

Luan Bottin De Toni

**Efeitos da fotoionização da poeira nas ondas de Alfvén e eletrostáticas para um plasma espacial magnetizado**

Porto Alegre

15 de março de 2021

Luan Bottin De Toni

**Efeitos da fotoionização da poeira nas ondas de Alfvén e eletrostáticas para um plasma espacial magnetizado**  
(*Effects of dust photoionization in Alfvén and electrostatic waves for a magnetized space plasma*)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física. \*

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Instituto de Física

Orientador: Prof. Dr. Rudi Gaelzer

Porto Alegre

15 de março de 2021

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Rudi por ter me guiado desde minha graduação e por sempre estar disposto a me auxiliar e discutir os resultados com valiosos conselhos.

À minha família pelo apoio manifestado durante todo esse período.

À minha namorada Ana por todo incentivo, carinho, amor e por sempre estar ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis, assim como nossas companheiras Bonnie e Chimia.

Aos meus amigos e colegas, em especial Fabio, Augusto e Ramon, pela camaradagem nesse longo período, deixando os dias no campus mais leves e as filas no RU mais suportáveis.

A todos meus professores, desde minha infância, pelo entusiasmo em exercer essa nobre profissão.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro e à UFRGS pela estrutura oferecida e por sua imensurável contribuição para a sociedade nesses mais de 85 anos de história.

*“I’ve developed a new philosophy. I only dread one day at a time.”*  
*Charlie Brown (Peanuts by Charles M. Schulz)*

# Resumo

Neste trabalho estudamos as mudanças que o processo de fotoemissão de elétrons pela poeira provoca na propagação e amortecimento de alguns modos normais de oscilações em plasmas através da relação de dispersão obtida utilizando a teoria cinética de plasmas e a linearização do sistema de equações Vlasov-Maxwell para um plasma empoeirado, homogêneo, magnetizado, no qual os grãos de poeira são considerados idênticos e imóveis. A análise numérica da relação de dispersão é feita utilizando parâmetros típicos de ventos estelares de estrelas ricas em carbono, já que alguns dos modos estudados atuam como mecanismos de aceleração desses ventos.

Consideramos propagação paralela ao campo magnético ambiente e distribuições Maxwellianas de elétrons e íons. Para as ondas eletromagnéticas observamos que as partes reais da frequência dos modos whistler e íon-cíclotron, que se acoplam em um único modo (o modo de Alfvén) para pequeno número de onda em um plasma convencional, deixam de se acoplar no modo de Alfvén na presença de poeira negativamente carregada, podendo apresentar região de acoplamento quando os grãos de poeira estão eletricamente nulos ou positivos. Foi possível observar também que a inclusão da fotoionização diminui a região onde a velocidade de grupo desses modos é nula, efeito que surge na presença de poeira no plasma.

As partes imaginárias das frequências desses modos, que estão relacionadas à taxa de amortecimento das ondas, apresentam diminuição em seu valor absoluto com a presença da fotoionização para pequenos valores da densidade de poeira, indicando um menor amortecimento das ondas. Exceção disso ocorre na região de pequeno número de onda, onde o comportamento das taxas de amortecimento dos modos whistler e íon-cíclotron se inverte com a inversão do sinal da carga elétrica dos grãos de poeira. Essas taxas de amortecimento também podem aumentar com o aumento do fluxo de fótons para grandes valores da densidade de grãos de poeira.

As frequências das ondas eletrostáticas não apresentam grandes mudanças em suas partes reais e, em geral, também apresentam atenuação na taxa de amortecimento com a adição da fotoionização, exceto para a região de pequeno número de onda das ondas de Langmuir, onde o amortecimento devido às colisões inelásticas é aumentado com a presença da emissão fotoelétrica. Para as ondas íon-acústicas o amortecimento de Landau é predominante e a fotoionização provoca maiores mudanças no amortecimento apenas para grandes densidades de poeira, onde pode aumentar a taxa de amortecimento para um certo valor de número de onda.

# Abstract

In this work we studied the changes that the dust photoionization process brings to the propagation and damping of some plasma wave modes through the dispersion relation obtained utilizing the plasma kinetic theory and the linearization of the Vlasov-Maxwell system of equations for a homogeneous, magnetized dusty plasma with identical and immobile dust particles. The numerical analysis was performed using parameters typical of stellar winds coming from carbon rich stars, since some of the studied waves have been proposed as a possible accelerating mechanism of these winds.

We considered propagation parallel to the ambient magnetic field and electrons and ions described by Maxwellian distributions. For electromagnetic waves we observed that the real parts of the whistler and ion cyclotron modes frequencies, which couple into a single mode (the Alfvén mode) for small wave number in a conventional plasma, no longer couple into the Alfvén mode in the presence of negatively charged dust particles, but exhibit a coupling region when dust grains have positive or null electric charge. We also observed that the photoionization decreases the region of null group velocity, a feature that arises in the presence of dust in the plasma.

The imaginary parts of the frequencies, which are related to the wave damping rate, show a decrease of its absolute values in the presence of the photoionization mechanism for small values of dust density, indicating a smaller damping rate of these modes. An exception of this occurs in the region of small wavenumber, where the damping rates of these two modes exchange behaviors with the inversion of the electric charge's sign. These damping rates may also increase with increasing photon flux for larger values of dust density.

The electrostatic wave modes do not show significant changes in its real parts and, in general, also shows a decrease in the damping rate with the addition of the photoemission process, except for the region of small wave number of the Langmuir waves, where the damping due to inelastic collisions is increased with the presence of photoionization. For the ion acoustic waves, Landau damping is prevailing and the photoionization causes bigger changes in the damping rates only for larger dust densities, where it may increase the mode's damping rate for a given wave number.

# Resumo (nota de imprensa)

Estima-se que apenas cerca de 4% do nosso universo é formado por matéria visível (bariônica), sendo o restante composto por matéria escura e energia escura. Essa matéria bariônica é quase exclusivamente composta por plasma, um estado da matéria constituído de elétrons, íons e partículas neutras. Por esse motivo, é essencial o conhecimento da física dos plasmas para o estudo de diversos ambientes astrofísicos como estrelas, meio interestelar, atmosferas planetárias, ventos estelares e caudas cometárias. Frequentemente esses locais são compostos também por partículas de material sólido com massa bilhões de vezes maior que a massa do próton e com tamanhos que variam de nanômetros a milímetros. Essas impurezas são comumente chamadas de grãos de poeira e, quando elas se encontram em um plasma, dizemos que o sistema em questão é um plasma empoeirado ou plasma complexo.

Quando grãos de poeira estão imersos em um plasma, eles obtêm uma carga elétrica devido às interações com as partículas do plasma e com agentes externos, como a radiação eletromagnética. Em plasmas empoeirados espaciais, as interações mais importantes para a variação da carga elétrica da poeira são a absorção de elétrons e íons pela poeira através de colisões inelásticas e a emissão de elétrons por fotoionização, consequência da exposição da poeira à radiação.

Como os plasmas são constituídos por partículas eletricamente carregadas, é comum surgir perturbações nos campos eletromagnéticos que se propagam através de ondas eletromagnéticas e eletrostáticas. De particular importância é o estudo das ondas de Alfvén, um tipo de onda eletromagnética que tem sido proposta como um possível mecanismo de aceleração de ventos estelares.

Neste trabalho é estudado o impacto que o processo de fotoionização da poeira causa na propagação e amortecimento das ondas em um ambiente estelar através de uma teoria estatística, a teoria cinética dos plasmas. Essa abordagem descreve as condições do plasma a partir de interações microscópicas de seus constituintes e se mostra útil para sistemas com grande número de partículas onde não é viável analisar o movimento e as interações das partículas individualmente.

Os resultados obtidos mostram que, em geral, o processo de fotoionização da poeira tende a atenuar a taxa de amortecimento das ondas, ou seja, a amplitude das ondas passa a diminuir mais lentamente ao longo do tempo. Exceção disso ocorre para ondas de Langmuir (modo de onda eletrostática) na região de grandes comprimentos de onda, onde a fotoionização da poeira tende a aumentar sua taxa de amortecimento. Também foi observado que na presença de poeira os modos das ondas de Alfvén possuem velocidade de grupo nula em determinado intervalo de comprimento de onda. Porém, a presença da fotoionização diminui essa região de não propagação das ondas.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Trajetória de colisão da partícula do plasma tangenciando um grão de poeira quando $q_\alpha\phi < 0$ . . . . .	20
Figura 2 – Número de carga no equilíbrio $Z_d$ e fração da densidade de elétrons por íons $n_{e0}/n_{i0}$ como função da fração da densidade de poeira por íons $\varepsilon = n_{d0}/n_{i0}$ . . . . .	55
Figura 3 – Parte real da frequência normalizada $z_r$ para as raízes obtidas com $s = \pm 1$ como função do número de onda normalizado $q$ para cinco valores de $\varepsilon$ . . . . .	56
Figura 4 – Parte real da frequência normalizada $z_r$ como função de $q$ para plasma sem poeira e para $\varepsilon = 5,0 \times 10^{-6}$ considerando apenas absorção de partículas ou ambos os mecanismos de carregamento: por absorção de partículas e fotoionização. . . . .	58
Figura 5 – Parte imaginária da frequência normalizada $z_i$ como função do número de onda normalizado $q$ para o modo whistler e o modo íon-cíclotron. . . . .	59
Figura 6 – Parte imaginária da frequência normalizada $z_i$ como função do número de onda normalizado $q$ para o modo whistler e o modo íon-cíclotron, assumindo $\tilde{\nu}_i = 0$ ou $\tilde{\nu}_e = 0$ . . . . .	62
Figura 7 – Parte imaginária da frequência normalizada $z$ como função do número de onda normalizado $q$ para: $T_i = T_e = 10^4$ K; $T_i = 2 \times 10^3$ K e $T_e = 10^4$ K; $T_i = 10^4$ K e $T_e = 5 \times 10^4$ K. . . . .	63
Figura 8 – Partes reais e imaginárias de $z$ como função de $\varepsilon$ para valor constante de $q = 0,1$ . . . . .	64
Figura 9 – Partes reais e imaginárias das frequências $z$ como função de $T_s$ para valores constantes de $q = 0,1$ e de $\varepsilon = 2,5 \times 10^{-5}$ . . . . .	66
Figura 10 – Partes reais e imaginárias da frequência $z$ como função de $q$ e $\varepsilon$ para ondas de Langmuir nos casos com e sem fotoionização. . . . .	69
Figura 11 – Parte imaginária da frequência normalizada $z_i$ como função do número de onda normalizado $q$ para ondas de Langmuir considerando três valores de $\varepsilon$ e os casos com e sem fotoionização. . . . .	70
Figura 12 – Parte imaginária da frequência normalizada $z_i$ como função do número de onda normalizado $q$ para ondas de Langmuir assumindo $\tilde{\nu}_e = 0$ ou $\tilde{\nu}_i = 0$ . . . . .	71
Figura 13 – Partes reais e imaginárias da frequência $z$ como função de $q$ e $\varepsilon$ para ondas íon-acústicas com $T_e = 20 T_i$ nos casos com e sem fotoionização. . . . .	72



# Lista de símbolos

$a$	Raio do grão de poeira
$\hat{A}$	Transformada de Fourier de uma quantidade perturbada $A_1$
$\vec{B}$	Campo magnético médio
$c$	Velocidade da luz no vácuo
$c_s$	Velocidade íon-acústica
$e$	Carga elementar
$\vec{E}$	Campo elétrico médio
$F(p)$	Distribuição de Fermi-Dirac
$f_d(\vec{r}, q, t)$	Função distribuição das partículas de poeira
$f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t)$	Função distribuição da espécie $\alpha$ do plasma
$g$	Parâmetro do plasma
$h$	Constante de Planck
$H(x)$	Função de Heaviside
$I_k$	Corrente do $k$ -ésimo processo de carregamento
$I_\alpha$	Corrente de absorção das partículas da espécie $\alpha$ pelo grão de poeira
$I_\nu$	Corrente de fotoionização das partículas de poeira
$J_l$	Função de Bessel do primeiro tipo
$\vec{j}$	Densidade média de corrente elétrica
$k$	Número de onda
$\vec{k}$	Vetor de onda
$k_B$	Constante de Boltzmann
$\text{Li}_n(x)$	Função polilogarítmica de ordem $n$ e argumento $x$
$m_\alpha$	Massa da espécie $\alpha$ do plasma

$N_D$	Número de partículas dentro de uma esfera de Debye
$n_\alpha$	Densidade da espécie $\alpha$ do plasma
$q$	Carga elétrica variável do grão de poeira ou número de onda normalizado (capítulo 5)
$Q_0$	Carga elétrica do grão de poeira no equilíbrio
$q_\alpha$	Carga elétrica da espécie $\alpha$ do plasma
$r$	Distância média entre os grãos de poeira
$r_d$	Distância média dos grãos de poeira para a estrela
$r_s$	Raio da superfície radiante da estrela
$S_a(\nu, \mu)$	Probabilidade de Mie do grão de poeira absorver um fóton
$T_\alpha$	Temperatura da espécie $\alpha$ do plasma
$v_A$	Velocidade de Alfvén
$v_{T\alpha}$	Velocidade térmica da espécie $\alpha$ do plasma
$z$	Frequência de onda normalizada
$Z_d$	Número de cargas portadas pela partícula de poeira
$\beta(\nu)$	Probabilidade de um elétron absorver um fóton com frequência $\nu$ na superfície
$\varepsilon$	Razão da densidade de poeira pela densidade de íons
$\epsilon_F$	Energia de Fermi
$\tilde{\epsilon}$	Tensor dielétrico
$\Lambda(\nu)$	Fluxo de fótons de frequência $\nu$ por unidade de área por unidade de tempo
$\lambda_D$	Comprimento de Debye
$\mu$	Índice complexo de refração
$\nu$	Frequência da radiação eletromagnética
$\nu_\alpha$	Frequência de colisões inelásticas das partículas da espécie $\alpha$ com os grãos de poeira

$\rho$	Densidade média de cargas elétricas
$\sigma_\alpha$	Seção de choque de colisão das partículas $\alpha$
$\sigma_\nu$	Seção de choque de fotoionização
$\tilde{\sigma}$	Tensor condutividade
$\phi$	Função trabalho
$\varphi$	Potencial elétrico ou coordenada cilíndrica/esférica
$\chi(\nu)$	Eficiência fotoelétrica
$\omega$	Frequência da onda
$\omega_{p\alpha}$	Frequência de plasma da espécie $\alpha$
$\Omega_\alpha$	Frequência de ciclotron da espécie $\alpha$

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Propriedades do plasma empoeirado</b>	<b>17</b>
2.1	Carregamento elétrico das partículas de poeira	18
2.1.1	Absorção de partículas	19
2.1.2	Fotoemissão de elétrons	21
<b>3</b>	<b>Equações cinéticas do plasma</b>	<b>27</b>
3.1	A função densidade e a equação de Klimontovich	27
3.2	Funções distribuição e de correlação	29
3.3	Médias de ensemble	31
3.3.1	Equações para um plasma de Coulomb	32
3.4	Hierarquia BBGKY	32
3.4.1	Corte da cadeia de equações	34
3.5	Equação de Vlasov	35
3.6	Equações cinéticas para um plasma empoeirado	36
<b>4</b>	<b>Tensor dielétrico para plasmas empoeirados magnetizados</b>	<b>39</b>
4.1	Linearização do sistema de equações	39
4.2	Transformada de Fourier do sistema em primeira ordem	42
4.3	O tensor dielétrico e a relação de dispersão	44
4.4	Componentes do tensor dielétrico	46
<b>5</b>	<b>Aplicação para propagação paralela e distribuições Maxwellianas de íons e elétrons</b>	<b>49</b>
5.1	A relação de dispersão	49
5.2	Resultados numéricos	53
5.2.1	A carga de equilíbrio	54
5.2.2	Ondas de Alfvén	56
5.2.3	Ondas eletrostáticas	68
5.2.3.1	Ondas de Langmuir	69
5.2.3.2	Ondas íon-acústicas	72
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>74</b>
	<b>Referências</b>	<b>78</b>

<b>Apêndices</b>	<b>83</b>
<b>APÊNDICE A Resolução das integrais para as correntes elétricas de carregamento</b>	<b>84</b>
A.1 Integral em momentum na corrente de absorção no equilíbrio para distribuições Maxwellianas	84
A.2 Integral em momentum na expressão para a corrente fotoelétrica	85
<b>APÊNDICE B Obtenção das componentes do tensor dielétrico</b>	<b>89</b>
B.1 Componente $\epsilon_{ij}^C$	89
B.2 Expressões para as funções distribuição em termos do campo elétrico	94
B.3 Componente $\epsilon_{ij}^A$	98
B.4 Componente $\epsilon_{ij}^F$	99
<b>APÊNDICE C Tensor dielétrico para propagação paralela e distribuições Maxwellianas</b>	<b>103</b>
C.1 Cálculo das integrais $\hat{I}_\alpha$	107

# 1 Introdução

A matéria bariônica do universo é quase exclusivamente composta por plasma, um estado da matéria constituído de elétrons, íons e partículas neutras. Por esse motivo é essencial o conhecimento da física dos plasmas para o estudo de diversos ambientes astrofísicos como estrelas, meio interestelar e interplanetário, atmosferas planetárias, ventos estelares, caudas cometárias, regiões HII, entre outros. Frequentemente esses locais são compostos também por partículas de material sólido com massa bilhões de vezes maior que a massa do próton e tamanho variando de nanômetros a milímetros. Essas impurezas são comumente chamadas de partículas ou grãos de poeira.

A presença de grãos de poeira em um plasma espacial já foi observado em diversos sistemas, por exemplo:

- Meio interplanetário. Observações *in situ* das naves espaciais Helios, Galileo, Ulysses e Cassini mostram evidências da presença de poeira interestelar no Sistema Solar entre 0,3 e 5 UA (unidades astronômicas) (Altobelli, 2004). Temos também na *luz zodiacal* uma forte evidência dessas partículas de poeira, esse feixe de luz difusa é responsável por 60% da luz natural em um céu noturno sem lua e é causado pelo espalhamento da luz solar por grãos de poeira localizados no plano da eclíptica.
- Cometas. Esses corpos de forma irregular são compostos de material sólido, gás e gelo. Geralmente são envoltos por uma *coma cometária*, uma nuvem de material difuso, que tende a aumentar seu tamanho e brilho quando o objeto se aproxima do Sol. A pressão de radiação e o vento solar tendem a deslocar materiais do núcleo dos cometas formando caudas na direção contrária ao movimento. É comum observar cometas com caudas distintas, uma formada por partículas massivas de poeira que são fracamente aceleradas e tendem a causar uma curvatura na cauda, e outra composta por íons muito mais leves que formam uma cauda quase em linha reta na direção oposta ao Sol.
- Anéis planetários. Todos planetas gasosos do Sistema Solar possuem anéis formados por material sólido de tamanhos variados, podendo ser do tamanho de asteroides a partículas nanométricas. Algumas vezes esses anéis são formados por materiais ejetados pelas luas desses planetas. É o caso do anel E de Saturno, o qual é alimentado principalmente por partículas de gelo ejetadas por sua lua Encélado. Júpiter também tem sua lua Io, com mais de 400 vulcões ativos, como uma fonte de grãos de poeira.
- Envoltórios estelares. Partículas de poeira perto do Sol produzem a coroa F (*F-corona*) cujas linhas espectrais são observadas tão próximas quanto  $1,1 R_{\odot}$ , sendo  $R_{\odot}$  o raio do Sol (Koutchmy; Lamy, 1985). Outro fenômeno interessante acontece

com as estrelas variáveis RCB (*R Coronae Borealis*) (Clayton, 2012) que têm sua luminosidade na luz visível alterada enquanto que a luminosidade no infravermelho permanece inalterada. Isso se deve à presença de uma nuvem de partículas de carbono em sua volta que espalha a luz no espectro visível.

- Poeira Interestelar. Constituídos essencialmente de grafite, silicato e compostos metálicos, os grãos de poeira interestelares possuem diversos tamanhos, podendo variar de 0,005 a 1  $\mu\text{m}$  (Mathis et al., 1977) e são conhecidos há um longo tempo pelos astrônomos por extinguir a luz visível de objetos astrofísicos de interesse em algumas regiões.

Partículas de poeira inseridos em um plasma possuem uma carga elétrica variável devido às interações com as partículas do plasma e com agentes externos. São vários mecanismos que podem alterar a carga elétrica de um grão de poeira, dentre eles há a absorção de partículas do plasma através de colisões inelásticas, absorção de radiação e consequente emissão de fotoelétrons por efeito fotoelétrico, emissão secundária de elétrons quando há transferência de energia das partículas do plasma para o grão de poeira através de alguma colisão, emissão termiônica, emissão de campo, radioatividade, etc (Shukla; Mamun, 2002).

Cada um desses processos pode ser caracterizado por uma corrente elétrica (negativa ou positiva) incidente na superfície do grão, a qual possui a característica de deixar o grão negativamente ou positivamente carregado. Por exemplo, a absorção de elétrons pela poeira tende a deixá-la negativamente carregada, enquanto que a absorção de íons e a emissão de fotoelétrons e de elétrons secundários tendem a deixá-la positivamente carregada. A carga elétrica da partícula de poeira atinge um valor de equilíbrio quando a soma de todas as correntes de carregamento incidentes na sua superfície for nula. Maiores detalhes acerca dos processos de carregamento elétrico da poeira serão discutidos na seção 2.1.

Tão logo a partícula de poeira adquire uma carga elétrica ela passa a responder aos campos eletromagnéticos e a fazer parte do comportamento coletivo do plasma podendo afetar várias de suas propriedades e produzir efeitos somente observados em plasmas com poeira. Como exemplo, em 1992 a nave espacial Ulysses observou feixes de pequenas partículas de poeira originadas nas proximidades de Júpiter causadas pela aceleração destas partículas carregadas pela magnetosfera do planeta (Grün et al., 1993; Horanyi et al., 1993). Outra observação direta do efeito de grãos de poeira carregados no Sistema Solar foi feita pela nave Voyager em 1980, quando marcas escuras e dinâmicas (*spokes*) foram observadas pela primeira vez no anel B de Saturno, trata-se de um fenômeno sazonal causado pela levitação de pequenas partículas de poeira do plano do anel através de repulsão eletrostática.

Novos modos de onda de baixa frequência podem aparecer devido à dinâmica da

poeira no plasma, como as ondas poeira-acústicas e as ondas poeira-cíclotron eletrostáticas (Merlino et al., 1998; D'Angelo, 1990; Rao et al., 1990). Além disso, a carga elétrica variável dos grãos de poeira pode modificar os modos de ondas já existentes em um plasma convencional, fazendo surgir novos mecanismos de amortecimento em ondas eletromagnéticas e eletrostáticas (Vladimirov, 1994; De Juli et al., 2005; Schneider et al., 2006), como veremos mais adiante neste trabalho.

O estudo desses fenômenos em plasmas pode ser feito com diferentes abordagens dependendo do problema em questão. Em situações de baixa densidade em que efeitos coletivos têm pouca importância pode-se estudar o plasma pelas trajetórias individuais das partículas. Nesse caso os campos eletromagnéticos são dados e considera-se que não são afetados pelas partículas do plasma. Essa abordagem mostra-se inadequada quando há a necessidade de calcular a dinâmica de várias partículas.

Para um estudo mais satisfatório de um plasma, o qual geralmente possui um número muito grande de partículas, é necessário adotar um modelo mais prático, isto pode ser feito considerando o plasma como um fluido. Aqui, as trajetórias individuais de partículas são negligenciadas e apenas o movimento de elementos de fluido é considerado. Neste modelo trabalha-se com quatro variáveis independentes, as três variáveis relacionadas à posição das partículas e uma variável temporal. Esta abordagem autoconsistente permite o estudo do sistema de forma mais abrangente, diminuindo o número de equações a serem resolvidas, e é capaz de explicar a grande maioria dos fenômenos observados em experimentos. Porém, ela é limitada pois considera que a taxa de colisão entre as partículas é suficientemente alta a fim de mantê-las com uma distribuição Maxwelliana de velocidades, sendo incapaz de encarar problemas com distribuições diferentes ou casos de plasmas não colisionais.

Neste trabalho usa-se um tratamento mais refinado, a teoria cinética. Aqui as espécies constituintes do plasma possuem uma função distribuição adequada com sete variáveis independentes, sendo três de posição, três de velocidade e uma temporal. Para as partículas de poeira, porém, há a necessidade da utilização de mais uma variável independente, a carga elétrica, já que essa quantidade pode variar no tempo para grãos de poeira. Esta abordagem estatística descreve e prevê as condições do plasma a partir de movimentos e interações microscópicas de seus constituintes e é capaz de explicar fenômenos não previstos pela teoria de fluidos, como o amortecimento de Landau, um efeito de amortecimento de ondas longitudinais em um plasma sem colisões.

A presente dissertação está estruturada da seguinte forma. No capítulo 2 serão estudadas as principais propriedades de um plasma empoeirado e os mecanismos de carregamento dos grãos de poeira que serão considerados. O capítulo 3 mostra uma revisão da teoria cinética de plasmas, começando pela obtenção das equações cinéticas para um plasma convencional de íons e elétrons a partir do formalismo de Klimontovich para então



modificá-las a fim de determinar as equações para um plasma empoeirado. No capítulo 4 é feita uma revisão de como obter a relação de dispersão e as expressões para o tensor dielétrico de um plasma empoeirado homogêneo magnetizado a partir da teoria linear. No capítulo 5 é feita uma análise numérica da propagação e amortecimento de ondas eletromagnéticas e eletrostáticas para o caso de propagação paralela ao campo magnético ambiente e distribuições Maxwellianas de velocidades utilizando parâmetros típicos de ventos estelares. Finalmente, as conclusões e considerações finais são apresentadas no capítulo 6.

## 2 Propriedades do plasma empoeirado

Segundo Chen (2015), define-se plasma como um “gás quase neutro de partículas carregadas e neutras que exibem comportamento coletivo”. Vamos primeiramente introduzir os conceitos mencionados de quase neutralidade e comportamento coletivo pois a presença de partículas de poeira em um plasma provocará mudanças importantes nessas e em outras propriedades do sistema.

A condição de *quase neutralidade* afirma que a densidade de cargas negativas é igual a de cargas positivas para grandes volumes. Porém, a presença de poeira irá modificar a densidade das espécies do plasma já que ela pode absorver ou emitir essas partículas. Desta forma, a condição de quase neutralidade para um plasma empoeirado é escrita na forma

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha 0} q_{\alpha} + n_{d0} Q_0 = 0, \quad (2.1)$$

onde  $n_{\alpha 0}$  e  $q_{\alpha}$  são, respectivamente, a densidade no equilíbrio e carga elétrica das partículas da espécie  $\alpha$  do plasma,  $n_{d0}$  é a densidade no equilíbrio das partículas de poeira, e  $Q_0 = Z_d e$  é a carga de equilíbrio da poeira, sendo  $e$  a carga elementar e  $Z_d$  o número de cargas elétricas portadas pelo grão de poeira, o qual pode ser positivo ou negativo.

O comportamento coletivo do plasma também será afetado pela presença de poeira. Essa característica do sistema é dependente do comprimento de Debye, uma propriedade que quantifica a competência do plasma em blindar potenciais elétricos aplicados nele. Para um plasma empoeirado o comprimento de Debye é definido como (Shukla; Mamun, 2002)

$$\lambda_D = \frac{\lambda_{De} \lambda_{Di}}{\sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}}, \quad (2.2)$$

onde

$$\lambda_{D\alpha} = \left( \frac{k_B T_{\alpha}}{4\pi n_{\alpha 0} e^2} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

é o comprimento de Debye da espécie  $\alpha$  do plasma, sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann, e  $T_{\alpha}$  a temperatura da espécie  $\alpha$ . Vale observar que as expressões utilizadas neste trabalho seguem o sistema CGS de unidades.

Comumente faz-se a classificação do plasma com poeira de acordo com o grau da contaminação. Seja  $r$  a distância média dos grãos de poeira com raio  $a$ , têm-se duas formas de classificação:

- $a \ll \lambda_D < r$ . Nesse caso os grãos de poeira são considerados isolados e são blindados pelas partículas do plasma;

- $a \ll r < \lambda_D$ . Aqui, como a distância média é menor que o comprimento de Debye, não há blindagem perfeita dos grãos de poeira e eles participam do comportamento coletivo do plasma.

Alguns autores referem-se ao primeiro caso como “poeira no plasma” e ao segundo como “plasma empoeirado” (Shukla; Mamun, 2002).

Em um plasma empoeirado também há a possibilidade de formação de cristais de poeira, a qual é determinada pelo parâmetro de acoplamento de Coulomb

$$\Gamma_c = \frac{Z_d^2 e^2}{r k_B T_d} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad (2.4)$$

definido como a razão da energia potencial da poeira por sua energia térmica. Diz-se que o plasma empoeirado é um sistema fracamente acoplado se  $\Gamma_c \ll 1$  e fortemente acoplado quando  $\Gamma_c \gg 1$ .

As frequências características do plasma empoeirado também apresentam modificações quando comparadas a um plasma convencional. Efeitos interessantes em plasmas empoeirados ocorrem no regime de baixas frequências onde novos modos de onda aparecem. Devido a razão carga-massa da poeira ser muito menor que a razão dos íons e elétrons, frequências características da poeira, como a frequência de plasma da poeira e frequência de cíclotron da poeira, dadas respectivamente por

$$\omega_{pd} = \left(\frac{4\pi n_{d0} Z_d^2 e^2}{m_d}\right)^{1/2}, \quad (2.5)$$

$$|\Omega_d| = \frac{|Z_d| e B_0}{m_d c}, \quad (2.6)$$

são muito menores que as correspondentes frequências dos íons e elétrons. Isso permite o aparecimento de novos modos de propagação associados à inércia dos grãos de poeira. Nestas expressões,  $m_d$  é a massa do grão de poeira,  $B_0$  é campo magnético externo e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

Como dito anteriormente, todas as propriedades mencionadas são modificadas graças à carga elétrica que os grãos de poeira adquirem. Na próxima seção serão detalhados os modelos físico matemáticos responsáveis por descrever os processos de carregamento elétrico da poeira considerados neste trabalho.

## 2.1 Carregamento elétrico das partículas de poeira

Quando grãos de poeira estão imersos em um plasma eles obtêm uma carga elétrica variável devido a vários processos de carregamento elétrico que ocorrem no sistema. Para plasmas empoeirados espaciais os processos mais importantes geralmente são a absorção de elétrons e íons causada por colisões inelásticas e a emissão de elétrons por fotoionização. Esses serão os mecanismos de carregamento levados em consideração neste trabalho,

porém, é notório que a emissão secundária de elétrons também pode ser significativa em alguns plasmas espaciais com maiores densidades e menos expostos à radiação como, por exemplo, nas proximidades da lua Encélado de Saturno e da lua Io de Júpiter (De Toni, 2018).

Os processos de carregamento elétrico são representados por correntes elétricas incidentes na superfície do grão de poeira. Sendo assim, seja  $I_k$  a corrente do  $k$ -ésimo processo de carregamento, temos que a carga do grão de poeira  $q$  varia com o tempo de modo que

$$\frac{dq}{dt} = \sum_k I_k. \quad (2.7)$$

Essas correntes podem ser positivas ou negativas dependendo se elas são responsáveis por deixar o grão positivamente ou negativamente carregado. A condição de corrente total nula

$$\frac{dq}{dt} = \sum_k I_k = 0 \quad (2.8)$$

determina a carga de equilíbrio da partícula de poeira e juntamente com a condição de quase neutralidade (2.1) estabelece as densidades de equilíbrio das partículas do plasma.

### 2.1.1 Absorção de partículas

Colisões inelásticas entre os grãos de poeira e as partículas do plasma levam à absorção destas pela poeira. Com isso, o grão adquire uma carga elétrica negativa ao absorver elétrons ou uma carga positiva ao absorver íons.

As correntes elétricas nesta situação são modeladas a partir da teoria do movimento orbital limitado (OML - orbital motion limited theory) (Vladimirov et al., 2005). Essa teoria assume que elétrons e íons são absorvidos quando suas trajetórias intersectam a superfície do grão, ou seja, o parâmetro de impacto limite corresponde a uma trajetória tangencial à superfície do grão. Tais trajetórias são não colisionais, significando que outras partículas do plasma não afetam seu movimento próximo ao grão de poeira, nem mesmo outros grãos de poeira carregados. Assim, essa aproximação é válida quando  $a \ll \lambda_D < \lambda_{mfp}$ , sendo  $\lambda_{mfp}$  o livre caminho médio para a colisão de íons e elétrons com as partículas de poeira. Essa aproximação é útil pois pode-se calcular a seção de choque de absorção das partículas utilizando as leis de conservação de energia e momento angular, independentemente da complexidade do potencial elétrico próximo ao grão de poeira.

A princípio, a teoria OML não seria válida para um plasma magnetizado já que as partículas do plasma têm suas trajetórias alteradas pelo campo magnético ambiente. Entretanto, uma análise numérica feita por Chang e Spariosu (1993) mostra que o carregamento das partículas de poeira por colisões inelásticas não é significativamente influenciado pela presença de um campo magnético externo quando  $a \ll \rho_g$ , sendo  $\rho_g = (\pi/2)^{1/2} r_{Le}$  e  $r_{Le}$  é o raio de Larmor para elétrons. Tal condição é satisfeita para a maior parte dos

plasmas empoeirados espaciais de modo que a teoria é válida também para plasmas magnetizados.

De acordo com a teoria OML, considera-se uma partícula do plasma com carga  $q_\alpha$  e massa  $m_\alpha$  se aproximando a uma velocidade  $v_\alpha$  de um grão de poeira esférico de raio  $a$  e potencial elétrico  $\varphi$ . A interação dessa partícula com a poeira acontece através do potencial elétrico, levando-a a uma velocidade final  $v_{\alpha f}$  ao tangenciar o grão, como ilustrado na figura 1. Definindo  $b_\alpha$  como o parâmetro de impacto, a seção de choque de colisão é dada por  $\sigma_\alpha = \pi b_\alpha^2$ . Então, das leis de conservação de momento angular e energia para uma trajetória tangenciando o grão de poeira temos que

$$m_\alpha v_\alpha b_\alpha = m_\alpha v_{\alpha f} a, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_{\alpha f}^2 + q_\alpha \varphi. \quad (2.10)$$

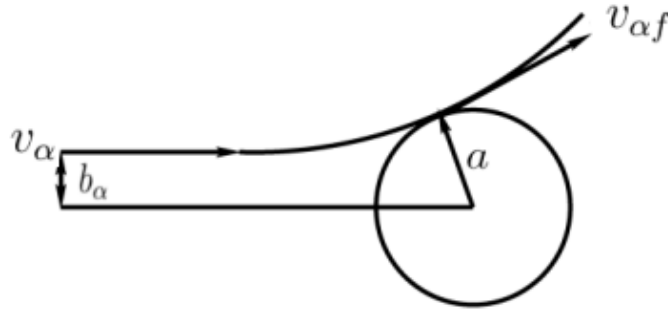


Figura 1 – Trajetória de colisão da partícula do plasma tangenciando um grão de poeira quando  $q_\alpha \varphi > 0$ . Imagem adaptada de Shukla e Mamun (2002)

À medida que o grão de poeira adquire carga elétrica, ele passa a repelir partículas do plasma com mesmo sinal elétrico, esse é o caso mostrado na figura 1. Caso  $q_\alpha \varphi > 0$  a partícula  $\alpha$  do plasma deve possuir uma energia mínima para atravessar a barreira potencial do grão de poeira. Assim, a equação (2.10) impõe a condição de velocidade mínima

$$v_\alpha^{min} = \sqrt{\frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha}}, \quad q_\alpha \varphi > 0. \quad (2.11)$$

Deste modo, podemos escrever a seção de choque de absorção  $\sigma_\alpha = \pi b_\alpha^2$  utilizando as equações (2.9), (2.10) e a condição (2.11):

$$\sigma_\alpha = \pi a^2 \left( 1 - \frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha v_\alpha^2} \right) H \left( 1 - \frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha v_\alpha^2} \right), \quad (2.12)$$

onde  $H$  é a função de Heaviside.

O potencial elétrico  $\varphi$  do grão de poeira pode ser relacionado à sua carga elétrica  $q$  através da capacitância  $C = q/\varphi$  considerando-o como um capacitor esférico com

parede externa no infinito. A capacitância de um grão esférico no plasma é dada por  $C = a \exp(-a/\lambda_D)$  (Shukla; Mamun, 2002) o qual pode ser aproximada para  $C \simeq a$  já que no regime da teoria OML temos que  $a \ll \lambda_D$ . Assim, obtém-se a relação  $a = q/\varphi$  e a seção de choque agora pode ser escrita na forma

$$\sigma_\alpha(p, q) = \pi a^2 \left(1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{ap^2}\right) H\left(1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{ap^2}\right), \quad (2.13)$$

onde  $p = m_\alpha v_\alpha$  é o momento linear das partículas da espécie  $\alpha$ .

Com isso, podemos calcular a corrente elétrica de absorção das partículas  $\alpha$  incidente no grão de poeira através da expressão (Tsytovich; Havnes, 1993)

$$I_\alpha(\vec{r}, q, t) = \int d^3p q_\alpha \sigma_\alpha(p, q) \frac{p}{m_\alpha} f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (2.14)$$

onde  $f_\alpha$  é a função distribuição das partículas da espécie  $\alpha$ .

No caso em que as partículas do plasma no equilíbrio são descritas por distribuições Maxwellianas

$$f_{\alpha 0}(p) = \frac{n_{\alpha 0}}{(2\pi m_\alpha k_B T_\alpha)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_\alpha k_B T_\alpha}\right), \quad (2.15)$$

a corrente de absorção no equilíbrio para íons uma vez ionizados e para elétrons é dada pelas equações (A.10) e (A.11),

$$\begin{aligned} I_{i0}(q) &= 2\sqrt{2\pi} a^2 e n_{i0} v_{Ti} \begin{cases} \left(1 - \frac{eq}{ak_B T_i}\right), & q \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{eq}{ak_B T_i}\right), & q > 0 \end{cases}, \\ I_{e0}(q) &= 2\sqrt{2\pi} a^2 e n_{e0} v_{Te} \begin{cases} \exp\left(\frac{eq}{ak_B T_e}\right), & q < 0 \\ \left(1 + \frac{eq}{ak_B T_e}\right), & q \geq 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde  $v_{T\alpha} = \sqrt{k_B T_\alpha / m_\alpha}$  é a velocidade térmica das partículas da espécie  $\alpha$ .

### 2.1.2 Fotoemissão de elétrons

Quando a superfície das partículas de poeira está exposta à radiação ela pode emitir elétrons através do efeito fotoelétrico. Esse processo tende a carregar positivamente o grão de poeira. Vamos apresentar agora o modelo adotado para essa corrente.

No estudo da ionização de partículas de poeira é comum (Sodha, 1963; Galvão; Ziebell, 2012) assumir a validade do modelo de Sommerfeld, onde os estados disponíveis de energia para os elétrons livres estão uniformemente distribuídos no espaço de momentum e a probabilidade de ocupação de um estado é dada pela distribuição de Fermi-Dirac

$$F(p) = \frac{2}{h^3} \left[1 + \exp\left(\frac{p^2}{2m_e k_B T_d} - \frac{\epsilon_F}{k_B T_d}\right)\right]^{-1}, \quad (2.17)$$

onde  $h$  é a constante de Planck e  $\epsilon_F$  a energia de Fermi.

O número de elétrons por unidade de volume com momenta entre  $\vec{p}'$  e  $\vec{p}' + d\vec{p}'$  é dado por

$$dN' = F(p')d\vec{p}' . \quad (2.18)$$

Seja  $\hat{r}$  o vetor unitário normal à superfície, numa aproximação semiclássica o número de elétrons que atingem a superfície por unidade de área por unidade de tempo é

$$d\Sigma_s = \frac{\vec{p}' \cdot \hat{r}}{m_e} dN' , \quad (2.19)$$

de modo que escaparão do material os elétrons com energia normal tal que

$$\frac{(\vec{p}' \cdot \hat{r})^2}{2m_e} > \psi , \quad (2.20)$$

onde  $\psi$  é a energia necessária para ultrapassar a barreira potencial da superfície.

A energia cinética de um fotoelétron emitido será

$$\frac{p^2}{2m_e} = \frac{p'^2}{2m_e} - \psi + h\nu \quad (2.21)$$

onde  $\nu$  é a frequência e  $h\nu$  é a energia do fóton absorvido. Assim, a distribuição de momenta dos fotoelétrons emitidos será

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2}{h^3} \left[ 1 + \exp \left( \frac{p^2}{2m_e k_B T_d} - \frac{\epsilon_F}{k_B T_d} \right) \right]^{-1} \\ &= \frac{2}{h^3} \left[ 1 + \exp \left( \frac{(p'^2 - 2m_e \psi + 2m_e h\nu)}{2m_e k_B T_d} - \frac{\epsilon_F}{k_B T_d} \right) \right]^{-1} . \end{aligned}$$

Definindo

$$\xi = \frac{1}{k_B T_d} (h\nu - \phi) , \quad (2.22)$$

onde  $\phi = \psi - \epsilon_F$  é a função trabalho do material, temos que

$$F(p', \xi) = \frac{2}{h^3} \left[ 1 + \exp \left( \frac{p'^2}{2m_e k_B T_d} - \xi \right) \right]^{-1} . \quad (2.23)$$

Seja  $\Lambda(\nu)$  o número de fótons incidentes por unidade de área por unidade de tempo e  $\beta(\nu)$  a probabilidade de um elétron que chega na superfície vindo de dentro do grão absorver um fóton de frequência  $\nu$  na superfície (o produto  $\beta(\nu)\Lambda(\nu)$  é uma quantidade adimensional), pode-se definir

$$d\Sigma_\nu = \beta(\nu)\Lambda(\nu)d\Sigma_s = \beta(\nu)\Lambda(\nu) \frac{\vec{p}' \cdot \hat{r}}{m_e} F(p', \xi) d\vec{p}' \quad (2.24)$$

como sendo a densidade de elétrons na superfície que pode levar à emissão fotoelétrica.

Porém, para calcular o número de elétrons emitidos é necessário ainda considerar que se o material possui energia eletrostática  $\varphi > 0$  na superfície, fotoelétrons com energia

menor que  $e\varphi$  irão retornar para a superfície. Além disso, os elétrons devem possuir momentum positivo normal à superfície, ou seja,  $\vec{p}' \cdot \hat{r} > 0$ . Assim, é possível adicionar estas condições utilizando a função de Heaviside  $H$ , ou seja, o número de fotoelétrons emitidos será proporcional a

$$H(\vec{p}' \cdot \hat{r}) H\left(\frac{p'^2}{2m_e} - e\varphi\right).$$

Para uma partícula esférica de raio  $a$  e carga  $q$  uniformemente distribuída pela superfície já vimos que o potencial eletrostático é dado por  $\varphi = q/a$ .

Ainda, há um bom tempo Mie (1908) mostrou que em geral o número de fótons incidentes em uma esfera de raio  $a$  é proporcional ao coeficiente  $S_a$ , sendo esta uma função de  $2\pi a/\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda, e do índice complexo de refração  $\mu$  do material da esfera, ou seja,  $S_a = S_a(2\pi a/\lambda, \mu)$ . Em geral, essa função é dada por  $S_a = S_e - S_s$  onde  $S_e$  e  $S_s$  são, respectivamente, os coeficientes de extinção e espalhamento das partículas de poeira (Sodha et al., 2011).

Com isso, fazendo a troca da variável de integração  $\vec{p}' \Rightarrow \vec{p}$ , podemos escrever o número de fotoelétrons emitidos por unidade de área por unidade de tempo como

$$\Sigma_\nu = \beta(\nu)\Lambda(\nu)S_a(\nu, \mu) \int d\vec{p} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{m_e} F(p, \xi) H(\vec{p} \cdot \hat{r}) H\left(\frac{p^2}{2m_e} - \frac{eq}{a}\right), \quad (2.25)$$

onde  $F(p, \xi)$  é dada pela equação 2.23.

Para obter o número de fotoelétrons emitidos por unidade de tempo e, com isso, a corrente fotoelétrica  $I_\nu$  incidente no grão, é necessário integrar a equação (2.25) sobre a superfície  $S$  na qual incide radiação eletromagnética. No caso de radiação isotrópica e uma partícula esférica de raio  $a$  temos para a corrente fotoelétrica

$$I_{\nu, \text{iso}} = e \iint_S d\Sigma_\nu = e \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| \beta(\nu)\Lambda(\nu)S_a(\nu, \mu) \times \int d\vec{p} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{m_e} F(p, \xi) H(\vec{p} \cdot \hat{r}) H\left(\frac{p^2}{2m_e} - \frac{eq}{a}\right), \quad (2.26)$$

onde

$$\vec{r} = a \sin \theta \cos \phi \hat{x} + a \sin \theta \sin \phi \hat{y} + a \cos \theta \hat{z}, \quad (2.27)$$

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}, \quad (2.28)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = a^2 \sin \theta. \quad (2.29)$$

Entretanto, os plasmas empoeirados espaciais geralmente estão expostos à radiação estelar, a qual é unidirecional. Sendo assim, a superfície da partícula de poeira exposta à radiação estará limitada a um hemisfério da esfera. Definindo o vetor unitário  $\hat{n}_\Lambda$  apontando na direção de propagação da radiação eletromagnética, a superfície exposta do



grão de poeira será definida pela condição  $\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r} < 0$ . Nota-se que para radiação isotrópica  $\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r} = -1$  sempre. Além disso, considera-se que a intensidade da radiação incidente corresponde a sua componente perpendicular à superfície, ou seja, será proporcional a  $|\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r}|$ . Deste modo, escrevemos a equação (2.26) de maneira mais geral como

$$I_\nu = ea^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r}| H(-\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r}) \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \times \int d\vec{p} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{m_e} F(p, \xi) H(\vec{p} \cdot \hat{r}) H\left(\frac{p^2}{2m_e} - \frac{eq}{a}\right). \quad (2.30)$$

Como este trabalho é focado em plasmas magnetizados, onde o campo magnético é definido na direção do eixo  $z$ , considera-se dois casos limite para a corrente fotoelétrica, um em que a direção de propagação da radiação é paralela ao campo magnético externo ( $\hat{n}_\Lambda = -\hat{z}$ ) e outro em que a direção é perpendicular ( $\hat{n}_\Lambda = -\hat{x}$ ). Estes são os casos considerados na obtenção do termo de fonte da equação cinética das partículas do plasma (3.74) apresentada no próximo capítulo. Por simplicidade, também considera-se que os fotoelétrons serão emitidos no sentido oposto ao da radiação, definindo a superfície emissora como um disco de raio  $a$  com vetor normal na direção  $\hat{z}$  ou  $\hat{x}$ .

Sendo assim, no caso de propagação paralela da radiação, temos que  $\vec{p} \cdot \hat{r} = p_z \cos \theta$  e a integração sobre a superfície resulta em

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r}| H(-\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r}) \vec{p} \cdot \hat{r} H(\vec{p} \cdot \hat{r}) \\ &= p_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta H(\cos \theta) H(p_z \cos \theta) \\ &= p_z \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta H(p_z) = p_z \frac{2\pi}{3} H(p_z). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Agora, no caso de propagação perpendicular ao campo magnético, temos que  $\vec{p} \cdot \hat{r} = p_x \sin \theta \cos \phi$  resultando em

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r}| H(-\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{r}) \vec{p} \cdot \hat{r} H(\vec{p} \cdot \hat{r}) \\ &= p_x \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2 \phi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta H(\sin \theta \cos \phi) H(p_x \sin \theta \cos \phi) \\ &= p_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos^2 \phi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta H(p_x) = p_x \frac{2\pi}{3} H(p_x). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Assim, podemos escrever a equação (2.30) levando em consideração os casos (2.31) e (2.32) da seguinte maneira

$$I_\nu = e\beta(\nu)\Lambda(\nu)S_a(\nu, \mu) \int d\vec{p} \sigma_\nu(p, q) \left( \frac{p_x}{m_e} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_e} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) F(p, \xi), \quad (2.33)$$

onde  $\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{x} = n_x$  e  $\hat{n}_\Lambda \cdot \hat{z} = n_z$ , e ainda,

$$\sigma_\nu(p, q) = \frac{2\pi}{3} a^2 H\left(\frac{p^2}{2m_e} - \frac{eq}{a} H(q)\right) \quad (2.34)$$

é a seção de choque de fotoionização.

Como  $\sigma_\nu$  e  $F(p, \xi)$  são funções do módulo de  $p$ , a integração em momentum resulta em expressões similares ao considerar propagação paralela ou perpendicular, a resolução pode ser encontrada no apêndice A.2. Sendo assim, a partir das equações (A.19) e (A.27) escrevemos a corrente fotoelétrica como

$$I_\nu = \frac{8\pi^2 ea^2 m_e (k_B T_d)^2}{3h^3} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \begin{cases} \Phi(\xi), & q \leq 0 \\ \Psi(\xi, q), & q > 0 \end{cases}, \quad (2.35)$$

onde

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\exp \xi} \frac{\ln(1 + \Omega)}{\Omega} d\Omega = -\text{Li}_2(-\exp(\xi)), \quad (2.36)$$

$$\Psi(\xi, q) = \frac{eq}{ak_B T_d} \ln \left[ 1 + \exp \left( \xi - \frac{eq}{ak_B T_d} \right) \right] + \Phi \left( \xi - \frac{eq}{ak_B T_d} \right), \quad (2.37)$$

e  $\text{Li}_2(x)$  é a função polilogarítmica (também conhecida como função de Jonquière) de ordem 2 e argumento  $x$ .

Devido a dificuldade de quantificar o termo  $\beta(\nu)$ , define-se a eficiência fotoelétrica do material do grão, ou ainda, a fração de fótons absorvidos que levam à emissão fotoelétrica, como (Sodha et al., 2009)

$$\chi(\nu) = \frac{4\pi m_e (k_B T_e)^2}{h^3} \beta(\nu) \Phi(\xi), \quad (2.38)$$

o qual possui uma dependência espectral, formulada por Spitzer (1948) a partir do estudo de vários materiais fotoemissores, dada por

$$\chi(\nu) = \begin{cases} 0, & \nu < \nu_0 \\ \frac{b}{\nu^4} \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right)^2, & \nu > \nu_0 \end{cases}, \quad (2.39)$$

onde  $b$  é uma constante que depende do material e  $\nu_0 = \phi/h$  é a frequência de corte que depende da função trabalho  $\phi$  do material. É conveniente escrever a eficiência fotoelétrica em termos de seu valor máximo  $\chi_m = 16b/729\nu_0^4$ , o qual pode ser medido experimentalmente (Spitzer, 1948; Feuerbacher; Fitton, 1972), de forma que

$$\chi(\nu) = \begin{cases} 0, & \nu < \nu_0 \\ \frac{729}{16} \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^4 \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \chi_m, & \nu > \nu_0 \end{cases}. \quad (2.40)$$

Expressando a corrente fotoelétrica com este novo parâmetro temos

$$\begin{aligned} I_\nu &= \frac{2\pi}{3} ea^2 S_a(\nu, \mu) \chi(\nu) \Lambda(\nu), & q \leq 0, \\ I_\nu &= \frac{2\pi}{3} ea^2 S_a(\nu, \mu) \frac{\Psi(\xi, q_d)}{\Phi(\xi)} \chi(\nu) \Lambda(\nu), & q > 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Para um espectro contínuo podemos generalizar a equação (2.41) para (Sodha, 1963)

$$\begin{aligned} I_\nu &= \frac{2\pi}{3} ea^2 \int_{\nu_0}^{\nu_m} S_a(\nu, \mu) \chi(\nu) \Lambda'(\nu) d\nu, & q \leq 0, \\ I_\nu &= \frac{2\pi}{3} ea^2 \int_{\nu_0}^{\nu_m} S_a(\nu, \mu) \frac{\Psi(\xi, q)}{\Phi(\xi)} \chi(\nu) \Lambda'(\nu) d\nu, & q > 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde  $\nu_m$  é o limite superior do espectro, definido por  $\chi(\nu_m) \simeq 0$  ou  $\Lambda(\nu_m) \simeq 0$ , e  $\Lambda'(\nu)d\nu$  é o número de fótons com frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  incidentes por unidade de tempo por unidade de área. Para um ambiente estelar, geralmente podemos considerar que a estrela em consideração emite radiação como um corpo negro, de modo que (Srivastava et al., 2016)

$$\Lambda'(\nu)d\nu = \frac{4\pi\nu^2}{c^2} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T_s}\right) - 1 \right]^{-1} \left(\frac{r_s}{r_d}\right)^2 d\nu, \quad (2.43)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $T_s$  é a temperatura superficial da estrela,  $r_s$  é o raio de sua superfície radiante, e  $r_d$  é a distância média dos grãos de poeira para a estrela.

### 3 Equações cinéticas do plasma

Plasmas são constituídos por um grande número de partículas de modo que para uma descrição microscópica deste sistema é necessária a utilização de uma teoria estatística como a teoria cinética, a qual é baseada nas funções distribuição de configuração e velocidades das partículas junto com suas correlações e os campos eletromagnéticos produzidos por elas.

Nas próximas seções faremos uma revisão da teoria cinética dos plasmas baseada principalmente nos livros de Krall et al. (1973), Swanson (2008) e Sitenko (1982). Seria injusto não mencionar que parte da revisão apresentada neste e no próximo capítulo é baseada também nas notas de aula de física de plasmas do Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell e do Prof. Dr. Rudi Gaelzer, lecionadas no Instituto de Física da UFRGS.

Começaremos esta revisão pela obtenção do sistema de equações para um plasma convencional e, a partir disso, vamos obter também o sistema de equações para um plasma empoeirado, utilizando como base os trabalhos de Tsytovich e De Angelis (1999), Ignatov (1998), Trigger e Schram (1999) e De Juli e Schneider (1998).

#### 3.1 A função densidade e a equação de Klimontovich

Para descrever o plasma em termos de suas partículas individuais é definida a função densidade no espaço de fase, a qual descreve a posição e velocidade de cada partícula, dada por

$$N_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sum_{i=1}^{\bar{N}_\alpha} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha i}(t)] \delta[\vec{p} - \vec{p}_{\alpha i}(t)], \quad (3.1)$$

onde  $\vec{r}_{\alpha i}(t)$  e  $\vec{p}_{\alpha i}(t)$  são, respectivamente, os vetores posição e momentum de uma dada partícula  $i$  da espécie  $\alpha$  no instante  $t$ . A integração da equação (3.1) sobre todo espaço de fase resulta no número total de partículas da espécie  $\alpha$ ,

$$\bar{N}_\alpha = \int N_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3r d^3p. \quad (3.2)$$

As trajetórias individuais de cada partícula são calculadas através das equações de movimento

$$\frac{d\vec{r}_{\alpha i}}{dt} = \frac{\vec{p}_{\alpha i}}{m_\alpha}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\vec{p}_{\alpha i}}{dt} = q_\alpha \left[ \vec{E}^m(\vec{r}_{\alpha i}, t) + \frac{\vec{p}_{\alpha i}}{m_\alpha c} \times \vec{B}^m(\vec{r}_{\alpha i}, t) \right], \quad (3.4)$$

onde  $\vec{E}^m$  e  $\vec{B}^m$  representam a intensidade dos campos elétrico e magnético microscópicos, onde o índice  $m$  enfatiza que estamos trabalhando com os valores microscópicos exatos dos

campos e não seus valores médios. Esses campos são dados pelos campos autoconsistentes  $\vec{E}^{ac}$  e  $\vec{B}^{ac}$  gerados por todas as partículas do plasma, exceto a partícula  $i$ , somados aos campos  $\vec{E}^{ext}$  e  $\vec{B}^{ext}$  gerados por fontes externas:

$$\begin{aligned}\vec{E}^m &= \vec{E}^{ac} + \vec{E}^{ext}, \\ \vec{B}^m &= \vec{B}^{ac} + \vec{B}^{ext}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Temos também, pelas equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \vec{E}^m(\vec{r}, t) = 4\pi(\rho^{ac}(\vec{r}, t) + \rho^{ext}(\vec{r}, t)), \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}^m(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \vec{E}^m(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^m(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \vec{B}^m(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^m(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\vec{j}^{ac}(\vec{r}, t) + \vec{j}^{ext}(\vec{r}, t)), \quad (3.9)$$

onde  $\rho^{ext}$  e  $\vec{j}^{ext}$  são as densidades de carga e corrente associadas a fontes e externas, e

$$\rho^{ac}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int N_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p \quad (3.10)$$

$$\vec{j}^{ac}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \vec{p} N_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p \quad (3.11)$$

são as densidades de carga e corrente microscópicas geradas pelas partículas do sistema, sendo que a soma em  $\alpha$  indica uma soma de todas as espécies do plasma.

Uma equação exata para evolução temporal do plasma é obtida calculando a derivada temporal da função densidade, ou seja,

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\bar{N}_{\alpha}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha i}(t)] \right) \delta[\vec{p} - \vec{p}_{\alpha i}(t)] + \sum_{i=1}^{\bar{N}_{\alpha}} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha i}(t)] \left( \frac{\partial}{\partial t} \delta[\vec{p} - \vec{p}_{\alpha i}(t)] \right). \quad (3.12)$$

As derivadas das deltas são calculadas utilizando a regra da cadeia, sabendo que

$$\delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha i}(t)] = \delta[x - x_{\alpha i}(t)] \delta[y - y_{\alpha i}(t)] \delta[z - z_{\alpha i}(t)], \quad (3.13)$$

considerando a coordenada  $x$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta[x - x_{\alpha i}(t)] = \frac{d\delta[x - x_{\alpha i}(t)]}{d[x - x_{\alpha i}(t)]} \cdot \frac{\partial[x - x_{\alpha i}(t)]}{\partial t}, \quad (3.14)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta[x - x_{\alpha i}(t)] = \frac{d\delta[x - x_{\alpha i}(t)]}{d[x - x_{\alpha i}(t)]} \cdot \frac{\partial[x - x_{\alpha i}(t)]}{\partial x} = \frac{d\delta[x - x_{\alpha i}(t)]}{d[x - x_{\alpha i}(t)]}, \quad (3.15)$$

portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta[x - x_{\alpha i}(t)] = \frac{\partial}{\partial x} \delta[x - x_{\alpha i}(t)] \cdot \frac{\partial[x - x_{\alpha i}(t)]}{\partial t} = -\frac{dx_{\alpha i}(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \delta[x - x_{\alpha i}(t)]. \quad (3.16)$$

Generalizando para o caso vetorial,

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha i}(t)] = -\frac{d\vec{r}_{\alpha i}(t)}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{\alpha i}(t)], \quad (3.17)$$

e, similarmente,

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta[\vec{p} - \vec{p}_{\alpha i}(t)] = -\frac{d\vec{p}_{\alpha i}(t)}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \delta[\vec{p} - \vec{p}_{\alpha i}(t)]. \quad (3.18)$$

Substituindo em (3.12), utilizando as equações de movimento (3.3) e (3.4) e fazendo  $\vec{r}_{\alpha i}, \vec{p}_{\alpha i} \Rightarrow \vec{r}, \vec{p}$  (propriedade das funções delta), podemos escrever

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \nabla N_{\alpha} + q_{\alpha} \left[ \vec{E}^m + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}^m \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} N_{\alpha} = 0. \quad (3.19)$$

A equação (3.19) é conhecida como a equação de Klimontovich e pode ser interpretada como uma lei de conservação de partículas no espaço de fase. Esta equação contém a informação da órbita de todas as partículas e, junto com as equações de Maxwell, constitui uma descrição exata do plasma.

Também podemos interpretar (3.19) como uma lei de conservação que expressa a incompressibilidade do plasma através da equação de Liouville

$$\frac{dN_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(N_{\alpha} \dot{\vec{r}}) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}}(N_{\alpha} \dot{\vec{p}}) = 0, \quad (3.20)$$

onde o ponto acima de uma variável indica sua derivada temporal.

## 3.2 Funções distribuição e de correlação

A complexidade da equação de Klimontovich torna inviável sua utilização prática. Por isso, ao invés de utilizar um espaço de seis dimensões para descrever  $N$  partículas, onde  $N = \sum_{\alpha} \bar{N}_{\alpha}$  é o número total de partículas, será considerado um *ensemble* de subsistemas idênticos compostos pelas partículas do plasma e identificados por um ponto num espaço de fase de  $6N$  dimensões, cada um desses pontos representa um estado possível para o ensemble num instante de tempo.

Utilizando a variável de seis dimensões  $\vec{X} = (\vec{r}, \vec{p})$  para simplificar a notação, as equações (3.1) e (3.2) podem ser escritas como

$$N_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t) = N_{\alpha}(\vec{X}, t) = \sum_{i=1}^{\bar{N}_{\alpha}} \delta[\vec{X} - \vec{X}_{\alpha i}(t)], \quad (3.21)$$

$$\bar{N}_{\alpha} = \int N_{\alpha}(\vec{X}, t) d^6 X. \quad (3.22)$$

Definindo uma função distribuição das coordenadas e momenta de todas as partículas do sistema como  $f_N$ , temos que

$$f_N(\vec{X}_{\alpha 1}, \vec{X}_{\alpha 2}, \dots, \vec{X}_{\alpha \bar{N}_{\alpha}}, \vec{X}_{\beta 1}, \dots, \vec{X}_{\beta \bar{N}_{\beta}}, \dots, t) d^6 X_{\alpha 1} \dots d^6 X_{\alpha \bar{N}_{\alpha}} d^6 X_{\beta 1} \dots d^6 X_{\beta \bar{N}_{\beta}} \dots \quad (3.23)$$

determina a probabilidade de as coordenadas e momenta das partículas, num instante  $t$ , possuírem valores  $\vec{X}_{\alpha 1}, \dots, \vec{X}_{\alpha \bar{N}_\alpha}, \vec{X}_{\beta 1}, \dots, \vec{X}_{\beta \bar{N}_\beta}, \dots$  nos respectivos intervalos  $d^6 X_{\alpha 1}, \dots, d^6 X_{\alpha \bar{N}_\alpha}, d^6 X_{\beta 1}, \dots$ . A normalização de (3.23) é dada por

$$\int f_N d^6 X_T = 1, \quad (3.24)$$

onde  $d^6 X_T = d^6 X_{\alpha 1} \dots d^6 X_{\alpha \bar{N}_\alpha} d^6 X_{\beta 1} \dots d^6 X_{\beta \bar{N}_\beta} \dots$ .

Caso a integração em  $f_N$  não seja feita nas coordenadas e momenta de todas as partículas, obtém-se uma função reduzida. Por exemplo, a integração sobre todas partículas exceto a partícula ‘ $\alpha 1$ ’ resulta na seguinte função distribuição de uma partícula da espécie  $\alpha$

$$f_\alpha(\vec{X}_{\alpha 1}, t) = \bar{N}_\alpha \int f_N d^6 X_{\alpha 2} \dots d^6 X_{\alpha \bar{N}_\alpha} d^6 X_{\beta 1} \dots d^6 X_{\beta \bar{N}_\beta} \dots = \bar{N}_\alpha \int f_N d^6 X_{T-\alpha 1}, \quad (3.25)$$

onde a normalização foi definida de modo que (Sitenko, 1982)

$$\int f_\alpha(\vec{X}_{\alpha 1}, t) dX_{\alpha 1} = \bar{N}_\alpha \quad (3.26)$$

Com essa definição, a probabilidade de encontrar uma partícula da espécie  $\alpha$  no ponto  $\vec{X}$  dentro do elemento de volume  $d^6 X$  num instante  $t$  é dada por  $f_\alpha(\vec{X}, t) d^6 X / \bar{N}_\alpha$ . Esta é a forma mais reduzida possível de  $f_N$  e nos dá menos informações do sistema. Nota-se que a interação de outra partícula do plasma não está contida na função reduzida de uma partícula. Pode-se adicionar tal informação escrevendo a função distribuição de duas partículas

$$f_{\alpha\beta}(\vec{X}_{\alpha 1}, \vec{X}_{\beta 1}, t) = \bar{N}_\alpha (\bar{N}_\beta - \delta_{\alpha\beta}) \int f_N d^6 X_{T-\alpha 1-\beta 1}, \quad (3.27)$$

que determina a quantidade  $f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) d^6 X d^6 X' / \bar{N}_\alpha (\bar{N}_\beta - \delta_{\alpha\beta})$  como a probabilidade conjunta de uma partícula da espécie  $\alpha$  estar no ponto  $\vec{X}$  em  $d^6 X$  e uma partícula da espécie  $\beta$  estar no ponto  $\vec{X}'$  em  $d^6 X'$ . Esta é uma função menos reduzida e mais completa que  $f_\alpha$  pois inclui a correlação de duas partículas. Similarmente, pode-se incluir a interação de uma terceira partícula com uma função  $f_{\alpha\beta\gamma}$  e assim por diante.

Uma forma conveniente de escrever as funções distribuição é em termos da função de correlação  $g$ , resultando na expansão de Mayer (Krall et al., 1973)

$$f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) = f_\alpha(\vec{X}, t) f_\beta(\vec{X}', t) + g_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t), \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta\gamma}(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'', t) &= f_\alpha(\vec{X}, t) f_\beta(\vec{X}', t) f_\gamma(\vec{X}'', t) + f_\alpha(\vec{X}, t) g_{\beta\gamma}(\vec{X}', \vec{X}'', t) \\ &+ f_\beta(\vec{X}', t) g_{\alpha\gamma}(\vec{X}, \vec{X}'', t) + f_\gamma(\vec{X}'', t) g_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) + g_{\alpha\beta\gamma}(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'', t), \end{aligned} \quad (3.29)$$

⋮

sendo que  $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta\gamma} = \dots = 0$  para o caso de partículas independentes entre si.

### 3.3 Médias de ensemble

A vantagem de trabalhar com a função distribuição  $f_N$  e suas formas reduzidas está em sua abordagem estatística, sendo possível encontrar valores médios de quantidades microscópicas através da média de ensemble, de modo que não é necessário o conhecimento completo da função  $f_N$  no caso em que estamos interessados em quantidades macroscópicas que são independentes das correlações entre as partículas ou que dependem apenas da correlação de algumas delas, sendo necessário apenas o conhecimento da função distribuição reduzida de uma ou poucas partículas.

Sendo assim, ao invés de trabalhar diretamente com a equação de Klimontovich (3.19) faz-se a sua média de ensemble, sendo que a média de uma quantidade qualquer  $G(N_\alpha, N_\beta, \dots)$  é dada por

$$\langle G(N_\alpha, N_\beta, \dots) \rangle = \int f_N G(N_\alpha, N_\beta, \dots) d^6 X_T. \quad (3.30)$$

Assim, a média de ensemble da equação (3.19) fica

$$\frac{\partial \langle N_\alpha \rangle}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \nabla \langle N_\alpha \rangle + q_\alpha \left\langle \left[ \vec{E}^m + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}^m \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} N_\alpha \right\rangle = 0, \quad (3.31)$$

onde a média da função densidade (3.21) é

$$\langle N_\alpha(\vec{X}, t) \rangle = \int f_N N_\alpha(\vec{X}, t) d^6 X_T = \int f_N \sum_{i=1}^{\bar{N}_\alpha} \delta[\vec{X} - \vec{X}_{\alpha i}(t)] d^6 X_T, \quad (3.32)$$

sendo que, para partículas idênticas de uma mesma espécie, teremos  $\bar{N}_\alpha$  termos idênticos, de modo que podemos escrever

$$\langle N_\alpha(\vec{X}, t) \rangle = \bar{N}_\alpha \int f_N \delta[\vec{X} - \vec{X}_{\alpha 1}(t)] d^6 X_T = f_\alpha(\vec{X}, t), \quad (3.33)$$

onde  $f_\alpha$  é a função reduzida de uma partícula da espécie  $\alpha$ . Similarmente, a função reduzida de duas partículas estará relacionada à média do produto de duas funções densidades por meio da expressão (Sitenko, 1982; Krall et al., 1973)

$$\langle N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) \rangle = f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) + \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{X} - \vec{X}') f_\alpha(\vec{X}, t). \quad (3.34)$$

Da mesma forma, a média do produto de três funções densidades estará relacionada à função reduzida de três partículas

$$\begin{aligned} \langle N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) N_\gamma(\vec{X}'', t) \rangle &= f_{\alpha\beta\gamma}(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'', t) \\ &\quad + \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{X} - \vec{X}') f_{\alpha\gamma}(\vec{X}, \vec{X}'', t) \\ &\quad + \delta_{\alpha\gamma} \delta(\vec{X} - \vec{X}'') f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) \\ &\quad + \delta_{\beta\gamma} \delta(\vec{X}' - \vec{X}'') f_{\alpha\gamma}(\vec{X}, \vec{X}'', t) \\ &\quad + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \delta(\vec{X} - \vec{X}') \delta(\vec{X}' - \vec{X}'') f_\alpha(\vec{X}, t), \end{aligned} \quad (3.35)$$

e assim sucessivamente.



### 3.3.1 Equações para um plasma de Coulomb

Para um plasma não relativístico podemos considerar a aproximação de Coulomb a qual ignora efeitos de retardo, ou seja, o estado do sistema num instante  $t$  é determinado pelas coordenadas e momenta das partículas no mesmo instante  $t$ .

Para simplificar, vamos considerar que não há campos externos de modo que os campos microscópicos são devidos apenas aos campos autoconsistentes das partículas do plasma, os campos externos podem ser introduzidos novamente nas equações dos campos médios. Sendo assim, os campos autoconsistentes gerados pelas partículas são descritos pelas expressões de Jefimenko (Jackson, 1999) que, na aproximação não relativística, são dadas por

$$\vec{E}^m(\vec{r}, t) = -\nabla_{\vec{r}} \int \frac{\rho^{ac}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad (3.36)$$

$$\vec{B}^m(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \nabla_{\vec{r}} \times \int \frac{\vec{j}^{ac}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (3.37)$$

Substituindo as densidade de carga e corrente pelas equações (3.10) e (3.11), ficamos com

$$\vec{E}^m(\vec{r}, t) = -\sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \nabla_{\vec{r}} \frac{N_{\alpha}(\vec{X}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^6X', \quad (3.38)$$

$$\vec{B}^m(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}c} \int \nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{p}' N_{\alpha}(\vec{X}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^6X'. \quad (3.39)$$

Inserindo essas expressões na média de ensemble da equação de Klimontovich (3.31) e trocando o índice mudo da soma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle N_{\alpha} \rangle}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \nabla_{\vec{r}} \langle N_{\alpha} \rangle - \sum_{\beta} q_{\alpha} q_{\beta} \int d^6X' \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \nabla_{\vec{p}} \langle N_{\alpha}(\vec{X}, t) N_{\beta}(\vec{X}', t) \rangle \\ + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}c} \sum_{\beta} \frac{q_{\beta}}{m_{\beta}c} \int d^6X' \vec{p} \times \nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{p}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \nabla_{\vec{p}} \langle N_{\alpha}(\vec{X}, t) N_{\beta}(\vec{X}', t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Substituindo as médias das funções densidades pelas equações (3.33) e (3.34) e lembrando que o campo gerado pela própria partícula não está incluído nos valores dos campos autoconsistentes, de modo que o termo com a delta de Dirac na equação (3.34) é nulo, temos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \nabla_{\vec{r}} \right) f_{\alpha}(\vec{X}, t) = \sum_{\beta} q_{\alpha} q_{\beta} \int d^6X' \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) \\ - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}c} \sum_{\beta} \frac{q_{\beta}}{m_{\beta}c} \int d^6X' \vec{p} \times \nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{p}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

## 3.4 Hierarquia BBGKY

A equação (3.41) para a função  $f_{\alpha}$  não é uma equação fechada pois depende da função de duas partículas  $f_{\alpha\beta}$ . Por isso, é necessário uma equação que descreva  $f_{\alpha\beta}$  para

encontrar a solução de  $f_\alpha$ . Para isso, nota-se inicialmente que

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) \rangle = \left\langle \frac{\partial N_\alpha(\vec{X}, t)}{\partial t} N_\beta(\vec{X}', t) + N_\alpha(\vec{X}, t) \frac{\partial N_\beta(\vec{X}', t)}{\partial t} \right\rangle, \quad (3.42)$$

utilizando a equação de Klimontovich (3.19),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) \rangle = & - \left\langle \left( \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} + q_\alpha \left[ \vec{E}^m(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}^m(\vec{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}'} + q_\alpha \left[ \vec{E}^m(\vec{r}', t) + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha c} \times \vec{B}^m(\vec{r}', t) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}'} \right) N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Para um plasma de Coulomb, os termos dos campos elétricos e magnéticos são escritos de acordo com as equações (3.38) e (3.39), por exemplo,

$$\begin{aligned} & \left\langle q_\alpha \left[ \vec{E}^m(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}^m(\vec{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) \right\rangle = \\ & - \sum_\gamma \int d^6 X'' \nabla_{\vec{r}} \frac{q_\alpha q_\gamma}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \cdot \nabla_{\vec{p}} \langle N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) N_\gamma(\vec{X}'', t) \rangle \\ & + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \sum_\gamma \frac{q_\gamma}{m_\gamma c} \int d^6 X'' \vec{p} \times \nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{p}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \cdot \nabla_{\vec{p}} \langle N_\alpha(\vec{X}, t) N_\beta(\vec{X}', t) N_\gamma(\vec{X}'', t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assim, substituindo as médias pelas equações (3.34) e (3.35) e notando novamente que os termos com as deltas de Dirac (referentes aos campos das próprias partículas) são nulos, a equação (3.43) fica

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}'} \right) f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) = \\ & + \sum_\gamma \int d^6 X'' \left( \nabla_{\vec{r}} \frac{q_\alpha q_\gamma}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \cdot \nabla_{\vec{p}} + \nabla_{\vec{r}'} \frac{q_\alpha q_\gamma}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \cdot \nabla_{\vec{p}'} \right) f_{\alpha\beta\gamma}(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'', t) \\ & - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \sum_\gamma \frac{q_\gamma}{m_\gamma c} \int d^6 X'' \left( \vec{p} \times \nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{p}''}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \cdot \nabla_{\vec{p}} \right. \\ & \left. + \vec{p}' \times \nabla_{\vec{r}'} \times \frac{\vec{p}''}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} \cdot \nabla_{\vec{p}'} \right) f_{\alpha\beta\gamma}(\vec{X}, \vec{X}', \vec{X}'', t). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nota-se que a equação para  $f_{\alpha\beta}$  também não é fechada, sendo necessário uma equação para a função reduzida de três partículas  $f_{\alpha\beta\gamma}$  a fim de resolver o sistema. Ao repetir o procedimento será obtida uma equação para  $f_{\alpha\beta\gamma}$  que dependerá da função reduzida de quatro partículas  $f_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , e assim sucessivamente. Este conjunto de equações forma a hierarquia BBGKY (Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) na qual (3.41) e (3.45) são as duas primeiras equações. Resolver esta cadeia de equações é tão complicado quanto resolver a equação de Klimontovich. Na prática, as aplicações são feitas em situações onde algum critério permita cortar a cadeia ficando com um número manejável de equações.

### 3.4.1 Corte da cadeia de equações

Vamos agora introduzir um parâmetro relacionado às interações das partículas a fim de usá-lo como critério para cortar a cadeia de equações da hierarquia BBGKY.

No capítulo dois foi mencionado que plasmas possuem a habilidade de blindar potenciais elétricos, propriedade quantificada pelo comprimento de Debye (2.3) que define o raio da esfera criada pelas partículas ao redor do potencial. Para essa blindagem acontecer é necessário um número muito grande de partículas dentro da esfera de Debye. O número de partículas dentro de uma esfera de raio  $\lambda_D$  é dado por

$$N_D = \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3, \quad (3.46)$$

onde  $n$  é a densidade de partículas. Portanto, como esse número deve ser grande,  $N_D \gg 1$ , ou seja,

$$n \lambda_D^3 \gg 1. \quad (3.47)$$

Uma maneira alternativa de estabelecer este critério é através da quantidade

$$g \equiv \frac{1}{n \lambda_D^3} \ll 1 \quad (3.48)$$

conhecida como parâmetro do plasma.

Para relacionar este parâmetro do plasma com as interações entre as partículas notamos primeiramente que a razão entre a energia média de interação entre dois elétrons e a energia cinética de um deles é

$$\frac{\langle U \rangle}{\langle K \rangle} = \frac{\langle e^2/r \rangle}{\langle m_e v^2/2 \rangle}, \quad (3.49)$$

onde  $\langle r \rangle \simeq n^{-1/3}$  é a distância média entre as partículas, enquanto que  $\langle m_e v^2/2 \rangle \simeq k_B T$ , assim,

$$\frac{\langle U \rangle}{\langle K \rangle} \simeq \frac{e^2 n^{1/3}}{k_B T}. \quad (3.50)$$

Agora, nota-se que o comprimento de Debye (2.3) é proporcional a  $(k_B T/n)^{1/2}$  de modo que

$$\lambda_D^3 \sim \frac{(k_B T)^{3/2}}{n^{3/2}} \Rightarrow g \sim \frac{n^{1/2}}{(k_B T)^{3/2}}. \quad (3.51)$$

Por outro lado,

$$\left( \frac{\langle U \rangle}{\langle K \rangle} \right)^{3/2} \sim \frac{n^{1/2}}{(k_B T)^{3/2}}, \quad (3.52)$$

ou seja, o parâmetro do plasma  $g$  é da mesma ordem da razão entre as energias potencial e cinética médias. Sendo assim, o critério  $g \ll 1$  implica que a energia de interação entre as partículas do plasma é pequena frente a suas energias cinéticas, ou seja, a correlação entre as partículas é fraca.

Seguindo essa discussão, a expansão de Mayer pode ser suposta como uma série de funções dependentes de ordens cada vez maiores do parâmetro  $g$ , sendo que as funções de correlação obedecem a

$$f_\alpha \sim \mathcal{O}(1), \quad g_{\alpha\beta} \sim \mathcal{O}(g), \quad g_{\alpha\beta\gamma} \sim \mathcal{O}(g^2), \quad g_{\alpha\beta\gamma\delta} \sim \mathcal{O}(g^3), \quad \dots \quad (3.53)$$

Essas hipóteses permitem desprezar termos de certa ordem em  $g$  e cortar a cadeia de equações.

### 3.5 Equação de Vlasov

A aproximação mais simples do sistema de equações é obtida quando todas as correlações entre as partículas são desprezadas. Essa aproximação é bastante usada quando o tempo característico dos processos em estudo é muito menor que o tempo necessário para o sistema restabelecer seu estado de equilíbrio através das colisões entre as partículas.

Então, desprezando termos de ordem  $g$  temos para a função reduzida de duas partículas (3.28), onde  $g_{\alpha\beta} = 0$ ,

$$f_{\alpha\beta}(\vec{X}, \vec{X}', t) = f_\alpha(\vec{X}, t) f_\beta(\vec{X}', t), \quad (3.54)$$

substituindo na primeira equação da hierarquia (3.41) ficamos com

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} \right) f_\alpha(\vec{X}, t) &= \sum_\beta q_\alpha q_\beta \int d^6 X' \nabla_{\vec{r}} \frac{f_\beta(\vec{X}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \nabla_{\vec{p}} f_\alpha(\vec{X}, t) \\ &\quad - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \sum_\beta \frac{q_\beta}{m_\beta c} \int d^6 X' \vec{p} \times \nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{p}' f_\beta(\vec{X}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \nabla_{\vec{p}} f_\alpha(\vec{X}, t). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Podemos identificar as médias dos campos eletromagnéticos fazendo a média de ensemble das equações (3.38) e (3.39) (onde não há campos externos):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \equiv \langle \vec{E}^m(\vec{r}, t) \rangle = - \sum_\beta q_\beta \int \nabla_{\vec{r}} \frac{f_\beta(\vec{X}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^6 X', \quad (3.56)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \equiv \langle \vec{B}^m(\vec{r}, t) \rangle = \sum_\beta \frac{q_\beta}{m_\beta c} \int \nabla_{\vec{r}} \times \frac{\vec{p}' f_\beta(\vec{X}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^6 X'. \quad (3.57)$$

Substituindo os campos médios na equação (3.55) e generalizando para incluir campos externos, obtemos a equação de Vlasov

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} + q_\alpha \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} \right) f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0, \quad (3.58)$$

sendo os campos eletromagnéticos expressos pelas equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p + 4\pi \rho_0(\vec{r}, t), \quad (3.59)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.60)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.61)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \vec{p} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3p + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0(\vec{r}, t), \quad (3.62)$$

onde  $\rho_0$  e  $\vec{j}_0$  são as densidades médias de carga e corrente externas.

### 3.6 Equações cinéticas para um plasma empoeirado

O sistema Vlasov-Maxwell derivado acima não é apropriado para um plasma empoeirado mesmo que se despreze todas as interações coulombianas entre as partículas de poeira e do plasma já que nesses sistemas, em geral, a evolução da função distribuição das partículas do plasma deve considerar que estas podem ser absorvidas pelos grãos de poeira. Além disso, os grãos podem agir como fontes de elétrons através de fotoemissão ou emissão secundária, por exemplo. As equações de Maxwell também devem ser modificadas a fim de adicionar o efeito da carga dos grãos de poeira nos campos autoconsistentes e uma nova equação cinética que descreva a evolução da população das partículas de poeira deve ser adicionada.

Derivar sistematicamente essas equações é uma tarefa difícil. Uma abordagem mais intuitiva e análoga aos plasmas convencionais foi feita por Ignatov (1998) e Trigger e Schram (1999) enquanto que um procedimento matemático mais rigoroso pode ser encontrado nos trabalhos de Tsytoich e De Angelis (1999) e Schram et al. (2000). Nas aproximações consideradas neste trabalho, onde despreza-se as interações coulombianas que não levam à variação da carga da poeira, as equações cinéticas das referências citadas se equivalem.

Para descrever a distribuição das partículas de poeira é introduzida uma nova variável independente  $q$  que descreve a carga elétrica variável dos grãos. Sendo assim, teremos uma função densidade no espaço de fase para os grãos de poeira, analogamente à equação (3.1),

$$N_d(\vec{r}, \vec{p}, q, t) = \sum_{i=1}^{\bar{N}_d} \delta[\vec{r} - \vec{r}_{di}(t)] \delta[\vec{p} - \vec{p}_{di}(t)] \delta[q - q_{di}(t)], \quad (3.63)$$

sendo  $\vec{r}_{di}(t)$ ,  $\vec{p}_{di}(t)$  e  $q_{di}(t)$ , respectivamente, a posição, momentum e carga elétrica do grão de poeira  $i$  no instante  $t$ , e  $\bar{N}_d$  o número total de partículas de poeira. A função  $N_d$  também deve obedecer à equação de Liouville similarmente à função das partículas do plasma (3.20) adicionando um termo referente à nova variável  $q$ ,

$$\frac{dN_d}{dt} = \frac{\partial N_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(N_d \dot{\vec{r}}) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}}(N_d \dot{\vec{p}}) + \frac{\partial}{\partial q}(N_d \dot{q}) = 0, \quad (3.64)$$

onde

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m_d}, \quad (3.65)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left[ \vec{E}^m(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_d c} \times \vec{B}^m(\vec{r}, t) \right], \quad (3.66)$$

$$\frac{dq}{dt} = I = \sum_{\alpha} I_{\alpha} + I_{\nu}, \quad (3.67)$$

sendo  $I$  a corrente elétrica total incidente no grão de poeira,  $I_{\alpha}$  e  $I_{\nu}$  são as correntes de absorção (2.14) e de fotoemissão (2.35).

Com isso, fazendo a média de (3.64) e desprezando as interações coulombianas entre os grãos de poeira e as partículas do plasma obtém-se a equação cinética para a função distribuição  $f_d$  das partículas de poeira (Tsytovich; De Angelis, 1999)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_d} \cdot \nabla_{\vec{r}} + q \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_d c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} \right) f_d + \frac{\partial}{\partial q} (I f_d) = 0. \quad (3.68)$$

Para a equação cinética das partículas do plasma, modificamos a equação de Vlasov (3.58) adicionando uma integral colisional  $J_{\alpha}^{abs}$  que atua como sumidouro de partículas devido à absorção destas pelos grãos de poeira juntamente com um termo de fonte  $J_{\alpha}^F$  devido à emissão de elétrons por efeito fotoelétrico. O resultado disso, desprezando-se as interações coulombianas entre as partículas do plasma e poeira, é

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \nabla_{\vec{r}} + q_{\alpha} \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} \right) f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{p}, t) = J_{\alpha}^{abs} + J_{\alpha}^F, \quad (3.69)$$

sendo o termo de absorção dado por (Vladimirov, 1994; De Juli; Schneider, 1998)

$$J_{\alpha}^{abs} = - \int dq \frac{p}{m_{\alpha}} \sigma_{\alpha}(p, q) (f_d f_{\alpha} - f_{d0} f_{\alpha 0}), \quad (3.70)$$

onde  $f_{d0}$  e  $f_{\alpha 0}$  são, respectivamente, as funções distribuição das partículas de poeira e do plasma no equilíbrio, e  $\sigma_{\alpha}$  é a seção de choque (2.13). Está sendo suposto que a carga da poeira é muito maior que das partículas do plasma, permitindo adotar uma distribuição contínua para a mesma. O termo de fonte de partículas foi modelado por Galvão e Ziebell (2012) seguindo o modelo de absorção (3.70) e da corrente de fotoemissão (2.33),

$$J_{\alpha}^F = \delta_{\alpha e} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_{\alpha}(\nu, \mu) \int dq \sigma_{\nu}(p, q) (f_d - f_{d0}) \times \left( \frac{p_x}{m_{\alpha}} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_{\alpha}} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) F(p, \xi), \quad (3.71)$$

onde

$$\sigma_{\nu}(p, q) = \frac{2\pi}{3} a^2 H \left( 1 - \frac{2m_e e q}{a p^2} H(q) \right). \quad (3.72)$$

Como a massa das partículas de poeira é muito maior que a das partículas do plasma, considera-se a aproximação de grãos imóveis  $f_d(\vec{r}, \vec{p}, q, t) \Rightarrow f_d(\vec{r}, q, t)$  (De Juli;

Schneider, 1998), restringindo o modelo para o estudo de ondas com frequências muito maiores que a frequência característica da poeira, excluindo modos de ondas que surgem da dinâmica dos grãos. Sendo assim, o sistema de equações para um plasma empoeirado pode ser escrito como

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(I f_d) = 0, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} + q_\alpha \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} \right) f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) = \\ & - \int dq \frac{p}{m_\alpha} \sigma_\alpha(p, q) (f_d f_\alpha - f_{d0} f_{\alpha 0}) + \delta_{\alpha e} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \int dq \sigma_\nu(p, q) (f_d - f_{d0}) \\ & \times \left( \frac{p_x}{m_\alpha} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_\alpha} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) F(p, \xi), \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int d^3 p f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) + 4\pi \int dq q f_d(\vec{r}, q, t) + 4\pi \rho_0(\vec{r}, t), \quad (3.75)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.76)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.77)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int d^3 p \vec{p} f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0(\vec{r}, t). \quad (3.78)$$

## 4 Tensor dielétrico para plasmas empoeirados magnetizados

Neste capítulo será feita uma revisão da dedução do tensor dielétrico para um plasma empoeirado na presença de um campo magnético externo com as partículas de poeira expostas à radiação eletromagnética. A obtenção do tensor é importante para o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas no plasma, o qual será feito no próximo capítulo.

A abordagem feita aqui é baseada na tese de doutorado de De Juli (2000), feita sob orientação da Dra. Ruth de Souza Schneider, e na dissertação de mestrado de Galvão (2011) sob orientação do Dr. Luiz Fernando Ziebell, onde é obtido o tensor dielétrico para o caso de um plasma empoeirado magnetizado com diferentes populações (tamanhos) de grãos de poeira sendo carregados por absorção de partículas do plasma e por fotoionização.

Neste trabalho iremos considerar apenas uma população de poeira. Por ser uma dedução matematicamente densa, e que também pode ser encontrada nas referências citadas acima, parte do desenvolvimento será apresentada nos apêndices, deixando para este capítulo os pontos mais fundamentais da obtenção do tensor dielétrico.

### 4.1 Linearização do sistema de equações

O conjunto de equações (3.73) a (3.78) descreve fenômenos ocorridos em escalas de tempo muito menores do que os tempos típicos de colisões. Porém, por se tratar de um sistema não linear, devido aos termos que envolvem os produtos dos campos e das distribuições, é difícil resolvê-lo.

Podemos utilizar o método da linearização para tratar fenômenos considerados como pequenos afastamentos de situações de equilíbrio. Para isso, expressamos as seguintes quantidades em termos de seus valores de equilíbrio (identificados pelo subíndice “0”) adicionados a uma pequena perturbação (subíndice “1”):

$$f_d(\vec{r}, q, t) = f_{d0}(q) + \varepsilon f_{d1}(\vec{r}, q, t), \quad (4.1)$$

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{p}, t) = f_{\alpha 0}(\vec{p}) + \varepsilon f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (4.2)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 + \varepsilon \vec{E}_1(\vec{r}, t), \quad (4.3)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 + \varepsilon \vec{B}_1(\vec{r}, t). \quad (4.4)$$

Essas quantidades são substituídas no sistema Vlasov-Maxwell de equações e os termos não lineares, de ordem  $\varepsilon^2$ , são desprezados. Considerando um plasma homogêneo



magnetizado, as cargas estão uniformemente distribuídas de modo que o campo elétrico no equilíbrio  $\vec{E}_0$  é nulo e o campo magnético  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$  é uniforme. Com isso, teremos o seguinte sistema de equações em ordem zero:

$$\frac{\partial}{\partial q}(I_0 f_{d0}) = 0, \quad (4.5)$$

$$(\vec{p} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{\alpha 0}(\vec{p}) = 0, \quad (4.6)$$

$$\sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p f_{\alpha 0}(\vec{p}) + \int dq q f_{d0}(q) = 0, \quad (4.7)$$

$$\sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int d^3 p \vec{p} f_{\alpha 0}(\vec{p}) = 0, \quad (4.8)$$

e outro em ordem um:

$$\frac{\partial f_{d1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}(I_1(\vec{r}, q, t) f_{d0}(q) + I_0(q) f_{d1}(\vec{r}, q, t)) = 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha}} \cdot \nabla_{\vec{r}} + q_{\alpha} \left[ \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} \right) f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t) + \nu_{\alpha d}^0(p) f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \\ & - \left( q_{\alpha} \left[ \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \frac{\vec{p}}{m_{\alpha} c} \times \vec{B}_1(\vec{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} + \nu_{\alpha d}^1(\vec{r}, p, t) \right) f_{\alpha 0}(\vec{p}) + \nu_F^1(\vec{r}, p, t) F(p, \xi), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_1(\vec{r}, t) = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t) + 4\pi \int dq q f_{d1}(\vec{r}, q, t), \quad (4.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1(\vec{r}, t) = 0, \quad (4.12)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.13)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int d^3 p \vec{p} f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (4.14)$$

onde

$$\nu_{\alpha d}^0(p) = \int dq \sigma_{\alpha}(p, q) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{d0}(q), \quad (4.15)$$

$$\nu_{\alpha d}^1(\vec{r}, p, t) = \int dq \sigma_{\alpha}(p, q) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{d1}(\vec{r}, q, t), \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \nu_F^1(\vec{r}, p, t) &= \delta_{\alpha e} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \int dq \sigma_{\nu}(p, q) \\ &\times \left( \frac{p_x}{m_{\alpha}} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_{\alpha}} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) f_{d1}(\vec{r}, q, t), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$I_0 = \sum_{\alpha} I_{\alpha 0} + I_{\nu}, \quad (4.18)$$

$$I_1 = \sum_{\alpha} I_{\alpha 1}, \quad (4.19)$$

sendo

$$\sigma_\alpha(p, q) = \pi a^2 \left( 1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{ap^2} \right) H \left( 1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{ap^2} \right), \quad (4.20)$$

$$\sigma_\nu(p, q) = \frac{2\pi}{3} a^2 H \left( 1 - \frac{2m_e e q}{ap^2} H(q) \right), \quad (4.21)$$

$$I_{\alpha 0}(q) = \int d^3 p q_\alpha \sigma_\alpha(p, q) \frac{p}{m_\alpha} f_{\alpha 0}(\vec{p}), \quad (4.22)$$

$$I_{\alpha 1}(\vec{r}, q, t) = \int d^3 p q_\alpha \sigma_\alpha(p, q) \frac{p}{m_\alpha} f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (4.23)$$

Podemos encontrar uma solução para  $f_{\alpha 1}$  definindo uma função auxiliar (De Juli; Schneider, 1998)

$$f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t) = e^{-\nu_{\alpha d}^0(p)t} f_\alpha^{aux}(\vec{r}, \vec{p}, t), \quad (4.24)$$

ao substituí-la em (4.10) temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}} + q_\alpha \left[ \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} \right) f_\alpha^{aux}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \\ \left( -q_\alpha \left[ \vec{E}_1 + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \vec{B}_1 \right] \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{\alpha 0} - \nu_{\alpha d}^1 f_{\alpha 0} + \nu_F^1 F(p, \xi) \right) e^{\nu_{\alpha d}^0(p)t}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

que pode ser resolvida pelo método das características, o qual consiste em integrar a equação acima em relação ao tempo ao longo de um caminho no espaço de fase que coincide com a órbita de uma partícula carregada submetida aos campo  $\vec{E}_0 = 0$  e  $\vec{B}_0$ . Para isso, define-se as trajetórias características

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{\vec{p}'}{m_\alpha}, \quad \frac{d\vec{p}'}{dt'} = q_\alpha \left[ \vec{E}_0(\vec{r}', t') + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha c} \times \vec{B}_0(\vec{r}', t') \right], \quad (4.26)$$

lembrando que  $\vec{E}_0 = 0$  e  $\vec{B}_0$  é uniforme, essas equações estão sujeitas às condições de contorno

$$\vec{r}'(t' = t) = \vec{r}, \quad \vec{p}'(t' = t) = \vec{p}, \quad (4.27)$$

e tem como solução (De Juli; Schneider, 1998)

$$x' - x = -\frac{p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha} [\sin(\varphi - \Omega_\alpha \tau) - \sin(\varphi)], \quad (4.28)$$

$$y' - y = \frac{p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha} [\cos(\varphi - \Omega_\alpha \tau) - \cos(\varphi)], \quad (4.29)$$

$$z' - z = \frac{p_\parallel}{m_\alpha} \tau, \quad (4.30)$$

$$p'_x = p_\perp \cos(\varphi - \Omega_\alpha \tau), \quad (4.31)$$

$$p'_y = p_\perp \sin(\varphi - \Omega_\alpha \tau), \quad (4.32)$$

$$p'_z = p_\parallel, \quad (4.33)$$

onde  $\tau = t' - t$  e  $\Omega_\alpha = q_\alpha B_0 / m_\alpha c$  é a frequência de ciclotron de uma partícula da espécie  $\alpha$ .

Considerando  $f_\alpha^{aux}$  uma função de  $t'$  e as trajetórias não perturbadas (4.26), sua derivada total pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} f_\alpha^{aux}(\vec{r}', \vec{p}', t') &= \left( \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{d\vec{r}'}{dt'} \cdot \nabla_{\vec{r}'} + \frac{d\vec{p}'}{dt'} \cdot \nabla_{\vec{p}'} \right) f_\alpha^{aux}(\vec{r}', \vec{p}', t') \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{r}'} + q_\alpha \left[ \frac{\vec{p}'}{m_\alpha c} \times \vec{B}_0 \right] \cdot \nabla_{\vec{p}'} \right) f_\alpha^{aux}(\vec{r}', \vec{p}', t'), \end{aligned} \quad (4.34)$$

comparando com a equação (4.25),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} f_\alpha^{aux}(\vec{r}', \vec{p}', t') &= \left( -q_\alpha \left[ \vec{E}_1(\vec{r}', t') + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha c} \times \vec{B}_1(\vec{r}', t') \right] \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(\vec{p}') \right. \\ &\quad \left. - \nu_{\alpha d}^1(\vec{r}', \vec{p}', t') f_{\alpha 0}(\vec{p}') + \nu_F^1(\vec{r}', \vec{p}', t') F(\vec{p}', \xi) \right) e^{\nu_{\alpha d}^0(\vec{p}') t'}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Integrando esta equação em  $t'$  de  $-\infty$  a  $t$ , usando a condição

$$\lim_{t' \Rightarrow -\infty} f_\alpha^{aux}[\vec{r}'(t'), \vec{p}'(t'), t'] = 0, \quad (4.36)$$

e as condições de contorno (4.27), obtemos a função distribuição

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1}(\vec{r}, \vec{p}, t) &= -e^{-\nu_{\alpha d}^0(\vec{p}) t} \int_{-\infty}^t dt' e^{\nu_{\alpha d}^0(\vec{p}') t'} \left\{ q_\alpha \left[ \vec{E}_1(\vec{r}', t') + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha c} \times \vec{B}_1(\vec{r}', t') \right] \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(\vec{p}') \right. \\ &\quad \left. + \nu_{\alpha d}^1(\vec{r}', \vec{p}', t') f_{\alpha 0}(\vec{p}') - \nu_F^1(\vec{r}', \vec{p}', t') F(\vec{p}', \xi) \right\}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

A condição (4.36) essencialmente nos diz que a perturbação é nula para  $t' \Rightarrow -\infty$  e cresce lentamente até  $t' = t$ . A rigor, poderíamos ter suposto uma perturbação inicial em um tempo  $t_0$  e resolver a equação como um problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace e o contorno de Landau como caminho de integração (Krall et al., 1973; Landau, 1946). Ao invés disso, utilizamos a transformada de Fourier “ligando lentamente” a perturbação através de uma pequena parte imaginária positiva em  $\omega$ , já que a perturbação em termos das componentes de Fourier pode ser escrita na forma

$$\hat{f}_\alpha(\vec{k}, \vec{p}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \hat{f}_\alpha(\vec{k}, \vec{p}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_r t)} e^{\omega_i t}, \quad \omega_i > 0, \quad (4.38)$$

de modo que  $\hat{f}_\alpha \Rightarrow 0$  para  $t' \Rightarrow -\infty$ , e cresce lentamente com  $t'$  até  $t' = t$ .

## 4.2 Transformada de Fourier do sistema em primeira ordem

Nesta seção será feita uma análise do sistema de equações em primeira ordem (4.9)-(4.14) através da transformada de Fourier das variáveis perturbadas a fim de obter um sistema algébrico para obtenção do tensor dielétrico posteriormente. Seja  $A_1(\vec{r}, t)$  uma quantidade perturbada qualquer (pode ser  $f_{\alpha 1}$  ou  $\vec{E}_1$  por exemplo), sua transformada de Fourier é definida de forma que

$$\hat{A}(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r A_1(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (4.39)$$

e sua transformada inversa fica definida como

$$A_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \hat{A}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}. \quad (4.40)$$

Tomando a transformada de (4.37)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \hat{f}_\alpha(\vec{k}, \vec{p}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} &= -e^{-\nu_{\alpha d}^0(p)t} \int_{-\infty}^t dt' e^{\nu_{\alpha d}^0(p')t'} \\ &\times \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega' \int d^3k' \left\{ q_\alpha \left[ \hat{E}(\vec{k}', \omega') + \frac{\vec{p}'}{m_\alpha c} \times \hat{B}(\vec{k}', \omega') \right] \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(\vec{p}') \right. \\ &\left. + \hat{\nu}_{\alpha d}(\vec{k}', p', \omega') f_{\alpha 0}(\vec{p}') - \hat{\nu}_F(\vec{k}', p', \omega') F(p', \xi) \right\} e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}'-\omega't')}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

nota-se que podemos trocar  $p'$ , dado pelas equações (4.31)-(4.33), por  $p$ , dado por  $\vec{p} = p_\perp \cos(\varphi)\hat{x} + p_\perp \sin(\varphi)\hat{y} + p_\parallel \hat{z}$ , nos termos que são funções das constantes de movimento  $p_\perp$  e  $p_\parallel$ . Ainda, a forma mais geral da função distribuição no equilíbrio que satisfaz a equação em ordem zero (4.6) é tal que  $f(\vec{p}) = f(p_\perp, p_\parallel)$  o que também permite fazer a troca  $f(p'_\perp, p'_\parallel) \Rightarrow f(p_\perp, p_\parallel)$ .

Com isso, e fazendo  $\vec{k}' \Rightarrow \vec{k}$ ,  $\omega' \Rightarrow \omega$ ,  $\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r}$  e  $\tau = t' - t$ , obtemos a seguinte expressão para a transformada da função distribuição perturbada

$$\begin{aligned} \hat{f}_\alpha(\vec{k}, \vec{p}, \omega) &= - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \left\{ q_\alpha \left[ \hat{E}(\vec{k}, \omega) + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \hat{B}(\vec{k}, \omega) \right] \right. \\ &\left. \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(p_\perp, p_\parallel) + \hat{\nu}_{\alpha d}(\vec{k}, p, \omega) f_{\alpha 0}(p_\perp, p_\parallel) - \hat{\nu}_F(\vec{k}, p, \omega) F(p, \xi) \right\}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

para  $\omega_i > 0$  (a solução de  $\hat{f}_\alpha$  para  $\omega_i < 0$  é obtida pela continuação analítica de (4.42)), nessa expressão foram definidas as quantidades

$$\hat{\nu}_{\alpha d}(\vec{k}, p, \omega) = \int dq \sigma_\alpha(p, q) \frac{p}{m_\alpha} \hat{f}_d(\vec{k}, q, \omega), \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_F(\vec{k}, p, \omega) &= \delta_{\alpha e} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_\alpha(\nu, \mu) \int dq \sigma_\nu(p, q) \\ &\times \left( \frac{p_x}{m_\alpha} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_\alpha} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) \hat{f}_d(\vec{k}, q, \omega). \end{aligned} \quad (4.44)$$

A equação (4.42) pode ser convenientemente separada em três termos

$$\hat{f}_\alpha = \hat{f}_\alpha^C + \hat{f}_\alpha^A + \hat{f}_\alpha^F, \quad (4.45)$$

sendo

$$\hat{f}_\alpha^C = -q_\alpha \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \left[ \hat{E}(\vec{k}, \omega) + \frac{\vec{p}}{m_\alpha c} \times \hat{B}(\vec{k}, \omega) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}(p_\perp, p_\parallel), \quad (4.46)$$

$$\hat{f}_\alpha^A = - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \hat{\nu}_{\alpha d}(\vec{k}, p, \omega) f_{\alpha 0}(p_\perp, p_\parallel), \quad (4.47)$$

$$\hat{f}_\alpha^F = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k}\cdot\vec{R}-[\omega+i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \hat{\nu}_F(\vec{k}, p, \omega) F(p, \xi), \quad (4.48)$$

onde o termo  $\hat{f}_\alpha^C$  é devido à perturbação dos campos e possui a mesma forma estrutural que a função perturbada no caso de um plasma convencional homogêneo magnetizado, substituindo o termo  $\omega + i\nu_{\alpha d}^0$  por  $\omega$  no argumento da exponencial. Os outros termos surgem a partir da presença das partículas de poeira, sendo  $\hat{f}_\alpha^A$  devido à corrente de absorção e  $\hat{f}_\alpha^F$  devido à corrente de emissão fotoelétrica. Mais adiante será mostrado que esta separação na perturbação da função distribuição permitirá escrever o tensor dielétrico também como uma soma de três termos conectados a estas funções (De Juli, 2000; Galvão, 2011).

Aplicando a transformada de Fourier no restante das equações em primeira ordem (4.9)-(4.14) ficamos com o seguinte sistema de equações

$$-i\omega \hat{f}_d(\vec{k}, q, \omega) + \frac{\partial}{\partial q} \left( \hat{I}(\vec{k}, q, \omega) f_{d0}(q) + I_0(q) \hat{f}_d(\vec{k}, q, \omega) \right) = 0, \quad (4.49)$$

$$\hat{f}_\alpha = \hat{f}_\alpha^C + \hat{f}_\alpha^A + \hat{f}_\alpha^F, \quad (4.50)$$

$$i\vec{k} \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int d^3p \hat{f}_\alpha(\vec{k}, \vec{p}, \omega) + 4\pi \int dq q \hat{f}_d(\vec{k}, q, \omega), \quad (4.51)$$

$$\vec{k} \cdot \hat{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) = 0, \quad (4.52)$$

$$\vec{k} \times \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega}{c} \hat{\vec{B}}(\vec{k}, \omega), \quad (4.53)$$

$$i\vec{k} \times \hat{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) = -i\frac{\omega}{c} \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) + \frac{4\pi}{c} \hat{\vec{j}}(\vec{k}, \omega), \quad (4.54)$$

sendo

$$\hat{I}(\vec{k}, q, \omega) = \sum_\alpha q_\alpha \int d^3p \sigma_\alpha(p, q) \frac{p}{m_\alpha} \hat{f}_\alpha(\vec{k}, \vec{p}, \omega), \quad (4.55)$$

$$\hat{\vec{j}}(\vec{k}, \omega) = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int d^3p \vec{p} \hat{f}_\alpha(\vec{k}, \vec{p}, \omega). \quad (4.56)$$

### 4.3 O tensor dielétrico e a relação de dispersão

Aplicando o rotacional na equação (4.53) e substituindo (4.54) temos

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \hat{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\vec{E}} + \frac{4\pi i \omega}{c^2} \hat{\vec{j}} = 0. \quad (4.57)$$

A conexão entre  $\vec{j}$  e  $\vec{E}$  se dá através da relação constitutiva (lei de Ohm)

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' \tilde{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t'), \quad (4.58)$$

onde  $\tilde{\sigma}$  é o tensor condutividade que expressa as possíveis anisotropias do meio. O fato de  $t' < t$  é devido ao princípio da causalidade, ou seja, a corrente no instante  $t$  sofre influência dos campos produzidos em instantes anteriores  $t'$ . No caso de um plasma homogêneo e estacionário o tensor dependerá somente das diferenças  $\vec{r} - \vec{r}'$  e  $t - t'$  de modo que

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' \tilde{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t'). \quad (4.59)$$

Isso permite fazer uso do teorema da convolução, onde a transformada da corrente é simplesmente o produto das transformadas da condutividade e do campo elétrico, assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \hat{j}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= \int_{-\infty}^t dt' \int d^3r' \frac{1}{(2\pi)^8} \\ &\times \int d\omega' \int d^3k' \tilde{\sigma}(\vec{k}', \omega') e^{i(\vec{k}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - \omega'(t-t'))} \cdot \int d\omega'' \int d^3k'' \hat{E}(\vec{k}'', \omega'') e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t)}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

sabendo que

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{i(\omega' - \omega'')t'} = 2\pi \delta(\omega' - \omega''), \quad (4.61)$$

$$\int d^3r' e^{i(\vec{k}'' - \vec{k}') \cdot \vec{r}'} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}' - \vec{k}''), \quad (4.62)$$

e substituindo as variáveis de integração  $\vec{k}', \omega' \Rightarrow \vec{k}, \omega$  ficamos com

$$\hat{j}(\vec{k}, \omega) = \tilde{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \hat{E}(\vec{k}, \omega). \quad (4.63)$$

Substituindo esta relação em (4.57) e fazendo uso da identidade vetorial  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$  obtemos a seguinte expressão

$$(\vec{k} \cdot \hat{E})\vec{k} - k^2 \hat{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left( \hat{E} + \frac{4\pi i}{\omega} \tilde{\sigma} \cdot \hat{E} \right) = 0. \quad (4.64)$$

Definindo o tensor dielétrico

$$\tilde{\epsilon}(\vec{k}, \omega) = \tilde{I} + \frac{4\pi i}{\omega} \tilde{\sigma}(\vec{k}, \omega), \quad (4.65)$$

onde  $\tilde{I}$  é o tensor identidade, em termos de suas componentes escrevemos

$$\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\vec{k}, \omega), \quad (4.66)$$

e a componente  $i$  da equação (4.64) pode ser expressa como

$$\sum_j \left[ k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) \right] \hat{E}_j(\vec{k}, \omega) = 0, \quad (4.67)$$

com  $i, j = x, y, z$ . Tal sistema de equações possui solução não trivial quando

$$\det \left[ k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) \right] = 0. \quad (4.68)$$

Esta é a relação de dispersão do plasma homogêneo na aproximação linear, dela se obtém a relação da frequência da onda com seu número de onda. No próximo capítulo esta relação será utilizada para estudar a propagação e amortecimento de ondas em um plasma empoeirado homogêneo magnetizado. Porém, ainda é preciso encontrar expressões das componentes do tensor dielétrico para que seja possível resolver a equação (4.68).

## 4.4 Componentes do tensor dielétrico

O tensor dielétrico na forma (4.66) é definido a partir do tensor condutividade que, por sua vez, está relacionado à densidade de corrente através da relação constitutiva (4.63). Utilizando a expressão para a densidade de corrente (4.56) podemos escrever a relação constitutiva para a componente  $i$  na forma

$$\sum_j \sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) \hat{E}_j(\vec{k}, \omega) = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int d^3p p_i \left[ \hat{f}_\alpha^C(\vec{k}, \omega) + \hat{f}_\alpha^A(\vec{k}, \omega) + \hat{f}_\alpha^F(\vec{k}, \omega) \right]. \quad (4.69)$$

Sendo assim, deve-se encontrar expressões para as funções distribuição de modo que estas sejam proporcionais a  $\hat{E}_j$  definindo, assim, as componentes do tensor condutividade e, conseqüentemente, do tensor dielétrico.

Ao fazer isso, veremos que o tensor dielétrico assumirá a forma

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^C + \epsilon_{ij}^A + \epsilon_{ij}^F, \quad (4.70)$$

onde o termo  $\epsilon_{ij}^C$  se mostra semelhante ao tensor dielétrico de um plasma homogêneo magnetizado convencional (sem poeira), exceto por um termo adicional da frequência de carregamento no denominador do integrando e um novo termo nas componentes  $\epsilon_{iz}$ . Por outro lado, os termos  $\epsilon_{ij}^A$  e  $\epsilon_{ij}^F$  surgem devido à presença das partículas de poeira e estão relacionados às correntes de carregamento por absorção e por fotoemissão, respectivamente.

O procedimento para obtenção das expressões das componentes do tensor dielétrico é apresentado no apêndice B, também é possível encontrá-lo nos trabalhos precursores de De Juli e Schneider (1998) e Galvão e Ziebell (2012). Para a componente relacionada à função  $\hat{f}_\alpha^C$  obtemos, de (B.29),

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^C = \delta_{ij} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{iz} + \delta_{iy}} \Pi_{ij}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha \right. \\ \left. + i\delta_{jz} \nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_{\parallel}} \right] \left( \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{jz}} - \delta_{iz} \delta_{jz} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \Lambda_\alpha, \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde

$$\Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) = p_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - p_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}}, \quad (4.72)$$

e  $\Pi_{ij}^{l\alpha}$  são as componentes do tensor

$$\tilde{\Pi}^{l\alpha}(b_\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{l^2 J_l^2}{b_\alpha^2} & i \frac{l J_l' J_l}{b_\alpha} & \frac{l J_l^2}{b_\alpha} \\ -i \frac{l J_l' J_l}{b_\alpha} & J_l'^2 & -i J_l' J_l \\ \frac{l J_l^2}{b_\alpha} & i J_l' J_l & J_l^2 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

sendo  $J_l = J_l(b_\alpha)$  a função de Bessel do primeiro tipo e

$$b_\alpha = \frac{k_\perp p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha}. \quad (4.74)$$

A componente do tensor relacionada à função  $\hat{f}_\alpha^A$  é dada pelas equações (B.68) a (B.70),

$$\epsilon_{ij}^A(\vec{k}, \omega) = -\frac{4\pi i n_{d0}}{\omega} U_i^A S_j^A, \quad (4.75)$$

onde

$$U_i^A = \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{(p_\parallel/p_\perp)^{\delta_{iz}} p_\perp p \sigma'_\alpha(p) f_{\alpha 0}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \Pi_{iz}^{l\alpha}, \quad (4.76)$$

$$S_j^A = \frac{1}{n_{d0}} \sum_\alpha q_\alpha^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{\nu_{\alpha d}^0 \Pi_{zj}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left( \frac{p_\parallel}{p_\perp} \right)^{\delta_{zj}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha + \delta_{zj} i\nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_\parallel} \right] - \delta_{zj} \frac{1}{n_{d0}} \sum_\alpha q_\alpha^2 \int d^3p \nu_{\alpha d}^0 \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_\perp}. \quad (4.77)$$

com

$$\nu_{ch} = \left. \frac{\partial I_0(\hat{Q}_T)}{\partial \hat{Q}_T} \right|_{\hat{Q}_T=Q_0}, \quad (4.78)$$

$$\nu_1 = \sum_\alpha q_\alpha \int d^3p \nu_{\alpha d}^0 \frac{p}{m_\alpha} \sigma'_\alpha(p) f_{\alpha 0}(p_\perp, p_\parallel) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)}, \quad (4.79)$$

$$\nu_{F1} = \sum_\alpha \delta_{\alpha e} q_\alpha \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \int d^3p \nu_{\alpha d}^0 \left( \frac{p_x}{m_\alpha} H(p_x) \delta_{1,-n_x} + \frac{p_z}{m_\alpha} H(p_z) \delta_{1,-n_z} \right) \times \sigma'_\nu(p) F(p, \xi) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)}. \quad (4.80)$$

e ainda

$$\sigma'_\alpha = -\frac{2\pi a m_\alpha q_\alpha}{p^2} \left[ H \left( 1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha Q_0}{ap^2} \right) + \left( 1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha Q_0}{ap^2} \right) \delta \left( 1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha Q_0}{ap^2} \right) \right], \quad (4.81)$$

$$\sigma'_\nu = \frac{4\pi a m_e e Q_0}{3p^2} H(Q_0) \delta \left( 1 - \frac{2m_e e Q_0}{ap^2} H(Q_0) \right). \quad (4.82)$$

E, finalmente, a componente do tensor relacionada à função  $\hat{f}_\alpha^F$  é dada pelas equações (B.82) a (B.84),

$$\epsilon_{ij}^F(\vec{k}, \omega) = U_i^F S_j^F, \quad (4.83)$$

sendo

$$U_i^F = -\frac{1}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \frac{e}{2am_e^2} \beta \Lambda S_a \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_\parallel^{\delta_{iz}} p_\perp^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \sigma'_\nu(p) F(p, \xi)}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)} \times \left[ \delta_{1,-n_x} p_\perp \left( \Pi_{ix}^{le} - i\delta_{ix} \frac{\Pi_{yz}^{le}}{b_e} + \Pi_{ix}^{le,F} \right) + \delta_{1,-n_z} H(p_z) 2p_\parallel \Pi_{iz}^{le} \right], \quad (4.84)$$



$$\begin{aligned}
S_j^F = & -a \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3 p \frac{(\nu_{\alpha d}^0/\omega) \Pi_{zj}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - l\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left( \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{zj}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} \right. \\
& \left. - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha} + \delta_{zj} i\nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\parallel}} \right] + \delta_{zj} \frac{a}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \int d^3 p \frac{\nu_{\alpha d}^0 \Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\perp}},
\end{aligned} \tag{4.85}$$

onde foram definidas as componentes do tensor auxiliar

$$\begin{aligned}
\Pi_{xx}^{le,F} = & \frac{1}{\pi b_e} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{(l+4m)J_{l+4m} + (2+l+4m)J_{2+l+4m}}{1+4m} \right. \\
& \left. - \frac{(2+l+4m)J_{2+l+4m} + (4+l+4m)J_{4+l+4m}}{3+4m} \right) J_l,
\end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\Pi_{yx}^{le,F} = \frac{2}{\pi b_e} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{2(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right) J'_l, \tag{4.87}$$

$$\Pi_{zx}^{le,F} = \frac{2}{\pi b_e} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{2(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right) J_l. \tag{4.88}$$

## 5 Aplicação para propagação paralela e distribuições Maxwellianas de íons e elétrons

Neste capítulo vamos estudar a propagação e amortecimento de ondas se propagando paralelamente ao campo magnético ambiente, a análise é feita encontrando as raízes numéricas da relação de dispersão (4.68) para o caso de um plasma empoeirado homogêneo magnetizado composto por elétrons e íons descritos por distribuições Maxwellianas no equilíbrio.

Vários trabalhos já foram publicados estudando os efeitos que as partículas de poeira causam nas propriedades das ondas usando teoria cinética e considerando a absorção de partículas do plasma pela poeira como mecanismo de carregamento elétrico. Porém, pelo nosso conhecimento, o efeito que a fotoionização da poeira causa nessas ondas ainda não foi analisado. Sendo assim, focaremos o estudo feito neste capítulo nas alterações que esse processo causa na propagação e amortecimento das ondas quando comparado ao caso sem fotoemissão de elétrons.

### 5.1 A relação de dispersão

Considerando que a função distribuição no equilíbrio das espécies do plasma é Maxwelliana, ou seja,

$$f_{\alpha 0}(p) = \frac{n_{\alpha 0}}{(2\pi m_{\alpha} k_B T_{\alpha})^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_{\alpha} k_B T_{\alpha}}\right), \quad (5.1)$$

temos que o operador (4.72) presente no tensor dielétrico é nulo,  $\Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) = 0$ , de modo que os efeitos da presença da poeira no termo  $\epsilon_{ij}^C$ , dada por (4.71), ocorrem apenas no denominador através de um termo puramente imaginário contendo a quantidade  $\nu_{\alpha d}^0(p)$ , sendo este resultado independente da direção do vetor de onda  $\vec{k}$ .

A obtenção das componentes do tensor dielétrico para propagação paralela e distribuições Maxwellianas é feita no apêndice C. Vemos nas equações (C.27) e (C.31) que no caso de propagação paralela ao campo magnético ambiente ( $\vec{k} = k_{\parallel} \hat{e}_z$ ) os termos  $\epsilon_{ij}^A$  e  $\epsilon_{ij}^F$  (considerando propagação da radiação também paralela ao campo magnético) são não nulos apenas para  $i = j = z$ , independentemente da forma da função distribuição  $f_{\alpha 0}$ .

Quando assumimos  $f_{\alpha 0}$  Maxwelliana e propagação paralela ao campo magnético o

tensor dielétrico assume a forma dada por (C.35), ou seja,

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^C & \epsilon_{xy}^C & 0 \\ -\epsilon_{xy}^C & \epsilon_{xx}^C & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz}^C + \epsilon_{zz}^A + \epsilon_{zz}^F \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

onde

$$\epsilon_{xx}^C = 1 + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} [\hat{I}_{\alpha}^{-} + \hat{I}_{\alpha}^{+}], \quad (5.3)$$

$$\epsilon_{xy}^C = -\frac{i}{4} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} [\hat{I}_{\alpha}^{+} - \hat{I}_{\alpha}^{-}], \quad (5.4)$$

$$\epsilon_{zz}^C = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \hat{I}_{\alpha}^0, \quad (5.5)$$

com

$$\hat{I}_{\alpha}^s = \frac{1}{n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{p_{\perp}}{1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} + s \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega} + i \frac{\nu_{\alpha d}^0(p)}{\omega}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}, \quad (5.6)$$

onde  $s = \pm 1$  e

$$\hat{I}_{\alpha}^0 = \frac{1}{n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^2/p_{\perp}}{1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} + i \frac{\nu_{\alpha d}^0(p)}{\omega}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}. \quad (5.7)$$

Enquanto os termos  $\epsilon_{zz}^A$  e  $\epsilon_{zz}^F$  são dados pelas equações (C.28) e (C.32).

Pela equação (4.68), a relação de dispersão nesse caso será

$$\det \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^C - N_{\parallel}^2 & \epsilon_{xy}^C & 0 \\ -\epsilon_{xy}^C & \epsilon_{xx}^C - N_{\parallel}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz}^C + \epsilon_{zz}^A + \epsilon_{zz}^F \end{pmatrix} = 0, \quad (5.8)$$

onde foi definido o índice de refração na direção paralela ao campo magnético

$$N_{\parallel} = \frac{k_{\parallel} c}{\omega}. \quad (5.9)$$

Lembrando que essa relação de dispersão não inclui modos que surgem da dinâmica dos grãos de poeira, como o modo poeira-cíclotron, devido à aproximação de grãos imóveis (3.73).

A equação (5.8) possui duas soluções, sendo uma para ondas eletrostáticas, o que equivale a impor  $\hat{E}_x = \hat{E}_y = 0$ ,

$$\epsilon_{zz}^C + \epsilon_{zz}^A + \epsilon_{zz}^F = 0, \quad (5.10)$$

e outra para ondas eletromagnéticas, impondo  $\hat{E}_z = 0$ ,

$$(\epsilon_{xx}^C - N_{\parallel}^2)^2 + (\epsilon_{xy}^C)^2 = 0,$$

ou então

$$[N_{\parallel}^2]_{\pm} = \epsilon_{xx}^C \pm i\epsilon_{xy}^C.$$

Utilizando as equações (5.3) e (5.4), e usando  $s = \pm 1$ , podemos escrever para as ondas eletromagnéticas

$$[N_{\parallel}^2]_s = 1 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \hat{I}_{\alpha}^s. \quad (5.11)$$

Para calcular as integrais  $\hat{I}_{\alpha}^s$  utilizamos o mesmo procedimento feito em trabalhos anteriores (De Juli et al., 2005; Ziebell et al., 2005; De Juli et al., 2007; Gaelzer et al., 2010) onde a frequência de colisão inelástica  $\nu_{\alpha d}^0(p)$  é substituída por sua média no espaço de momentum,

$$\nu_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha 0}} \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) f_{\alpha 0}, \quad (5.12)$$

a qual é independente do momentum. Essa aproximação é feita a fim de chegarmos em uma expressão relativamente simples para a relação de dispersão. Em um estudo feito por De Juli et al. (2007) foi demonstrado que, no intervalo de frequência de ondas de Alfvén, a relação de dispersão pode ser satisfatoriamente descrita pela aproximação da média da frequência de colisões inelásticas.

A equação (5.12) representa a taxa de captura de partículas da espécie  $\alpha$  pela poeira no estado de equilíbrio. Para distribuições Maxwellianas obtemos, de (C.41) a (C.44),

$$\nu_i = 2\sqrt{2\pi}a^2n_{d0}v_{Ti} \begin{cases} \left(1 - \frac{eQ_0}{ak_B T_i}\right), & Q_0 \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{eQ_0}{ak_B T_i}\right), & Q_0 > 0 \end{cases}, \quad (5.13)$$

$$\nu_e = 2\sqrt{2\pi}a^2n_{d0}v_{Te} \begin{cases} \exp\left(\frac{eQ_0}{ak_B T_e}\right), & Q_0 < 0 \\ \left(1 + \frac{eQ_0}{ak_B T_e}\right), & Q_0 \geq 0 \end{cases}, \quad (5.14)$$

onde  $v_{T\alpha} = (k_B T_{\alpha}/m_{\alpha})^{1/2}$  é a velocidade térmica das partículas da espécie  $\alpha$ .

Utilizando essa aproximação, faz-se o cálculo das integrais  $\hat{I}_{\alpha}^s$ , dado por (C.47), e a relação de dispersão (5.11) é dada por

$$[N_{\parallel}^2]_s = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \zeta_{\alpha}^0 Z(\hat{\zeta}_{\alpha}^s), \quad (5.15)$$

onde

$$\hat{\zeta}_{\alpha}^s = \frac{\omega + s\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha}}{k_{\parallel}\sqrt{2}v_{T\alpha}}, \quad \zeta_{\alpha}^0 = \frac{\omega}{\sqrt{2}v_{T\alpha}k_{\parallel}}, \quad (5.16)$$

e  $Z(\hat{\zeta}_{\alpha}^s)$  é a função de dispersão de plasma, ou função de Fried & Conte (Fried; Conte, 1961), dada por

$$Z(\hat{\zeta}_{\alpha}^s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{y - \hat{\zeta}_{\alpha}^s}, \quad \text{Im } \hat{\zeta}_{\alpha}^s > 0. \quad (5.17)$$

Nota-se que a função (5.17) é definida para  $\text{Im } \hat{\zeta}_\alpha^s > 0$ , ou seja, é válida para  $\omega_i > 0$  ( $\nu_\alpha$  pode ser nulo se não houver presença de poeira no plasma) sendo necessário buscar sua continuação analítica para  $\omega_i \leq 0$  ou então buscar uma representação alternativa válida para qualquer sinal de  $\omega_i$  como, por exemplo, sua representação em termos da função de Faddeeva  $\omega(z)$ , relacionada com a função erro complementar  $\text{erfc}(z)$ ,

$$Z(z) = i\sqrt{\pi}\omega(z) = i\sqrt{\pi}e^{-z^2} \text{erfc}(-iz), \quad (5.18)$$

a qual é usado para os cálculos numéricos feitos neste trabalho.

A fim de encontrar resultados numéricos vamos introduzir as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\omega}{\Omega_i}, \quad \varepsilon = \frac{n_{d0}}{n_{i0}}, \quad u_\alpha = \frac{v_{T\alpha}}{v_A}, \quad \gamma = \frac{\lambda^2 n_{i0} v_A}{\Omega_i}, \quad \tilde{a} = \frac{a}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{e^2}{k_B T_i}, \\ \tau_e &= \frac{T_e}{T_i}, \quad q = \frac{k_{\parallel} v_A}{\Omega_i}, \quad \tilde{\nu}_\alpha = \frac{\nu_\alpha}{\Omega_i}, \quad \eta_\alpha = \frac{\omega_{p\alpha}}{\Omega_i}, \quad r_\alpha = \frac{\Omega_\alpha}{\Omega_i}, \quad \chi_\alpha = \frac{q_\alpha Q_0}{ak_B T_\alpha}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde

$$v_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{4\pi n_{i0} m_i}} \quad (5.20)$$

é a velocidade de Alfvén. Em termos destas quantidades, obtemos para a frequência média de colisões adimensional

$$\tilde{\nu}_\alpha = 2\sqrt{2\pi}\tilde{a}^2 \varepsilon u_\alpha \gamma \begin{cases} (1 + |\chi_\alpha|), & \chi_\alpha \leq 0 \\ \exp(-|\chi_\alpha|), & \chi_\alpha > 0 \end{cases}, \quad (5.21)$$

e a relação de dispersão adimensional é dada por

$$\frac{q^2 c^2}{z^2 v_A^2} = 1 + \sum_\alpha \frac{\eta_\alpha^2}{\sqrt{2} q u_\alpha z} Z(\hat{\zeta}_\alpha^s), \quad (5.22)$$

com

$$\hat{\zeta}_\alpha^s = \frac{z + sr_\alpha + i\tilde{\nu}_\alpha}{\sqrt{2} q u_\alpha}. \quad (5.23)$$

A relação de dispersão (5.22) é formalmente semelhante à expressão encontrada em trabalhos onde também é estudado o caso de propagação paralela ao campo magnético e distribuições Maxwellianas das espécies do plasma, porém, nestes trabalhos é levado em conta apenas a absorção de partículas como mecanismo de carregamento da poeira (De Juli et al., 2005; Ziebell et al., 2005). Ou seja, a mudança que a adição da fotoionização traz neste caso está relacionada com a carga de equilíbrio  $Q_0$  e, conseqüentemente, com as densidades das espécies do plasma no equilíbrio (através da condição de quase neutralidade (2.1)) e a frequência média de colisões (5.21), já que ela é dependente de  $Q_0$ .

## 5.2 Resultados numéricos

Para resolver numericamente a equação (5.22) consideramos um plasma magnetizado homogêneo composto por elétrons e prótons junto com os seguintes parâmetros:  $B_0 = 1$  G,  $n_{i0} = 10^9$  cm<sup>-3</sup>,  $T_i = 10^4$  K,  $a = 10^{-4}$  cm,  $m_i = m_p$  (massa do próton) e  $T_e = T_i$ , a menos que seja indicado contrariamente. Esses são parâmetros típicos de ventos estelares originados de estrelas ricas em carbono (Tsytovich et al., 2004) e são os mesmos utilizados na literatura para o estudo de propagação e amortecimento de ondas em plasmas empoeirados utilizando uma abordagem cinética, tanto para ondas de Alfvén (eletromagnéticas) (De Juli et al., 2005; Ziebell et al., 2005; Gaelzer et al., 2008; Gaelzer et al., 2010) quanto para ondas eletrostáticas (Schneider et al., 2006; Ziebell et al., 2008; De Juli et al., 2009).

Para os parâmetros relacionados à corrente fotoelétrica, consideramos que as partículas estão a uma distância média de  $r_d = 2r_s$  da estrela e estão expostas à radiação de corpo negro (2.43) originada na superfície da estrela com temperatura superficial  $T_s$  entre 4500 K e 5000 K. Esse intervalo de temperaturas superficiais da estrela está dentro de valores observados para algumas das estrelas de carbono mais quentes (Wallerstein; Knapp, 1998), e é escolhido com o propósito de analisar diversas situações da carga de equilíbrio dos grãos de poeira, já que com a presença da fotoionização eles podem possuir carga negativa ou positiva.

Consideramos também que os grãos de poeira são compostos de carbono, já que este material é usualmente formado nas proximidades dessas estrelas (Bussoletti et al., 1987). O valor da função trabalho do material é tomado como  $\phi = 4,6$  eV, valor razoável tanto para grafite e carbono vítreo (Sohda et al., 1997), com eficiência fotoelétrica máxima  $\chi_m = 0,05$  (Feuerbacher; Fitton, 1972) e temperatura da poeira de  $T_d = 300$  K, que está dentro do intervalo de temperaturas da poeira nas camadas internas de poeira circumstelares de estrelas de carbono (Gail; Sedlmayr, 2014). Esses parâmetros são mantidos fixos para as análises feitas neste trabalho já que estão relacionados à corrente de fotoionização, e a variação dessa corrente é estudada através da modificação da temperatura superficial da estrela, que define o fluxo de fótons incidente na poeira.

Essa escolha de parâmetros é motivada pelo fato de que ondas de Alfvén têm sido propostas como um possível mecanismo de aceleração para ventos estelares (Alazraki; Couturier, 1971; Dos Santos et al., 1993; Falceta-Goncalves; Jatenco-Pereira, 2002), e estrelas de carbono são notáveis por perderem grande parte de sua massa através desses ventos estelares. Nota-se, porém, que algumas dessas quantidades podem assumir diversos valores como, por exemplo, o raio dos grãos de poeira, o qual apresenta uma distribuição de tamanhos do tipo lei de potência, podendo variar de 0,005 a 1  $\mu$ m (Mathis et al., 1977; Krüger; Sedlmayr, 1997), de modo que o valor considerado neste trabalho pode ser considerado como um limite superior.

O tamanho da poeira irá modificar as correntes de carregamento elétrico e a relação de dispersão, já que sua seção de choque é proporcional ao seu raio, e sua área exposta à radiação também será modificada. Em trabalhos futuros pretendemos incluir uma análise da presença de diferentes tamanhos de poeira e sua consequência nos modos de onda existentes.

Além disso, as densidades e temperaturas das espécies do plasma também podem alterar substancialmente as correntes de carregamento por absorção. Adotar uma temperatura similar para elétrons e íons pode ser questionável já que elétrons tendem a ser mais quentes devido ao processo fotoelétrico, que irá adicionar energia às partículas dessa espécie, mantendo sua temperatura por volta de  $10^4$  K. Enquanto isso, íons possuem temperaturas menores, na faixa de  $2 - 3 \times 10^3$  K, já que valores acima disso tornam difícil a nucleação e formação de grãos de poeira próximos à superfície da estrela.

Nota-se também que o valor do campo magnético adotado não irá modificar qualitativamente os resultados obtidos, já que a corrente de absorção de partículas é derivada a partir da teoria OML (ver seção 2.1.1), a qual não leva em consideração o campo magnético ambiente nas trajetórias de colisão entre as partículas do plasma e os grãos de poeira. Desse modo, esse parâmetro irá modificar apenas a frequência ciclotron e a velocidade de Alfvén, alterando apenas os valores normalizados obtidos.

Apesar de investigarmos posteriormente a consequência da modificação de alguns desses parâmetros mencionados, focaremos nossa análise principalmente na mudança que a presença da fotoionização causa na propagação e amortecimento das ondas para esse conjunto fixo de parâmetros.

### 5.2.1 A carga de equilíbrio

Como dito anteriormente, a inclusão da fotoionização irá modificar a relação de dispersão através da carga de equilíbrio, modificando também a densidade de equilíbrio dos elétrons (mantemos a densidade de íons constante) por meio da condição de quase neutralidade (2.1). É necessário calcular primeiramente essas quantidades pois também são parâmetros da relação de dispersão. Para isso, fazemos uso da condição de corrente total nula no equilíbrio

$$\sum_{\alpha} I_{\alpha 0}(q = Q_0) + I_{\nu}(q = Q_0) = 0, \quad (5.24)$$

onde as correntes elétricas são dadas por (2.16) e (2.42).

Começamos por investigar a mudança que a emissão fotoelétrica traz para o número de carga  $Z_d$  no equilíbrio, onde  $Q_0 = Z_d e$ , calculando a raiz de (5.24), e para a densidade de elétrons  $n_{e0}$ , através da condição de quase neutralidade (2.1), para diferentes valores da densidade de grãos de poeira, obtida de  $\varepsilon = n_{d0}/n_{i0}$ .

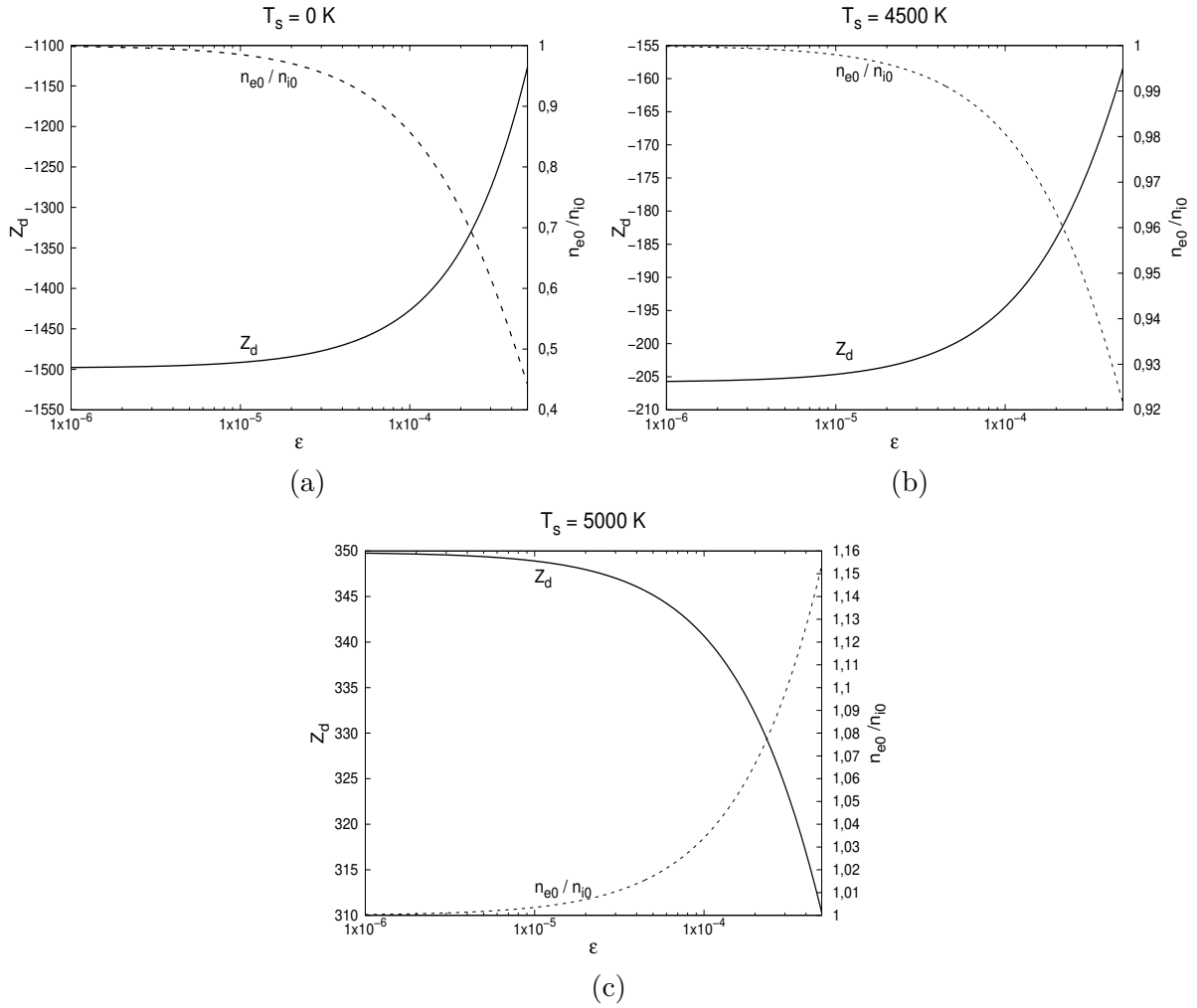


Figura 2 – Número de carga no equilíbrio  $Z_d$  e fração da densidade de elétrons por íons  $n_{e0}/n_{i0}$  como função da fração da densidade de poeira por íons  $\epsilon = n_{d0}/n_{i0}$  para: (a) apenas absorção de partículas do plasma como mecanismo de carregamento da poeira; (b) incluindo a fotoionização como mecanismo de carregamento da poeira, com temperatura superficial da estrela de  $T_s = 4500$  K; (c) estrela com temperatura de  $T_s = 5000$  K.

A figura 2(a) mostra o caso onde apenas a absorção de partículas é levada em consideração no carregamento da poeira, essa situação é simbolizada com uma temperatura superficial da estrela de  $T_s = 0$  K (sem radiação incidente nos grãos de poeira). Para os parâmetros mencionados, nota-se que a carga elétrica de equilíbrio da poeira é negativa, como esperado, já que a taxa de absorção de elétrons é maior que a de íons. Com isso, a densidade de elétrons pode cair bastante para grandes valores de  $\epsilon$ , podendo chegar a ser metade da densidade de íons no intervalo considerado.

As figuras 2(b) e 2(c) consideram também a fotoionização da poeira junto com a absorção de partículas como mecanismos de carregamento da poeira, para dois valores da temperatura superficial da estrela, de  $T_s = 4500$  K e  $T_s = 5000$  K. Esses dois valores foram escolhidos pois representam situações distintas, no caso de  $T_s = 4500$  K a poeira ainda possui carga negativa, porém com um valor absoluto menor que o caso sem fotoionização.



Nesse caso, vemos também que a densidade de elétrons não cai tanto quanto para  $T_s = 0$  K mas, obviamente, continua com valores menores que a densidade de íons. Já para  $T_s = 5000$  K é possível observar grãos de poeira positivamente carregados e, conseqüentemente, uma população maior de elétrons do que de íons, já que para essa temperatura o processo de fotoemissão da poeira é predominante frente ao processo de absorção de partículas.

### 5.2.2 Ondas de Alfvén

A análise da propagação e amortecimento de ondas eletromagnéticas é feita calculando numericamente as raízes da relação de dispersão (5.22) para cada um dos sinais de  $s = \pm 1$ . A figura 3 mostra a parte real das raízes da frequência de onda normalizada  $z_r$  como uma função do número de onda normalizado  $q$ , no caso de  $T_s = 4500$  K, para valores fixos da razão da densidade de poeira pela densidade de íons  $\varepsilon$ . Cada uma das curvas apresentadas no gráfico na verdade corresponde a uma superposição de cinco curvas obtidas com  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 1,25 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon = 2,5 \times 10^{-6}$ ,  $\varepsilon = 3,75 \times 10^{-6}$  e  $\varepsilon = 5,0 \times 10^{-6}$ . A presença da poeira não implica em alteração substancial na parte real da relação de dispersão e as cinco curvas resultam indistinguíveis entre si na resolução adotada.

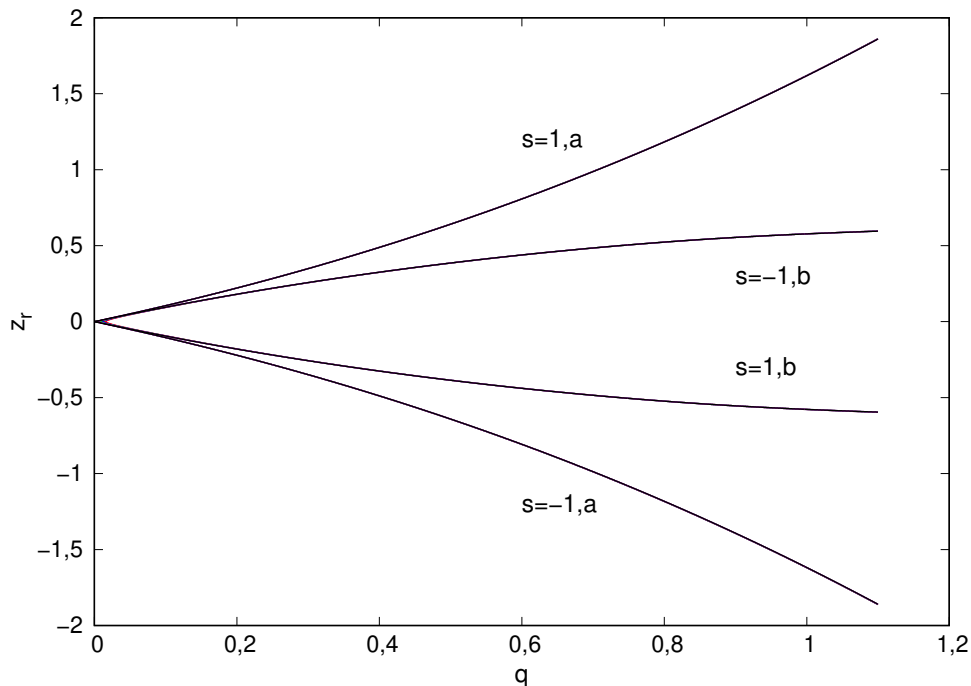


Figura 3 – Parte real da frequência normalizada  $z_r$  para as raízes obtidas com  $s = \pm 1$  como função do número de onda normalizado  $q$  para  $\varepsilon = 0$  (preto),  $\varepsilon = 1,25 \times 10^{-6}$  (magenta),  $\varepsilon = 2,5 \times 10^{-6}$  (verde),  $\varepsilon = 3,75 \times 10^{-6}$  (azul) e  $\varepsilon = 5,0 \times 10^{-6}$  (vermelho).

Gráficos similares já apareceram em trabalhos mencionados aqui (como a figura 1 em De Juli et al. (2005)) para o caso sem fotoemissão, a semelhança entre essas figuras mostra que o efeito fotoelétrico não tem grande impacto no intervalo de parâmetros considerado. Ainda assim, essa figura é útil para identificação dos modos de ondas previstos

pela relação de dispersão, os quais são reconhecidos por livros textos conhecidos (Krall et al., 1973). As raízes rotuladas com  $s = 1, a$  e  $s = -1, a$  correspondem ao ramo das ondas *whistler*<sup>1</sup>, circularmente polarizadas à direita, enquanto que as raízes  $s = -1, b$  e  $s = 1, b$  correspondem ao modo íon-cíclotron, circularmente polarizadas à esquerda.

A figura 4 mostra uma ampliação da figura 3 para pequenos valores de  $q$  onde é possível observar a modificação que a presença da poeira causa na parte real da frequência normalizada  $z_r$ . O modo whistler ( $s = 1, a$ ) é representado pelas linhas marrons enquanto que o modo íon-cíclotron ( $s = -1, b$ ) pelas linhas azuis.

O primeiro gráfico 4(a) ilustra casos já conhecidos, para um plasma convencional ( $\varepsilon = 0$ ) ou para plasma com poeira carregada apenas por absorção de partículas. No caso em que não há presença de poeira no plasma é possível observar o acoplamento dos modos whistler e íon-cíclotron no denominado modo de cisalhamento Alfvén (*shear Alfvén*) para valores pequenos de  $q$ . Por essa razão muitas vezes as ondas whistler e íon-cíclotron são designadas como ramos das ondas de Alfvén. Por outro lado, a presença de uma pequena quantidade  $\varepsilon = 5,0 \times 10^{-6}$  de partículas de poeira resulta no desacoplamento dos modos para todos valores de  $q$ . Além disso, observa-se que ambos os modos apresentam uma região com velocidade de grupo nula ( $z_r$  constante), propriedade observada apenas na presença de poeira.

Outra característica interessante é que o modo whistler atinge um valor finito para  $q$  pequeno, resultando na separação da curva do modo íon-cíclotron. Este resultado também foi comentado por Gaelzer et al. (2010) onde é argumentado que isto é consequência da desigualdade de cargas entre os íons e elétrons do plasma que acontece na presença de poeira. Como esta desigualdade é atenuada pelo efeito fotoelétrico, é esperado que a presença deste mecanismo de carregamento reduza a separação entre os modos.

O gráfico 4(b) mostra casos onde há incidência de radiação na poeira deixando sua carga elétrica no equilíbrio negativa, neutra ou positiva. É possível observar que para um plasma com grãos negativamente carregados os modos whistler e íon-cíclotron não se acoplam no modo Alfvén para nenhum valor de  $q$ . Por outro lado, no caso de grãos neutros, o acoplamento ocorre para pequenos valores de número de onda  $e$ , no caso de grãos positivos, existe uma pequena região de  $q$  onde as curvas se cruzam, indicando um acoplamento dos modos nesse pequeno intervalo.

Podemos observar, ainda, que a presença da fotoionização tende a reduzir o intervalo onde a velocidade de grupo é nula. Também notamos que a separação das curvas nessa região de  $z_r$  constante diminui conforme o valor absoluto de  $Z_d$  diminui, corroborando a

---

<sup>1</sup>O nome “whistler” (do inglês: assoviar) origina-se da física da ionosfera. São ondas eletromagnéticas produzidas por relâmpagos que se propagam pela ionosfera dentro do espectro audível. O sinal de uma onda whistler pode ser amplificado e transmitido através de um sistema de áudio, apresentando um ruído bastante característico e identificável. Exemplos de áudios dessas ondas podem ser encontrados em <http://www-pw.physics.uiowa.edu/plasma-wave/istp/polar/magnetosound.html>.

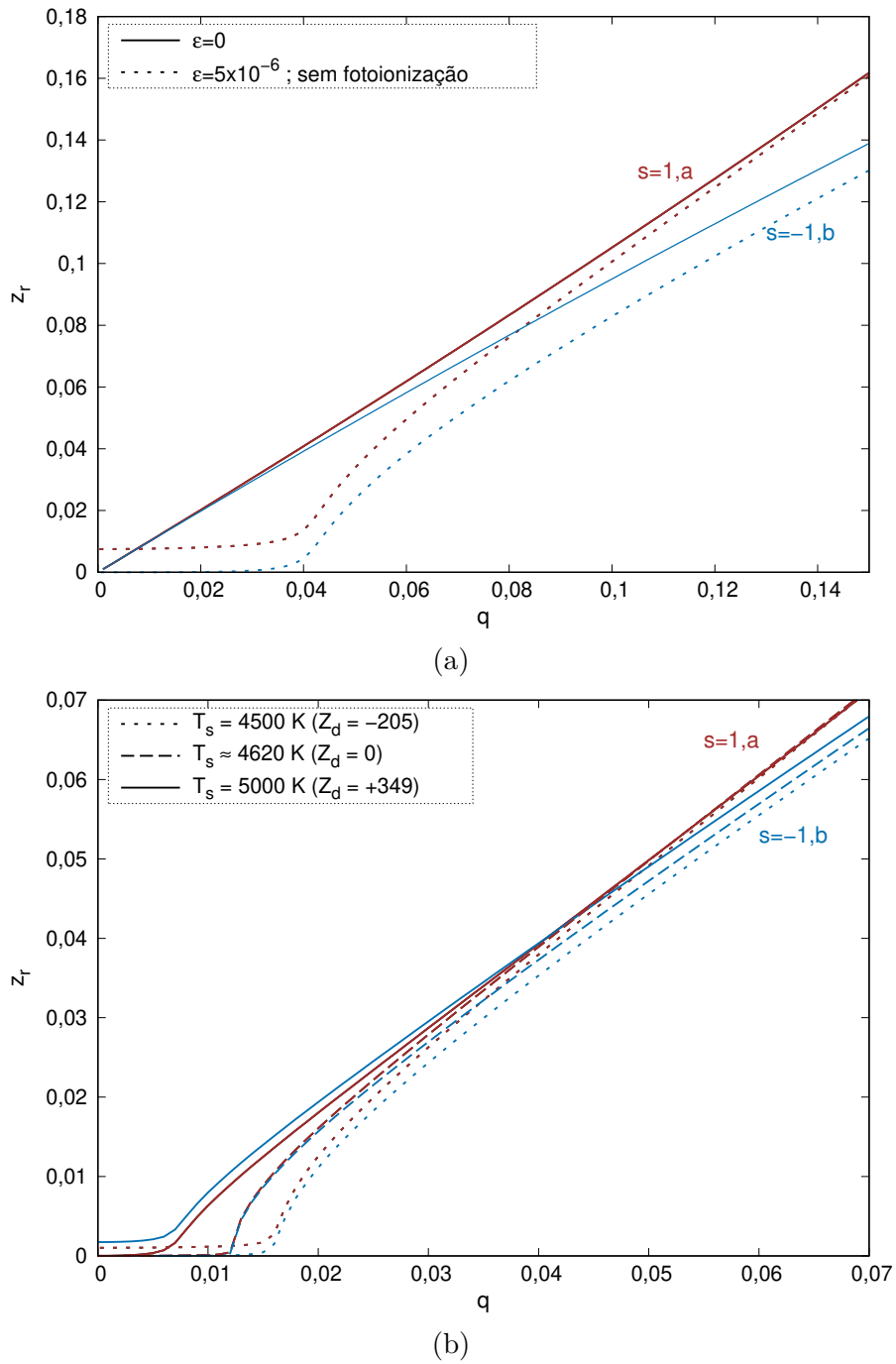


Figura 4 – Parte real da frequência normalizada  $z_r$  como função de  $q$  para: (a) plasma sem poeira (linha contínua) e para  $\varepsilon = 5,0 \times 10^{-6}$  considerando apenas absorção de partículas (linha pontilhada); (b)  $\varepsilon = 5,0 \times 10^{-6}$  considerando absorção de partículas e fotoionização, com temperatura superficial da estrela de  $T_s = 4500$  K (linha pontilhada),  $T_s \simeq 4620$  K (linha tracejada), e  $T_s = 5000$  K (linha contínua). Linhas marrons ( $s = 1, a$ ) representam o modo whistler enquanto linhas azuis ( $s = -1, b$ ) o modo íon-cíclotron.

teoria mencionada anteriormente de que esse efeito é consequência da desigualdade de cargas entre os íons e elétrons do plasma (Gaelzer et al., 2010).

Para o caso de grãos positivos, existe uma região onde o modo íon-cíclotron possui valores maiores da parte real da frequência que o modo whistler, efeito não observado em

nenhum outro caso estudado. Isso acontece devido à população de elétrons ser maior que a de íons, consequência da dominância do processo de fotoemissão da poeira.

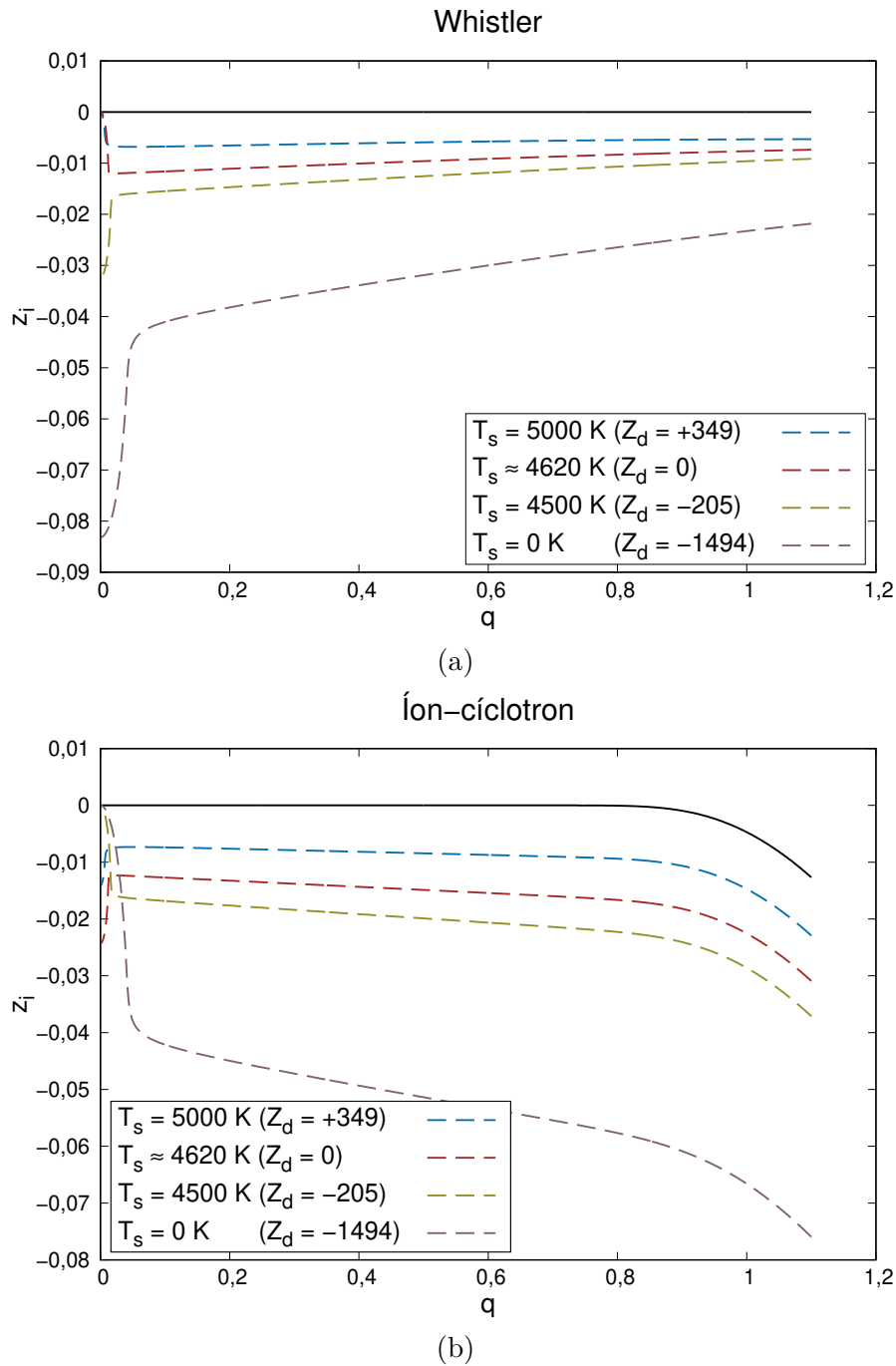


Figura 5 – Parte imaginária da frequência normalizada  $z_i$  como função do número de onda normalizado  $q$  para: (a) modo whistler; (b) modo íon-cíclotron. Linhas contínuas representam o caso de um plasma sem poeira e linhas tracejadas o caso de um plasma empoeirado com  $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ .

A figura 5 mostra as partes imaginárias  $z_i$  correspondentes às raízes ilustradas na figura 3 como função do número de onda normalizado  $q$  para o caso sem poeira (linhas contínuas) e com densidade de poeira  $\varepsilon = 5,0 \times 10^{-6}$  (linhas tracejadas). A figura 5(a) mostra as raízes para o modo whistler ( $s = 1, a$  e  $s = -1, a$ ) enquanto que 5(b) para o

modo íon-cíclotron ( $s = -1, b$  e  $s = 1, b$ ), as curvas para os diferentes sinais de  $s$  acabam se sobrepondo nesses gráficos para  $z_i$ , ou seja, as ondas de um mesmo modo que se propagam em diferentes direções (sinais de  $z_r$  contrários) possuem mesma taxa de amortecimento.

Na figura 5(a) vemos que o amortecimento das ondas whistler é desprezível no caso sem poeira (linhas contínuas), mas se torna significativo mesmo na presença de uma pequena quantidade de grãos (linhas tracejadas). Para as ondas íon-cíclotron (figura 5(b)) o amortecimento para  $\varepsilon = 0$  também é desprezível para pequenos valores de  $q$ , mas possui valores não nulos quando  $q \simeq 1$ . Esse efeito é conhecido como amortecimento íon-cíclotron, causado pela ressonância onda-partícula que ocorre para  $\omega \simeq \Omega_i$ . Na presença de poeira, esse modo também apresenta o surgimento de uma nova taxa de amortecimento, o qual tende a dominar sobre o amortecimento íon-cíclotron, mesmo para o pequeno valor de densidade de poeira considerado ( $\varepsilon = 5,0 \times 10^{-6}$ ).

Esse novo mecanismo de amortecimento dos modos Alfvén já é conhecido (De Juli et al., 2005; Ziebell et al., 2005) e é causado pelo termo imaginário  $i\tilde{\nu}_\alpha$  que aparece na relação de dispersão quando há presença de poeira no plasma. Esse termo descreve a taxa média de colisões inelásticas entre as partículas do plasma e os grãos de poeira. De Juli et al. (2005) mostraram que na aproximação de  $\tilde{\nu}_\alpha = 0$  essa nova taxa de amortecimento some, de modo que a presença da poeira irá apenas modificar levemente o amortecimento não colisional do modo íon-cíclotron que aparece mesmo sem poeira, devido ao desbalanço entre elétrons e íons do plasma. Sendo assim, esse novo mecanismo de amortecimento observado na presença de poeira é devido às colisões inelásticas entre a poeira e as partículas do plasma.

Ainda é possível observar nesses gráficos o efeito que o processo de fotoionização da poeira causa no amortecimento dessas ondas, algo ainda não investigado na literatura. Representamos o caso sem fotoionização como  $T_s = 0$  K e, para o caso de incidência de radiação na poeira, mostramos três diferentes casos: onde os grãos de poeira continuam com uma carga de equilíbrio negativa ( $T_s = 4500$  K) a exemplo do caso sem incidência de radiação; onde a poeira é eletricamente nula ( $T_s \simeq 4620$  K); e quando a poeira fica positivamente carregada ( $T_s = 5000$  K).

Nota-se que, em geral, um maior fluxo de radiação (representado por maiores temperaturas da estrela) tende a diminuir a taxa de amortecimento desses modos de onda para os parâmetros considerados. Entretanto, para valores muito pequenos de número de onda, o comportamento das curvas de amortecimento pode mudar quando há uma troca de sinal da carga elétrica da poeira.

Esse comportamento das taxas de amortecimento na região de pequeno número de onda já é conhecido para o caso de grãos negativos (De Juli et al., 2005; Ziebell et al., 2005; Gaelzer et al., 2010), onde apenas a absorção de partículas é considerada como mecanismo de carregamento da poeira. Nesse caso as ondas whistler, circularmente po-

larizadas à direita, com comprimento de onda tendendo a infinito ( $q$  pequeno) tendem a ser fortemente absorvidas. Enquanto isso, observa-se que as ondas íon-cíclotron, circularmente polarizadas à esquerda, possuem amortecimento quase nulo para comprimento de onda tendendo a infinito.

Porém, com a inclusão do efeito fotoelétrico e quando a corrente de fotoionização é tal que os grãos de poeira adquirem carga positiva ou nula, observamos uma inversão nesse comportamento para pequeno número de onda. Agora, o modo polarizado à direita (whistler) apresenta taxa quase nula de amortecimento para grandes comprimentos de onda, enquanto que o modo polarizado à esquerda (íon-cíclotron) é fortemente absorvido nessa região. Com isso, vemos que a polarização da onda, junto com a carga da poeira, pode determinar se ondas com grande comprimento de onda serão fortemente absorvidas ou irão apresentar taxas de amortecimento quase nulas. Entretanto, ao diminuir o comprimento de onda (maior  $q$ ) ambos os modos tendem a apresentar resultados similares, com a taxa de amortecimento diminuindo conforme a carga de equilíbrio da poeira aumenta.

No trabalho de De Juli et al. (2005) foi mostrado que esse amortecimento causado pelas colisões inelásticas existentes na presença de poeira aumenta quando aumentamos a densidade de grãos de poeira, com  $\epsilon$  entre  $1 - 5 \times 10^{-6}$ . Para densidades maiores, veremos mais adiante que os modos de onda podem apresentar regiões onde o amortecimento diminui com o aumento da densidade de poeira, para um certo valor de número de onda.

É interessante notar na figura 5 que mesmo na presença de grãos positivos, o que aumenta a população de elétrons no plasma e a taxa de colisões com essa espécie, a taxa de amortecimento tende a diminuir (exceto para a região de  $q$  muito pequeno nas ondas íon-cíclotron). Porém, como já dissemos, essa taxa de amortecimento é causada pelas colisões inelásticas com a poeira, portanto, era de se esperar que o aumento das colisões, causado pela presença de mais elétrons no plasma, fosse aumentar o amortecimento das ondas.

Para investigar melhor esse efeito, a figura 6 mostra as taxas de amortecimento das ondas whistler e íon-cíclotron quando desprezamos as colisões inelásticas da poeira com íons ou com elétrons. As linhas pretas reproduzem o caso observado na figura 5 para  $\epsilon = 0$  (linhas contínuas) ou para  $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$  com grãos positivos (linhas tracejadas). A aproximação  $\tilde{\nu}_i = 0$  (linhas marrons) despreza as colisões inelásticas da poeira com os íons do plasma, enquanto que o caso  $\tilde{\nu}_e = 0$  (linhas azuis) despreza as colisões da poeira com os elétrons.

É possível verificar na figura 6(b) que, para os parâmetros considerados, a taxa de amortecimento do modo íon-cíclotron é quase exclusivamente causado pelas colisões inelásticas da poeira com íons, já que a linha  $\tilde{\nu}_i = 0$ , onde despreza-se colisões com íons, praticamente reproduz o caso onde não há presença de poeira. Enquanto isso, a linha  $\tilde{\nu}_e = 0$  é semelhante ao caso onde nenhuma colisão é desprezada, indicando pouca

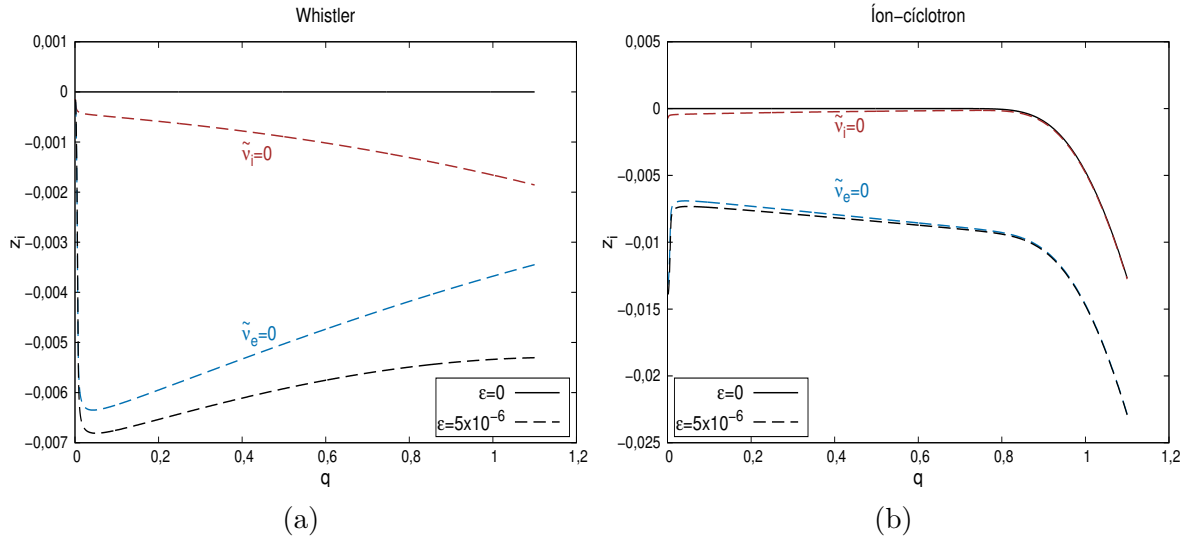


Figura 6 – Parte imaginária da frequência normalizada  $z_i$  como função do número de onda normalizado  $q$  no caso  $T_s = 5000$  K para: (a) modo whistler; (b) modo íon-cíclotron. Linhas contínuas representam o caso de um plasma sem poeira e linhas tracejadas o caso de um plasma empoeirado com  $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ . Linhas marrons ( $\tilde{\nu}_i = 0$ ) desconsideram as colisões inelásticas entre a poeira e íons, enquanto linhas azuis ( $\tilde{\nu}_e = 0$ ) desconsideram colisões inelásticas entre a poeira e elétrons.

influência das colisões da poeira com elétrons.

Para o caso das ondas whistler, ilustrado pela figura 6(a), também é possível observar uma maior influência da taxa de colisões da poeira com íons no intervalo considerado. Porém, aqui as colisões com elétrons não são tão desprezíveis para a taxa de amortecimento como no caso das ondas íon-cíclotron, e tendem a ser mais importantes para maiores valores de número de onda.

Essa análise pode explicar o fato de que um maior fluxo de radiação tende a diminuir a taxa de amortecimento, como observado na figura 5. Mesmo que a maior incidência de fótons aumente o número de elétrons presentes no plasma por fotoionização, as colisões da poeira com essa espécie não têm tanta influência no amortecimento das ondas como as colisões com íons. Ainda, o fluxo maior de radiação irá deixar o grão com uma carga de equilíbrio maior, diminuindo a taxa de colisões com íons, como é possível observar na equação (5.13), e como consequência, irá diminuir a taxa de amortecimento desses modos de onda.

O efeito das temperaturas das espécies do plasma é investigada para o caso de  $T_e/T_i = 5$ , na figura 7. Essa é uma situação mais próxima da realidade já que elétrons tendem a adquirir mais energia que os íons devido aos fotoelétrons emitidos pela poeira, os quais adicionam energia para essa espécie do plasma. Essa situação é investigada de duas maneiras, diminuindo a temperatura dos íons cinco vezes para  $T_i = 2 \times 10^3$  K ou aumentando a temperatura dos elétrons cinco vezes para  $T_e = 5 \times 10^4$  K.

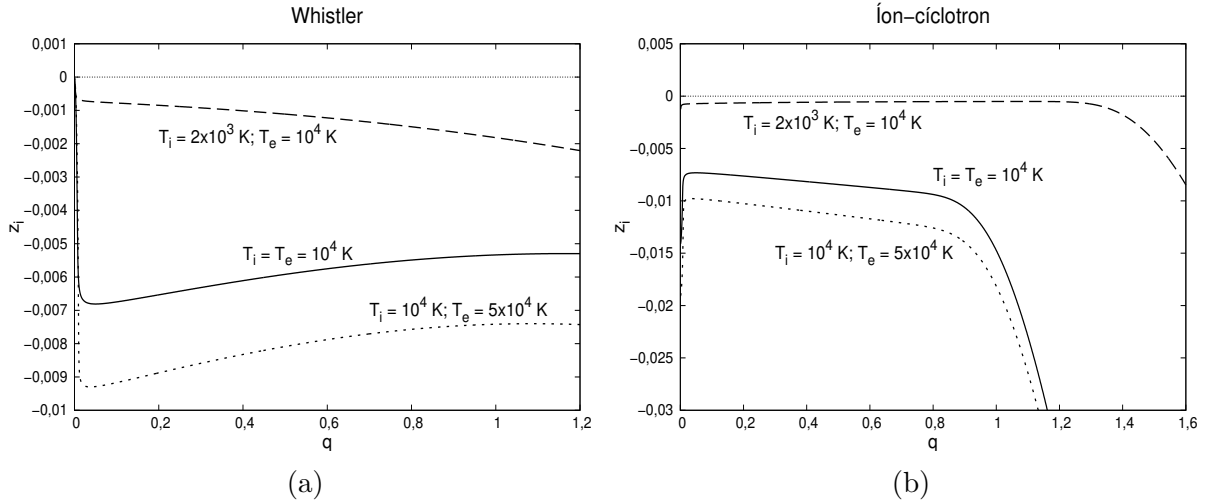


Figura 7 – Parte imaginária da frequência normalizada  $z$  como função do número de onda normalizado  $q$  no caso de  $T_s = 5000$  K para:  $T_i = T_e = 10^4$  K (linhas contínuas);  $T_i = 2 \times 10^3$  K e  $T_e = 10^4$  K (linhas tracejadas);  $T_i = 10^4$  K e  $T_e = 5 \times 10^4$  K (linhas pontilhadas).

As figuras 7(a) e 7(b) mostram que a variação da temperatura dos elétrons não altera qualitativamente a taxa de amortecimento dos modos whistler e íon-cíclotron. Entretanto, ao diminuir a temperatura dos íons do plasma, o modo whistler apresenta menores taxas de amortecimento no intervalo considerado e, ainda, vemos que essa taxa tende a aumentar com o número de onda  $q$ , comportamento diferente dos outros casos mostrados no gráfico. Essa curva para  $T_i = 2 \times 10^3$  K do modo whistler se assemelha ao comportamento da curva  $\tilde{\nu}_i = 0$  da figura 6(a), indicando uma maior influência da taxa de colisões da poeira com elétrons no amortecimento desse modo quando comparado ao caso  $T_i = 10^4$  K.

Para as ondas íon-cíclotron, onde vimos anteriormente que a taxa de amortecimento é quase exclusivamente provocada pelas colisões com íons, nota-se que ao diminuir a temperatura dos íons para  $T_i = 2 \times 10^3$  K o amortecimento devido às colisões inelásticas se torna muito pequeno, sendo quase independente de  $q$ . Também observamos que o amortecimento íon-cíclotron, presente mesmo no plasma sem poeira, nesse caso surge para valores maiores de número de onda, próximo a  $q = 1,4$ .

Vamos investigar agora o efeito da fotoionização na propagação e amortecimento nos modos whistler e íon-cíclotron para um valor fixo do número de onda  $q$  e variando a razão da densidade de poeira pela densidade de íons  $\varepsilon$ , utilizando o conjunto de parâmetros apresentados no início da seção 5.2. A figura 8 mostra os gráficos das partes reais e imaginárias da frequência de onda normalizada  $z$  como função de  $\varepsilon$  para  $q = 0,1$ . As raízes são identificadas com auxílio da figura 3 para  $\varepsilon = 0$ , as curvas tracejadas correspondem ao modo whistler enquanto que as linhas contínuas são as ondas íon-cíclotron.

As figuras 8(a) e 8(b) ilustram o caso onde consideramos apenas a absorção de



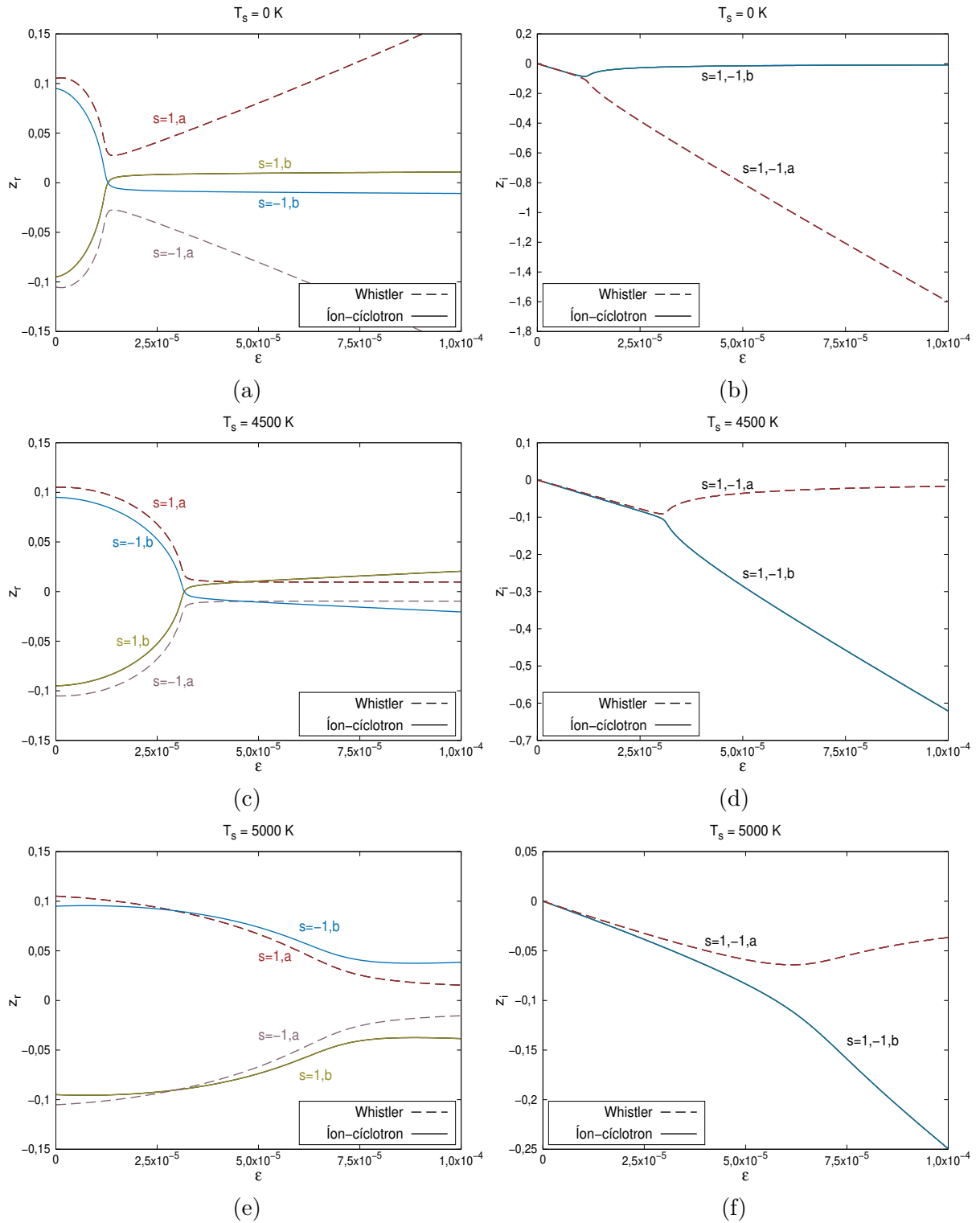


Figura 8 – Partes reais (esquerda) e imaginárias (direita) de  $z$  como função de  $\varepsilon$  para valor constante de  $q = 0,1$  e três casos do fluxo de radiação, determinado pela temperatura da estrela  $T_s$ .

partículas como processo de carregamento da poeira ( $T_s = 0$  K). Esse caso já foi estudado em outros trabalhos (De Juli et al., 2005; Ziebell et al., 2005) para os mesmos parâmetros, apesar disso, reproduzimos esses gráficos aqui a fim de comparar com o caso onde a

fotoionização é incluída.

No caso sem fotoionização, a figura 8(a) mostra que as raízes correspondentes ao modo whistler apresentam valores decrescentes de  $|z_r|$  para valores crescentes de  $\varepsilon$  até um certo ponto, depois esses valores começam a crescer quase linearmente com  $\varepsilon$ . Os modos íon-cíclotron também apresentam valores decrescentes de  $|z_r|$  até um certo ponto de  $\varepsilon$  onde há um encontro das ondas em sentido positivo e negativo, depois disso seus valores se mantêm praticamente constantes para grandes valores da densidade de poeira.

Já para as partes imaginárias do caso sem fotoionização da poeira, vemos na figura 8(b) que as taxas de amortecimento de ambos os modos crescem com o aumento da densidade de poeira até um certo valor de  $\varepsilon$ , após esse ponto a taxa das ondas whistler continuam a crescer rapidamente enquanto que a taxa das ondas íon-cíclotron são gradualmente reduzidas com o aumento de  $\varepsilon$ .

Quando consideramos também a fotoionização no carregamento elétrico da poeira e assumimos um fluxo de radiação de corpo negro vinda da estrela com temperatura superficial de  $T_s = 4500$  K (grãos ainda negativos), obtemos os resultados mostrados nos gráficos 8(c) e 8(d). Observamos na figura 8(c) que os modos whistler e íon-cíclotron novamente possuem valores decrescentes de  $|z_r|$  até um certo valor de  $\varepsilon$ , porém, para valores maiores de  $\varepsilon$  esses modos possuem comportamentos diferentes quando comparados à figura 8(a), agora as ondas whistler mantêm um valor praticamente contante de  $|z_r|$  para grandes valores da densidade de poeira enquanto as ondas íon-cíclotron apresentam valores crescentes de  $|z_r|$ .

Também notamos que o ponto de  $\varepsilon$  onde as ondas íon-cíclotron se encontram é maior no caso com fotoionização, e que as curvas correspondentes ao modo whistler encontram as curvas correspondentes ao modo íon-cíclotron. Esse acoplamento entre os diferentes modos também acontece para o caso sem incidência de fótons, como mostrado por Ziebell et al. (2005), mas para um valor maior de número de onda (a partir de  $q \simeq 0,2$  para esses parâmetros). Pode-se dizer, então, que a presença da fotoionização tende a diminuir esse valor mínimo de  $q$  no qual ocorre o acoplamento entre os modos whistler e íon-cíclotron. Lembramos também que esse caso onde  $T_s = 4500$  K ainda corresponde a um grão negativamente carregado (ver figura 2(b)), de modo que um resultado similar deve ser encontrado mesmo sem considerar a fotoionização, apenas utilizando parâmetros do plasma que resultem em uma carga líquida do grão da mesma ordem, seja diminuindo a corrente de absorção de elétrons ou aumentando a absorção de íons.

A figura 8(d) mostra que as partes imaginárias desses modos também possuem comportamentos distintos ao considerar a emissão fotoelétrica no formalismo, nesse caso são as ondas íon-cíclotron que apresentam taxas de amortecimento crescentes para grandes valores de  $\varepsilon$  enquanto as taxas do modo whistler diminuem gradualmente, diferentemente do que é observado na figura 8(b) onde não há fotoionização da poeira. Esse efeito também

foi observado para o caso sem fotoionização da poeira (Ziebell et al., 2005) para valores maiores de número de onda, como mencionado anteriormente.

O caso de grãos positivos ( $T_s = 5000$  K) é ilustrado nas figuras 8(e) e 8(f). Nota-se que as taxas de amortecimento dos modos não apresenta grandes mudanças quando comparado ao caso anterior, com as ondas íon-cíclotron apresentando valores crescentes de amortecimento ao aumentar a densidade de poeira, enquanto o amortecimento das ondas whistler tende a diminuir para grandes valores de  $\varepsilon$ . Enquanto isso, a figura 8(e) mostra que as curvas correspondentes às partes reais das ondas íon-cíclotron agora não se cruzam mais, característica que não havia sido observada para esses parâmetros.

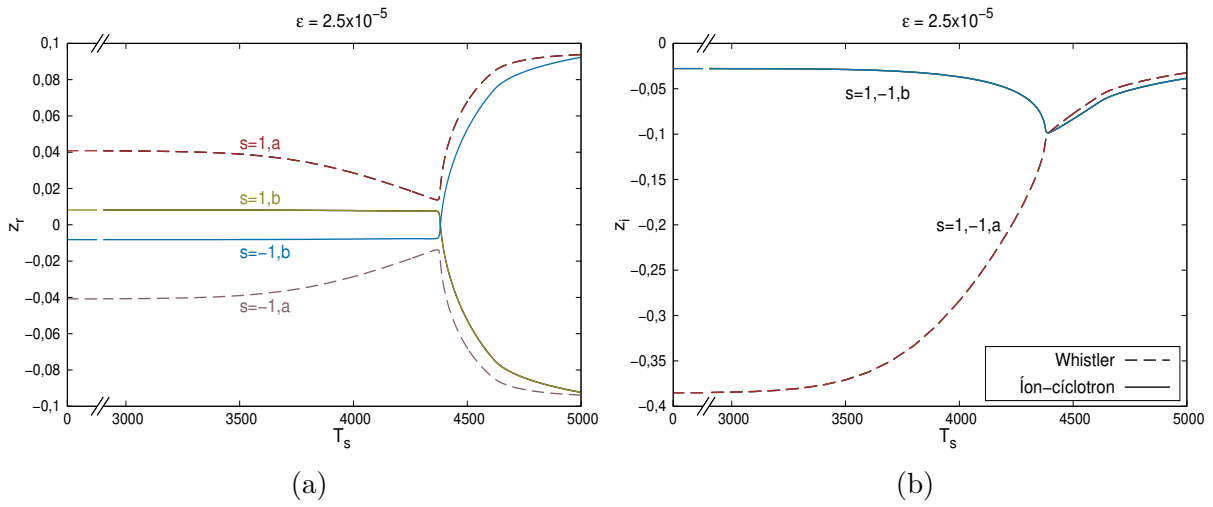


Figura 9 – Partes reais (esquerda) e imaginárias (direita) das frequências  $z$  como função de  $T_s$  para valores constantes de  $q = 0,1$  e de  $\varepsilon = 2,5 \times 10^{-5}$ .

Na figura 9 é possível observar melhor a dependência de  $z_r$  e  $z_i$  com o fluxo de radiação  $T_s$  para um número de onda constante  $q = 0,1$  e densidade de poeira fixa em  $\varepsilon = 2,5 \times 10^{-5}$ , com o restante dos parâmetros iguais à análise anterior. Como antes, linhas tracejadas representam os modos whistler e linhas contínuas os modos íon-cíclotron, identificados a partir do valor que apresentam para  $T_s = 0$  K para esse valor de  $\varepsilon$  na figura 8(a). Nota-se que os valores das partes reais e imaginárias de  $z$  praticamente não se alteram até  $T_s \simeq 3500$  K, já que a magnitude da corrente de fotoionização da poeira é muito pequena nesse intervalo de temperaturas.

Podemos observar que, para os parâmetros considerados, as ondas íon-cíclotron apresentam valores constantes de  $z_r$  com o aumento do fluxo de radiação até um certo ponto onde as duas curvas correspondentes a esse modo se cruzam e passam crescer junto com  $T_s$ . As ondas whistler exibem valores decrescentes a partir de  $T_s \simeq 3500$  K até o ponto de acoplamento das ondas íon-cíclotron, quando passa a apresentar valores crescentes com o aumento do fluxo de radiação incidente.

Vemos também que o modo whistler apresenta taxas cada vez menores de amorte-

cimento ao aumentar o fluxo de radiação. Enquanto isso, o modo íon-cíclotron exibe uma região de temperaturas  $T_s$  onde sua taxa de amortecimento aumenta com o aumento da radiação incidente, depois de um certo ponto, por volta de  $T_s \simeq 4300$  K, passa a diminuir. Nessa região, notamos que o amortecimento das ondas whistler passa a ser maior que das ondas íon-cíclotron.

Os resultados obtidos para os modos eletromagnéticos em propagação paralela podem ser resumidos da seguinte maneira:

- Na presença de poeira, o modo Alfvén se desacopla entre os modos whistler e íon-cíclotron em todos os valores de número de onda quando a poeira apresenta carga de equilíbrio negativa, mas apresentam uma região de acoplamento quando a poeira está eletricamente nula ou positiva (figuras 3 e 4).
- As ondas whistler e íon-cíclotron são não propagantes (i. e., têm velocidade de grupo nula) em um determinado intervalo de valores de número de onda (figuras 3 e 4).
- O valor máximo do número de onda onde as ondas são não propagantes diminui com a inclusão da emissão fotoelétrica (figura 4).
- Ambos os modos whistler e íon-cíclotron são fortemente amortecidos na presença de poeira, mas o amortecimento também é substancialmente reduzido quando a emissão fotoelétrica está presente (exceto para número de onda pequeno), pelo menos para os parâmetros considerados na figura 5.
- O comportamento das taxas de amortecimento dos modos whistler e íon-cíclotron para valores pequenos de número de onda se inverte no caso de grãos eletricamente nulos ou positivos, em relação ao caso com grãos negativamente carregados (figura 5).
- O amortecimento causado pelas colisões inelásticas da poeira com os íons do plasma tende a ser predominante frente ao amortecimento causado pelas colisões da poeira com os elétrons. Como consequência, esse amortecimento pode diminuir substancialmente ao reduzir a temperatura dos íons do plasma (figuras 6 e 7).
- Com a emissão fotoelétrica, o comportamento das taxas de amortecimento de ambos os modos com o aumento de  $\epsilon$  se inverte em relação a um plasma onde não há incidência de fótons, para um mesmo valor de número de onda (figura 8).

Estes resultados mostram que as ondas de Alfvén são substancialmente alteradas em um plasma empoeirado e, por consequência, a subsequente dinâmica não linear de interação entre ondas e partículas do plasma deve ser também alterada. Dessa forma, acreditamos que os efeitos descritos por nossos resultados venham a resultar em alterações importantes na evolução dos ventos estelares oriundos de estrelas ricas em carbono e, por esta razão, estudos posteriores se fazem necessários.

### 5.2.3 Ondas eletrostáticas

Vamos agora buscar numericamente as raízes da relação de dispersão (5.10) a fim de estudar a propagação e amortecimento das ondas eletrostáticas. Notamos primeiramente que a componente  $\epsilon_{zz}^F$  dada por (C.32) é proporcional a  $H(Q_0)$  (ver equação (B.51)). Assim, quando a carga de equilíbrio dos grãos de poeira for negativa, o termo  $\epsilon_{zz}^F$  será sempre nulo. Por isso, iremos considerar os casos de  $T_s = 0$  K e  $T_s = 4500$  K, onde a poeira adquire carga elétrica de equilíbrio negativa para o conjunto de parâmetros mencionados no início da seção 5.2, conforme figuras 2(a) e 2(b).

Além disso, De Juli et al. (2009) mostraram que a contribuição do termo  $\epsilon_{zz}^A$  é desprezível frente à contribuição de  $\epsilon_{zz}^C$  para os parâmetros utilizados neste trabalho na relação de dispersão para ondas de Langmuir e íon-acústicas. Sendo assim, faremos seguinte aproximação para a relação de dispersão (5.10):

$$\epsilon_{zz}^C = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \hat{I}_{\alpha}^0 \simeq 0. \quad (5.25)$$

Utilizando o resultado (C.51) da integral  $\hat{I}_{\alpha}^0$  para distribuições Maxwellianas temos a seguinte relação de dispersão para ondas eletrostáticas:

$$1 + 2 \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \zeta_{\alpha}^0 \hat{\zeta}_{\alpha}^0 [1 + \hat{\zeta}_{\alpha}^0 Z(\hat{\zeta}_{\alpha}^0)] = 0, \quad (5.26)$$

onde

$$\hat{\zeta}_{\alpha}^0 = \frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{k_{\parallel} \sqrt{2} v_{T\alpha}}, \quad \zeta_{\alpha}^0 = \frac{\omega}{\sqrt{2} v_{T\alpha} k_{\parallel}}. \quad (5.27)$$

Para escrever a relação de dispersão na forma adimensional introduzimos as seguintes quantidades adimensionais:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\omega}{\omega_{pe}}, & \varepsilon &= \frac{n_{d0}}{n_{i0}}, & u_{\alpha} &= \frac{v_{T\alpha}}{c_s}, & \gamma &= \frac{\lambda^2 n_{i0} c_s}{\omega_{pe}}, & \tilde{a} &= \frac{a}{\lambda}, & \lambda &= \frac{e^2}{k_B T_i}, \\ \tau_e &= \frac{T_e}{T_i}, & q &= \frac{k_{\parallel} c_s}{\omega_{pe}}, & \tilde{\nu}_{\alpha} &= \frac{\nu_{\alpha}}{\omega_{pe}}, & r_{\alpha} &= \frac{\omega_{p\alpha}}{\omega_{pe}}, & \chi_{\alpha} &= \frac{q_{\alpha} Q_0}{a k_B T_{\alpha}}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde  $\omega_{p\alpha} = (4\pi n_{\alpha 0} q_{\alpha}^2 / m_{\alpha})^{1/2}$  é a frequência de plasma para as partículas da espécie  $\alpha$  no equilíbrio e

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \quad (5.29)$$

é a velocidade íon-acústica.

Em termos dessas quantidades a relação de dispersão é escrita na forma

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{r_{\alpha}^2}{q^2 u_{\alpha}^2} \left(1 + i \frac{\tilde{\nu}_{\alpha}}{z}\right) [1 + \hat{\zeta}_{\alpha}^0 Z(\hat{\zeta}_{\alpha}^0)] = 0, \quad (5.30)$$

onde

$$\hat{\zeta}_{\alpha}^0 = \frac{z + i\tilde{\nu}_{\alpha}}{\sqrt{2} q u_{\alpha}} \quad (5.31)$$

e

$$\tilde{\nu}_\alpha = 2\sqrt{2\pi}\tilde{a}^2\varepsilon u_\alpha\gamma \begin{cases} (1 + |\chi_\alpha|) , & \chi_\alpha \leq 0 \\ \exp(-|\chi_\alpha|) , & \chi_\alpha > 0 \end{cases} . \quad (5.32)$$

### 5.2.3.1 Ondas de Langmuir

Vamos inicialmente analisar o caso de ondas de alta frequência onde  $\omega \simeq \omega_{pe}$ . Ondas eletrostáticas nesse intervalo de frequências são conhecidas como ondas de Langmuir. Resolvemos numericamente a equação (5.30) utilizando o mesmo conjunto de parâmetros apresentado no início da seção 5.2, com  $n_{i0} = 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ,  $T_i = T_e = 10^4 \text{ K}$ ,  $a = 10^{-4} \text{ cm}$  e  $T_s = 0$  ou  $4500 \text{ K}$ .

A figura 10 mostra os valores da parte real e imaginária da frequência normalizada  $z$  como função do número de onda normalizado  $q$  e da razão de densidade de poeira por densidade de íons  $\varepsilon$ . A superfície azul representa o caso sem corrente fotoelétrica ( $T_s = 0 \text{ K}$ ) enquanto que a superfície marrom leva em conta a fotoemissão de elétrons pela poeira ( $T_s = 4500 \text{ K}$ ). Nota-se que ambas quantidades  $z_r$  e  $z_i$  se mostram quase insensíveis à presença de poeira, de modo que a corrente de fotoionização provoca pouca mudança na propagação e amortecimento dessas ondas dentro dos parâmetros analisados.

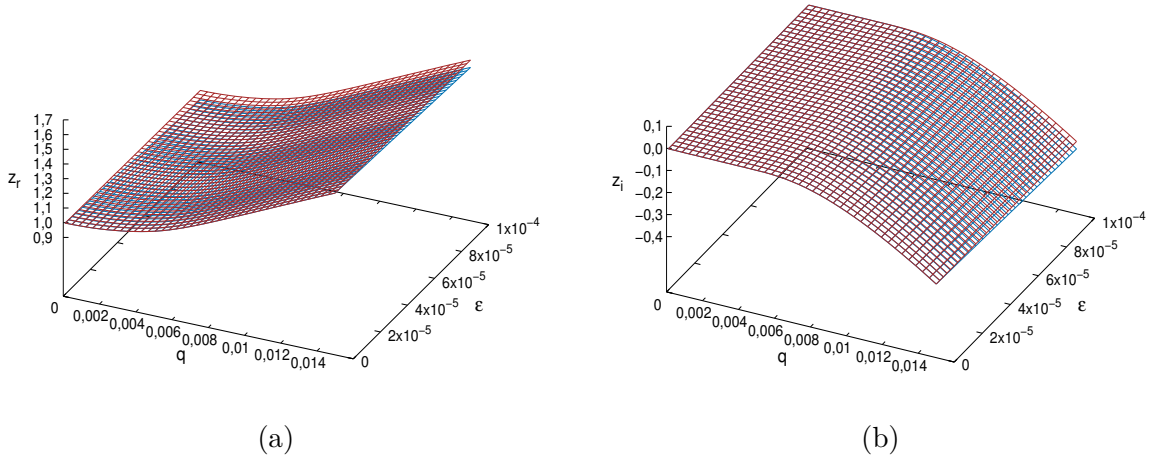


Figura 10 – (a) Parte real da frequência normalizada  $z_r$  e (b) parte imaginária  $z_i$  como funções de  $q$  e  $\varepsilon$  para ondas de Langmuir. A superfície azul representa o caso onde se considera apenas a corrente de absorção de partículas enquanto que a superfície marrom representa o caso com ambas correntes de absorção e de fotoionização como mecanismos de carregamento elétrico dos grãos de poeira.

Observamos na figura 10(b) a presença de uma taxa significativa de amortecimento dessas ondas a partir de um certo valor de número de onda ( $q \simeq 0,004$ ). Esse é um amortecimento não colisional, conhecido como amortecimento de Landau, e acontece mesmo na ausência de poeira no plasma, como é possível observar na região  $\varepsilon = 0$ . Nota-se

que a fotoemissão tende a atenuar levemente o amortecimento de Landau das ondas de Langmuir para grandes densidades de poeira.

Porém, uma visão ampliada da região de  $q$  pequeno, ilustrado pela figura 11, mostra o aparecimento de um novo mecanismo de amortecimento na presença de poeira. Esse amortecimento praticamente independente de  $q$  para pequeno número de onda e é devido às colisões inelásticas dos elétrons e íons com os grãos de poeira, descritas pelas quantidades  $\tilde{\nu}_e$  e  $\tilde{\nu}_i$  (Schneider et al., 2006), como vimos no caso das ondas de Alfvén.

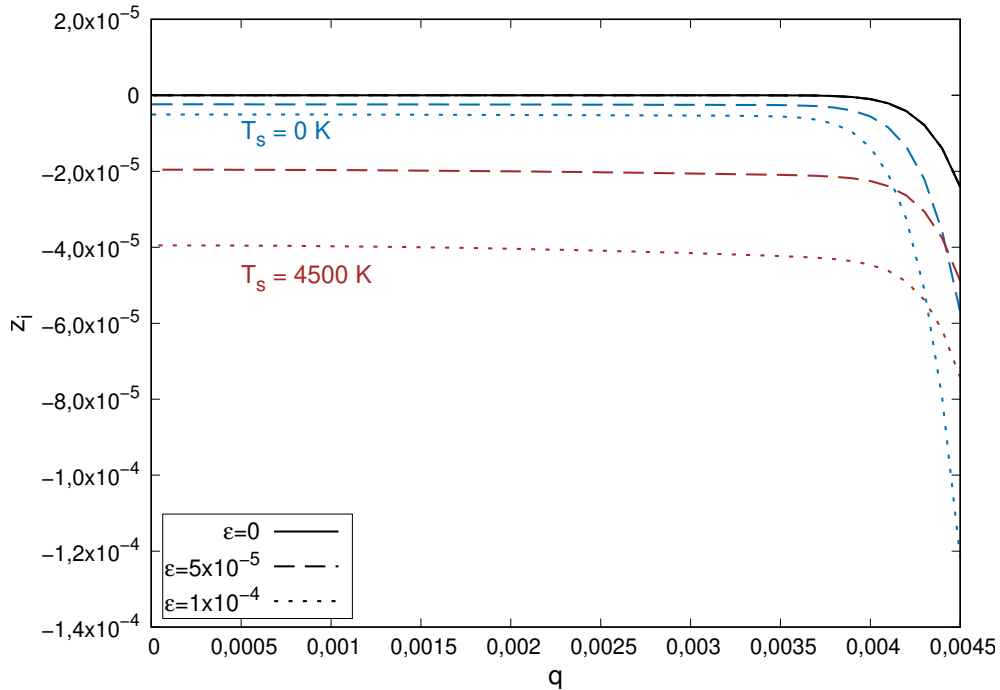


Figura 11 – Parte imaginária da frequência normalizada  $z_i$  como função do número de onda normalizado  $q$  para ondas de Langmuir considerando três valores da razão da densidade de poeira pela densidade de íons:  $\epsilon = 0$  (linhas contínuas),  $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$  (tracejado) e  $\epsilon = 1 \times 10^{-4}$  (pontilhado). Linhas azuis consideram apenas a absorção de partículas como mecanismo de carregamento enquanto linhas marrons consideram absorção e fotoionização.

Percebe-se que o caso onde se considera a fotoemissão (linhas marrons) possui maior taxa de amortecimento que o caso onde se considera apenas a absorção de partículas (linhas azuis) na região de  $q$  pequeno. Entretanto, uma vez que as curvas entram na região onde o amortecimento de Landau passa a ser significativo (onde a linha  $\epsilon = 0$  mostra valores não nulos de  $z_i$ ) o sistema que considera fotoemissão de elétrons passa a ter uma taxa de amortecimento menor quando comparado ao que não leva em conta o efeito fotoelétrico.

Vemos também que uma maior densidade de grãos de poeira tende a aumentar a taxa de amortecimento dessas ondas. Isso pode ser explicado pelo fato de que a presença de mais grãos de poeira irá aumentar a taxa de colisões das partículas do plasma com a poeira. Como esse amortecimento para  $q$  pequeno é causado pelas colisões inelásticas, como já

vimos nas ondas de Alfvén, essa taxa maior de colisões irá aumentar o amortecimento desse modo.

Porém, nota-se aqui um efeito distinto da fotoionização quando comparamos com os modos eletromagnéticos (figura 5). Para as ondas de Langmuir, o aumento do fluxo de fótons irá aumentar a taxa de amortecimento dessas ondas, enquanto que as ondas whistler e íon-cíclotron apresentam, em geral, amortecimentos menores com maior incidência de radiação.

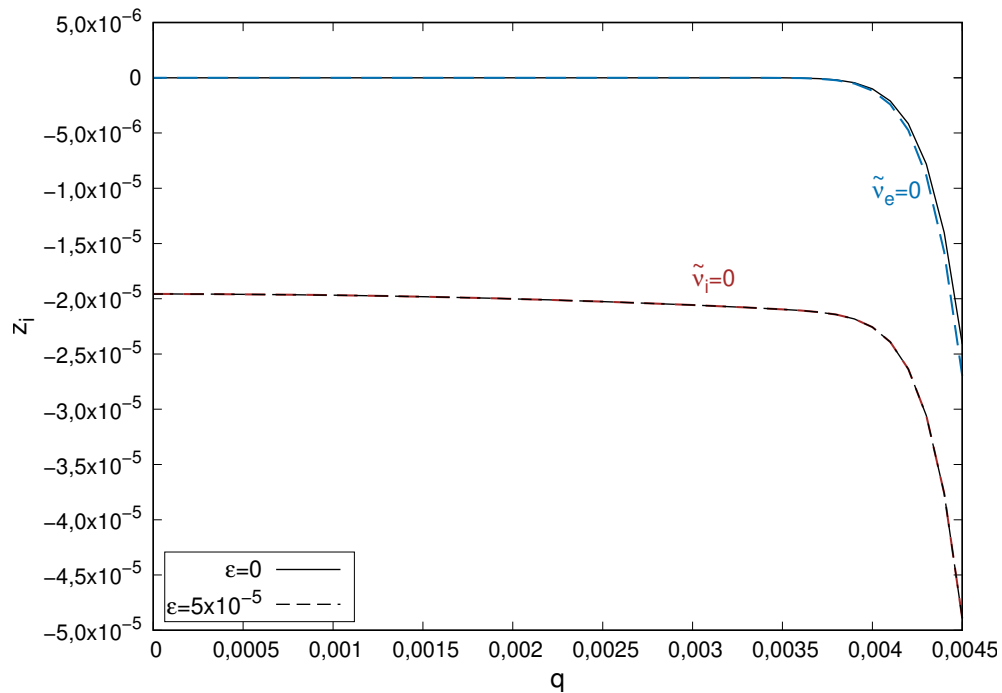


Figura 12 – Parte imaginária da frequência normalizada  $z_i$  como função do número de onda normalizado  $q$  para ondas de Langmuir, com  $\epsilon = 0$  (linhas contínuas) ou  $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$  (tracejado). Linhas marrons ( $\tilde{\nu}_i = 0$ ) desconsideram as colisões inelásticas entre a poeira e íons, enquanto linhas azuis ( $\tilde{\nu}_e = 0$ ) desconsideram colisões inelásticas entre a poeira e elétrons.

Para explicar esse aumento da taxa de amortecimento das ondas de Langmuir com o aumento do fluxo de fótons incidente na poeira, ilustramos na figura 12 a taxa de amortecimento dessas ondas quando desprezamos a taxa de colisões inelásticas  $\tilde{\nu}$  da poeira com os íons ou com os elétrons do plasma. O caso sem poeira é dado pela linha contínua preta enquanto que a linha tracejada preta ilustra a taxa de amortecimento para  $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$  e  $T_s = 4500$  K.

É possível notar que a linha onde é desprezada a taxa de colisões da poeira com íons ( $\tilde{\nu}_i = 0$ ) basicamente reproduz o caso onde nenhuma colisão é tomada como nula. Enquanto isso, quando negligenciamos as colisões com elétrons ( $\tilde{\nu}_e = 0$ ) a taxa de amortecimento para  $q$  pequeno praticamente some, alterando apenas o amortecimento de Landau, devido ao desbalanço entre as espécies do plasma.



Lembramos que uma análise parecida foi feita para as ondas eletromagnéticas (figura 6) onde foi mostrado que, para as ondas whistler e íon-cíclotron, a taxa de colisões da poeira com íons é mais determinante para o amortecimento desses modos. Agora vemos que, para as ondas de Langmuir, são as colisões da poeira com elétrons que causam o surgimento dessa taxa de amortecimento.

Sendo assim, como um maior fluxo de fótons irá aumentar a população de elétrons no plasma e, ainda, irá aumentar a carga elétrica da poeira, diminuindo a força repulsiva dos grãos com os elétrons (e aumentando a repulsão da poeira com íons), teremos uma maior taxa de colisões da poeira com elétrons e menor taxa de colisões com íons. Para as ondas whistler e íon-cíclotron, isso irá fazer com que a taxa de amortecimento diminua já que as colisões da poeira com íons é mais importante, como já foi visto. Porém, para as ondas de Langmuir, esse amortecimento irá aumentar já que ele é quase exclusivamente causado pelas colisões da poeira com elétrons, as quais tendem a aumentar com o aumento do fluxo de radiação.

### 5.2.3.2 Ondas íon-acústicas

Vamos agora analisar o caso de frequências bem abaixo da frequência de plasma dos elétrons,  $\omega \ll \omega_{pe}$ . Nessa faixa de frequências temos as ondas íon-acústicas, essas ondas tendem a ser mais significativas quando a temperatura dos elétrons é maior que a dos íons, pois elas são altamente amortecidas quando  $T_e = T_i$  (Krall et al., 1973). Por isso, escolhemos trabalhar com  $T_e = 20 T_i$  na obtenção das raízes numéricas da relação de dispersão (5.30) com o restante dos parâmetros sendo os mesmos utilizados na análise anterior.

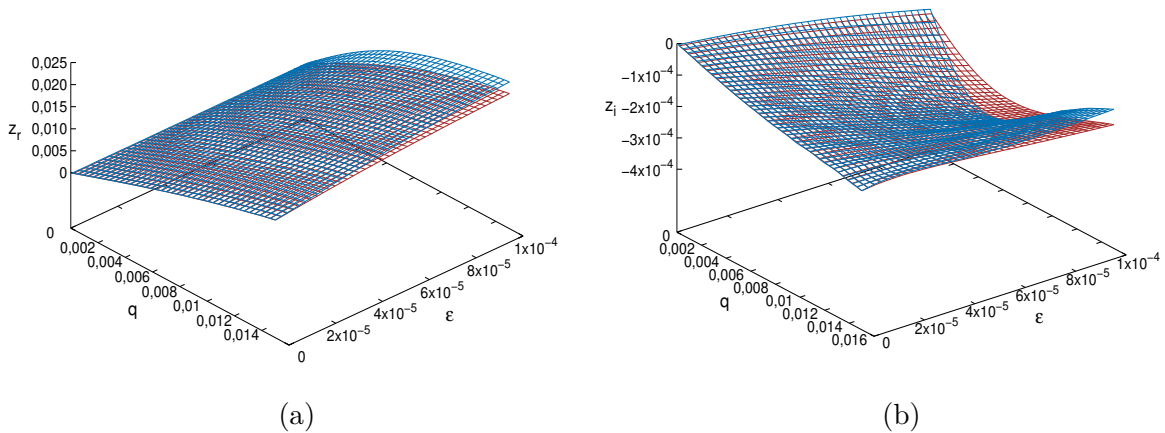


Figura 13 – (a) Parte real da frequência normalizada  $z_r$  e (b) parte imaginária  $z_i$  como funções de  $q$  e  $\epsilon$  para ondas íon-acústicas com  $T_e = 20 T_i$ . A superfície azul representa o caso onde se considera apenas a corrente de absorção de partículas enquanto que a superfície marrom representa o caso com ambas correntes de absorção e de fotoionização como mecanismos de carregamento elétrico dos grãos de poeira.

A figura 13 mostra as partes reais e imaginárias das raízes  $z$  como função de  $q$  e  $\varepsilon$  para quando se considera apenas a corrente de absorção (linhas azuis) e quando se considera ambas as correntes de absorção e fotoionização (linhas marrons). A parte real da frequência apresenta pouca mudança com a inclusão do efeito fotoelétrico diminuindo o valor de  $z_r$  com o aumento de  $\varepsilon$  quando comparado ao caso sem fotoionização.

Já a figura 13(b) mostra que, para grandes valores de  $\varepsilon$ , a superfície marrom possui menores valores para a taxa de amortecimento (menor  $|z_i|$ ) até um certo ponto do número de onda  $q$ , após esse ponto ela passa a ter uma taxa maior quando comparada à superfície azul. É possível notar também que a curva  $\varepsilon = 0$  apresenta valores não nulos de  $z_i$  para valores muito pequenos de  $q$ , indicando que o amortecimento de Landau das ondas íon-acústicas já é considerável nessa região, diferente do que acontece para as ondas de Langmuir onde o amortecimento devido às colisões inelásticas tende a dominar para valores muito pequenos de número de onda.

## 6 Conclusões

Realizamos um estudo, baseado na teoria cinética dos plasmas, acerca das modificações que a variação da carga elétrica das partículas de poeira provoca na propagação e amortecimento de ondas eletromagnéticas e eletrostáticas em um plasma empoeirado, homogêneo e magnetizado, quando a poeira é carregada por absorção de partículas do plasma através de colisões inelásticas e por fotoionização.

Começamos por apresentar no capítulo 2 os modelos matemáticos utilizados para calcular as correntes elétricas incidentes nas partículas de poeira. No capítulo 3 foi feita uma revisão da obtenção das equações cinéticas para um plasma convencional e de suas generalizações para o caso de um plasma empoeirado com grãos de poeira imóveis de mesmos tamanhos. A aproximação de grãos imóveis permite simplificar a equação cinética para a função distribuição dos grãos de poeira e limita o estudo para ondas com frequências muito maiores que as frequências características da poeira, excluindo modos de ondas que surgiriam da dinâmica dos grãos.

No capítulo 4 foi feita uma revisão da obtenção do tensor dielétrico para um plasma magnetizado com grãos de poeira eletricamente carregadas por absorção das partículas do plasma e por emissão fotoelétrica. Também foi apresentada nesse capítulo a obtenção da relação de dispersão que relaciona a frequência de uma onda com seu número de onda (ou comprimento de onda), através da qual é possível analisar numericamente a propagação e amortecimento das ondas nesse sistema.

No capítulo 5 apresentamos alguns resultados numéricos obtidos focando a análise na mudança que a adição do processo de fotoionização como mecanismo de carregamento da poeira provoca em ondas se propagando paralelamente ao campo magnético ambiente num plasma homogêneo de elétrons e íons descritos por distribuições Maxwellianas de momenta. Para chegarmos a uma forma mais simples da relação de dispersão, substituímos a frequência de colisões inelásticas (dependente de momentum) por sua média no espaço de momentum, deste modo é possível resolver analiticamente as integrais em momentum na relação de dispersão.

Notamos primeiramente que a relação de dispersão obtida para ondas eletromagnéticas é formalmente semelhante à encontrada em outros trabalhos onde apenas a absorção de partículas é considerada. Ou seja, a mudança que a adição da fotoionização provoca na relação de dispersão está relacionada à carga de equilíbrio da poeira (que também muda a densidade das espécies do plasma) e à frequência média de colisões.

Para a análise numérica utilizamos parâmetros típicos de ventos estelares de estrelas de carbono. Essa escolha é motivada pelo fato de que ondas de Alfvén têm sido

propostas como um possível mecanismo de aceleração para ventos estelares e estrelas de carbono são notáveis por perderem grande parte de sua massa através desses ventos. Com isso, vimos que os grãos de poeira adquirem uma carga de equilíbrio maior com a presença de radiação incidente, podendo ser positiva para determinadas temperaturas superficiais da estrela, a qual emite um espectro de radiação como um corpo negro. Esse aumento da carga elétrica de equilíbrio dos grãos de poeira acarreta um aumento na população de elétrons no plasma e modifica as taxas médias de colisões da poeira com as partículas do plasma.

No estudo das ondas eletromagnéticas identificamos, a partir da figura 3, os modos de onda whistler e íon-cíclotron que se acoplam no modo de Alfvén para pequenos valores de  $q$ . Vimos que na região de pequeno  $q$  (figura 4) esses dois modos deixam de se acoplar em todos os valores de número de onda na presença de poeira com carga elétrica de equilíbrio negativa, mas podem se acoplar para determinado número de onda quando os grãos de poeira possuem carga nula ou positiva. Vimos também que com a presença de poeira, os modos whistler e íon-cíclotron possuem velocidade de grupo nula para um determinado intervalo de número de onda. Esse intervalo onde os modos são não propagantes é reduzido com a inclusão da emissão fotoelétrica.

Analisando as partes imaginárias desses modos (figura 5) observamos que eles são fortemente amortecidos na presença de poeira, devido às colisões inelásticas que ocorrem entre a poeira e as partículas do plasma. Para pequeno número de onda, o comportamento da taxa de amortecimento desses modos se inverte com a inversão do sinal da carga elétrica da poeira. Para valores maiores de número de onda, essas taxas tendem a ser atenuadas com o aumento do fluxo de fótons incidente na poeira, pelo menos para os parâmetros considerados. Vimos que isso pode ser devido ao fato de que o amortecimento desses modos de onda é causado principalmente pelas colisões inelásticas da poeira com os íons do plasma (figura 6). De modo que, para uma carga elétrica mais positiva, a taxa de colisões com íon diminui e, conseqüentemente, o amortecimento é atenuado, para o pequeno valor da densidade de poeira considerado.

Investigamos brevemente o efeito na variação das temperaturas das espécies do plasma no amortecimento dos modos de Alfvén para  $T_e/T_i = 5$  (figura 7). A variação na temperatura dos elétrons altera levemente os valores das taxas de amortecimento dos modos, mas as curvas ainda apresentam comportamento qualitativamente similar ao caso  $T_e = T_i$ . Por outro lado, notamos que ao diminuir a temperatura dos íons por um fator 5 a taxa de amortecimento das ondas íon-cíclotron reduziu drasticamente. Para as ondas whistler, também houve grande diminuição da taxa de amortecimento para  $q$  relativamente pequeno, aumentando essa taxa com o aumento do número de onda, comportamento distinto do caso  $T_e = T_i$ .

Quando fixamos o número de onda e deixamos a frequência  $z$  como função da den-

sidade de poeira  $\varepsilon$  vimos (figura 8) que a presença da fotoionização pode provocar grandes mudanças nesses modos para grandes densidades de poeira. Como exemplo, quando consideramos apenas a absorção de partículas no carregamento da poeira, o modo whistler apresenta valores da taxa de amortecimento que crescem quase linearmente com  $\varepsilon$ . Ao adicionar o efeito fotoelétrico esse modo passa a apresentar uma taxa de amortecimento decrescente para grande  $\varepsilon$ .

A relação de dispersão para ondas eletrostáticas apresenta termos do tensor dielétrico relacionados às correntes de carregamento elétrico utilizadas, porém, vimos que o termo  $\epsilon_{zz}^F$  é nulo quando a carga elétrica dos grãos no equilíbrio é negativa e que a contribuição de  $\epsilon_{zz}^A$  é desprezível frente à contribuição de  $\epsilon_{zz}^C$  segundo De Juli et al. (2009) de modo que a relação de dispersão nesse caso é formalmente semelhante ao caso sem fotoionização, a exemplo das ondas eletromagnéticas.

A análise das ondas de Langmuir (figuras 10 e 11) mostra que o efeito da fotoionização é mais significativo na região de pequeno  $q$  onde o amortecimento devido às colisões inelásticas é predominante frente ao amortecimento de Landau, nessa região a fotoionização pode aumentar significativamente a taxa de amortecimento das ondas.

Já para as ondas íon-acústicas (figura 13) o amortecimento de Landau está presente mesmo para  $q$  pequeno e a fotoionização provoca mais mudanças para  $\varepsilon$  grande, apresentando maior taxa de amortecimento até certo valor de  $q$ , após o qual passa a apresentar menor taxa quando comparado ao caso sem fotoionização.

Pelo nosso conhecimento, ainda não havia na literatura um estudo incluindo o efeito da fotoionização da poeira na propagação e amortecimento das ondas dentro da teoria cinética, utilizando a derivação das componentes do tensor dielétrico feita nos trabalhos de De Juli e Schneider (1998) e de Galvão e Ziebell (2012). Vimos que esse mecanismo de carregamento elétrico é capaz de provocar algumas mudanças significativas nos modos de ondas.

Estudos futuros podem incluir uma análise do efeito da fotoionização da poeira em ondas se propagando em direção oblíqua ao campo magnético ambiente, generalizando o caso estudado aqui. Nesse caso, teríamos no tensor dielétrico a componente  $\epsilon^F$  não nula, sendo possível analisar numericamente sua contribuição para a relação de dispersão. Para isso, pode ser necessária uma generalização do termo de fonte  $J_\alpha^F$  (derivada por Galvão e Ziebell (2012) para o caso de radiação monocromática), dada pela equação (3.71), para o caso em que os grãos de poeira estão expostos a um espectro contínuo de radiação.

Além disso, neste trabalho consideramos apenas uma população de partículas esféricas de poeira enquanto que o trabalho de Galvão e Ziebell (2012) generaliza a teoria para uma distribuição discreta de raios, esse formalismo pode ser aplicado a sistemas relevantes e ainda pode ser melhorado através da incorporação de uma função distribuição

contínua de massa de uma forma auto consistente, visando descrever melhor o sistema em estudo.

Também temos a intenção de incluir efeitos não lineares, estudando efeitos não descritos pela teoria linear, utilizada neste trabalho. Com isso, podemos estudar a evolução da função distribuição das partículas de poeira durante o carregamento elétrico, considerando perturbações em sua carga elétrica. A teoria não linear também permite estudar fenômenos de turbulência em plasmas e efeitos de amortecimento não lineares.

# Referências

- Alazraki, G.; Couturier, P. Solar wind acceleration caused by the gradient of Alfvén wave pressure. *Astronomy and Astrophysics*, v. 13, p. 380, 1971. Citado na página 53.
- Altobelli, N. *Monitoring of the Interstellar Dust Stream in the Inner Solar System Using Data of Different Spacecraft*. Tese (Doutorado) — University of Heidelberg, Germany, 2004. Citado na página 13.
- Bussoletti, E.; Colangeli, L.; Orofino, V. Interstellar amorphous carbon. *The Astrophysical Journal*, v. 321, p. L87–L90, 1987. DOI: 10.1086/185011. Citado na página 53.
- Chang, J.-S.; Spariosu, K. Dust particle charging characteristics under a collisionless magneto-plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 62, n. 1, p. 97–104, 1993. DOI: 10.1143/JPSJ.62.97. Citado na página 19.
- Chen, F. F. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. 3ª ed. ed. New York: Springer International Publishing, 2015. Citado na página 17.
- Clayton, G. C. What are the R Coronae Borealis stars? *Journal of the American Association of Variable Star Observers (JAAVSO)*, v. 40, n. 1, p. 539, jun. 2012. Citado na página 14.
- D’Angelo, N. Low-frequency electrostatic waves in dusty plasmas. *Planetary and Space Science*, v. 38, n. 9, p. 1143–1146, 1990. ISSN 0032-0633. DOI: 10.1016/0032-0633(90)90022-I. Citado na página 15.
- De Juli, M. C. *Ondas em plasmas empoeirados magnetizados, com varga variável das partículas de poeira*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 39, 44 e 95.
- De Juli, M. C. et al. Mode-coupling of low-frequency electromagnetic waves in dusty plasmas with temperature anisotropy. *Physics of plasmas*, American Institute of Physics, v. 14, n. 2, p. 022104, 2007. DOI: 10.1063/1.2435704. Citado na página 51.
- De Juli, M. C.; Schneider, R. S. The dielectric tensor for dusty magnetized plasmas with variable charge on dust particles. *Journal of Plasma Physics*, Cambridge University Press, v. 60, n. 2, p. 243–263, 1998. DOI: 10.1017/S0022377898006849. Citado 8 vezes nas páginas 27, 37, 38, 41, 46, 76, 89 e 94.
- De Juli, M. C. et al. Effects of dust-charge fluctuation on the damping of Alfvén waves in dusty plasmas. *Physics of Plasmas*, v. 12, n. 5, p. 052109, 2005. DOI: 10.1063/1.1899647. Citado 8 vezes nas páginas 15, 51, 52, 53, 56, 60, 61 e 64.
- De Juli, M. C. et al. Effects of dust charge variation on electrostatic waves in dusty plasmas with temperature anisotropy. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 39, n. 1, p. 112–133, 2009. DOI: 10.1590/S0103-97332009000100019. Citado 3 vezes nas páginas 53, 68 e 76.

- De Toni, L. B. *Carregamento elétrico de grãos de poeira contidos no plasma interplanetário*. 2018. Trabalho de conclusão de curso (Bacharel em Física), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/189403>. Citado na página 19.
- Dos Santos, L. C.; Jatenco-Pereira, V.; Opher, R. Mass loss from Wolf-Rayet stars due to radiation pressure and Alfvén waves. *The Astrophysical Journal*, v. 410, p. 732–739, 1993. DOI: 10.1086/172790. Citado na página 53.
- Falceta-Goncalves, D.; Jatenco-Pereira, V. The effects of Alfvén waves and radiation pressure in dust winds of late-type stars. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 576, n. 2, p. 976–981, sep 2002. DOI: 10.1086/341794. Citado na página 53.
- Feuerbacher, B.; Fitton, B. Experimental investigation of photoemission from satellite surface materials. *Journal of Applied Physics*, v. 43, n. 4, p. 1563–1572, 1972. DOI: 10.1063/1.1661362. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 53.
- Fried, B.; Conte, S. *The Plasma Dispersion Function*. New York: Academic, San Diego, Calif, USA, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 109.
- Gaelzer, R. et al. Obliquely propagating Alfvén waves in a maxwellian dusty plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, IOP Publishing, v. 51, n. 1, p. 015011, dec 2008. DOI: 10.1088/0741-3335/51/1/015011. Citado na página 53.
- Gaelzer, R.; De Juli, M. C.; Ziebell, L. Effect of superthermal electrons on Alfvén wave propagation in the dusty plasmas of solar and stellar winds. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, Wiley Online Library, v. 115, n. A9, 2010. DOI: 10.1029/2009JA015217. Citado 5 vezes nas páginas 51, 53, 57, 58 e 60.
- Gail, H.-P.; Sedlmayr, E. *Physics and chemistry of circumstellar dust shells*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. Citado na página 53.
- Galvão, R. A. *Plasmas empoeirados com partículas de poeira de carga variável por colisões inelásticas com íons e elétrons e por fotoionização*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/49343>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 44.
- Galvão, R. A.; Ziebell, L. F. Kinetic theory of magnetized dusty plasmas with dust particles charged by collisional processes and by photoionization. *Physics of Plasmas*, v. 19, n. 9, p. 093702, 2012. DOI: 10.1063/1.4748932. Citado 6 vezes nas páginas 21, 37, 46, 76, 89 e 102.
- Grün, E. et al. Discovery of jovian dust streams and interstellar grains by the Ulysses spacecraft. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 362, n. 6419, p. 428–430, 1993. DOI: 10.1038/362428a0. Citado na página 14.
- Horanyi, M.; Morfill, G.; Gruen, E. The dusty ballerina skirt of Jupiter. *Journal of Geophysical Research*, v. 98, p. 21, 1993. DOI: 10.1029/93JA02588. Citado na página 14.
- Ignatov, A. The simplest model of a dust cloud in a plasma. *Plasma Physics Reports c/c Of Fizika Plasmy*, Nauka/Interperiodica Publishing, v. 24, p. 677–683, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 36.



- Jackson, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. Citado na página 32.
- Koutchmy, S.; Lamy, P. L. *The F-corona and the Circum-Solar Dust Evidences and Properties [G. Nikolsky Memorial Lecture]*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1985. 63–74 p. ISBN 978-94-009-5464-9. Citado na página 13.
- Krall, N.; Trivelpiece, A.; Kempton, J. *Principles of Plasma Physics*. US: McGraw-Hill, 1973. (International series in pure and applied physics). ISBN 9780070353466. Citado 6 vezes nas páginas 27, 30, 31, 42, 57 e 72.
- Krüger, D.; Sedlmayr, E. Two-fluid models for stationary dust driven winds. ii. The grain size distribution in consideration of drift. *Astronomy and Astrophysics*, v. 321, p. 557–567, 1997. Citado na página 53.
- Landau, L. D. *Oscillations of an electron plasma*. [S.l.]: US Atomic Energy Commission, 1946. Citado na página 42.
- Mathis, J. S.; Rumpl, W.; Nordsieck, K. H. The size distribution of interstellar grains. *The Astrophysical Journal*, v. 217, p. 425–433, out. 1977. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 53.
- Merlino, R. L. et al. Laboratory studies of waves and instabilities in dusty plasmas. *Physics of Plasmas*, v. 5, n. 5, p. 1607–1614, 1998. DOI: 10.1063/1.872828. Citado na página 15.
- Mie, G. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der Physik*, v. 330, n. 3, p. 377–445, 1908. DOI: 10.1002/andp.19083300302. Citado na página 23.
- Rao, N. N.; Shukla, P. K.; Yu, M. Y. Dust-acoustic waves in dusty plasmas. *Planetary and Space Science*, v. 38, n. 4, p. 543–546, 1990. ISSN 0032-0633. DOI: 10.1016/0032-0633(90)90147-I. Citado na página 15.
- Schneider, R. S. et al. Electrostatic waves in a maxwellian dusty plasma with variable charge on dust particles. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 36, n. 3A, p. 759–771, 2006. DOI: 10.1590/S0103-97332006000500033. Citado 3 vezes nas páginas 15, 53 e 70.
- Schram, P. et al. Statistical theory of dusty plasmas: Microscopic equations and Bogolyubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon hierarchy. *Physical Review E*, APS, v. 63, n. 1, p. 016403, 2000. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.016403. Citado na página 36.
- Shukla, P. K.; Mamun, A. A. *Introduction to dusty plasma physics*. London: Institute of Physics Publishing, 2002. (Series in plasma physics). Citado 5 vezes nas páginas 14, 17, 18, 20 e 21.
- Sitenko, A. G. *Fluctuations and Non-Linear Wave Interactions in Plasmas: International Series in Natural Philosophy*. [S.l.]: Elsevier, 1982. Citado 3 vezes nas páginas 27, 30 e 31.
- Sodha, M. S. Thermal and photoelectric ionization of solid particles. *British Journal of Applied Physics*, IOP Publishing, v. 14, n. 4, p. 172–176, apr 1963. DOI: 10.1088/0508-3443/14/4/302. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 26.

- Sodha, M. S.; Mishra, S. K.; Misra, S. Kinetics of illuminated complex plasmas considering Mie scattering by spherical dust particles with a size distribution. *Journal of Applied Physics*, v. 109, n. 1, p. 013303, 2011. DOI: 10.1063/1.3525057. Citado na página 23.
- Sodha, M. S.; Misra, S.; Mishra, S. K. Charging of dust particles in an illuminated open complex plasma system. *Physics of Plasmas*, v. 16, n. 12, p. 123705, 2009. DOI: 10.1063/1.3273073. Citado na página 25.
- Sohda, Y. et al. Fabrication of arrayed glassy carbon field emitters. *Journal of Vacuum Science and Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures*, v. 15, p. 343 – 348, 04 1997. DOI: 10.1116/1.589318. Citado na página 53.
- Spitzer, L. The temperature of interstellar matter. i. *The Astrophysical Journal*, v. 107, p. 6, jan. 1948. DOI: 10.1086/144984. Citado na página 25.
- Srivastava, S.; Mishra, R.; Sodha, M. S. Modification of ionospheric electron density by dust suspension. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 49, n. 20, p. 205503, apr 2016. DOI: 10.1088/0022-3727/49/20/205503. Citado na página 26.
- Swanson, D. G. *Plasma kinetic theory*. New York: Crc Press, 2008. Citado na página 27.
- Trigger, S.; Schram, P. Kinetic theory of the charging process in dusty plasmas. *Journal of Physics D: Applied Physics*, IOP Publishing, v. 32, n. 3, p. 234, 1999. DOI: 10.1088/0022-3727/32/3/009. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 36.
- Tsyтович, V.; De Angelis, U. Kinetic theory of dusty plasmas. I. General approach. *Physics of plasmas*, American Institute of Physics, v. 6, n. 4, p. 1093–1106, 1999. DOI: 10.1063/1.873356. Citado 3 vezes nas páginas 27, 36 e 37.
- Tsyтович, V.; Havnes, O. Charging processes, dispersion properties and anomalous transport in dusty plasma. *Comments on Plasma Physics and Controlled Fusion*, v. 15, p. 267–280, 1993. Citado na página 21.
- Tsyтович, V.; Morfill, G.; Thomas, H. Complex plasmas IV: Theoretical approaches to complex plasmas and their application. *Plasma physics reports*, Springer, v. 30, n. 10, p. 816–864, 2004. DOI: 10.1134/1.1809401. Citado na página 53.
- Vladimirov, S. V. Propagation of waves in dusty plasmas with variable charges on dust particles. *Physics of Plasmas*, v. 1, n. 8, p. 2762–2767, 1994. DOI: 10.1063/1.870511. Citado 3 vezes nas páginas 15, 37 e 94.
- Vladimirov, S. V.; Ostrikov, K.; Samarian, A. A. *Physics and Applications of Complex Plasmas*. London: Imperial College Press, 2005. Citado na página 19.
- Wallerstein, G.; Knapp, G. R. Carbon stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 36, n. 1, p. 369–433, 1998. DOI: 10.1146/annurev.astro.36.1.369. Citado na página 53.
- Ziebell, L. F. et al. Mode coupling of low frequency electromagnetic waves in magnetized dusty plasmas. *Physics of plasmas*, American Institute of Physics, v. 12, n. 8, p. 082102, 2005. DOI: 10.1063/1.1987270. Citado 7 vezes nas páginas 51, 52, 53, 60, 64, 65 e 66.

---

Ziebell, L. F. et al. A new formulation for the dielectric tensor for magnetized dusty plasmas with variable charge on the dust particles. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 38, n. 3A, p. 297–322, 2008. DOI: 10.1590/S0103-97332008000300002. Citado na página 53.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Resolução das integrais para as correntes elétricas de carregamento

## A.1 Integral em momentum na corrente de absorção no equilíbrio para distribuições Maxwellianas

A corrente de absorção de partículas da espécie  $\alpha$  pelos grãos de poeira é dada por (2.14). No equilíbrio, teremos

$$I_{\alpha 0}(q) = \int d^3p q_{\alpha} \sigma_{\alpha}(p, q) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{\alpha 0}(p), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\sigma_{\alpha}(p, q) = \pi a^2 \left(1 - \frac{2m_{\alpha} q_{\alpha} q}{ap^2}\right) H\left(1 - \frac{2m_{\alpha} q_{\alpha} q}{ap^2}\right). \quad (\text{A.2})$$

Considerando que os íons e elétrons no equilíbrio são descritos pela distribuição Maxwelliana

$$f_{\alpha 0}(p) = \frac{n_{\alpha 0}}{(2\pi m_{\alpha} k_B T_{\alpha})^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_{\alpha} k_B T_{\alpha}}\right), \quad (\text{A.3})$$

podemos trabalhar com simetria esférica, resolvendo a integral em ângulo sólido nos resta

$$I_{\alpha 0}(q) = \frac{4\pi^2 a^2 n_{\alpha 0}}{(2\pi m_{\alpha} k_B T_{\alpha})^{3/2}} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathcal{I}_{\alpha}, \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\mathcal{I}_{\alpha} = \int_0^{\infty} dp p \left(p^2 - \frac{2m_{\alpha} q_{\alpha} q}{a}\right) H\left(p^2 - \frac{2m_{\alpha} q_{\alpha} q}{a}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2m_{\alpha} k_B T_{\alpha}}\right). \quad (\text{A.5})$$

Para íons, onde  $q_{\alpha} = e$ , teremos

$$\mathcal{I}_i = \int_0^{\infty} dp p \left(p^2 - \frac{2m_i e q}{a}\right) H\left(p^2 - \frac{2m_i e q}{a}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2m_i k_B T_i}\right),$$

sendo que quando  $q \leq 0$  o argumento da função de Heaviside será positivo para qualquer  $p$ , portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i &= \int_0^{\infty} dp p \left(p^2 - \frac{2m_i e q}{a}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2m_i k_B T_i}\right), \quad q \leq 0, \\ \mathcal{I}_i &= 2(m_i k_B T_i)^2 \left(1 - \frac{eq}{ak_B T_i}\right), \quad q \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Agora, se  $q > 0$ , a função de Heaviside será nula para  $p < c_i = \sqrt{2eqm_i/a}$ , assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_i &= \int_{c_i}^{\infty} dp p \left( p^2 - \frac{2m_i eq}{a} \right) \exp \left( -\frac{p^2}{2m_i k_B T_i} \right), \quad q > 0, \\ \mathcal{I}_i &= 2(m_i k_B T_i)^2 \exp \left( -\frac{eq}{ak_B T_i} \right), \quad q > 0.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Para elétrons teremos  $q_\alpha = -e$ , ou seja,

$$\mathcal{I}_e = \int_0^{\infty} dp p \left( p^2 + \frac{2m_e eq}{a} \right) H \left( p^2 + \frac{2m_e eq}{a} \right) \exp \left( -\frac{p^2}{2m_e k_B T_e} \right).$$

Aqui a função de Heaviside será igual à unidade quando  $q \geq 0$  para qualquer  $p$ , assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_e &= \int_0^{\infty} dp p \left( p^2 + \frac{2m_e eq}{a} \right) \exp \left( -\frac{p^2}{2m_e k_B T_e} \right), \quad q \geq 0, \\ \mathcal{I}_e &= 2(m_e k_B T_e)^2 \left( 1 + \frac{eq}{ak_B T_e} \right), \quad q \geq 0.\end{aligned}\tag{A.8}$$

E para  $q < 0$  a função de Heaviside é nula quando  $p < c_e = \sqrt{-2eqm_e/a}$ , resultando em

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_e &= \int_{c_e}^{\infty} dp p \left( p^2 + \frac{2m_e eq}{a} \right) \exp \left( -\frac{p^2}{2m_e k_B T_e} \right), \quad q < 0, \\ \mathcal{I}_e &= 2(m_e k_B T_e)^2 \exp \left( \frac{eq}{ak_B T_e} \right), \quad q < 0.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Portanto, para distribuições Maxwellianas a corrente de absorção de íons e elétrons no equilíbrio por ser escrita como

$$I_{i0}(q) = 2\sqrt{2\pi}a^2 en_{i0} v_{Ti} \begin{cases} \left( 1 - \frac{eq}{ak_B T_i} \right), & q \leq 0 \\ \exp \left( -\frac{eq}{ak_B T_i} \right), & q > 0 \end{cases}, \tag{A.10}$$

$$I_{e0}(q) = 2\sqrt{2\pi}a^2 en_{e0} v_{Te} \begin{cases} \exp \left( \frac{eq}{ak_B T_e} \right), & q < 0 \\ \left( 1 + \frac{eq}{ak_B T_e} \right), & q \geq 0 \end{cases}, \tag{A.11}$$

onde  $v_{T\alpha} = \sqrt{k_B T_\alpha / m_\alpha}$  é a velocidade térmica das partículas da espécie  $\alpha$ .

## A.2 Integral em momentum na expressão para a corrente fotoelétrica

Considerando propagação da radiação paralela ao campo magnético temos para a corrente fotoelétrica (2.33)

$$I_\nu = \frac{4\pi}{3} \frac{ea^2}{m_e h^3} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \mathcal{J}, \tag{A.12}$$

onde

$$\mathcal{J} = \int d\vec{p} p_z \left[ 1 + \exp \left( \frac{p^2}{2m_e k_B T_d} - \xi \right) \right]^{-1} H(p_z) H \left( 1 - \frac{2m_e e q}{ap^2} H(q) \right). \quad (\text{A.13})$$

Para  $q \leq 0$  temos  $H(q) = 0$  e, assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int d\vec{p} p_z \left[ 1 + \exp \left( \frac{p^2}{2m_e k_B T_d} - \xi \right) \right]^{-1} H(p_z) \\ &= 2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_0^\infty dp_z p_z \left[ 1 + \exp \left( \frac{p_z^2 + p_\perp^2}{2m_e k_B T_d} - \xi \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

resolvendo a integral em  $p_z$  temos

$$\mathcal{J} = 2\pi m_e k_B T_d \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \ln \left[ 1 + \exp \left( -\frac{p_\perp^2}{2m_e k_B T_d} + \xi \right) \right]. \quad (\text{A.15})$$

Agora, definindo a variável

$$\Omega = \exp \left( -\frac{p_\perp^2}{2m_e k_B T_d} + \xi \right) \quad (\text{A.16})$$

e substituindo em (A.15)

$$\mathcal{J} = 2\pi (m_e k_B T_d)^2 \int_0^{\exp \xi} \frac{\ln(1 + \Omega)}{\Omega} d\Omega. \quad (\text{A.17})$$

Definindo a função

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\exp \xi} \frac{\ln(1 + \Omega)}{\Omega} d\Omega \quad (\text{A.18})$$

escrevemos a corrente fotoelétrica como

$$I_\nu = \frac{8\pi^2 e a^2 m_e (k_B T_d)^2}{3h^3} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \Phi(\xi), \quad q \leq 0. \quad (\text{A.19})$$

Para o caso em que  $q > 0$  teremos que  $H(q) = 1$  em (A.13). Neste caso faz-se a seguinte substituição de variáveis

$$x_1 = \frac{p_z^2}{2m_e k_B T_d}, \quad x_2 = \frac{p_\perp^2}{2m_e k_B T_d},$$

ou seja,

$$p_z dp_z = m_e k_B T_d dx_1, \quad p_\perp dp_\perp = m_e k_B T_d dx_2,$$

de modo que

$$\int d\vec{p} p_z H(p_z) = 2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_0^\infty dp_z p_z = 2\pi (m_e k_B T_d)^2 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2$$

e, notando que  $p^2 = p_z^2 + p_\perp^2 = 2m_e k_B T_d (x_1 + x_2)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= 2\pi(m_e k_B T_d)^2 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 [1 + \exp(x_1 + x_2 - \xi)]^{-1} H \left[ 1 - \frac{eq}{ak_B T_d (x_1 + x_2)} \right] \\ &= 2\pi(m_e k_B T_d)^2 \underbrace{\int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 [1 + \exp(x_1 + x_2 - \xi)]^{-1}}_{x_1 + x_2 > \frac{eq}{ak_B T_d}}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Respeitando a condição  $x_1 + x_2 > \frac{eq}{ak_B T_d}$ , podemos separar a integral de  $x_1$  em dois casos

$$\begin{aligned} 0 < x_1 < \frac{eq}{ak_B T_d} &\Rightarrow x_2 > \frac{eq}{ak_B T_d} - x_1, \\ x_1 > \frac{eq}{ak_B T_d} &\Rightarrow x_2 \text{ qualquer}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= 2\pi(m_e k_B T_d)^2 \left\{ \int_0^{\frac{eq}{ak_B T_d}} dx_1 \int_{\frac{eq}{ak_B T_d} - x_1}^\infty dx_2 [1 + \exp(x_1 + x_2 - \xi)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{eq}{ak_B T_d}}^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 [1 + \exp(x_1 + x_2 - \xi)]^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Utilizando o resultado

$$\int \frac{dx}{1 + \exp(x + c)} = -\ln[e^{-(x+c)} + 1] + c \quad (\text{A.22})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= 2\pi(m_e k_B T_d)^2 \left\{ \int_0^{\frac{eq}{ak_B T_d}} dx_1 \left[ -\ln(1 + \exp(\xi - x_1 - x_2)) \right]_{\frac{eq}{ak_B T_d} - x_1}^\infty \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{eq}{ak_B T_d}}^\infty dx_1 \left[ -\ln(1 + \exp(\xi - x_1 - x_2)) \right]_0^\infty \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= 2\pi(m_e k_B T_d)^2 \left\{ \int_0^{\frac{eq}{ak_B T_d}} dx_1 \ln \left[ 1 + \exp \left( \xi - \frac{eq}{ak_B T_d} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{eq}{ak_B T_d}}^\infty dx_1 \ln [1 + \exp(\xi - x_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

A primeira das integrais é trivialmente resolvida, para resolver a segunda faz-se a substituição

$$\Omega = \exp(\xi - x_1)$$

com os limites

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{eq}{ak_B T_d} &\Rightarrow \Omega = \exp \left( \xi - \frac{eq}{ak_B T_d} \right), \\ x_1 = \infty &\Rightarrow \Omega = 0. \end{aligned}$$



Assim, utilizando a definição (A.18),

$$\int_{\frac{eq}{ak_B T_d}}^{\infty} dx_1 \ln [1 + \exp(\xi - x_1)] = \int_0^{\exp\left(\xi - \frac{eq}{ak_B T_d}\right)} \frac{\ln(1 + \Omega)}{\Omega} d\Omega = \Phi\left(\xi - \frac{eq}{ak_B T_d}\right). \quad (\text{A.25})$$

Então, temos como resultado para  $\mathcal{J}$  no caso  $q > 0$ :

$$\mathcal{J} = 2\pi(m_e k_B T_d)^2 \left\{ \frac{eq}{ak_B T_d} \ln \left[ 1 + \exp\left(\xi - \frac{eq}{ak_B T_d}\right) \right] + \Phi\left(\xi - \frac{eq}{ak_B T_d}\right) \right\}, \quad (\text{A.26})$$

de modo que a corrente fotoelétrica pode ser escrita como

$$I_\nu = \frac{8\pi^2 e a^2 m_e (k_B T_d)^2}{3h^3} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \Psi(\xi, q), \quad q > 0, \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\Psi(\xi, q) = \frac{eq}{ak_B T_d} \ln \left[ 1 + \exp\left(\xi - \frac{eq}{ak_B T_d}\right) \right] + \Phi\left(\xi - \frac{eq}{ak_B T_d}\right). \quad (\text{A.28})$$

# APÊNDICE B – Obtenção das componentes do tensor dielétrico

Para encontrar expressões para o tensor dielétrico de um plasma empoeirado homogêneo magnetizado a partir das equações (4.66) e (4.69), dadas por

$$\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\vec{k}, \omega), \quad (\text{B.1})$$

$$\sum_j \sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) \hat{E}_j(\vec{k}, \omega) = \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int d^3p p_i \left[ \hat{f}_\alpha^C(\vec{k}, \omega) + \hat{f}_\alpha^A(\vec{k}, \omega) + \hat{f}_\alpha^F(\vec{k}, \omega) \right], \quad (\text{B.2})$$

devemos encontrar expressões para as funções distribuição que sejam proporcionais a  $\hat{E}_j$ , isso fará com que o tensor dielétrico também possa ser expresso como uma soma de três termos relacionados a cada uma das funções distribuição em (B.2), ou seja,

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^C + \epsilon_{ij}^A + \epsilon_{ij}^F. \quad (\text{B.3})$$

O procedimento adotado para obtenção das componentes do tensor dielétrico é o mesmo encontrado nos trabalhos precursores de De Juli e Schneider (1998) e Galvão e Ziebell (2012).

## B.1 Componente $\epsilon_{ij}^C$

Partindo da equação (4.46) para  $\hat{f}_\alpha^C$  e substituindo a perturbação do campo magnético  $\hat{\vec{B}}$  pela lei de Faraday (4.53) temos

$$\begin{aligned} \hat{f}_\alpha^C &= -q_\alpha \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \left[ \hat{\vec{E}} + \frac{1}{m_\alpha \omega} \left( (\vec{p}' \cdot \hat{\vec{E}}) \vec{k} - (\vec{p}' \cdot \vec{k}) \hat{\vec{E}} \right) \right] \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} \\ &= -q_\alpha \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_\alpha \omega} \right) \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_\alpha \omega} \vec{p}' \right] \cdot \hat{\vec{E}}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Definindo

$$\vec{A}^\alpha = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_\alpha \omega} \right) \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_\alpha \omega} \vec{p}' \right], \quad (\text{B.5})$$

escrevemos

$$\hat{f}_\alpha^C = -q_\alpha \vec{A}^\alpha \cdot \hat{\vec{E}}. \quad (\text{B.6})$$

Portanto, de (B.1) e (B.2),

$$\epsilon_{ij}^C = \delta_{ij} - i \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3p p_i A_j^\alpha, \quad (\text{B.7})$$

onde

$$\omega_{p\alpha} = \left( \frac{4\pi n_{\alpha 0} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \right)^{1/2} \quad (\text{B.8})$$

é a frequência de plasma das partículas da espécie  $\alpha$  no equilíbrio.

Como vimos, a função distribuição das partículas  $\alpha$  no equilíbrio possui simetria azimutal, ou seja,  $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(p_{\perp}, p_{\parallel})$  devido à presença do campo magnético. Com isso, é mais conveniente trabalharmos com coordenadas cilíndricas, sendo suas relações com as coordenadas cartesianas dadas por

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos(\varphi)\hat{e}_{\perp} - \sin(\varphi)\hat{e}_{\varphi}, \\ \hat{y} &= \sin(\varphi)\hat{e}_{\perp} + \cos(\varphi)\hat{e}_{\varphi}, \\ \hat{z} &= \hat{e}_{\parallel}, \\ \hat{e}_{\perp} &= \cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{y}, \\ \hat{e}_{\varphi} &= -\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

enquanto que o vetor momentum e o gradiente relacionado são dados por

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= p_{\perp}\hat{e}_{\perp} + p_{\parallel}\hat{e}_{\parallel} = p_{\perp}\cos(\varphi)\hat{x} + p_{\perp}\sin(\varphi)\hat{y} + p_{\parallel}\hat{z}, \\ \nabla_{\vec{p}'} &= \hat{e}_{\perp}\frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{e}_{\varphi}\frac{1}{p_{\perp}}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{e}_{\parallel}\frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} = \hat{x}\frac{p_x}{p_{\perp}}\frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{y}\frac{p_y}{p_{\perp}}\frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Definindo, sem perda de generalidade, o vetor de onda no plano  $xz$ , ou seja,  $\vec{k} = k_{\perp}\hat{x} + k_{\parallel}\hat{z}$ , temos que

$$\begin{aligned} \vec{p}' \cdot \vec{k} &= p'_x k_{\perp} + p_{\parallel} k_{\parallel}, \\ \vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}'} &= p'_x \frac{k_{\perp}}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde usamos o fato que  $p_{\perp}$  e  $p_{\parallel}$  são constantes de movimento de modo que  $p'_{\perp}, p'_{\parallel} \Rightarrow p_{\perp}, p_{\parallel}$ . Com isso, escrevemos o termo entre colchetes no integrando em (B.5) como

$$\begin{aligned} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_{\alpha}\omega} \right) \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} + \frac{\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0}}{m_{\alpha}\omega} \vec{p}' \right] &= \left( 1 - \frac{p'_x k_{\perp} + p_{\parallel} k_{\parallel}}{m_{\alpha}\omega} \right) \nabla_{\vec{p}'} f_{\alpha 0} \\ &+ \left( p'_x \frac{k_{\perp}}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right) \frac{\vec{p}'}{m_{\alpha}\omega}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

e, fazendo uso das equações (4.26) para  $\vec{p}'$ , as componentes de  $\vec{A}^{\alpha}$  ficam

$$A_x^{\alpha} = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \cos(\varphi - \Omega_{\alpha}\tau) \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha}\omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right], \quad (\text{B.13})$$

$$A_y^{\alpha} = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \sin(\varphi - \Omega_{\alpha}\tau) \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha}\omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right], \quad (\text{B.14})$$

$$A_z^{\alpha} = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \cos(\varphi - \Omega_{\alpha}\tau) \frac{k_{\perp}}{m_{\alpha}\omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right], \quad (\text{B.15})$$

onde

$$\Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) = p_\parallel \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - p_\perp \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel}. \quad (\text{B.16})$$

Para resolver as integrais em  $\tau$  usaremos uma útil expansão das funções de Bessel do primeiro tipo  $J_n(x)$  dada por

$$e^{ix \sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}, \quad (\text{B.17})$$

e suas derivadas em relação a  $x$  e  $\theta$ ,

$$\sin(\theta) e^{ix \sin(\theta)} = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) e^{in\theta}, \quad (\text{B.18})$$

$$\cos(\theta) e^{ix \sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{x} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (\text{B.19})$$

Lembrando que  $\vec{k} \cdot \vec{R} = k_\perp(x' - x) + k_\parallel(z' - z)$  e utilizando as soluções (4.28) e (4.30),

$$\vec{k} \cdot \vec{R} = -b_\alpha [\sin(\varphi - \Omega_\alpha \tau) - \sin(\varphi)] + \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} \tau, \quad (\text{B.20})$$

onde

$$b_\alpha = \frac{k_\perp p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha}. \quad (\text{B.21})$$

Com isso, podemos fazer, por exemplo, a integral em  $A_z^\alpha$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} &= \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(b_\alpha \sin(\varphi) - b_\alpha \sin(\varphi - \Omega_\alpha \tau) + \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} \tau - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_n(b_\alpha) e^{in\varphi} J_l(b_\alpha) e^{-il(\varphi - \Omega_\alpha \tau)} e^{i(\frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} \tau - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \\ &= \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_\alpha) J_l(b_\alpha) e^{i(n-l)\varphi} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} + l\Omega_\alpha - \omega - i\nu_{\alpha d}^0(p))\tau} \\ &= i \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_\alpha) J_l(b_\alpha) \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)}, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de que  $\omega_i + \nu_{\alpha d}^0 > 0$  (4.38), fazendo o mesmo para as outras integrais em  $\tau$  obtemos para as componentes de  $\vec{A}^\alpha$ :

$$\begin{aligned} A_x^\alpha &= i \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \frac{l}{b_\alpha} J_n(b_\alpha) J_l(b_\alpha) \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right], \\ A_y^\alpha &= - \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_\alpha) J'_l(b_\alpha) \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right], \\ A_z^\alpha &= i \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_\alpha) J_l(b_\alpha) \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} + \frac{l}{b_\alpha} \frac{k_\perp}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Ao substituir essas componentes na expressão do tensor dielétrico (B.7), sendo que  $\int d^3p = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel$ , teremos as seguintes integrais na variável  $\varphi$ , para  $p_i = p_x, p_y, p_z$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi p_x e^{i(n-l)\varphi} &= p_\perp \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi) e^{i(n-l)\varphi} = p_\perp \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi (e^{i(n-l+1)\varphi} + e^{i(n-l-1)\varphi}) \\ &= p_\perp \pi (\delta_{n,l-1} + \delta_{n,l+1}), \\ \int_0^{2\pi} d\varphi p_y e^{i(n-l)\varphi} &= p_\perp \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\varphi) e^{i(n-l)\varphi} = p_\perp \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} d\varphi (e^{i(n-l+1)\varphi} - e^{i(n-l-1)\varphi}) \\ &= p_\perp \pi i (\delta_{n,l+1} - \delta_{n,l-1}), \\ \int_0^{2\pi} d\varphi p_z e^{i(n-l)\varphi} &= p_\parallel \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n-l)\varphi} = p_\parallel 2\pi \delta_{n,l}. \end{aligned}$$

Essas deltas de Kronecker farão com que um dos somatórios das funções de Bessel presentes em  $\vec{A}^\alpha$  seja eliminado. Trocando os índices  $n$  pelos correspondentes nas deltas teremos um produto de duas funções de Bessel de índice  $l$ , sendo este produto diferente para cada combinação de  $i, j = x, y, z$ . Utilizando as relações

$$J_{l+1}(x) = \frac{2l}{x} J_l(x) - J_{l-1}(x), \quad (\text{B.23})$$

$$J'_l(x) = \frac{1}{2} (J_{l-1}(x) - J_{l+1}(x)), \quad (\text{B.24})$$

teremos, por exemplo, para  $i = j = x$ ,

$$\epsilon_{xx}^C \Rightarrow \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n(b_\alpha) J_l(b_\alpha) (\delta_{n,l-1} + \delta_{n,l+1}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (J_{l-1} + J_{l+1}) J_l(b_\alpha) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{2l}{b_\alpha} J_l^2(b_\alpha),$$

e assim sucessivamente para o restante das componentes.

Deste modo, após alguma álgebra podemos escrever as expressões finais para o tensor dielétrico. Como não temos mais termos dependentes de  $\varphi$  podemos recompor a integral em  $\varphi$ , ou seja,  $2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel = \int d^3p$ , assim,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ix}^C &= \delta_{ix} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{ix}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right], \\ \epsilon_{iy}^C &= \delta_{iy} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{iy}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right], \\ \epsilon_{iz}^C &= \delta_{iz} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{iz}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} + \frac{l}{b_\alpha} \frac{k_\perp}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right], \end{aligned}$$

onde  $\Pi_{ij}^{l\alpha}$  são as componentes do tensor

$$\tilde{\Pi}^{l\alpha}(b_\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{l^2 J_l^2}{b_\alpha^2} & i \frac{l J_l' J_l}{b_\alpha} & \frac{l J_l^2}{b_\alpha} \\ -i \frac{l J_l' J_l}{b_\alpha} & J_l'^2 & -i J_l' J_l \\ \frac{l J_l^2}{b_\alpha} & i J_l' J_l & J_l^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Para chegar a uma expressão geral para todas as componentes do tensor, desenvolvemos o termo entre colchetes em  $\epsilon_{iz}^C$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{l}{b_\alpha} \frac{k_{\perp}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) \right] &= \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} + \frac{l}{b_\alpha} \frac{k_{\perp}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha - \frac{\omega}{\omega p_{\perp}} \Lambda_\alpha - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha \omega p_{\perp}} \Lambda_\alpha + i \nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_{\perp}} \\ &\quad + \frac{\omega}{\omega p_{\perp}} \Lambda_\alpha + \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha \omega p_{\perp}} \Lambda_\alpha - i \nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_{\perp}} \\ &= -\frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_{\perp}} \left( \omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} - l \Omega_\alpha + i \nu_{\alpha d}^0(p) \right) + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left( \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha + i \nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_{\parallel}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

assim,

$$\begin{aligned} \epsilon_{iz}^C &= \delta_{iz} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{iz}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} - l \Omega_\alpha + i \nu_{\alpha d}^0(p)} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha \right. \\ &\quad \left. + i \nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_{\parallel}} \right] - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3 p p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{iz}^{l\alpha} \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_{\perp}}. \end{aligned}$$

Porém, tendo em vista que no último termo a soma em  $l$  se aplica apenas ao tensor  $\tilde{\Pi}^{l\alpha}$  e sabendo das identidades das funções de Bessel

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} l J_l^2 = 0 \quad , \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l J_l' = 0 \quad , \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2 = 1, \quad (\text{B.27})$$

temos que

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \Pi_{iz}^{l\alpha} = \delta_{iz}. \quad (\text{B.28})$$

Com isso, escrevemos a expressão geral das componentes do termo do tensor dielétrico relacionado com a função  $\hat{f}_\alpha^C$  como

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^C &= \delta_{ij} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{ij}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} - l \Omega_\alpha + i \nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_\alpha \omega} \Lambda_\alpha \right. \\ &\quad \left. + i \delta_{jz} \nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_\alpha}{\omega p_{\parallel}} \right] \left( \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{jz}} - \delta_{iz} \delta_{jz} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 n_{\alpha 0}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \Lambda_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

## B.2 Expressões para as funções distribuição em termos do campo elétrico

Para obtermos as partes do tensor dielétrico  $\epsilon_{ij}^A$  e  $\epsilon_{ij}^F$  devemos, a exemplo do que foi feito para  $\epsilon_{ij}^C$ , expressar suas funções correspondentes  $\hat{f}_\alpha^A$  e  $\hat{f}_\alpha^F$  em termos do campo elétrico perturbado  $\hat{\vec{E}}$ .

Nota-se pelas equações (4.47) e (4.48) que estas funções são dependentes da função perturbada das partículas de poeira  $\hat{f}_d$ , sendo necessário determinar sua forma. Partindo da suposição de que no equilíbrio todas as partículas de poeira possuem a mesma carga elétrica  $Q_0$ , já que esta é muitas ordens de grandeza maior do que a carga elementar, escrevemos (De Juli; Schneider, 1998)

$$f_{d0}(q) = n_{d0}\delta(q - Q_0). \quad (\text{B.30})$$

Para ondas de frequência muito maior do que as frequências características das partículas de poeira é razoável supor que a forma da distribuição  $f_d$  não difere muito de sua forma no equilíbrio, assim,

$$f_d(\vec{r}, q, t) = n_{d0}\delta(q - Q(\vec{r}, t)), \quad (\text{B.31})$$

onde  $Q(\vec{r}, t) = Q_0 + Q_1(\vec{r}, t)$ , sendo  $Q_1$  a perturbação na carga elétrica. Expressando a distribuição da poeira como a soma de sua forma no equilíbrio mais uma perturbação (4.1) sua forma perturbada fica

$$f_{d1}(\vec{r}, q, t) = n_{d0} [\delta(q - Q(\vec{r}, t)) - \delta(q - Q_0)]. \quad (\text{B.32})$$

Em termos da transformada de Fourier, podemos escrever (Vladimirov, 1994)

$$\hat{f}_d(\vec{k}, q, \omega) = n_{d0} [\delta(q - \hat{Q}_T(\vec{k}, \omega)) - \delta(q - Q_0)], \quad (\text{B.33})$$

sendo  $\hat{Q}_T(\vec{k}, \omega) = Q_0 + \hat{Q}(\vec{k}, \omega)$ .

Tomando o primeiro momento da equação cinética das partículas de poeira (4.49),

$$-i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_d(\vec{k}, q, \omega) q dq + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} \left( \hat{I}(\vec{k}, q, \omega) f_{d0}(q) + I_0(q) \hat{f}_d(\vec{k}, q, \omega) \right) q dq = 0, \quad (\text{B.34})$$

mas

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} (\hat{I} f_{d0} + I_0 \hat{f}_d) q dq &= n_{d0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q} (\hat{I} \delta(q - Q_0) + I_0 [\delta(q - \hat{Q}_T) - \delta(q - Q_0)]) q dq \\
 &= n_{d0} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \hat{I}}{\partial q} \delta(q - Q_0) + \hat{I} \delta'(q - Q_0) + \frac{\partial I_0}{\partial q} [\delta(q - \hat{Q}_T) - \delta(q - Q_0)] \right. \\
 &\quad \left. + I_0 [\delta'(q - \hat{Q}_T) - \delta'(q - Q_0)] \right) q dq \\
 &= n_{d0} \left( Q_0 \frac{\partial \hat{I}}{\partial q} \Big|_{q=Q_0} - \frac{\partial \hat{I} q}{\partial q} \Big|_{q=Q_0} + \hat{Q}_T \frac{\partial I_0}{\partial q} \Big|_{q=\hat{Q}_T} - Q_0 \frac{\partial I_0}{\partial q} \Big|_{q=Q_0} - \frac{\partial I_0 q}{\partial q} \Big|_{q=\hat{Q}_T} + \frac{\partial I_0 q}{\partial q} \Big|_{q=Q_0} \right) \\
 &= -n_{d0} \hat{I}(\vec{k}, Q_0, \omega) - n_{d0} I_0(\hat{Q}_T),
 \end{aligned}$$

onde foi utilizada a propriedade  $\int f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0)$  e o fato de que a corrente média no equilíbrio é nula  $I_0(Q_0) = 0$ . Então, de (B.34),

$$\begin{aligned}
 -i\omega n_{d0} \hat{Q}(\vec{k}, \omega) - n_{d0} \hat{I}(\vec{k}, Q_0, \omega) - n_{d0} I_0(\hat{Q}_T) &= 0, \\
 \hat{Q}(\vec{k}, \omega) &= \frac{i}{\omega} (I_0(\hat{Q}_T) + \hat{I}(\vec{k}, Q_0, \omega)).
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

Supondo  $|\hat{Q}| \ll |Q_0|$ , expandimos  $I_0(\hat{Q}_T)$  em série de Taylor em torno de  $Q_0$  (De Juli, 2000) resultando em

$$I_0(\hat{Q}_T) = I_0(Q_0) + \frac{\partial I_0}{\partial \hat{Q}_T} \Big|_{\hat{Q}_T=Q_0} (\hat{Q}_T - Q_0) + \dots, \tag{B.36}$$

definindo a frequência de carregamento

$$\nu_{ch} = \frac{\partial I_0}{\partial \hat{Q}_T} \Big|_{\hat{Q}_T=Q_0}, \tag{B.37}$$

truncando a série no primeiro termo não nulo ( $I_0(Q_0) = 0$ ) temos

$$I_0(\hat{Q}_T) \simeq -\nu_{ch} \hat{Q}(\vec{k}, \omega), \tag{B.38}$$

substituindo em (B.35) obtemos a expressão para a perturbação da carga elétrica em termos da perturbação da corrente

$$\hat{Q}(\vec{k}, \omega) = \frac{i}{(\omega + i\nu_{ch})} \hat{I}(\vec{k}, Q_0, \omega). \tag{B.39}$$

Por sua vez, a corrente perturbada para  $q = Q_0$  é dada por (4.55)

$$\hat{I}(\vec{k}, Q_0, \omega) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \sigma_{\alpha}(p, Q_0) \frac{p}{m_{\alpha}} \hat{f}_{\alpha}(\vec{k}, \vec{p}, \omega), \tag{B.40}$$

sendo que, utilizando a expressão (4.15) e a forma da função de equilíbrio da poeira dada por (B.30),

$$\nu_{\alpha d}^0(p) = \int dq \sigma_{\alpha}(p, q) \frac{p}{m_{\alpha}} f_{d0}(q) = \frac{n_{d0} p}{m_{\alpha}} \sigma_{\alpha}(p, Q_0), \tag{B.41}$$



portanto,

$$\hat{I}(\vec{k}, Q_0, \omega) = \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) \hat{f}_{\alpha}(\vec{k}, \vec{p}, \omega). \quad (\text{B.42})$$

Lembrando que a função perturbada pode ser separada como uma soma dos termos  $\hat{f}_{\alpha} = \hat{f}_{\alpha}^C + \hat{f}_{\alpha}^A + \hat{f}_{\alpha}^F$  temos que a corrente perturbada pode ser escrita na forma

$$\hat{I}(\vec{k}, Q_0, \omega) = \hat{I}^C(\vec{k}, Q_0, \omega) + \hat{I}^A(\vec{k}, Q_0, \omega) + \hat{I}^F(\vec{k}, Q_0, \omega), \quad (\text{B.43})$$

onde

$$\hat{I}^C(\vec{k}, Q_0, \omega) = \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) \hat{f}_{\alpha}^C(\vec{k}, \vec{p}, \omega), \quad (\text{B.44})$$

$$\hat{I}^A(\vec{k}, Q_0, \omega) = \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) \hat{f}_{\alpha}^A(\vec{k}, \vec{p}, \omega), \quad (\text{B.45})$$

$$\hat{I}^F(\vec{k}, Q_0, \omega) = \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) \hat{f}_{\alpha}^F(\vec{k}, \vec{p}, \omega). \quad (\text{B.46})$$

Utilizando a equação (B.6) escrevemos o primeiro dos termos de forma que

$$\hat{I}^C(\vec{k}, Q_0, \omega) = -\vec{A}^0 \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega), \quad (\text{B.47})$$

onde

$$\vec{A}^0 = \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) \vec{A}^{\alpha} \quad (\text{B.48})$$

com  $\vec{A}^{\alpha}$  dado por (B.5). Para os outros termos notamos que para calcular  $\hat{f}_{\alpha}^A$  e  $\hat{f}_{\alpha}^F$ , equações (4.47) e (4.48), devemos primeiramente calcular as quantidades  $\hat{\nu}_{\alpha d}$  e  $\hat{\nu}_F$ , dados por (4.43) e (4.44). Substituindo a forma (B.33) para  $\hat{f}_d$  nessas equações temos

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_{\alpha d}(\vec{k}, p, \omega) &= n_{d0} \frac{p}{m_{\alpha}} \left[ \sigma_{\alpha}(p, \hat{Q}_T) - \sigma_{\alpha}(p, Q_0) \right], \\ \hat{\nu}_F(\vec{k}, p, \omega) &= \delta_{\alpha e} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) n_{d0} \left[ \sigma_{\nu}(p, \hat{Q}_T) - \sigma_{\nu}(p, Q_0) \right] \\ &\quad \times \left( \frac{p_x}{m_{\alpha}} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_{\alpha}} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Expandindo  $\sigma_{\alpha}(p, \hat{Q}_T)$  e  $\sigma_{\nu}(p, \hat{Q}_T)$  em série de Taylor em torno de  $Q_0$  temos

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}(p, \hat{Q}_T) &\simeq \sigma_{\alpha}(p, Q_0) + \left. \frac{\partial \sigma_{\alpha}(p, \hat{Q}_T)}{\partial \hat{Q}_T} \right|_{\hat{Q}_T=Q_0} (\hat{Q}_T - Q_0), \\ \sigma_{\nu}(p, \hat{Q}_T) &\simeq \sigma_{\nu}(p, Q_0) + \left. \frac{\partial \sigma_{\nu}(p, \hat{Q}_T)}{\partial \hat{Q}_T} \right|_{\hat{Q}_T=Q_0} (\hat{Q}_T - Q_0), \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

mas  $\hat{Q}_T - Q_0 = \hat{Q}$ , e

$$\begin{aligned} \sigma'_{\alpha}(p) &\equiv \left. \frac{\partial \sigma_{\alpha}(p, \hat{Q}_T)}{\partial \hat{Q}_T} \right|_{\hat{Q}_T=Q_0} = -\frac{2\pi a m_{\alpha} q_{\alpha}}{p^2} \left[ H \left( 1 - \frac{2m_{\alpha} q_{\alpha} Q_0}{ap^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{2m_{\alpha} q_{\alpha} Q_0}{ap^2} \right) \delta \left( 1 - \frac{2m_{\alpha} q_{\alpha} Q_0}{ap^2} \right) \right], \\ \sigma'_{\nu}(p) &\equiv \left. \frac{\partial \sigma_{\nu}(p, \hat{Q}_T)}{\partial \hat{Q}_T} \right|_{\hat{Q}_T=Q_0} = \frac{4\pi a m_e e Q_0}{3p^2} H(Q_0) \delta \left( 1 - \frac{2m_e e Q_0}{ap^2} H(Q_0) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

substituindo em (B.49) obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\nu}_{\alpha d}(\vec{k}, p, \omega) &\simeq n_{d0} \frac{p}{m_{\alpha}} \sigma'_{\alpha}(p) \hat{Q}(\vec{k}, \omega), \\ \hat{\nu}_F(\vec{k}, p, \omega) &\simeq \delta_{\alpha e} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) n_{d0} \sigma'_{\nu}(p) \\ &\quad \times \left( \frac{p_x}{m_{\alpha}} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_{\alpha}} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) \hat{Q}(\vec{k}, \omega).\end{aligned}\quad (\text{B.52})$$

Utilizando essas expressões nas as equações (4.47) e (4.48) obtemos  $\hat{f}_{\alpha}^A$  e  $\hat{f}_{\alpha}^F$  em termos da carga perturbada, ou seja,

$$\hat{f}_{\alpha}^A = -n_{d0} \frac{p}{m_{\alpha}} \sigma'_{\alpha}(p) f_{\alpha 0}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \hat{Q}(\vec{k}, \omega) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)}, \quad (\text{B.53})$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\alpha}^F &= \delta_{\alpha e} n_{d0} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \left( \frac{p_x}{m_{\alpha}} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_{\alpha}} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) \\ &\quad \times \sigma'_{\nu}(p) F(p, \xi) \hat{Q}(\vec{k}, \omega) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)},\end{aligned}\quad (\text{B.54})$$

substituindo em (B.45) e (B.46) podemos escrever as perturbações das correntes em termos da perturbação da carga de modo que

$$\hat{I}^A(\vec{k}, Q_0, \omega) = -\nu_1 \hat{Q}(\vec{k}, \omega), \quad (\text{B.55})$$

$$\hat{I}^F(\vec{k}, Q_0, \omega) = \nu_{F1} \hat{Q}(\vec{k}, \omega), \quad (\text{B.56})$$

onde

$$\nu_1 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \nu_{\alpha d}^0 \frac{p}{m_{\alpha}} \sigma'_{\alpha}(p) f_{\alpha 0}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)}, \quad (\text{B.57})$$

$$\begin{aligned}\nu_{F1} &= \sum_{\alpha} \delta_{\alpha e} q_{\alpha} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \int d^3p \nu_{\alpha d}^0 \left( \frac{p_x}{m_{\alpha}} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_{\alpha}} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) \\ &\quad \times \sigma'_{\nu}(p) F(p, \xi) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)}.\end{aligned}\quad (\text{B.58})$$

Agora, substituindo as correntes perturbadas (B.47), (B.55) e (B.56) em (B.39) obtemos

$$\hat{Q}(\vec{k}, \omega) = \frac{-i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \vec{A}^0 \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega), \quad (\text{B.59})$$

e substituindo esta expressão em (B.53) e (B.54) obtemos finalmente as expressões para as funções perturbadas em termos do campo elétrico, dadas por

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\alpha}^A &= n_{d0} \frac{p}{m_{\alpha}} \sigma'_{\alpha}(p) f_{\alpha 0}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \vec{A}^0 \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)},\end{aligned}\quad (\text{B.60})$$

$$\begin{aligned}\hat{f}_{\alpha}^F &= -\delta_{\alpha e} n_{d0} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \left( \frac{p_x}{m_{\alpha}} H(p_x) \delta_{1, -n_x} + \frac{p_z}{m_{\alpha}} H(p_z) \delta_{1, -n_z} \right) \sigma'_{\nu}(p) \\ &\quad \times F(p, \xi) \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \vec{A}^0 \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)}.\end{aligned}\quad (\text{B.61})$$

### B.3 Componente $\epsilon_{ij}^A$

Com a função perturbada  $\hat{f}_\alpha^A$  dada em termos das componentes do campo elétrico pela equação (B.60) podemos escrever para a componente do tensor dielétrico relacionada a esta função, de (B.1) e (B.2),

$$\epsilon_{ij}^A(\vec{k}, \omega) = -\frac{4\pi}{\omega} \frac{n_{d0}}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha^2} \int d^3p p \sigma'_\alpha(p) f_{\alpha 0}(p_\perp, p_\parallel) A_j^0 \times \int_{-\infty}^0 d\tau p_i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)}, \quad (\text{B.62})$$

ou ainda

$$\epsilon_{ij}^A(\vec{k}, \omega) = -\frac{4\pi i n_{d0}}{\omega} U_i^A S_j^A, \quad (\text{B.63})$$

onde

$$U_i^A = \frac{1}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha^2} \int d^3p p \sigma'_\alpha(p) f_{\alpha 0} \int_{-\infty}^0 d\tau p_i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} \quad (\text{B.64})$$

$$S_j^A = -iA_j^0 = -\frac{i}{n_{d0}} \sum_\alpha q_\alpha^2 \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) A_j^\alpha. \quad (\text{B.65})$$

Resolvendo as integrais em  $\tau$  em  $U_i^A$ , como feito anteriormente, temos para

$$(i = x) : p_\perp \int_{-\infty}^0 d\tau \cos \varphi e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} = ip_\perp \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \frac{n J_n J_l}{b_\alpha} \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)},$$

$$(i = y) : p_\perp \int_{-\infty}^0 d\tau \sin \varphi e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} = p_\perp \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J'_l \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)},$$

$$(i = z) : p_\parallel \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)} = ip_\parallel \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J_l \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)},$$

fazendo as integrais em  $\varphi$ , onde  $\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n-l)\varphi} = 2\pi\delta_{nl}$ , e depois recompondo a integral em todo espaço de momentum  $2\pi \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel = \int d^3p$ , ficamos com

$$U_x^A = \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_\perp p \sigma'_\alpha(p) f_{\alpha 0}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \Pi_{xz}^{l\alpha},$$

$$U_y^A = \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_\perp p \sigma'_\alpha(p) f_{\alpha 0}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \Pi_{yz}^{l\alpha}, \quad (\text{B.66})$$

$$U_z^A = \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_\parallel p \sigma'_\alpha(p) f_{\alpha 0}}{\omega - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha} - l\Omega_\alpha + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \Pi_{zz}^{l\alpha},$$

sendo o tensor  $\tilde{\Pi}^{l\alpha}$  dado por (B.25).

Para o termo  $S_j^A$  utilizamos as expressões (B.22) juntamente com a expansão (B.26) para a componente z e a propriedade (B.28) para  $\sum \Pi_{zz}^{l\alpha} = 1$ . Fazendo novamente

a integração em  $\varphi$  e posterior recomposição da integral  $\int d^3p$  obtemos as expressões

$$\begin{aligned}
 S_x^A &= \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{\nu_{\alpha d}^0 \Pi_{zx}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - l\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right], \\
 S_y^A &= \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{\nu_{\alpha d}^0 \Pi_{zy}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - l\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) \right], \\
 S_z^A &= \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{\nu_{\alpha d}^0 \Pi_{zz}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - l\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha} \right. \\
 &\quad \left. + i\nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\parallel}} \right] - \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3p \nu_{\alpha d}^0 \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\perp}}.
 \end{aligned} \tag{B.67}$$

Assim, escrevemos a componente do tensor dielétrico relacionado à corrente de absorção na forma geral

$$\epsilon_{ij}^A(\vec{k}, \omega) = -\frac{4\pi i n_{d0}}{\omega} U_i^A S_j^A, \tag{B.68}$$

onde

$$U_i^A = \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{(p_{\parallel}/p_{\perp})^{\delta_{iz}} p_{\perp} p \sigma'_{\alpha}(p) f_{\alpha 0}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - l\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \Pi_{iz}^{l\alpha}, \tag{B.69}$$

$$\begin{aligned}
 S_j^A &= \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{\nu_{\alpha d}^0 \Pi_{zj}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - l\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left( \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{zj}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha} + \delta_{zj} i\nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\parallel}} \right] - \delta_{zj} \frac{1}{n_{d0}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3p \nu_{\alpha d}^0 \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\perp}}.
 \end{aligned} \tag{B.70}$$

## B.4 Componente $\epsilon_{ij}^F$

Utilizando a expressão (B.61) para  $\hat{f}_{\alpha}^F$  escrevemos a componente do tensor dielétrico relacionada à corrente de fotoemissão, de (B.1) e (B.2),

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ij}^F(\vec{k}, \omega) &= \frac{4\pi}{\omega} \frac{n_{d0}}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \sum_{\alpha} \delta_{\alpha e} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}^2} \int d^3p \sigma'_{\nu}(p) \\
 &\quad \times p_i [p_x H(p_x) \delta_{1,-n_x} + p_z H(p_z) \delta_{1,-n_z}] F(p, \xi) A_j^0 \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{\alpha d}^0(p)]\tau)},
 \end{aligned} \tag{B.71}$$

ou então

$$\epsilon_{ij}^F(\vec{k}, \omega) = U_i^F S_j^F, \tag{B.72}$$

onde

$$\begin{aligned}
 U_i^F &= -\frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \frac{(-e)}{am_e^2} \beta(\nu) \Lambda(\nu) S_a(\nu, \mu) \int d^3p \sigma'_{\nu}(p) F(p, \xi) \\
 &\quad \times [p_x H(p_x) \delta_{1,-n_x} + p_z H(p_z) \delta_{1,-n_z}] p_i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{ed}^0(p)]\tau)},
 \end{aligned} \tag{B.73}$$

$$S_j^F = \frac{4\pi i}{\omega} a n_{d0} A_j^0 = \frac{4\pi i}{\omega} a \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) A_j^{\alpha}. \tag{B.74}$$

A integral presente em  $S_j^F$  é a mesma em  $S_j^A$ , dada pela equação (B.65), e já foi resolvida na seção anterior. Para  $U_i^F$ , nota-se que teremos diferentes limites de integração no espaço de momentum devido à presença das funções de Heaviside. O termo com  $H(p_x)$  (para incidência de radiação perpendicular ao campo magnético) deverá ser integrado para  $p_x$  positivo ou em coordenadas esféricas nos limites  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$  e  $0 < \theta < 2\pi$ . Enquanto isso, o termo com  $H(p_z)$  (incidência de radiação paralela) deverá ser integrado nos intervalos  $0 < \varphi < 2\pi$  e  $0 < \theta < \pi/2$ .

Considerando primeiramente o caso de incidência de radiação perpendicular à direção do campo magnético ( $\delta_{1,-n_x} = 1$ ) realizamos a integral em  $\tau$  junto com o produto  $p_x p_i$  para cada uma das componentes

$$\begin{aligned} (i = x) : p_x p_x \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{ed}^0(p)]\tau)} &= ip_{\perp}^2 \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \frac{nJ_n J_l}{b_e} \frac{e^{i(n-l)\varphi} \cos(\varphi)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)}, \\ (i = y) : p_x p_y \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{ed}^0(p)]\tau)} &= p_{\perp}^2 \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J'_l \frac{e^{i(n-l)\varphi} \cos(\varphi)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)}, \\ (i = z) : p_x p_z \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{ed}^0(p)]\tau)} &= ip_{\perp} p_{\parallel} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J_l \frac{e^{i(n-l)\varphi} \cos(\varphi)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)}. \end{aligned}$$

Nota-se que a integração em  $\varphi$  será a mesma para as três componentes,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos(\varphi) e^{i(n-l)\varphi} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left( e^{i[n-(l+1)]\varphi} + e^{i[n-(l-1)]\varphi} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \delta_{n,l+1} + \frac{1}{n-l-1} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (n-l-1) \right]_{n \neq l+1} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \delta_{n,l-1} + \frac{1}{n-l+1} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (n-l+1) \right]_{n \neq l-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Para  $n = l \pm q$ , onde  $q$  é ímpar diferente de 1, as funções senos serão nulas. Porém, há infinitos valores do argumento para os quais as funções diferem de zero. Podemos escrever

$$\begin{aligned} \sin \left[ \frac{\pi}{2} (n-l-1) \right]_{n \neq l+1} &= \begin{cases} \frac{1}{n-l-1}, & n = 2 + l + 4m \\ -\frac{1}{n-l-1}, & n = 4 + l + 4m \end{cases}, \\ \sin \left[ \frac{\pi}{2} (n-l+1) \right]_{n \neq l-1} &= \begin{cases} \frac{1}{n-l+1}, & n = l + 4m \\ -\frac{1}{n-l+1}, & n = 2 + l + 4m \end{cases}, \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

onde  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Deste modo, escrevemos a integral (B.75) na seguinte forma:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos(\varphi) e^{i(n-l)\varphi} = \frac{\pi}{2} [\delta_{n,l+1} + \delta_{n,l-1}] + \frac{\delta_{n,l+4m} + \delta_{n,2+l+4m}}{1+4m} - \frac{\delta_{n,2+l+4m} + \delta_{n,4+l+4m}}{3+4m}. \quad (\text{B.77})$$

Para o caso de incidência de radiação paralela à direção do campo magnético ( $\delta_{1,-n_z} = 1$ ) a integral em  $\tau$  com o produto  $p_z p_i$  resulta em

$$\begin{aligned} (i = x) : p_z p_x \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{ed}^0(p)]\tau)} &= ip_{\parallel} p_{\perp} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \frac{n J_n J_l}{b_e} \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)}, \\ (i = y) : p_z p_y \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{ed}^0(p)]\tau)} &= p_{\parallel} p_{\perp} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J'_l \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)}, \\ (i = z) : p_z p_z \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - [\omega + i\nu_{ed}^0(p)]\tau)} &= ip_{\parallel}^2 \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} J_n J_l \frac{e^{i(n-l)\varphi}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)}, \end{aligned}$$

onde a integração em  $\varphi$  para todas componentes será dada por

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-l)\varphi} = 2\pi \delta_{nl}. \quad (\text{B.78})$$

Utilizando as relações

$$\begin{aligned} [(l-1)J_{l-1} + (l+1)J_{l+1}]J_l &= \frac{2l^2}{b_e} J_l^2 - 2J_l J'_l, \\ J_{l+4m} + J_{2+l+4m} &= \frac{2(1+l+4m)}{b_e} J_{1+l+4m}, \\ J_{2+l+4m} + J_{4+l+4m} &= \frac{2(3+l+4m)}{b_e} J_{3+l+4m}, \end{aligned}$$

substituímos esses resultados na equação (B.73),

$$\begin{aligned} U_x^F &= \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \frac{e}{am_e^2} \beta \Lambda S_a \sum_l \int dp_{\parallel} \int p_{\perp} dp_{\perp} \frac{\sigma'_{\nu}(p) F(p, \xi)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)} \\ &\quad \times \left\{ i\delta_{1,-n_z} p_{\parallel} p_{\perp} 2\pi \frac{l J_l^2}{b_e} + i\delta_{1,-n_x} p_{\perp}^2 \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2l^2}{b_e^2} J_l^2 - \frac{2J_l J'_l}{b_e} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_m \frac{2}{\pi b_e} \left( \frac{(l+4m)J_{l+4m} + (2+l+4m)J_{2+l+4m}}{1+4m} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{(2+l+4m)J_{2+l+4m} + (4+l+4m)J_{4+l+4m}}{3+4m} \right) J_l \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_y^F &= \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \frac{e}{am_e^2} \beta \Lambda S_a \sum_l \int dp_{\parallel} \int p_{\perp} dp_{\perp} \frac{\sigma'_{\nu}(p) F(p, \xi)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)} \\ &\quad \times \left\{ \delta_{1,-n_z} p_{\parallel} p_{\perp} 2\pi J_l J'_l + \delta_{1,-n_x} p_{\perp}^2 \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2l J_l J'_l}{b_e} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_m \frac{2}{\pi b_e} \left( \frac{2(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{2(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right) J'_l \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_z^F &= \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \frac{e}{am_e^2} \beta \Lambda S_a \sum_l \int dp_{\parallel} \int p_{\perp} dp_{\perp} \frac{\sigma'_{\nu}(p) F(p, \xi)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)} \\ &\quad \times \left\{ i\delta_{1,-n_z} p_{\parallel}^2 2\pi J_l^2 + i\delta_{1,-n_x} p_{\perp} p_{\parallel} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2l J_l^2}{b_e} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_m \frac{2}{\pi b_e} \left( \frac{2(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{2(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right) J_l \right] \right\}. \end{aligned}$$

Definindo as componentes tensoriais auxiliares

$$\Pi_{xx}^{le,F} = \frac{1}{\pi b_e} \sum_m \left( \frac{(l+4m)J_{l+4m} + (2+l+4m)J_{2+l+4m}}{1+4m} - \frac{(2+l+4m)J_{2+l+4m} + (4+l+4m)J_{4+l+4m}}{3+4m} \right) J_l, \quad (\text{B.79})$$

$$\Pi_{yx}^{le,F} = \frac{2}{\pi b_e} \sum_m \left( \frac{2(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{2(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right) J_l', \quad (\text{B.80})$$

$$\Pi_{zx}^{le,F} = \frac{2}{\pi b_e} \sum_m \left( \frac{2(1+l+4m)J_{1+l+4m}}{1+4m} - \frac{2(3+l+4m)J_{3+l+4m}}{3+4m} \right) J_l, \quad (\text{B.81})$$

recompondo a integral em  $\varphi$ , notando que para incidência paralela devemos reintroduzir o termo  $H(p_z)$  por causa da integração em  $0 < \theta < \pi/2$ , escrevemos a expressão para o tensor dielétrico associado à corrente fotoelétrica como (Galvão; Ziebell, 2012)

$$\epsilon_{ij}^F(\vec{k}, \omega) = U_i^F S_j^F, \quad (\text{B.82})$$

sendo

$$U_i^F = -\frac{1}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \frac{e}{2am_e^2} \beta \Lambda S_a \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \sigma'_\nu(p) F(p, \xi)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} - l\Omega_e + i\nu_{ed}^0(p)} \times \left[ \delta_{1,-n_x} p_{\perp} \left( \Pi_{ix}^{le} - i\delta_{ix} \frac{\Pi_{yz}^{le}}{b_e} + \Pi_{ix}^{le,F} \right) + \delta_{1,-n_z} H(p_z) 2p_{\parallel} \Pi_{iz}^{le} \right], \quad (\text{B.83})$$

$$S_j^F = -a \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int d^3p \frac{(\nu_{\alpha d}^0/\omega) \Pi_{zj}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - l\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left( \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{zj}} \left[ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} \Lambda_{\alpha} + \delta_{zj} i\nu_{\alpha d}^0(p) \frac{\Lambda_{\alpha}}{\omega p_{\parallel}} \right] + \delta_{zj} \frac{a}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{\nu_{\alpha d}^0}{\omega} \frac{\Lambda_{\alpha}}{p_{\perp}}. \quad (\text{B.84})$$

# APÊNDICE C – Tensor dielétrico para propagação paralela e distribuições Maxwellianas

Vamos calcular o tensor dielétrico para o caso de propagação paralela ( $\vec{k} = k_{\parallel}\hat{e}_z$ ) com elétrons e íons no equilíbrio descritos pela distribuição Maxwelliana

$$f_{\alpha 0}(p) = \frac{n_{\alpha 0}}{(2\pi m_{\alpha} k_B T_{\alpha})^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_{\alpha} k_B T_{\alpha}}\right). \quad (\text{C.1})$$

Com isso, o operador dado pela equação (4.72) fica

$$\Lambda_{\alpha}(f_{\alpha 0}) = p_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} - p_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} = p_{\parallel} \left(\frac{-2p_{\perp}}{2m_{\alpha} k_B T_{\alpha}}\right) f_{\alpha 0} - p_{\perp} \left(\frac{-2p_{\parallel}}{2m_{\alpha} k_B T_{\alpha}}\right) f_{\alpha 0} = 0, \quad (\text{C.2})$$

resultando para a parte “convencional” do tensor dielétrico

$$\epsilon_{ij}^C = \delta_{ij} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{p_{\parallel}^{\delta_{iz}} p_{\perp}^{\delta_{ix} + \delta_{iy}} \Pi_{ij}^{l\alpha}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - l\Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}}\right)^{\delta_{jz}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}. \quad (\text{C.3})$$

Vamos agora calcular cada uma das componentes  $i, j = x, y, z$ .

- $\epsilon_{xx}^C$ : Para este termo temos a componente do tensor  $\Pi_{xx}^{l\alpha} = l^2 J_l^2 / b_{\alpha}^2$ . Utilizando a identidade das funções de Bessel

$$J_{-l} = (-1)^l J_l \quad \Rightarrow \quad J_{-l}^2 = J_l^2, \quad (\text{C.4})$$

podemos escrever o termo do tensor utilizando apenas funções de Bessel de ordem positiva fazendo

$$\Pi_{xx}^{l\alpha} = \frac{l^2 J_{|l|}^2}{b_{\alpha}^2}. \quad (\text{C.5})$$

Para  $l = 0$ ,  $\Pi_{xx}^{0\alpha} = 0$ . Utilizando a expansão para pequeno raio de Larmor ( $|b_{\alpha}| \ll 1$ ) podemos fazer a seguinte aproximação:

$$J_l \simeq \frac{b_{\alpha}^l}{2^l (l!)}, \quad (\text{C.6})$$

então,

$$\Pi_{xx}^{l\alpha} = \frac{l^2 b_{\alpha}^{2(|l|-1)}}{2^{2|l|} (|l|!)^2}. \quad (\text{C.7})$$

Nota-se que para  $|l| > 1$  o termo do tensor é proporcional a alguma ordem de  $b_{\alpha}$ , porém, para propagação paralela temos que  $k_{\perp} = 0$ , resultando em  $b_{\alpha} = 0$ , de modo que da



soma em  $l$  irá restar apenas os termos correspondentes a  $l = \pm 1$ . Portanto, a equação (C.3) fica

$$\epsilon_{xx}^C = 1 + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega n_{\alpha 0}} \int d^3 p p_{\perp} \left[ \frac{1}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} + \Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} + \frac{1}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - \Omega_{\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}. \quad (\text{C.8})$$

Definindo

$$\hat{I}_{\alpha}^s = \frac{1}{n_{\alpha 0}} \int d^3 p \frac{p_{\perp}}{1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} + s \frac{\Omega_{\alpha}}{\omega} + i \frac{\nu_{\alpha d}^0(p)}{\omega}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}, \quad (\text{C.9})$$

onde  $s = \pm 1$ , escrevemos este termo do tensor dielétrico na forma

$$\epsilon_{xx}^C = 1 + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} [\hat{I}_{\alpha}^{-} + \hat{I}_{\alpha}^{+}]. \quad (\text{C.10})$$

- $\epsilon_{yy}^C$ : Neste termo temos  $\Pi_{yy}^{l\alpha} = J_l'^2$  que, utilizando a identidade

$$J'_{-l} = (-1)^l J'_l \quad \Rightarrow \quad J_{-l}'^2 = J_l'^2 \quad (\text{C.11})$$

e a expansão (C.6), pode ser escrito como

$$\Pi_{yy}^{l\alpha} = J_{|l|}'^2 = \frac{l^2 b_{\alpha}^{2(|l|-1)}}{2^{2|l|} (|l|!)^2}, \quad (\text{C.12})$$

o qual é idêntico à componente  $\Pi_{xx}^{l\alpha}$ . Com isso, é fácil notar que esta componente do tensor dielétrico será igual à equação (C.10), ou seja,

$$\epsilon_{yy}^C = \epsilon_{xx}^C. \quad (\text{C.13})$$

- $\epsilon_{zz}^C$ : Para este termo temos, utilizando a identidade (C.4),  $\Pi_{zz}^{l\alpha} = J_l^2 = J_{-l}^2$  que para pequeno raio de Larmor fica

$$\Pi_{zz}^{l\alpha} = J_{|l|}^2 = \frac{b_{\alpha}^{2|l|}}{2^{2|l|} (|l|!)^2}. \quad (\text{C.14})$$

Nesse caso, teremos termos nulos para  $|l| > 0$  devido à propagação paralela ( $b_{\alpha} = 0$ ). Assim, o único termo não nulo na soma em  $l$  será para  $l = 0$ , para o qual  $\Pi_{zz}^{0\alpha} = 1$ . Portanto, a equação (C.3) fica

$$\epsilon_{zz}^C = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 n_{\alpha 0}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel}}{1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} + i \frac{\nu_{\alpha d}^0(p)}{\omega}} \left( \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}. \quad (\text{C.15})$$

Definindo

$$\hat{I}_{\alpha}^0 = \frac{1}{n_{\alpha 0}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel}^2 / p_{\perp}}{1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \omega} + i \frac{\nu_{\alpha d}^0(p)}{\omega}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}, \quad (\text{C.16})$$

escrevemos este termo do tensor na forma

$$\epsilon_{zz}^C = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \hat{I}_{\alpha}^0. \quad (\text{C.17})$$

- $\epsilon_{xy}^C$  e  $\epsilon_{yx}^C$ : Nota-se que para estas componentes temos  $\Pi_{xy}^{l\alpha} = -\Pi_{yx}^{l\alpha}$  o que resulta em  $\epsilon_{xy}^C = -\epsilon_{yx}^C$ . Considerando

$$\Pi_{xy}^{l\alpha} = i \frac{l}{b_\alpha} J_l J'_l \quad (\text{C.18})$$

e fazendo uso novamente das identidades

$$\begin{aligned} J_{-l} &= (-1)^l J_l \quad , \quad J'_{-l} = (-1)^l J'_l, \\ J_{-l} J'_{-l} &= (-1)^{2l} J_l J'_l = J_l J'_l, \end{aligned}$$

podemos escrever, com a aproximação de pequeno raio de Larmor,

$$\Pi_{xy}^{l\alpha} = i \frac{l}{b_\alpha} J_{|l|} J'_{|l|} = i \frac{l}{b_\alpha} \frac{b_\alpha^{|l|}}{2^{|l|} (|l|!)} \frac{|l| b_\alpha^{|l|-1}}{2^{|l|} (|l|!)} = i l \frac{|l| b_\alpha^{2(|l|-1)}}{2^{2|l|} (|l|!)^2} \quad (\text{C.19})$$

Como anteriormente, teremos termos não nulos apenas para  $l = \pm 1$ . Assim,

$$\epsilon_{xy}^C = \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 n_{\alpha 0}} \int d^3 p p_\perp \left[ \frac{-i/4}{1 - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} + \frac{\Omega_\alpha}{\omega} + i \frac{\nu_{\alpha d}^0(p)}{\omega}} + \frac{i/4}{1 - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} - \frac{\Omega_\alpha}{\omega} + i \frac{\nu_{\alpha d}^0(p)}{\omega}} \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp}.$$

Utilizando a definição (C.9) ficamos com

$$\epsilon_{xy}^C = -\epsilon_{yx}^C = -\frac{i}{4} \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} [\hat{I}_\alpha^+ - \hat{I}_\alpha^-] \quad (\text{C.20})$$

- $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{zx}$ : Para estes termos a componente do tensor  $\Pi_{xz}^{l\alpha} = \Pi_{zx}^{l\alpha} = l J_l^2 / b_\alpha$ . Seguindo a mesma abordagem escrevemos

$$\Pi_{xz}^{l\alpha} = \frac{l J_{|l|}^2}{b_\alpha} = \frac{l b_\alpha^{2(|l|-1)}}{2^{2|l|} (|l|!)^2}, \quad (\text{C.21})$$

o qual é evidentemente nulo para  $l = 0$ . Para  $|l| > 0$  teremos termos proporcionais a uma potência de  $b_\alpha$ , o qual também é nulo para propagação paralela, ou seja,

$$\Pi_{xz}^{l\alpha} = 0 \quad \forall l, \quad (\text{C.22})$$

resultando em

$$\epsilon_{xz}^C = \epsilon_{zx}^C = 0. \quad (\text{C.23})$$

- $\epsilon_{yz}$  e  $\epsilon_{zy}$ : Aqui, temos  $\Pi_{yz}^{l\alpha} = -\Pi_{zy}^{l\alpha} = -i J_l J'_l$ , de modo que

$$\Pi_{yz}^{l\alpha} = -i J_{|l|} J'_{|l|} = -i \frac{|l| b_\alpha^{2|l|-1}}{2^{2|l|} (|l|!)^2}. \quad (\text{C.24})$$

Como antes, nota-se que  $\Pi_{yz}^{l\alpha} = 0 \quad \forall l$ , resultando em

$$\epsilon_{yz}^C = \epsilon_{zy}^C = 0. \quad (\text{C.25})$$

Portanto, a componente do tensor dielétrico relacionada à função  $\hat{f}_\alpha^C$  para o caso de propagação paralela e distribuições Maxwellianas fica

$$\tilde{\epsilon}^C = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^C & \epsilon_{xy}^C & 0 \\ -\epsilon_{xy}^C & \epsilon_{xx}^C & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz}^C \end{pmatrix}, \quad (\text{C.26})$$

onde  $\epsilon_{xx}^C$ ,  $\epsilon_{xy}^C$  e  $\epsilon_{zz}^C$  são dadas pelas equações (C.10), (C.20) e (C.17), respectivamente.

Para a componente  $\epsilon_{ij}^A$  do tensor dielétrico observamos que no caso de propagação paralela os termos  $\Pi_{iz}^{l\alpha}$  e  $\Pi_{zj}^{l\alpha}$  serão nulos para  $i, j \neq z$ , como visto anteriormente. Então, pelas equações (4.76) e (4.77), temos que

$$\epsilon_{ij}^A = 0 \quad \forall i, j \neq z \quad (\text{C.27})$$

independentemente da forma da função distribuição das espécies do plasma.

Ao considerar distribuições Maxwellianas, teremos  $\Lambda_\alpha(f_{\alpha 0}) = 0$  e o único termo não nulo para esta componente do tensor dielétrico será

$$\epsilon_{zz}^A = -\frac{4\pi i n_{d0}}{\omega} U_z^A S_z^A, \quad (\text{C.28})$$

onde

$$U_z^A = \frac{i}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 + i\nu_{F1}} \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha^2} \int d^3p \frac{p_{\parallel} p \sigma'_\alpha(p) f_{\alpha 0}}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)}, \quad (\text{C.29})$$

$$S_z^A = \frac{1}{n_{d0}} \sum_\alpha q_\alpha^2 \int d^3p \frac{\nu_{\alpha d}^0(p)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \left( \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}. \quad (\text{C.30})$$

Para a componente  $\epsilon_{ij}^F$  começamos por considerar que a radiação se propaga paralelamente à direção do campo magnético ambiente, de modo que  $\delta_{1,-n_x} = 0$  e  $\delta_{1,-n_z} = 1$ . Deste modo, vemos que, similarmente ao caso de  $\epsilon_{ij}^A$ ,

$$\epsilon_{ij}^F = 0 \quad \forall i, j \neq z \quad (\text{C.31})$$

para propagação paralela das ondas, resultado independente da forma de  $f_{\alpha 0}$ . Agora, considerando  $f_{\alpha 0}$  Maxwelliana, ficamos com a seguinte componente não nula do tensor

$$\epsilon_{zz}^F = U_z^F S_z^F, \quad (\text{C.32})$$

onde

$$U_z^F = -\frac{1}{\omega + i\nu_{ch} + i\nu_1 - i\nu_{P1}} \frac{e}{2am_e^2} \beta \Lambda S_a \int d^3p \frac{p_{\parallel} \sigma'_\nu(p) F(p, \xi)}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e} + i\nu_{ed}^0(p)} 2p_{\parallel} H(p_z), \quad (\text{C.33})$$

$$S_z^F = -a \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_\alpha}{n_{\alpha 0}} \int d^3p \frac{[\nu_{\alpha d}^0(p)/\omega]}{\omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_\alpha} + i\nu_{\alpha d}^0(p)} \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}}, \quad (\text{C.34})$$

e  $\sigma'_\nu(p)$  é dado pela equação (B.51).

Portanto, para propagação paralela ao campo magnético ambiente, distribuições Maxwellianas de íons e elétrons, e radiação se propagando paralelamente ao campo magnético, o tensor dielétrico para um plasma empoeirado homogêneo magnetizado assume a forma

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^C & \epsilon_{xy}^C & 0 \\ -\epsilon_{xy}^C & \epsilon_{xx}^C & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz}^C + \epsilon_{zz}^A + \epsilon_{zz}^F \end{pmatrix}. \quad (\text{C.35})$$

## C.1 Cálculo das integrais $\hat{I}_\alpha$

Nesta seção faremos o cálculo das integrais  $\hat{I}_\alpha^s$  e  $\hat{I}_\alpha^0$  na aproximação em que substituímos os termos dependentes de momentum  $\nu_{\alpha d}^0(p)$  por suas médias no espaço de momentum,

$$\nu_\alpha = \frac{1}{n_{\alpha 0}} \int d^3p \nu_{\alpha d}^0(p) f_{\alpha 0}, \quad (\text{C.36})$$

considerando distribuições Maxwellianas para  $f_{\alpha 0}$ .

Da equação (4.15),

$$\nu_{\alpha d}^0(p) = \pi a^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq \left(1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{ap^2}\right) H\left(1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha q}{ap^2}\right) \frac{p}{m_\alpha} f_{d0}(q), \quad (\text{C.37})$$

utilizando  $f_{d0}(q) = n_{d0} \delta(q - Q_0)$ ,

$$\nu_{\alpha d}^0(p) = \pi a^2 n_{d0} \frac{p}{m_\alpha} \left(1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha Q_0}{ap^2}\right) H\left(1 - \frac{2m_\alpha q_\alpha Q_0}{ap^2}\right), \quad (\text{C.38})$$

substituindo em (C.36), utilizando a distribuição Maxwelliana (C.1) para  $f_{\alpha 0}$  e fazendo uso da simetria esférica  $\int d^3p = 4\pi \int p^2 dp$ ,

$$\nu_\alpha = \frac{4\pi^2 a^2 n_{d0}}{m_\alpha (2\pi m_\alpha k_B T_\alpha)^{3/2}} \int_0^\infty dp p (p^2 - C_\alpha) \exp\left(-\frac{p^2}{2m_\alpha k_B T_\alpha}\right) H(p^2 - C_\alpha), \quad (\text{C.39})$$

onde foi definido

$$C_\alpha = \frac{2m_\alpha q_\alpha Q_0}{a}. \quad (\text{C.40})$$

Para  $\alpha = i$ , onde  $q_\alpha = e$ , teremos

$$C_i = \frac{2m_\alpha e Q_0}{a},$$

de modo que se  $Q_0 \leq 0$  a função de Heaviside  $H(p^2 - C_i) = 1$  sempre, resultando após integração

$$\nu_i = 2\sqrt{2\pi} a^2 n_{d0} v_{Ti} \left(1 - \frac{eQ_0}{ak_B T_i}\right), \quad Q_0 \leq 0, \quad (\text{C.41})$$

onde  $v_{T\alpha} = (k_B T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$  é a velocidade térmica das partículas da espécie  $\alpha$ . Agora, se  $Q_0 > 0$  a função de Heaviside será nula para  $p < \sqrt{C_i}$ , portanto

$$\nu_i = \frac{4\pi^2 a^2 n_{d0}}{m_i (2\pi m_i k_B T_i)^{3/2}} \int_{\sqrt{C_i}}^{\infty} dp p (p^2 - C_i) \exp\left(-\frac{p^2}{2m_i k_B T_i}\right),$$

fazendo a integração,

$$\nu_i = 2\sqrt{2\pi} a^2 n_{d0} v_{T_i} \exp\left(-\frac{eQ_0}{ak_B T_i}\right), \quad Q_0 > 0. \quad (\text{C.42})$$

Para  $\alpha = e$  teremos

$$C_e = -\frac{2m_\alpha e Q_0}{a},$$

de modo que no caso onde  $Q_0 < 0$  a função  $H(p^2 - C_e)$  será nula para  $p < \sqrt{C_e}$ , então, fazendo a integração em  $p$  de  $\sqrt{C_e}$  a  $\infty$  como anteriormente,

$$\nu_e = 2\sqrt{2\pi} a^2 n_{d0} v_{T_e} \exp\left(\frac{eQ_0}{ak_B T_e}\right), \quad Q_0 < 0. \quad (\text{C.43})$$

Enquanto que para o caso de  $Q_0 \geq 0$ ,  $H(p^2 - C_e) = 1$  sempre resultando em

$$\nu_e = 2\sqrt{2\pi} a^2 n_{d0} v_{T_e} \left(1 + \frac{eQ_0}{ak_B T_e}\right), \quad Q_0 \geq 0. \quad (\text{C.44})$$

Então, fazendo uso destas expressões no lugar de  $\nu_{\alpha d}^0(p)$  em (C.9),

$$\begin{aligned} \hat{I}_\alpha^s &= \frac{1}{n_{\alpha 0}} \int d^3 p \frac{p_\perp}{1 - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} + s \frac{\Omega_\alpha}{\omega} + i \frac{\nu_\alpha}{\omega}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} \\ &= \frac{1}{n_{\alpha 0}} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^{\infty} dp_\perp p_\perp \frac{p_\perp}{1 - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} + s \frac{\Omega_\alpha}{\omega} + i \frac{\nu_\alpha}{\omega}} \left(-\frac{p_\perp}{m_\alpha k_B T_\alpha} f_{\alpha 0}\right). \end{aligned}$$

A integral na componente perpendicular é facilmente resolvida,

$$\int_0^{\infty} dp_\perp p_\perp^3 \exp\left(-\frac{p_\perp^2}{2m_\alpha k_B T_\alpha}\right) = 2(m_\alpha k_B T_\alpha)^2,$$

restando a integral para a componente paralela, onde fazemos a seguinte substituição de variáveis

$$y = \frac{p_\parallel}{\sqrt{2m_\alpha k_B T_\alpha}},$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \frac{\exp\left(-\frac{p_\parallel^2}{2m_\alpha k_B T_\alpha}\right)}{1 - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} + s \frac{\Omega_\alpha}{\omega} + i \frac{\nu_\alpha}{\omega}} = -\frac{m_\alpha \omega}{k_\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{y - \frac{\omega + s\Omega_\alpha + i\nu_\alpha}{k_\parallel \sqrt{2} v_{T_\alpha}}}.$$

Definindo

$$\hat{\zeta}_\alpha^s = \frac{\omega + s\Omega_\alpha + i\nu_\alpha}{k_\parallel \sqrt{2} v_{T_\alpha}}, \quad \zeta_\alpha^0 = \frac{\omega}{\sqrt{2} v_{T_\alpha} k_\parallel}, \quad (\text{C.45})$$

e introduzindo a função de dispersão de plasma, ou função de Fried & Conte (Fried; Conte, 1961), definida como

$$Z(\hat{\zeta}_\alpha^s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{y - \hat{\zeta}_\alpha^s}, \quad \text{Im } \hat{\zeta}_\alpha^s > 0, \quad (\text{C.46})$$

obtemos

$$\hat{I}_\alpha^s = 2\zeta_\alpha^0 Z(\hat{\zeta}_\alpha^s). \quad (\text{C.47})$$

O cálculo da integral  $\hat{I}_\alpha^0$  é feito de forma semelhante. Da equação (C.16) teremos, para distribuições Maxwellianas,

$$\hat{I}_\alpha^0 = -\frac{1}{n_{\alpha 0}} \frac{2\pi}{m_\alpha k_B T_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \int_0^\infty dp_\perp p_\perp \frac{p_\parallel^2}{1 - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} + i \frac{\nu_\alpha}{\omega}} f_{\alpha 0}. \quad (\text{C.48})$$

Sendo que a integral na componente perpendicular é

$$\int_0^\infty dp_\perp p_\perp \exp\left(\frac{-p_\perp^2}{2m_\alpha k_B T_\alpha}\right) = m_\alpha T_\alpha,$$

e fazendo novamente a substituição de variáveis (C.1) teremos para a integral na componente paralela

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp_\parallel \frac{p_\parallel^2 \exp\left(-\frac{p_\parallel^2}{2m_\alpha k_B T_\alpha}\right)}{1 - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} + i \frac{\nu_\alpha}{\omega}} &= -\frac{2m_\alpha^2 T_\alpha \omega}{k_\parallel} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{y^2 e^{-y^2}}{y - \frac{\omega + i\nu_\alpha}{k_\parallel \sqrt{2}v_{T_\alpha}}} \\ &= -\frac{2\sqrt{\pi} m_\alpha^2 T_\alpha \omega}{k_\parallel} \left[ \hat{\zeta}_\alpha^0 + (\hat{\zeta}_\alpha^0)^2 Z(\hat{\zeta}_\alpha^0) \right], \end{aligned}$$

onde foi definido

$$\hat{\zeta}_\alpha^0 = \frac{\omega + i\nu_\alpha}{k_\parallel \sqrt{2}v_{T_\alpha}}, \quad (\text{C.49})$$

e foi utilizada a seguinte propriedade da função de Fried & Conte:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{y^2 e^{-y^2}}{y - z} = z + z^2 Z(z). \quad (\text{C.50})$$

Com isso, escrevemos a equação (C.48) como

$$\hat{I}_\alpha^0 = 2\zeta_\alpha^0 \hat{\zeta}_\alpha^0 \left[ 1 + \hat{\zeta}_\alpha^0 Z(\hat{\zeta}_\alpha^0) \right], \quad (\text{C.51})$$

onde

$$\zeta_\alpha^0 = \frac{\omega}{\sqrt{2}v_{T_\alpha} k_\parallel}. \quad (\text{C.52})$$