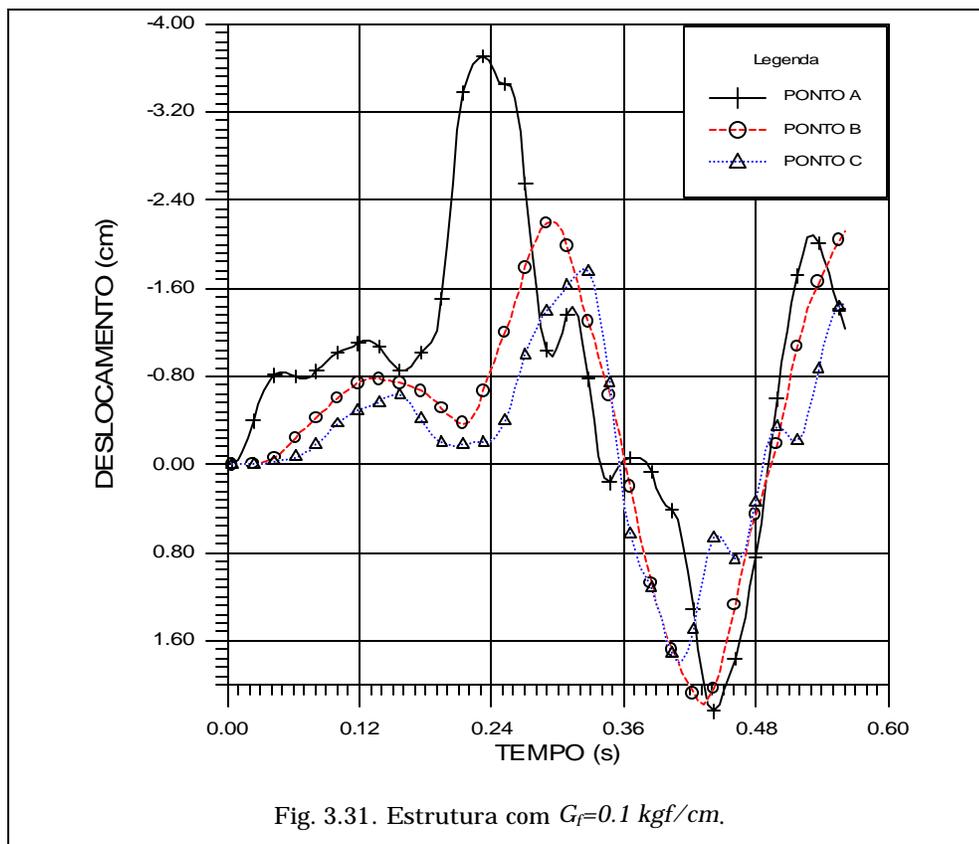
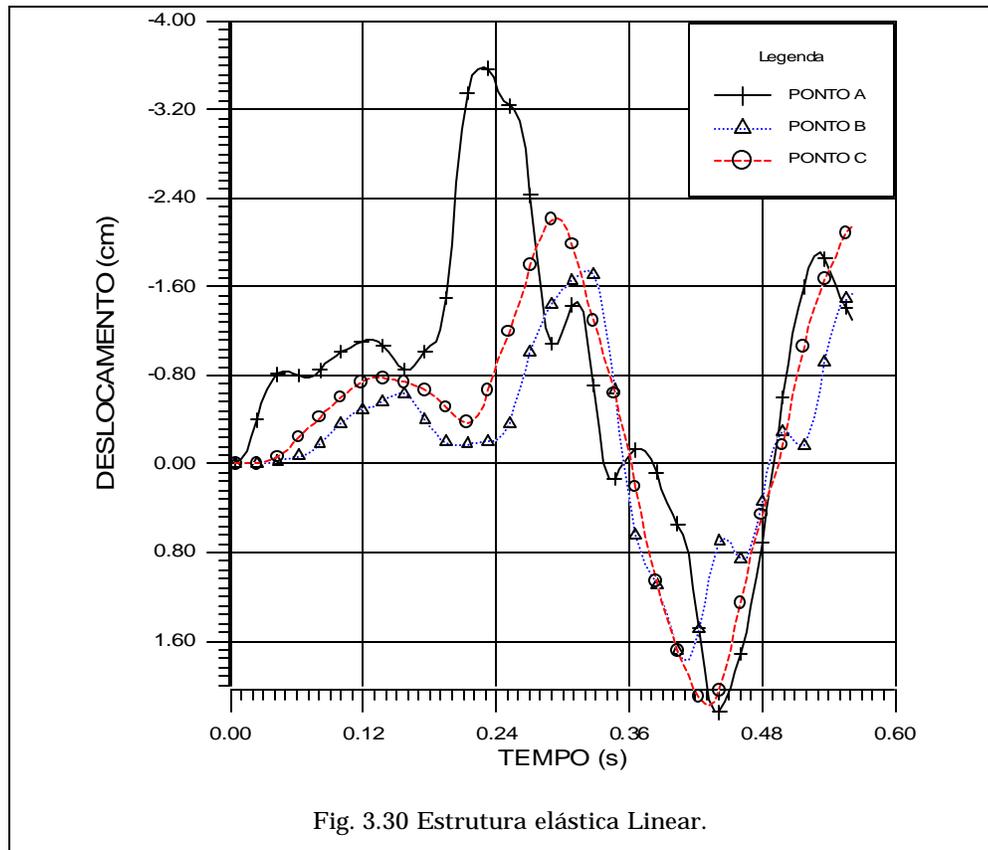
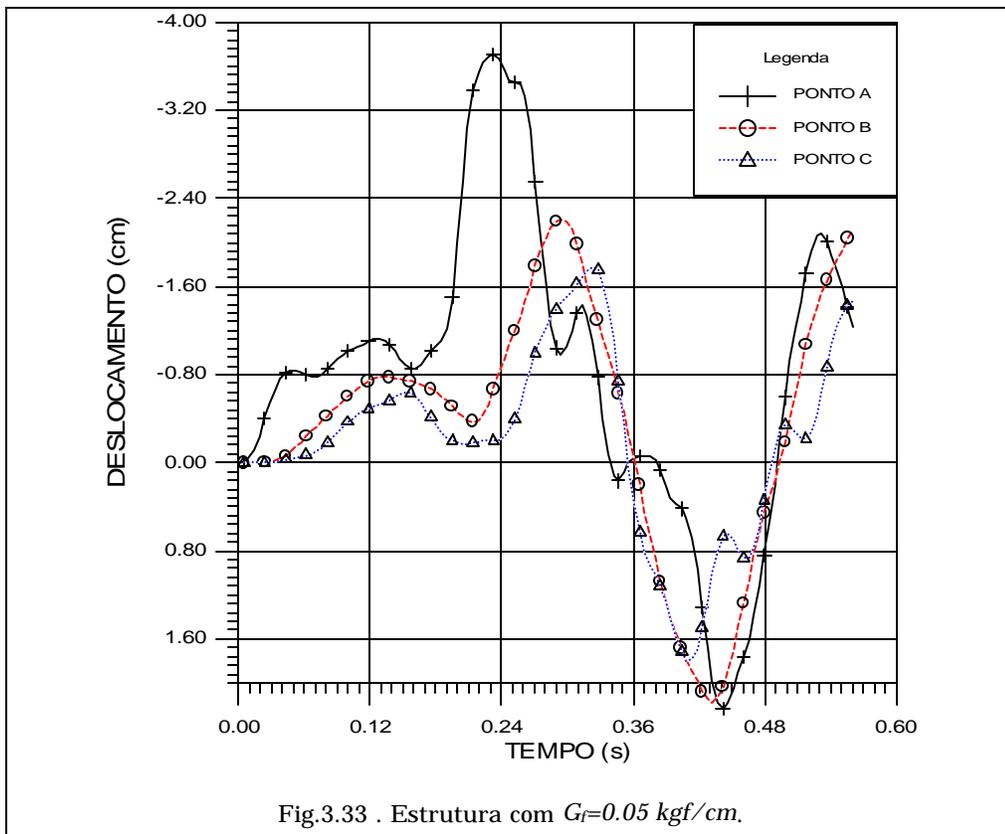
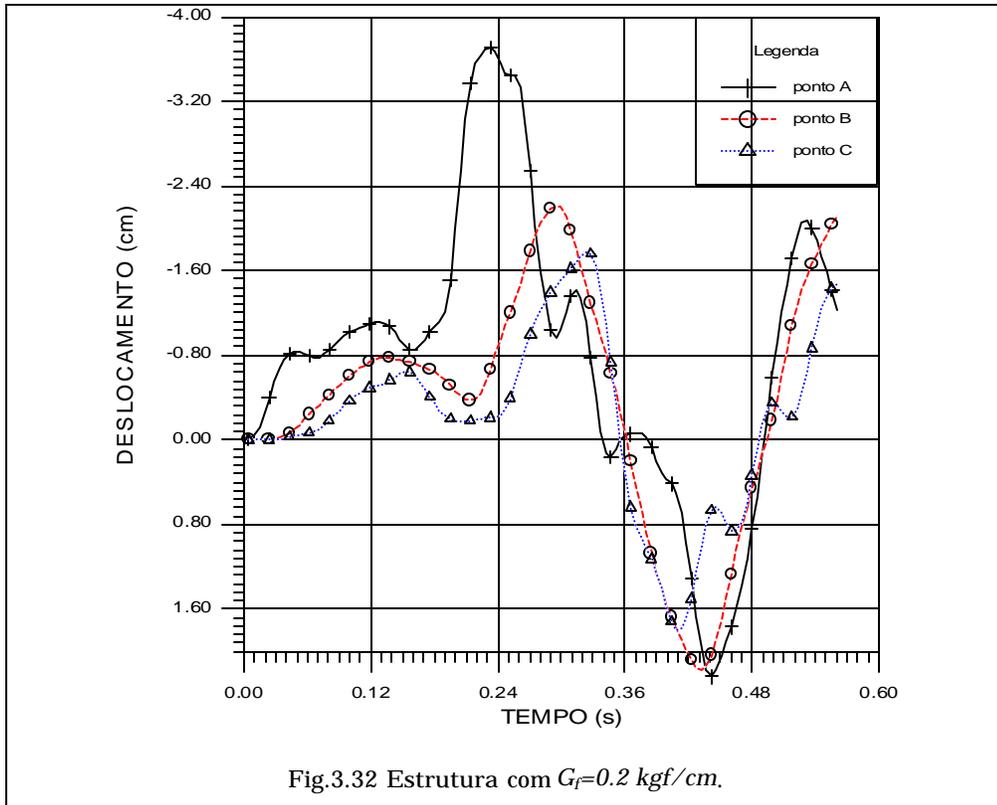


Fig. 3.29 História de Carregamentos para a Casca.





Capítulo 4

Análise da Confiabilidade de Estruturas

“... The principal means for ascertaining truth - induction and analogy - are based on probabilities; so that the entire system of human knowledge is connected with the theory (of probability) ...”

*Pierre S. Laplace,
1816.*

Neste Capítulo é dada uma visão sobre os métodos de análise de Confiabilidade de Estruturas empregadas neste trabalho, assim como o esquema proposto para a abordagem do problema.

4.1 Confiabilidade Estrutural

No projeto estrutural, o principal objetivo está no dimensionamento de estruturas que atendam ao mesmo tempo requisitos de segurança e de economia. Muitas vezes, os requisitos de segurança não são quantificados convenientemente, diferentemente dos requisitos de economia, não sendo muito difícil encontrarem-se estruturas econômicas, mas pouco seguras, assim como estruturas muito seguras, mas pouco econômicas.

O termo confiabilidade estrutural é geralmente empregado para designar a medida de segurança de determinado sistema estrutural frente a um determinado desempenho esperado. Alternativamente, a confiabilidade pode ser entendida como o complemento da probabilidade de falha, ou seja, as chances ou a propensão de determinado sistema em violar um estado limite, quer seja por falha ou por não atender a seu desempenho esperado. Obviamente, a confiabilidade estrutural está relacionada com as variáveis que descrevem o sistema estrutural, e mais precisamente com a variabilidade das mesmas. Particularmente, esta variabilidade está presente nos sistemas estruturais sob a forma de incertezas. De acordo com Melchers^[59], estas incertezas podem ser divididas nos seguintes tipos:

- Incertezas físicas: geralmente presentes nas avaliações de dimensões, valores de ações, valores de propriedades de materiais, etc.;
- Incertezas estatísticas: provenientes da extrapolação de parâmetros estatísticos extraídos de populações finitas ao modelo empregado.
- Incertezas devido a fatores humanos: provenientes de ação do homem, quer seja intencional ou não, no comportamento do sistema estrutural;
- Incertezas de cunho fenomenológico: provenientes da existência de eventos não previsíveis ou levados em consideração;
- Incertezas de modelamento: provenientes das simplificações e das hipóteses adotadas para o modelamento do comportamento estrutural, o emprego de novos materiais, técnicas construtivas, etc.;

É certo que nem todas as incertezas levantadas anteriormente podem ser levadas em conta prontamente numa análise, de forma que fala-se em confiabilidade “formal”, ou seja, uma confiabilidade condicionada à quantidade de incertezas adotada. Portanto, esta confiabilidade “formal” não é “exata”, fazendo apenas sentido comparações entre confiabilidades de sistemas com mesmas incertezas. Desta forma, a avaliação da confiabilidade estrutural surge como ferramenta de comparação entre procedimentos existentes de projeto estrutural, servindo também para a avaliação da validade de regras de projeto estabelecidas em códigos.

4.2 Método de 1ª Ordem

A resposta de uma estrutura pode ser definida por um vetor de variáveis aleatórias básicas $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, que pode incluir parâmetros que definem ações, propriedades do material, tamanho das seções, etc. Um ponto no espaço amostral n-dimensional de variáveis básicas correspondente a \underline{X} é denominado x .

Para poder calcular a probabilidade de falha deve-se formular uma função de estado limite $g(x)$ que depende das variáveis aleatórias, e tal que:

$$g(x) \geq 0 \quad (4.1)$$

seja satisfeita toda vez que haja segurança.

Uma função de estado limite como $g(x)$, separa duas situações: uma de *segurança* e outra de *falha*. Se $g(x) \geq 0$, considera-se que os requerimentos de projeto têm sido devidamente satisfeitos e corresponde a

um ponto da região de segurança. Se $g(\underline{x}) < 0$, os requerimentos de projeto não foram satisfeitos e corresponde a um ponto da região de falha.

A probabilidade de falha P_f é dada por:

$$P_f = \int_{\{\underline{x} | g(\underline{x}) < 0\}} f_{\underline{X}}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (4.2)$$

onde, $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ é a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias.

A avaliação da integral da equação (4.2) é freqüentemente impossível de se obter pois $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ não é conhecida ou devido ao enorme trabalho que demanda em resolver a mesma para funções de estado limite gerais com a dimensão do espaço muito grande.

Para resolver este problema é necessário achar um método que permita calcular de uma forma consistente e objetiva o ponto \underline{x}^* tal que $g(\underline{x}^*) = 0$ e cuja distância à origem do espaço n-dimensional seja mínimo, para cada problema em particular. O ponto \underline{x}^* contém os valores de projeto no limite das regiões de segurança e de falha.

O método que pode ser utilizado para obter o objetivo mencionado acima é o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (First Order Reliability Method - F.O.R.M.).

Para aplicar este método é necessário transformar o espaço das variáveis contidas em \underline{X} em um espaço Gaussiano Normal, uma vez que as variáveis podem assumir qualquer tipo de distribuição de probabilidade, obtendo-se as variáveis \underline{Y} , sendo \underline{y} o ponto correspondente neste espaço ao ponto de projeto \underline{x} . Esta transformação pode ser representada por:

$$\underline{y} = T(\underline{x}) \quad (4.3)$$

O espaço Gaussiano Normal é definido pelo conjunto de variáveis independentes \underline{Y} com distribuições Gaussianas Normais e que têm média zero e valores unitários do desvio Padrão. As principais propriedades deste espaço são as seguintes:

(a) o espaço é rotacionalmente simétrico, ou seja, curvas de nível de densidade de probabilidade constantes formam círculos concêntricos em torno da origem;

(b) a densidade de probabilidade em qualquer hiper-plano do espaço decresce exponencialmente com o quadrado da distância à origem.

Usando a transformação (4.3), a função de estado limite é:

$$g(\underline{x}) = g[T^{-1}(\underline{y})] = h(\underline{y}) \quad (4.4)$$

e a equação(4.2) pode ser escrita utilizando-se de uma função de densidade de probabilidade multi-Normal da seguinte forma:

$$P_f = \int_{h(\underline{y})} (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{y}\underline{y}^T\right) d\underline{y} \quad (4.5)$$

onde n é o número de variáveis aleatórias.

O método proposto tem as vantagens proporcionadas pelos espaços Gaussianos Normais. O ponto da superfície que representa o estado limite e que está mais próximo da origem é o ponto que define as variáveis de projeto, pois é o que tem máxima densidade de probabilidade entre o conjunto de pontos da superfície de falha. Baseado nas propriedades acima, a máxima contribuição para P_f em (4.5) vem da densidade dos pontos na superfície de falha que estão na vizinhança do ponto que define as variáveis de projeto. Isto conduz a aproximações do método de primeira ordem proposto. A superfície de falha $h(\underline{y})$ é substituída por um hiper-plano $l(\underline{y})$ num espaço de dimensão $(n-1)$ no ponto que define as variáveis de projeto \underline{y}^* , com $h(\underline{y}^*) = 0$

(Fig. 4.1), ou seja,

$$l(\underline{y}) = \nabla h(\underline{y}^*)(\underline{y} - \underline{y}^*) \quad (4.6)$$

onde $\nabla h(\underline{y}^*)$ é o gradiente de $h(\underline{y}^*)$ em \underline{y}^*

O método proposto é satisfatório quando a superfície que define os estados limites é suave e não tem mais do que um mínimo local.

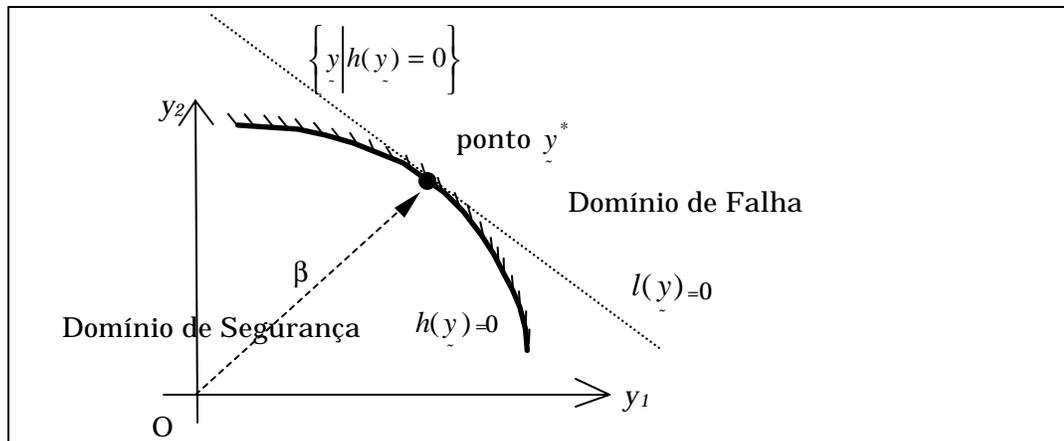


Fig. 4.1 Domínio de falha e Sua Aproximação Linear no Espaço Gaussiano Normal.

Em geral a relação entre a probabilidade de falha P_f e o chamado índice de confiabilidade b é definida por:

$$P_f = f(-b) \text{ ou } b = -f^{-1}(P_f) \quad (4.7)$$

onde f é a função de densidade de probabilidade Normal. Este índice proporciona uma alternativa adicional a P_f como medida da segurança do sistema, e inclusive é mais conveniente, pois enquanto P_f varia entre 10^{-1} e 10^{-9} na maioria do problemas estruturais, b varia entre 1 e 6. Um gráfico representativo desta relação é apresentado na Fig.4.2.

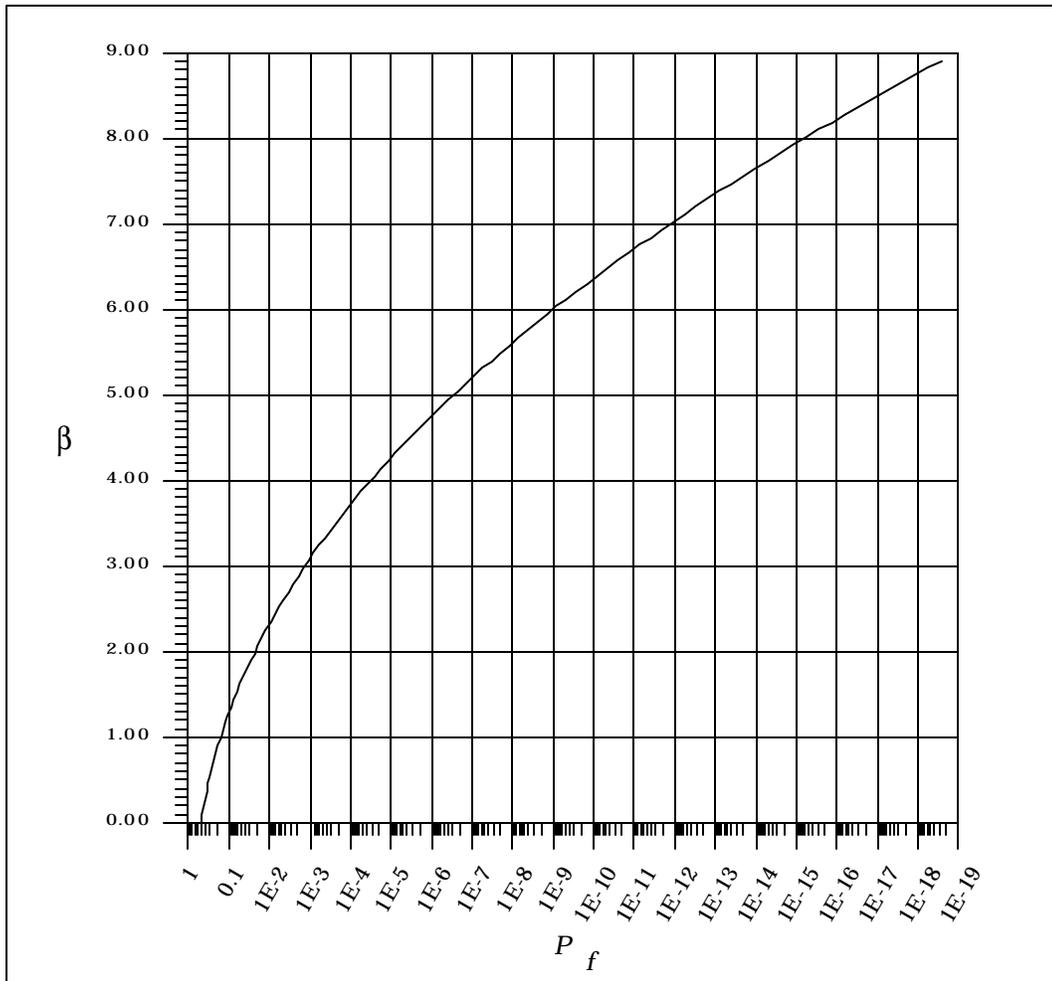


Fig.4.2 Relação entre a Probabilidade de Falha e o Índice b de Confiabilidade

Através de uma interpretação geométrica é fácil entender como o índice de confiabilidade b e P_f são avaliados. Na Fig.4.1, um domínio bidimensional correspondente às variáveis y_1 e y_2 é mostrado. A aproximação do domínio de falha com um hiper-plano tangente no ponto y^* (ponto que

define o valor das variáveis de projeto) é também indicado. \mathbf{b} é a mínima distância da origem ($\mathbf{y}=0$) à superfície de falha ($h(\mathbf{y}^*)=0$) no espaço do sistema \mathbf{y} de coordenadas normalizadas. Isto conduz a um problema de otimização com restrições para o cálculo de \mathbf{b} , que pode ser formulado da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (4.8)$$

$$\text{Sujeito a } h(\mathbf{y}^*)=0$$

Para a solução do procedimento acima pode-se utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Trabalhando-se no espaço Normal Gaussiano, procura-se a menor distância entre a origem e a função de estado limite. Assim, introduzindo o multiplicador de Lagrange \mathbf{l} , tem-se:

$$L = \left(\mathbf{y}^T \mathbf{y} \right)^{1/2} + \mathbf{l} h(\mathbf{y}) \quad (4.9)$$

Derivando a expressão anterior em relação a \mathbf{y} e em relação ao multiplicador de Lagrange, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{y}} L = \left\{ \frac{\partial h}{\partial y_1}, \frac{\partial h}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial h}{\partial y_n} \right\}_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*}^T = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{l}} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Expandindo a primeira equação tem-se:

$$\nabla_{\mathbf{y}} L = \frac{1}{2} \left(\mathbf{y}^T \mathbf{y} \right)^{-1/2} (2\mathbf{y}) + \mathbf{l} \nabla_{\mathbf{y}} h = 0 \quad (4.11)$$

e isolando a variável \mathbf{y} , chega-se a:

$$\mathbf{y}^* = -\mathbf{l} \mathbf{b} \nabla_{\mathbf{y}} h \quad (4.12)$$

Utilizando este resultado na definição do índice de confiabilidade, chega-se ao valor do multiplicador de Lagrange:

$$\mathbf{l} = \pm \left(\mathbf{y}^{*T} \mathbf{y}^* \right) = \pm \left[\left(\nabla_{\mathbf{y}} h \right)^T \left(\nabla_{\mathbf{y}} h \right) \right]^{-1/2} \quad (4.13)$$

o qual utilizado na equação (4.12) fornece o valor do índice de confiabilidade, que é dado pela expressão:

$$\mathbf{b} = -\frac{\underline{y}^T \nabla_{\underline{y}} h}{(\nabla_{\underline{y}}^T h \nabla_{\underline{y}} h)^{1/2}} \quad (4.14)$$

com a direção definida pelos cosenos diretores:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\underline{y}^*}{\mathbf{b}} - \frac{\nabla_{\underline{y}} h}{\left(\nabla_{\underline{y}}^T h \nabla_{\underline{y}} h\right)^{1/2}} \quad (4.15)$$

Caso haja uma correlação entre as componentes de \underline{y} , representada através de uma matriz de correlação $\mathbf{r}_{\underline{y}}$, pode-se formar o mesmo problema de otimização anterior, trabalhando-se com as variáveis sem a correlação, de forma que tem-se:

$$\text{Minimizar } \mathbf{b} = \sqrt{\underline{y}^T \mathbf{r}_{\underline{y}} \underline{y}} \quad (4.16)$$

$$\text{Sujeito a } h(\underline{y}^*) = 0$$

e as equações (4.14) e (4.15) transformam-se em:

$$\mathbf{b} = -\frac{\underline{y}^T \nabla_{\underline{y}} h}{\left(\nabla_{\underline{y}}^T h \mathbf{r}_{\underline{y}} \nabla_{\underline{y}} h\right)^{1/2}} \quad (4.17)$$

e

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\underline{y}^*}{\mathbf{b}} - \frac{\mathbf{r}_{\underline{y}} \nabla_{\underline{y}} h}{\left(\nabla_{\underline{y}}^T h \mathbf{r}_{\underline{y}} \nabla_{\underline{y}} h\right)^{1/2}} \quad (4.18)$$

onde a matriz $\mathbf{r}_{\underline{y}}$ representa a matriz de correlação entre as variáveis transformadas \underline{y} .

Na teoria da Confiabilidade Estrutural, o índice b é usado para comparar e quantificar resultados de métodos para análise da segurança de sistemas estruturais, entretanto deve ser reconhecido que b tem apenas um caráter operativo, pois a probabilidade de falha pode ter uma grande sensibilidade às variações do modelo estocástico, especialmente quando se trabalha com probabilidades muito pequenas ($P_f < 10^{-5}$).

No campo de Engenharia Estrutural, critérios de falha ou funções de estado limites não são formulados em termos de variáveis básicas. Eles são expressos em termos de quantidades \underline{S} , que surgem da resposta da estrutura, tais como tensões, largura de fissuras, deformações, etc., que são derivadas das variáveis básicas. Esta dependência pode ser representada por $\underline{S} = \underline{S}(\underline{X})$, que são chamadas de *transformações mecânicas* e que podem ser avaliadas apenas numa forma implícita através, por exemplo, do método dos elementos finitos (M.E.F.). Esta é uma razão importante pela qual se utiliza o método dos elementos finitos na análise da confiabilidade estrutural.

Apresenta-se na Fig. 4.3, um fluxograma da análise de confiabilidade de 1ª ordem.

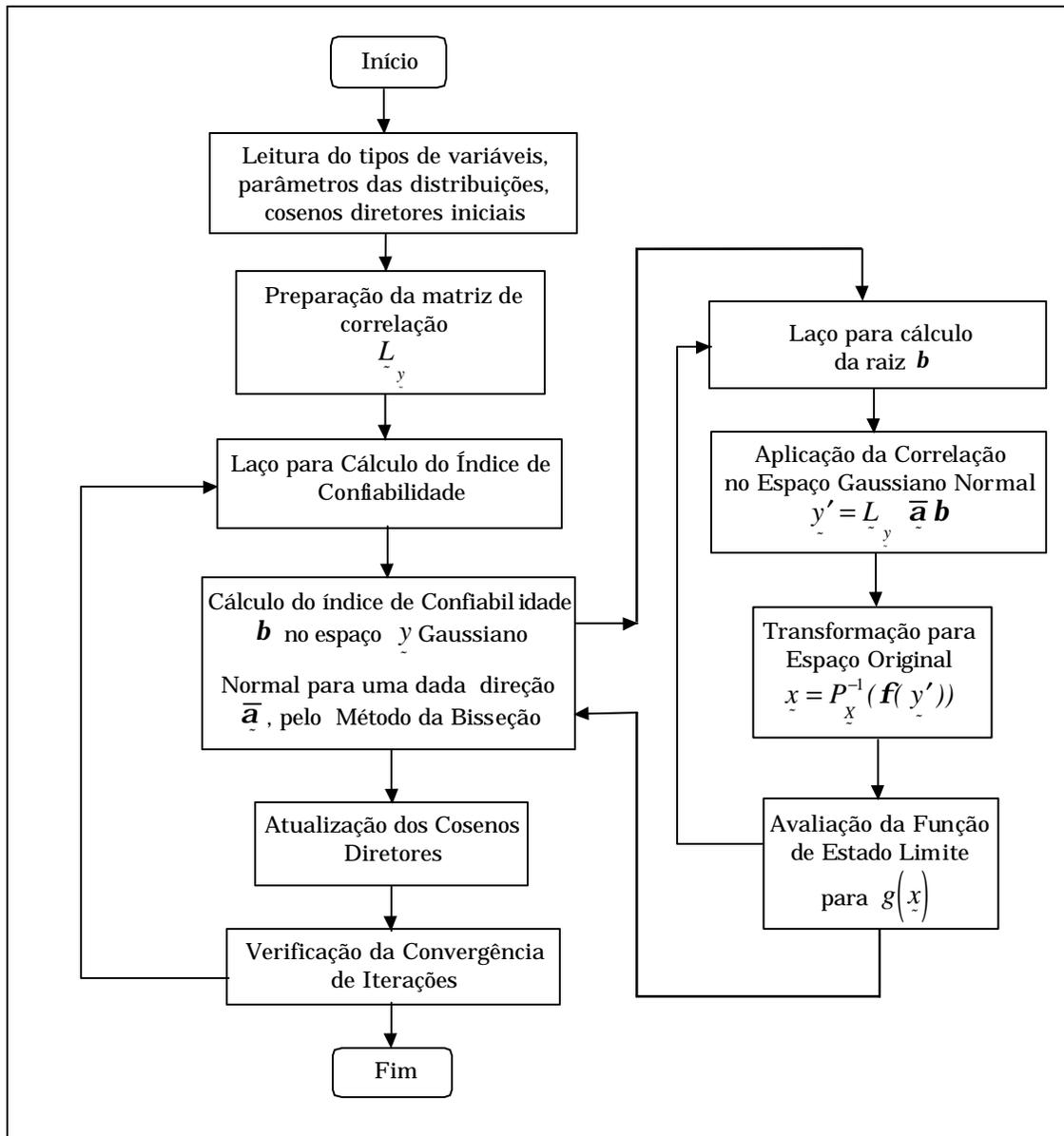


Fig. 4.3 Fluxograma para o algoritmo FORM.

4.3 Simulação Direta de Monte Carlo

A técnica de simulação de Monte Carlo consiste na simulação e observação de um grande número de experimentos gerados artificialmente. A geração das amostras das variáveis aleatórias pode ser feita, por exemplo,

pelo método da transformação inversa. Este método consiste na geração de números aleatórios, nos limites de $[0,1]$, e na utilização da forma inversa da função de distribuição de probabilidade acumulada da variável em questão. Maiores detalhes podem ser encontrados no apêndice II. Quando não se tem uma forma fechada para a inversa da função de distribuição de probabilidade acumulada ou quando se têm variáveis correlacionadas, é preferível o uso de técnicas especializadas mais eficientes computacionalmente.

Resumidamente, esta técnica consiste na geração de diversas amostras aleatórias das variáveis envolvidas no experimento e a correspondente avaliação da função de estado limite. A simulação Direta de Monte Carlo pode ser entendida como o cálculo da frequência relativa dos casos de falha observados nos diversos experimentos, para as diversas amostras das variáveis aleatórias envolvidas. Assim, se N amostras aleatórias das variáveis são geradas e avalia-se o comportamento da função de estado limite ($g(\underline{x})$), pode-se escrever:

$$\hat{P}_f = \frac{\sum_{i=1}^N I[g(\underline{x}_i) \leq 0]}{N} \quad (4.19)$$

com,

$$I[g(\underline{x}) \leq 0] = \begin{cases} 1 & \text{se } \underline{x} \in \{ \underline{x} / g(\underline{x}) \leq 0 \} \text{ (falha) } \\ 0 & \text{se } \underline{x} \notin \{ \underline{x} / g(\underline{x}) \leq 0 \} \text{ (segurança) } \end{cases} \quad (4.20)$$

onde \underline{x} representa o vetor de variáveis aleatórias básicas, o símbolo $\hat{\cdot}$, uma indicação de se tratar de um estimador e N o número de simulações.

Calculando-se o valor esperado e o desvio padrão para a equação (4.19), tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{m}_{\hat{P}_f} &= \hat{P}_f \\ \hat{s}_{\hat{P}_f} &= \frac{1}{N} \sqrt{N(\hat{P}_f - \hat{P}_f^2)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

e o coeficiente de variação para a estimativa da probabilidade de falha pode ser expresso por:

$$\hat{d}_{\hat{P}_f} = \frac{\hat{s}_{\hat{P}_f}}{\hat{m}_{\hat{P}_f}} = \frac{1}{N\hat{P}_f} \sqrt{N(\hat{P}_f - \hat{P}_f^2)} \quad (4.22)$$

Uma estimativa grosseira para a obtenção do número de amostras necessárias para um valor razoável da probabilidade de falha por

este método é tomar para o coeficiente de variação o valor $\hat{d}_{\hat{P}_f} = 50\%$. Para sistemas estruturais usuais de concreto armado, cuja probabilidade de falha em serviço fica em torno de 10^{-6} , o número de simulações, de acordo com a equação (4.22), deverá ser de 4×10^6 simulações. Assim, o principal inconveniente da técnica reside no grande número de simulações envolvidas no cálculo da confiabilidade para baixos valores do coeficiente de variação.

4.3.1 Simulação com Amostragem por Importância

Como alternativa para evitar o grande número de simulações envolvidas na Simulação Direta de Monte Carlo, surge o método da Simulação direta com Amostragem por Importância.

A idéia básica do método consiste em concentrar a distribuição dos pontos amostrais na região mais importante, isto é, na parte onde ela contribui mais fortemente para a probabilidade de falha, ao invés de espalhar as amostras por todo domínio de integração da equação (4.23). Utilizando uma “função indicadora” para a equação (4.20), obtém-se:

$$P_f = \int_{\text{tododomínio}} I[g(\underline{x}) \leq 0] f_{\underline{x}}(\underline{x}) d\underline{x} \quad (4.23)$$

A maior contribuição para a integral acima provém da região de vizinhança do ponto de projeto (“design point”), de forma que se pode aplicar uma função de penalização para pontos mais distantes do ponto de projeto, reduzindo grandemente o esforço para cálculo da integral. Percebe-se que uma avaliação prévia do ponto de projeto deve ser feita. Assim, tem-se:

$$P_f = \int_{\text{todo domínio}} I[g(\underline{x}) \leq 0] \frac{f_{\underline{x}}(\underline{x})}{l_v(\underline{x})} l_v(\underline{x}) d\underline{x} \quad (4.24)$$

sendo $l_v(\underline{x})$ a função de densidade de probabilidade de amostragem.

Assim, a simulação pode ser feita de acordo com a distribuição $l_v(\underline{x})$, ao invés da distribuição $f_{\underline{x}}(\underline{x})$. Como visto anteriormente, para probabilidades de falha muito pequenas, a Simulação Direta de Monte Carlo necessita de muitas simulações. Por outro lado, integrando-se com a nova densidade de probabilidade de amostragem, consegue-se uma boa precisão para a probabilidade de falha com poucas simulações. A função de penalização pode ser uma função de densidade de probabilidade multi-Normal, com parâmetros convenientemente tomados. Mostrou-se que para poucas variáveis aleatórias, o tipo de distribuição desta função não afeta o

cálculo da probabilidade de falha. Entretanto, para maiores quantidades de variáveis (≥ 6), uma boa escolha do tipo de função de amostragem é importante. O objetivo da função de penalização, conforme discutido, é concentrar a simulação na região mais importante para o cálculo da integral. Sua localização deve ser tal que esteja próxima ao “design point” (Brener^[19]), mais precisamente próxima do IFM-Point (Iterative Fast Monte Carlo Procedure)^[17], que é o ponto correspondente ao centro de massa dos pontos simulados no domínio de falha.

A integral (4.16) pode ser expressa numericamente por:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\mathbf{u}_i) \leq 0] \frac{f_x(\mathbf{u}_i)}{l_v(\mathbf{u}_i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_w \quad (4.25)$$

onde N representa um número discreto de simulações e v o vetor de amostras gerados a partir da função de densidade de probabilidade de amostragem ponderada.

Da mesma forma que para simulação de Monte Carlo, pode-se calcular o coeficiente de variação para a estimativa da probabilidade de falha, chegando-se ao seguinte resultado:

$$\hat{d}_{\hat{P}_f} = \frac{\hat{S}_{\hat{P}_f}}{\hat{m}_{\hat{P}_f}} = \frac{1}{N\hat{P}_f} \sqrt{\sum_{i=1}^N I_w^2 - N\hat{P}_f^2} \quad (4.26)$$

que diferentemente do coeficiente de variação para Monte Carlo Puro, não é apenas função do número de amostras e da probabilidade de falha, mas também da função indicadora I_w , de forma que, uma vez bem escolhida a função de densidade de probabilidade de amostragem, há a possibilidade da diminuição do coeficiente de variação sem o aumento do número de amostras.

Assim, se $l_v(x)$ satisfaz as características de um espaço Gaussiano Normal e está nas proximidades do ponto de projeto, as simulações com v penalizarão pontos afastados do ponto de projeto. Diferentemente da simulação direta de Monte Carlo, onde se fazia apenas uma contagem da frequência relativa dos casos de falha, aqui se trabalha com amostras próximas do ponto de projeto e que provocarão uma maior quantidade de “pontos” no domínio de falha. De acordo com a equação (4.25), ao se fazer a contagem da frequência relativa, pondera-se em relação à função de amostragem os casos de falha observados.

A técnica é esboçada na Fig.4.4 para o caso de uma variável aleatória.

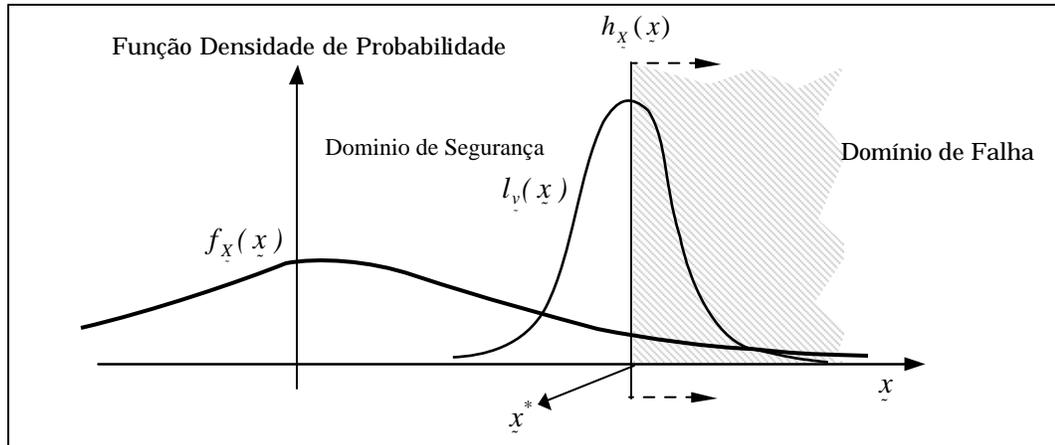


Fig. 4.4 Esboço da Técnica "Importance Sampling" para uma Variável Aleatória.

É apresentado a seguir, na Fig.4.5, o fluxograma da metodologia empregada na análise da confiabilidade feita neste trabalho. Nesta análise, utiliza-se o programa computacional desenvolvido no LDEC (Laboratório de Dinâmica e Confiabilidade da UFRGS) para geração das amostras aleatórias e cálculo do índice de confiabilidade, e o programa numérico de concreto armado aqui apresentado, para definição da função de estado limite.

O funcionamento do programa é basicamente a geração de amostras necessárias com respectivas correlações e aplicação ao programa numérico, seguido do cálculo do índice de confiabilidade.

4.4 Funções de Estado Limite

Para o cálculo da probabilidade de falha, faz-se necessário a definição de estados limites, os quais definirão quando a estrutura falhou. Neste trabalho, a violação ou ultrapassagem de um estado limite significará o alcance de uma situação não desejável, que corresponderá à falha.

Normalmente, define-se dois tipos básicos de estados limites: os estados limites últimos (ruína) e os estados limites de utilização. Esta é apenas uma classificação simplificada. Em muitos casos particulares alguns novos estados limites intermediários podem ser considerados (Melchers^[59]). Assim, definido um estado limite (ou estados limites) para a estrutura, o cálculo da confiabilidade fica condicionado a este estado.

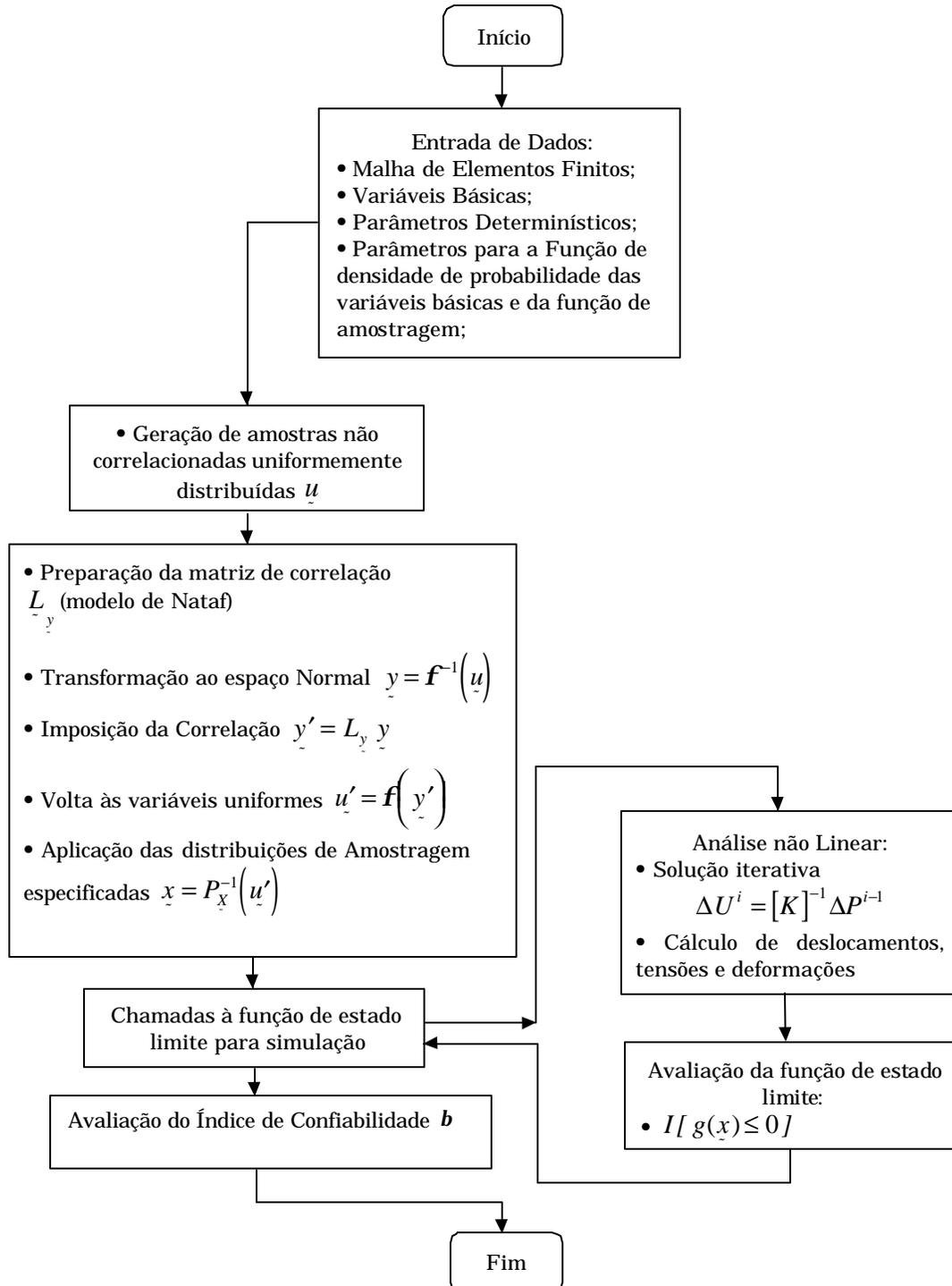


Fig. 4.5 Esquema do Modelo Proposto para Simulação Direta com "Importance Sampling".

O cálculo do índice de confiabilidade real de uma estrutura é praticamente impossível, uma vez que para atingir tal objetivo, faz-se necessário levar em consideração a identificação de todos os modos de falha possíveis para a estrutura, as incertezas de cunho físico, estatístico, do modelo empregado e incertezas fenomenológicas, tarefa esta bastante dispendiosa, sendo de pouca utilidade para os níveis de precisão exigidos em projetos usuais.

4.4.1 Estados Limites de Utilização

Quando a estrutura atinge um estado tal que sua durabilidade ou funcionalidade está comprometida, diz-se que a mesma atingiu um estado limite de utilização. Assim, flechas excessivas, vibrações excessivas, dano local por abertura excessiva de fissura são exemplos de estados limites de utilização.

O código modelo do CEB^[30], subdivide este estado limite em três categorias para estruturas e concreto:

- Dano estrutural local limitado, tais como fissuração ou tensões de compressão excessivas. Este tipo de dano está relacionado ao comprometimento da durabilidade da peça estrutural;
- Deformações que produzem dano inaceitável em elementos não estruturais, ou que afetam excessivamente o uso ou aparência destes mesmos elementos;
- Vibrações que resultem em desconforto, sobressalto ou perda de utilidade.

Como exemplo de estados limites para vibrações podemos citar os seguintes valores de referência para níveis de desconforto.

Tab.4.1 Limites de Desconforto para Vibrações

Limite de Desconforto	Valor
Deslocamento	$8.5 \times 10^{-3} \text{ m}$
Velocidade	$1.6 \times 10^{-1} \text{ m/s}$
Aceleração	3.0 m/s^2

Para estados limites de deformações em estruturas de concreto armado, pode-se citar os limites adotados pela Norma Brasileira, a qual fixa que para todas ações de longa duração, deve-se ter flechas máximas nas vigas e lajes de $L/300$ e $L/150$ (balanços) e apenas para as cargas acidentais de $L/500$ e $L/250$ (balanços), sendo L o vão efetivo na peça analisada

4.4.2 Estados Limites Últimos

Quando a estrutura atinge estado tal que sua capacidade portante está comprometida, diz-se que a mesma atingiu um estado limite último. Assim, ruptura por colapso progressivo, formação de mecanismos plásticos, por deterioração ou por instabilidade (dinâmica, estática) são exemplos de estados limites últimos para estruturas de concreto armado. Em termos de capacidade portante dos elementos estruturais, o estado limite último pode ser considerado, segundo o código modelo do CEB^[30] como:

- Perda do equilíbrio estático, quando uma parte estrutural ou toda a estrutura é rompida;
- Ultrapassagem da resistência em uma ou mais regiões críticas da estrutura (regiões que possam levar à formação de um mecanismo na estrutura).

Na Tab. 4.2 mostram-se alguns valores do índice de confiabilidade de acordo com o CEB^[33] e as respectivas classes de segurança que são adotados como índices de confiabilidade “alvo” para um dimensionamento ou verificação estrutural.

Em outras palavras, ao se projetar as estruturas, ou verificar sua segurança, espera-se chegar a valores do índice de confiabilidade que sejam próximos ao adotados na tabela, a fim de tornar o projeto econômico e ao mesmo tempo seguro. Para funções de estado limite último percebe-se uma maior preocupação, vista através de um maior índice de confiabilidade para estes casos, devido aos maiores danos (econômicos, sociais, etc.) que possam advir da ultrapassagem de um estado limite último.

Tab.4.2 Índices de Confiabilidade Alvo e Classes de Segurança

Nível de Segurança	Índice b (P_f)		
	1	2	3
Estado Limite de Utilização	2.5 (6.20×10^{-3})	3.0 (1.35×10^{-3})	3.5 (2.33×10^{-4})
Estado Limite Último	4.2 (1.33×10^{-5})	4.7 (1.30×10^{-6})	5.2 (9.98×10^{-8})

4.5 Método dos Coeficientes Parciais

Com vistas a evitar a ocorrência de um dado estado limite, quer seja limite último, quer seja limite de utilização, diversos códigos têm proposto métodos para o projeto das estruturas de concreto armado.

O CEB^[30] emprega o método dos coeficientes parciais para o projeto das estruturas de concreto armado. Embora sejam várias as equações de estados limites representando as diferentes condições de falha, as

condições de projeto podem, freqüentemente, ser escritas da seguinte forma geral.

$$\mathbf{g}_{S,G} S_G + \mathbf{g}_{S,Q} S_Q < \mathbf{g}_R R \quad (4.27)$$

onde, $S, R, \mathbf{g}_{S,G}, \mathbf{g}_{S,Q}, \mathbf{g}_R$, representam a ação estrutural, a resistência da peça, um coeficiente de majoração da ação estrutural (cargas permanentes e cargas variáveis) e um coeficiente de minoração da resistência da peça estrutural. Pretende-se, assim, obter uma margem de segurança entre as ações estruturais e a resistência da peça estrutural através de coeficientes que cubram as incertezas presentes nos modelos empregados na análise e na avaliação das ações, ou seja, as incertezas inerentes ao problema que de uma outra forma não poderiam ser levadas em consideração.

Em muitos dos códigos existentes adota-se diferentes coeficientes parciais. Como exemplo o CEB^[30] faz distinção entre os diversos tipos de cargas existentes nas estruturas correntes (ações permanentes, variáveis, acidentais), adotando coeficientes diferentes para cada tipo. De forma análoga, adota coeficientes diferentes para os diversos materiais componentes da estrutura.

Através do conhecimento da localização do ponto de projeto, ou seja, o ponto sobre a superfície de estado limite cuja probabilidade de ocorrência é máxima, através, por exemplo, de uma análise de 1ª ordem, pode-se obter avaliações para os coeficientes de segurança. Assim, dada uma estrutura da qual se conhece o coeficiente de segurança b , e o ponto de projeto \underline{x}^* , os valores para as variáveis no ponto de projeto podem ser definidos como:

$$\underline{x}_X^* = \underline{m} + \underline{b} \underline{s}_X^T \underline{L} \underline{a}_Y \quad (4.28)$$

sendo \underline{s}_X^T a transposta da matriz de desvios padrões.

Para a estrutura em questão, pode-se definir coeficientes de segurança para cada uma das variáveis aleatórias como sendo a razão entre os valores das variáveis no ponto de projeto (ponto onde é máxima a probabilidade de ocorrência) e os seus valores médios, de forma que se tem:

$$\mathbf{g}_i^* = \frac{x_i^*}{m_i} \quad (4.29)$$

Caso se queira trabalhar com um dado índice de confiabilidade especificado, pode-se utilizar a equação 4.28 com um novo índice de confiabilidade escolhido de acordo com a conveniência do projetista, definindo assim as variáveis de dimensionamento, de forma que:

$$\underline{x}_d = \underline{m} + \underline{b}' \underline{s}_X^T \underline{L} \underline{a} \quad (4.30)$$

e sendo os respectivos coeficientes parciais de segurança definidos de forma análoga à equação 4.29, como segue:

$$g_i = \frac{x_{d,i}}{m_i} \quad (4.31)$$

Desta forma, por exemplo, com uma análise de confiabilidade de uma estrutura de concreto armado, pode-se encontrar quais os valores das variáveis no ponto de projeto. Partindo-se deste resultado e adotando um procedimento como descrito anteriormente, facilmente determina-se quais os valores para os coeficientes parciais de segurança para as variáveis básicas adotadas de forma a atenderem a certo índice de confiabilidade especificado pelo projetista.

Capítulo 5

Estudo de Casos

Neste Capítulo é feito um estudo de casos quanto a análise de confiabilidade. Estuda-se a confiabilidade de diversas estruturas de concreto armado sob carregamentos estáticos e dinâmicos.

5.1 Confiabilidade no Regime Elástico Linear

Como primeiro exemplo, verifica-se o funcionamento do programa de análise de confiabilidade utilizando-se o programa numérico de concreto armado como função de estado limite para uma viga bi-apoiada e uma laje simplesmente apoiada nos quatro bordos, ambas no regime elástico-linear. A probabilidade de falha é calculada utilizando-se a Simulação Direta com Amostragem por Importância, e como função de estado limite a ultrapassagem da flecha máxima admissível de $l/300$ em uma seção central. Como parâmetro de comparação, calcula-se também a probabilidade de falha utilizando-se como função de estado limite a equação para a flecha no meio do vão para vigas e lajes com inércia constante.

Para uma viga simplesmente apoiada, a equação da flecha máxima no meio do vão é dada por:

$$w_{max} = \frac{5}{384EI} ql^4 \quad (5.1)$$

onde, w_{max} , q , E , I , l , são respectivamente a flecha máxima no meio do vão, a carga uniformemente distribuída sobre a viga, o módulo de elasticidade, o momento de inércia e o comprimento do vão.

Para a placa, a equação da flecha máxima no meio do vão vem dada por:

$$w_{max} = \frac{\bar{\alpha} ql^4}{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}} \quad (5.2)$$

onde, $n, h, \bar{\alpha}$, são respectivamente o coeficiente de Poisson do material utilizado, a espessura da laje e um coeficiente que depende das condições de apoio da laje e das dimensões da mesma. Os dados para os exemplos analisados são indicados abaixo.

Tab.5.1 Dados Geométricos para os Exemplos Analisados.

Dados Geométricos (valores médios)							
	$l(m)$	$E(MPa)$	$b(cm)$	$h(cm)$	$q(MPa)$	n	$flecha_{modelo} / flecha_{teórica}$
Viga	3,72	26475	7,5	20,0	$3,147 \times 10^2$	0,2	0,4%
Laje	2,00	23750	-	8,0	$0,500 \times 10^{-1}$	0,3	3,8%

Tab.5.2 Variáveis Aleatórias para Exemplo da Viga.

Variável	Tipo de Distribuição	Média	Coef. de Variação
E	Log-Normal	$0,260 \times 10^5$	0,1
q	Normal	$3,147 \times 10^{-2}$	0,4

Tab.5.3 Variáveis Aleatórias para Exemplo da Laje.

Variável	Tipo de Distribuição	Média	Coef. de Variação
E	Log-Normal	$0,134 \times 10^5$	0,1
q	Normal	$0,500 \times 10^{-1}$	0,4

Para a avaliação do módulo de elasticidade a partir da resistência característica do concreto, empregou-se as relações constantes na referência do CEB^[30]. Os resultados para diversos números de simulações mantendo-se uma mesma densidade de probabilidade de amostragem são apresentados nas Fig. 5.1 e 5.2.

Tab.5.4 Função de Densidade de Probabilidade de Amostragem para Viga.

Variável	Tipo de Distribuição	Média	Desvio Padrão
E	Normal	$0,248 \times 10^5$	$0,194 \times 10^4$
q	Normal	$0,739 \times 10^{-1}$	$0,748 \times 10^{-2}$

Tab.5.5 Função de Densidade de Probabilidade de Amostragem para Laje.

Variável	Tipo de Distribuição	Média	Desvio Padrão
f_c	Normal	$0,925 \times 10^1$	$0,350 \times 10^1$
q	Normal	$0,108 \times 10^0$	$0,547 \times 10^{-2}$

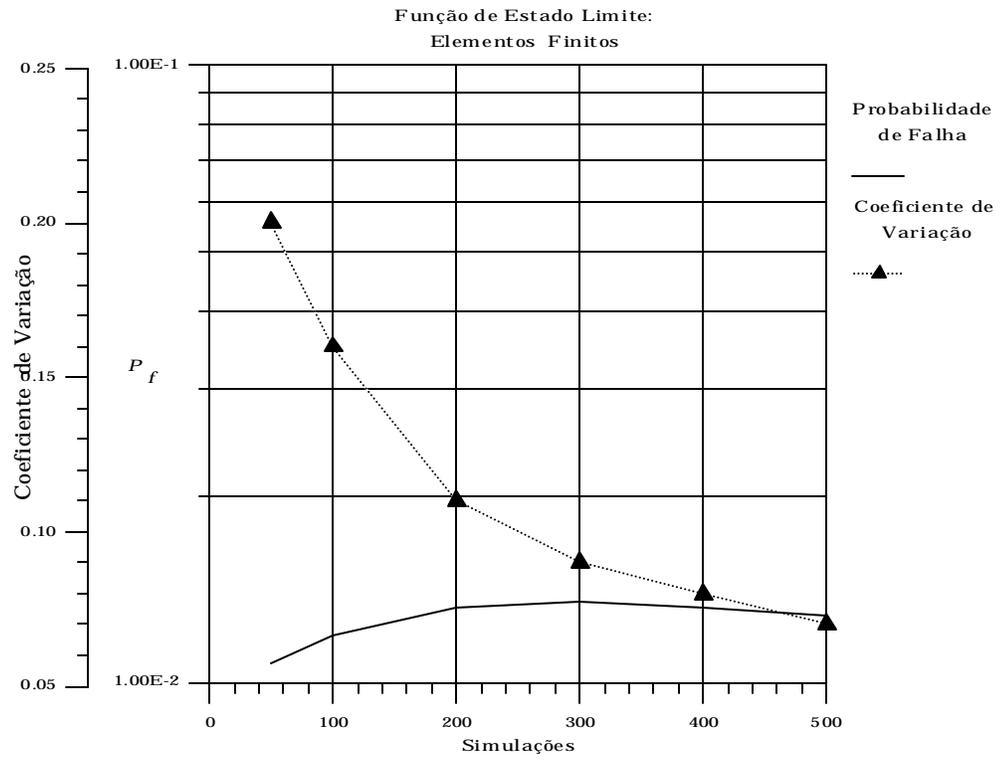


Fig.5.1 Probabilidade de Falha p/ Viga Utilizando M.E.F. como F.E.L.

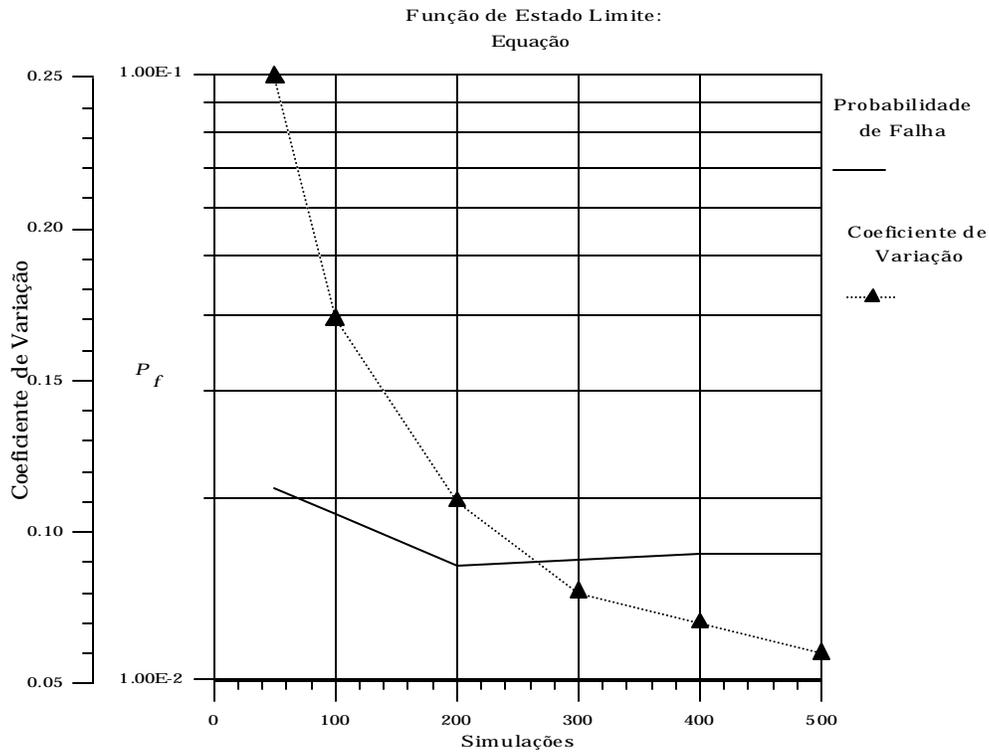


Fig.5.2 Probabilidade de Falha p_f a Viga Utilizando Equação da Flecha como F.E.L.

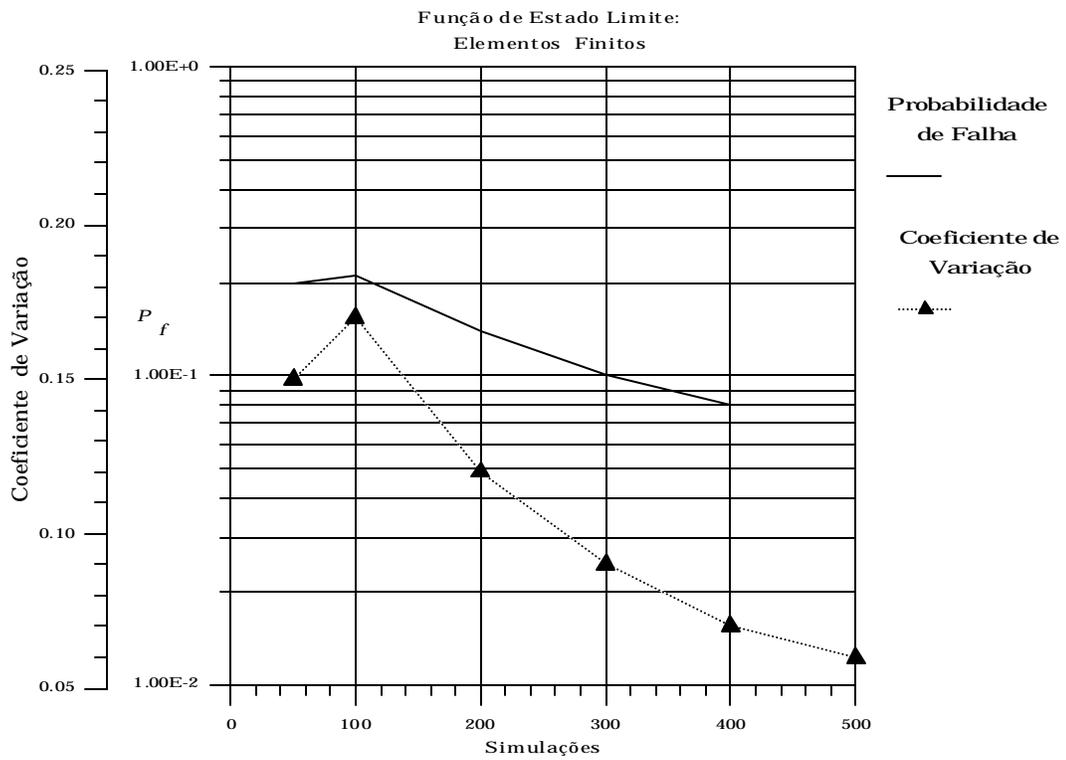


Fig.5.3 Probabilidade de Falha p_f a Laje Utilizando M.E.F. como F.E.L.

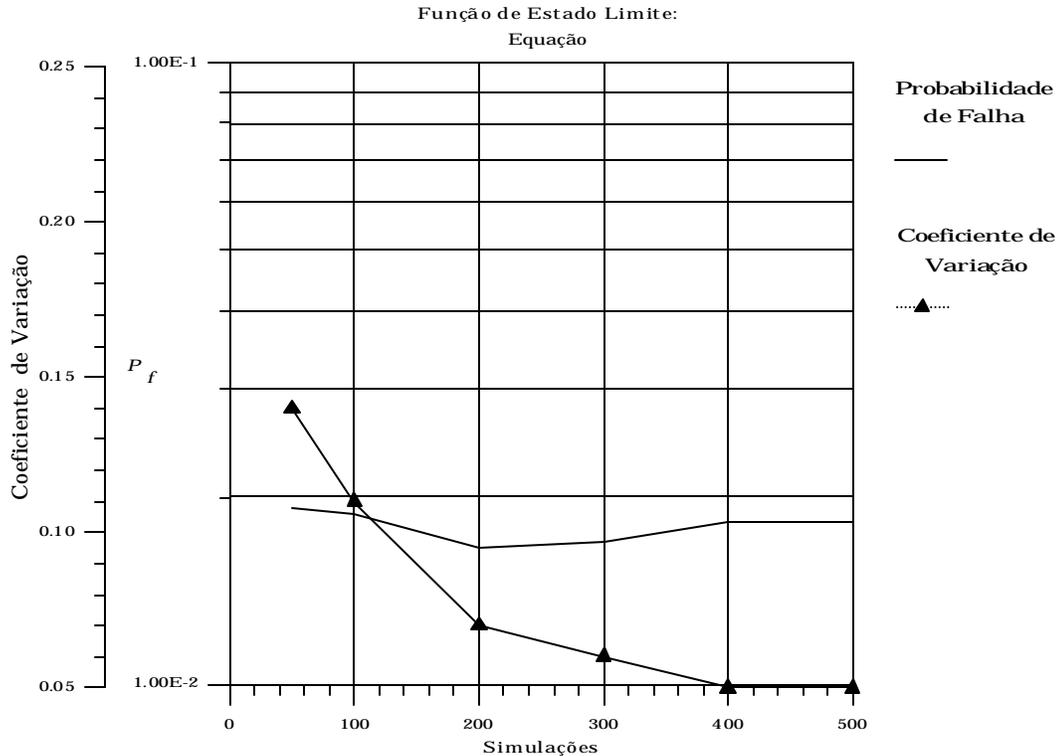


Fig.5.4 Probabilidade de Falha p_f a Laje Utilizando Equação da Fecha como F.E.L.

Trabalhando-se com o índice de confiabilidade b , ao invés de P_f , percebe-se diferenças, por exemplo para o caso da viga, em 500 simulações, na ordem de 3,2% nestes valores quando calculado pelo método dos elementos finitos e pela equação, apesar do baixo coeficiente de variação alcançado. Para o exemplo da laje, percebe-se diferenças maiores. Para 500 simulações, as diferenças no índice de confiabilidade são da ordem de 20,7% quando calculada pelo método dos elementos finitos e pela equação. Estas diferenças são possivelmente decorrentes das diferenças entre os modelos empregados para função de estado limite, como se percebe com os valores das flechas utilizando-se um e outro modelo.

5.2 Confiabilidade para Estruturas com Não-Linearidades

Nesta seção é analisada a confiabilidade de estruturas de concreto armado com não-linearidades físicas utilizando-se a Simulação Direta com Amostragem por Importância. É considerado o comportamento elasto-viscoplástico, bem como a possibilidade de fissuração da estrutura.

Como primeiro exemplo, analisa-se a confiabilidade de uma viga de concreto armado submetida a um carregamento uniformemente distribuído de curta duração sobre seu vão. A confiabilidade é calculada quanto a um estado limite de utilização, que é o de ultrapassagem de flecha

máxima permitida de $1/300$, o esmagamento do concreto em qualquer ponto de integração ou a divergência numérica do processo. Adotou-se as seguintes variáveis aleatórias básicas para esta análise:

Tab.5.6 Variáveis Aleatórias Básicas para a Análise Não-Linear da Viga.

Variável	Tipo de Distribuição	Unidade	Média m	Desvio Padrão s
f_c	Log-Normal	MPa	$0,195 \times 10^2$	$0,500 \times 10^1$
f_y^2	Log-Normal	MPa	$0,325 \times 10^3$	$0,300 \times 10^2$
f_y^1	Log-Normal	MPa	$0,320 \times 10^3$	$0,300 \times 10^2$
n	Log-Normal	-	$0,200 \times 10^0$	$0,200 \times 10^{-1}$
G	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,100 \times 10^0$
Q	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,400 \times 10^0$

Como função de densidade de probabilidade de amostragem, empregou-se a função cujos parâmetros estão indicados na Tab.5.7.

Tab.5.7 Função de Dens. de Prob. de Amostragem p/ Análise Não-Linear da Viga.

Variável	Tipo de Distribuição	Unidade	Média m	Desvio Padrão s
f_c	Normal	MPa	$0,167 \times 10^2$	$0,373 \times 10^1$
f_y^2	Normal	MPa	$0,325 \times 10^3$	$0,216 \times 10^2$
f_y^1	Normal	MPa	$0,313 \times 10^3$	$0,182 \times 10^2$
n	Normal	-	$0,198 \times 10^0$	$0,172 \times 10^{-1}$
G	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,705 \times 10^{-1}$
Q	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,116 \times 10^0$

Novamente, as relações entre o valor da resistência última à compressão do concreto e suas propriedades são adotadas conforme a referência do CEB^[30]. As características geométricas são as mesmas que aquelas definidas para a verificação do modelo na análise estática das vigas V7/V8 no capítulo 3. Os gráficos são feitos para diversas simulações mantendo-se uma mesma função de densidade de probabilidade de amostragem.

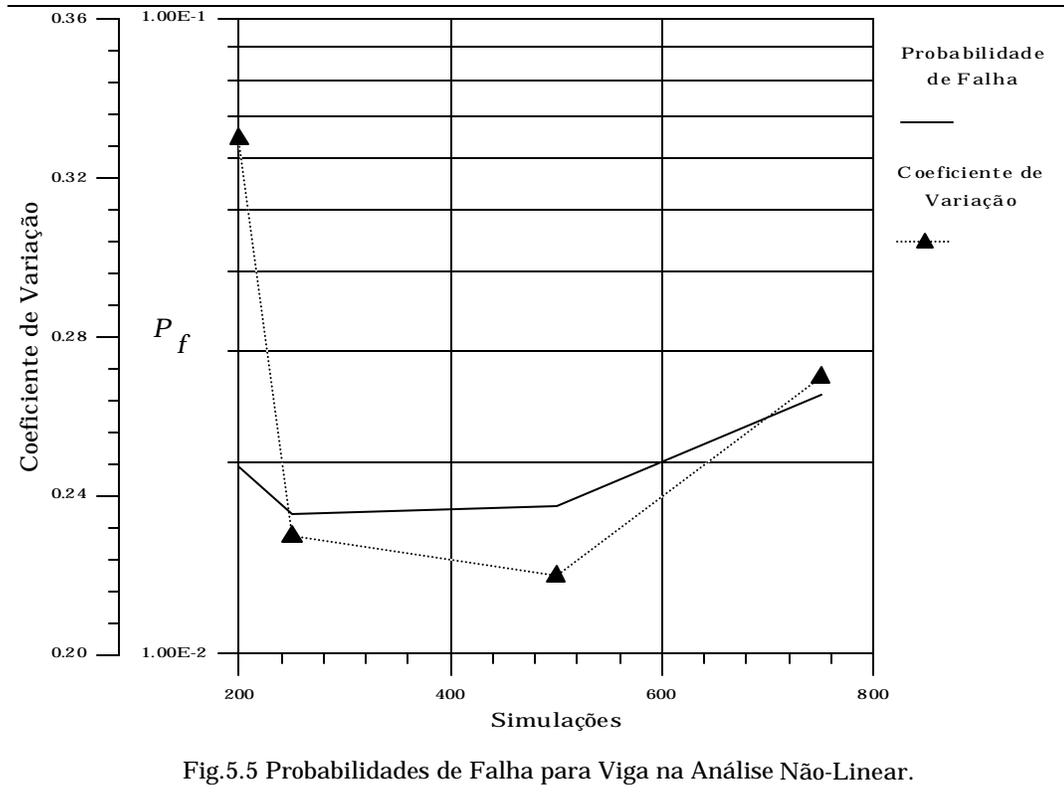


Fig.5.5 Probabilidades de Falha para Viga na Análise Não-Linear.

Como segundo exemplo traz-se a análise da confiabilidade de uma laje de concreto armado, quadrada e simplesmente apoiada nos quatro bordos, submetida a um carregamento estático uniformemente distribuído em sua face. Os dados geométricos são os mesmos que aqueles apresentados no exemplo para a verificação do modelo. A confiabilidade é calculada quanto a um estado limite de utilização, que é o de ultrapassagem de flecha máxima permitida de $L/300$, esmagamento do concreto ou divergência numérica do processo de solução. As variáveis aleatórias empregadas para a análise são as seguintes:

Tab.5.8 Variáveis Aleatórias Básicas para a Análise Não-Linear da Laje.

Variável	Tipo de Distribuição	Unidade	Média m	Desvio Padrão s
f_c	Log-Normal	MPa	$0,195 \times 10^2$	$0,500 \times 10^1$
f_y^2	Log-Normal	MPa	$0,325 \times 10^3$	$0,300 \times 10^2$
f_y^1	Log-Normal	MPa	$0,320 \times 10^3$	$0,300 \times 10^2$
n	Log-Normal	-	$0,200 \times 10^0$	$0,200 \times 10^{-1}$
G	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,100 \times 10^0$
Q	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,400 \times 10^0$

Tab.5.9 Função de Dens. de Prob. de Amostragem p/ Análise Não-Linear da Laje.

Variável	Tipo de Distribuição	Unidade	Média <i>m</i>	Desvio Padrão <i>s</i>
f_c	Normal	MPa	$0,108 \times 10^2$	$0,600 \times 10^1$
f_y^2	Normal	MPa	$0,490 \times 10^3$	$0,500 \times 10^2$
f_y^1	Normal	MPa	$0,500 \times 10^3$	$0,500 \times 10^2$
n	Normal	-	$0,196 \times 10^0$	$0,400 \times 10^{-1}$
<i>G</i>	Normal	-	$0,142 \times 10^1$	$0,300 \times 10^0$
<i>Q</i>	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,600 \times 10^0$

Para este exemplo e com a função de densidade de probabilidade de amostragem dada pela Tab.5.9 encontrou-se uma probabilidade de falha de $P_f = 32/100$ ($b=0,47$) com um coeficiente de variação de $d=0,15$.

Como exemplo para a análise da confiabilidade de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos, traz-se um exemplo para a viga apresentada no capítulo 3, a qual está submetida a um carregamento do tipo passo unitário, como descrito naquele capítulo. A função de estado limite adotada é a de esmagamento de qualquer ponto de integração, divergência do processo de solução ou ultrapassagem da flecha máxima no vão central de $0,9$ in.

A análise determinística é feita como no exemplo trazido no capítulo 3 para um tempo de $0,05$ s. Como variáveis aleatórias básicas adotou-se aquelas descritas na Tab.5.10. Na Tab.5.11 mostram-se os parâmetros para a função de densidade de probabilidade de amostragem.

Tab.5.10 Variáveis Aleatórias Básicas p/ Análise Não-Linear Dinâmica para a Viga.

Variável	Tipo de Distribuição	Unidade	Média <i>m</i>	Desvio Padrão <i>s</i>
f_c	Log-Normal	MPa	$0,262 \times 10^2$	$0,500 \times 10^1$
n	Log-Normal	-	$0,200 \times 10^0$	$0,200 \times 10^{-1}$
f_y	Log-Normal	MPa	$0,308 \times 10^3$	$0,300 \times 10^2$
<i>G+Q</i>	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,150 \times 10^0$

Tab. 5.11 Função de Dens. de Prob. de Amostr. p/ Análise Não-Linear Din. da Viga.

Variável	Tipo de Distribuição	Unidade	Média <i>m</i>	Desvio Padrão <i>s</i>
f_c	Log-Normal	MPa	$0,262 \times 10^2$	$0,500 \times 10^1$
n	Log-Normal	-	$0,200 \times 10^0$	$0,200 \times 10^{-1}$
f_y	Log-Normal	MPa	$0,308 \times 10^3$	$0,300 \times 10^2$
$G+Q$	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,150 \times 10^0$

Para a função de densidade de probabilidade de amostragem indicada na Tab. 5.11 e com 500 simulações encontrou-se uma probabilidade de falha de $P_f = 27/100$ ($b=0,62$) com um coeficiente de variação de $d=0,09$.

Como um segundo exemplo para análise da confiabilidade de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos, traz-se o exemplo do reator analisado deterministicamente no capítulo 3. Os dados geométricos são os mesmos que aqueles descritos naquele capítulo. A função de estado limite adotada é a de esmagamento do concreto, divergência no processo de solução ou ultrapassagem da flecha máxima em qualquer um dos pontos A, B ou C do valor de 6,0 cm.

As variáveis aleatórias básicas adotadas na análise, assim como a função de densidade de probabilidade de amostragem adotada são especificadas nas Tab. 5.12 e Tab. 5.13. Assim como no exemplo anterior, a análise determinística é feita para um intervalo de tempo fixo de 0.56s. Para este exemplo, encontrou-se uma probabilidade de falha, para 1000 simulações, de $P_f = 14/1000$ ($b=2,20$) com um coeficiente de variação de $d=0,15$.

Tab. 5.12 Variáveis Aleatórias Básicas p/ Análise Nao-Linear Din. para a Casca.

Variável	Tipo de Distribuição	Unidade	Média <i>m</i>	Desvio Padrão <i>s</i>
f_c	Log-Normal	MPa	$0,350 \times 10^2$	$0,500 \times 10^1$
n	Log-Normal	-	$0,170 \times 10^0$	$0,170 \times 10^{-1}$
f_y	Log-Normal	MPa	$0,460 \times 10^3$	$0,300 \times 10^2$
$G+Q$	Normal	-	$0,100 \times 10^1$	$0,100 \times 10^0$

Tab. 5.13 Função de Dens. de Prob. de Amostragem para a Casca.

Variável	Tipo de Distribuição	Unidade	Média m	Desvio Padrão s
f_c	Normal	MPa	$0,202 \times 10^2$	$0,560 \times 10^1$
n	Normal	-	$0,173 \times 10^0$	$0,140 \times 10^{-1}$
f_y	Normal	MPa	$0,457 \times 10^3$	$0,312 \times 10^2$
$G + Q$	Normal	-	$0,944 \times 10^1$	$0,126 \times 10^0$

Capítulo 6

Efeitos de Longa Duração

“...this is the most obvious effect of creep to be considered in design; creep is often for blame of excessive deflections which very adversely affect the serviceability of the structure...”

*CEB
1984*

Neste Capítulo é mostrada a metodologia empregada para a consideração dos efeitos de longa duração em estruturas de Concreto Armado, tais como fluência, retração, variação de temperatura, etc. Também traz um exemplo para verificação do modelo determinístico proposto, assim como a análise da confiabilidade de tal estrutura para cargas de longa duração.

6.1 Modelo Reológico para o Concreto

O concreto armado quando submetido a cargas de longa duração apresenta comportamentos caracterizados por deformações e tensões que variam no tempo. Aumentos de deformações sob tensões constantes e diminuições de tensões sob deformações constantes são duas face para um mesmo fenômeno, denominado genericamente de fluência. Este fenômeno é mais fortemente observado nos primeiros meses de vida da estrutura, entretanto prolonga-se por quase toda a vida útil da estrutura, resultando por exemplo em deformações da mesma ordem de grandeza que aquelas oriundas do carregamento de serviço da estrutura. Este fenômeno está fortemente ligado a fatores como tipo de cimento, tempo e período de carregamento, forma da peça, temperatura, umidade do ar, etc.

6.1.1 Teoria da Solidificação para Fluência

O processo de fluência do concreto é profundamente afetado pelo seu processo de hidratação. Esta influência, geralmente denominada de envelhecimento, causa fluência a tensões constantes e diminui

significativamente a medida que a idade do carregamento aumenta (Bazant^[14]).

Embora formulações integrais e diferenciais que levam em conta o envelhecimento estejam disponíveis, segundo Bazant^[13], estas formulações têm sérios inconvenientes. Resumidamente, estes inconvenientes podem ser listados como:

- As formulações atuais não garantem explicitamente a validade das restrições termodinâmicas. O envelhecimento geralmente é descrito considerando-se certas propriedades materiais apenas como funções do tempo;
- A formulação diferencial para a lei de fluência baseada em modelos reológicos implica em ter-se parâmetros da cadeia como módulos de elasticidade e viscosidades das unidades dependentes do tempo, levando-se a complicações numéricas e questionamentos do ponto de vista termodinâmico;
- Os algoritmos de cálculo dos módulos de elasticidade e viscosidades para os parâmetros da cadeia do modelo reológico são muito sensíveis à variações dos dados, não garantindo serem os mesmos funções não decrescentes com o tempo, o que observa-se para cargas de curta duração;
- A linearidade adotada nos modelos através do princípio da superposição é parcialmente responsável pelas diferenças observadas com resultados de ensaios;

A teoria da solidificação para a fluência proposta por Bazant^[13] baseia-se na micromecânica do processo de envelhecimento. A teoria fundamenta-se na idéia de que o aspecto do envelhecimento na fluência do concreto é devido a um aumento do volume da parte da fração que resiste do material solidificado, isto é, o cimento hidratado, cujas propriedades são dependentes do tempo. Desta forma é possível associar o modelo reológico com o comportamento de um pequeno elemento do material. De acordo com Bazant^[13] esta associação pode ser dada por:

$$\dot{\epsilon}_{ve}(t) = \frac{\dot{g}(t-t')}{V(t)} \quad (6.1)$$

onde $\dot{g}(t-t')$ e $V(t)$ são respectivamente a taxa de deformação viscoelástica do material sem envelhecimento e o volume do material solidificado para um dado instante de tempo t . Assim, emprega-se o modelo reológico apenas para a determinação das deformações no material sem envelhecimento.

6.1.2 Lei de Fluência em Termos de Taxas

Como foi dito, a vantagem da utilização desta formulação é que o modelo reológico possui propriedades não dependentes do tempo. Adotando-se a deformação da m -ésima unidade da cadeia de Kelvin sem envelhecimento como g_m , a equação diferencial para esta unidade torna-se:

$$E_m \dot{g}_m + h_m \dot{g}_m = s(t) \quad (6.2)$$

com $g = \sum_{m=1}^N g_m$, e onde E_m e h_m são o módulo elástico e a viscosidade respectivamente da m -ésima unidade da cadeia Kelvin em questão (Fig.6.1). Integrando-se a equação anterior para uma tensão constante e unitária aplicada em t' , obtém-se:

$$g(t) = \sum_{m=1}^N \frac{1}{E_m} (1 - e^{-(t-t')/t_m}) \quad (6.3)$$

onde $t_m = h_m / E_m$ é o tempo de retardamento à fluência da m -ésima unidade. Na equação (6.3), está representada a série de Dirichlet, a qual pode ser ajustada para várias funções $g(t)$ e para diversos tempos de carregamento ($t-t'$) através de um simples algoritmo de aproximação por mínimos quadrados para funções não lineares como descrito no apêndice III. Para a faixa de tempo que se deseja cobrir com a cadeia neste trabalho (de algumas décadas), os tempos de retardamento são tomados como:

$$t_m = 10^{m-1} t_1 \quad m=1,2,\dots,N \quad (6.4)$$

com $t_1 = 1 \text{ dia}$, de forma a assegurar uma resposta da cadeia para longos períodos de carregamento (décadas).

Neste trabalho adotou-se uma cadeia de Kelvin com 5 elementos. Fez-se o ajuste da equação (6.3) utilizando-se o método descrito no apêndice III, encontrando-se os valores dos parâmetros dos elementos da cadeia utilizando-se 33 pontos para discretização da função descrita no CEB^[30]. Os tempos de carregamentos foram então escolhidos em uma razão crescente em escala logarítmica, assim definidos:

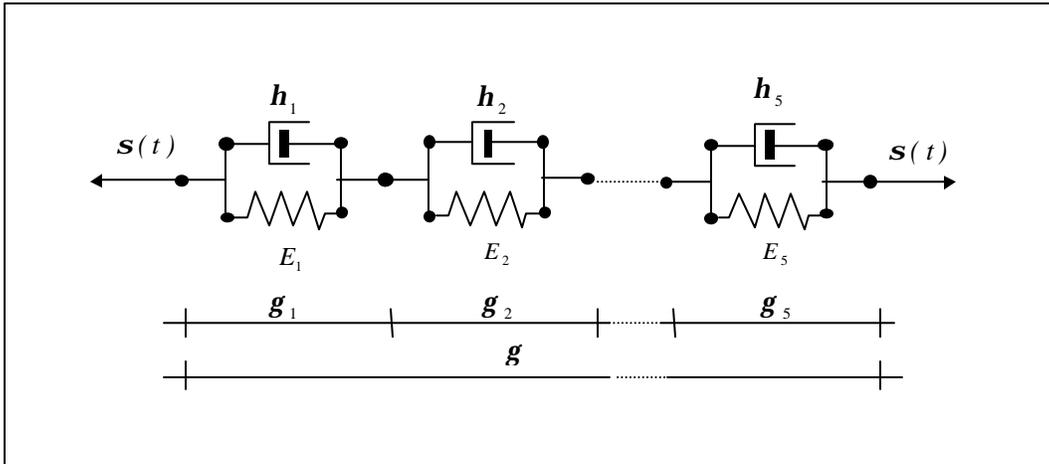


Fig. 6.1 Cadeia de Kelvin com 5 Elementos.

$$(t_i - t') = 10^{(1/10)} (t_{i-1} - t') \quad (6.5)$$

e para as idades de carregamento, adotou-se:

$$t'_i = 10^{1/2} t'_{i-1} \quad (6.6)$$

com $t'_1 = 2,8$ dias.

6.1.3 Equação Constitutiva Incremental

Devido ao fato da formação de um sistema de equações diferenciais, a lei constitutiva para este modelo é dita do tipo de taxas, isto é, dada inteiramente por equações diferenciais. A integração numérica necessita do chamado algoritmo exponencial, o qual torna possível gradualmente aumentar os passos de tempo a valores bem maiores que o menor dos tempos de retardamento dos elementos da cadeia, mantendo-se ao mesmo tempo a estabilidade e a precisão. Neste algoritmo, é assumido que as tensões variam linearmente de um passo de tempo para outro, ou seja,

$$s(t) = s^i + \frac{(t - t^i)}{\Delta t} \Delta s \quad (6.7)$$

onde $\Delta t = (t^{i+1} - t^i)$

A solução geral de (6.2), utilizando-se a condição inicial de $\mathbf{g}_m = \mathbf{g}_m^i$ em $t = t^i$, dada por Bazant^[13] é:

$$\mathbf{g}_m^{i+1} = \mathbf{g}_m^i e^{-\Delta y_m} + \frac{\mathbf{S}^i}{E_m} (1 - e^{-\Delta y_m}) + \left(\frac{1 - I_m}{E_m} \right) \Delta \mathbf{S} \quad (6.8)$$

$$\text{onde } \Delta y_m = \frac{\Delta t}{t_m} \text{ e } I_m = \frac{1 - e^{-\Delta y_m}}{\Delta y_m}$$

Calculando-se o incremento de deformação tem-se:

$$\Delta \mathbf{g} = \sum_{m=1}^N (\mathbf{g}_m^{i+1} - \mathbf{g}_m^i) \quad (6.9)$$

Introduzindo (6.8) em (6.9), tem-se:

$$\Delta \mathbf{g} = \Delta \mathbf{S} \sum_{m=1}^N \frac{1 - I_m}{E_m} + \sum_{m=1}^N \mathbf{e}_m^i (1 - e^{-\Delta y_m}) \quad (6.10)$$

$$\text{onde } \mathbf{e}_m^i = \frac{\mathbf{S}^i}{E_m} - \mathbf{g}_m^i \text{ e } \mathbf{e}_m^{i+1} = \frac{\mathbf{S}^{i+1}}{E_m} - \mathbf{g}_m^{i+1} \quad (6.11)$$

Lembrando que $\mathbf{S}^{i+1} = \mathbf{S}^i + \Delta \mathbf{S}$, a equação para atualizar as variáveis \mathbf{e}_m em função do incremento de tensões $\Delta \mathbf{S}$ é escrita como:

$$\mathbf{e}_m^{i+1} = \frac{I_m \Delta \mathbf{S}}{E_m} + \mathbf{e}_m^i e^{-\Delta y_m} \quad (6.12)$$

Para calcular a taxa de deformação total deve-se somar as parcelas devidas à parte elástica, viscoelástica, devido à temperatura, devido à retração e à fissuração.

$$\dot{\mathbf{e}}_{Total} = \dot{\mathbf{e}}_e + \dot{\mathbf{e}}_{ve} + \dot{\mathbf{e}}_0 \quad (6.13)$$

onde ,

$$\dot{\mathbf{e}}_e = \frac{\dot{\mathbf{S}}(t)}{E(t)}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{ve} = \frac{\dot{\mathbf{g}}(t-t')}{V(t)}, \quad \dot{\mathbf{e}}_0 = \dot{\mathbf{e}}_s(t) + \dot{\mathbf{e}}_T(t) + \dot{\mathbf{e}}_f(t) \quad (6.14)$$

sendo $\dot{\mathbf{e}}_e, \dot{\mathbf{e}}_{ve}, \dot{\mathbf{e}}_T, \dot{\mathbf{e}}_s, \dot{\mathbf{e}}_f$ as taxas de deformações elásticas, viscoelásticas, devido à temperatura, retração e à fissuração.

Integrando-se (6.13) no intervalo de tempo $[t^i, t^{i+1}]$, obtém-se o incremento de deformação total:

$$\Delta \mathbf{e} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\dot{\mathbf{s}}(t)}{E(t)} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\dot{\mathbf{g}}(t-t')}{V(t)} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\mathbf{e}}_0(t) dt \quad (6.15)$$

Utilizando-se uma regra de integração, por exemplo do tipo trapézios, pode-se transformar a equação anterior em:

$$\Delta \mathbf{e} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{E_{i+1/2}} + \frac{\Delta \mathbf{g}}{V_{i+1/2}} + \Delta \mathbf{e}_0 \quad (6.16)$$

sendo o índice $i+1/2$ o meio do intervalo de integração $[t^i, t^{i+1}]$. A equação (6.16) escreve-se também como:

$$\Delta \mathbf{e} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{E^*} + \Delta \mathbf{e}^* \quad (6.17)$$

onde,

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_{i+1/2}} + \sum_{m=1}^N \frac{1 - I_m}{V_{i+1/2} E_m} \quad (6.18)$$

e

$$\Delta \mathbf{e}^* = \sum_{m=1}^N \mathbf{e}_m^{i,*} (1 - e^{-\Delta y_m}) + \Delta \mathbf{e}_0 \quad (6.19)$$

sendo as variáveis $\mathbf{e}_m^{i,*}$ atualizadas por:

$$\mathbf{e}_m^{i+1,*} = \frac{I_m \Delta \mathbf{s}}{V_{i+1/2} E_m} + \mathbf{e}_m^{i,*} e^{-\Delta y_m} \quad (6.20)$$

Admitindo-se isotropia, as equações anteriores podem ser generalizadas para o caso tridimensional, ficando a equação (6.17) na forma:

$$\{\Delta \mathbf{s}\} = [D^*] (\{\Delta \mathbf{e}\} - \{\Delta \mathbf{e}^*\}) \quad (6.21)$$

com

$$\{\Delta \mathbf{e}^*\} = \sum_{m=1}^N \mathbf{e}_m^{i,*} (1 - e^{-\Delta y_m}) + \Delta \mathbf{e}_0 \quad (6.22)$$

onde $[D^*]$ é a matriz de um material elástico-linear, utilizando-se E^* dada pela equação (6.18) no lugar de E e $\{\Delta \mathbf{e}^*\}$ é o vetor de deformações de longa duração, que é atualizado através de:

$$\{\mathbf{e}_m^{i+1,*}\} = [D_m]^{-1} \{\Delta \mathbf{s}\} + \mathbf{e}_m^{i,*} e^{-\Delta y_m} \quad (6.23)$$

sendo a matriz $[D_m]^{-1}$ a inversa da matriz constitutiva isotrópica linear dada por:

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\mathbf{n}}{E} & \frac{-\mathbf{n}}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mathbf{n}}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\mathbf{n}}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mathbf{n}}{E} & \frac{-\mathbf{n}}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mathbf{n})}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mathbf{n})}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\mathbf{n})}{E} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

6.2 Fluxograma para Análise de Longa Duração

O fluxograma para análise de longa duração é basicamente composto pelo fluxograma da análise estática onde acrescenta-se um laço mais externo de tempo real. Para cada época de carregamento faz-se uma análise instantânea segundo o modelo de curta duração empregado. Estados de tensão e deformação são então atualizados no laço de tempo real, verificando-se sempre pela formação de novas fissuras e assegurando-se em cada passo de tempo o equilíbrio de forças internas com forças externas. Diferentemente do modelo de Maxwell, no modelo adotado (Kelvin) há a necessidade de manter-se em cada iteração, como visto na equação 6.20, as deformações em cada elemento da cadeia de Kelvin. A seguir, na Fig. 6.2, é mostrado o fluxograma representativo empregado para análise de longa duração.

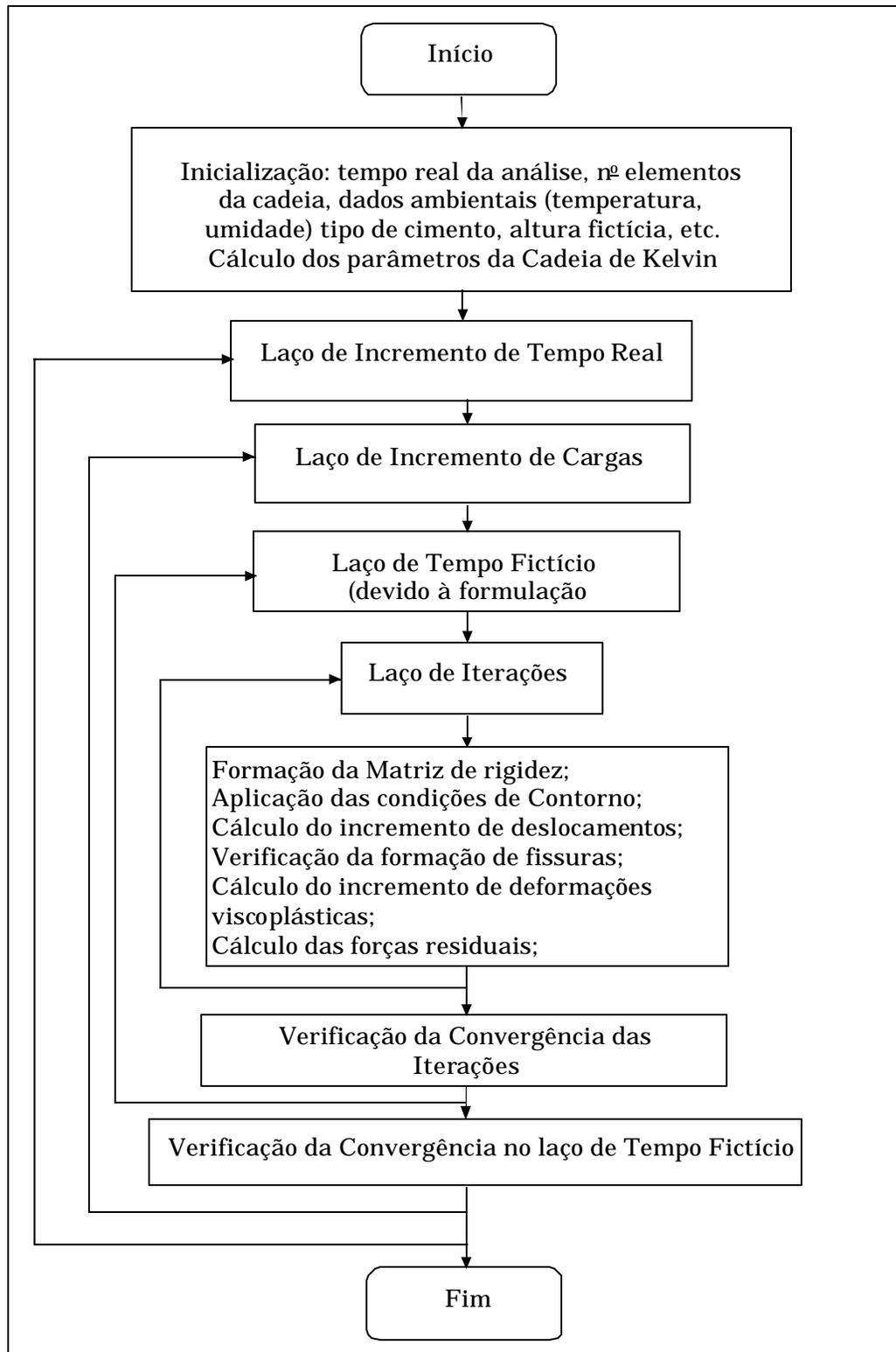


Fig.6.2 Fluxograma para Análise Estática Não-Linear de Longa Duração

6.3 Funções para Avaliação da Fluência, Retração, Temperatura e Tipo de Cimento segundo o CEB-FIP90

Segundo a teoria de solidificação para um dado material, o comportamento quanto à fluência pode ser representado pela seguinte função de fluência:

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \frac{g(t, t')}{V(t')} \quad (6.25)$$

onde, $J(t, t')$ é a função de fluência com o tempo para concreto com idade de carregamento de t' , $E(t')$ é o módulo de deformação longitudinal na idade t' , $g(t, t')$ é o coeficiente de fluência no tempo e $V(t')$ é a função de envelhecimento para o concreto.

Segundo indicações do CEB^[30], a função de fluência para o concreto pode ser descrita por:

$$J(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{f(t, t')}{E_c(28)} \quad (6.26)$$

onde $J(t, t')$ é a função de fluência para o concreto com idade de carregamento t' , $E_c(t)$ é o módulo de elasticidade do concreto na idade t em dias e $f(t, t')$ é o coeficiente de fluência. Para a avaliação do módulo de elasticidade do concreto com o tempo, deve-se empregar a relação :

$$E_c(t) = b_E(t) E_c(28) \quad (6.27)$$

$$\text{com } b_E(t) = e^{s \left[1 - \left(\frac{28}{t/1 \text{ dia}} \right)^{0,5} \right]} \quad (6.28)$$

sendo s um coeficiente que depende do tipo de cimento, sendo dado pela seguinte tabela:

Tab. 6.1 Coeficientes s e tipos de cimento

Tipo de cimento	s
Cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial	0,20
Cimentos de endurecimento rápido a normal	0,25
Cimentos de endurecimento lento	0,38

O coeficiente de fluência vem dado por:

$$\mathbf{f}(t-t') = \mathbf{f}_0 \mathbf{b}_c(t-t') \quad (6.29)$$

onde $\mathbf{b}_c(t-t')$ é o coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo após o carregamento. Este coeficiente é dado por:

$$\mathbf{b}_c(t-t') = \left[\frac{(t-t')/1 \text{ dia}}{\mathbf{b}_H + (t-t')/1 \text{ dia}} \right]^{0.3} \quad (6.30)$$

com \mathbf{b}_H dado por:

$$\mathbf{b}_H = 150 \left\{ 1 + \left(0.2 \frac{RH}{100\%} \right)^{18} \right\} \frac{h}{100mm} + 250 \leq 1500 \quad (6.31)$$

O coeficiente \mathbf{f}_0 vem dado por:

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_{RH} \mathbf{b}(f_{cm}) \mathbf{b}(t') \quad (6.32)$$

sendo,

$$\mathbf{f}_{RH} = 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100\%}}{0.46(h/100mm)^3} \quad (6.33)$$

$$\mathbf{b}_c(f_{cm}) = \frac{5.3}{(f_{cm}/10MPa)^{0.5}} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{b}(t') = \frac{1}{0.1 + (t'/1 \text{ dia})^{0.2}} \quad (6.35)$$

e onde,

$$h = \frac{2A_c}{u} \quad (6.36)$$

sendo f_{cm} , RH , u , A_c a resistência média do concreto à compressão, a umidade relativa do ar (%), o perímetro da seção em contato com o ambiente (mm) e a área da seção de concreto (mm^2), respectivamente.

Sendo assim, a equação (6.26) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$J(t,t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\mathbf{f}_0(t') \mathbf{b}_c(t,t')}{E_c(28)} \quad (6.37)$$

comparando-se (6.37) com (6.26) obtém-se as seguintes relações:

$$\mathbf{g}(t, t') = \mathbf{b}_c(t - t') \quad (6.38)$$

e

$$V(t') = \frac{1}{\mathbf{f}_0(t')} \quad (6.39)$$

relações estas utilizadas na aproximação pela série de Dirichlet, quando do cálculo dos parâmetros da cadeia. Para a cadeia de 5 elementos, obteve-se os seguintes parâmetros:

Tab.6.2 Parâmetros da Cadeia Kelvin de 5 Elem. p/ Função de Fluência do CEB

m	1	2	3	4	5
E_m	8,0408	9,3056	3,7884	2,5359	11,9834

Os efeitos de dilatação decorrentes de variações de temperatura são calculados através da fórmula.

$$\mathbf{e}_T = \mathbf{a}_T \Delta T \quad (6.40)$$

onde \mathbf{e}_T é a deformação devido à variação térmica, ΔT é a variação de temperatura em graus Kelvin e \mathbf{a}_T é o coeficiente de dilatação térmica para o concreto. Este coeficiente depende do tipo de agregado do concreto e está situado entre os valores de $(6 \times 10^{-6}$ e $15 \times 10^{-6} K^{-1})$ sendo o valor de $10 \times 10^{-6} K^{-1}$ adotado como um valor médio para concretos feitos de agregados quartzosos.

Para a inclusão dos efeitos de retração, aplicam-se as seguintes fórmulas:

$$\mathbf{e}_s(t, t_s) = \mathbf{e}_{cso} \mathbf{b}_s(t - t_s) \quad (6.41)$$

onde, $\mathbf{e}_s(t, t_s)$ é a deformação específica de retração, t_s a idade de início da retração, \mathbf{e}_{cso} o coeficiente de retração nominal, dado por:

$$\mathbf{e}_{cso} = \mathbf{e}_s(f_{cm}) \mathbf{b}_{RHT} \quad (6.42)$$

com,

$$\mathbf{e}_s(f_{cm}) = [160 + 10 \mathbf{b}_{sc} (9 - f_{cm} / 10 MPa)] \times 10^{-6} \quad (6.43)$$

os coeficientes \mathbf{b}_{sc} são dados pela Tab. 6.3 abaixo:

Tab.6.3 Coeficientes b_{sc} e tipos de cimento

Tipo de cimento	b_{sc}
cimentos de endurecimento rápido e alta resistência inicial	8
cimentos de endurecimento rápido a normal	5
cimentos de endurecimento lento	4

e

$$b_{RHT} = \begin{cases} -1,55 \left[1 - \left(\frac{RH}{100\%} \right)^3 \right] \left[1 + \frac{8}{103 - RH} \cdot \frac{T/1^\circ C - 20}{40} \right] & 40\% \leq RH \leq 99\% \\ +0,25 \left[1 + \frac{8}{103 - RH} \cdot \frac{T/1^\circ C - 20}{40} \right] & RH \geq 99\% \end{cases} \quad (6.44)$$

$b_s(t, t_s)$, o coeficiente que descreve o desenvolvimento da retração com o tempo. Este coeficiente é dado por:

$$b_s(t - t_s) = \left[\frac{t - t_s}{350(h/100mm)^2 \exp[-0,06(T/1^\circ C - 20)] + (t - t_s)} \right]^{0.5} \quad (6.43)$$

Para levar em consideração os efeitos devido ao tipo de cimento e diferentes temperaturas na maturação (cura) do concreto, o CEB^[30] recomenda o seguinte ajuste na sua idade de carregamento:

$$t' = t_{0,T} \left[\frac{9}{2 + (t_{0,T}/1dia)^{1.2}} \right]^{\bar{a}} \geq 0,5 \text{ dias} \quad (6.44)$$

onde, $t_{0,T}$ é a idade de carregamento do concreto ajustada para levar em conta efeitos da temperatura na maturação (anteriores ao carregamento) sendo dada pela equação (6.45).

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^N \Delta t_i \exp \left[13,65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)/1^\circ C} \right] \quad (6.45)$$

onde, $t_{0,T}$ representa a idade ajustada do concreto, Δt_i o número de dias em que a temperatura T ($^\circ C$) prevalece e $T(\Delta t_i)$ é a temperatura no intervalo de tempo Δt_i e $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. O expoente \bar{a} representa o tipo de cimento, tendo valores dados pela Tab. 6.4 abaixo:

Tab. 6.4 Coeficientes \bar{a} e tipos de cimento

Tipo de cimento	\bar{a}
Cimentos de endurecimento rápido e alta resistência inicial	1
Cimentos de endurecimento rápido a normal	0
Cimentos de endurecimento lento	-1

6.4 Verificação do Modelo para Cargas de Longa Duração

Neste item são comparados os resultados de flechas para uma viga de concreto armado submetida a um carregamento de longa duração. Aqui, o exemplo analisado é o mesmo que no primeiro exemplo apresentado em Gobetti^[43], já analisado no capítulo 3 para a verificação do modelo. Trata-se de uma viga simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniformemente distribuído sobre sua face superior. Alguns dados adicionais relativos a estrutura são relacionados a seguir e outros dados relativos à geometria da estrutura podem ser encontrados no capítulo 3.

A viga foi carregada com uma carga uniformemente distribuída de 3,04 KN/m (22,36% carga permanente e 77,63% carga variável). Para a idade de carregamento (16 dias) adotou-se uma temperatura de 20°C e umidade de 75%. Na Fig. 6.2 mostra-se uma comparação entre os resultados numéricos do modelo proposto e os resultados experimentais para 100 dias. Também na mesma figura é mostrado os resultados numéricos obtidos por Clure^[27] para o mesmo exemplo, o qual utilizou um modelo baseado na cadeia de Maxwell para a inclusão dos efeitos de longa duração. Na Fig. 6.3 mostram-se resultados para a flecha no vão central da mesma viga para uma idade de 10.000 dias (aproximadamente 27 anos).

Para a análise da confiabilidade adotou-se como função de estado limite a ultrapassagem da flecha máxima no vão central ($1,9 \times 10^{-2} m$), o esmagamento de qualquer ponto de integração ou a divergência do processo de solução. A análise da confiabilidade para este estado limite levou aos seguintes resultados: uma probabilidade de falha de $P_f = 24/100$ ($\mathbf{b} = 0,71$) com um coeficiente de variação de $\mathbf{d} = 0,21$.

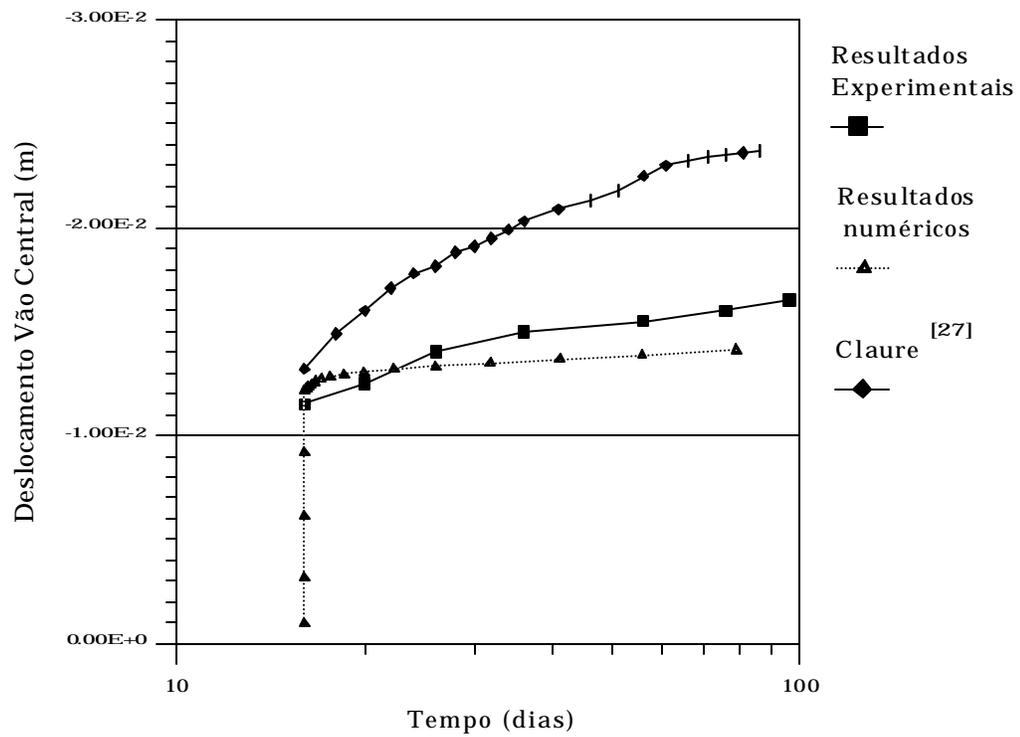


Fig.6.3 Deslocamentos no vão central em 100 dias para a viga analisada.

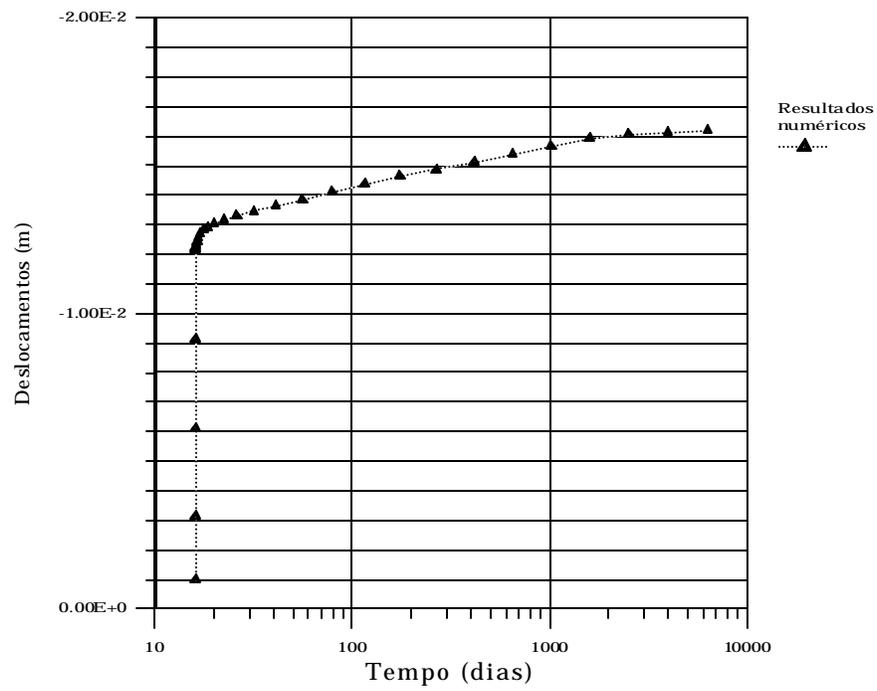


Fig.6.4 Deslocamentos no vão central em 27 anos para a viga analisada

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões

Neste Capítulo são apresentadas as conclusões que se obtiveram com este trabalho. Também neste capítulo, são dadas algumas sugestões para futuras pesquisas que possam vir adar prosseguimento a este campo de estudo.

7.1 Conclusões

Verifica-se que os objetivos anteriormente traçados foram alcançados, fazendo-se menção apenas ao fato de não se ter considerado incertezas nas variáveis diferentes daquelas do tipo “físicas”. São a seguir enumeradas as conclusões deste trabalho:

- O modelo numérico proposto para a avaliação determinística de estruturas de concreto armado mostrou bons resultados quer seja em análises para carregamentos estáticos instantâneos ou de longa duração, quer seja para carregamentos dinâmicos, apresentando concordância com resultados experimentais referenciados na literatura;
- O uso da superfície de falha/fluência de quatro parâmetros para concreto proposta por Ottosen^[65] mostrou diferenças pouco significativas quando comparada com a superfície de dois parâmetros proposta por Cervera^[24].
- A análise determinística para carregamentos e efeitos de longa duração através da teoria da solidificação proposta por Bazant^[13], com o uso de cadeias de Kelvin, juntamente com o algoritmo exponencial, mostrou-se bastante eficaz. A abordagem apresenta resultados compatíveis quando comparada com resultados obtidos por avaliações onde emprega-se a abordagem via cadeias de Maxwell, principalmente no que diz respeito ao fato dos elementos da cadeia Kelvin não serem funções do tempo, reduzindo grandemente o tempo de análise, possibilitando avaliações para tempos da ordem de décadas com poucos incrementos de tempo real;
- A análise de confiabilidade para estruturas de concreto armado tridimensionais, considerando-se apenas incertezas do tipo físicas, através do uso da simulação direta com amostragem por importância mostrou bons resultados quando comparado com a técnica de Simulação Direta de Monte

Carlo, reduzindo bastante o número das simulações e conseqüentemente o tempo para a análise, ainda assim, mantendo a precisão necessária.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros, pode-se citar os seguintes itens:

- Possibilidade de aplicação de propriedades mecânicas diferentes em cada direção principal do elemento analisado, através da introdução de uma matriz constitutiva do tipo anisótropa, levando-se em conta a característica eminentemente não-linear presente em estruturas desta natureza;
- Implementação e avaliação da viabilidade do uso do modelo de fissuras discretas para estruturas tridimensionais bem como a extensão do modelo utilizado para o modelo de fissuração em três planos principais;
- Implementação de elementos de barras para representação das armaduras, juntamente com um modelo para a avaliação de efeitos decorrentes da protensão;
- Introdução de campos aleatórios para simulação das flutuações das características dos materiais no domínio do corpo, levando-se em consideração as imperfeições, tão comuns neste tipo de material;
- Utilização da análise da confiabilidade (índice de confiabilidade) como restrição adicional numa análise de otimização estrutural de peças de concreto armado (dimensões, peso, vibrações, etc.);
- Otimização do programa computacional através de sua vetorização para uso de recursos de supercomputação, com fins à viabilização de análises de estruturas de maior porte.

Referências Bibliográficas

- 1 ANG, A. H. S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design: basic principles**. New York: John Wiley, 1975. v.2.
- 2 ARAÚJO, J. M. ; AWRUCH, A. M. **Análise estrutural probabilística pelo método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC / UFRGS, 1995. 63p. (Caderno Técnico, 104)
- 3 ARAÚJO, J. M. ; AWRUCH, A. M. *On stochastic finite elements for structural analysis*. **Computers and Structures**, v.52, n.3, pp.461-469, Aug. 1994.
- 4 ARAÚJO, J. M. **Análise de barragens de gravidade de concreto considerando a fase construtiva e a interação dinâmica barragem - reservatório - fundação**. Porto Alegre, 1995, Tese (Doutorado em Engenharia)-CPGEC / UFRGS.
- 5 ARNBJERG; NIELSEN, T.; BJERRAGER, P. *Finite element reliability method with improved efficiency by sensitivity analysis*. **Computational Probabilistic Methods**, Ed. by Liu, Belytchko, Lawrence and Cruse, ASME, AMD-V. 93, pp.15-25, 1988.
- 6 BAEL 91. **Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et construction en béton armé suivant la méthode des états limites**. Mars. 1992.
- 7 BANGASH, M. Y. H. **Concrete and concrete structures: numerical modelling and applications**. London: Elsevier Science,1989. 668p.
- 8 BARRAGÁN, G. F. A. **Uma abordagem probabilística para definição de critérios de combinação de carga em normas de projeto estrutural**. Porto Alegre, 1995. Tese (Mestrado em Engenharia) CPGEC/UFRGS.
- 9 BARZEGAR, F.; ISENBERG, J.; AKTAN, et al. *Generic problems*. In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop. New York.1991. pp.490-569.
- 10 BATHE, K. J.; WILSON, R. L. **Numerical Methods in Finite Element Analysis**. Prentice Hall, NJ, 528p., 1976.

- 11 BATHE, K. J. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs. N.J.:Prentice Hall, 1982.
- 12 BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L.; MIHASHI, H. et al. *Fracture mechanics*. In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop, New York.1991. pp.118-202.
- 13 BAZANT, Z. P.; PRASANNAN, S. *Solidification theory for concrete creep I:formulation II:verification and application*. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115., n. 8, pp.1691-1725, Aug.. 1989.
- 14 BAZANT, Z. P.; WITTIMAN, F. et al. **Creep and shrinkage in concrete structures**. New York:John Wiley, 1982. 363p.
- 15 BIC'ANIC', N.; BORST, R. ; GERSTLE, W. et al. *Computational aspects of structures*. In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop, New York.1991. pp.367-489.
- 16 BJERAGER, P. *On computational methods for structural reliability analysis*. **Structural Safety**. v.9,1990, pp. 79-96.
- 17 BOURGUND, U. ; BUCHER, C. G. **ISPUD V3.0 - Importance sampling procedure using design points - an efficient, accurate and easy-to-use multi-porpose computer code to determine structural reliability**. Innsbruck, Austria, Institute of Engineering Mechanics, 1986.(Internal Working Report, ?)
- 18 BOURGUND, U.; OUYORNPRASERT, W.; PRENNINGER, P. H. W. **Advanced simulations methods for the estimation of systems reliability**. Innsbruck, Austria, Institute of Engineering Mechanics, 1986.(Internal Working Report ,19)
- 19 BRENNER, C. E. **Stochastic finite element methods (literature review)**. Innsbruck, Austria, Institute of Engineering Mechanics, 1991.(Internal Working Report No. 35-91,)
- 20 BUCHER, C. G. *Adaptive sampling - an iterative fast Monte Carlo procedure*. **Structural Safety**. Amsterdan: Elsevier Science, 1988, pp.119-126.
- 21 BUCHER, C. G. ; NIENSTEDT, J. ; OUYORNPRASERT, W. **Adaptative strategies in ISPUD v3.0 - an efficient, accurate and easy-to-use multi-porpose computer code to determine**

- structural reliability.** Innsbruck, Austria, Institute of Engineering Mechanics, 1989.(Internal Working Report, 25)
- 22 BUCHER, C. G.; SCHÜLLER. **Systems reliability: revisted.** In: ICOSSAR , Innsbruck, Austria, 1994, pp. 1227-1231.
- 23 CAMPOS FILHO, A. ; FUSCO, P. B. *Análise de vigas de concreto armado utilizando o método de elementos finitos.* In: JORNADAS SUL AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL. 24, 1987, Porto Alegre: CPGEC / UFRGS, 1987. 6v., v.2, p.15-28.
- 24 CERVERA, M.; HINTON, E.; BONET, J.; BIC'ANIC', N. **Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells**, U.K., Swansea: Pineridge Press, 1988, pp. 320-504.
- 25 CHEN, W. F.; HUN, D. J. **Plasticity for structural engineers.** New York: Springer Verlag, 1988, 606p.
- 26 CHEN, W. F.; YAMAGUSCHI, E.; KOTSOVOS, M. D. *Constitutive models.* In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop, New York.1991. pp.36-117
- 27 CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre, 1994, Dissertação (Mestrado em Engenharia)- CPGEC /UFRGS.
- 28 COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON. **Structural effects of time-dependent behavior of concrete.** Saint Saphorin, 1984, 391p. (CEB Bulletin d'Information ,142/142 bis).
- 29 COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON. **Behavior and analysis of reinforced concrete structures under alternate actions inducing inelastic response** july, 1991, 296 p., (CEB Bulletin d'Information , 210).
- 30 COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990.** Lausanne, may, 1993, 437p., (CEB Bulletin d'Information, 213/214).
- 31 COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON. **Evaluation of time dependent behavior of concrete.** Paris, sept., 1990, 210p., (CEB Bulletin d'Information , 199).

- 32 COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON. **General principles on reliability for structures**. Dubrovnik, sept., 1988, 51p., (CEB Bulletin d'Information , 191).
- 33 COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON. **New developments in non-linear analysis methods**. 1991 (CEB Bulletin d'Information, 229).
- 34 COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BETON. **Theme I: nonlinear analysis and design of concrete frames. Theme II: nonlinear analysis and design of slabs**. Abril, 1982. (CEB Bulletin d'Information, 153).
- 35 COZZANO, B. S. **Análise do comportamento ao longo do tempo de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre, 1991, 109p. Dissertação (Mestrado em Engenharia)- CPGEC/UFRGS
- 36 CREUS, G. J. **Viscoelasticity: basic theory and applications to concrete structures**. Berlin, Springer Verlag, 1986, 169p.
- 37 DARWIN, D. *Reinforced concrete*. In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop, New York, 1991, pp.203-232.
- 38 DER KIUREGHIAN, A. *A finite element reliability of frame structures: structural safety and reliability*. In: ICOSAR. Ed. by Konish, Angand Shinozuka, Kobe, Japan, v.1, 1985, pp.395-404.
- 39 DER KIUREGHIAN, A.; KE, J-b. *The stochastic finite element method*. Probabilistic Engineering Mechanics, v.3, n. 2, 1987, pp.83-91.
- 40 DUPRAT, F.; PINGLOT, M.; LORRAIN, M. *Reliability analysis of reinforced concrete columns*. In: ICOSAR, Innsbruck, 1994, pp.1249-1255.
- 41 GERSTLE, K. H.; NIWA, J. *Finite element analysis as design tool* In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop, New York, 1991, pp.692-714.
- 42 GOBETTI, L. C. W.; CAMPAGNOLO, J. L. **Análise teórico experimental das deformações devido à flexão em lajes de concreto armado**. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1980. (Caderno Técnico, 13)

- 43 GOBETTI, L. C. W.; CAMPOS FILHO, A.; CAMPAGNOLO, J. L. **Análise teórico experimental das deformações em vigas de concreto armado**. Porto Alegre: CPGEEC/UFRGS, 1983, 56p. (Caderno Técnico, 48)
- 44 GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M.; ROCHA, M. M. **Análise da confiabilidade de seções de concreto armado submetidas à flexo-compressão normal e oblíqua**. Porto Alegre: CPGEC / UFRGS, 1996, 31p.(Relatório de Pesquisa, 120)
- 45 GUAN, X. L. ; MELCHERS, R. E. *An efficient formulation for limit state functions gradient calculation*. **Computers and Structures**, v. 53, n. 4, pp. 929-935, 1994.
- 46 HASOFER, A. M.; LIND, N. C. *Exact and invariant second moment code format*. **Journal of Engineering Mechanics Division**, New York, ASCE. v. 100, n.1, pp. 111-121, Feb., 1984.
- 47 HINTON, E. ; OWEN, D. R. J. **Finite element programming**. London: Academic Press, 1977, 305 p.
- 48 HINTON, E. ; OWEN, D. R. J. **Finite elements in plasticity: theory and practice**. Swansea: Pineridge Press, 1980, 594 p.
- 49 HUGHES, T. J. R. **The finite element method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Eglewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1989.
- 50 IDING, R. H.; SHIRAI, N.; CONLEY, C. et al. *Specific Applications*. In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop, New York, 1991, pp.36-117.
- 51 ITURRIOZ, I. **Aplicação do método dos elementos discretos ao estudo de estruturas laminares de concreto armado**. Porto Alegre, 1995, Dissertação (Doutorado em Engenharia)- CPGEC / UFRGS.
- 52 KITADA, T.; DOGAKI, M. et al. *Simulation of limit state analysis of box girder bridges*. In: ICOSSAR, Innsbruck, 1994, pp. 895-901.
- 53 KOGUT, G. F.; CHOU, K. C. *Reliability-based design for steel-concrete beam-columns*. In: ICOSSAR, Innsbruck, 1994, pp. 703-708.

- 54 LEE, Y. H.; FRANGOPOL, M.; WILLAM, K. *Probabilistic failure predictions of plain concrete structures on the basis of the extended leon model*. In: ICOSSAR, Innsbruck, 1994, pp. 391-394.
- 55 LI, CH. O. *Computation of the Failure Probability of Deteriorating Structural Systems*. **Computers and Structures**, v. 56, n. 6, 1995, pp. 1073-1079,
- 56 LINDIFIELD, G. R.; PENNY, J. E. T. **Microcomputers in numerical analysis**. Chichester: John Wiley, 1989, pp.288-291.
- 57 LIU, P. L.; DER KIUREGHIAN, A. *Optimization algorithms for structural reliability*. **Computational Probabilistic Mechanics**, v. 933, 1988, pp. 185-196.
- 58 MASUERO, J. R. **Análise de problemas de fratura em materiais viscoelásticos via elementos finitos**. Porto Alegre, 1992, Dissertação (Mestrado em Engenharia)-CPGEC / UFRGS.
- 59 MELCHERS, R. E. **Structural reliability analysis and prediction**. Chichester: John Wiley, 1987, 400p.
- 60 MEYER, C.; et al. *Dinamic Loading*. In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II, 1991. Proceedings of International Workshop, New York, 1991, pp.314-366.
- 61 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Cálculo e Execução de Obras de Concreto Armado**.: NBR 6118. Rio de Janeiro, 1980.
- 62 NEVES, L. S. **Análise de placas e cascas de materiais laminados com não-linearidade geométrica, usando elementos finitos 3-D, com integração reduzida**. Porto Alegre, 1994, Dissertação (Mestrado em Engenharia)- CPGEC / UFRGS.
- 63 NOGUSHI, H.; SCHINOBRICH, W. C. *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures in Japan and US*. In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop, New York, 1991, pp.1-35.
- 64 ORISSAMOLU, I. R.; CHERNUKA, M. W. *Probabilistic Reliability Analysis Using General Purpose Commercial Computer Programs*. In: ICOSSAR, Innsbruck, 1994, pp. 1295-1398.

- 65 OTTOSEN, N. S. *Constitutive model for short-time loading of concrete*. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 105, n. 1, pp. 127-141, Feb., 1979.
- 66 PAVAN, R. C. ***Aplicação da teoria de dano na análise do comportamento viscoelástico de estruturas de concreto***. Porto Alegre, 1994, 87p., Dissertação (Mestrado em Engenharia) - CPGEC / UFRGS
- 67 PFEIFER, A. P.; TANABE, T. *Time dependent behaviour*. In: FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES II. Proceedings of International Workshop, New York, 1991, pp.1-35.
- 68 PILISZEK, J.; CZOMOCH, I. *Probabilistic FEM analysis of reinforced concrete beams*. In: ICOSSAR, Innsbruck, 1994, pp. 295-398.
- 69 PRATES JÚNIOR, N. P. ***Um modelo Elasto-Viscoplástico para a análise de peças de concreto estrutural submetidas a estados planos de tensão através do método dos elementos finitos***. Porto Alegre, 1991, 130p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), - CPGEC / UFRGS.
- 70 REDDY, M. V.; GRANDHI, R. V.; HOPPINKS, P. A. *A reliability based structural optimization: a simplified safety index approach*. **Computers and Structures**, v. 53, n.6, 1994, pp. 1407-1418.
- 71 REH, S.; BRÜCKNER-FOIT, A.; BÖHM, F. *Reliability analysis of complex structures with random material properties and random geometry*. In: ICOSSAR, Innsbruck, 1994, pp. 399-402,
- 72 ROCHA, MARCELO MAIA. ***Ruptura e efeito de escala em materiais não homogêneos de comportamento frágil***. Porto Alegre, 1989,113p., Dissertação (Mestrado em Engenharia) - CPGEC / UFRGS.
- 73 SELLIER, A.; PINGLOT, M.; et al. *A comparative study of probabilistic methods in structural safety analysis*. In: ICOSSAR, Innsbruck, 1994, pp. 1329-1336.
- 74 SHEGG, A.; DECANINI, L. *Sobre las Deformaciones en Elementos de Hormigón Armado*. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE ENGENIERÍA ESTRUCTURAL, 15, 1971. Porto Alegre: CPGEC / UFRGS, 1971, 3v., v.2, pp.1070-1120.

- 75 SHINOZUKA, M. *Basic analysis of structural safety*. **Journal of Structural Engineering**, v. 109, n. 3, Mar., 1983, pp. 721-740.
- 76 SMERDA, Z.; KRÍSTEC, V. *Creep and shrinkage of concrete elements and structures*. **Developments in Civil Engineering**, New York: Elsevier, 1988, 296p.
- 77 SRI VIDJA, A.; RANZMATHON, R. *Reliability concrete based optimal design of reinforced concrete frames*. **Computers and Structures**, v. 57, n. 4, 1994, pp. 651-661.
- 78 STEWART, M. G. *Serviceability reliability analysis of reinforced concrete structures*. **Journal of Structural Engineering**, v. 122, n.7, Jul., 1996.
- 79 THOGT-CHRISTENSEN, P.; MUSOTSO, Y. **Applications of Structural Systems Reliability Theory**. Berlin: Springer Verlag, 1986.
- 80 ZIENKIEWICS, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems**. 4 ed. New York: Mc. Graw Hill, 1989, v.1.
- 81 ZIENKIEWICS, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity**. 4 ed., Mc. Graw Hill, 1989, v.2.

Apêndice I

1.1 Suavização de Tensões

Ao final da análise de elementos finitos, tem-se as tensões e deformações ao nível dos pontos de integração. Dependendo do tipo de problema a se resolver e escolha no número de pontos de integração, pode-se ter os valores das tensões e deformações em 12, 14, 15, 18 ou 27 pontos de integração. Para a melhor visualização das tensões, faz-se necessário tê-las a nível dos nós. Isto é feito através da projeção das tensões dos pontos de integração para os nós do elemento. Entretanto ao se projetarem as tensões e deformações para os nós, haverá mais de um valor por nó, dependendo do número de elementos que incidam naquele nó. Então parte-se para uma suavização a nível global das tensões com o objetivo de se ter apenas estados de tensões e deformações únicos nos nós. A seguir, será apresentado de forma sucinta, o procedimento seguido para a obtenção dos estados de tensões a nível dos nós.

1.1.2 Projeção de Tensões

A presente formulação segue os princípios apresentados por Zienkiewcs^[81]. Através da análise de Elementos Finitos, obtém-se tensões a nível de pontos de integração através da expressão:

$$\{\mathbf{s}\}_{NG} = [D][B]\{u\}_{NO} \quad (\text{A.I.1})$$

sendo, $\{\mathbf{s}\}_{NG}$, $\{u\}_{NO}$, $[D]$, $[B]$, o vetor de tensões a nível de pontos de integração, os deslocamentos nodais, a matriz constitutiva do material e a matriz que relaciona deformações nos pontos de integração e deslocamentos nodais respectivamente.

Pode-se também projetar as tensões dos nós para os pontos de integração usando uma função de interpolação, de forma que tem-se:

$$\{\mathbf{s}\}_{NG}^* = [N]\{\mathbf{s}\}_{NO} \quad (\text{A.I.2})$$

sendo, $\{\mathbf{s}\}_{NG}^*$ as tensões nos pontos de integração através da projeção.

Pode-se, agora, minimizar a diferença entre $\{\mathbf{s}\}_{NG}$, e $\{\mathbf{s}\}_{NG}^*$, através da minimização do funcional.

$$\int_V [N^T] (\{\mathbf{s}\}_{NG}^* - \{\mathbf{s}\}_{NG})^2 dV = 0 \quad (\text{A.I.3})$$

o qual fornece o seguinte sistema de equações a resolver:

$$[M] \{\mathbf{s}\}_{NO} = [P] \quad (\text{A.I.4})$$

com,

$$[M] = \int_V [N^T] [N] dV \quad (\text{A.I.5})$$

$$[P] = \int_V [N^T] [D] [B] \{u\}_{NO} dV \quad (\text{A.I.6})$$

A matriz $[M]$ deve ser calculada, utilizando-se integração completa de 3x3x3 pontos de Gauss, para se obter um melhor resultado, ficando uma matriz cheia, que para os elementos hexaédricos de 20 nós tem dimensão de 20x20. Neste trabalho, utilizou-se como função de interpolação para as tensões as mesmas funções de interpolação utilizadas para o campo de deslocamentos. Desta forma, obtém-se as tensões projetadas dos pontos de integração para os nós em cada elemento.

1.1.3 Suavização Global das Tensões

Uma vez calculados os estados de tensões nos nós, deve-se proceder a uma suavização dos mesmos a nível global. Isto é feito empregando-se o mesmo procedimento acima descrito, com algumas modificações. Caso se empregue a formulação anterior, com integração de Gauss Legendre, ter-se-ia uma matriz $[M]^G$ cheia e com as dimensões do número de nós da estrutura.

É conveniente que esta matriz seja diagonal, reduzindo tanto espaço quanto tempo de processamento para a resolução do sistema de equações. Assim, pode-se empregar qualquer técnica que venha a diagonalizar a matriz $[M]^G$. Neste trabalho empregou-se a técnica de integração modal (Zienkiewicz^[81]), a qual nos fornece também uma matriz diagonal. Assim, tomam-se os nós da estrutura como pontos de integração os quais terão pesos associados de forma que integre corretamente o campo de tensões ou deformações existentes. Por exemplo, para elementos hexaédricos de 20 nós com funções quadráticas os pesos da integração deverão integrar corretamente as funções quadráticas, que é formada por uma combinação linear de funções mais elementares, de forma que se tem o seguinte sistema de equações a satisfazer:

Tab.A.I.1 Sistema de Equações para integração nodal (20 nós)

g	$\int_V g dV$	$= W_1 \sum_{ng=1}^8 g_i + W_2 \sum_{ng=9}^{12} g_i + W_3 \sum_{ng=13}^{16} g_i + W_4 \sum_{ng=17}^{20} g_i$
1	8	$= 8W_1 + 4W_2 + 4W_3 + 4W_4$
\mathbf{x}	0	$= 0$
\mathbf{h}	0	$= 0$
\mathbf{z}	0	$= 0$
\mathbf{xh}	0	$= 0$
\mathbf{xz}	0	$= 0$
\mathbf{hz}	0	$= 0$
\mathbf{x}^2	8/3	$= 8W_1 + 4W_3 + 4W_4$
\mathbf{h}^2	8/3	$= 8W_1 + 4W_2 + 4W_4$
\mathbf{z}^2	8/3	$= 8W_1 + 4W_2 + 4W_3$

A solução do sistema de equações apresentado anteriormente fornece $W_1 = -1$ e $W_2 = W_3 = W_4 = 4/3$. Já se utilizarmos elementos de 8 nós temos $W_1 = 1$.

Assim, calculam-se as equações (A.I.5) e (A.I.6) anteriores utilizando-se a integração nodal a nível de elemento.

$$[M]^{ele} = \int_V [N^T] [N] dV = \sum_i \sum_j \sum_k 1 W_i W_j W_k \det[J] \tag{A.I.7}$$

$$[P]^{ele} = \int_V [N^T] \{\mathbf{s}\}_{NO} dV = \sum_i \sum_j \sum_k \{\mathbf{s}\}_{NO} W_i W_j W_k \det[J] \tag{A.I.8}$$

Sendo as matrizes a nível global, dadas por:

$$[M]^G = \sum_{ele} [M]^{ele} \tag{A.I.9}$$

e

$$[P]^G = \sum_{ele} [P]^{ele} \tag{A.I.10}$$

Então, o estado de tensões suavizadas nos nós é obtido resolvendo-se o sistema:

$$[M]^G \{\mathbf{s}\}_{NO}^* = [P]^G \tag{A.I.11}$$

A solução é imediata, uma vez que a matriz $[M]^G$ é diagonal.

Apêndice II

1.1 Geração de Variáveis Aleatórias

Para a geração de variáveis aleatórias de acordo com suas respectivas densidades de probabilidade de distribuição, faz-se necessário a geração de números uniformemente distribuídos entre 0 e 1. A geração de números aleatórios uniformemente distribuídos pode ser feita de diversas maneiras. Uma maneira que é largamente empregada faz uso de geradores lineares congruenciais. Nestes geradores uma seqüência de inteiros I_1, I_2, I_3, \dots é definida pela seguinte equação recursiva:

$$I_i = (aI_{i-1} + b) - \text{INT}\left(\frac{aI_{i-1} + b}{c}\right)c \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.II.1})$$

onde $\text{INT}\left(\frac{aI_{i-1} + b}{c}\right)$ é o resto inteiro da divisão, a, b, c são inteiros denominados respectivamente multiplicador, incremento e módulo. O valor de início I_0 é chamado de semente (um número arbitrariamente escolhido). O número aleatório U_i é definido como:

$$U_i = \frac{I_i}{c} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.II.2})$$

Os parâmetros do modelo devem satisfazer as seguintes condições: $0 < c, a < c, b < c$ e $I_0 < c$. Evidentemente o processo não é totalmente aleatório, uma vez que seu caráter é recursivo e portanto reprodutível a qualquer momento, sendo muitas vezes chamados de processos de geração de números pseudo-aleatórios. Além do mais, o processo possui um período para a repetição da seqüência de números gerados. O período para este gerador é tal que é menor ou igual a c . Portanto, para se assegurar um máximo período, a escolha de c deve ser a de um inteiro muito grande.

Especificamente, quando $b=0$, o processo é chamado de gerador congruencial multiplicativo. Se $b>0$, o gerador é dito gerador misto.

Neste trabalho emprega-se o gerador congruencial multiplicativo ($b=0$) IBM SYSTEM/360, cujas características são $c=2^{31}-1$, $a=7^5$ com um período máximo de $2^{31}-2$, e que apresenta bons resultados quando aplicado a testes estatísticos de verificação de qualidade de aleatoriedade.

Para este trabalho o método de geração de variáveis aleatórias é o da transformação inversa.

Se \tilde{X} uma variável aleatória a ser gerada com uma dada função de distribuição acumulada $F_{\tilde{X}}(x)$ e \tilde{U} uma variável uniformemente

distribuída entre 0 e 1, uma seqüência de números aleatórios com uma função de densidade de distribuição $f_X(x)$ é construída da seguinte maneira:

$$\tilde{X} = F_X^{-1}(\tilde{u}) \quad (\text{A.II.3})$$

Na Fig. A.II.1 é mostrado um esquema para uma variável do método da transformação inversa para a geração de números aleatórios.

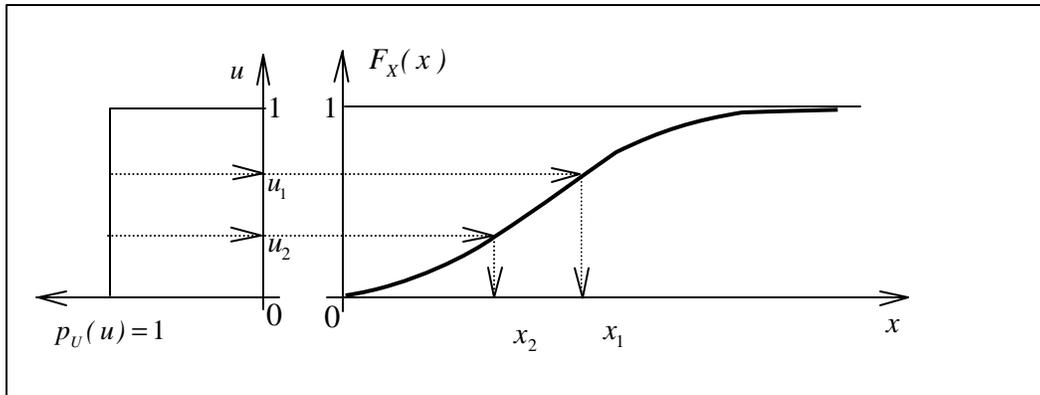


Fig. A.II.1 Método da Transformação Inversa para Geração de Variáveis Aleatórias.

Apêndice III

1.1 Método dos Mínimos Quadrados para Funções Não-Lineares

Neste item será visto o procedimento de aproximação de dados a uma função não-linear com coeficientes desconhecidos. A abordagem empregada é a de linearizar a função a uma função não-linear através da expansão de Taylor.

Seja a seguinte função utilizada para aproximar os dados:

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m) \quad (\text{A.III.1})$$

Pode-se assumir valores aproximados para os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_m , os quais serão chamados por $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}$. Assim aplicando estes valores na função tem-se:

$$f^{(0)} = f(x, a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}) \quad (\text{A.III.2})$$

Expandindo (A.III.1) em séries de Taylor e desprezando os termos de ordem superior à primeira derivada, tem-se a seguinte aproximação:

$$y = f^{(0)} + \Delta a_0 \left[\frac{\partial f}{\partial a_0} \right]^{(0)} + \Delta a_1 \left[\frac{\partial f}{\partial a_1} \right]^{(0)} + \dots + \Delta a_m \left[\frac{\partial f}{\partial a_m} \right]^{(0)} \quad (\text{A.III.3})$$

sendo Δa_i um pequeno incremento em a_i .

Utilizando a aproximação dada em (A.III.3) e o método dos mínimos quadrados ponderado, tem-se:

$$S = \sum_{i=0}^N w_i \{ y_i - f_i^{(0)} - \Delta a_0 \left[\frac{\partial f}{\partial a_0} \right]^{(0)} + \Delta a_1 \left[\frac{\partial f}{\partial a_1} \right]^{(0)} + \dots + \Delta a_m \left[\frac{\partial f}{\partial a_m} \right]^{(0)} \}^2 \quad (\text{A.III.4})$$

sendo $\left[\frac{\partial f}{\partial a_j} \right]^{(0)}$, a derivada da função f com respeito a a_j avaliada em $x = x_i$

com os coeficientes apropriados $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots, a_m^{(0)}$, e w_i os pesos associados a cada par de dados.

Para minimizar a equação (A.III.4), toma-se as derivadas da mesma em relação aos coeficientes Δa_i . Igualando-se a zero o conjunto de equações formadas, chega-se ao conjunto de equações :

$$[K]\{v\} = \{b\} \quad (\text{A.III.5})$$

onde ,

$$k_{pq} = \sum_{i=0}^N w_i \left[\frac{\partial f_i}{\partial a_p} \right]^{(0)} \left[\frac{\partial f_i}{\partial a_q} \right]^{(0)} \quad (\text{A.III.6})$$

$$b_p = \sum_{i=0}^N w_i [y_i - f_i^{(0)}] \left[\frac{\partial f_i}{\partial a_p} \right]^{(0)} \quad (\text{A.III.7})$$

$$v_p = \Delta a_p \quad (\text{A.III.8})$$

Resolvendo-se a equação (A.III.5), para os valores iniciais dos coeficientes, obtém-se novos Δa_i , com os quais pode-se corrigir os valores dos a_i , obtendo-se um novo conjunto de coeficientes.

$$a_i^{(1)} = a_i^{(0)} + \Delta a_i \quad i = 0,1,2,\dots,m \quad (\text{A.III.9})$$

Desta forma itera-se até que a diferença entre os coeficientes a_i de iterações sucessivas sejam menores que determinada tolerância.